Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Alguns Tópicos em Análise Funcional e Aplicações em Equações Diferenciais Parciais

por

Ivanildo Severino Ferreira Junior

Junho/2023
João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Curso de Licenciatura em Matemática

Alguns Tópicos em Análise Funcional e Aplicações em Equações Diferenciais Parciais

por

Ivanildo Severino Ferreira Junior

sob a orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Junho/2023

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F383a Ferreira Junior, Ivanildo Severino.
Alguns tópicos em análise funcional e aplicações em equações diferenciais parciais / Ivanildo Severino Ferreira Junior. - João Pessoa, 2023.
53 p. : il.

Orientação: Uberlandio Batista Severo.
TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Análise funcional. 2. Espaços de Sobolev. 3. Equações diferenciais parciais. I. Severo, Uberlandio Batista. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 51(043.2)

Elaborado por Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB-15/113

Análise Funcional e Aplicações as Equações Diferenciais Parciais

por

Ivanildo Severino Ferreira Junior

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

COMISSÃO EXAMINADORA

Uberlandio Batista Severo.

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB (Orientador)

Everaldo S. Medeiros.

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB

Rodrigo Genuino Clemente

Prof. Dr. Rodrigo Genuino Clemente - UFRPE

13/ Junho/2023

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a minha família, em especial a minha mãe Maria da Penha Arcanjo que me ajudou, me apoiou em todas as minhas decisões. Ao meu pai Ivanildo Severino Ferreira que sempre fez o possível para que eu pudesse estudar mesmo ele não tendo estudado. Porém, sempre foi presente na minha caminhada. A minha irmã Ivanilda Andriele Arcanjo Ferreira que desde a minha aprovação no ENEM se posicionou ao meu favor.

Gostaria de agradecer a todos os amigos que fiz, que me ajudaram nos momentos em que tinha dúvidas durante todos os anos da minha graduação, pelas experiencias vividas juntos, pelos conselhos dos amigos mais velhos. Dentre eles, gostaria de destacar Joémerson Maia que me ajudou desde o começo até o fim da minha graduação, aos colegas de turma Elton Lucas, Vinícius Mangueira e Ruy Barbosa. Aos colegas do Milênio, que sempre me aconselharam, em especial os amigos Julian Alexandre e Marcelo Miranda que me ajudaram bastante.

Gostaria de agradecer ao professor Uberlandio Severo do qual fui aluno no primeiro semestre da graduação e veio a ser o meu orientador, papel esse que executou com maestria, desde a motivação para os estudos, as dúvidas e os conselhos. Ressalto os professores Daniel Pellegrino, Everaldo Medeiros, Nacib Gurguel, Napoleon Tuesta, Flank Bezerra e Aurélio Menegon. E a todos os outros que contribuíram com a minha formação.

A minha família.

Resumo

Neste trabalho, nossa intensão foi estudar alguns tópicos relacionados à teoria da Análise Funcional e, em seguida , aplica-los em alguns problemas de Equações Diferenciais Parciais (EDP's). Para isto, foi necessário abordarmos um pouco da teoria moderna das EDP's, como o conceito de derivada fraca, a definição de Espaços de Sobolev, bem como suas propriedades e teoremas de imersão. De posse dessas ferramentas, estudamos a existência e unicidade de soluções fracas para alguns problemas.

Palavras-Chave: Análise Funcional, Espaços de Sobolev, Equações Diferenciais Parciais.

Abstract

In this work, our intention was to study some topics related to the theory of Functional Analysis and then apply them in some problems of Partial Differential Equations (PDE's). For this, it was necessary to address a little of the modern theory of PDE's, such as the concept of weak derivative, the definition of Sobolev Spaces, as well as its properties and immersion theorems. With these tools in hand, we study the existence and uniqueness of weak solutions to some problems.

Keywords: Functional Analysis, Sobolev Spaces, Partial Differential Equations.

Sumário

Introdução **8**

1 Preliminares **9**

1.1 Alguns Resultados de Análise Funcional 9

1.1.1 Espaços normados e espaços de Banach 9

1.1.2 Aplicações Lineares Limitadas 16

1.1.3 Funcionais Lineares 18

1.1.4 Espaços reflexivos 20

2 Alguns Resultados em Espaços de Hilbert **23**

2.1 Dualidade 34

2.1.1 Os teoremas de Stampacchia e Lax-Milgram 35

3 Aplicações em Equações Diferenciais Parciais **43**

3.0.1 Definições e Notações Básicas 43

3.0.2 Espaços de Sobolev 46

3.0.3 Imersão Contínua de Espaços de Sobolev 47

3.0.4 Resolvendo algumas EDP's 48

Introdução

Nos tempos atuais, as pesquisas em matemática fazem uso de técnicas modernas. Daí, surge a necessidade de desenvolver os conceitos e resultados da Análise Funcional, devido à sua grande aplicabilidade. Nosso principal objetivo é utilizar os conceitos e ferramentas adquirida na Analise Funcional e aplicar esses conhecimentos em outra área matemática. A área escolhida nesse trabalho foi as Equações Diferenciais Parciais Para isso, desenvolvemos a teoria de Analise Funcional bem como alguns resultados modernos da teoria das EDP's como solução fraca e os espaços de Sobolev. Com isso foi possível resolver alguns problemas de EDP.

Então fizemos as seguintes escolhas da ordem dos assuntos a serem abordados no trabalho.

No Capítulo 1, começamos a nossa caminhada pela Análise Funcional, com as primeiras definições e ideias, como a noção de norma, aplicação limitada e exemplos de espaços de Banach.

Já no Capítulo 2 estudamos uma classe particular de espaços de Banach na qual chamamos de espaços de Hilbert, que são espaços completo com um produto interno, que possui uma grande aplicabilidade. Em particular abordamos o Teorema de Lax-Milgram que iremos aplicar no Capítulo seguinte.

Por fim no Capítulo 3, desenvolvemos um pouco da teria moderna de EDP com a ideia de derivada fraca e solução fraca. Daí juntando todos os resultados conseguiremos resolver algumas EDP's via teoremas de Análise Funcional.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos, ver as primeiras definições para espaços de dimensão infinita, mais precisamente, os espaços de Banach, veremos suas propriedades e alguns resultados que nos ajudarão na nossa teoria, fazendo uma abordagem moderna dos conceitos de norma, continuidade, convergência, completude e algumas desigualdades clássicas que serão de grande importância.

1.1 Alguns Resultados de Análise Funcional

1.1.1 Espaços normados e espaços de Banach

Nesta primeira seção, daremos a definição de norma e aplicação linear contínua, as quais serão importantes ao longo de toda a teoria desenvolvida aqui.

Consideremos espaços vetoriais X sobre o corpo $\mathbb{F}$, onde $\mathbb{F}$ é o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

Definição 1.1.1. *Uma* ***seminorma*** *em X é uma função $x \longrightarrow \|x\|$, de X em $[0, \infty)$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

- *(Desigualdade triangular) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para quaisquer $x, y \in X$;*
- *(Homogeneidade) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, para qualquer $x \in X$ e para todo $\lambda \in \mathbb{F}$.*

Se $\lambda = 0$, então a homogeneidade da seminorma implica que $\|0\| = 0$, ou seja, a norma do vetor nulo em X é igual a 0. Uma seminorma em um espaço vetorial é chamada de ***norma*** *se $\|x\| = 0$ somente no caso em que $x = 0$, ou seja, se o único vetor com norma igual a 0 é o vetor nulo. Um espaço vetorial equipado com uma norma é chamado de* ***espaço vetorial normado****.*

Exemplo 1.1.1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}, \; n = 1, 2, \ldots$

Em um espaço vetorial normado X, a norma fornece uma métrica natural, a saber

$$\rho(x, y) := \|x - y\|$$

Assim, todo espaço vetorial normado é um espaço métrico com a métrica induzida pela norma. A topologia induzida em X por essa métrica ρ é chamada de **topologia da norma** e, a partir dessa topologia, podemos definir os conceitos de bola aberta, bola fechada, conjunto aberto, conjunto fechado, conjunto compacto, entre outros.

Definição 1.1.2. *Um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ que é também um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma é chamado de **Espaço de Banach**. Ou seja, X é um espaço de Banach se, e somente se, toda sequência de Cauchy em X converge para um elemento de X.*

Lembramos que:

- Uma sequência $(x_n) \subset X$ é dita **convergente** para um ponto $x \in X \Leftrightarrow \|x_n - x\| \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

- Uma sequência $(x_n) \subset X$ é dita de Cauchy se dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, para todo $n, m \geq n_0$.

Exemplo 1.1.2. *Os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ (sobre $\mathbb{R}$) e $\mathbb{C}^n$ (sobre $\mathbb{C}$) são espaços de Banach, com suas normas usuais.*

Exemplo 1.1.3. *Tomando um conjunto compacto A em um espaço métrico M, seja*

$$C(A) := \{f : A \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\}$$

o espaço vetorial das funções contínuas em A com valores em $\mathbb{R}$. Como A é compacto, a função f atinge um valor máximo em A. Definamos a seguinte norma em $C(A)$:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in A} |f(x)|$$

Então, o espaço $C(A)$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$ é completo. Isso pode ser demonstrado usando seguinte fato: se sequência uma de funções contínuas converge uniformemente para uma certa função, então essa função é contínua.

Um subespaço de um espaço de Banach E é também de Banach se, e somente se, é fechado em E.

Demonstração: (Volta) Suponhamos que X seja fechado em E. Seja $(x_n) \subset X$ uma sequência de Cauchy. Logo, (x_n) é uma sequência de Cauchy em E, assim $\lim x_n \in E$. Como X é fechado, segue que $\lim x_n \in X$. Portanto, X é completo.

(Ida) Seja $X \subset E$ um espaço de Banach e seja $(x_n) \subset X$ uma sequência convergente. Logo, em particular, (x_n) é de Cauchy, então $\lim x_n \in X$. Portanto, X é fechado.

Definição 1.1.3. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço $l^p(n)$ como sendo o espaço $\mathbb{R}^n$ munido da norma*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \; x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

se $1 \leq p < \infty$. Se $p = 1$, então essa é a norma da soma em $\mathbb{R}^n$ e, se $p = 2$, então essa é a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$. Para $p = \infty$, define-se

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Proposição 1.1.1. *$l^p(n)$ é um espaço vetorial normado.*

Demonstração: A demonstração das propriedades (i) e (ii) da definição de norma é bem direta. Já a desigualdade triangular da norma $\|\cdot\|_p$,a saber

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

é chamada **Desigualdade de Minkowski**[1] e a demonstração será feita recorrendo à **Desigualdade de Hölder**[2]:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}, \quad \text{onde } p > 1 \text{ e } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

[1]Hermann Minkowski (1864-1909), matemático alemão.
[2]Otto Ludwig Hölder (1859-1937), matemático alemão.

O número p' é chamado **expoente conjugado** de p, o qual é dado por $p' = \dfrac{p}{p-1}$. Logo.

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)|x_i + y_i|^{p-1}}_{\text{pois } |x_i+y_i| \leq |x_i|+|y_i|} &= \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leq \|x\|_p \left\| \left(|x_1 + y_1|^{p-1}, \ldots, |x_n + y_n|^{p-1} \right) \right\|_{\frac{p}{p-1}} \\
&\qquad + \|y\|_p \left\| \left(|x_1 + y_1|^{p-1}, \ldots |x_n + y_n|^{p-1} \right) \right\|_{\frac{p}{p-1}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} (\|x\|_p + \|y\|_p)
\end{aligned},$$

Então, dividindo os dois lados da desigualdade acima por

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{1-\frac{p-1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad &\Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p \\
&\Rightarrow \quad \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.
\end{aligned}$$

A Desigualdade de Hölder utilizada na demonstração acima segue da Desigualdade de Young[3]:

Proposição 1.1.2 (Desigualdade de Young)**.** *Se* $a, b \geq 0$*,* $p > 1$ *e* $p' = \dfrac{p}{p-1}$*, então*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}.$$

Demonstração: Se $a = 0$ ou $b = 0$, então a desigualdade é trivial. Suponha $a, b > 0$. Daí,

$$a \cdot b = e^{\ln(a \cdot b)} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{p'} \ln b^{p'}}.$$

Como a função exponencial é convexa e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, temos que

$$a \cdot b = e^{\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{p'} \ln b^{p'}} \leq \frac{1}{p} \cdot e^{\ln a^p} + \frac{1}{p'} \cdot e^{\ln b^{p'}} = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}.$$

[3]William Henry Young (1863-1942), matemático inglês.

Proposição 1.1.3 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in l^p(n)$*. Logo:*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}, \quad \textit{onde } p > 1 \textit{ e } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Demonstração: Tomemos $a = \left|\frac{x_i}{\|x\|_p}\right|$ e $b = \left|\frac{y_i}{\|y\|_{p'}}\right|$. Pela desigualdade de Young (Proposição 1.1.2), para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$; temos

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \Rightarrow \left|\frac{x_i}{\|x\|_p}\right| \cdot \left|\frac{y_i}{\|y\|_{p'}}\right| \leq \frac{1}{p}\left|\frac{x_i}{\|x\|_p}\right|^p + \frac{1}{p'}\left|\frac{y_i}{\|y\|_{p'}}\right|^{p'} \Rightarrow \frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'} \cdot \frac{|y_i|^{p'}}{\|y\|_{p'}^{p'}}$$

Somando de $i = 1$ até $i = n$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^{p'}}{\|y\|_{p'}^{p'}} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'} \cdot \frac{\|y\|_{p'}^{p'}}{\|y\|_{p'}^{p'}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|_p \|y\|_{p'}} \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}$$

Proposição 1.1.4. $l^p(n)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração: Sabemos de Análise no $\mathbb{R}^n$ que todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes. Desde que $\mathbb{R}^n$ é completo com a norma euclidiana, então $\mathbb{R}^n$ é completo com qualquer norma. Logo, em particular; $\mathbb{R}^n$ é completo com a norma $\|\cdot\|_p$. Então, $l^p(n)$ é um espaço de Banach.

Exemplo 1.1.4. *Seja* $p \in [1, \infty)$ *e definamos o espaço vetorial* l^p *sobre* $\mathbb{R}$ *como sendo o espaço das sequências reais p-somáveis, isto é:*

$$l^p := \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} | x_n \in \mathbb{R} \textit{ e } \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

No caso $p = \infty$*, definimos*

$$l^\infty = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} | x_n \in \mathbb{R} \textit{ e } \|x\|_\infty = \sup |x_n| < \infty\}$$

Também é possível definir esse espaço, da mesma maneira, para sequências de números complexos.

Proposição 1.1.5. *l^p é um espaço vetorial normado.*

Demonstração: A prova de (i) e (ii) é imediata. Para a prova de (iii), basta passar o limite com $n \to \infty$ na desigualdade de Minkowski.

Proposição 1.1.6. *l^p é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em l^p, ou seja, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de sequências reais de modo que para qualquer $\varepsilon > 0$, teremos $N \in \mathbb{N}$ tal que $k, l \geq N \Rightarrow \|x_k - x_l\|_p < \varepsilon$. Vamos escrever cada sequência x_n da seguinte forma:

$$(x_n) = (x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3}, \ldots),$$

ou seja, o m-ésimo termo da sequência x_n é denotado por $x_{n,m}$. Para cada m fixado, $(x_{n,m})_{n=1}^{\infty}$ também é uma sequência de Cauchy, logo converge para um número a_m. Então, a sequência de sequências (x_n) converge termo a termo para a sequência $a = (a_m)$. Temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, l \geq N \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_{k,i} - x_{l,i}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{k,n} - x_{l,n}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x_k - x_l\|_p < \varepsilon.$$

Em particular, para todo $m \in \mathbb{N}$, vale que

$$\sum_{i=1}^{m} |x_{k,i} - x_{l,i}|^p < \varepsilon^p$$

sempre que $k, l \geq N$. Fixando k e fazendo $l \to \infty$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{m} |x_{k,i} - a_i|^p < \varepsilon^p$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, sempre que $k \geq N$. Então, podemos fazer $m \to \infty$, para concluir que

$$(\|x_k - a\|_p)^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{k,i} - a_i|^p < \varepsilon^p$$

sempre que $k \geq N$. Assim, $x_k - a \in l^p$ sempre que $k \geq N$, logo $a \in l^p$. Portanto, $x_k \longrightarrow a$ em l^p.

Exemplo 1.1.5. *Alguns subespaços de l^∞ que também são espaços de Banach são os seguintes:*

$$l_c^\infty = \{(x_n) \in l^\infty : (x_n) \text{ é uma sequência convergente}\}$$

$$l_0^\infty = c_0 = \{(x_n) \in l^\infty : \lim x_n = 0\}$$

$$c_{00} = \{x \in l^\infty : \text{ para cada } n > n_0 \in \mathbb{N} \text{ o termo } x_n = 0\}$$

Observe que, para $1 \leq p < \infty$,

$$c_{00} \subset l^p \subset c_0 \subset l^\infty.$$

Assim, $\|\cdot\|_\infty$ também define uma norma no subespaço l^p, $1 \leq p < \infty$. Porém, $(l^p, \|\cdot\|_\infty)$, $1 \leq p < \infty$, não é Banach. Consideremos, por exemplo, $p = 1$ e a sequência em l_1 definida por

$$y^k := (y_j^k)_{j\in\mathbb{N}},\ y_j^k = \begin{cases} \dfrac{1}{j} \text{ se } 1 \leq j \leq k \\ 0 \text{ se } j > k \end{cases}.$$

Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$, temos

$$\|y^m - y^n\|_\infty \leq \sup\left\{\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{m}\right\} = \frac{1}{n+1}.$$

Segue que (y^k) é um sequência Cauchy com a norma do sup. Se l_1 fosse de Banach com esta norma, existiria $y \in l_1$ tal que

$$\|y^k - y\|_\infty \longrightarrow 0, \text{ quando } k \to \infty.$$

Lembrando que $\|y^k - y\|_\infty = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} |y_j^k - y_j|$, para cada $j \geq 1$,temos

$$|y_j^k - y_j| \leq \|y^k - y\|_\infty.$$

Fixando j e tomando o limite com $k \to \infty$, obtemos

$$|y_j^k - y_j| = \left|\frac{1}{j} - y_j\right| \leq \lim \|y^k - y\|_\infty = 0,$$

logo $y_j = \dfrac{1}{j}$ para todo $j \geq 1$. Então, $y = (y_j) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{j}, \ldots\right) \notin l^1$.

Definição 1.1.4. *Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço normado X são ditas **equivalentes***

se existirem constantes positivas $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1, \ \forall x \in X.$$

Definição 1.1.5. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$ como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções reais p-integráveis no sentido de Lebesgue*[4]*, isto é,*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \textit{mensurável}: \ \textit{existe } c > 0 \ \textit{tal que } |f| \leq c \ \textit{q.t.p em } \Omega\},$$

dotado da norma

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

e o espaço $L^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções reais mensuráveis limitadas a menos de um conjunto de medida nula, ou seja,

$$L^\infty(\Omega) = \left\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \textit{mensurável}: \sup_\Omega |f| < \infty\right\},$$

munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f| = \inf\{c > 0; |f(x)| \leq c \ \textit{q.t.p. em } \Omega\}.$$

1.1.2 Aplicações Lineares Limitadas

Em espaços vetoriais normados, um critério simples para a continuidade de aplicações lineares é visto na seguinte definição:

Definição 1.1.6. *Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços vetoriais normados. Dizemos que uma aplicação linear $T : (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ é **limitada** se existe uma constante $M \geq 0$ tal que*

$$\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$$

para todo $x \in E$.

Observação 1.1.1. *Essa definição de "aplicação linear limitada" é diferente do conceito usual de aplicação limitada (por exemplo de Análise no $\mathbb{R}^n$), que no caso de $T : (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ seria: existe $C > 0$ tal que $\|Tx\|_F \leq C$, para todo $x \in E$. A única aplicação linear que satisfaz essa condição é a aplicação nula. De fato, tome $x \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Como*

[4] Henri Léon Lebesgue (1875-1941), matemático francês.

$\|Tx\|_F \leq C$ *vale para todo* $x \in E$ *e como* $\lambda x \in E$*, temos que* $\|T(\lambda x)\|_F \leq C \Rightarrow \|Tx\|_F \leq \dfrac{C}{|\lambda|}$*, para todo* $x \in E$ *e para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Fazendo* $|\lambda| \longrightarrow \infty$*, obtemos* $\|Tx\|_F = 0,$ *para todos* $x \in E \Rightarrow T \equiv 0.$

Proposição 1.1.7. *Sejam* $(E, \|\cdot\|_E)$ *e* $(F, \|\cdot\|_F)$ *espaços vetoriais normados e* $T : E \longrightarrow F$ *uma aplicação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T *é lipschitziana, ou seja, existe* $C > 0$ *tal que* $\|Tx - Ty\|_F \leq C\|x - y\|_E$*, para todo* $x, y \in E$*;*

(ii) T *é contínua;*

(iii) T *é contínua na origem;*

(iv) T *é limitada;*

(v) $\sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} < \infty.$

Demonstração: $\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)}}$ Se T é uma aplicação lipschitziana, então T é contínua (isso vale para qualquer aplicação, inclusive se ela não for linear);

$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)}}$ Se T é contínua, então T é contínua em qualquer ponto do seu domínio, em particular T é contínua na origem $0 \in E$;

$\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(iv)}}$ Como T é linear, temos que $T(0) = 0$. Pela definição de continuidade no ponto 0, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\| \leq \delta$ então $\|Tx\| \leq \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = 1$, temos que existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\| \leq \delta$ então $\|Tx\| \leq 1$. Se $y \in E$ é um vetor não nulo qualquer, então $\dfrac{\delta}{\|y\|} \cdot y$ é um vetor tal que $\left\|\dfrac{\delta}{\|y\|} \cdot y\right\| = \delta$. Logo,

$$\left\|T\left(\frac{\delta}{\|y\|} \cdot y\right)\right\| \leq 1$$

. Como T é linear, concluímos que

$$\frac{\delta}{\|y\|} \cdot \|Ty\| \leq 1 \Rightarrow \|Ty\| \leq \frac{1}{\delta}\|y\|, \ \forall y \in E - \{0\}.$$

Essa desigualdade também é válida para $y = 0$. Assim vale para todo $y \in E$. Portanto, T é limitada.

$\boxed{\text{(iv)} \Rightarrow \text{(v)}}$ Se T é limitada, temos que $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$. Se $x \neq 0$, então

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq M \Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq M.$$

$\boxed{\text{(v)} \Rightarrow \text{(iv)}}$ $\sup_{x\neq 0} \dfrac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} < \infty$, então existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\sup_{x\neq 0} \dfrac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = M$. Logo, $\dfrac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} \leq M$ para todo $x \in E$, então $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$ para todo $x \in E$. Segue daí que T é limitada.

$\boxed{\text{(iv)} \Rightarrow \text{(i)}}$ Se T é limitada, então $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$. Logo, dados $x, y \in E$, podemos considerar o vetor $x - y \in E$ e daí temos que $\|T(x-y)\|_F \leq M\|x-y\|_E \Rightarrow \|Tx - Ty\|_F \leq M\|x-y\|_E$. Portanto, T é lipschitziana.

Definição 1.1.7. *Se E e F são espaços vetoriais normados, denotaremos o espaço vetorial das aplicações lineares por*

$$L(E,F) = \{T : E \longrightarrow F; T \text{ é linear}\}.$$

Denotaremos o espaço vetorial das aplicações lineares limitadas (ou contínuas) por

$$\mathcal{L}(E,F) = \{T : E \longrightarrow F : T \text{ é linear e contínua}\}.$$

*Observe que $\mathcal{L}(E,F)$ é um subespaço de $L(E,F)$. Além disso, se E é um espaço de dimensão finita, então $\mathcal{L}(E,F) = L(E,F)$. Se E é um espaço de dimensão infinita, então $\mathcal{L}(E,F)$ é um subespaço próprio de $L(E,F)$. Definimos a **norma** de uma aplicação linear limitada por*

$$\|T\| := \sup_{\substack{x\in E \\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

É fácil demonstrar que $\|T\|$ define uma norma em $\mathcal{L}(E,F)$.

Observação 1.1.2. *$L(E,F)$ é completo se, e somente, se F é completo*

Proposição 1.1.8. *Se E e F são espaços vetoriais normados, então $\mathcal{L}(E,F)$ é um espaço vetorial normado.*

Demonstração: Sejam $T, S \in \mathcal{L}(E,F)$, então $\|(T+S)x\| = \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq \|T\|\|x\| + \|S\|\|x\| = (\|T\| + \|S\|)\|x\|$ para todo $x \in E$. Então, $T + S \in \mathcal{L}(E,F)$ e vale a desigualdade triangular para a norma de aplicações lineares. A prova de que $\lambda T \in \mathcal{L}(E,F)$ e das demais condições da definição de norma também é direta.

1.1.3 Funcionais Lineares

Definição 1.1.8. *Se E é um espaço vetorial normado, denotamos o espaço vetorial dos funcionais lineares limitados por $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ e esse espaço é chamado **espaço dual***

topológico *de E (ou simplesmente* ***espaço dual*** *de E). O espaço vetorial dos funcionais lineares (não necessariamente limitados) é denotado por $L(E, \mathbb{K})$ e chamado* ***espaço dual algébrico*** *de E.*

Definição 1.1.9. *Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é convexa quando*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

para $t \in [0, 1]$.

Exemplo 1.1.6. *Considere o funcional*

$$\begin{array}{rccl} \delta : & C([0,1], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \delta(f) = f(0) \end{array}$$

onde $C([0, 1], \mathbb{R})$ está munido da norma $\| \cdot \|_\infty$ e $\mathbb{R}$ está munido da norma usual. Veja que:

- *δ é linear.*
- $|\delta(f)| = |f(0)| \leq \max\limits_{t \in [0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty, \ \forall f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \Rightarrow \|\delta\|_{(C([0,1],\mathbb{R}))^*} = \sup\limits_{\|f\|=1} |\delta(f)| = \sup\limits_{\|f\|=1} |f(0)| = 1$. *Logo, δ é limitada.*

Exemplo 1.1.7. *Sejam $E = F = \{p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n : x \in [0, 1]\}$ (o espaço dos polinômios restritos a $[0, 1]$) com a norma $\| \cdot \|_\infty$. Definamos a aplicação derivada*

$$\begin{array}{rccl} D : & E & \longrightarrow & E \\ & p & \longmapsto & D(p) = p'. \end{array}$$

D é claramente linear. D não é limitada, pois se consideramos a sequência $p_n(x) = x^n$, temos $D(p_n)(x) = p'_n(x) = nx^{n-1}$. Assim,

$$\frac{\|D(p_n)\|_\infty}{\|p_n\|_\infty} = \frac{\|p'_n\|_\infty}{\|p_n\|_\infty} = \frac{n}{1} = n \longrightarrow +\infty.$$

Exemplo 1.1.8. *A Integral Definida é um funcional linear: Considere $f : C[a, b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt.$$

Note que f é linear. Vamos provar que f é limitada e tem norma $\|f\| = b - a$. De fato

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)dt \right| \leq (b - a) \max_{t \in I} |x(t) = (b - a)\|x\|.$$

Tomando o supremo de todos os x tais que $\|x\| = 1$, obtemos $\|f\| \leq b - a$. Para obter $\|f\| \geq b - a$, escolha em particular $x = x_0 = 1$. Note que $\|x_0\| = 1$ e daí

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = |f(x_0) = \int_a^b dt = b - a.$$

1.1.4 Espaços reflexivos

Seja E um espaço vetorial normado. Denotamos o dual topológico do espaço dual topológico de E por

$$(E^*)^* = E^{**}$$

e chamamos E^{**} de **espaço bidual** de E. Podemos definir uma aplicação linear limitada, chamada de **imersão canônica** (ou **injeção canônica**), da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} J: & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & Jx \end{array}$$

onde, para cada $x \in E$, o funcional linear limitado $Jx : E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$(Jx)(f) = f(x),$$

para todo $f \in E^*$. De fato, Jx é um funcional linear em E^*, pois $(Jx)(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = (Jx)(f) + (Jx)(g)$ e $(Jx)(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot (Jx)(f)$, além disso,

$$\|(Jx)(f)\| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\| = \|x\|\|f\|,$$

ou seja,

$$\|Jx\| \leq \|x\|.$$

É fácil ver que J é linear, pois

$$(J(x+\lambda y))(f) = f(x+\lambda y) = f(x)+\lambda f(y) = (Jx)(f)+\lambda(Jy)(f) = (Jx+\lambda Jy)(f),\ \forall f \in E^*$$

$$\Rightarrow J(x+\lambda y) = Jx + \lambda Jy,\ \forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, para cada $x \in X$ existe um funcional linear $f_0 \in E^*$ tal que $\|f_0\| = 1$ e $f_0(x) = \|x\|$, logo

$$\|Jx\| = \sup_{\|f\|=1} |(Jx)(f)| \geq |(Jx)(f_0)| = |f_0(x)| = \|x\|,$$

portanto

$$\|Jx\| = \|x\|$$

para todo $x \in E$. Em particular, J é injetiva. Se J for também sobrejetiva, dizemos que E é **reflexivo**. Isto implica que J é ao mesmo tempo um isomorfismo e uma isometria. Em particular J, é um isomorfismo topológico, logo E^{**} é Banach (pois é topologicamente isomorfo a E, que é Banach). Como $E^{**} = (E^*)^*$ é um espaço de Banach, segue que uma condição necessária para que um espaço vetorial normado seja reflexivo é que ele seja de Banach. Daí, segue a seguinte definição:

Definição 1.1.10. *Dizemos que um espaço de Banach E é **reflexivo** se a aplicação $J : E \longrightarrow E^{**}$ for um isomorfismo isométrico.*

Observação 1.1.3. *É importante saber que E e E^{**} serem isometricamente isomorfos por um isomorfismo isométrico diferente de J não garante que E seja reflexivo, pois é possível que a aplicação J não seja sobrejetora.*

Proposição 1.1.9. *Todo espaço vetorial normado de dimensão finita é reflexivo.*

Demonstração: Sendo E um espaço vetorial normado de dimensão finita ($\dim E < \infty$), então $\dim E^{**} = \dim(E^*)^* = \dim E^* = \dim E < \infty$. Como a injeção canônica $J : E \longrightarrow E^{**}$ é uma aplicação linear injetora entre espaços de mesma dimensão finita, segue que J é sobrejetora. Portanto, E é reflexivo.

Teorema 1.1.1. *Seja E um espaço reflexivo. Se $F \subset E$ é um subespaço vetorial fechado, então F é reflexivo.*

Demonstração: Considere as injeções canônicas

$$J : F \longrightarrow F^{**}$$

e

$$\tilde{J} : E \longrightarrow E^{**}$$

É claro que $\tilde{J}$ é sobrejetiva, pois E é um espaço reflexivo. Como $F \leq E$, temos que $E^* \leq F^*$. Logo, $(F^*)^* \leq (E^*)^* \Rightarrow F^{**} \leq E^{**}$. Considere a aplicação contínua $I : E^* \longrightarrow F^*$ definida por

$$If = f|_F.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, a aplicação I é sobrejetiva, pois, para todo funcional linear limitado $h \in F^*$, existe uma extensão de h para um funcional linear limitado $f \in E^*$ (ou seja, $f|_F = h$). Essa aplicação é contínua, pois

$$\|If\|_{F^*} = \sup_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{|If(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|_{E^*},$$

logo

$$\|If\|_{\mathcal{L}(E^*,F^*)} = \sup_{\substack{f \in E^* \\ f \neq 0}} \frac{\|If\|_{F^*}}{\|x\|_{E^*}} \leq 1.$$

Através desta submersão, f^* induz um funcional linear $g^* \in E^{**}$ da seguinte forma:

$$g^*(f) = (f^* \circ I)(f) = f^*(f|_F)$$

Como E é reflexivo, temos que existe $x \in E$ tal que $g^* = \tilde{J}x$, ou seja,

$$f^*(f|_F) = (Jx)(f)$$

para todo $f \in E^*$. Se $x \notin F$, como F é fechado podemos aplicar o Teorema de Hahn-Banach para concluir que existe um funcional linear f_0 que se anula em F tal que $f_0(x) = 1$, o que é uma contradição, pois neste caso teríamos que $f^*(f_0|_F) = f^*(0) = 0$ enquanto que $(Jx)(f_0) = f_0(x) = 1$. Então, $x \in F$. Dessa maneira, concluímos que J é uma aplicação sobrejetiva e, portanto, F é reflexivo.

Definição 1.1.11. *Dizemos que um conjunto X é convexo quando dados um par de pontos $x, y \in X$ o segmento de reta que une x a y está inteiramente contida em X.*

Definição 1.1.12 (Espaços Uniformemente Convexos)**.** *Um espaço X é dito uniformemente convexo se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se x e y são vetores unitário em X,*

$$\|x - y\| \geq 2\epsilon \to \|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta.$$

Teorema 1.1.2 (Milman-Pettis)**.** *Se X é um espaço de Banach uniformemente convexo, então X é reflexivo.*

Demonstração: Veja[2,pg.168].

Capítulo 2

Alguns Resultados em Espaços de Hilbert

Os Espaços de Hilbert, apesar de serem um caso especial de espaços de Banach, merecem um tratamento separado pela sua importância em aplicações. O ponto principal nesses espaços é a existência de um produto interno, que traz consigo a noção de ortogonalidade e os tornam a generalização natural dos espaços Euclidianos em dimensão infinita. Em termos dos operadores lineares, pelo fato desses espaços possuírem mais estruturas.

Definição 2.0.1. *Seja H um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ é chamada de **produto interno** se satisfaz as seguintes propriedades:*

- *Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e para quaisquer $x, y, z \in H$, vale*

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

- *Para quaisquer $x, y \in H$,*

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$$

  onde a barra representa o conjugado de um número complexo. No caso real, temos que $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

- *Para qualquer $x \in H$, $\langle x, x \rangle \geq 0$, e $\langle x, x \rangle = 0$, se somente se, $x = 0$.*

*Se H um espaço vetorial, onde temos definido um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dizemos que H é um **espaço com produto interno**.*

Exemplo 2.0.1. *No espaço vetorial $\mathbb{C}^n$, podemos considerar o seguinte produto interno canônico*

$$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \Rightarrow \langle x, y\rangle = x \cdot \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

No caso real (do espaço $\mathbb{R}^n$), esse produto interno é o produto interno usual

$$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \Rightarrow \langle x, y\rangle = x \cdot \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Definição 2.0.2. *Dado um espaço com produto interno $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, definimos $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ para todo $x \in H$. $\|\cdot\|$ é uma norma em H (o que provaremos mais adiante), denominada* ***norma induzida pelo produto interno****.*

A demonstração de que $\|\cdot\|$ (definida acima) é uma norma utiliza a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**:[1]

Lema 2.0.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Se $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço com produto interno com a norma induzida $\|\cdot\|$, então, para quaisquer $x, y \in H$, temos*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|,$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, x e y são linearmente dependentes.

Demonstração: Se $y = 0$, temos que $\langle x, 0\rangle = \langle x, 0 + 0\rangle = \langle x, 0\rangle + \langle x, 0\rangle$ para todo $x \in H$. Logo, $\langle x, 0\rangle = 0$ para todo $x \in H$, e, analogamente, $\langle 0, x\rangle = 0$ para todo $x \in H$. Além disso, $\|x\|\|0\| = 0$ para todo $x \in H$ (logo $|\langle x, 0\rangle| = \|x\|\|0\| \Rightarrow |\langle x, 0\rangle| \leq \|x\|\|0\|$). Suponhamos que $y \neq 0$. Para quaisquer $x, y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\langle x, y\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 - (\overline{\lambda\langle y, x\rangle} + \lambda\langle y, x\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2 = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda\langle y, x\rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2
\end{aligned}$$

Tomando, em particular, $\lambda = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\frac{\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle}{\|y\|^2}\right) + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^4}\|y\|^2 = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\frac{\langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}\right) + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \\
&= \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}\right) + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - 2\left(\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}\right) + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \\
&= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}
\end{aligned}$$

[1]Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), matemático alemão.

Assim,

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} \Leftrightarrow \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2 \Leftrightarrow |\langle x,y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2 \Leftrightarrow |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

e a igualdade vale se, e somente se, $x - \lambda y = 0 \Leftrightarrow x$ e y são linearmente dependentes.

Proposição 2.0.1. *A função $x \longmapsto \|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ é uma norma em H.*

Demonstração: Observe que

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
- $\|\lambda x\| = (\langle \lambda x, \lambda x\rangle)^{\frac{1}{2}} = (\lambda\overline{\lambda}\langle x,x\rangle)^{\frac{1}{2}} = (|\lambda|^2\langle x,x\rangle)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|(\langle x,x\rangle)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\|x\|$
- Desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \underbrace{\|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2}_{|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|,\text{ pelo Lema 2.0.1}} = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Logo, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definição 2.0.3. *Um espaço H com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que é completo com a norma induzida por este produto interno é chamado de **Espaço de Hilbert**.*[2]

Proposição 2.0.2. *Seja H um espaço de Hilbert e suponhamos que $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$ na norma induzida. Então, $\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x,y\rangle$.*

Demonstração: Utilizando a desigualdade triangular da Proposição 2.0.1 e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Lema 2.0.1), temos

$$\begin{aligned} |\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| &= |\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y_n\rangle + \langle x,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| \\ &= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \;. \\ &\leq \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| \end{aligned}$$

Como a sequência (y_n) é limitada (por ser convergente), segue que

$$|\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| \leq \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \langle x_n,y_n\rangle \longrightarrow \langle x,y\rangle$$

[2]David Hilbert (1862-1943), matemático alemão.

Proposição 2.0.3 (Lei do Paralelogramo)**.** *Para quaisquer $x, y \in H$,*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Demonstração: Para quaisquer $x, y \in H$,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2\\ \|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

Somando as duas fórmulas obtemos a identidade desejada.

Teorema 2.0.1. *Todo espaço de Hilbert H é uniformemente convexo e, portanto, reflexivo.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ (suficientemente pequeno, por exemplo de modo que $\varepsilon < 2$) e sejam $x, y \in H$ com $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$ e $\|x - y\| > \varepsilon$. Pela identidade do paralelogramo, temos

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = 2\left(\left\|\frac{x}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y}{2}\right\|^2\right) = 2\left(\frac{\|x\|^2}{4} + \frac{\|y\|^2}{4}\right) = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} \le \frac{2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 \le 1 \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \frac{\|x-y\|^2}{4} \le 1$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} < \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \frac{\|x-y\|^2}{4} \le 1 \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} < 1$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 < 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$$

Tomemos $\delta > 0$ de modo que $\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} < 1 - \delta$, ou seja, $0 < \delta < 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$. Logo,

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} < 1 - \delta$$

Então, H é uniformemente convexo. Pelo Teorema de Milman-Pettis (Teorema 1.1.2), segue que H é reflexivo.

Teorema 2.0.2. *Seja E um espaço vetorial normado (sobre o corpo $\mathbb{R}$), cuja norma $\|\cdot\|$ satisfaz a identidade do paralelogramo*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Então a identidade polar

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2$$

define um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em E tal que a sua norma é induzida por ele.

Demonstração: Observe que

- **Positiva definida:** $\langle x, x\rangle = \frac{1}{4}\|x+x\|^2 - \frac{1}{4}\|x-x\|^2 = \frac{1}{4}\|2x\|^2 - \frac{1}{4}\|0\|^2 = \|x\|^2 \geq 0$ para todo $x \in E$. Além disso, $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

- **Soma na 1ª variável:** Para quaisquer $x, y, z \in E$, temos

$$\begin{aligned}
\langle x+y, z\rangle &= \frac{1}{4}\|x+y+z\|^2 - \frac{1}{4}\|x+y-z\|^2 = \frac{2}{8}\|x+y+z\|^2 - \frac{2}{8}\|x+y-z\|^2 \\
&= \frac{1}{8}\cdot 2\|x+y+z\|^2 - \frac{1}{8}\cdot 2\|x+y-z\|^2 \\
&= \frac{1}{8}\cdot 2\|x+y+z\|^2 - \frac{1}{8}\cdot 2\|x+y-z\|^2 \underbrace{-\frac{1}{8}\|x+y\|^2 + \frac{1}{8}\|x+y\|^2}_{=0} \\
&= \frac{1}{8}\left(2\|x+y+z\|^2 - \|x+y\|^2\right) - \frac{1}{8}\left(2\|x+y-z\|^2 - \|x+y\|^2\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(2\|x+y+z\|^2 - \|x+y\|^2\right) - \frac{1}{8}\left(2\|x+y-z\|^2 - \|x+y\|^2\right) \\
&\quad \underbrace{+\frac{1}{8}\cdot 2\|z\|^2 - \frac{1}{8}\cdot 2\|z\|^2}_{=0} \\
&= \frac{1}{8}\left(2\|x+y+z\|^2 + 2\|z\|^2 - \|x+y\|^2\right) \\
&\quad -\frac{1}{8}\left(2\|x+y-z\|^2 + 2\|z\|^2 - \|x+y\|^2\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\|x+y+2z\|^2 + \|x+y\|^2 - \|x+y\|^2\right) \\
&\quad -\frac{1}{8}\left(\|x+y\|^2 + \|x+y-2z\|^2 - \|x+y\|^2\right) \\
&= \frac{1}{8}\|x+y+2z\|^2 - \frac{1}{8}\|x+y-2z\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x+y,z\rangle &= \frac{1}{8}\|(x+z)+(y+z)\|^2 - \frac{1}{8}\|(x-z)+(y-z)\|^2 \\
&= \frac{1}{8}\|(x+z)+(y+z)\|^2 - \frac{1}{8}\|(x-z)+(y-z)\|^2 + \underbrace{\frac{1}{8}\|x-y\|^2 - \frac{1}{8}\|x-y\|^2}_{=0} \\
&= \frac{1}{8}\left(\|(x+z)+(y+z)\|^2 + \|x-y\|^2\right) \\
&\quad -\frac{1}{8}\left(\|(x-z)+(y-z)\|^2 + \|x-y\|^2\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\|(x+z)+(y+z)\|^2 + \|x+z-y-z\|^2\right) \\
&\quad -\frac{1}{8}\left(\|(x-z)+(y-z)\|^2 + \|x-z-y+z\|^2\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\|(x+z)+(y+z)\|^2 + \|(x+z)-(y+z)\|^2\right) \\
&\quad -\frac{1}{8}\left(\|(x-z)+(y-z)\|^2 + \|(x-z)-(y-z)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(2\|x+z\|^2 + 2\|y+z\|^2\right) - \frac{1}{8}\left(2\|x-z\|^2 + 2\|y-z\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\|x+z\|^2 + \frac{1}{4}\|y+z\|^2 - \frac{1}{4}\|x-z\|^2 - \frac{1}{4}\|y-z\|^2 = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle
\end{aligned}$$

Logo, $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$, para quaisquer $x,y,z \in E$.

- **Multiplicação por escalar na 1ª variável:** Sendo $\alpha = n \in \mathbb{N}$, vamos provar por indução:

  - Para $n=1$, é imediato: $\langle 1\cdot x,y\rangle = \langle x,y\rangle = 1\langle x,y\rangle$, para quaisquer $x,y \in E$. O caso $n=1$ já serve como caso base, mas vamos observar também o que acontece para $n=2$: $\langle 2x,y\rangle = \langle x+x,y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,y\rangle = 2\langle x,y\rangle$, para quaisquer $x,y \in E$.
  - Suponha por hipótese de indução que, para $n = k \in \mathbb{N}$, tenha-se $\langle kx,y\rangle = k\langle x,y\rangle$, para quaisquer $x,y \in E$. Então, para quaisquer $x,y \in E$, tem-se $\langle (k+1)x,y\rangle = \langle kx+x,y\rangle = \langle kx,y\rangle + \langle x,y\rangle = k\langle x,y\rangle + \langle x,y\rangle = (k+1)\langle x,y\rangle$. Portanto, o resultado vale para $n = k+1$.

  Com isso, concluímos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $\langle nx,y\rangle = n\langle x,y\rangle$, para quaisquer $x,y \in E$. Para $\alpha = 0$, temos

$$\langle 0x,y\rangle = \langle 0,y\rangle = \frac{1}{4}\|0+y\|^2 - \frac{1}{4}\|0-y\|^2 = \frac{1}{4}\|y\|^2 - \frac{1}{4}\|-y\|^2 = \frac{1}{4}\|y\|^2 - \frac{1}{4}\|y\|^2 = 0 = 0\langle x,y\rangle$$

  Se $\alpha = -1$, podemos escrever

$$0 = \langle 0,y\rangle = \langle x-x,y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle -x,y\rangle,$$

de modo que $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$, para quaisquer $x, y \in E$. Daí, se $n \in \mathbb{N}$, então

$$\langle -nx, y\rangle = \langle n(-x), y\rangle = n\langle -x, y\rangle = n(-\langle x, y\rangle) = -n\langle x, y\rangle,$$

para quaisquer $x, y \in E$. Então, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$ negativo, vale que $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$. Como já provamos anteriormente que vale para os inteiros positivos (ou seja, os naturais) e para o 0, concluímos que $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$. Em seguida, para todo $n \in \mathbb{N}$, note que:

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \left\langle \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ parcelas}}, y\right\rangle = \left\langle \underbrace{\frac{x}{n} + \ldots + \frac{x}{n}}_{n \text{ parcelas}}, y\right\rangle = \underbrace{\left\langle \frac{x}{n}, y\right\rangle + \ldots + \left\langle \frac{x}{n}, y\right\rangle}_{n \text{ parcelas}} \\ &= n\left\langle \frac{x}{n}, y\right\rangle\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{x}{n}, y\right\rangle = \frac{1}{n}\langle x, y\rangle$$

Logo, para todo $\alpha = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, temos

$$\langle \alpha x, y\rangle = \left\langle \frac{m}{n} \cdot x, y\right\rangle = \left\langle m \cdot \frac{1}{n} \cdot x, y\right\rangle = m\left\langle \frac{1}{n} \cdot x, y\right\rangle = \frac{m}{n}\langle x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$$

Por fim, dado qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que existe uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ tal que $\alpha_n \longrightarrow \alpha$. Como a norma é contínua, a função

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2$$

para y fixado também é contínua. Então,

$$\begin{array}{ccc} \langle \alpha_n x, y\rangle & = & \alpha_n\langle x, y\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle \alpha x, y\rangle & & \alpha\langle x, y\rangle \end{array}$$

e portanto tem-se que $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

- **Linearidade na 1ª variável:** Segue dos dois passos anteriores que $\langle \alpha x + y, z\rangle = \langle \alpha x, z\rangle + \langle y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

- **Simetria:** Para quaisquer $x, y \in E$, temos

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 = \frac{1}{4}\|y+x\|^2 - \frac{1}{4}\|y-x\|^2 = \langle y, x\rangle$$

- **Linearidade na 2ª variável:** Segue da linearidade na 1ª variável e da simetria.

Portanto, a identidade polar

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2$$

define um produto interno em E.

Teorema 2.0.3 (da Melhor Aproximação)**.** *Seja H um espaço de Hilbert e seja $M \subset H$ um convexo fechado e não vazio. Se $x \in H$ então existe um único $y = y(x) \in M$ tal que*

$$dist(x, M) = \inf\{\|x-z\|; z \in M\} = \|x-y\|.$$

*O elemento y é chamado de **Melhor Aproximação** de x em M.*

Demonstração: Se $x \in M$, então é claro que $dist(x, M) = 0$. Suponhamos agora que $x \notin M$. Sendo $\delta = dist(x, M)$, temos que existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que $\|x - y_n\| = \delta_n \longrightarrow \delta$. Pela lei do paralelogramo, temos que

$$\|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 + \|(y_n - x) - (x - y_n)\|^2 = 2\left(\|y_n - x\|^2 + \|x - y_m\|^2\right),$$

ou seja,

$$\|y_n - y_m\|^2 + \|y_n + y_m - 2x\|^2 + 2\left(\delta_n^2 + \delta_m^2\right) \Rightarrow \|y_n - y_m\|^2 = 2\left(\delta_n^2 + \delta_m^2\right) - \|y_n + y_m - 2x\|^2$$

$$\Rightarrow \|y_n - y_m\|^2 = 2\delta_n^2 + 2\delta_m^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2.$$

Como $y_n, y_m \in M$ e M é convexo, temos $\dfrac{y_n + y_m}{2} \in M$. Logo, $\left\|\dfrac{y_n + y_m}{2} - x\right\| \geq \delta$. Daí segue que

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\left(\delta_n^2 + \delta_m^2\right) - 4\delta^2$$

Fazendo $m, n \to \infty$, obtemos $\delta_n \longrightarrow \delta$ e $\delta_m \longrightarrow \delta$, logo $\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\left(\delta_n^2 + \delta_m^2\right) - 4\delta^2 \longrightarrow 2(2\delta^2) - 4\delta^2 = 0$. Desde que H é um espaço de Hilbert, temos que H é completo, ou seja, $y_n \longrightarrow y \in H$. Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ e M é fechado, segue que $y \in M$. E da continuidade da norma $\|x-y_n\| \longrightarrow \|x-y\|$, assim $\|x-y\| = \delta$. Fica assim provado que existe $y \in M$ tal que $\|x-y\| = dist(x,M)$. Agora provaremos que esse elemento é único. Sendo $z \in M$ tal que $\|x-z\| = \delta$, obtemos

$$2\left(\|y-x\|^2+\|x-z\|^2\right) = \|(y-x)+(x-z)\|^2+\|(y-x)-(x-z)\|^2 = \|y-z\|^2+\|y+z-2x\|^2$$

$$\Rightarrow \|y-z\|^2 = 2\left(\|y-x\|^2+\|x-z\|^2\right) - \|y+z-2x\|^2 = 2(\delta^2+\delta^2) - 4\left\|\frac{y+z}{2}-x\right\|^2$$

Como $y, z \in M$ e M é convexo, temos que $\dfrac{y+z}{2} \in M$, logo $\left\|\dfrac{y+z}{2}-x\right\| \geq \delta$. Segue que

$$\|y-z\|^2 \leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0$$

e assim, $y = z$.

Definição 2.0.4. *Seja H um espaço com produto interno. Dado um subconjunto $M \subset M$, definimos o subespaço ortogonal a M por*

$$M^\perp = \{x \in H | \langle x, m\rangle = 0 \text{ para todo } x \in M\}$$

Proposição 2.0.4. *Seja H um espaço com produto interno e seja $M \subset H$. Então $M^\perp$ é um subespaço fechado de H com $M \perp M^\perp$ e $M \cap M^\perp \subset \{0\}$ (ou seja, $M \cap M^\perp = \{0\}$ ou $M \cap M^\perp = \emptyset$).*

Demonstração: A prova de que $M^\perp$ é um subespaço vetorial de H é simples.

- $x, y \in M^\perp \Rightarrow \langle x, m\rangle = 0$ e $\langle y, m\rangle = 0$ para todo $m \in M \Rightarrow \langle x+y, m\rangle = \langle x, m\rangle + \langle y, m\rangle = 0+0 = 0$ para todo $m \in M \Rightarrow x+y \in M^\perp$
- $x \in M^\perp, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \langle x, m\rangle = 0$ para todo $m \in M \Rightarrow \langle \lambda x, m\rangle = \lambda\langle x, m\rangle = 0$ para todo $m \in M \Rightarrow \lambda x \in M^\perp$

Seja $(x_n) \subset M^\perp$ uma sequência convergindo para x, assim $\langle x_n, m\rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $m \in M$. Logo, $\langle x, m\rangle = \langle \lim_{n\to+\infty} x_n, m\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle x_n, m\rangle = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$ para todo $m \in M$, então $x \in M^\perp$. Dessa forma, concluímos que $M^\perp$ é fechado. É claro que $M \perp M^\perp$, pois para todo $m \in M$ e para todo $x \in M^\perp$ tem-se $\langle x, m\rangle = 0$. Se $x \in M \cap M^\perp$, então $x \in M$ e $x \in M^\perp$, daí $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow \|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Logo, $M \cap M^\perp \subset \{0\}$. Se $0 \in M$, então $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ (pois $0 \in M^{\perp}$ segue direto da definição). Agora, se $0 \notin M$, então $M \cap M^{\perp} = \emptyset$.

Teorema 2.0.4 (Teorema da Projeção). *Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert e seja $M \subset H$ um subespaço fechado. Então, existem dois operadores lineares contínuos e sobrejetivos definidos da seguinte forma:*

$$\begin{array}{rccl} P: & H & \longrightarrow & M \\ & x & \longmapsto & P(x) \textit{ é a melhor aproximação de } x \textit{ em } M \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} P^{\perp}: & H & \longrightarrow & M^{\perp} \\ & y & \longmapsto & P^{\perp}(y) \textit{ é a melhor aproximação de } y \textit{ em } M^{\perp} \end{array}$$

(ou seja, $P(x)$ é a projeção ortogonal de $x \in H$ sobre M e $P^{\perp}(y)$ é a projeção ortogonal de $y \in H$ sobre $M^{\perp}$). Note que essas aplicações são caracterizadas por:

(a) $\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\|; y \in M\} = dist(x, M)$ *(diretamente da definição de Px ser a melhor aproximação de $x \in H$ em M, pelo Teorema 2.0.3);*

(b) $x = Px + P^{\perp}x$ *(pois $x - Px \perp M \Rightarrow x - Px \in M^{\perp} \Rightarrow x - Px = P^{\perp}x$), isto é,* $P^{\perp} = I_H - P$

Os operadores P e $P^{\perp}$ são únicos e satisfazem as seguintes propriedades:

(i) ***(Teorema de Pitágoras)*** $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|P^{\perp}x\|^2$;

(ii) $x \in M$ *se, e somente se,* $P^{\perp}x = 0$;

(iii) $x \in M^{\perp}$ *se, e somente se,* $Px = 0$;

(iv) $\|P\| = 1$, *a menos que* $M = \{0\}$, *e* $\|P^{\perp}\| = 1$, *a menos que* $M = H$;

(v) $PP^{\perp} = P^{\perp}P = 0$, $P^2 = P$ *e* $(P^{\perp})^2 = P^{\perp}$.

Dizemos que P e $P^{\perp}$ são as ***projeções ortogonais*** *de H sobre M e $M^{\perp}$, respectivamente.*

Demonstração: Pelo Teorema da Melhor Aproximação (Teorema 2.0.3), temos que (a) define P unicamente e, consequentemente, $P^{\perp} = I_H - P$ também está unicamente determinada. Se $x \in H$ e $m \in M$, então

$$\langle P^{\perp}x, m \rangle = \underbrace{\langle x - Px, m \rangle = 0}_{},$$

daí $P^{\perp}x \in M^{\perp}$. Com isso temos que a imagem de $P^{\perp}$ está contida em $M^{\perp}$. Por outro lado, se $x \in M^{\perp}$, então $\langle x, m\rangle = 0$ para todo $m \in M$, daí $P^{\perp}x = x$. Assim, x pertence à imagem de $P^{\perp}$. Logo, $M^{\perp}$ está contido na imagem de $P^{\perp}$. Segue que a imagem de $P^{\perp}$ é $M^{\perp}$, ou seja, a aplicação $P^{\perp}$ é sobrejetora. A demonstração de que P é sobrejetiva é similar. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $x, y \in H$. Então

$$\alpha x + \beta y = P(\alpha x + \beta y) + P^{\perp}(\alpha x + \beta y)$$

e

$$\alpha x + \beta y = \alpha(Px + P^{\perp}x) + \beta(Py + P^{\perp}y) = \alpha Px + \beta Py + \alpha P^{\perp}x + \beta P^{\perp}y,$$

de onde segue que

$$\alpha Px + \beta Py + \alpha P^{\perp}x + \beta P^{\perp}y = P(\alpha x + \beta y) + P^{\perp}(\alpha x + \beta y).$$

Então

$$\underbrace{\alpha Px + \beta Py - P(\alpha x + \beta y)}_{\in M} = \underbrace{P^{\perp}(\alpha x + \beta y) - \alpha P^{\perp}x - \beta P^{\perp}y}_{\in M^{\perp}} \in \underbrace{M \cap M^{\perp} = \{0\}}_{\text{pois } M \text{ é subespaço}}.$$

Logo, $\alpha Px + \beta Py - P(\alpha x + \beta y) = P^{\perp}(\alpha x + \beta y) - \alpha P^{\perp}x - \beta P^{\perp}y = 0$, de onde segue que

$$P(\alpha x + \beta y) = \alpha Px + \beta Py \quad e$$
$$P^{\perp}(\alpha x + \beta y) = \alpha P^{\perp}x + \beta P^{\perp}y.$$

Com isso, concluímos que P e $P^{\perp}$ são lineares. Pela demonstração do Teorema da Melhor Aproximação (Teorema 2.0.3), temos que se $x \in M$ então $Px = x \Rightarrow P^{\perp}x = x - Px = x - x = 0$. Reciprocamente, se $P^{\perp}x = 0$ então $x = Px + P^{\perp}x = Px + 0 = Px \Rightarrow x \in M$. Isso demonstra o item (ii). Analogamente, se $x \in M^{\perp}$ então $P^{\perp}x = x \Rightarrow Px = x - P^{\perp}x = x - x = 0$ e, reciprocamente, se $Px = 0$ então $P^{\perp}x = x - Px = x - 0 = x \Rightarrow x \in M^{\perp}$. Com isso, provamos o item (iii). Se $x \in H$, então, pelos itens (ii) e (iii), $P^{\perp}x \in M^{\perp}$ e $Px \in M \Rightarrow P(P^{\perp}x) = 0$ e $P^{\perp}(Px) = 0 \Rightarrow PP^{\perp} = 0$ e $P^{\perp}P = 0$. Logo, $0 = PP^{\perp} = P(I - P) = P - P^2 \Rightarrow P^2 = P$ e $0 = P^{\perp}P = P^{\perp}(I - P^{\perp}) = P^{\perp} - (P^{\perp})^2 \Rightarrow P^{\perp} = P$. Fica assim provado o item (v). Para todo $x \in H$, observe que

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \|Px + P^{\perp}x\|^2 = \langle Px + P^{\perp}x, Px + P^{\perp}x\rangle \\
&= \langle Px, Px\rangle + \langle Px, P^{\perp}x\rangle + \langle P^{\perp}x, Px\rangle + \langle P^{\perp}x, P^{\perp}x\rangle = \|Px\|^2 + 0 + 0 + \|P^{\perp}x\|^2 \\
&= \|Px\|^2 + \|P^{\perp}x\|^2
\end{aligned}$$

Então, vale o item (i) (o Teorema de Pitágoras). Finalmente, temos

$$\|Px\|^2 = \|x\|^2 - \|P^{\perp}x\|^2 \leq \|x\|^2 \Rightarrow \frac{\|Px\|^2}{\|x\|^2} \leq 1,\ \forall x \in H \Rightarrow \frac{\|Px\|}{\|x\|} \leq 1,\ \forall x \in H \Rightarrow \|P\| \leq 1$$

Se $M \neq \{0\}$, existe $x \in M \setminus \{0\}$ tal que $Px = x$, logo existe $x \in M \setminus \{0\}$ tal que $\|Px\| = \|x\|$. Assim, $\|P\| = 1$, a menos que $M = \{0\}$. De maneira similar, podemos concluir que $\|P^{\perp}\| = 1$, a menos que $M = H$. Assim, fica provado o item (iv), e daí concluímos que P e $P^{\perp}$ são contínuas. Portanto, as aplicações P e $P^{\perp}$ são lineares, contínuas e sobrejetoras, e satisfazem as propriedades (i), (ii), (iii), (iv) e (v).

2.1 Dualidade

Já vimos, pelo Teorema 2.0.1, que todo espaço de Hilbert é reflexivo. A seguir, veremos um importante resultado conhecido como **Teorema da Representação de Riesz-Fréchet**.[3] Esse teorema caracteriza todos os funcionais lineares contínuos em um espaço de Hilbert.

Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e seja H^* o seu dual. Para cada $f \in H$, definamos a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccl} \varphi_f : & H & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \varphi_f(x) = \langle x, f \rangle \end{array}.$$

Esse funcional é claramente linear, e é contínuo pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (Lema 2.0.1). Além disso, observe que

$$\|\varphi_f\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi_f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, f \rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\|\|f\| = \|f\|$$

Se $f \neq 0$, então

$$\frac{f}{\|f\|} \in H \Rightarrow \varphi_f\left(\frac{f}{\|f\|}\right) = \left\langle \frac{f}{\|f\|}, f \right\rangle = \frac{\langle f, f \rangle}{\|f\|} = \frac{\|f\|^2}{\|f\|} = \|f\|.$$

Assim, o valor máximo da norma é atingido. Logo, $\|\varphi_f\| = \|f\|$. Concluímos que a aplicação $f \longmapsto \varphi_f$ (de H em H^*) é uma isometria de H sobre sua imagem. Será que todo funcional linear contínuo (ou seja, todo elemento de H^*) é dessa forma? É para responder a essa pergunta que apresentaremos a seguir o Teorema da Representação de Riesz-Fréchet.

[3] Maurice René Fréchet (1878-1973), matemático francês.

Teorema 2.1.1 (da Representação de Riesz-Fréchet). *Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $\varphi \in H^*$. Então, existe um único $f \in H$ tal que*

$$\varphi(x) = \langle x, f \rangle, \ \forall x \in H$$

(ou seja, existe um único $f \in H$ tal que $\varphi = \varphi_f$). Além disso, $\|\varphi\| = \|f\|$.

Demonstração: Primeiramente, vamos demonstrar a unicidade. Sejam $f, g \in H$ duas representações para a aplicação φ, ou seja, suponhamos que $\varphi(x) = \langle x, g \rangle$ e $\varphi(x) = \langle x, f \rangle$ para todo $x \in H$, então $\langle x, g - f \rangle = \langle x, g \rangle - \langle x, f \rangle = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$. para todo $x \in H$. Em particular, tomando $x = g - f$ obtemos $\langle f - g, f - g \rangle = 0 \Rightarrow \|f - g\|^2 = 0 \Rightarrow \|f - g\| = 0 \Rightarrow f - g = 0 \Rightarrow f = g$. Então, de fato, se existir uma representação de $\varphi \in H^*$ por um funcional da forma φ_f (com $f \in H$), essa representação é única. Agora vamos mostrar que ela existe. Seja $M = \ker \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$. Segue que M é um subespaço fechado de H. Se $\varphi = 0$, então basta tomarmos $f = 0$ (assim a representação existe). Agora, consideremos que $\varphi \neq 0$. Logo, $M \neq H \Rightarrow M^\perp \neq \{0\}$. Seja $z \in M^\perp \setminus \{0\}$, e suponhamos (sem perda de generalidade) que $\|z\| = 1$. Para $x \in H$, seja $u = (\varphi x)(z) - (\varphi z)x \in H$. Logo

$$\varphi(u) = (\varphi x)(\varphi z) - (\varphi z)(\varphi x) = 0$$

Então, $u \in M$e daí $u \perp z$.Assim

$$0 = \langle u, z \rangle = \varphi(x)\langle z, z \rangle - \varphi(z)\langle x, z \rangle = \varphi(x) - \varphi(z)\langle x, z \rangle$$

e, portanto,

$$\varphi(x) = \varphi(z)\langle x, z \rangle = \langle x, \overline{\varphi(z)} z \rangle.$$

Tomando $f = \overline{\varphi(z)} z$, obtemos que existe a representação $\varphi = \varphi_f$. A sobrejetividade da aplicação $f \longmapsto \varphi_f$ foi vista anteriormente.

2.1.1 Os teoremas de Stampacchia e Lax-Milgram

Nesta subseção vamos ver dois dos teoremas importantes que temos em Espaços de Hilbert, que é o Teorema de Stampachia e o Teorema de Lax-Milgram, que apesar de serem resultados bem teóricos tem grande aplicabilidade em Equações Diferenciais Parciais. Mais adiante no Capítulo 4, veremos uma aplicação do Teorema de Lax-Milgram em um problema de EDP.

Definição 2.1.1. *Seja H um espaço de Hilbert sobre o corpo $\mathbb{R}$. Uma **forma bilinear** em*

*H é uma aplicação bilinear $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que a forma bilinear a é **contínua** se existir uma constante $C > 0$ tal que*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|, \ \forall \ u,v \in H.$$

*A forma bilinear a é dita **coerciva** se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2, \ \forall \ v \in H.$$

Exemplo 2.1.1. *O produto interno no espaço H é uma forma bilinear (pela definição de produto interno). Além disso, o produto interno é uma forma bilinear contínua, pois pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Lema 2.0.1) tem-se a continuidade e é uma forma bilinear coerciva pela própria definição de norma por um produto interno.*

Apresentaremos a seguir os teoremas de Stampacchia[4] e Lax-Milgram[5], que são resultados importantes válidos em qualquer espaço de Hilbert e que podem ser aplicados em situações específicas. O Teorema de Lax-Milgram é uma generalização do Teorema da Representação de Riesz-Fréchet, e é um corolário do Teorema de Stampacchia (mas é possível demonstrar o Teorema de Lax-Milgram de forma independente), que é um resultado mais geral. Um fato interessante sobre o Teorema de Stampacchia é que não é necessário trabalhar com um subespaço ou com o espaço todo, basta que o conjunto seja convexo e fechado.

Para demonstrar o Teorema de Stampacchia, primeiramente vamos verificar mais alguns fatos sobre projeções.

Lema 2.1.1. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ e seja $K \subset H$ um convexo fechado não vazio. Então, a projeção*

$$\begin{array}{rccl} P_K : & H & \longrightarrow & K \\ & x & \longmapsto & P_K(x) \text{ é o único elemento de } K \text{ tal que } dist(x,K) = \|x - P_K(x)\| \end{array}$$

(isto é, $P_K(x)$ é a melhor aproximação de $x \in H$ em K) é caracterizada por

$$\langle x - P_K x, v - P_K x \rangle \leq 0, \ \text{para qualquer } v \in K.$$

Demonstração: Seja $f \in H$ e seja $u = P_K f$ a projeção de f em K. Então:

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\| = dist(f,K).$$

[4]Guido Stampacchia (1922-1978), matemático italiano.

[5]Peter David Lax (nascido em 1926), matemático húngaro, e Arthur Norton Milgram (1912-1961), matemático estadunidense.

Para qualquer $w \in K$, temos

$$v = (1-t)u + tw \in K, \text{ para todo } t \in [0,1],$$

pois K é convexo. Logo,

$$\|f-u\| \leq \|f-v\| = \|f-((1-t)u+tw)\| = \|f-u-t(w-u)\|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|f-u\|^2 &\leq \|f-u-t(w-u)\|^2 = \langle f-u-t(w-u), f-u-t(w-u)\rangle \\ &= \|f-u\|^2 - 2t\langle f-u, w-u\rangle + t^2\|w-u\|^2. \end{aligned}$$

Logo, para qualquer $t \in (0,1)$, tem-se

$$0 \leq -2t\langle f-u, w-u\rangle + t^2\|w-u\|^2 \Rightarrow 2t\langle f-u, w-u\rangle \leq t^2\|w-u\|^2 \Rightarrow 2\langle f-u, w-u\rangle \leq t\|w-u\|^2.$$

Fazendo $t \to 0^+$, obtemos

$$\lim_{t\to 0^+} 2\langle f-u, w-u\rangle \leq \lim_{t\to 0^+} t\|w-u\|^2 \Rightarrow 2\langle f-u, w-u\rangle \leq 0 \Rightarrow \langle f-u, w-u\rangle \leq 0, \ \forall w \in K.$$

Reciprocamente, se u satisfaz a desigualdade $\langle f-u, v-u\rangle \leq 0$ para todo $v \in K$, então

$$\begin{aligned} \|u-f\|^2 - \|v-f\|^2 &= \langle u-f, u-f\rangle - \langle v-f, v-f\rangle \\ &= \|u\|^2 - 2\langle u, f\rangle + \|f\|^2 - (\|v\|^2 - 2\langle v, f\rangle + \|f\|^2) \\ &= \|u\|^2 - 2\langle u, f\rangle + \|f\|^2 - \|v\|^2 + 2\langle v, f\rangle - \|f\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2\langle u, f\rangle - \|v\|^2 + 2\langle v, f\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 2\langle f-u, v-u\rangle - \|u-v\|^2 &= 2\langle f, v\rangle - 2\langle f, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \underbrace{2\|u\|^2 - \|u\|^2}_{\|u\|^2} + 2\langle u, v\rangle - \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2\langle u, f\rangle - \|v\|^2 + 2\langle v, f\rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|u-f\|^2 - \|v-f\|^2 = \underbrace{2\langle f-u, v-u\rangle}_{\leq 0} - \|u-v\|^2 \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad \|u-f\|^2 \leq \|v-f\|^2 \\ &\Rightarrow \quad \|u-f\| \leq \|v-f\|, \ \forall v \in K, \end{aligned}$$

e, portanto, $u = P_K f$.

Lema 2.1.2. *Sejam H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ e $K \subset H$ um convexo fechado não vazio. Então, P_K satisfaz*

$$\|P_K f - P_K g\| \leq \|f - g\|,$$

para quaisquer $f, g \in H$.

Demonstração: Se K for um subespaço fechado, a demonstração é trivial:

$$\|P_K f - P_K g\| = \|P_K(f - g)\| \leq \|P_K\|\|f - g\| = \|f - g\|$$

Faremos a demonstração do caso geral (sendo $K \subset H$ qualquer subconjunto convexo fechado não vazio). Tomemos $u_1 = P_k f$ e $u_2 = P_K g$. Logo, pelo Lema 2.1.1, temos que:

$$\begin{gathered} \langle f - u_1, v - u_1 \rangle \leq 0, \ e \\ \langle g - u_2, v - u_2 \rangle \leq 0. \end{gathered}$$

para qualquer $v \in K$. Tomando $v = u_2$ na primeira desigualdade e tomando $v = u_1$ na segunda desigualdade, obtemos

$$\begin{gathered} \langle f - u_1, u_2 - u_1 \rangle \leq 0 \\ \langle g - u_2, u_1 - u_2 \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle -g + u_2, u_2 - u_1 \rangle \leq 0 \end{gathered}$$

Somando as duas desigualdades, obtemos:

$$\langle f - u_1 - g + u_2, u_2 - u_1 \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle (f - g) + (u_2 - u_1), u_2 - u_1 \rangle \leq 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} \langle f - g, u_2 - u_1 \rangle + \|u_2 - u_1\|^2 \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad \|u_2 - u_1\|^2 \leq \langle f - g, u_1, u_2 \rangle \leq \|u_2 - u_1\|\|f - g\| \\ &\Rightarrow \quad \underbrace{\|u_2 - u_1\|}_{=\|u_1 - u_2\|} \leq \|f - g\| \Rightarrow \|P_K f - P_K g\| \leq \|f - g\|, \end{aligned}$$

para quaisquer $f, g \in K$ e o lema está provado.

Agora sim, vamos ao teorema de Stampacchia e sua demonstração:

Teorema 2.1.2 (Stampacchia)**.** *Seja $a(\cdot, \cdot)$ uma forma bilinear contínua e coerciva no espaço de Hilbert H (sobre o corpo $\mathbb{R}$), e seja $K \subset H$ um subconjunto convexo fechado e não vazio. Então, dado qualquer funcional linear contínuo $\varphi \in H^*$, existe um único elemento $u \in K$ tal* *que*

$$a(u, v-u) \geq \varphi(v-u), \ \forall v \in K.$$

Além disso, se $a(\cdot,\cdot)$ for simétrica, isto é, $a(u,v) = a(v,u)$ para quaisquer $u, v \in H$, então u pode ser caracterizado pela seguinte propriedade: $u \in K$ e

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in K}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)\right\}.$$

Demonstração: Dado $\varphi \in H^*$, temos pelo Teorema da Representação de Riesz-Fréchet (teorema 2.1.1) que existe um único $f \in H$ tal que

$$\varphi(v) = \langle f, v\rangle, \ \text{para qualquer } v \in H.$$

Por outro lado, fixando $u \in H$, temos que

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|, \ \text{para todo } v \in H,$$

onde $C\|u\| > 0$ é constante com relação a v Então a aplicação $v \longmapsto a(u,v)$ é um funcional linear contínuo em H (pois a é uma forma bilinear contínua). Assim, novamente pelo Teorema da Representação de Riesz-Fréchet, existe um único elemento $Au \in H$ tal que

$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle, \ \text{para qualquer } v \in H.$$

Dessa forma, obtemos uma aplicação $A : H \longrightarrow H$. Como o produto interno é linear em cada entrada e como para cada $u \in H$ existe um único $Au \in H$, podemos concluir que $A : H \longrightarrow H$ é linear (deixamos os detalhes para o leitor). Pelo Teorema da Representação de Riesz-Fréchet, existe $\varphi_u \in H^*$ tal que

$$\varphi_u(v) = \langle Au, v\rangle = a(u,v), \ \forall v \in H.$$

Por isometria e pelo fato de a ser bilinear e contínua, segue que

$$\|Au\| = \|\varphi_u\| = \sup_{\|v\|\leq 1}|a(u,v)| \leq \sup_{\|v\|\leq 1} C\|u\|\|v\| \leq C\|u\|$$

Portanto, o operador linear A é contínuo. Pela definição desse operador A, temos $a(u, v-u) = \langle Au, v-u\rangle$. Seja $\rho > 0$. Definamos $S : K \longrightarrow K$ por $S(u) = P_K(\rho f - \rho Au + u)$. Lembremos do Lema 2.1.2 que

$$\|P_K u_1 - P_K u_2\| \leq \|u_1 - u_2\|, \ \forall u_1, u_2 \in H.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\|Sw_1 - Sw_2\|^2 &= \|P_K(\rho f - \rho A w_1 + w_1) - P_K(\rho f - \rho A w_2 + w_2)\|^2 \\
&= \|P_K((\rho f - \rho A w_1 + w_1) - (\rho f - \rho A w_2 + w_2))\|^2 \\
&= \|P_K(-\rho A w_1 + w_1) - (-\rho A w_2 + w_2)\|^2 \\
&\leq \|(-\rho A w_1 + w_1) - (-\rho A w_2 + w_2)\|^2 = \|(w_1 - w_2) - \rho A(w_1 - w_2)\|^2 \\
&= \langle (w_1 - w_2) - \rho A(w_1 - w_2), (w_1 - w_2) - \rho A(w_1 - w_2)\rangle \\
&= \|w_1 - w_2\|^2 - 2\rho\langle w_1 - w_2, Aw_1 - Aw_2\rangle + \rho^2\|Aw_1 - Aw_2\|^2 \\
&= \|w_1 - w_2\|^2 - 2\rho\langle Aw_1 - Aw_2, w_1 - w_2\rangle + \rho^2\|Aw_1 - Aw_2\|^2 \\
&= \|w_1 - w_2\|^2 - 2\rho a(w_1 - w_2, w_1 - w_2) + \rho^2\|Aw_1 - Aw_2\|^2
\end{aligned}$$

Como a forma bilinear a é coerciva, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $a(w_1 - w_2, w_1 - w_2) \geq \alpha\|w_1 - w_2\|^2$. E, como o operador linear A é contínuo, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|Aw_1 - Aw_2\| = \|A(w_1 - w_2)\| \leq C\|w_1 - w_2\|$. Logo

$$\begin{aligned}
\|Sw_1 - Sw_2\|^2 &\leq \|w_1 - w_2\|^2 - 2\rho a(w_1 - w_2, w_1 - w_2) + \rho^2\|Aw_1 - Aw_2\|^2 \\
&\leq \|w_1 - w_2\|^2 - 2\rho\alpha\|w_1 - w_2\|^2 + \rho^2 C^2\|w_1 - w_2\|^2 \\
&= \|w_1 - w_2\|^2(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2).
\end{aligned}$$

Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que $k^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2$. Para $\rho > 0$ suficientemente pequeno, temos que $k^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2 < 1$. Logo S é uma contração no convexo fechado e não vazio K. Como K é um subconjunto fechado do espaço de Hilbert H, segue que K é um espaço métrico completo.[6] Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach[7], segue que existe um único $u \in K$ tal que $u = Su$. Então, $u = P_K(\rho f + \rho A u + u)$. Logo, pelo Lema 2.1.1, $\langle \rho f - \rho A u + u - u, v - u\rangle \leq 0$ para qualquer $v \in K$, de onde segue que $\langle \rho f - \rho A u, v - u\rangle \leq 0 \Rightarrow \langle f - Au, v - u\rangle \leq 0 \Rightarrow \langle f, v - u\rangle - \langle Au, v - u\rangle \leq 0 \Rightarrow \langle Au, v - u\rangle \geq \langle f, v - u\rangle \Rightarrow a(u, v - u) \geq \varphi(v - u)$, para todo $v \in K$. Agora, suponhamos que a forma bilinear a seja simétrica. Logo, $a(\cdot, \cdot)$ define um novo produto interno em H e uma nova norma $\|u\|_1 = (a(u, u))^{\frac{1}{2}}$. Essa norma é equivalente à primeira, pois é contínua e coerciva. Então, H com a norma $\|\cdot\|_1$ também é completo, assim $(H, \|\cdot\|_1)$ também é um espaço de Hilbert. Pelo Teorema da Representação de Riesz-Fréchet, temos que para cada $\varphi \in H^*$ existe um único $g \in H$ tal que

$$\varphi(v) = a(g, v), \ \forall v \in H.$$

[6] Para mais detalhes, consulte o livro "Espaços Métricos", de Elon Lages Lima, página 172.4

[7] Para mais detalhes, consulte o livro "Espaços Métricos", de Elon Lages Lima, página 208. 4

Como $a(u, v-u) \geq \varphi(v-u)$ para todo $v \in K$, segue que

$$\varphi(v-u) = a(g, v-u) \Rightarrow a(g, v-u) \leq a(u, v-u) \Rightarrow$$

$$a(g, v-u) - a(u, v-u) \leq 0 \Rightarrow a(g-u, v-u) \leq 0.$$

Portanto, pelo Lema 2.1.1, segue que $u = P_K g$, ou seja, u é a projeção de g sobre K (relativa ao produto interno $a(\cdot,\cdot)$). Então, u minimiza a distância $\|g-v\|_1 = (a(g-v, g-v))^{\frac{1}{2}}$, ou seja,

$$\min_{v \in K} (a(g-v, g-v))^{\frac{1}{2}} = (a(g-u, g-u))^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, u minimiza a função

$$v \longmapsto a(g-v, g-v) = a(v,v) - 2a(g,v) + a(g,g) = a(v,v) - 2\varphi(v) + a(g,g),$$

de onde concluímos que

$$\min_{v \in K} (a(v,v) - 2\varphi(v) + a(g,g)) = a(u,u) - 2\varphi(u) + a(g,g)$$

$$\Rightarrow a(u,u) - 2\varphi(u) = \min_{v \in K} (a(v,v) - 2\varphi(v))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v) \right\}$$

Corolário 2.1.1 (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Suponhamos que $a(\cdot,\cdot)$ seja uma forma bilinear contínua e coerciva no espaço de Hilbert H (sobre o corpo $\mathbb{R}$). Então, dado qualquer $\varphi \in H^*$, existe um único elemento $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \varphi(v), \ \forall v \in H.$$

Além disso, se $a(\cdot,\cdot)$ for simétrica, então u pode ser caracterizado pela seguinte propriedade: $u \in H$ e

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v) \right\}.$$

Demonstração: Vamos usar o Teorema de Stampacchia (Teorema 2.1.2) com $K = H$. Então, existe um único $u \in H$ tal que $a(u, v-u) \geq \varphi(v-u)$ para todo $v \in H$. Tomando $w = \lambda v + u \in H$, temos $a(u, w-u) \geq \varphi(w-u) \Rightarrow a(u, \lambda v) \geq \varphi(\lambda v)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Se

$\lambda = 1$, temos $a(u,v) \geq \varphi(v)$. Se $\lambda = -1$, temos $a(u,-v) \geq \varphi(-v) \Rightarrow -a(u,v) \geq -\varphi(v)$. Multiplicando por -1, obtemos $a(u,v) \leq \varphi(v)$. Então, $a(u,v) = \varphi(v)$ para todo $v \in H$. Além disso, a propriedade de que

$$u \in H \text{ em } \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v) \right\}$$

segue diretamente do Teorema de Stampacchia com $K = H$.

Capítulo 3

Aplicações em Equações Diferenciais Parciais

3.0.1 Definições e Notações Básicas

Neste Capítulo, iremos desenvolver algumas noções modernas da teoria de EDP's como a noção de derivada fraca e solução fraca e alguns resultados de imersão. Também vamos utilizar dos resultados já vistos nos capítulos anteriores para assim conseguirmos aplicar nossos resultados.

Definição 3.0.1. *(Suporte de uma função) Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua, com Ω aberto do $\mathbb{R}$. O suporte de u denotado por supt(u), é definido como sendo o fecho do conjunto $\{x \in \Omega | u(x) \neq 0\}$, em Ω, isto é,*

$$supt(u) = \overline{\{x \in \Omega | u(x) \neq 0\}} \cap \Omega.$$

Uma função u é dita ter suporte compacto quando o suporte da função u for um conjunto compacto. como estamos considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então basta que seja fechado e limitado.
Vamos denotar agora por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções que possui derivada de todas as ordens com o suporte compacto contido em Ω, ou seja:

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} | u \in C^\infty \subset\subset \Omega\}$$

onde $C_0^\infty \subset\subset \Omega$ significa que C_0^∞ está contido compactamente em Ω

Definição 3.0.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e seja $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que a função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$ se $fX_k \in L^p(\Omega)$ para cada compacto K contido em Ω.*

Definição 3.0.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que uma* *função* $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ *é a derivada parcial fraca de* u *em relação a* x_i $(i = 1, 2, 3, .., n)$ *se*

$$\int_\Omega u(\partial_i \varphi) = -\int_\Omega v_i \varphi,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. *Neste caso, Denotaremos*

$$v_i = \partial_i u.$$

Dizemos que u é fracamente diferenciável se todas as derivadas parciais de primeira ordem de u existirem. O espaço vetorial das funções fracamente diferenciáveis sera denotado por $W^1(\Omega)$.

Quando existe, v_i é unicamente determinada a menos de conjuntos de medida nula. Claramente $C^1(\Omega) \subset W^1$. O conceito de derivada fraca é uma extensão do conceito clássico de derivada que mantém a validade da fórmula da integração por partes.

Definição 3.0.4.

Exemplo 3.0.1. *Sejam* $n = 1, \Omega = (0, 2)$ *e*

$$u(x) = \begin{cases} x & se\ 0 < x \leq 1, \\ 1 & se\ 1 < x < 2. \end{cases}$$

Então, se

$$v(x) = \begin{cases} 1 & se\ 0 < x \leq 1, \\ 0 & se\ 1 < x < 2, \end{cases}$$

resulta que $u' = v$. *De fato, dada* $\varphi \in C_0^\infty((0, 2))$, *temos*

$$\int_0^2 u\varphi' = \int_0^1 x\varphi + \int_1^2 \varphi' = \varphi(1) - 0 - \int_0^1 \varphi + 0 - \varphi(1) = -\int_0^2 v\varphi.$$

Exemplo 3.0.2. *Por outro lado, se* $n = 1, \omega = (0, 2)$ *e*

$$u(x) = \begin{cases} x & se\ 0 < x \leq, \\ 2 & se\ 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

então u *não possui uma derivada fraca. Com efeito, suponha, por absurdo, que exista uma função* $v \in L^1_{loc}(0, 2)$ *satisfazendo*

$$\int_0^2 u\varphi' = -\int_0^2 v\varphi,$$

para cada $\varphi \in C_0^\infty((0,2))$. *Então,*

$$-\int_0^2 v\varphi = \int_0^1 x\varphi' + 2\int_1^2 \varphi' = \varphi(1) - 0 - \int_0^1 \varphi + 0 - 2\varphi(1) = -\varphi(1) - \int_0^1 \varphi,$$

ou seja

$$\varphi(1) = -\int_0^1 \varphi + \int_0^2 v\varphi,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty((0,2))$. *Escolhendo a sequência de funções* $(\varphi_m) \subset C_0^\infty((0,2))$ *satisfazendo* $\varphi_m(1) = 1, 0 \leq \varphi_m(x) \to 0$ *para todo* $x \neq 1$, *obtemos através do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que*

$$1 = \lim_{m\to\infty} \varphi_m(1) = \lim_{m\to\infty}\left[-\int_0^1 \varphi_m + \int_0^2 v\varphi_m\right] = 0,$$

o que é uma contradição.

Definição 3.0.5. *Uma função suavizante é uma função não-negativa* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *com* $supt\varphi = B_1(0)$ *e satisfazendo* $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$

Um exemplo de função suavizante é a função

$$\varphi(x) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

onde a constante c é escolhida de forma que tenhamos $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$

Proposição 3.0.1. *(Regra do produto) Se* $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ *e* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *então* $\phi u \in W^{1,p}(\Omega)$ *e*

$$\partial_i(\phi u) = (\partial_i\phi)u + \phi(\partial_i u) i = (1,2,3,...,n)$$

Demonstração: *Para todo* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, *usando a regra do produto para funções diferenciáveis no sentido clássico e a definição de derivada fraca (pois* $\varphi\phi \in C_0^\infty(\Omega)$*), temos*

$$\int_\Omega (\phi u)(\partial_i\varphi)dx = \int_\Omega u[\phi(\partial_i\varphi)]dx = \int_\Omega u[\partial_i(\phi\varphi) - \varphi(\partial_i\phi)]dx$$

$$= -\int_\Omega (\partial_i u)\phi\varphi dx - \int_\Omega u(\partial_i\phi)\varphi dx$$

$$-\int_\Omega [(\partial_i u)\phi + u(\partial_i\phi)]\varphi dx,$$

de onde segue o resultado.

Proposição 3.0.2. *Sejam* $f \in C^1(\mathbb{R}), f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ *e* $u \in W^1$. *Então, a função composta* $f \circ g \in W^1(\Omega)$ *e*

$$\nabla(f \circ g) = f'(u)\nabla u.$$

Demonstração: *Veja [1,pg.270] .*

3.0.2 Espaços de Sobolev

Definição 3.0.6. *O espaço de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ *é definido como o conjunto de todas as funções* u *em* $L^p(\Omega)$ *cujas derivadas de ordem* k *pertence a* $L^p(\Omega)$.

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial_i u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } i = 0, 1, 2, ..., n\}.$$

Temos também que nosso Espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ *é um espaço normado com a seguinte norma;*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{i=0}^{n} \int_\Omega |\partial_i u|^p\right)^{1/p},$$

a qual é equivalente a norma

$$\|u\|_{W^{k,p}}(\Omega) = \sum_{i=0}^{n} \left(\int_\Omega |\partial_i u|^p\right)^{1/p} = \sum_{i=0}^{n} \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Definimos ainda

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \text{ fecho de } C_0^\infty(\Omega) \text{ em } W^{1,p}(\Omega).$$

Teorema 3.0.1. $W^{1,p}(\Omega)$ *é um espaço de Banach separável se* $1 \leq p < \infty$ *e reflexivo e uniformemente convexo se* $1 < p < \infty$.
$W^{1,2}(\Omega)$ *é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno*

$$\langle u, v\rangle_{W^{1,2}(\Omega)} = \sum_{i=o}^{n} \langle \partial_i u, \partial_i v\rangle_{L^2(\Omega)},$$

Demonstração: Seja $\{u_m\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Então para cada $i = (1, 2, 3, ..., n)\{\partial_i u_m\}$ é uma sequencia de cauchy em $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach, para cada $i = (1, 2, 3, ..., n)$ existem funções $v_i \in L^p(\Omega)$ tais que

$$\partial_i u_m \to v_i \quad \text{em } L^p(\Omega).$$

Denote $u := v_0,$ de modo que $u_m \to u$ em $L^p(\Omega)$. Para provar que $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de

Banach, basta então provar que $\partial_i u = v_i$ para todo i, pois isso automaticamente implicará por definição que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e que $u_m \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. E, de fato, como convergência em $L^p(\Omega)$ implica em convergência em $L^1_{loc}(\Omega)$, temos para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u(\partial_i \varphi)dx = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m(\partial_i\varphi)dx = -\lim_{m\to\infty}\int_\Omega (\partial_i u_m)\varphi dx = -\int_\Omega v_i\varphi dx.$$

Para provar a separabilidade e a reflexividade (quando p > 1) de $W^{1,p}(\Omega)$, basta considerar a imersão de $W^{1,p}(\Omega)$ em $n+1$ cópias de $L^p(\Omega)$:

$$W^{1,p} \hookrightarrow \underbrace{L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times ... \times L^p(\Omega)}_{n+1 vezes}$$

$$u \rightarrowtail (\partial_i u)_{0\leq i\leq n}$$

e usar o fato de que o produto cartesiano finito de subespaços fechados de espaços de Banach separáveis são separáveis. Analogamente, vale para convexidade uniforme e reflexibilidade.

3.0.3 Imersão Contínua de Espaços de Sobolev

Agora vamos ver alguns resultados e imersão, que são cruciais no desenvolvimento das nossas soluções fracas. Tais resultados são úteis pois podemos o mesmo objeto sob duas óticas diferentes a depender da imersão. Pela definição de norma em $W_0^{1,p}(\Omega),$ segue a imersão

$$W_0^{1,p} \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é contínua, pois

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Veremos nesta seção, outros valores de q para L^q de modo que a imersão

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

é contínua.

Teorema 3.0.2. *(Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Se $1 \leq p < n$, então existe uma constante $C = (n,p)$ tal que para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ nós temos*

$$\|u\|L^{p^*}(\Omega) \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Veja [3,pg.263]

Observação 3.0.1. *O expoente* $p^* = \frac{np}{n-p}$ *não é arbitrário, é escolhido de modo que a desigualdade a cima seja válida. Ele é chamado de Expoente Crítico de Sobolev.*

Teorema 3.0.3. *(Teorema da Imersão de Sobolev) Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto. Se* $1 \leq p < n$ *então*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega).$$

Corolário 3.0.1. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado. Se* $1 \leq p < n$ *então*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

para todo $1 \leq q \leq p^*$

Demonstração: Como Ω é limitado, pela Desigualdade de Hölder vale a imersão contínua $L^{p*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para qualquer $1 \leq q \leq p^*$. Compondo esta imersão contínua com a imersão contínua do corolário anterior, obtemos o resultado que buscamos.

Corolário 3.0.2. *(Desigualdade de Poincaré) Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado. Então, existe uma constante* $C = C(n, \Omega) > 0$ *tal que, para todo* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, *vale*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Consequentemente, a norma

$$\|u\|_0 := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

é uma norma equivalente em $W_0^{1,2}(\Omega)$ *e este é um espaço de Hilbert com o sequinte produto interno:*

$$\langle u, v\rangle_0 := \int_\Omega \nabla u.\nabla v$$

Demonstração: Segue da Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev e da imersão contínua

$$L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

3.0.4 Resolvendo algumas EDP's

Teorema 3.0.4. *(O Problema de Dirichlet Homogêneo) Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado e* $f \in L^2(\Omega)$. *Então, o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & em\ \Omega \\ \quad u = 0, & sobre\ \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução fraca única $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Observação 3.0.2. *Para* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado dizemos que* u *é uma solução fraca do Problema de Dirichilet Homogêneo se*

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi,\ \ para\ toda\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Demonstração: No Teorema de Lax-Milgram, vamos considerar $H = W_0^{1,2}(\Omega)$, o qual é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx,$$

cuja norma correspondente é

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, definimos

$$B : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ por}$$

$$B\left(u, v\right) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \langle u, v\rangle_{L^1(\Omega)}$$

e também definimos

$$\varphi : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ por}$$

$$\varphi(v) = \int_\Omega f(x)v\ dx$$

Primeiro, verifiquemos a continuidade de B. Observe que

$$|B(u, v)| = \left|\int_\Omega \nabla u \nabla v dx\right| \le \int_\Omega |\nabla u \nabla v| dx$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\int_\Omega |\nabla u \nabla v| dx \le \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| dx$$

Daí, pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u||\nabla v|dx \leq ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}||\nabla v||_{L^2(\Omega)} = ||u||_{W_0^{1,2}(\Omega)}||v||_{W_0^{1,2}(\Omega)},$$

ou seja,

$$|B(u,v)| \leq ||u||_{W_0^{1,2}(\Omega)}||v||_{W_0^{1,2}(\Omega)}.$$

Com isso, vemos que B é contínua. Vejamos, agora, a coercividade. Note que

$$B(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = ||u||^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

Portanto, B é coerciva. Como φ é claramente linear, vejamos a continuidade de φ. Note que

$$|\varphi(v)| = \left|\int_\Omega fv\ dx\right| \leq \int_\Omega |fv|dx$$

Pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega |fv|dx \leq ||f||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)}.$$

Com isso, podemos utilizar a Desigualdade de Poincaré, ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$||f||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} \leq ||f||_{L^2(\Omega)}C||\nabla v||_{L^2(\Omega)}.$$

Válida para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, Portanto, estamos nas condições do Teorema de Lax-Milgram, ou seja, existe uma única $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$B(u,v) = \varphi(v),\ \forall\ v \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

isto é,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x)v dx,\ \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

Portanto, existe uma única solução fraca para o problema.

Teorema 3.0.5. *(O Problema de Dirichilet) Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in W^{1,2}(\Omega)$. Então, existe uma única solução fraca $u \in W^{1,2}(\Omega)$ para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Demonstração: Vamos primeiro provar a existência de uma função $u \in W^{1,2}(\Omega)$ que minimiza o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega fv,$$

em que $E = \{v \in W^{1,2}(\Omega) : v - g \in W_0^{1,2}(\Omega)\}$ é o espaço das funções admissíveis para o nosso problema, isto é, a existência de $u \in E$ tal que

$$I(u) = \min_{v\in E}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega fv\right).$$

Pela Desigualdade de Poincaré, o funcional I é limitado por baixo, pois

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega f(v-g) - \int_\Omega fg \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v-g\|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega fg \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(v-g)\|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega fg \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} - C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla g\|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega fg,
\end{aligned}$$

e a função real $h(t) := t^2 - at + b$ é limitada por baixo para $t \in \mathbb{R}$, para $a, b \in \mathbb{R}$ constantes. Podemos então definir

$$I_0 = \inf_{v\in E} I(u).$$

Seja $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência minimizante para I, isto é,

$$I(u_m) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx - \int_\Omega fu_m \to I_0.$$

Note que o funcional I é convexo. Devido a convexidade da função $x \to |x|^2$, ou seja,

$$I(tu + (1-t)v) = \int_\Omega |t\nabla u + (1-t)\nabla v|^2 dx \leq \int_\Omega [t|\nabla u|^2 + (1-t)|\nabla v|^2] dx$$

$$= tI(u) + (1-t)I(v).$$

Logo, temos

$$I_0 \leq I\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right) \leq \frac{1}{2}I(u_k) + \frac{1}{2}(u_l) \to I_0$$

quando $k, l \to \infty$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u_k - u_l)|^2 dx &= \int_\Omega |\nabla u_k| dx + \int_\Omega |\nabla u_l|^2 dx - 2\int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right)\right|^2 dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u_k|^2 dx + 2\int_\Omega f u_k + \int_\Omega |\nabla u_l|^2 dx + \int_\Omega f u_l \\
&= -2\int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right)\right|^2 dx - 4\int_\Omega f\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right) \\
&= 2I(u_k) + 2I(u_l) - 4I\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right),
\end{aligned}$$

concluímos então que (∇u_m) é uma sequência de Cauchy em $L^2(\Omega)$ e, portanto, (u_m) é uma sequência de Cauchy em $W^{1,2}(\Omega)$, ou seja, existe $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W^{1,2}(\Omega)$. Em particular, segue que $I(u) = I_0$ e $u - g \in W_0^{1,2}(\Omega)$, pois $W_0^{1,2}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{1,2}(\Omega)$. Como $u_m \to u$ em $L^2(\Omega)$ e $\nabla u_m \to u$ em $L^2(\Omega)$, resulta que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx - \int_\Omega f u_m \to \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u,$$

e concluímos que u é o minimizador do funcional de Dirichilet. Em seguida, verificamos que u é a solução fraca do nosso problema. De fato, como u é um minimizante para o funcional I, segue, em particular, que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}|I(u + tv)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u + tv)|^2 - \int_\Omega f(u + tv)|\right]_{t=0} \\
&= \int_\Omega \nabla u.\nabla v - \int_\Omega f v,
\end{aligned}$$

para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, o que conclui a prova do Teorema.

Referências Bibliográficas

[1] H. Brezis. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.** New York: Springer, 2010.

[2] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira. **Fundamentos de Análise Funcional.** 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. [Coleção Textos Universitários]

[3] L. Evans, **Partial Diferential Equations.** Graduate Studies in Mathematics, 19, AMS, 1998.

[4] E.L.Lima **Espaços Métricos**. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.