UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

JOSÉ FABIANO DA SILVA

O ENSINO DE NÚMEROS PRIMOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Pitimbu – PB
2023

JOSÉ FABIANO DA SILVA

O ENSINO DE NÚMEROS PRIMOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora do Curso de Licenciatura em Matemática na modalidade a distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador:Prof. Dr. Pedro Antônio Hinojosa vera

Pitimbu – PB
2023

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586e Silva, José Fabiano da.
O ensino de números primos na Educação Básica / José Fabiano da Silva. - João Pessoa, 2023.
43 p. : il.

Eduação a Distância, UFPB, Polo Pitimbu.
Orientação: Pedro Antônio Hinojosa Vera.
TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Números primos. 2. Educação Básica. 3. Matemática. I. Vera, Pedro Antônio Hinojosa. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 51(043.2)

Elaborado por Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB-15/113

JOSÉ FABIANO DA SILVA

O ENSINO DE NÚMEROS PRIMOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora do Curso de Licenciatura em Matemática na modalidade a distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 12 / 06 / 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera (UFPB)

(Orientador)

Documento assinado digitalmente
gov.br ALESSANDRO MIGNAC CARNEIRO LEAO
Data: 26/06/2023 22:02:30-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Ms. Alessandro Mignac Carneiro Leão (IFSertãoPE)

(Examinador)

Documento assinado digitalmente
gov.br PEDRO ANTONIO GOMEZ VENEGAS
Data: 26/06/2023 19:46:53-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Pedro Antonio Gómez Venegas (UFPB)

(Examinador)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus pelo dom da vida, pela sua infinita bondade e misericórdia, pois mesmo eu sendo falho e pecador Ele tem me sustentado. Agradeço principalmente à minha esposa Luciana Marinho Lins e filho Davi Lins da Silva. Aos amigos do curso de Licenciatura em Matemática que estiveram comigo o tempo todo me motivando. Sou grato a todos os meus Professores que fizeram parte desse processo tão importante, em meu processo de formação profissional.

Aos amigos do polo de Pitimbu que me fortaleceram durante o tempo de curso, sempre me aconselhando e me apoiando na realização de meu sonho. À Prof. Adriana, coordenadora do polo de Pitimbu e ao Prof. Jaciel, tutor do polo que me incentivou ao longo do curso. À Universidade Federal da Paraíba que proporcionou o acesso e a permanência, para buscar conhecimento por intermédio das instalações e tecnologia.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro A. Hinojosa, que aceitou orientar-me neste projeto.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo trazer uma aplicação prática para o estudo dos números primos e o seu ensino na educação básica, mais especificamente no nível fundamental, por meio do uso de materiais manipulativos. A proposta é elaborar diversas atividades atrativas e diferenciadas que possam auxiliar no aprendizado desse conteúdo dentro do contexto do ensino de matemática. A utilização de materiais manipulativos e jogos tem como objetivo tornar o ensino dos números primos mais divertido e interessante para os alunos. Acredita-se que, ao abordar esse conteúdo de forma lúdica, os estudantes se envolvem de maneira mais significativa, despertando seu interesse pelo tema e pelas atividades propostas ao final de cada aula. A pesquisa bibliográfica foi a revisão da literatura especializada em números primos e no ensino com materiais manipulativos. Dentre os principais autores que guiaram essa pesquisa, destacam-se D'Ambrosio [9], Caroline [4] e Jáfia [13]. Os resultados esperados dessa abordagem incluem o aumento do interesse e da motivação dos alunos em relação aos números primos, uma compreensão mais profunda dos conceitos e propriedades desses números, além do desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas e a criação de uma base sólida para o estudo de conceitos mais avançados na matemática. Essa pesquisa bibliográfica visa apoiar os educadores na adoção de abordagens pedagógicas eficazes, tornando o ensino dos números primos envolvente, significativo e acessível para os alunos.

Palavras-chave: Números Primos. Educação Básica. Matemática.

ABSTRACT

This study aims to provide a practical application for the study of prime numbers and their teaching in basic education, specifically at the elementary level, through the use of manipulative materials. The proposal is to develop various attractive and differentiated activities that can assist in the learning of this content within the context of mathematics education. The use of manipulative materials and games aims to make the teaching of prime numbers more fun and interesting for students. It is believed that by approaching this content in a playful manner, students become more engaged, sparking their interest in the topic and the activities proposed at the end of each class. The methodology adopted in this study was a review of specialized literature on prime numbers and teaching with manipulative materials. Among the main authors that guided this research, D'Ambrosio [9], Caroline [4], and Jáfia [13] stand out. The expected results of this approach include increased interest and motivation among students regarding prime numbers, a deeper understanding of the concepts and properties of these numbers, as well as the development of problem-solving skills and the establishment of a solid foundation for the study of more advanced concepts in mathematics. These guidelines aim to support educators in adopting effective pedagogical approaches, making the teaching of prime numbers engaging, meaningful, and accessible to students.

Keywords: Prime Numbers. Basic Education. Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TFA	Teoria Fundamental da Aritmética
RSA	Rivest-Shamir-Adleman
PCN	Parâmetro Curricular Nacional
BNCC	Base Nacional Comum Curricular

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde o início da humanidade, o homem usa a matemática para resolver seus problemas, sejam eles de qualquer natureza: práticos ou teóricos. Os filósofos e matemáticos da Grécia antiga foram os primeiros a perceber que a matemática vai muito além de simples cálculos e contagem. À medida que os humanos se desenvolviam formas mais apropriadas de escrever números e realizar cálculos precisavam ser encontradas. Tales de Mileto e Pitágoras foram significativos para a idealização e desenvolvimento desta ciência, de seu trabalho surgiu a teoria dos números baseada em números primos (CAROLINE; SILVA, 2020).

Cabe ressaltar que o matemático Euclides de Alexandria desempenhou um papel significativo ao formalizá-los nos livros didáticos que utilizamos hoje. Os números primos são fundamentais em áreas como engenharia, matemática e computação. Na computação, por exemplo, eles desempenham um papel essencial na tecnologia da informação, na proteção de dados e na criptografia (CAROLINE; SILVA, 2020).

Surpreendentemente, muitas pessoas acham que a matemática é chata, complicada e alguns até acham que é inútil. Essas pessoas certamente não têm grande experiência de ensino para mostrar como a matemática pode ser divertida, todos os seus conteúdos são partes relevantes para uma melhor compreensão do todo.

O processo de aprendizagem da manipulação de números é uma parte essencial da vida dos alunos, e eles estão constantemente ávidos por aprender e explorar o fascinante mundo dos números. A importância atribuída aos números está relacionada ao seu papel central em diversas teorias, especialmente no Teorema Fundamental da Aritmética (TFA). Esse teorema estabelece que todo número inteiro positivo maior que 1 pode ser decomposto de maneira única em um produto de números primos, levando em consideração a multiplicidade de cada primo. A fatoração resultante é única, independentemente da ordem dos fatores.

Os números primos são cruciais para a civilização contemporânea, pois são as ideias-chave por trás dos sistemas criptográficos no mundo moderno. Com o tempo, a pesquisa sobre esses números melhorou e várias descobertas surgiram com relação a esses números. Por definição, número primo é um número natural maior que 1, que tem como divisores apenas o número 1 e ele mesmo, ou seja, possui exatamente dois divisores positivos (JÁFIA). Além disso, o estudo desses números é complexo e traz questões não resolvidas até hoje (CAROLINE; SILVA, 2020).

Além dos conhecimentos básicos sobre números primos que a maioria dos professores transmite a seus alunos, é imprescindível apresentar um histórico sobre esses números, a fim de chamar a atenção e buscar um entendimento mais profundo do que está sendo estudado.

Assim, o objetivo deste trabalho é fornecer aplicações para o estudo dos números primos e seu ensino na educação básica por meio da manipulação de materiais, os objetivos específicos são: relatar uma breve história sobre os números primos, a importância destes; e analisar teoricamente a conjectura de Goldbach. Sendo assim, como já se sabe, a matemática está presente em todas as nossas vidas e é por isso que aprender matemática é tão importante para o desenvolvimento do aluno na vida escolar e estudos posteriores.

De acordo com JÀFIA (2018), os principais objetivos da educação matemática são fornecer aos alunos habilidades matemáticas relevantes para a vida, ensiná-los a resolver problemas do mundo real e aprimorar sua capacidade de usar uma abordagem de resolução de problemas ao analisar situações.

É importante esclarecer que a ideia de considerar todos os números ímpares como primos e afirmar que os negativos dos números primos também são primos é um equívoco. Essas afirmações não são corretas e refletem concepções errôneas dos alunos.

Em muitos países, as abordagens tradicionais de ensino da matemática, que se baseavam em objetivos de aprendizagem isolados, foram substituídas por abordagens construtivistas, que enfatizam a aprendizagem conceitual e relacional. Essas abordagens buscam proporcionar uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

Na verdade, currículos desenvolvidos com base em métodos tradicionais contribuíram para que a educação matemática ficasse presa em um ciclo vicioso. Portanto, é importante adotar abordagens mais abrangentes, que promovam uma aprendizagem significativa e conectem os diferentes conceitos matemáticos de maneira coerente.

No currículo de matemática do ensino fundamental, a unidade temática de “números” são pré-requisitos para alguns padrões curriculares (por exemplo, escrever um número usando expoentes) e, portanto, são listados antes dos tópicos de álgebra na sexta e oitava série BNCC (2018). Fatores e múltiplos são tópicos importantes da vertente numérica em matemática e são frequentemente incluídos em exames nacionais. No entanto, os alunos têm dificuldades de aprendizagem relacionadas a esses dois conceitos.

Este trabalho inicia-se com uma introdução, seguida pelo estudo do Teorema Fundamental da Aritmética e um breve histórico e sua importância. São discutidos também o Crivo de Eratóstenes, a Conjectura de Goldbach, a relação entre números primos e criptografia, e os números primos de Mersenne. Em seguida, são abordados aspectos relacionados à prática do ensino de matemática, incluindo jogos e atividades, como formação de retângulos e descoberta de senhas. O trabalho é concluído com a apresentação dos resultados esperados.

2 O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

O Teorema Fundamental da Aritmética é apresentado como: seja um número natural, n > 1. Então existem números primos $p_1 < p_2 < p_3 ... < p_r$, e também, números naturais não nulos $n_1, n_2, n_3, ... n_r$, com r ≥ 1, tais que n = $p_1^{n1} p_2^{n2}\ p_3^{n3}$ ... p_r^{nr} , além disso, essa decomposição é única (OBMEP, 2023). Este é um teorema muito importante na teoria dos números – é por isso que é chamado de *fundamental.* Ele nos diz duas coisas: existência (há uma fatoração de primos) e unicidade (a fatoração de primos é única). (EVES, 2002).

A parte da existência é útil porque nos diz que os primos são de alguma forma os tijolos de construção dos quais todos os números inteiros positivos são feitos A parte da unicidade permite uma única decomposição em fatores primos vejamos:

I. Colorário. Todo inteiro n > 1, admite uma única decomposição da forma n = $p_1^{k1} p_2^{k2}$ ... p_r^{kr}, onde, para i = 1,2..,r cada k, é um inteiro positivo e cada p_i é um número primo, com $p_1 <\ p_2 < \cdots < p_n$. Denominada decomposição canônica do inteiro positivo n > 1 (OBMEP, 2023). Por exemplo: 36 = $2^2.3^2$, ou seja, essa decomposição só é válida para o número 36. Logo, se conhecemos a fatoração primária de n, então conhecemos a fatoração primária de n^2, com a certeza de que n também não pode ter outra fatoração primária (EVES, 2002).

Outro aspecto relevante sobre números primos é a existência de uma infinidade deles. Testar a primalidade de números seria uma tarefa mais fácil se existisse apenas uma quantidade finita de números primos, uma vez que seria suficiente, dependendo obviamente dessa quantidade de primos, criar uma lista com todos os primos e consultá-la sempre que houvesse a necessidade de reconhecer se determinado número é primo ou não.

Neste aspecto, são apresentadas as três provas distintas da infinitude dos primos, que empregam conceitos diversos, mas compartilham, direta ou indiretamente, esse teorema. Além disso, são utilizados dois testes de primalidade que podem ser aplicados a qualquer número natural, possuindo enunciados simples e de fácil entendimento.

No entanto, ambos se mostram pouco eficientes à medida que queremos testar a primalidade de números cada vez maiores. O nosso primeiro teste, e o mais importante, será uma versão moderna do crivo de Erastóstenes, e talvez seja a forma mais conhecida e mais antiga de reconhecer se determinado número é primo ou não (EVES, 2002).

Este teste baseia-se essencialmente na existência da fatoração de um número em fatores primos. Estima-se que Erastóstenes nasceu por volta de 280 a.c. na cidade de Cirene, na costa sul do mar Mediterrâneo, foi bibliotecário-chefe da Universidade de Alexandria e por volta de 194 a.C. ficou quase cego, o que levou a suicidar-se após voluntariamente ter deixado de se alimentar (EVES, 2002).

Erastóstenes foi singularmente talentoso em todos os ramos do conhecimento de seu tempo. Distinguiu-se como matemático, astrônomo, geógrafo, historiador, filósofo, poeta e atleta. Consta que alunos da Universidade de Alexandria costumavam chamá-lo de Pentathlus, o que significa campeão em cinco esportes atléticos (EVES, 2002, p. 197).

Em suma, a compreensão dos números primos e a aplicação do Teorema Fundamental da Aritmética têm implicações profundas em várias áreas do conhecimento. O legado deixado por Erastóstenes e outros matemáticos ao longo da história continua a inspirar e impulsionar o avanço da matemática, revelando a beleza e a importância dos números primos em nossas vidas cotidianas e em busca de respostas mais profundas sobre a natureza dos números.

3 UM BREVE HISTÓRICO

Os números primos têm despertado grande interesse dos matemáticos desde sua descoberta, não está claro se foi proposto na Grécia pelo matemático Euclides de Alexandria por volta de 530 a.C., ou através da escola pitagórica pelo matemático Pitágoras de Samos. Nesse viés, o que é certo é que ainda hoje, mais de 2.000 anos depois, o uso de números primos ainda é a base para a criptografia de dados em empresas e órgãos governamentais ao redor do mundo.

Na atualidade, há uma necessidade crescente de encontrar números primos cada vez maiores para aperfeiçoamento tecnológico. Pois possuem papel fundamental nas áreas engenharia, da matemática e da computação. Para os matemáticos, os números primos fornecem problemas e conjecturas insolúveis que foram exploradas por grandes figuras como Euler (1707-1783), Gauss (1777-1855) e Cantor (1845-1918).

Mostraremos a necessidade que os humanos têm de computar à medida que a vida e as atividades se tornam mais complexas. Em seguida, os conceitos matemáticos, que são os sistemas subjacentes, variados ao longo da civilização, muitos dos quais os matemáticos utilizamos regularmente. Fibonacci (1170-1250), Gauss (1777-1855) e Euler (1707-1783).

3.1 A importância dos números primos

Os gregos foram os primeiros a descobrir que havia mais de um número primo. Eles chamaram esses números especiais de “Blocos de Construção” porque eram como peças menores que podem ser usadas para construir objetos maiores. Muitos fatos importantes sobre números primos foram comprovados por meio de pesquisas, incluindo os teoremas sobre quantos desses números são possíveis, no entanto, alguns cálculos de longa data ainda não foram comprovados ou refutados (CASTRO, 2014).

Destaca-se que números primos desempenham um papel importante na criptografia, nenhuma fórmula estabelecida atualmente existe para determinar os números primos exclusivos usados na criptografia, essa falta de informação torna esses números tão vitais para a causa. O poder de computação aumentou tremendamente ao longo dos anos, mas ainda levam décadas para descobrir os números primos necessários para formar um número natural (CASTRO, 2014).

Isso ocorre porque muitos algoritmos de criptografia usam números primos para codificar mensagens que devem ser privadas, esses algoritmos garantem que as informações não possam ser acessadas por ninguém, exceto pelo destinatário pretendido. Qualquer computador com capacidade de processamento atual nunca será rápido o suficiente para descobrir esses números, a menos que tenha milhões de cálculos por segundo.

A criptografia usa números primos para codificar informações confidenciais. Isso ocorre porque os números maiores do que qualquer outro número não podem ser quebrados por ninguém. Muitas disciplinas diferentes usam números primos, por exemplo, a teoria musical e a arquitetura. Outra grande parte da criptografia é o uso de números primos na eletrônica. Ao acessar um site que usa informações confidenciais, como um banco ou cartão de crédito, as informações são codificadas transformando-as em um número primo muito grande (CASTRO, 2014).

Mesmo os computadores mais avançados de hoje não conseguem decifrar o que é um número alto acima de 250 dígitos em relação aos números primos, graças à complexidade envolvida. Usando chaves baseadas em números primos, é possível se comunicar com segurança por meio de mensagens confidenciais entre dois computadores. Isso torna impossível para alguém mal-intencionado invadir nossas contas financeiras ou cartões de crédito.

Uma chave criptográfica é geralmente gerada a partir de números primos por causa das propriedades matemáticas dos números primos, que oferecem um alto nível de segurança para algoritmos criptográficos. Existem dois principais tipos de criptografia que utilizam números primos: criptografia assimétrica (ou de chave pública) e criptografia simétrica (CASTRO, 2014).

Na criptografia assimétrica, são utilizados pares de chaves, uma pública e uma privada. A chave pública é usada para criptografar os dados, enquanto a chave privada é usada para descriptografar. A segurança desse sistema é baseada em problemas matemáticos difíceis de serem resolvidos, como a fatoração de números grandes. Números primos grandes são escolhidos como base para gerar chaves seguras, pois a fatoração de números primos grandes é um problema computacionalmente complexo.

Na criptografia simétrica, uma única chave é usada tanto para criptografar quanto para descriptografar os dados. A segurança desse sistema depende da capacidade de proteger a chave secreta. Números primos não são diretamente utilizados na criptografia simétrica, mas podem ser usados como base para gerar uma chave secreta robusta e aleatória.

Os números primos são preferidos devido às suas propriedades específicas que contribuem para a segurança dos algoritmos criptográficos. A seguir veja alguns apontamentos de Castro (2014):

1. Fatoração: decompor números compostos grandes em fatores primos é um problema computacionalmente difícil. A segurança de muitos algoritmos de criptografia baseia-se na dificuldade de fatorizar números primos grandes em tempo razoável. Ao usar números primos grandes na geração de chaves criptográficas, busca-se garantir que a fatoração desses números para obter as chaves seja extremamente difícil.

2. Divisibilidade: Os números primos têm a propriedade de ter apenas dois divisores: 1 e o próprio número primo. Essa característica é usada em algoritmos criptográficos para garantir que a divisão dos números envolvidos seja restrita e não revele informações sensíveis.

3. Aleatoriedade: Os números primos são considerados mais "aleatórios" do que outros números, o que é importante para garantir a segurança dos algoritmos criptográficos. A escolha de números primos aleatórios para gerar chaves criptográficas ajuda a evitar padrões previsíveis e facilitar ataques de criptoanálise.

4. Longa vida útil: Números primos grandes são conhecidos por sua longa vida útil em termos de segurança. Ao usar números primos com muitos dígitos na geração de chaves criptográficas, busca-se garantir que as chaves permaneçam seguras por um período significativo, mesmo com o avanço do poder computacional.

Portanto, os números primos são essenciais na criptografia para fornecer segurança e resistência a ataques criptográficos. Sua utilização garante a confiabilidade dos sistemas criptográficos e a proteção dos dados sensíveis.

Nas últimas décadas, no entanto, os números primos não foram apenas muito procurados pelos matemáticos. Uma aplicação imediata desses números é a segurança da informação, um campo da criptografia. A criptografia Rivest-Shamir-Adleman (RSA) é uma ferramenta essencial para enviar e receber informações confidenciais que fornecem especificamente ao destinatário acesso à mensagem do remetente. Seu uso tornou-se necessário desde os tempos antigos, quando na guerra os aliados tinham que usar códigos para se comunicarem sem serem interceptados pelo inimigo.

Assim, a criptografia busca gerar um código para codificar uma mensagem usando um conjunto de regras que somente o destinatário pode decifrar. Castro (2014) explica que a criptografia é criada a partir de dois números primos que geram uma chave pública. Essa chave contém o resultado do produto desses primos. Então, basta a gente determinar esses números primos para decifrá-lo. O processo usado é a fatoração.

Os desenvolvimentos da pesquisa neste campo são muito procurados hoje porque a segurança dos dados tornou-se primordial devido à tecnologia que temos. Um exemplo simples, mas importante, são os nossos dados bancários. Castro (2014) explica que, para nos manter seguros, são utilizadas chaves de criptografia compostas por números primos, essas chaves são públicas, mas são quase impossíveis de decodificar porque envolvem descobrir os números primos que fatoram os números em questão.

Ressalta-se que os números podem ser fatorados em fatores primos de uma maneira única, mas acontece que encontrar os fatores primos de um número muito grande é uma tarefa extremamente difícil. O autor Castro (2014) também destaca o fato muito importante de que, mesmo com computadores muito poderosos, não há nenhuma maneira eficiente conhecida de ajudar a fatorar números muito grandes, o que destaca os mistérios que esses números têm explicado.

Por exemplo, dado o número 1273, talvez não precise de muito tempo para encontrar seus fatores primos, mas a criptografia usa uma infinidade de números, o que dificulta sua fatoração, dificultando o acesso ao código. É preciso pegar um conjunto de números primos e gerar um novo número muito grande (CASTRO, 2014).

Portanto, mesmo que você tenha acesso a esse número, é muito difícil encontrar seus fatores primos. Como resultado, atualmente existem muitos pesquisadores tentando encontrar números primos cada vez maiores, tornando mais difícil decifrar essa poderosa ferramenta de criptografia.

3.2 Crivo de Eratóstenes

O Crivo de Eratóstenes é um método antigo e eficiente para encontrar todos os números primos até um determinado limite. Ele foi desenvolvido pelo matemático grego Eratóstenes no século III a.C. O processo do Crivo de Eratóstenes é baseado na ideia de eliminar os múltiplos de cada número primo encontrado, começando pelo número 2 (SILVA; NOGUEIRA, 2021). O algoritmo segue os seguintes passos:

1. Cria-se uma lista de números de 2 até o limite máximo que se deseja analisar.
2. Marca-se o número 2 como primo e elimina-se todos os seus múltiplos da lista.
3. Encontra-se o próximo número não marcado da lista e a marca como primo.
4. Elimina-se todos os múltiplos desse novo número primo encontrados na lista.
5. Repete-se os passos 3 e 4 até que todos os números da lista tenham sido analisados.

Ao final do processo, todos os números primos até o limite máximo serão marcados na lista, enquanto os números não marcados serão os compostos. O Crivo de Eratóstenes é um método eficiente porque, ao eliminar os múltiplos dos números primos, reduz-se significativamente o número de divisões necessárias para verificar a primalidade de um número. Isso torna o processo mais rápido do que testar individualmente cada número em busca de divisores.

O Crivo de Eratóstenes é uma técnica clássica e simples para encontrar números primos e ainda é amplamente utilizado atualmente, principalmente em contextos computacionais, para gerar sequências de números primos de forma eficiente.

Como exemplo: Primos até 50.

1º passo: É suprimido o 1.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

2º passo: 2 é primo. Logo, suprimimos os múltiplos do 2 exceto o 2.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

3º passo: Com o próximo primo, que é o 3, suprimimos todos os múltiplos dos 3 maiores que 3.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

4º passo: O próximo primo que sobra é o 5, logo, suprimimos todos os múltiplos dos 5 maiores que o 5.

	2	3	~~4~~	~~5~~	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

5° passo: O próximo primo é o 7. Assim, eliminaremos todos os múltiplos do 7 com exceção do próprio 7.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~*32*~~	~~*33*~~	~~*34*~~	~~*35*~~	~~*36*~~	*37*	~~*38*~~	~~*39*~~	~~*40*~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

E, em ato contínuo, o processo com os seguintes primos 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47. Os que sobrarem na lista serão os primos almejados.

Embora o processo acima ser bastante eficiente, ela repete muitos passos que poderiam ser evitados. Assim, podemos otimizar o Crivo de Eratóstenes com os seguintes procedimentos: sendo x o número dado, calculamos primeiro a $\sqrt{x}$, pois, se x é composto, ele possui um fator primo menor que ou igual a $\sqrt{x}$. Assim é suficiente testar com primos começando com o 2 até a $\sqrt{x}$, descartando os múltiplos desses primos.

O procedimento descrito acima é bem simples, primeiro retiramos todos os pares da lista com exceção de 2. Quando descartamos todos os múltiplos de um determinado primo Pi. Também não é necessário efetuar o produto dos primos com os números pares, pois sabemos que o produto de um inteiro por um par vai resultar em um par que já retiramos da lista anteriormente.

Note também que se torna desnecessário nos preocuparmos com os ímpares menores que (Pi+1)2, pois os números compostos que foram formados e que são menores que tais números já foram retirados da lista, ou seja, é suficiente começar cada etapa pegando os múltiplos ímpares de Pi+1 maiores que ou iguais a Pi+1.

Como exemplo, iremos calcular os primos até o número 100.

Temos que $\sqrt{100}$ é 10. Nosso teste se restringe aos primos menores que 10. Retiramos todos os pares da lista com exceção do número 2. O próximo da lista é o 3, que é primo. Retiramos da lista todos os múltiplos ímpares de 3 a partir de 3^2. O próximo inteiro da lista que permanece é o 5, que também é primo. Daí, retiramos todos os múltiplos ímpares de 5 a partir de 5^2. O próximo da lista que ainda permanece é o 7. Retiramos os ímpares da lista a partir de 7^2. Os números que restam são todos primos. Assim, os números primos menores que 100 são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97.

3.3 A infinitude dos números primos

A infinidade de primos é conhecida há milhares de anos, aparecendo pela primeira vez nos Elementos de Euclides em 300 aC. Geralmente é usado como exemplo de uma prova classicamente elegante.

Para provar que existe um número infinito de primos, precisamos primeiro assumir o oposto: existe uma quantidade finita de primos. Sem o incômodo do infinito em nosso caminho, vamos apenas listá-los. P_1, P_2,...P_n.

P_1 é o nosso primeiro primo (também conhecido como 2). P_n é nosso enésimo primo, o maior.

Se multiplicarmos todos esses p 's juntos, obteremos outro número, o produto de primos. Vamos adicionar um a isso e chamar esse número de q. $q = p_1.p_2...p_n + 1$ nosso q teórico será muito, muito grande.

O que é q? Temos duas opções aqui: q é primo ou q não é primo (também conhecido como q é composto). Olhando para a primeira opção, já temos uma contradição. Sabemos que q não é e q não estava na lista. Se fosse primo, estaria na lista e não na lista ao mesmo tempo, o que não faz muito sentido. Então não deve ser primo.

Resta-nos uma opção: somos forçados a assumir que q é composto. Ou seja, tem fatores primos — dois dos primos da nossa lista! Mas quais? Vamos tentar p_1. Mas nos deparamos com um problema aqui. Dividindo q por p_1 nos dá

$$\frac{q}{p_1} = \frac{p_1 p_2 \dots p_n \quad + 1}{p_1}$$

$$\frac{q}{p_1} = \frac{\cancel{p_1} \; p_2 \dots p_n}{\cancel{p_1}} + \frac{1}{p_1}$$

$$\frac{q}{p_1} = p_2 \; p_3 \quad \dots p_n + \frac{1}{p_1}$$

O lado esquerdo da equação que conhcemos representa um número inteiro, pois quando dividimos qualquer número por um de seus fatores, obtemos outro fator que também é um número inteiro. Além disso, o produto de fatores primos resulta em um número inteiro, uma vez que todos os primos são inteiros.

No entanto, 1 dividido por p1 não pode ser um número inteiro, a menos que p1 seja igual a 1. No entanto, sabemos que isso não é possível, pois 1 não é considerado um número primo. Por essa razão, excluímos o número 1 da nossa lista de primos. Independentemente de quantas tentativas sejam feitas, a soma de um número decimal e um número inteiro não será igual a um número inteiro. Essa contradição nos leva à conclusão de que q não pode ser um número composto.

Não temos mais opções para q, então ele não deve existir. Não podemos criar uma lista de todos os primos, eles devem durar para sempre.

Um fato histórico divertido é que, quando Euclides provou a infinidade dos primos, ele não fez álgebra básica como eu fiz, embora seu argumento fosse o mesmo. A álgebra ainda não existia. Na verdade, sua própria ideia de números era muito diferente da nossa. Os antigos gregos faziam uma distinção entre números, razões e medidas. Euclides considerava os números primos “aqueles que são medidos apenas pela unidade”. Para ele, os números primos não eram números, mas uma unidade de comprimento incontável. Em outras palavras, ele provou a infinidade dos primos com nada além de alguma intuição geométrica.

3.4 A Conjectura de Golbach

Neste momento, será abordado outro problema envolvendo números, a conjectura de Goldbach, um dos mais antigos problemas não resolvidos da matemática. Tal conjectura foi proposta em 1742 por um matemático amador alemão chamado Christian Goldbach (1690-1764) (WANG, 2022).

Goldbach estudou Direito, Medicina e posteriormente aprofundou a Matemática durante suas viagens pela Europa. Após essa viagem, ele conheceu cientistas veneráveis da época, como Leibniz e Jakob, que acabaram influenciando muito seu gosto pela matemática. Como resultado, Goldbach ficou cada vez mais fascinado com o assunto, tornando-se até professor de matemática e publicando vários trabalhos sobre o assunto (WANG, 2022).

Naquela época, a correspondência entre cientistas era muito comum. Essas correspondências são de grande valia para os cientistas nessa fase de seus trabalhos. Pois a maior parte das informações contidas nessas cartas podem atingir um patamar superior quando compartilhadas com cientistas da mesma área e, adicionalmente, com pesquisadores de outras áreas. Goldbach se correspondeu com um dos principais matemáticos de seu tempo, o suíço Leonhard Euler (1707-1783). Em uma de suas cartas a Euler [ver Figura 1], Goldbach conjecturou sobre essa questão e seu nome permanecerá no centro das atenções da matemática até nossos dias atuais (WANG, 2022).

Figura 1 - Carta de Goldbach

Fonte: Conjectura (2018).

Na carta, Goldbach propunha a conjectura de que todo número inteiro maior que 2 pode ser escrito como a soma de três primos. Como o número 1 era considerado primo na época, algumas mudanças foram feitas na convenção moderna, onde os números primos começam em 2, mas não afetaram sua fórmula original (WANG, 2022).

Assim, a conjectura do número par afirma que todo número par maior que 2 é a soma de dois números primos, já a conjectura do número ímpar afirma que todo número ímpar maior que 5 é a soma de três números primos. Curiosamente, o

Teorema Fundamental da Aritmética trata da fatoração de números em produtos de primos, enquanto a conjectura trata da fatoração em somas de primos.

Por ser um problema fácil de entender, mas extremamente difícil de resolver, tornou-se muito intrigante desde o dia em que foi formulado. O próprio Euler declarou que tinha bastante certeza de sua precisão, mas não podia prová-la (O'CONNOR; ROBERTSON, 2006).

Considere-se, então, os primeiros números inteiros:

Figura 2 - Os primeiros pares como soma de dois primos

PARES	SOMA
4	$2 + 2$
6	$3 + 3$
8	$3 + 5$
10	$5 + 5$
12	$5 + 7$
14	$7 + 7$
16	$5 + 11$
18	$7 + 11$
20	$7 + 13$

Fonte: Autoria própria, 2023.

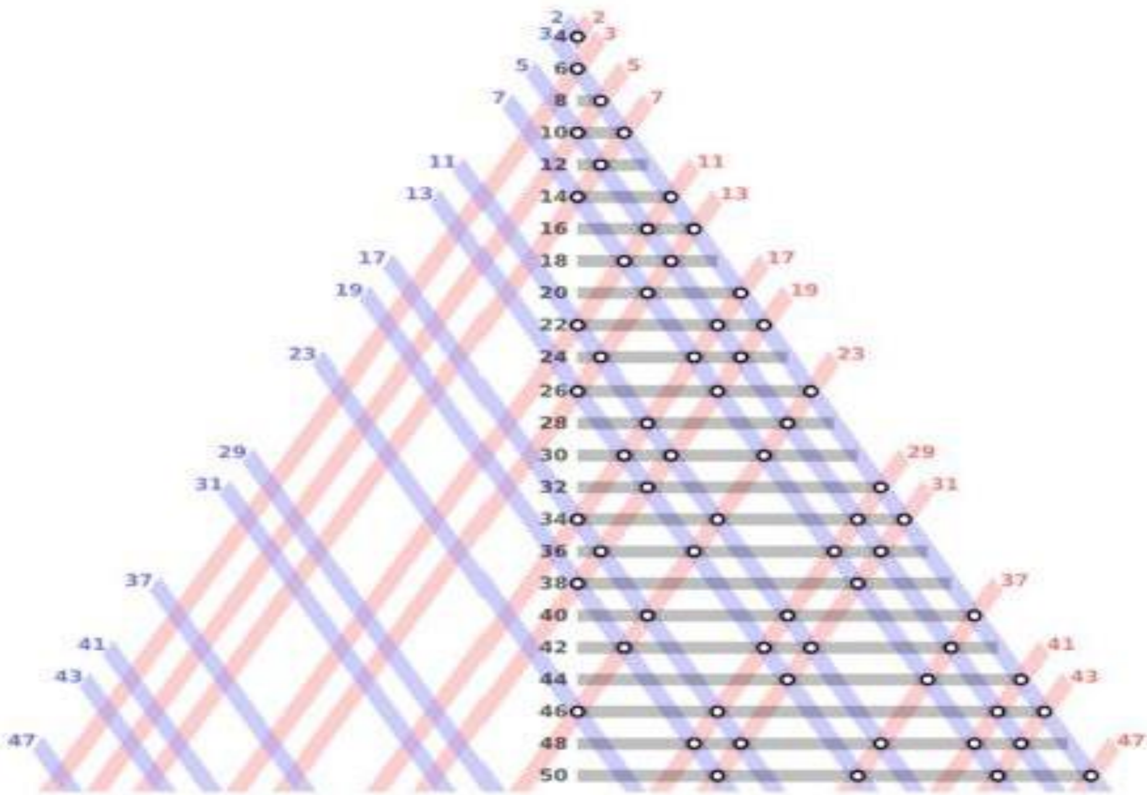
Figura 3 - Os primeiros ímpares como soma de três primos

ÍMPARES	SOMA
7	$2 + 2 + 3$
9	$2 + 2 + 5$
11	$2 + 2 + 7$
13	$3 + 3 + 7$
15	$3 + 5 + 7$
17	$3 + 7 + 7$
19	$5 + 7 + 7$
21	$3 + 7 + 11$
23	$5 + 5 + 13$

Fonte: Autoria própria, 2023.

Observe que, para cada número ímpar ou par que escolhemos, sempre haverá dois ou três números primos, respectivamente, cuja soma resultará no número que foi originalmente escolhido. Vale ressaltar também que essa soma não é única porque, por exemplo, o número 10 pode ser escrito como 5 + 5, mas também pode ser escrito como 3 + 7. O número 15 é escrito como 3 + 5 + 7, outra forma é 5 + 5 + 5 ou ainda 2 + 2 + 11. A figura abaixo nos mostra as somas distintas de números pares com mais clareza (JÁFIA, 2018).

Figura 4 - Inteiros pares de 4 a 50 como somas de dois primos



Fonte: Conjecture (2018).

Os números pares correspondem a linhas horizontais. Para cada número primo, há duas barras, em direções opostas, a soma de dois primos é a interseção das diagonais, marcada com um círculo. Assim, um círculo em uma determinada linha horizontal dá todas as partições dos números pares correspondentes na soma de dois números primos. A probabilidade de somas diferentes será maior, pois terão mais primos à nossa disposição.

No entanto, como já foi notado, à medida que o número aumenta, os primos ficam mais difíceis de encontrar, dificultando um pouco a verificação. Todavia, por meio de supercomputadores, muitas verificações confirmaram conjecturas para números extremamente grandes. Eves (2004, p. 625) observa que essa conjectura tem se mostrado válida para números até 100 milhões, mesmo assim um argumento matemático válido ainda não surgiu.

Em 2000, uma editora britânica ofereceu uma recompensa de US$ 1 milhão para quem pudesse provar a conjectura de Goldbach (1690-1764). A solução deveria ser apresentada até abril de 2002, mas ninguém conseguiu demonstrá-la antes dessa data. No entanto, alguns avanços recentes trouxeram resultados bastante notáveis. Em 2013, o matemático peruano Harald Helfgott provou a conjectura do número ímpar, também conhecida como "conjectura fraca de Goldbach". É assim chamado porque está incluído em outra conjectura que a conjectura ímpar é automaticamente resolvida se a conjectura par for provada primeira (JÁFIA, 2018).

De fato, se pudermos escrever todos os números pares maiores que 2 como a soma de dois primos, então adicionar o número 3 a um número par resultará em um número ímpar escrito como a soma de três primos. No entanto, enquanto Helfgott prova a parte fraca da conjectura, o inverso não é verdadeiro, ou seja, nenhuma outra conclusão verificada pode ser tirada da conjectura ímpar (JÁFIA, 2018).

Na teoria dos números, a conjectura fraca de Goldbach, também conhecida como conjectura ímpar de Goldbach, problema ternário de Goldbach ou problema dos 3 primos, afirma que: Todo número ímpar maior que 5 pode ser expresso como a soma de três primos. Pois, um primo pode ser usado mais de uma vez na mesma soma.

Essa conjectura é chamada de "fraca" porque se a conjectura forte de Goldbach (relativa a somas de dois primos) for provada, isso também seria verdadeiro. Pois se todo número par maior que 4 é a soma de dois primos ímpares, adicionar 3 a cada número par maior que 4 produzirá os números ímpares maiores que 7 (e o próprio 7 é igual a 2+2+3).

Em 2013, Harald Helfgott divulgou uma prova da conjectura fraca de Goldbach. A partir de 2018, a prova é amplamente aceita na comunidade matemática; A prova foi aceita para publicação na série *Annals of Mathematics Studies* em 2015 e tem passado por mais análises e revisões desde então; capítulos totalmente arbitrados em forma quase final estão sendo tornados públicos no processo. Alguns afirmam a conjectura como “todo número ímpar maior que 7 pode ser expresso como a soma de três primos ímpares.”

Esta versão exclui 7 = 2+2+3 porque requer o par primo 2. Em números ímpares maiores que 7, é um pouco mais forte, pois também exclui somas como 17 = 2+2+13, que são permitidas na outra formulação. A prova de Helfgott cobre ambas as versões da conjectura. Como a outra formulação, esta também segue a partir da conjectura forte de Goldbach.

Como o conteúdo principal do tópico são números primos, a ideia é brincar de encontrar esses números, os professores podem usar a conjectura de Goldbach (1690-1764) para continuar este tópico, em vez de apenas apresentar números primos por definição. A partir disso, os professores podem despertar alguma curiosidade sobre esses números e até mesmo perguntar aos alunos quais são os aspectos desses números. Essa aproximação permitirá ao professor aprender mais sobre sua turma com base nas respostas dadas pelos alunos.

Em seguida, perguntas como: "Se você escolher quaisquer outros números, eles têm as mesmas características?", "Quais são suas características diferentes?", essas perguntas estimulam a curiosidade dos alunos. De fato, Guizelini (2005) destaca “a curiosidade como uma marca pessoal que leva as pessoas a querer sempre saber mais sobre as coisas”. Uma vez alcançada esta fase, é importante que os alunos gozem da sua própria autonomia, ou melhor, estimulem os alunos a analisarem a forma como aprendem.

Após esse momento de preparação e motivação dos alunos, os professores podem introduzir a definição de números primos e apresentar alguns exemplos e suas características. É válido mencionar que os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) podem servir como base para abordar essa questão, contribuindo para proporcionar novas perspectivas aos alunos no desenvolvimento do tema.

Essas abordagens visam a redução das dificuldades encontradas pelos alunos, estimulando sua participação em atividades que envolvam o critério dos números primos. Além disso, buscam promover a construção de conceitos matemáticos, desenvolver a autonomia dos alunos e cultivar atitudes positivas em relação a novos estilos de aprendizagem. Através do estímulo ao interesse próprio, encorajamos a autonomia e o progresso no aprendizado da matemática.

> Embora no quarto ciclo se inicie um trabalho com algumas demonstrações, com o objetivo de mostrar sua força e significado, é desejável que não se abandonem as verificações empíricas, pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos (BRASIL, 1998, p. 87).

Os professores podem confirmar isso com um pequeno relato sobre a conjectura de Goldbach e como ela foi exposta, pois, como concluímos anteriormente, a perspectiva histórica sobre o assunto tem real valor de aprendizagem. Embora a conjectura de Goldbach em si não tenha aplicação prática direta, ela já foi usada como um problema de teste para avaliar a eficácia de diferentes algoritmos de fatoração de números primos. Esses algoritmos, por sua vez, têm aplicações práticas importantes em criptografia e segurança de computadores.

Por exemplo, alguns métodos de criptografia são baseados em propriedades dos números primos, como o fato de que é difícil fatorar um número grande em seus fatores primos. Se a conjectura de Goldbach fosse falsa, isso poderia ter implicações importantes para a segurança desses sistemas de criptografia. No entanto, como a conjectura de Goldbach ainda não foi resolvida, não há evidência direta de que isso seja um problema.

Em resumo, embora a conjectura de Goldbach em si não tenha aplicação prática direta, ela pode ser usada como um problema de teste para avaliar a eficácia de algoritmos de fatoração de números primos, que têm aplicações importantes em criptografia e segurança de computadores.

Nesse contexto, não há problema em falar um pouco sobre segurança da informação e explicar sua importância no mundo atual. Para isso, os professores devem apresentar a história de determinada disciplina de forma envolvente, e não podemos tratar a matemática como uma matéria seca, muito menos ensiná-la aos nossos alunos.

Para os grandes matemáticos, como Boyer (2019) e Stewart (2015) trabalhar com números é como enfrentar desafios e desvendar mistérios. Os alunos podem experimentar essa sensação ao verificar a aplicação dos conceitos em números pequenos, constatando que eles realmente funcionam para os números selecionados. Seria interessante se o professor não apresentasse essas informações prontas, mas incentivasse os alunos a observarem a aleatoriedade dos números primos. Questões como "Existe uma fórmula para encontrar números primos?" ou "Como eles estão distribuídos nos números naturais?" seriam muito pertinentes. A partir dessas indagações, pode-se explorar a importância de identificar padrões na matemática. Conforme explicado nos PCNs de Matemática:

> No decorrer do trabalho com os números, é fundamental estudar algumas relações funcionais pela exploração de padrões em sequências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas. A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra (BRASIL, 1998, p. 68).

Em resumo, pode-se concluir que o uso de sequências numéricas se revela um recurso eficaz para visualizar a distribuição dos números primos nos números naturais, pois permite que os alunos vejam, não só isso, mas também encontrem esses números tão misteriosos. Após revelar os problemas e os métodos e fórmulas para ajudar os alunos a resolvê-los ou pensar em possíveis soluções, achamos não só interessante como fundamental que os professores orientem os alunos a fazerem perguntas e a fazerem novas perguntas a partir do que foi revelado.

De fato, a BNCC destaca a importância dessa atividade:

> Pretende-se não apenas a resolução do problema, mas também que os alunos reflitam e questionem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada. Nessa perspectiva, pretende-se que os alunos também formulem problemas em outros contextos (BRASIL, 2017, p. 275).

Finalmente, quando a conjectura de Goldbach (1690-1764) e o Crivo de Eratóstenes tiverem sido apresentados, o professor poderá apontar para o fato de que, apesar das dúvidas sobre sua veracidade, várias outras questões permanecem sem solução. Ao fazer isso, ele mostraria que a matemática é uma ciência dinâmica e que está em constante evolução, o que impediria o que muitos ainda consideram matemática pronta e pronta. Também é útil falar do rigor da matemática em seus argumentos, pois mesmo que uma proposição seja verificada em muitos casos, ela não será aceita como verdadeira se não for provada em todos os casos.

3.5 Números Primos e Criptografia

Os números primos desempenham um papel essencial na criptografia, uma área da ciência da computação que lida com a segurança das informações. A criptografia baseada em números primos aproveita a propriedade fundamental dos números primos de serem divisíveis apenas por 1 e por eles mesmos (PAIXÃO, 2020).

Um dos exemplos mais conhecidos de criptografia baseada em números primos é o algoritmo de criptografia RSA (Rivest-Shamir-Adleman). Nesse algoritmo, a segurança é baseada na dificuldade de fatorar um número grande em seus fatores primos. O processo envolve a geração de dois números primos grandes e sua multiplicação para obter um número composto. A segurança do algoritmo reside no fato de que, até o momento, não existe um algoritmo eficiente para fatorar números grandes em seus primos constituintes (VAZ, 2021).

Esse princípio é utilizado em diversas aplicações criptográficas, como na proteção de informações confidenciais durante a transmissão de dados pela internet, na autenticação de usuários em sistemas seguros e na assinatura digital de documentos eletrônicos. Ao utilizar números primos na criptografia, é possível garantir a confidencialidade, integridade e autenticidade das informações transmitidas. A complexidade envolvida na fatoração de números grandes em seus primos torna extremamente difícil para um invasor decifrar a informação criptografada sem a chave correta (PAIXÃO, 2020).

Portanto, os números primos desempenham um papel crucial na segurança das comunicações e na proteção de dados sensíveis em diversas áreas, como transações financeiras, comunicação por email e armazenamento em nuvem. A criptografia baseada em números primos continua a evoluir para enfrentar os desafios constantes da segurança digital, garantindo a privacidade e a confiança nas comunicações eletrônicas (VAZ, 2021).

Os números primos gêmeos e a criptografia estão intimamente relacionados, pois ambos desempenham um papel importante na segurança da informação. Os números primos gêmeos são pares de números primos que diferem em apenas dois. Por exemplo, (3, 5), (11, 13) e (17, 19) são exemplos de números primos gêmeos. Esses pares de números primos têm uma propriedade especial que os torna relevantes na criptografia (PAIXÃO, 2020).

Um exemplo de como os números primos gêmeos são utilizados na criptografia é o algoritmo Diffie-Hellman, que é amplamente utilizado para estabelecer uma chave de criptografia compartilhada em sistemas de comunicação seguros. Nesse algoritmo, dois usuários podem trocar informações publicamente, utilizando números primos gêmeos como base para o cálculo de uma chave secreta compartilhada. Essa chave secreta é usada posteriormente para criptografar e descriptografar as mensagens trocadas entre os usuários (VAZ, 2021).

Além disso, os números primos gêmeos também são usados em outros algoritmos criptográficos, como o algoritmo RSA. Nesse caso, a segurança do algoritmo é baseada na dificuldade de fatorar números grandes em seus fatores primos. Os números primos gêmeos podem ser utilizados como parte do processo de geração de chaves criptográficas, fornecendo uma base sólida para a segurança das informações (VAZ, 2021).

Assim, os números primos gêmeos desempenham um papel relevante na criptografia, contribuindo para a geração de chaves criptográficas seguras e para o estabelecimento de comunicações confidenciais. A propriedade especial dos números primos gêmeos é explorada para fortalecer a segurança dos sistemas de criptografia, garantindo a confidencialidade e a integridade das informações transmitidas.

3.6 Números Primos de Mersenne

Os números primos de Mersenne são um tipo especial de números primos que podem ser representados na forma $2^p - 1$, onde "p" é um número primo. Esses números foram nomeados em homenagem ao matemático francês Marin Mersenne, que estudou e investigou propriedades relacionadas a eles (SANTOS, 2022).

Um número primo de Mersenne é, portanto, um número primo que é obtido ao subtrair 1 de uma potência de 2. Por exemplo, quando p = 2, temos $2^2 - 1 = 3$, que é um número primo de Mersenne. Outro exemplo é quando p = 3, onde temos $2^3 - 1 = 7$, também um número primo de Mersenne (SANTOS, 2022).

Esses números possuem várias propriedades interessantes. Por um lado, nem todo número obtido na forma $2^p - 1$ é um número primo de Mersenne. O valor de "p" deve ser um número primo para que o resultado seja um número primo de Mersenne. Por exemplo, quando p = 4, temos $2^4 - 1 = 15$, que não é um número primo (SANTOS, 2022).

Atualmente, os números primos de Mersenne são objeto de pesquisa e exploração através de projetos colaborativos e computação distribuída, como o projeto GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), que busca identificar novos números primos de Mersenne. Em 2019 descobriram o maior número primo conhecido. Com 24.862.048 dígitos ele pode ser expresso como $2^{82,589,933}$-1. A descoberta desses números contribui para o avanço do conhecimento matemático e para a exploração de propriedades fascinantes dos números primos.

4 SOBRE A PRÁTICA DO ENSINO DE MATEMÁTICA

Ao analisar a realidade das escolas atualmente e investigar o significado do termo "bom professor" para a comunidade escolar, observa-se a ausência sistemática de processos de avaliação dos professores nas instituições de ensino. Conforme ressaltado por Cunha (1989), a avaliação é um processo relacionado ao feedback prático do professor em sala de aula. Portanto, nenhuma instituição de ensino, em qualquer nível, possui um programa explícito delineando padrões ideais.

Quando se discute sobre um bom professor, as características e atributos que compõem essa noção de "bom" são resultado do julgamento pessoal do avaliador. No entanto, as escolas têm certas expectativas em relação aos seus membros e vice-versa. É nesse contexto que surge a ideologia dominante, como mencionada por Cunha (1989), a qual, segundo Mariana Chauí (2000), é determinada pela atividade social das pessoas e como essa atividade se manifesta, além de influenciar a configuração do papel da escola na sociedade.

Considerando como a instituição interfere nas expectativas da comunidade em relação a ela e como a ideologia é determinada por justificativas prévias, a escolha do "bom professor" pelos alunos é influenciada por sua origem social e pela percepção daquilo que é considerado um "bom professor".

A pesquisa de Cunha (1989) revela que existem algumas condições que os alunos atribuem ao conceito de "bom professor". Essas condições incluem o conhecimento do assunto, habilidades de organização da sala de aula e relacionamento interpessoal positivo com os alunos. No entanto, são os aspectos emocionais, como a capacidade do professor de demonstrar proximidade, que têm maior impacto na escolha.

Além disso, a definição de um "bom professor" envolve o tratamento do conteúdo de ensino, revelando a proximidade do professor com a matéria lecionada, assim como a metodologia utilizada. Os alunos valorizam a atenção do professor em relação aos métodos de aprendizagem e a busca por formas interativas de comunicação.

Nesse sentido, é interessante observar que os alunos valorizam professores exigentes, que promovem engajamento e atribuições, sem fazer muita referência às posições políticas dos docentes. Isso sugere que as posições políticas muitas vezes são irrelevantes para a análise dos alunos. O que realmente importa para eles é a capacidade do professor de dominar o conteúdo, escolher uma abordagem adequada para apresentar o tema e manter um bom relacionamento com o grupo.

De acordo com D'Ambrósio (1996), a matemática abstrata, desenvolvida em faculdades e universidades, é frequentemente apresentada na escola como uma ciência fechada e pronta, desvinculada do significado para os alunos. Isso ocorre porque, por meio de exercícios, os professores se limitam a seguir uma lista de fórmulas e algoritmos, o que pode dificultar o entendimento dos alunos e resultar em um desempenho insatisfatório na resolução de problemas práticos ou em avaliações específicas.

> Em nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão (BRASIL, 1998, p.19).

De acordo com a forma como a matemática é ensinada nas instituições de ensino superior, frequentemente observa-se que ela é apresentada aos alunos como uma disciplina abstrata e fechada, repleta de definições, axiomas, provas e postulados. Essa abordagem pode resultar em exercícios que carecem de significado para os estudantes, levando a dificuldades na compreensão de fórmulas e algoritmos apresentados no quadro-negro ou nos livros didáticos.

Essa desconexão entre a matemática abstrata e sua aplicação prática pode ter consequências negativas para o desempenho dos alunos em tarefas do cotidiano e em avaliações específicas. Além disso, é importante mencionar que o ensino de matemática no país muitas vezes é caracterizado por altos índices de retenção, pela introdução precoce de conceitos formais e pela ênfase excessiva no treinamento de habilidades mecânicas, sem proporcionar uma compreensão adequada dos processos envolvidos.

Diante desse cenário, é fundamental repensar as estratégias de ensino da matemática, buscando estabelecer uma conexão mais clara entre os conceitos abstratos e sua aplicação prática. Isso pode ser feito por meio de abordagens pedagógicas que promovam a contextualização dos conteúdos, relacionando-os com situações reais e estimulando a participação ativa dos alunos em atividades que envolvam a resolução de problemas.

Além disso, é necessário valorizar a compreensão dos processos matemáticos, em vez de apenas focar no treinamento de habilidades mecânicas. Isso implica em desenvolver a capacidade dos alunos de raciocinar matematicamente, de fazer conexões entre diferentes conceitos e de aplicar seus conhecimentos em situações diversas.

Portanto, é importante repensar a forma como a matemática é ensinada, buscando uma abordagem mais significativa e contextualizada, que estimule o pensamento crítico e a compreensão dos processos matemáticos.

5 JOGOS E ATIVIDADES

Quando bem utilizados, os jogos e as atividades matemáticas são um recurso pedagógico inestimável no ensino, permitindo aos alunos desenvolverem foco, criatividade e habilidades em outras áreas, dependendo dos desafios que enfrentam. As perguntas que os façam se sentir engajados e estimulados removem as barreiras existentes para o aprendizado da matemática para alguns alunos, melhorando assim seu relacionamento com esse importante campo de estudo. Esta seção fornece alguns jogos e atividades envolvendo números primos que os professores podem usar em suas salas de aula.

Formando Retângulos

O objetivo deste jogo é formar retângulos com ambas as dimensões maiores que uma unidade

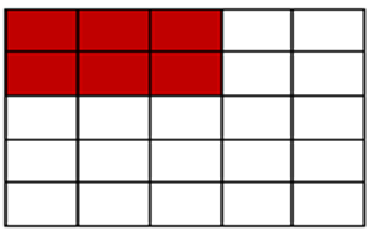
- ✓ Material necessário Papel quadriculado: grãos de feijão ou milho.

Normas do Jogo

O professor sorteia alguns números que representam a área de retângulos e as equipes tentam formar estes retângulos, com o comprimento e largura maiores do que uma unidade.

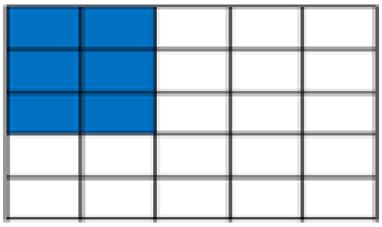
Exemplo: Caso o número a ser sorteado seja 6, logo teremos os seguintesasos:

Figura 5 - Jogo representando o número 6 sendo sorteado



Fonte: Autoria própria

Figura 6 – Jogo representando o número 6 sendo sorteado.



Fonte: Elaboração do autor (2023)

Observações:

- ✓ Cabe ao professor fazer a seguinte pergunta: Por que alguns números não formam retângulos usando as regras dadas acima? Caso não haja respostas satisfatórias, essas são informadas pelo professor:
- ✓ Números que não formam um retângulo usando as regras dadas acima são números primos.
- ✓ Os materiais utilizados não precisam ser feijão ou milho, se o professor achar conveniente, podem ser substituídos por outro material, como os materiais utilizados no exemplo acima, recortados com papel quadriculado colorido.

Descobrindo a Senha

O objetivo deste jogo é que uma equipe consiga abrir um documento contendo uma mensagem salva em um computador ou tablet protegida por uma senha.

Normas do Jogo

Primeiro, o professor cria algumas mensagens e as salva na área de trabalho com uma senha diferente para cada mensagem, informando que a equipe tem apenas uma tentativa para cada documento, dada como pista o número n onde n = p x q, com p e q ambos os números primos, onde a equipe tentará decompor o número n descobrindo assim a senha que será os números p e q escritos da seguinte maneira: no campo “senha” digita pq.

Exemplo 1: Suponha que o documento a ser aberto tenha como pista o número 187. Logo usando a decomposição em fatores primos do número 187, temos que 187 = 11x17. Assim, no campo senha, deverá ser digitado 1117ou 1711 tendo assim acesso ao arquivo.

Exemplo 2: Suponha que o documento a ser aberto tenha 210 como pista. Usando a decomposição em fatores primos, temos que 210 = 2x3x5x7. Assim no campo senha deverá ser digitado 2357 ou 7532 abrindo o arquivo.

Observações:

- Cabe ao professor informar se os números p e q vão ser escritos na forma crescente ou decrescente;
- É interessante que as senhas estejam em ordem crescente de dificuldade;
- Ganha o jogo a equipe que conseguir decifrar o maior número de senhas, abrindo assim o maior número de mensagens.
- Cabe ao professor definir a quantidade de participantes por equipe, sendo que o ideal seria três participantes em cada grupo.

CONCLUSÃO

Em conclusão, o ensino de números primos na educação básica desempenha um papel crucial no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Ao compreenderem os conceitos e propriedades dos números primos, os estudantes são capazes de explorar a estrutura dos números de maneira mais profunda e ampliar suas habilidades de resolução de problemas.

Além disso, o estudo dos números primos proporciona aos alunos uma introdução valiosa à teoria dos números, uma área fundamental da matemática. No entanto, é importante que os educadores adotem abordagens pedagógicas eficazes, tornando o ensino dos números primos envolvente, significativo e acessível para os alunos. Isso pode incluir o uso de exemplos práticos, atividades interativas e conexões com situações do cotidiano, despertando o interesse e a curiosidade dos estudantes.

Assim, ao fornecer aos alunos uma base sólida no estudo dos números primos, estamos preparando-os para avançar em sua jornada matemática e cultivando habilidades essenciais para a compreensão de conceitos mais avançados no campo da matemática.

RESULTADOS ESPERADOS

- ✓ Contribuir para o desenvolvimento de novas estratégias de ensino para o tema, a fim de torná-lo mais atrativo e compreensível para os alunos.
- ✓ Apresentar novas abordagens didáticas para o ensino de números primos, que possam ser aplicadas no contexto escolar.
- ✓ Identificar as principais dificuldades dos alunos em relação aos números primos e propor soluções para superá-las.
- ✓ Fornecerem orientações para os professores em relação ao ensino de números primos, a fim de que possam aprimorar sua prática pedagógica.
- ✓ Ampliar o conhecimento sobre a importância dos números primos na matemática e em outras áreas do conhecimento.
- ✓ Estimular o interesse dos alunos pela matemática e pela busca pelo conhecimento.
- ✓ Promover a reflexão sobre a importância da formação continuada dos professores para a melhoria da qualidade do ensino de matemática na educação básica.
- ✓ Contribuir para a disseminação de conhecimentos sobre números primos e sua aplicação em problemas reais.

REFERÊNCIAS

[1] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC/Consed/Undime, 2018.

[2] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 148 p, 1998.

[3] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. Blucher, 2019.

[4] CAROLINE, E.; SILVA, A. UMA ABORDAGEM SOBRE OS NÚMEROS PRIMOS**. Revista Multidebates,** v.4, n.5 Palmas-TO, agosto de 2020.

[5] CASTRO, Felipe Lopes. **Criptografia RSA**: uma abordagem para professores do ensino básico. 2014. 59 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/110014/000951896.pdf;sequence=1>. Acesso em: 14 Maio.2023

[6] CHAUÍ, M. **Convite à filosofia**. São Paulo: Editora Ática, 2000.

[7] CONJECTURA de Goldbach. In: **Wikipedia**. [S.l: s.n., 2018]. Disponível em:

[8] CUNHA, Maria Isabel da. **O bom professor e sua prática**. Campinas, SP: Papirus, 1989.

[9] D’AMBROSIO, U. **História da Matemática e Educação**. In: Cadernos CEDES 40. História e Educação Matemática. 1ª ed. Campinas, SP: Papirus, p.7-17, 1996.

[10] D’AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 23 ed. Campinas, SP: Papirus; Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), 2012.

[11] EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 4. ed. Campinas: UNICAMP. 843 p, 2004.

[12] GUIZELINI, A. **Um estudo sobre a relação com o saber e o gostar de matemática, química e biologia.** 154 f, 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005. Disponível em: <http://www.uel.br/pos/mecem/pdf/Dissertacoes/Alessandra_Guizelini.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2023

[13] JÁFIA, G**. O ensino de números primos**. Natal-RN, 2018

[14] OBMEP, CLUBE. **Disseminando o estudo da matemática**. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/teorema-fundamental-da-aritmetica/ Acesso em: 15 junho. 2023..

[15] O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. **Christian Goldbach**, 2006. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Goldbach.html>. Acesso em: 12. Maio 2023.

[16] PAIXÃO, J. S. Criptografia: história, atividades e divulgação científica. Universidade Federal de São Paulo. 2020

[17] SILVA, D. V.; NOGUEIRA, P. E. **Estudo quantitativo de algoritmos para teste de primalidade.** Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 8, n. 1, 2021.

[18] STEWART, I. **Equações que mudaram o mundo.** Editora Zahar. 2015.

[19] VAZ, C. L. D. **Vidas entre matemática e arte: fluxos e encontros.** Conselho Editorial. 2021.

[20] WANG, Y. **Yingxu. A Proof of Goldbach Conjecture by Mirror-Prime Decomposition.** WSEAS Transactions on Mathematics, v. 21, p. 563-571, 2022.