

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática



Proposta de Eletiva no Novo Ensino Médio — Introdução ao Cálculo Diferencial

por

Matheus Dantas de Carvalho Bezerra

Maio/2023
João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Curso de Licenciatura em Matemática

Proposta de Eletiva no Novo Ensino Médio — Introdução ao Cálculo Diferencial

por

Matheus Dantas de Carvalho Bezerra

sob a orientação da

Prof^a. Dr^a. Miriam da Silva Pereira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Maio/2023
João Pessoa - PB

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

B574p Bezerra, Matheus Dantas de Carvalho.

Proposta de eletiva no novo ensino médio: introdução
ao cálculo diferencial / Matheus Dantas de Carvalho

Bezerra. - João Pessoa, 2023.

80 p. : il.

Orientação: Miriam da Silva Pereira.

TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Novo ensino médio. 2. Cálculo diferencial. 3.
Disciplina eletiva. I. Pereira, Miriam da Silva. II.
Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

Proposta de Eletiva no Novo Ensino Médio — Introdução ao Cálculo Diferencial

por

Matheus Dantas de Carvalho Bezerra

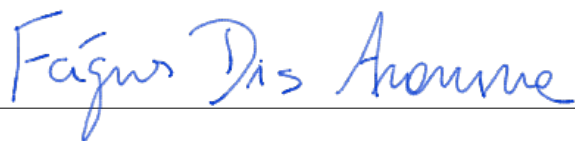
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Educação; Matemática.

COMISSÃO EXAMINADORA



Prof^a. Dr^a. Miriam da Silva Pereira - UFPB (Orientadora)



Prof. Dr. Fagner Dias Araruna - UFPB



Prof. Dr. Maurício Cardoso Santos - UFPB

14/06/2023

Agradecimentos

- À minha mãe, Uilanete Dantas de Carvalho, sou muito grato pelos sacrifícios feitos para o meu desenvolvimento. À minha avó, Ivone Dantas de Lima, que em vida mostrou-me o significado de amor incondicional.
- Aos meus amigos Davidson Marcel Seabra Dantas, João Victor Trigueiro Leite e Marco Arnaud Rocha pelas presenças inestimáveis na minha vida.
- A todos os professores da UFPB que contribuíram com minha formação, em especial à Nacib André Gurgel e Albuquerque e Fernando Antonio Xavier de Souza, por terem me dado apoio e orientações valiosas na transição para o curso de Matemática; à Fágner Dias Araruna, por ter me ensinado Matemática sendo um excelente professor e orientador de Iniciação Científica; à Miriam da Silva Pereira, por ter aceitado orientar este trabalho, tendo contribuído imensamente com a escrita; e à Marivaldo Pereira Matos cujas aulas são fonte de inspiração.
- Aos professores membros da banca examinadora, em ordem alfabética, Fágner Dias Araruna, Maurício Cardoso Santos e Miriam da Silva Pereira, pela atenção e pelas sugestões dadas.
- Agradeço também à Allanny Karla Barbosa Vasconcelos por ter inspirado a realização deste trabalho através da sua dissertação; à Everaldo Souto Medeiros, cujas aulas de Análise Real e exemplos didáticos muito embasaram e contribuíram com a escrita desta monografia; à Aurílio Rodrigues Machado Filho e à Joérmerson de Oliveira Maia por terem gentilmente cedido seus layouts LaTeX; e à Evandson Claude Seabra Dantas, sempre solícito com minhas dúvidas no LaTeX.

“Aut inveniam viam aut faciam.”

“Encontrarei um caminho, ou farei um.”

Aníbal Barca (247 BC – 182 BC)

RESUMO

Neste trabalho, tivemos como meta principal auxiliar os profissionais da educação básica na adaptação ao Novo Ensino Médio (NEM). Assim, apresentamos uma síntese do mesmo, incluindo a sua implementação no estado da Paraíba; e oferecemos o curso Introdução ao Cálculo Diferencial, constando orientações didáticas e uma fundamentação teórica apropriadas. Para isso, fizemos uma pesquisa bibliográfica nas principais legislações orbitantes do NEM, e em artigos e livros envolvendo Cálculo Diferencial, tanto em sua forma teórica habitual, quanto adaptado ao ensino médio. Observamos que a falta de planejamento na implementação do NEM se reflete nos esforços das secretarias de educação em produzir orientações locais às suas escolas, custos de naturezas financeira, humana e educacional que poderiam ser atenuados a partir de uma legislação mais assertiva e modelizada. Além disso, em função das mudanças curriculares, com as devidas considerações, argumentamos e enxergamos a possibilidade de (re)inserção do Cálculo no currículo do ensino médio no Brasil, devidamente adaptado e orientado a esse contexto.

Palavras-Chave: Novo Ensino Médio; Cálculo Diferencial; Eletiva.

ABSTRACT

In this work, our main goal was to assist secondary education professionals in adapting to the New High School (NHS). Thus, we present a synthesis of it, including its implementation in the state of Paraíba, and we offer the course Introduction to Differential Calculus, providing appropriate didactic guidelines and theoretical foundations. To do so, we conducted a bibliographic research on the main legislation related to NHS, as well as articles and books involving Differential Calculus, both in its usual theoretical form and adapted to high school education. We observed that the lack of planning in the implementation of NHS is reflected in the efforts of education departments to provide local guidance to their schools, resulting in financial, human, and educational costs that could be alleviated through more assertive and standardized legislation. Additionally, considering the curricular changes, we argue and envision the possibility of (re)introducing Calculus into the high school curriculum in Brazil, properly adapted and oriented to this context.

Keywords: New High School; Differential Calculus; Elective Course.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquematização do Novo Ensino Médio na Paraíba	21
Figura 2 – Exemplificação gráfica da definição de Limite	27
Figura 3 – Uma reta secante a dois pontos	43
Figura 4 – A construção da reta tangente ao gráfico no ponto P	43
Figura 5 – Gráfico da função $ x $ de -2 a 2	47
Figura 6 – Gráfico de g' evidenciando sua oscilação próximo à origem	49
Figura 7 – Gráfico da função x^3	51
Figura 8 – Exemplificação geométrica do Teorema do Valor Médio	52
Figura 9 – Gráfico de f	54
Figura 10 – Gráfico da função $f(x) = 1/x$	65
Figura 11 – Representação gráfica do problema do menor tempo	72
Figura 12 – Vitral na Igreja Sainte-Mère-Église, Normândia	72
Figura 13 – A menor quantidade de dutos subaquáticos	72
Figura 14 – Posições da cidade, estação e cidade	73

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Mudanças no ensino médio	16
Quadro 2 – Síntese dos Eixos Estruturantes	19
Quadro 3 – Ementa das Eletivas	22
Quadro 4 – Ementa da eletiva Introdução ao Cálculo Diferencial	57

LISTA DE SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular;

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio;

FGB – Formação Geral Básica;

IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica;

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira;

NEM – Novo Ensino Médio;

PCEM – Proposta Curricular do Ensino Médio;

SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica;

TVI – Teorema do Valor Intermediário;

TVM – Teorema do Valor Médio;

UFPB – Universidade Federal da Paraíba.

LISTA DE NOTAÇÕES

- $\min\{a, b\}$ – Menor número dos números a e b ;
- $\max\{a, b\}$ – Maior número dos números a e b ;
- X' – Conjunto dos pontos de acumulação de X ;
- X'_+ – Conjunto dos pontos de acumulação à direita de X ;
- X'_- – Conjunto dos pontos de acumulação à esquerda de X ;
- f' – Derivada da função f ;
- f'' – Segunda derivada da função f ;
- $r^{(i)}$ – i -ésima derivada da função r ;
- $f(X)$ – Imagem do conjunto X pela função f ;
- $\exp(K)$ – Função exponencial de base e aplicada a K ;
- $\ln(x)$ – Função logarítmica de base e aplicada a x .

SUMÁRIO

Resumo	5
Abstract	6
Introdução	13
1 O Novo Ensino Médio	16
1.1 Itinerários Formativos	19
1.2 Novo Ensino Médio no estado da Paraíba	21
2 Cálculo Diferencial e Integral	26
2.1 Definições preliminares do Cálculo	27
2.2 Definição de Limite e algumas propriedades	28
2.3 Limites laterais	33
2.4 Limites envolvendo o infinito e expressões indeterminadas	35
2.5 Funções Contínuas	40
2.6 Derivada: definições e algumas propriedades	44
2.7 Regras de derivação	48
2.8 Crescimento de funções	51
3 A Eletiva Introdução ao Cálculo Diferencial	58
3.1 Ementa da eletiva Introdução ao Cálculo Diferencial	59

3.2	Considerações didáticas gerais da eletiva	63
3.3	Abordando Limites e Continuidade	64
3.4	Abordando Derivadas	67
3.5	Abordando Aplicações da Derivada	69
Considerações Finais		74
Referências		76

INTRODUÇÃO

De acordo com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), referente ao Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), no período de 2005 a 2017, o ensino médio inequivocamente apresentou os piores índices em relação às demais etapas da educação básica, para um mesmo período considerado; desses indicadores constatamos ainda que os índices da rede privada no ensino médio superam em pelo menos 50% os da rede pública. Tais dados encontram respaldo em outras fontes: referente à educação básica, ao passo que o Brasil figurava entre as piores colocações de Matemática em avaliações internacionais (FACTSMAPS, 2019), dados provenientes do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) 2018 apontaram que cerca de 95% dos egressos do ensino público não possuíam conhecimentos matemáticos suficientes, não sabendo resolver, por exemplo, problemas com o Teorema de Pitágoras (EXAME, 2021).

Diante desse cenário alarmante, em fevereiro de 2017, o então Presidente da República Michel Temer sancionou a Lei nº 13.415, o Novo Ensino Médio, que traz alterações substanciais à forma na qual o ensino médio vinha ocorrendo: seu currículo passa a ser composto pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e por itinerários formativos, e a carga anual mínima, a partir de 2022, aumenta de 800 horas para 1000 horas, com progressão para 1400 horas, o que sugere que as escolas passem a vigorar em tempo integral. Sobre esse aspecto, a referida lei instituiu a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral,

programa que repassa recursos financeiros às escolas requerentes.

Sob certo enfoque, os itinerários formativos, construídos de forma a atender as particularidades sociohistóricas e econômicas daqueles que deles usufruirão, são capazes de propiciar ao aluno maturidade, independência e domínio sobre conteúdos. Se implementados de forma coerente, os itinerários formativos têm o potencial de sanar problemas alienantes do ensino médio anterior, tais como a falta de instrumentalização do conhecimento passado e a preocupante convergência didático-pedagógica em torno do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Em contrapartida, o Novo Ensino Médio (NEM) é passível de duras críticas, sendo uma de suas principais o pouco ou breve diálogo com os diversos profissionais da educação básica em sua construção e implementação. Vê-se com clareza que as mudanças serão melhor recebidas e mais rapidamente executadas por instituições de ensino que já tenham estrutura consolidada, isto é, em sua maioria as escolas privadas. Para além da resistência de algumas escolas públicas em aderirem ao modelo integral, reduzindo seus recursos para sua atualização, a precariedade em infraestrutura, recursos humanos e gestão administrativa são elementos graves na implementação do Novo Ensino Médio de forma satisfatória.

Esse forte contraste evidencia a necessidade de se tratar a Educação como política de Estado, e não de governo, como muitas vezes tem ocorrido no Brasil. Enquanto no primeiro âmbito se tem mais propensão a analisar, reconstruir ou fortalecer as diversas frentes de um projeto em vigor, em uma política de governo pode-se acabar dando liberdade a radicalismos, que por sua vez outorgam desconstrução total daquilo que foi feito - com pouco ou nenhum apreço pela existência de seções eficientes e aproveitáveis.

Dito isso, esse trabalho tem como objetivos gerais atualizar os profissionais da educação quanto às mudanças propiciadas pela Lei nº 13.415/17 e pelas legislações adjacentes, incluindo como esse processo tem sido abordado no estado da Paraíba. Além disso, buscamos facilitar a construção de disciplinas voltadas à Parte Diversificada do currículo nas escolas, evidenciando aspectos gerais e modelos que podem ser incorporadas por estas e por secretarias sem que para isso as mesmas precisem trabalhar de forma individual.

Tendo em vista aquilo que apresenta potencial duradouro no Novo Ensino Médio, de forma mais específica, nossa meta é fornecer às escolas, tanto públicas quanto privadas, a disciplina eletiva Introdução ao Cálculo Diferencial, na forma de um modelo orientado semi-acabado, constando orientações didáticas e fundamentação teórica para os tópicos utilizados. Acreditamos que esta é a forma mais adequada, pois devemos levar em conta as especificidades das unidades escolares e das turmas para as quais se pretende oferecer o curso.

Para realizar este trabalho, reunimos, analisamos e sintetizamos as principais leis no contexto do Novo Ensino Médio, incluindo os materiais veiculados no estado da Paraíba, e, então, fizemos uma pesquisa bibliográfica referente tanto ao Cálculo Diferencial na forma teórica habitual quanto da sua implementação no ensino médio.

Quanto à estrutura dos capítulos, temos a seguinte organização: o capítulo 1 apresenta o Novo Ensino Médio a partir de sínteses da Lei nº 13.415, da Resolução nº 3/2018, da Portaria nº 1432/2018, e da Proposta Curricular do Ensino Médio (2020) e da Resolução nº 410/2021, estes dois últimos referentes à Paraíba; o capítulo 2 traz uma fundamentação teórica do Cálculo Diferencial acerca dos tópicos utilizados na construção da eletiva; e o capítulo 3 propõe a eletiva Introdução ao Cálculo Diferencial, contendo uma ementa própria bem como orientações didáticas tanto gerais, quanto específicas sobre sua implementação no ensino médio.

CAPÍTULO 1

O NOVO ENSINO MÉDIO

A reforma da educação conhecida como Novo Ensino Médio teve início com a Lei nº 13.415/2017. Esse documento, essencialmente, alterou as Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/1996), estabelecendo mudanças fundamentais na organização e oferta do ensino médio, sendo a mais nítida o currículo dessa etapa passando a vigorar fundamentado dualmente na BNCC e em uma perspectiva diversificada e interdisciplinar denominada Itinerário Formativo.

Esse novo currículo tem por alicerces pedagógicos a articulação da educação básica, em particular o ensino médio, com os seus sujeitos nas diferentes esferas de existência, isto é, levando-se em conta contextos históricos, socioculturais, econômicos e ambientais. Almeja-se, segundo a legislação, que o educando ao final do ensino médio tenha competências e habilidades nos aspectos físicos, cognitivos e socioemocionais, que lhe forneçam domínio linguístico, científico e tecnológico da produção e do ser modernos.

A fim de embasar e complementar essa concepção curricular, a Lei nº 13.415/2017 instituiu um número de mudanças significativas na estrutura do ensino médio, as quais estão sintetizadas a seguir.

Quadro 1 – Mudanças no ensino médio

BNCC	• Define direitos e objetivos da aprendizagem (antes denominadas e agora equivalentes a competências e habilidades) nas áreas do conhecimento i) Linguagens e suas tecnologias; ii) Matemática e suas tecnologias; iii) Ciências da Natureza e suas tecnologias; iv) Ciências Humanas e Sociais aplicadas; a serem completadas em um máximo de 1800 horas ao longo do ensino médio; • Define obrigatoriedade do ensino e/ou atividades práticas em i) Educação Física, Arte (com ênfase em expressões regionais), Filosofia e Sociologia; ii) Língua Inglesa, sendo facultativo e optativo a oferta de outras línguas estrangeiras, preferencialmente o Espanhol; iii) Língua Portuguesa e Matemática, necessariamente nos três anos do ensino médio, devendo o uso da língua materna estar assegurada às comunidades indígenas.
Parte Diversificada	• A parte diversificada deve estar harmonizada à BNCC e ser relevante ao contexto local, sendo compostas em uma ou mais (denominado integrado) das áreas i) Linguagens e suas tecnologias; ii) Matemática e suas tecnologias; iii) Ciências da Natureza e suas tecnologias; iv) Ciências Humanas e Sociais aplicadas; v) formação técnica e profissional;

Parte Diversificada	• Os itinerários formativos em formação técnica e profissional i) devem ser aprovados previamente, respectivamente, pelos Conselhos Estaduais de Educação, homologados pelos Secretários Estaduais de Educação e certificados pelos sistemas de ensino; ii) podem considerar experiências no setor produtivo ou ambientes de simulação;; iii) têm a liberdade de ofertar formações novas ou experimentais, desde que, nos anos seguintes, sejam reconhecidas pelos respectivos Conselhos Estaduais de Educação e inclusos no Catálogo Nacional dos Cursos Técnicos.
Sistemas de Ensino	• Adequam o ano letivo à carga horária mínima de 1000 horas, com progressão para 1400 horas a partir de 2022, devendo suas atividades educacionais obrigatórias ocorrer entre sete e vinte e uma horas; • Devem orientar os alunos na escolha da parte diversificada disponível; • Considerando vagas, devem oferecer ao concluinte do ensino médio a possibilidade de cursar outro itinerário formativo; • Podem firmar convênios com instituições de educação à distância, mediante comprovação de notório reconhecimento, a fim de cumprir exigências curriculares;

Sistemas de Ensino

- Para a composição do quadro docente, podem contratar i) graduados que tenham feito complementação pedagógica, segundo o disposto pelo Conselho Nacional de Educação; ii) profissionais com notório saber comprovado por titulação ou atuação magisterial, exclusivamente para a formação técnica e profissional;
- Têm a possibilidade de emitir certificados intermediários de qualificação profissional mediante currículo estruturado e organizando relativo à formação técnica e profissional;
- Instituições de formação de professores devem ter a BNCC como referência.

Fonte: Elaborado pelo autor com base na Lei nº 13.415/2017.

Além disso, essa lei também instituiu a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral, que, aliado à Portaria nº 727/2017 do Ministério da Educação, visa auxiliar financeiramente as escolas em suas adaptações ao Novo Ensino Médio e ao modelo integral de ensino. É válido salientar que, decorrido o prazo de adaptação dos sistemas de ensino, a reforma quase dobrou a carga horária média anual mínima nas escolas, de 800 horas para 1400 horas. Isso implica, de forma indireta, na obrigatoriedade das escolas em oferecerem suas atividades educacionais em mais de um turno.

1.1 Itinerários Formativos

Segundo a Resolução nº 3 CNE/2018, que atualizou as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio em consonância com a Lei nº 13.415/2017, é possível sintetizar Itinerário Formativo como um conjunto de unidades curriculares, em que unidade curricular é entendida como elemento com carga horária pré-definida.

No texto em questão, tem-se a seguinte definição para Itinerário Formativo “cada conjunto de unidades curriculares ofertadas pelas instituições e redes de ensino que possibilitam ao estudante aprofundar seus conhecimentos e se preparar para o prosseguimento de estudos ou para o mundo do trabalho de forma a contribuir para a construção de soluções de problemas específicos da sociedade”.

Acerca desse conceito central no NEM, o Ministério da Educação, por meio da página “Novo Ensino Médio – perguntas e respostas”, traz o entendimento de que esse conjunto de unidades curriculares abrangem disciplinas, projetos, oficinas, núcleos de estudo e afins.

Em posse do que se trata, e considerando as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, é oportuno destacar os critérios nos quais os Sistemas de Ensino são orientados a embasar a elaboração de seus itinerários formativos, dispostos na Portaria nº 1.432/2018 – Referenciais Curriculares para a Elaboração de Itinerários Formativos.

Inicialmente, o texto apresenta como objetivos centrais dos itinerários formativos, essencialmente, o aprofundamento das aprendizagens da formação geral baseada na BNCC e o desenvolvimento de habilidades e da autonomia do estudante para que sejam capazes de agir em seus diversos contextos (escola, trabalho, vida etc.) considerando valores universais, postos como, mas não apenas, “ética, liberdade, democracia, justiça social, pluralidade, solidariedade e sustentabilidade”.

Assim, tendo em vista tais objetivos e as áreas do conhecimento nas quais os itinerários devem estar inseridos, a parte diversificada do currículo deve experienciar pelo menos um dos quatro eixos estruturantes, sintetizados a seguir:

Quadro 2 – Síntese dos Eixos Estruturantes

Eixo Estruturante	Breve Descrição
Investigação Científica	Desenvolver pesquisas científicas, iniciando pela formulação de uma hipótese, seguida de levantamento, testes e da interpretação dos resultados a fim de solucionar diversos tipos de problemas do cotidiano dos educandos.

Processos Criativos	Elaborar projetos com foco na criatividade, que utilizem diferentes manifestações linguísticas, culturais e científicas. Primeiro, define-se um problema ou tema a ser abordado. Em seguida, é planejada uma resposta a ele, que pode ser um produto, uma intervenção artística, uma peça de comunicação, entre outras possibilidades.
Mediação e Intervenção Cultural	Oferecer-lhes as ferramentas necessárias para promover transformações positivas na comunidade. A partir da constatação de um problema a ser resolvido. Em seguida, é realizado um planejamento de um projeto social ou cultural que seja capaz de responder a essas necessidades ou a eventuais conflitos que possam surgir.
Empreendedorismo	Estimular a criação de projetos pessoais a partir da identificação de desafios a serem vencidos, o planejamento de testes e o aprimoramento da ideia inicial. O educando passa a identificar aspirações pessoais que gostaria de transformar em um empreendimento, além de enfrentar desafios em relação às próprias capacidades e à receptividade do mundo externo.

Fonte: VASCONCELOS, 2021.

Nessa temática, a Portaria nº 1.432/2018 traz consigo uma tabela complementar na qual consta habilidades específicas dos itinerários formativos a serem desenvolvidas por eixo. Além disso, tem-se à disposição competências gerais previstas na BNCC associadas a cada eixo estruturante – em que, diferente das habilidades, há a necessidade de se trabalhá-las integralmente no currículo.

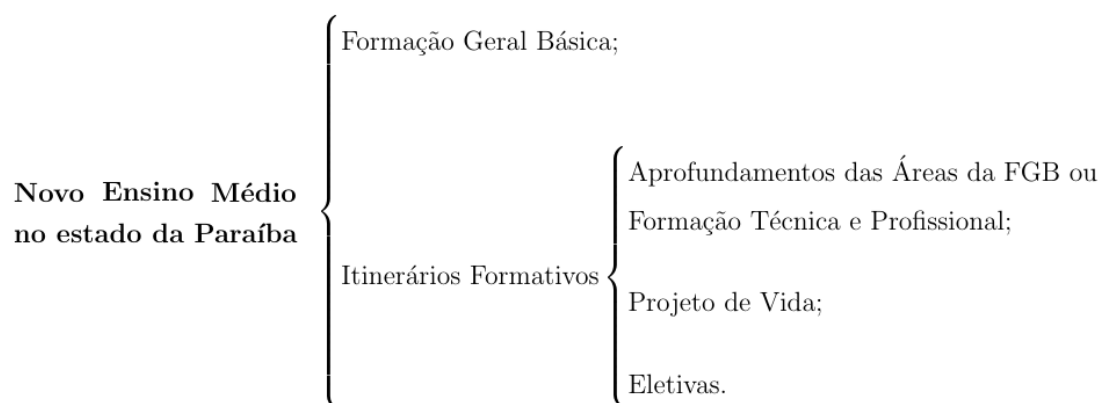
1.2 Novo Ensino Médio no estado da Paraíba

Aprovada em dezembro de 2020, a Proposta Curricular do Ensino Médio (PCEM) é um importante documento que orienta as escolas públicas e privadas da Paraíba no processo de adaptação curricular ao novo ensino médio. O texto discorre sobre cada

área do conhecimento em relação à Formação Geral Básica (FGB), trazendo a BNCC como fundamento para apresentar conhecimentos, habilidades e competências específicas, nas quais se inserem também particularidades do currículo paraibano. Recorrentemente, realiza-se apontamentos sobre processos metodológicos, práticas avaliativas contemporâneas e adendos importantes. Por exemplo, em Matemática e suas tecnologias, além do supracitado, comenta-se sobre modelagem matemática, gamificação e História da Matemática.

Os Itinerários Formativos são tratados no terceiro capítulo, sendo aqui caracterizados por Aprofundamento das Áreas do Conhecimento da Formação Geral Básica, Projeto de Vida, Formação Técnica e Profissional e Eletivas, cada um destes tópicos desenvolvidos através de orientações ou proposições.

Figura 1 – Esquematisação do Novo Ensino Médio na Paraíba



Fonte: Elaboração própria (2023).

Para facilitar e promover a transição inicial das escolas, há quatro modelos intitulados itinerários formativos (aprofundamentos), pp. 434-646, dois deles integrados (mais de uma área do conhecimento), constando textos introdutórios, unidades curriculares por série e orientações aos sistemas de ensino acerca de adições e metodologias adequadas. Nas unidades curriculares tem-se habilidades gerais por eixo estruturante bem como habilidades e competências específicas. Aprofundamentos, portanto, para além do que o nome sugere, trata-se de abordar e instrumentalizar as áreas do conhecimento a fim de que o estudante tenha capacidade de executar planejamentos e atingir objetivos.

Nesse contexto, o estudante também pode optar por itinerários de Formação Técnica e Profissional. Segundo a PCEM, as escolas devem organizar esse currículo contendo, além da FGB, os tópicos Projeto de Vida (discutido a seguir), Trilha de Formação Profissional e Formação para o Mundo do Trabalho, que deve englobar componentes curriculares acerca de empreendedorismo, educação tecnológica e midiática, e higiene e segurança no trabalho.

Acerca do Projeto de Vida, componente curricular contínuo que deve estar presente nas escolas, há a preocupação em empossar o jovem quanto a autonomia de seu futuro por meio da construção de ferramentas essenciais. Nesses aspectos, o material traz uma base bibliográfica forte, percorrendo as dimensões da reflexão pessoal para o autoconhecimento, das condições materiais e de competências socioemocionais. O desenvolvimento do projeto de vida do estudante vai além de desejos pessoais, dialogando com o significado da vida para o indivíduo com vias à articulação do mesmo, da cultura atual e da sociedade de forma saudável. No decorrer do capítulo há, também, a proposição de um itinerário formativo nomeado Projeto de Vida, construído nos moldes dos quatro anteriores.

Em seguida, tem-se a discussão sobre as Eletivas. Tratam-se de cursos que devem aprofundar, enriquecer e ampliar as áreas do conhecimento, tendo caráter interdisciplinar. São ofertados semestralmente, com carga horária de 02 (duas) horas aula semanais, em um número mínimo igual ao número de turmas (do ensino médio) da escola. São preferencialmente cursos definidos a partir do diálogo com os envolvidos no processo escolar para que estejam alinhados com o Projeto de Vida dos estudantes.

O documento traz instruções sobre o que deve conter na ementa das eletivas, recomendando-se que o planejamento didático das aulas esteja posteriormente presente e obtenha validação da gestão.

Quadro 3 – Ementa das Eletivas

1. Título.
2. Áreas do Conhecimento – mínimo dois.
3. Professores envolvidos – mínimo dois.

4. Justificativa.
5. Objetivo(s).
6. Habilidades da BNCC envolvidas.
7. Conteúdo programático.
8. Metodologia.
9. Recursos didáticos.
10. Duração.
11. Culminância – evento aberto à comunidade escolar em que o projeto desenvolvido é apresentado.
12. Avaliação – diagnóstica e contínua.
13. Referências.

Fonte: Proposta Curricular do Ensino Médio (2020).

Como se pode notar, a PCEM não tem caráter normativo. Essas diretrizes ganham essa denotação no ano seguinte, com a aprovação da Resolução N° 410/2021. A centralidade desta resolução é instituir e orientar a organização e implementação curricular do novo ensino médio nos sistemas de ensino da Paraíba. Esse texto normativo reitera os tópicos essenciais relativos às leis já abordadas; destaca particularidades das modalidades do ensino médio (educação de jovens adultos, educação quilombola etc.), encaminhando o leitor aos documentos nacionais e estaduais pertinentes; e insere outras providências nesse processo adaptativo.

Estabeleceu-se que para o ano de 2022 era obrigatório a implementação dos referenciais curriculares para o 1° ano do ensino médio; para o ano de 2023 a implementação deve contemplar o 1° e o 2° ano do ensino médio; e em 2024 espera-se que a implementação ocorra em todos os anos do ensino médio. No que se diz respeito à carga horária total dessa etapa, isto é, 3000 horas no decorrer do ensino médio (sendo um máximo de 1800 horas para a Formação Geral Básica e um mínimo de 1200 horas para os Itinerários Formativos), permite-se que até 20% da carga horária seja contemplada de forma não presencial, com adendos ao ensino noturno, que, além de permitir que o ensino médio seja feito em mais de 3 anos e

tenha organização e metodologia diferenciadas, tem-se a possibilidade de que 30% das atividades sejam desenvolvidas de forma não presencial, medidas essenciais para estimular permanência, engajamento e êxito dos estudantes nesse contexto.

Destaca-se que a Resolução reitera o caráter interdisciplinar e transdisciplinar do novo ensino médio, em particular relativos à Formação Geral Básica, dispondo também a obrigatoriedade de se trabalhar as competências específicas do Referencial Curricular da Paraíba para o Ensino Médio, ressaltando, além disso, a possibilidade de se firmar parcerias com instituições de ensino, tais como a Universidade Federal da Paraíba (UFPB), no intuito de possibilitar a integralização da carga horária por parte dos estudantes mediante atividades e cursos pertinentes.

No próximo capítulo se apresenta uma fundamentação teórica do curso proposto. Almeja-se que o texto sirva de material de estudo para os docentes que se interessem em adquirir os conhecimentos matemáticos relativos à disciplina ou que cumpra o papel de fonte de consulta para os leitores já familiarizados com Análise Real. Nesse caso, recomenda-se saltar para o capítulo 3.

CAPÍTULO 2

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Concebido séculos atrás por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) e por Isaac Newton (1643–1726), o Cálculo Diferencial e Integral permanece atual em múltiplas facetas, seja como uma excelente introdução à uma Matemática um pouco mais sofisticada que a vista no ensino básico, seja como uma sólida ferramenta de resolução de problemas; a Ciência, sobretudo as Ciências Exatas, continuamente beneficiam-se desse conhecimento (SOUZA, 2001). A grosso modo, enquanto o Cálculo Diferencial objetiva estudar padrões de variações a partir de funções, o Cálculo Integral se preocupa com somas, até então havendo numerosas contribuições de ambos à Física, Química, Biologia, Matemática Pura e Aplicada, e Engenharias.

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos do Cálculo Diferencial destinada em particular à revisão e/ou aprofundamento para docentes que tenham interesse em lecionar a eletiva proposta, tendo como referência principal o livro *Análise Real: Funções de Uma Variável*, volume 1, de Elon Lages Lima. São tratados principalmente conceitos, teoremas e aplicações que utilizamos na construção da eletiva, todavia no capítulo seguinte tais temas são abordados com um enfoque mais apropriado para o ensino médio.

2.1 Definições preliminares do Cálculo

Antes de definir Limite e Derivada formalmente, precisamos de conhecimentos de Topologia na reta. A seguir, selecionamos e apresentamos as definições que serão necessárias no decorrer do capítulo.

Definição 2.1.1. (Ponto interior) *Um ponto a (número real) é interior ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$.*

Definição 2.1.2. (Conjunto interior) *Denominamos o interior do conjunto X , denotado por $\text{int}X$, o conjunto de todos os pontos que são interiores ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$.*

Definição 2.1.3. (Vizinhança) *Dizemos que o conjunto $V \subset \mathbb{R}$ é uma vizinhança de a se a pertence ao interior de V .*

Definição 2.1.4. (Conjunto aberto) *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é denominado aberto quando $A = \text{int} A$, ou, equivalentemente, quando todo ponto do conjunto é ponto interior dele mesmo.*

Exemplo 2.1.1. *O intervalo real aberto (a, b) é um conjunto aberto, pois todos os seus pontos são pontos interiores; e o conjunto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$, para todo $\varepsilon > 0$, é uma vizinhança de $a \in \mathbb{R}$, uma vez que os intervalos reais $V = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ são conjuntos abertos.*

Definição 2.1.5. (Ponto de acumulação) *O ponto a é um ponto de acumulação de $X \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança V de a contém algum elemento de X que não é a . Denotamos por X' o conjunto dos pontos de acumulação de $X \subset \mathbb{R}$. Em símbolos, $\forall \varepsilon > 0, (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset \Rightarrow a \in X'$.*

Definição 2.1.6. (Pontos de acumulação laterais) *Dizemos que a é um ponto de acumulação à direita (à esquerda) para X , em símbolos $a \in X'_+$ ($a \in X'_-$), quando toda vizinhança de a contém algum $x \in X$ com $x > a$ ($x < a$).*

Exemplo 2.1.2. *Se $X = \mathbb{Z}$, então $X' = \emptyset$. Se $X = (a, b)$, então $X' = [a, b]$.*

Exemplo 2.1.3. *Se $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, então $0 \in X'_+$, mas $0 \notin X'_-$.*

2.2 Definição de Limite e algumas propriedades

Embora se recomende que no cotidiano didático do professor que leciona a eletiva não se tenha a presença de limites de maneira formal, a segurança nesse conceito é indispensável para o domínio matemático do Cálculo. A partir das definições algébricas somos capazes de demonstrar teoremas basais como a unicidade e as operações com limites.

Definição 2.2.1. (Limite) *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Dizemos que o número L é limite de $f(x)$ quando x tende a a , com notação $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, quando para todo $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X$, isto é,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (*)$$

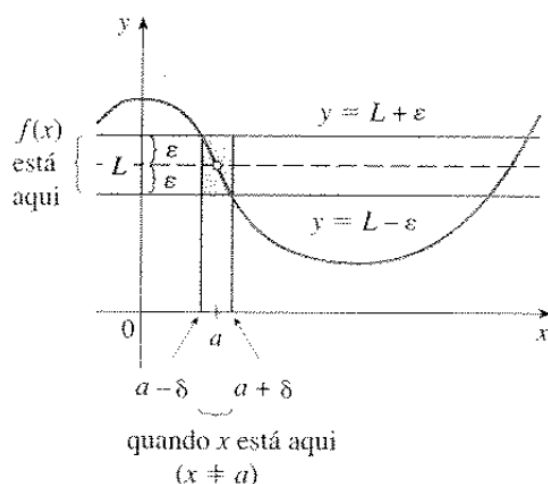
É oportuno observar que $()$ é equivalente a*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall x \in X, x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Além disso, temos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$ se

$$\exists \varepsilon > 0 ; \forall \delta > 0, \exists x \in X, 0 < |x - a| < \delta \text{ que satisfaz } |f(x) - L| \geq \varepsilon.$$

Figura 2 – Exemplificação gráfica da definição de Limite



Fonte: STEWART(2006, p. 116).

Exemplo 2.2.1. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f(x) = x^2$. Então, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^2$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Prova. Dado $\varepsilon > 0$, mostremos que, com $x \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon.$$

Multiplicando à primeira desigualdade o termo $|x + a|$, temos

$$|x - a| \cdot |x + a| < \delta \cdot |x + a|,$$

que é o mesmo que

$$|x^2 - a^2| < \delta \cdot |x + a|.$$

Apliquemos a seguinte condição para δ : $\delta \leq \delta_1$ tal que todo $x \in \mathbb{R}$ que satisfizer $0 < |x - a| < \delta_1$, $|x + a| < z$, z real positivo.

Então,

$$|x^2 - a^2| < \delta \cdot |x + a| < \delta \cdot z.$$

Se escolhermos $\delta \leq \delta_2 = \frac{1}{z} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$,

$$\delta \cdot z \leq \frac{1}{z} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot z = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Como demos duas condições para δ , façamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, para esse δ , temos

$$|x^2 - a^2| < \delta \cdot |x + a| < \delta \cdot z < \delta_2 \cdot z < \frac{1}{z} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot z < \varepsilon,$$

como queríamos demonstrar (c.q.d.). ■

Tendo a base algébrica de limites em mente, apresentaremos em dois teoremas a unicidade e as operações com limites. O primeiro é indispensável na construção teórica desse conteúdo, e a seguinte é de eminente valor para desenvolver cálculos de forma mais prática.

Teorema 2.2.1. (Unicidade do Limite) *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$, então $L = M$.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $L \neq M$. Isso nos diz que $L < M$ ou $L > M$. Tome $\varepsilon > 0$ tal que $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ e $(M - \varepsilon, M + \varepsilon)$ sejam conjuntos disjuntos.

Por definição, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que para cada $x \in X$,

$$\begin{cases} 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \\ 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow f(x) \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon) \end{cases}.$$

Desse modo, o processo de escolha de δ como sendo o mínimo entre os dados, similarmente ao exemplo 1 desta seção, acarretará em $f(x) < f(x)$ ou $f(x) > f(x)$, um absurdo. ■

Observação 2.2.1. *Um fato bastante intuitivo sobre Limites que usaremos nesta seção é o de que se o limite de uma função existe quando sua variável tende a um ponto, então a função é limitada em uma vizinhança desse ponto. A demonstração é natural ao notar que $|f(x)| = |f(x) + L - L| \leq |f(x) - L| + |L|$, e pode ser consultada em Lima, 2017, p. 66.*

Teorema 2.2.2. (Operações com Limites) *Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções e $a \in X'$, com $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Valem:*

$$i) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M;$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}, \text{ se } M \neq 0;$$

$$iv) \text{ Se } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ e } g \text{ é limitada em uma vizinhança de } a, \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$

Prova. i) Vamos demonstrar o primeiro caso, $\lim_{x \rightarrow a} [(f + g)(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Depois, verificaremos que a mesma argumentação se estende para o segundo caso.

Inicialmente, avaliamos o seguinte módulo:

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M|. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} : \exists \delta_1 > 0, x \in X, 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_1 & ; \\ \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} : \exists \delta_2 > 0, x \in X, 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon_2 & . \end{cases}$$

Seja $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Neste caminho, para cada $x \in X$ que satisfizer $0 < |x-a| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, $|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$.

No segundo caso, temos

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x) - (L - M)| &= |f(x) - L - g(x) + M| \\ &= |f(x) - L - (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |-1||g(x) - M| \\ &= |f(x) - L| + |g(x) - M|. \end{aligned}$$

ii) Considerando a Observação 2.2.1, analisemos o módulo pertinente:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - L.M| &= |f(x)g(x) - L.M + f(x).M - f(x).M| \\ &= |f(x)[g(x) - M] + M[f(x) - L]| \\ &\leq |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L| \\ &\leq c|g(x) - M| + |M||f(x) - L|. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, definimos $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2 \cdot |M|} : & \exists \delta_1 > 0, x \in X, 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_1 ; \\ \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2 \cdot c} : & \exists \delta_2 > 0, x \in X, 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon_2 . \end{cases}$$

Seja $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Dessa forma, para cada $x \in X$ que satisfizer $0 < |x-a| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - L.M| &\leq c|g(x) - M| + |M||f(x) - L| \\ &< c \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot c} + |M| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot |M|} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$.

iii) O módulo de interesse nesse caso é

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M} \right| &= \left| \frac{f(x)M - g(x)L}{g(x)M} \right| \\
&= \left| \frac{f(x)M - g(x)L + L \cdot M - L \cdot M}{g(x)M} \right| \\
&= \left| \frac{M(f(x) - L) - L(g(x) - M)}{g(x)M} \right|.
\end{aligned}$$

Para solucionarmos de modo similar aos itens anteriores, precisamos avaliar $\frac{1}{|g(x)|}$.

Por consequência da desigualdade triangular e por hipótese, considerando $\varepsilon = \frac{|M|}{2}$, existe $\delta_n > 0$ tal que para cada $x \in X$ em $(a - \delta_n, a + \delta_n)$, temos: $g(x) \neq 0$ e

$$\begin{aligned}
&||g(x)| - |M|| < |g(x) - M| < \varepsilon \\
&\Rightarrow -\varepsilon < |g(x)| - |M| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + |M| < |g(x)| < \varepsilon + |M| \\
&\Rightarrow \frac{|M|}{2} < |g(x)| < \frac{3|M|}{2} \Rightarrow |g(x)| > \frac{|M|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} \leq \frac{1}{\frac{|M|}{2}} = c.
\end{aligned}$$

Agora, para $\varepsilon > 0$ arbitrário, definamos $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \cdot c \cdot \frac{|L|}{|L| + k} \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} \cdot c \cdot \frac{1}{|L| + k}, \text{ com } k > 0.$$

Por hipótese, $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ tais que, para cada $x \in X$,

$$\begin{cases} 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_1 \\ 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon_2 \end{cases}.$$

Escolhendo, então, $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \delta_n\}$, decorre que, após as devidas simplificações algébricas,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M} \right| < \varepsilon \cdot \frac{|L|}{|L| + k} < \varepsilon,$$

pois o segundo fator é positivo e menor que 1.

iv) Por hipótese, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq c$ em uma vizinhança de a , $c > 0$, nomeadamente $(a - \delta_2, a + \delta_2)$, $\delta_2 > 0$.

Observemos que:

$$|f(x)g(x) - 0| = |f(x) - 0||g(x)| \leq c \cdot |f(x)|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{c}$. Assim,

$$\exists \delta_1 > 0, x \in X, 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon_1.$$

Para $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, todo $x \in X$ que satisfizer $0 < |x - a| < \delta$ nos diz que:

$$|f(x)g(x) - 0| \leq c \cdot |f(x) - 0| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Isso conclui a demonstração. ■

Exemplo 2.2.2. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $f(x) = c$ e $g(x) = x$. Então, para todo $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = a$. Isso pode ser provado pela definição de Limite ao considerar $\delta = \varepsilon$ no primeiro caso, e observar que qualquer $\delta > 0$ satisfaz a definição no segundo caso.*

Exemplo 2.2.3. *Para todo polinômio $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, temos $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. A veracidade disto decorre do exemplo anterior e do Teorema 2.2.2.*

Exemplo 2.2.4. *Dados $X = \mathbb{R} - \{0\}$ e $0 \in X'$, a função $h : X \rightarrow \mathbb{R}$; $h(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x})$ tem limite 0 quando x tende a 0. Verificamos isso pelo item iv do Teorema 2.2.2, uma vez que a função x tem limite 0 quando x tende a 0 e a função seno é limitada.*

2.3 Limites laterais

Até agora se falou de limite em um ponto a partir de uma definição central. No entanto, é possível ser mais específico no contexto local da função ao se definir limites laterais. Veremos que podemos determinar a existência de um limite, ou não-existência, a partir dos laterais.

Definição 2.3.1. (Limite à direita) *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'_+$. Dizemos que o número L é o limite à direita de $f(x)$ quando x tende para a , com notação $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$, quando para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ em que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < x - a < \delta$, $x \in X$, isto é,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; x \in [X \cap (a, a + \delta)] \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição 2.3.2. (Limite à esquerda) *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'_-$. Dizemos que o número L é o limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende para a , com*

notação $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$, quando para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ em que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $-\delta < x - a < 0$, $x \in X$, isto é,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; x \in [X \cap (a - \delta, a)] \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Observação 2.3.1. As propriedades gerais de Limite se estendem para os limites laterais, com as devidas adaptações.

Teorema 2.3.1. Dados $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'_+ \cap X'_-$, existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ é equivalente a existirem os limites laterais em a , caso $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, para cada $x \in X$, $a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Se $x \in (a, a + \delta)$, então $x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Em outras palavras, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$.

Se $x \in (a - \delta, a)$, então $x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Isto é, $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$.

($\Leftarrow$) Façamos essa prova por contradição:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in X ; 0 < |x - a| < \delta \text{ e } |f(x) - L| \geq \varepsilon.$$

Como $x \neq a$, temos duas opções:

$$\begin{cases} x > a \Rightarrow x \in [X \cap (a, a + \delta)] \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \\ x < a \Rightarrow x \in [X \cap (a - \delta, a)] \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{cases},$$

um absurdo. ■

Esse teorema nos diz que para o limite existir, é necessário e suficiente que os limites laterais existam e sejam iguais. Consequentemente, se os limites laterais existem, mas são diferentes, o limite não existe.

Exemplo 2.3.1. Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$. Então não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, pois $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$, mas $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$.

2.4 Limites envolvendo o infinito e expressões indeterminadas

Devido à importância do infinito no Cálculo, discorreremos sobre limites envolvendo o infinito e sobre expressões indeterminadas, ainda que de forma breve. Em nossa eletiva são feitas apenas algumas considerações sobre esses tópicos, uma vez que a carga horária é limitada e as aplicações escolhidas não o utilizam.

Definição 2.4.1. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado superiormente e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Escrevemos $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (o limite de f quando x tende ao infinito é L) quando*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 ; x \in X, x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição 2.4.2. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado inferiormente e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Escrevemos $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ (o limite de f quando x tende a menos infinito é L) quando*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 ; x \in X, x < -A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo 2.4.1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Considerando algum $\varepsilon > 0$, observamos que

$$\begin{aligned} |e^x - 0| &= \left| \frac{1}{e^{-x}} \right| = \frac{1}{e^{-x}} < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{e^{-x}}\right) &< \ln(\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1) - \ln(e^{-x}) < \ln(\varepsilon) \\ \Leftrightarrow 0 - (-x)\ln(e) &< \ln(\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad x < \ln(\varepsilon). \end{aligned}$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $K = -\ln(\varepsilon) > 0$, de modo que

$$x < -K = \ln(\varepsilon) \Rightarrow |e^x - 0| < \varepsilon.$$

Notemos que quando tratamos de limites, nossa região de interesse é para ε pequeno, menor que 1, o que faria $-\ln(\varepsilon)$ ser positivo para fazer jus à definição.

No caso de $\varepsilon > 1$, basta tomar $K = \ln(\varepsilon) > 0$, pois $x < -K = -\ln(\varepsilon) < \ln(\varepsilon)$.

Exemplo 2.4.2. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f(x) = \text{sen}(x)$. Então, não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. De fato, suponhamos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sen}(x) = L$. Por hipótese, tomando $\varepsilon = 1$, existe $A > 0$ tal que*

$$x \in \mathbb{R}, x > A \Rightarrow |\operatorname{sen}(x) - L| < 1 \Rightarrow L - 1 < \operatorname{sen}(x) < L + 1.$$

A partir da periodicidade da função seno, temos $[-1, 1] \subset (L - 1, L + 1)$.

Assim,

$$\begin{aligned} L - 1 < 1 < L + 1 &\Rightarrow L > 0 \\ L - 1 < -1 < L + 1 &\Rightarrow L < 0 \end{aligned},$$

um absurdo.

Definição 2.4.3. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (o limite de f quando x tende a a é infinito) quando

$$\forall K > 0, \exists \delta > 0 ; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K.$$

Definição 2.4.4. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ (o limite de f quando x tende a a é menos infinito) quando

$$\forall K > 0, \exists \delta > 0 ; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -K.$$

Exemplo 2.4.3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x - a)^2} = +\infty$.

Com $\delta_1 > 0$, vejamos que

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |x - a| \cdot |x - a| < \delta_1^2 < \Rightarrow \frac{1}{|x - a|^2} = \frac{1}{(x - a)^2} > \frac{1}{\delta_1^2}$$

Assim, dado $K > 0$, tomamos $\delta = \frac{1}{\sqrt{K + 1}}$. Com isso,

$$\frac{1}{(x - a)^2} > \frac{1}{\delta^2} = \frac{1}{\frac{1}{(\sqrt{K+1})^2}} = K + 1 > K.$$

Definição 2.4.5. (Demais limites envolvendo o infinito) Com as devidas hipóteses, caso a caso, temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists A > 0 ; \forall x > A ; f(x) > K ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists A > 0 ; \forall x > A ; f(x) < -K ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists A > 0 ; \forall x < -A ; f(x) > K ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists A > 0 ; \forall x < -A ; f(x) < -K.$$

Omitimos as definições de limites laterais envolvendo o infinito, pois são análogos aos já apresentados.

Observação 2.4.1. *As propriedades gerais de Limite se estendem para os limites envolvendo o infinito, com as devidas adaptações.*

Exemplo 2.4.4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Mostremos que dado $K > 0$, existe $A > 0$ tal que se $x \in D_f$ e $x > A$, então $\ln(x) > K$. Ora:

$$x > A \Rightarrow \ln(x) > \ln(A).$$

Disso, queremos a solução de $\ln(A) > K$. Vejamos,

$$\ln(A) > K \Leftrightarrow \exp(\ln(A)) > \exp(K) \Leftrightarrow A > \exp(K).$$

Portanto, tomando $A = \exp(K + 1)$,

$$x > A \Rightarrow \ln(x) > \ln(A) = K + 1 > K.$$

Isto é, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

O teorema seguinte é de grande valia na fundamentação matemática de “cálculos” com o infinito.

Teorema 2.4.1. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções. Valem*

$$\begin{aligned} a) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)] = +\infty \end{cases} . \\ b) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)] = +\infty, \text{ se } L > 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)] = -\infty, \text{ se } L < 0 \end{cases} . \\ c) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)] = -\infty. \\ d) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty. \\ e) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)] = +\infty \end{cases} . \\
g) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)] = -\infty, \text{ se } L > 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)] = +\infty, \text{ se } L < 0 \end{cases} . \\
h) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Iremos provar o primeiro resultado da letra b) e a letra h). Para mais informações, consultar Guidorizzi, 2001, p. 106.

Prova. b) Suponhamos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, $L > 0$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Dado $K > 0$, queremos mostrar que existe $A > 0$ tal que $f(x)g(x) > K$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça $x > A$.

Com efeito, por consequência da desigualdade triangular, conforme argumentação em (iii) no Teorema 2.2.2, Observação 2.4.1 e pela primeira hipótese, existe $A_1 > 0$ tal que para todo x real que satisfaz $x > A_1$, temos $f(x) > \frac{|L|}{2} = m > 0$.

Além disso, pela segunda hipótese, existe $A_2 > 0$ tal que para todo $x > A_2$, ocorre $g(x) > \frac{K+1}{m}$.

Assim, escolhendo $A = \max\{A_1, A_2\}$, vemos que

$$x > A \Rightarrow f(x)g(x) > m \cdot \frac{K+1}{m} = K+1 > K.$$

No caso em que $L < 0$, consideramos a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -L$, $-L > 0$. Então, é suficiente observar que

$$h(x)g(x) > K \Rightarrow -h(x)g(x) < -K$$

e, com o uso do Teorema 2.2.2,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \\
&= - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)}_L \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x)g(x)] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} [-h(x)g(x)] = -\infty.
\end{aligned}$$

h) Inicialmente, notemos que o problema se resume a mostrar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{g(x)} \right] = 0$, pois se valer, pelo Teorema 2.2.2, então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = L \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{g(x)} \right] = 0 \cdot 0 = 0.$$

Ora, dado $\varepsilon > 0$, por hipótese, para $K = \varepsilon$ existe $A > 0$ tal que

$$\begin{aligned} x > A &\Rightarrow g(x) > K = \varepsilon \Rightarrow g(x) = |g(x)| > \varepsilon \\ &\Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - 0 \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação 2.4.2. *Embora o processo demonstrativo possa mudar, substituir $x \rightarrow +\infty$ por $x \rightarrow -\infty$ ou mesmo $x \rightarrow a$, $a \in \mathbb{R}$, não altera os resultados.*

No cálculo de limites, especialmente quando estamos trabalhando com o infinito, deparamo-nos com “expressões” como “ $\frac{k}{\infty}$ ”, k real (a função do denominador tende a k e a do denominador tende a infinito). Neste exemplo, de forma intuitiva, não podemos julgar o resultado, pois o numerador aumenta o valor da fração, mas o denominador o diminui. É interessante notar que as aspas se devem ao fato do infinito não ser número, logo, não é possível operar com o mesmo.

Observação 2.4.3. *“Expressões” indeterminadas são “operações” nas formas*

$$\frac{0}{0}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty; \frac{\infty}{\infty}; 0^0; \infty^0 \text{ e } 1^\infty.$$

Diferente das “expressões” $k \cdot \infty$ ou $\frac{k}{\infty}$, $k \in \mathbb{R}$, as apresentadas acima não têm um único resultado ou mesmo não nos dizem se o limite existe.

Exemplo 2.4.5. *Sejam f, g funções reais tais que $f(x) = cx$ e $g(x) = x$. Então, em $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ surge a indeterminação $\frac{0}{0}$. No entanto, simplificando a razão, o limite é c .*

Exemplo 2.4.6. *Sejam f, g funções reais tais que $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Então, o limite $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)]$ resulta na indeterminação $0 \cdot \infty$. No entanto,*

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \Rightarrow \text{não há limite.}$$

2.5 Funções Contínuas

Para Guidorizzi (2001), podemos entender a continuidade informalmente da seguinte maneira: quando a função está definida em um intervalo dos reais nos reais, dizer que a função é contínua num ponto é o mesmo que o gráfico da mesma não apresentar “salto” naquele ponto. Nesta seção veremos a abordagem formal da continuidade, que muito é similar à de Limite.

Definição 2.5.1. (Continuidade) *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua no ponto $a \in X$ quando*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Dizemos, também, que f é uma função contínua quando a for em todos os pontos do seu domínio.

Exemplo 2.5.1. *A função $h : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \frac{1}{x}$ é contínua.*

Inicialmente, avaliamos que, dado $a \in \mathbb{R}^$,*

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a - x}{x \cdot a} \right| = \frac{|x - a|}{|x| \cdot |a|}.$$

Afirmamos que $\frac{1}{|x|} \leq c$, $c > 0$, em alguma vizinhança de a . De fato, se $|x - a| < \frac{|a|}{2}$, temos

$$||x| - |a|| \leq |x - a| < \frac{|a|}{2}.$$

Pela desigualdade triangular,

$$|x| - |a| > -\frac{|a|}{2} \Rightarrow |x| > \frac{|a|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x|} \leq \frac{2}{|a|} = c.$$

Desse modo, dado $\varepsilon > 0$, definimos $\delta = \min \left\{ \frac{|a|}{2}, \frac{\varepsilon \cdot |a|^2}{2} \right\}$. Para cada $x \in \mathbb{R}^$,*

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{|x - a|}{|x| \cdot |a|} &= \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \frac{\delta}{|x| \cdot |a|} \leq \frac{\delta \cdot 2}{|a|^2} \\ &\leq \frac{\varepsilon \cdot |a|^2}{2} \cdot \frac{2}{|a|^2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto é, $|x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon$, o que queríamos. ■

Exemplo 2.5.2. A função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 0 \\ x + 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$ é descontínua em $x = 0$.

Seja $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dado $\delta > 0$, tomemos $x_0 = \frac{\delta}{k}$, $k > 1$: $x_0 \in (0 - \delta, 0 + \delta)$ e

$$|f(x_0) - f(0)| = |f(\frac{\delta}{k}) - 0| = |\frac{\delta}{k} + 1| = \frac{\delta}{k} + 1 > 1 \geq \frac{1}{2}.$$

Em outras palavras, f é descontínua em 0.

Proposição 2.5.1. Se a é um ponto isolado do conjunto X ($\exists \delta > 0$; $X \cap (a - \delta, a + \delta) = \{a\}$), então toda função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a .

Prova. Dado $\varepsilon > 0$, por hipótese, $\exists \delta > 0$ tal que

$$x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon, \text{ c.q.d.} \quad \blacksquare$$

Observação 2.5.1. É importante notar que a continuidade está definida pontualmente. Pela proposição acima, se o domínio da função é discreto, então a mesma é contínua, ainda que seu gráfico apresente “descontinuidade”. Para acessibilizar os primeiros estudos do Cálculo, portanto, é comum que o domínio da função seja sempre $\mathbb{R}$, ou intervalos reais, ou união de intervalos reais (todos os pontos são de acumulação).

A respeito do gráfico de funções contínuas em intervalos fechados, o Teorema do Valor Intermediário (TVI), enunciado a seguir, fundamenta a concepção visual de curva contínua a que estamos habituados. Além disso, o TVI é uma importante ferramenta para determinar zeros de funções.

Teorema 2.5.1. (Teorema do Valor Intermediário) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

A demonstração pode ser consultada em Lima, 2017, p. 78.

Exemplo 2.5.3. Toda função polinomial $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de grau ímpar possui alguma raiz real. De fato, definamos $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + ax + a_0$, com n ímpar e $a_n \neq 0$. Calculando os limites nos infinitos para p , temos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}).$$

Tal limite tem como resultado $+\infty$ se $a < 0$, e $-\infty$ se $a > 0$. Similarmente, vemos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty$, se $a < 0$, e $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$, se $a > 0$.

Como um limite tende a infinito e o outro tende a menos infinito, pela Definição 2.4.5, é possível encontrar $k > 0$ tal que o intervalo fechado $[-k, k]$ é subconjunto da imagem de p . Dado que $0 \in [-k, k]$, pelo TVI existe c , que é número real, tal que $-k < f(c) = 0 < k$.

Ainda sobre funções contínuas em um intervalo fechado, podemos assegurar a existência de um menor valor e de um maior valor na imagem da função pelo Teorema de Weierstrass. Enunciaremos uma versão adaptada dele.

Teorema 2.5.2. (Teorema de Weierstrass - Adaptado) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, existem $x_0, x_1 \in [a, b]$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, para todo $x \in [a, b]$.*

A demonstração dessa versão é consequência direta do Teorema 6 (Weierstrass) presente em Lima, 2017, p. 82.

Para nós, a importância desse fato se dá principalmente na simplificação dos problemas de otimização presentes na eletiva, como veremos na próxima seção.

Em termos de Limite e Continuidade no ensino médio, é recomendado que se faça uso do próximo teorema, pois com ele temos uma forma prática de determinar a continuidade em um ponto, além de calcular limites sem o uso da definição quando soubermos que a função é contínua.

Teorema 2.5.3. *Se $a \in X \cap X'$, então $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.*

Prova. ($\Rightarrow$) Dado que f é contínua em a ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Como

$$\{x \in X; 0 < |x - a| < \delta\} \subset \{x \in X; |x - a| < \delta\},$$

então

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Em outras palavras, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

($\Leftarrow$) Nossa hipótese agora é que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Como $a \in X$,

$$x = a \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Desse modo,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon, \text{ c.q.d.} \quad \blacksquare$$

Proposição 2.5.2. (Construção de funções contínuas) *Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas em $a \in X$, então são contínuas nesse ponto as funções $f+g, f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$, e f/g , com domínio válido, caso $g(a) \neq 0$.*

Não iremos demonstrar essa proposição, pois a mesma pode ser desenvolvida de forma similar ao Teorema 2.2.2.

Teorema 2.5.4. (Continuidade da composta) *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $b = f(a) \in Y$ e $f(X) \subset Y$, de modo que $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ está bem definida. Então $g \circ f$ é contínua em a .*

Prova. Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade de f em a e de g em $f(a)$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{cases} x \in X, |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon & ; \\ y \in Y, |y - f(a)| < \delta_2 \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon & . \end{cases}$$

Sendo assim, para $\varepsilon' = \delta_2$, existe $\delta > 0$ tal que

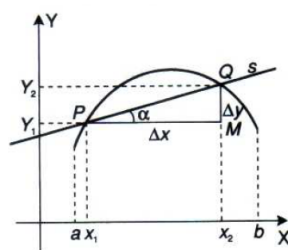
$$\begin{aligned} x \in X, |x - a| < \delta &\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon' = \delta_2 \\ &\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon, \text{ c.q.d.} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Exemplo 2.5.4. A função $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} ; f(x) = \frac{1}{x^2}$ é contínua. Tanto poderíamos utilizar a Proposição 2.5.2, dado que a função $1/x$ é contínua no domínio de f , quanto poderíamos utilizar o Teorema 2.5.4, uma vez que f pode ser vista como a composição de duas funções contínuas.

2.6 Derivada: definições e algumas propriedades

Iniciamos a seção pela construção do conceito de Derivada. Imaginemos uma função qualquer cujo gráfico corresponde às imagens abaixo.

Figura 3 – Uma reta secante a dois pontos



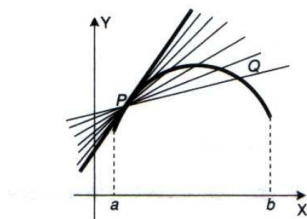
Fonte: FLEMMING e GONÇALVES (2006, p. 115).

Ao interseccionar esse gráfico com uma reta nos pontos P e Q , vemos que o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1}$ é a tangente trigonométrica da inclinação da secante (ou coeficiente angular da reta). Na Física, essa razão aparece com frequência.

Por exemplo, se Y representa a posição de uma partícula, e x representa o tempo, então o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é a velocidade média da partícula de Y_1 a Y_2 .

Agora, suponhamos que aproximemos o ponto Q do ponto P , indefinidamente. Teremos retas conforme a ilustração:

Figura 4 – A construção da reta tangente ao gráfico no ponto P



Fonte: FLEMMING e GONÇALVES (2006, p. 116).

Por esse processo, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ passa a significar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico em P (ou, como se verá, a derivada da função em P). Seguindo a exemplificação física dada, fazendo Q tender para P , obtemos a velocidade instantânea da partícula no ponto P (ou instante a , conforme figura 3).

Definição 2.6.1. (Derivada) *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A derivada da função f no ponto a é o limite*

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Caso

- ▷ o limite exista, dizemos que f é derivável em a ;
- ▷ exista $f'(a)$ para todo a , dizemos que f é derivável em X , e que $f' : X \cap X' \rightarrow \mathbb{R}$ é a função derivada de f ;
- ▷ f' seja contínua, então f é de classe C^1 .

Por fim, algumas notações comuns para $f'(a)$ são $Df(a)$, $\frac{df}{dx}(a)$ e $\frac{df}{dx}\big|_{x=a}$.

Exemplo 2.6.1. A função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = a_0x + b$ é derivável.

Notemos que se $a \in \mathbb{R}$, então $a \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R}'$ (todo ponto de $\mathbb{R}$ é ponto de acumulação; por isso, não é necessário falar de pontos de acumulação quando sempre trabalhamos com o domínio $\mathbb{R}$, ou intervalos reais).

Por definição,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_0(a+h) + b - a_0a - b}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_0h}{h} \\ \Rightarrow f'(a) &= a_0. \end{aligned}$$

Exemplo 2.6.2. A função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, é derivável.

Tomemos $x \in \mathbb{R}$. Queremos calcular

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}. \quad (*)$$

A fórmula do Binômio de Newton é, para x e h ,

$$(x+h)^n = \binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \dots + \binom{n}{n} x^0 h^n.$$

Como $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{1} = n$,

$$(x+h)^n = x^n + nhx^{n-1} + h^2 \cdot p(x, h),$$

em que $p(x, h)$ é um polinômio.

Utilizando (*),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nhx^{n-1} + h^2 \cdot p(x, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(nx^{n-1} + h \cdot p(x, y))}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = nx^{n-1},$$

isto é, f é derivável.

O próximo teorema é muito valioso, pois com ele é possível demonstrar muitas das propriedades da Derivada.

Teorema 2.6.1. *A fim de que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ seja derivável em $a \in X \cap X'$ é necessário e suficiente que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $(a+h) \in X \Rightarrow f(a+h) = f(a) + c \cdot h + r(h)$, em que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. No caso afirmativo, temos $c = f'(a)$.*

Prova. ($\Rightarrow$) Primeiro, vamos definir a função $r(h)$. Seja $I = \{h \in \mathbb{R}^* ; a+h \in X\}$.

Então, está bem definida $r : I \rightarrow \mathbb{R} ; r(h) = f(a+h) - f(a) - c \cdot h$, com $c \in \mathbb{R}$.

Dividindo $r(h)$ por h , temos

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{c \cdot h}{h}.$$

Tomando o limite quando $h \rightarrow 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - c = f'(a) - c.$$

Portanto, basta definir $c = f'(a)$ para completar o raciocínio.

($\Leftarrow$) Dado que $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h)$, temos

$$\begin{aligned}
f'(a) \cdot h &= f(a+h) - f(a) - r(h) \\
\Rightarrow f'(a) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{r(h)}{h}, \text{ com } h \neq 0 \\
\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} \\
\Rightarrow f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.
\end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração. ■

Proposição 2.6.1. *Uma função dos reais nos reais é contínua nos pontos em que é derivável.*

Prova. Seja f derivável em a . Pelo Teorema 2.6.1, com $h \neq 0$,

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + f'(a) \cdot h + r(h) \\
\Rightarrow f(a+h) &= f(a) + f'(a) \cdot h + r(h) \frac{h}{h} \\
\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} (f(a) + f'(a) \cdot h + r(h) \frac{h}{h}) = f(a).
\end{aligned}$$

Colocando $a+h=x$, quando $h \rightarrow 0$, ocorrerá $x \rightarrow a$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

o que prova que f é contínua em a (Teorema 2.5.1). ■

Sendo um próprio limite, a Derivada é um fenômeno local, de modo que analisar os limites lateralmente nos traz novas possibilidades. Definiremos derivadas laterais e veremos uma condição de existência utilizando esse conceito.

Definição 2.6.2. (Derivada à direita) *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ conjunto e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se $a \in X \cap X'_+$, então*

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

é a derivada à direita de f no ponto a .

Definição 2.6.3. (Derivada à esquerda) *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ conjunto e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se $a \in X \cap X'_-$, então*

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

é a derivada à esquerda de f no ponto a .

Teorema 2.6.2. Se $a \in X \cap X'_- \cap X'_+$, a função f é derivável no ponto a se, e somente se, existem e são iguais as derivadas laterais, com $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$.

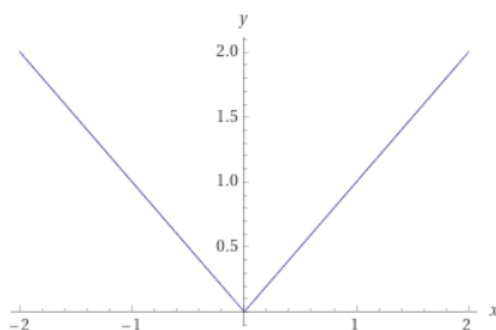
Prova. Como a Derivada é um limite, essa propriedade fica compreendida pelo Teorema 2.3.1. O limite existir e ser L ($f'(a)$, aqui) é equivalente aos laterais (as derivadas laterais) existirem e serem iguais a L . ■

Exemplo 2.6.3. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = |x|$ é contínua, mas não é derivável em $x = 0$.

À esquerda do 0, utilizamos $f(x) = -x$, que é uma função contínua e derivável, logo, existe a derivada à esquerda, valendo -1 . Por outro lado, a derivada à direita, como se pode notar, será 1.

Informalmente, dizemos que uma função não é derivável nos pontos em que o gráfico forma “bico”.

Figura 5 – Gráfico da função $|x|$ de -2 a 2



Fonte: Elaborado pelo autor com o Wolfram Alpha (2023).

2.7 Regras de derivação

Desenvolvemos nesta seção as operações com derivadas e a Regra da Cadeia. Outros tópicos importantes e complementares que podem ser consultados nas fontes utilizadas são a Regra de L'Hôpital e a Derivada da Função Inversa.

Teorema 2.7.1. (Derivada envolvendo funções deriváveis) *Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$. As funções $f \pm g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ (caso $g(a) \neq 0$) são também deriváveis em a , com*

$$\begin{aligned} (i) \quad & (f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a) \quad ; \\ (ii) \quad & (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad ; \\ (iii) \quad & \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \end{aligned}$$

Prova. Faremos apenas o segundo caso. Uma vez demonstrado, enxergamos o processo para o primeiro, e podemos entender $\frac{f}{g}$ como o produto $f \cdot \frac{1}{g}$.

Seja $(*) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a}$. Temos:

$$\begin{aligned} (*) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a) + g(x)f(a) - g(x)f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)(f(x) - f(a)) + f(a)(g(x) - g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)(f(x) - f(a))}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a)(g(x) - g(a))}{x - a} \\ &= g(a)f'(a) + f(a)g'(a), \end{aligned}$$

Portanto,

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \quad \blacksquare$$

Teorema 2.7.2. (Regra da Cadeia) *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'$, $b \in Y \cap Y'$, $f(X) \subset Y$ e $f(a) = b$. Se f é derivável no ponto a e g é derivável no ponto b , então $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a , com*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Demonstração. Demonstraremos por casos. Quando $f(x) \neq f(a)$, vejamos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= g'(f(a)) \cdot f'(a). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $f(x) = f(a)$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{0}{x - a} = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{0}{x - a} = 0.$$

Dado que existem $g'(f(a))$ e $f'(a)$, por hipótese, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = 0 = g'(f(a)) \cdot \underbrace{f'(a)}_0.$$

Em todo caso,

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a), \text{ como queríamos.} \quad \blacksquare$$

Exemplo 2.7.1. A função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \text{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ é derivável.

Em $x = 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \text{sen} \frac{1}{h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \text{sen} \frac{1}{h} \\ &= 0, \end{aligned}$$

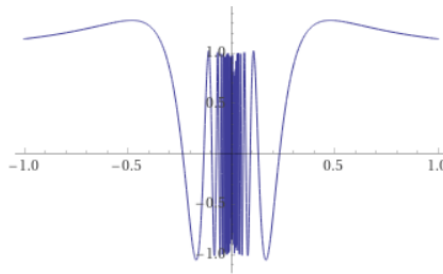
por termos um limite do produto de uma função que tende a 0 por outra limitada.

Quando $x \neq 0$, $g(x)$ é o produto de funções deriváveis. Assim, pelas regras de derivação, e admitindo que $(\text{sen}(x))' = \cos(x)$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^2 \cdot \text{sen} \frac{1}{x})' = 2x \cdot \text{sen} \frac{1}{x} + x^2 \cdot (\text{sen} \frac{1}{x})' \\ &= 2x \cdot \text{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Desse modo, a função $g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $g'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \text{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Figura 6 – Gráfico de g' evidenciando sua oscilação próximo à origem



Fonte: Elaborado pelo autor com o Wolfram Alpha (2023).

2.8 Crescimento de funções

Na natureza e no mundo do trabalho, diversos fenômenos como o crescimento populacional, os custos de produção versus lucro em uma empresa, ou a área de um cercado que se pretende construir podem ser estudados a partir da Derivada. Nesta seção veremos a fundamentação das soluções de problemas de otimização utilizando a Derivada.

Definição 2.8.1. (Máximo e mínimo locais) *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X$. Dizemos que*

- (i) *a é um máximo local de f se $\exists \delta > 0; \forall x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow f(a) \geq f(x)$;*
- (ii) *a é um mínimo local de f se $\exists \delta > 0; \forall x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow f(a) \leq f(x)$.*

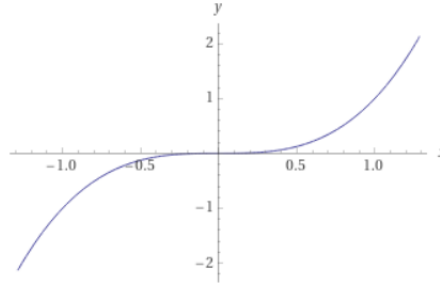
Definição 2.8.2. (Máximo e mínimo absolutos ou globais) *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X$. Dizemos que*

- (i) *a é um máximo absoluto de f quando $f(a) \geq f(x), \forall x \in X$;*
- (ii) *a é um mínimo absoluto de f quando $f(a) \leq f(x), \forall x \in X$.*

Com clareza, solucionar problemas de maximização ou minimização de funções é encontrar seu máximo ou mínimo absoluto. Para isso, precisamos da definição de ponto crítico.

Definição 2.8.3. (Ponto crítico) *Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em $c \in X \cap X'_+ \cap X'_-$, com $f'(c) = 0$, então dizemos que c é um ponto crítico.*

Observação 2.8.1. *É importante saber que todo ponto (de acumulação bilateral, isto é, $a \in [X \cap X_- \cap X_+]$) que é mínimo ou máximo local de uma função derivável é ponto crítico (LIMA, 2017, p. 86). No entanto, nem todo ponto crítico é ponto de mínimo ou máximo local. Por exemplo, o ponto $x = 0$ na função $f(x) = x^3$ é ponto crítico, mas não é mínimo nem máximo local.*

Figura 7 – Gráfico da função x^3 

Fonte: Elaborado pelo autor com o Wolfram Alpha (2023).

A fim de estudar a implicação de pontos críticos a mínimos ou máximos, elencaremos três importantes teoremas sobre Derivada, o Teorema de Rolle, o Teorema do Valor Médio (TVM) e a versão de segunda ordem da Fórmula de Taylor.

Teorema 2.8.1. (Teorema de Rolle) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$*

A demonstração pode ser conferida em Lima, 2017, p. 98.

O Teorema de Rolle nos diz que quando estamos trabalhando com funções deriváveis em intervalos, sempre temos pelo menos um ponto crítico caso a imagem dos extremos do intervalo sejam iguais. Informalmente, nesse caso, não há como traçar uma linha contínua entre os pontos extremos da função sem delimitar um mínimo e um máximo (que garante a existência de pelo menos um ponto crítico).

Teorema 2.8.2. (Teorema do Valor Médio) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Prova. Consideremos $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = f(x) - dx$, $d \in \mathbb{R}$. Para que tenhamos $g(a) = g(b)$, explicitamos equivalências:

$$\begin{aligned} g(a) = g(b) &\Leftrightarrow db - da = f(b) - f(a) \\ &\Leftrightarrow d(b - a) = f(b) - f(a) \\ &\Leftrightarrow d = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{aligned}$$

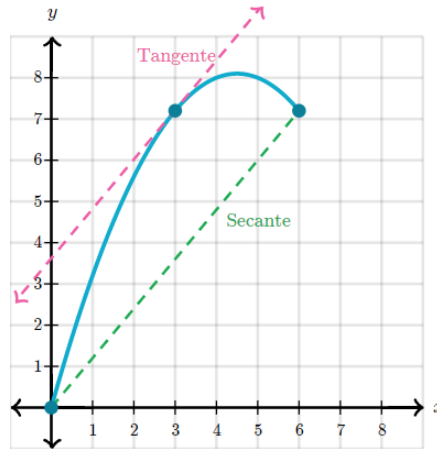
Assim, considerando tal d em g , pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$:

$$g'(c) = f'(c) - d = 0 \Rightarrow f'(c) = d = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

como queríamos. ■

Geometricamente, o TVM nos diz que existe um ponto $c \in (a, b)$ onde a reta tangente ao gráfico em c é paralela (mesmo coeficiente angular) à secante que passa por a e b .

Figura 8 – Exemplificação geométrica do Teorema do Valor Médio



Fonte: Khan Academy (2023).

De outra forma, retornando ao problema da velocidade, estamos dizendo que há um instante em que a velocidade instantânea da partícula é igual à velocidade média desenvolvida no trajeto.

Corolário 2.8.1. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em (a, b) .*

Valem os condicionais:

- (i) $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ é não-decrescente em (a, b) $[x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)]$;
- (ii) $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ é não-crescente em (a, b) $[x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)]$.

Prova. Suponhamos que $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$. Dados $x, y \in (a, b)$, com $x < y$, pelo TVM temos que existe $c \in (x, y)$ tal que $f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

Por hipótese,

$$f'(c) \geq 0 \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \Rightarrow f(y) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Observe que tomamos arbitrários $x, y \in (a, b)$ com $x < y$ e chegamos em $f(x) \leq f(y)$. O caso (ii) é análogo. ■

O terceiro dos teoremas será utilizado na demonstração do Teste da Segunda Derivada. A Fórmula de Taylor busca aproximar o valor de uma função num ponto próximo a um ponto conhecido a partir de suas derivadas.

Teorema 2.8.3. (Fórmula de Taylor de Segunda Ordem) *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo I , duas vezes derivável em a . A função $r : J \rightarrow \mathbb{R}$, em que $J = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in I\}$, definida pela igualdade*

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2} \cdot h^2 + r(h)$$

$$\text{satisfaz } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0.$$

Prova. Notemos que r é duas vezes derivável em 0 e $r(0) = r'(0) = r''(0) = 0$. Isso pode ser verificado resolvendo os limites relativos a estas derivadas, da menor ordem de derivada para a maior. Dito isso, esse teorema fica demonstrado ao garantir a veracidade da seguinte proposição:

Proposição 2.8.1. *Seja $r : J \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes derivável no ponto 0. Se $r^{(i)} = 0$ para $i = 0, 1, 2$, então $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0$.*

Prova. Observemos que

$$\underbrace{r''(0)}_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r'(x) - r'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r'(x)}{x} = 0.$$

Utilizando o TVM, entre 0 e h existe $x \in (0, h)$, $h \neq 0$, tal que

$$\begin{aligned} r'(x) = \frac{r(h) - r(0)}{h - 0} &\Leftrightarrow r(h) = r'(x) \cdot h \Leftrightarrow \frac{r(h)}{h^2} = \frac{r'(x) \cdot h}{h^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{r(h)}{h^2} = \frac{r'(x)}{h} \cdot \frac{x}{x} = \frac{r'(x)}{x} \cdot \frac{x}{h} \\ &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{\frac{r'(x)}{x}}_0 \cdot \underbrace{\frac{x}{h}}_{\text{limitado}} \right] = 0. \end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração. ■

Em posse dos teoremas e propriedades das derivadas, enunciaremos os testes que nos permitem avaliar se um ponto crítico é ponto de mínimo ou ponto de máximo locais.

Teorema 2.8.4. (Teste da Primeira Derivada) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) , que contém o ponto crítico c . Se existe $\delta > 0$ tal que*

- (i) $f'(x) \geq 0, \forall x \in (c - \delta, c)$ e $f'(x) \leq 0, \forall x \in (c, c + \delta)$, então c é máximo local;
- (ii) $f'(x) \leq 0, \forall x \in (c - \delta, c)$ e $f'(x) \geq 0, \forall x \in (c, c + \delta)$, então c é mínimo local.

Prova. Decorre diretamente do Corolário 2.8.1 e por f ser contínua. Por exemplo, no caso (i), f é não-decrescente em $(c - \delta, c)$ e não-crescente em $(c, c + \delta)$.

Assim, $\forall x \in (c - \delta, c)$, $f(x) \leq f(c)$. Por outro lado, $\forall y \in (c, c + \delta)$, $f(y) \leq f(c)$. Independente de $z \in (c - \delta, c + \delta)$ encontramos $f(c) \geq f(z)$. ■

Exemplo 2.8.1. *Suponhamos que $f : [-4, \frac{7}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^3 - 12x + 4$ seja a função modelo de um problema que se quer encontrar o máximo (absoluto). Como $f'(x) = 3x^2 - 12$, seus pontos críticos serão 2 e -2.*

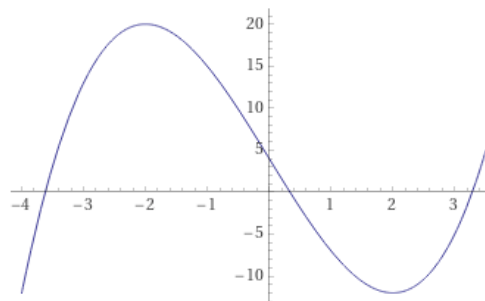
Observando a distância entre esses números, vamos escolher $\delta = 1$. Então,

$$x \in (-3, -2) \Rightarrow [3(-2)^2 - 9 < f'(x) < 3(-3)^2 - 12] \Rightarrow f'(x) > 0;$$

$$x \in (-2, -1) \Rightarrow [3(-1)^2 - 12 < f'(x) < 3(-2)^2 - 12] \Rightarrow f'(x) < 0.$$

Assim, -2 é um máximo local. Pelo mesmo processo sabemos que 2 é um mínimo local. Isso nos permite concluir que o máximo da função será -2 ou 7/2, pois se antes de -2 a função voltar a crescer, teríamos outro ponto crítico; e após 2 a função apenas cresce (se voltasse a decrescer, novamente teríamos outro ponto crítico). Como $f(-2) = 20$ e $f(3,5) = 4,875$, concluimos que -2 é ponto de máximo absoluto da função e 20 é seu maior valor.

Figura 9 – Gráfico de f



Fonte: Elaborado pelo autor com o Wolfram Alpha (2023).

Teorema 2.8.5. (Teste da Segunda Derivada) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e duas vezes derivável em (a, b) , que contém o ponto crítico c ($f'(c) = 0$).*

Então, garantimos que

$$(i) \quad f''(c) < 0 \Rightarrow c \text{ é máximo local};$$

$$(ii) \quad f''(c) > 0 \Rightarrow c \text{ é mínimo local}.$$

Prova. Suponhamos que $f''(c) < 0$. Utilizando a Fórmula de Taylor de Segunda Ordem em c , temos

$$\begin{aligned} f(c+h) &= f(c) + f'(c)h + \frac{f''(c)h^2}{2} + r(h), \quad \text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0 \\ \Rightarrow f(c+h) - f(c) - f'(c)h &= \frac{f''(c)h^2}{2} + r(h) \\ \Rightarrow f(c+h) - f(c) - f'(c)h &= h^2 \left(\frac{f''(c)}{2} + \frac{r(h)}{h^2} \right) \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} [f(c+h) - f(c) - f'(c)h] &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[h^2 \left(\frac{f''(c)}{2} + \frac{r(h)}{h^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

No primeiro membro da última da equação, $f'(c)h$ tende a 0. Já no segundo, podemos afirmar que o limite é negativo, pois quando h tende a 0, h^2 é sempre uma quantia positiva, $f''(c)$ é negativo e $\frac{r(h)}{h^2}$ tende a 0. Com isso,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (f(c+h) - f(c)) &\leq 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c)) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq f(c). \end{aligned}$$

Isso nos diz que, em pontos suficientemente próximos a c , ocorre $f(x) \leq f(c)$, isto é, c é um máximo local. O item (ii) tem demonstração análoga. ■

Exemplo 2.8.2. *Consideremos os dados do exemplo anterior. Nos casos em que achar a segunda derivada não é tarefa difícil, usar o Teste da Segunda Derivada para encontrar máximos e mínimos é mais simples. De fato, como $f'(x) = 3x^2 - 12$, temos $f''(x) = 6x$. Então,*

$$f''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow -2 \text{ é ponto de máximo local};$$

$$f''(2) = 12 > 0 \Rightarrow 2 \text{ é ponto de mínimo local}.$$

Observação 2.8.2. (Solução geral para problemas de otimização) *Essencialmente, queremos esboçar o gráfico da função, o que nos permite apontar seu máximo*

ou mínimo absolutos. O primeiro passo é determinar os intervalos de interesse, ou intervalos abertos em que a derivada não pode mudar de sinal - o que pode ser feito a partir dos extremos, dos pontos de indefinição de f e de f' , e testar um valor nesse intervalo para cada - o que revela a monotonicidade da função ali.

Feito isso, utilizando o comportamento da função, os valores da função nos extremos e nos pontos de interesse, e com o auxílio de Limites, podemos esboçar o gráfico e encontrar os pontos da função que se deseja.

No caso do Exemplo 2.8.2, os intervalos são $(-4, -2)$, $(-2, 2)$ e $(2, \frac{7}{2})$. Notemos que nestes intervalos não há possibilidade das derivadas mudarem de sinal.

Caso aconteça, como f' é contínua, em decorrência do TVI, encontraríamos um outro ponto crítico além dos determinados. Informalmente, como a curva de f' é contínua, se for positiva em algum ponto e negativa em outro, então ela passa pelo zero, revelando um ponto crítico.

Observação 2.8.3. Sugerimos utilizar na eletiva, para problemas de otimização, apenas funções deriváveis e contínuas em um intervalo fechado. Isso simplifica o processo para: o máximo ou mínimo absolutos são pontos de extremo ou pontos críticos. Em primeiro lugar, definir a função (contínua) em um intervalo fechado garante a existência de um máximo e um mínimo absolutos, pelo Teorema de Weierstrass. Verificamos a afirmação por contradição. Supondo, por exemplo, o máximo absoluto no interior do intervalo e não sendo ponto crítico, uma vez que, por definição, é máximo local, também seria ponto crítico (Observação 2.8.1).

CAPÍTULO 3

A ELETIVA INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL

Embora, no Brasil, a presença do Cálculo nos currículos da educação básica tenha sido sazonal, inserido e excluído diversas vezes ao longo de mais de 100 de anos (CONCORDIDO et al., 2015), acreditamos que isso deva ser mudado. O Cálculo Diferencial, em particular, é capaz de ser abordado didaticamente através de um enfoque que preza a intuição e a dedução, além de ser possível e desejável tanto a utilização de tecnologias educacionais como o Geogebra ou o Wolfram Alpha, quanto a conexão à outras áreas do conhecimento, por exemplo, a Física e a Química. Desse modo, há a possibilidade concreta de se promover interdisciplinaridade, interesse e significado (PETRY, 2016; JUNIOR, 2015).

Isso está ligado às discussões sobre a possibilidade de se trabalhar o Cálculo no ensino médio. No entanto, uma outra pergunta válida surge na forma “por que ensinar Cálculo no ensino médio?”. Para Pereira et. al. (2018), o aluno desenvolve melhor entendimento e capacidade de resolução de problemas da Matemática e da Física, além de ter um melhor preparo e rendimento nos cursos das Ciências Exatas. De acordo com Geraldo Ávilla (1991), o Cálculo contribui para a integração dos indivíduos à sociedade na medida em que traz para o aluno ideias modernas e

relevantes para o desenvolvimento tecnocientífico atual.

Enxergamos que os pontos elencados se alinham com as finalidades da Educação descritas no Artigo 2 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) nº 9394/1996: “A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.”

Neste capítulo apresentamos a ementa da eletiva proposta e orientações didáticas tanto gerais, quanto relativas à abordagem no ensino médio dos conteúdos programáticos.

3.1 Ementa da eletiva Introdução ao Cálculo Diferencial

Embora a ementa desta eletiva tenha sido construída com base na Proposta Curricular da Paraíba (2020), destacamos que a mesma pode ser tomada como base para a construção de cursos similares, mais detalhados ou maiores. Dito isso, a ementa é destinada às escolas cujas turmas não têm problemas nítidos com os conteúdos pré-requisitos do Cálculo, especialmente a representação gráfica no plano cartesiano de funções. Além disso, tem por base 02 (duas) horas-aula semanais ao longo de um semestre, totalizando 30 (trinta) horas. Para os casos de turmas com defasagem evidente ou mais tempo disponível para a eletiva, oferecemos sugestões para adaptar o curso.

Quadro 4 – Ementa da eletiva Introdução ao Cálculo Diferencial

1. Título: Introdução ao Cálculo Diferencial.
2. Áreas do Conhecimento: Matemática e suas tecnologias; Ciências da Natureza e suas tecnologias.
3. Professores envolvidos: Professor de Matemática; Professor de Física.

4. **Justificativa:** Esta unidade curricular faz-se necessária por, além de buscar preencher lacunas nas habilidades de interpretação e conexão da realidade com a Matemática, ser promotora de interdisciplinaridade, interesse, curiosidade e significado na formação escolar (PETRY, 2016; JUNIOR, 2015). Adicionalmente, os estudantes que se comprometerem com o curso estarão melhor preparados para prosseguir nos estudos em um curso superior na área de Exatas (PEREIRA et. al., 2018), contribuindo para a redução dos índices de reprovação e de abandono nos primeiros semestres dos cursos da área de Exatas.

5. **Objetivos:** (i) Ler e interpretar modelos matemáticos com funções utilizados em situações reais ou teóricas; (ii) compreender o conceito de derivada e calculá-la para funções elementares; (iii) resolver problemas de otimização e problemas da Física utilizando a Derivada; (v) relacionar a Derivada à uma ampliação do entendimento físico da Mecânica Newtoniana.

6. **Habilidades da BNCC envolvidas:** Além destas, incluir as habilidades relacionadas à Física, à critério do professor de tal área:

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º grau, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

7. **Pré-requisitos:** (i) Conjunto dos números reais e intervalos reais; (ii) Funções: domínio, imagem e gráfico no plano cartesiano; (iii) Funções do 1º grau e do 2º grau.

8. Conteúdo programático:

- a) Limites e Continuidade: definição por propriedade, análise intuitiva de limites na função $\frac{1}{x}$, operações com limites, cálculo de limites a partir das regras, indeterminações, definição intuitiva de Continuidade de funções reais e relação com Limites;
- b) Derivadas: definição e relação com a velocidade na Física, regras de derivação, derivada de funções elementares;
- c) Aplicações das Derivadas: máximos, mínimos e pontos críticos de funções, problemas de otimização.
- d) A Derivada na Física: [À cargo do professor de Física.](#)

9. Metodologia: O curso de Cálculo Diferencial será ministrado através de aulas expositivas e dialogadas, no quadro, prezando a participação do aluno na construção dos objetos. Em cada momento (dia letivo) pelo menos 10 (dez) minutos serão reservados para discussão de dúvidas. [Desconsiderar o próximo trecho caso não se tenha a infraestrutura disponível.](#) Pelo menos 5 (cinco) minutos serão reservados em cada dia letivo para exibir em projetor de imagens as funções trabalhadas por meio dos softwares Geogebra ou Wolfram Alpha.

10. Recursos didáticos: Pincéis e apagador para quadro branco, ou giz e apagador para quadro negro. Opcionalmente, computador, acesso à internet e projetor de imagens.

11. Duração: 30 (trinta) horas.

12. Culminância: Seminários percorrendo a importância e as contribuições das Funções e do Cálculo para a Ciência e para a sociedade moderna.

13. Avaliação: Interesse e participação em sala de aula; listas de exercícios a serem resolvidas em grupos.

14. Referências: [Além destas, incluir as referências da seção destinada à Física:](#)

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

JUNIOR, Jaime A. O. **Um estudo sobre a implementação do cálculo diferencial e integral no ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e da Computação, ICMC-USP. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015.

PEREIRA et. al. Cálculo Diferencial e Integral: Uma Introdução ao Ensino Médio. *In*: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. 05., 2018. **Anál eletrônico**. Olinda, Pernambuco: Editora Realize, 2018, p. 1-2. Disponível em: <<https://tinyurl.com/524tepe4>>. Acesso em: 25 fev. 2023.

PETRY, Morgana. **Cálculo Diferencial no Ensino Médio: Uma abordagem possível e interdisciplinar com auxílio da tecnologia**. São Leopoldo, 2016. Disponível em: <<https://tinyurl.com/mv73ytn5>>. Acesso em: 25 fev. 2023.

STEWART, James. **Cálculo – Volume 1**. Pioneira Thomson Learning, 5^a ed. 2006.

Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

No tocante aos pré-requisitos, sabemos que para compreender e aprender Matemática satisfatoriamente é necessário ter compreendido e aprendido aquilo que é essencial aos objetos que se quer estudar. Infelizmente, muitas escolas de ensino médio no Brasil, especialmente as da rede pública, apresentam baixo desempenho em Matemática (EXAME, 2021). Por isso, para os docentes que se interessarem pela eletiva e estejam nesse contexto, sugerimos organizar o curso em duas etapas com pelo menos 60 (sessenta horas) totais. O primeiro semestre do ano letivo seria dedicado ao reparo educacional e o segundo ao Cálculo Diferencial, devendo se ter o cuidado na adaptação da ementa para selecionar quais pré-requisitos e quais funções serão trabalhadas conforme a realidade local, uma vez que soa-nos improvável, nesse período de tempo, ensinar a totalidade descrita de forma satisfatória.

3.2 Considerações didáticas gerais da eletiva

Em acordo com Petry (2016) e com Junior (2015), no ensino de Cálculo no ensino médio, recomendamos a priorização das aplicações do Cálculo e a conexão com as demais áreas do conhecimento. Isso significa menos tempo destinado aos conteúdos de Limites e Continuidade, buscando essencialmente apresentar os conceitos e convencer por intuição; e mais atenção à Derivadas, percorrendo com detalhes problemas de otimização.

Desse modo, sugerimos dividir o tempo durante o curso da seguinte forma: 04 (quatro) horas-aula para Limites e Continuidade, 08 (oito) horas-aula para Derivadas, 06 (seis) horas-aula para Aplicações da Derivada, 06 (seis) horas-aula para A Derivada na Física, e 04 (quatro) horas-aula para a orientação dos trabalhos de culminância - as avaliações serão realizadas continuamente ou extraclasse. Caso seja necessária dividir igualmente a carga horária, além de outras mudanças, a seção “problemas de otimização” pode ser compartilhada com o professor de Física.

A respeito das demonstrações matemáticas tão presentes nos textos de Cálculo, acreditamos que demonstrar propriedades e teoremas deve ser encorajado, devendo-se no entanto ter cuidado especial sobre as que são feitas pelas definições de Limite e de Derivada, dado o nível de escolaridade e maturidade matemática em questão. Por exemplo, demonstrar que $(ax + b)' = a$ exemplifica a utilização da definição de Derivada para obter resultados de forma simples, mas provar operações com derivadas pode se mostrar uma tarefa meramente expositiva e maçante, em razão das dificuldades que os alunos podem apresentar no cadenciamento lógico e notacional.

Fundamentamos essa visão em Stylianides e Stylianides (2008), que, a partir de extensa revisão bibliográfica no uso de demonstrações no ensino básico dos Estados Unidos, argumentam três fatores principais para seu uso. Primeiro, demonstrações matemáticas são fundamentais à Matemática, sendo a base para o entendimento e essencial para desenvolver, estabelecer e comunicar conhecimento matemático. Como segunda razão, a proficiência dos estudantes em demonstrações matemáticas é capaz de torná-los mais proficientes em Matemática no geral, uma vez que uma prova está envolvida em qualquer situação que devamos concluir algo e tomar decisões. Por

último, os autores sustentam que a considerável dificuldade que alunos do ensino médio e da universidade relatam com demonstrações matemáticas é possivelmente explicada pela introdução tardia destas em suas experiências escolares, propondo, portanto, que se deva trabalhar as demonstrações matemáticas de forma sistemática e gradual.

No Brasil, textos em Educação Matemática nesse contexto também confluem com tais razões. Medeiros (2018), valendo-se de uma análise histórica do ensino de Matemática no Brasil e de documentos centrais da educação brasileira, como a LDB n° 9393/1996 e da BNCC, justifica que as demonstrações matemáticas são a essência da Matemática e, uma vez o alunado privado de experiências como estas, “o alicerce matemático se perde como um todo”.

Silva e Junior (2020), mediante pesquisa bibliográfica no tema e estudo de caso realizado com alunos do ensino médio, sustentam o uso das demonstrações matemáticas à medida que essa metodologia contribui para, além do convencimento e justificativa, a melhor significação do que foi estudado por parte dos estudantes.

Amado, Sanchez e Pinto (2015), com base em estudo de caso sobre demonstrações em Geometria com auxílio do Geogebra em uma turma do 9º ano, apontam que a experimentação tardia dos estudantes com demonstrações matemáticas, no cotidiano escolar, pode gerar dificuldades em atividades matemáticas, o que não necessariamente inclui outras demonstrações matemáticas, mas aspectos mais gerais do pensamento humano em um contexto de desafio intelectual, como quando da necessidade do emprego de raciocínio dedutivo.

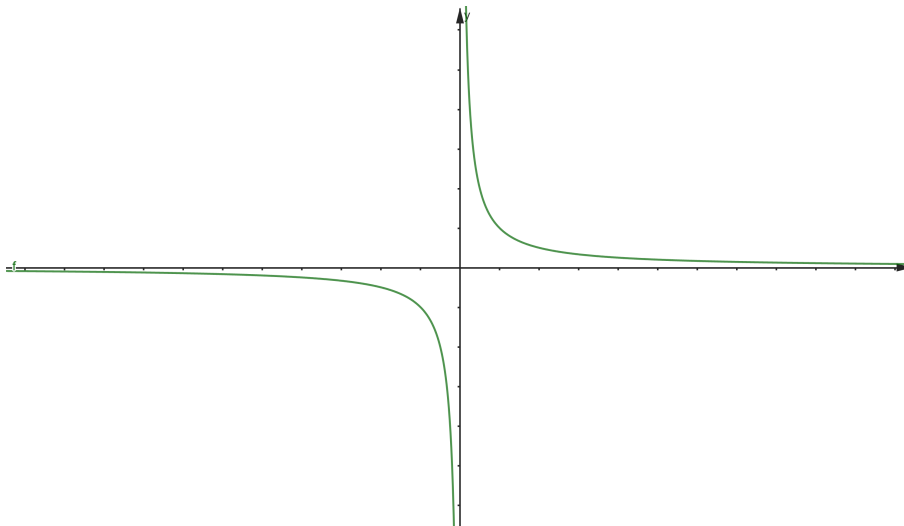
Nas seções seguintes, apresentamos orientações didáticas segundo tais paradigmas para cada seção do conteúdo programático, na finalidade de servir de base para a construção das aulas.

3.3 Abordando Limites e Continuidade

Essencialmente, recomendamos que os conteúdos de Limites e Continuidades sejam vistos de forma breve e prezando a intuição. Para isso, sugerimos pautar as aulas iniciais em uma função cujo gráfico podemos extrair tópicos a serem trabalhados,

por exemplo, a função $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1/x$.

Figura 10 – Gráfico da função $f(x) = 1/x$



Fonte: Elaborado pelo autor com o GeoGebra Classic (2023).

A partir dessa hipérbola, podemos:

1. Explorar intuitivamente o conceito e as notações de Limite, e. g. “valor para o qual a função tende quando x tende a um número”;
2. Apresentar a noção de Limite Lateral e evidenciar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$;
3. Definir Limite pelo Teorema 2.3.1, isto é, se os limites laterais em um ponto existirem e forem iguais, então existe o limite no ponto. Consequentemente, se os limites laterais forem diferentes ou não existir algum, não existe o limite;
4. Apresentar o conceito de infinito, e.g. “uma quantia que é maior que qualquer número”. Como sugestão didática, a pergunta “qual o tamanho do universo?” pode nortear essa discussão. Uma vez que o universo está em constante expansão, no momento que determinarmos um número para o seu tamanho, seu tamanho já é maior que esse número. Para isso, recomendamos a leitura sobre as contribuições do astrônomo Edwin Hubble (1889-1953).

5. Caso o professor tenha lecionado os conteúdos de PA e de PG, nos exemplos com o infinito, recomendamos fortemente traçar um paralelo com os termos gerais e a noção de limite nessas sequências, dado que sequências (reais) são funções reais restritas aos números naturais. Isso pode facilitar o entendimento que se espera deles;
6. Explorar intuitivamente, com o uso de progressões, os limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$.

Aproveitando a discussão no gráfico da hipérbola acima, recomendamos trabalhar Continuidade em seguida, a partir de observações. Justificamos inseri-la nesse momento, em detrimento de após concluir Limites, pois podemos seguir a linha de raciocínio expositiva e intuitiva que já estava sendo trabalhada, além de que a dinamização dos cálculos envolve a Continuidade. Desse modo, sugerimos:

1. Pôr como observação o seguinte, ou similar: “Considere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é contínua quando seu gráfico não apresenta “saltos” nos pontos em que está definida. Além disso, deve ocorrer $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, para todo a no domínio de f .” (Teorema 2.5.3);
2. Discutir a continuidade de f , trazendo a atenção para o ponto $x = 0$. Nele, embora visualizemos um salto, o mesmo ocorre em um ponto em que f não está definida;
3. Exemplificar funções contínuas conhecidas e seus gráficos, especialmente as que forem ser trabalhadas no curso, e.g. funções do 2º grau, seno etc.;
4. Pôr como segunda observação o seguinte, ou similar: “A soma, o produto, a razão e a composição entre funções contínuas gera uma nova função contínua, observados os domínios adequados.” (Proposição 2.5.2 e Teorema 2.5.4);
5. Exemplificar tais operações, destacando as funções polinomiais.

A partir de agora, é importante deixar claro que serão utilizadas exclusivamente funções contínuas, para que sempre seja possível escrever $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Nesse contexto, calcular Limites torna-se uma tarefa mais simples ao exibir o teorema seguinte:

Teorema 3.3.1. *Sejam f, g e $f(g)$ funções reais contínuas. Então,*

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + g(a);$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) \cdot g(a);$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}, \text{ se } g(a) \neq 0;$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow a} (f(g(x))) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(g(a)).$

Prova. Decorre do Teorema 2.2.2, da Proposição 2.5.2 e do Teorema 2.5.4. ■

Recomendamos que, durante e após exemplos de cálculos de limites, seja enfatizado que não é necessário memorizar as regras, apenas as condições nas quais podemos calcular o valor da função no ponto e analisar se temos um resultado ou não. É nesse momento que se pode escolher limites que resultarão em indeterminações (Observação 2.4.3), principalmente a indeterminação $\frac{0}{0}$.

3.4 Abordando Derivadas

Na perspectiva de iniciar Derivadas, recomendamos construir esse conceito graficamente, ligando-o a alguma aplicação na Física, conforme feito na Seção 2.6. Partindo dessa abordagem, é imprescindível que a seção Derivadas priorize o bom entendimento da relação entre a Derivada e o comportamento de funções; e os cálculos e o exercício das regras, uma vez que são fundamentais para a solução dos problemas-alvo do curso.

Feita a abordagem inicial, sugerimos, após enfatizar que o curso trabalhará apenas com funções definidas na reta, em intervalos reais ou união de intervalos,

1. Definir Derivadas da seguinte forma, ou similar: “Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A derivada da função f , quando existir, é a função $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pelo limite $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ ” (Definição 2.6.1);
2. Pôr como observação o seguinte, ou similar: “Para uma função ser derivável, é necessário que ela seja contínua e que seu gráfico seja suave (sem “bicos”). Por exemplo, a função quadrática é derivável, mas a função $f(x) = |x|$, embora contínua, não é.” (Teorema 2.6.2 e Exemplo 2.6.3);
3. Demonstrar a derivada da função afim e da função quadrática pela definição dada;
4. A partir de exemplos dessas funções, fazer uma discussão preliminar do crescimento das funções a partir das retas tangentes e do sinal das derivadas em trechos dos gráficos (Corolário 2.8.1);
5. Fornecer aos alunos, por exposição no quadro, impressão e/ou documento digital uma tabela com as derivadas das funções que serão utilizadas. É possível encontrar facilmente tabelas de derivação na internet.

Feito isso, apresentar as regras de derivação pelos seguintes teoremas é uma opção viável:

Teorema 3.4.1. *Considere f e g funções deriváveis. Então, as funções $(f \pm g)$, $(f \cdot g)$ e $\left(\frac{f}{g}\right)$ (caso $g \neq 0$, para todo x no domínio respectível) são também deriváveis, com*

$$(i) \quad (f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(ii) \quad (f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(ii) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Teorema 3.4.2. *Considere f , g , e $(g \circ f)$ funções deriváveis. Então*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

A fundamentação matemática pode ser conferida no Teorema 2.7.1 e no Teorema 2.7.2.

A respeito do Teorema 3.4.1, comentar que a terceira regra pode ser vista como um caso particular da segunda pode ser benéfico. Além disso, acreditamos ser uma opção viável, para dar um contato inicial com os cálculos, demonstrar o item (iii) a partir do (ii), sendo feito de forma direta. Enfatizamos que os cálculos com ambos os teoremas devem ser exercitados extensivamente por exemplos e exercícios, tanto durante as aulas, quanto por meio de trabalhos e avaliações, uma vez que são indissociáveis da resolução dos problemas de otimização.

3.5 Abordando Aplicações da Derivada

Um trajeto interessante para esta seção, a última que compete à Matemática na eletiva, é dividi-la em duas partes. Na primeira parte, temos o tratamento das ferramentas teóricas e algorítmicas que serão utilizadas; já na segunda, podemos completar os objetivos gerais e específicos que não foram trabalhados ainda por meio da discussão e resolução de questões envolvendo Derivadas, buscando priorizar a compreensão qualitativa, isto é, destacando o entendimento do problema e o porquê de se resolvê-lo de determinada forma. Ademais, o professor pode aproveitar as aplicações selecionadas para motivar os estudantes a pesquisarem mais sobre o Cálculo aplicado àquela área, contribuindo para a execução dos trabalhos de culminância, se houver.

Nesse caminho, sugerimos, após um breve panorama da relação entre a Derivada e os problemas selecionados, apresentar, adaptadas da seguinte forma ou similar, a Definição 2.8.1, a Definição 2.8.2 e a Definição 2.8.3:

1. Pontos de máximo: “Um ponto $x = a$ da função f é dito ponto de máximo local se pelo menos em algum intervalo de centro a os valores da função são menores ou iguais a $f(a)$. Se para todos os valores do domínio isso ocorrer, então o ponto $x = a$ é dito ponto de máximo global.”;
2. Pontos de mínimo: “Um ponto $x = a$ da função f é dito ponto de mínimo local se pelo menos em algum intervalo de centro a os valores da função

são maiores ou iguais a $f(a)$. Se para todos os valores do domínio isso ocorrer, então o ponto $x = a$ é dito ponto de mínimo global.”;

3. Ponto crítico: “Um ponto $x = a$ é dito ponto crítico da função derivável f se $f'(a) = 0$. Geometricamente, a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é paralela ao eixo x (inclinação zero).”

Claramente, para cada uma dessas definições, exemplificações gráficas são excelentes aliados didáticos. Em tais momentos, é importante utilizar pelo menos uma função quadrática, verificando que o ponto “ x do vértice” é tanto máximo (ou mínimo) local, quanto máximo (ou mínimo) global; além de ser ponto crítico, o que pode ser mostrado analiticamente bem como graficamente, por meio de uma sequência gráfica das retas tangentes - suas inclinações tendem a zero quanto mais nos aproximamos do ponto a .

Completada essa introdução, sugerimos trabalhar um problema de otimização, prezando a participação da turma, guiando a solução até onde é possível, isto é, a construção da função de uma variável associada ao problema, cujo gráfico é desconhecido até então. Enfatizamos que essa função deve estar definida em um intervalo fechado. Nesse contexto, perguntas como “o que queremos achar nessa função para solucionar o problema?” e “se soubéssemos como é o gráfico, saberíamos responder o problema?” são encorajadas.

Para concluir a questão, sugerimos apresentar e utilizar o algoritmo disposto a seguir, escrito com base em Stewart, 2006, pp. 331-332.

Encontrando máximos e mínimos em funções deriváveis, definidas em intervalos fechados.

Etapa 1. Desenhar o problema, escrevendo as incógnitas, variáveis e equações que se relacionam;

Etapa 2. Determinar a função f de uma variável associada ao problema;

Etapa 3. Responder às perguntas: “Queremos o máximo ou o mínimo global da função? Um valor do domínio ou um valor da imagem?”;

Etapa 4. Encontrar a função derivada de f e seus pontos críticos;

Etapa 5. Calcular f nos pontos extremos e nos pontos críticos;

Conclusão. O ponto de máximo ou de mínimo global da função é um dos pontos extremos ou um dos pontos críticos.

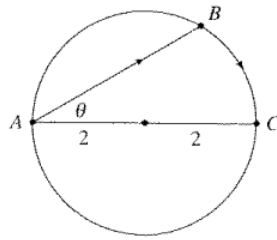
Recomendamos justificar a conclusão, convencendo graficamente (Observação 2.8.3). Informalmente: primeiro, uma função contínua definida em um intervalo fechado não pode tender a infinito, pois o infinito não é número e, nesse caso, seria imagem de algum ponto da função; segundo, como f é derivável, a curva que liga os extremos não pode ser desenhada de qualquer forma. Então, por meio de esboços gráficos envolvendo o crescimento no interior do intervalo, tendo em vista o Teste da Primeira Derivada, concluimos a justificação.

Finalizamos esta seção referenciando uma lista de questões de problemas de otimização. Os problemas 1, 2 e 5 têm soluções apresentadas pelos autores.

1. (STEWART, 2006, p. 332) Um fazendeiro tem 2400 pés de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?
2. (STEWART, 2006, p. 333) Uma lata cilíndrica é feita para receber 1 litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizam o custo do metal para produzir a lata.
3. (STEWART, 2006, p. 338 – adaptada) Todos os dias, uma mulher precisa se deslocar do ponto A, localizado na praia de um lago circular com raio de 2 milhas, ao ponto C, diametralmente oposto a A. Sabendo que ela está livre para escolher o caminho, e ela pode andar a uma taxa de 4 milhas/hora e remar um bote a 2 millhas/hora, como ela deve proceder para minimizar o tempo do percurso em seu dia a dia? Considere a função seno derivável e $(\text{sen}(x))' = \text{cos}(x)$.

Figura 11 – Representação gráfica do problema do menor tempo

4. (STEWART, 2006, p. 337 – adaptada) Uma janela normanda tem a forma de um retângulo tendo em cima um semicírculo, conforme imagem a seguir.



Fonte: STEWART (2016, p. 338).

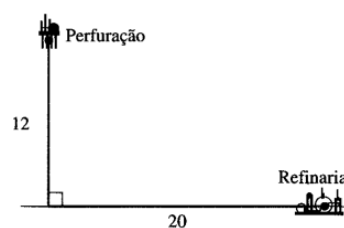


Fonte: Wikipedia Commons (2016).

Figura 12 – Vitral na Igreja Sainte-Mère-Église, Normandia
Se o perímetro da janela for de 9 metros, encontre as dimensões da janela que deixam passar a maior quantidade possível de luz.

5. (THOMAS, 2002, p. 229 – adaptada) Uma perfuração a 12 milhas da costa será conectada a uma refinaria costeira, localizada a 20 milhas abaixo da reta imaginária que conecta a perfuração ao continente na menor distância. A figura abaixo mostra a conexão de 12 milhas por dutos subaquáticos e 20 milhas por dutos terrestres.

Figura 13 – A menor quantidade de dutos subaquáticos

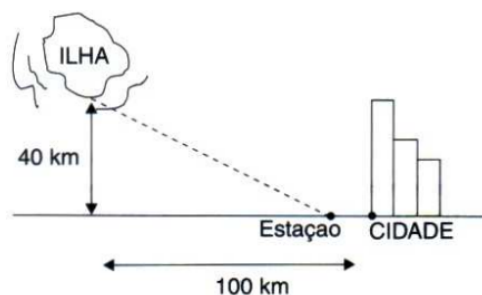


Fonte: THOMAS (2006, p. 229).

Se os dutos subaquáticos custam \$50000 por milha e os terrestres, \$30000 por milha, qual é a combinação dos dois tipos de dutos que vai fornecer a conexão menos dispendiosa?

6. (FLEMMING; GONÇALVES, 2006, p. 224) Um fazendeiro tem 200 bois, cada um pesando 200 kg. Até agora ele gastou R\$380.000,00 para criar os bois e continuará gastando R\$2,00 por dia para manter um boi. Os bois aumentam de peso a uma razão de 1,5 kg por dia. Seu preço de venda, hoje, é de R\$18,00 o quilo, mas o preço cai 5 centavos por dia. Quantos dias deveria o fazendeiro aguardar para maximizar seu lucro?
7. (FLEMMING; GONÇALVES, 2006, p. 225) Uma cerca de 1 m de altura está situada a uma distância de 1 m da parede lateral de um galpão. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apoiam na parede e no chão do lado de fora da cerca?
8. (FLEMMING; GONÇALVES, 2006, p. 225) Uma agência de turismo está organizando um serviço de barcas, de uma ilha situada a 40 km de uma costa quase reta, para uma cidade que dista 100 km, como mostra a figura a seguir. Se a barca tem uma velocidade de 18 km por hora e os carros têm uma velocidade média de 50 km/h, onde deverá estar situada a estação das barcas a fim de tornar a viagem a mais rápida possível?

Figura 14 – Posições da cidade, estação e cidade



Fonte: FLEMMING e GONÇALVES (2006, p. 225).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Novo Ensino Médio (NEM), desde sua concepção, é um divisor ferrenho de opiniões. Se por um lado propõe soluções a problemas antigos e resultados catastróficos do modelo anterior; por outro, por falta de parametrizações gerais, assertividade normativa (e.g. possibilita escolas terem apenas um Itinerário Formativo, ironicamente contribuindo à falta de escolha dos alunos), e políticas efetivas de implementação tem gerado onerações de naturezas econômica, humana e educacional aos sistemas de ensino e aos próprios educandos.

Neste trabalho, tivemos a oportunidade de analisar as principais legislações do Novo Ensino Médio, donde acreditamos que a presença de algumas das diretrizes centrais são de grande valia na formação holística do aluno e na redução das desigualdades entre os sistemas privado e público de ensino. Em primeiro lugar, o currículo tradicionalista anterior contém uma quantidade exuberante de conteúdos que, em geral, só eram “bem trabalhados” nas escolas privadas, o que se refletia (negativamente) tanto nas políticas didático-pegagógicas destas, cujo foco do ensino médio pesava a balança à capacitação do alunado a solucionar questões de vestibulares; quanto na contribuição da disparidade de resultados do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) entre escolas públicas e privadas. Segundo, a possibilidade de diversificar o currículo, se bem orientado e normatizado, traz aos contextos locais e regionais tratamento educacional condizente com suas realidades e necessidades.

Nesse aspecto, construímos e apresentamos a disciplina eletiva Introdução ao Cál-

culo Diferencial, incluindo orientações didáticas, fundamentação teórica e materiais de estudo dos elementos do Cálculo utilizados. Dessa rica experiência observamos que a (re)introdução do Cálculo no ensino médio, devidamente adaptado e orientado, é uma possibilidade concreta, sendo capaz de atrelar interesse e significado às aulas de Matemática, adicionalmente contribuindo para o bom desempenho dos estudantes nos cursos das Ciências Exatas no ensino superior.

Dito isso, concordamos com a abordagem inicial do Governo Lula (2023-) em abrir consulta pública para avaliar e reestruturar o Novo Ensino Médio, e julgamos de grande importância trabalhos nessa temática que envolvam a análise, construção e proposição de modelos nacionais de implementação efetiva da proposta do NEM (por exemplo, alternativas realistas à se permitir que alunos tenham acesso a apenas um itinerário formativo). Deixamos como sugestão para melhor elaborar eletivas a presença de uma sequência didática completa, em que materiais de estudo se entrelaçam com procedimentos metodológicos, divisão por aulas e tempo de aula, e avaliações.

REFERÊNCIAS

95% dos alunos saem do ensino médio sem conhecimento adequado em matemática. Exame, 2021. Disponível em: <<https://tinyurl.com/5fnt9rmj>>. Acesso em: 11 mai. 2023.

AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. **A utilização do Geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 29, n. 52, pp. 637-657, 2015.

ÁVILA, Geraldo. **O ensino de Cálculo no 2º grau.** In: Revista do Professor de Matemática, n° 18. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991.

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, LDB. 9394/1996.

BRASIL. Lei n. 13.415, de 16 de fevereiro de 2017. Altera as Leis n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho - CLT, aprovada pelo Decreto-Lei n. 5.452, de 1 de maio de 1943, e o Decreto-Lei n. 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei n. 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à

Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 17 de Fev. de 2017, seção 1, p. 1.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Estabelece os referenciais para elaboração dos itinerários formativos conforme preveem as Diretrizes Nacionais do Ensino Médio Portaria n. 1.432, de 28 de dezembro de 2018. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 5 Abr. 2019. Disponível em: <<https://tinyurl.com/5n92z6yf>>. Acesso em: 15 dez. 2022.

CONCORDIDO, Cláudia F. R.; BARBOSA, Augusto C. C.; GODINHO, Leandro M. Uma proposta para o ensino de Cálculo Diferencial no ensino médio. *In*: COLÓQUIO INTERNACIONAL EDUCAÇÃO, CIDADANIA E EXCLUSÃO: DIDÁTICA E AVALIAÇÃO. 04., 2015. **Anal eletrônico**. Rio de Janeiro, RJ: Editora Realize, 2015, p. 1-3. Disponível em: <<https://tinyurl.com/mr473nky>>. Acesso em: 25 fev. 2023.

FLEMMING, Diva; GONÇALVES, Mirian. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. Pearson, 6ª ed. Nov. 2006.

GUIDORIZZI, Hamilton. **Um Curso de Cálculo – Volume 1**. LTC, 6ª ed. Mar. 2001.

GEOGEBRA. **GeoGebra Classic**. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/classic>>. Acesso em: 11 mai. 2021.

JUNIOR, Jaime A. O. **Um estudo sobre a implementação do cálculo diferencial e integral no ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e da Computação, ICMC-USP. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real: Funções de uma Variável – Volume 1**. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 8ª ed. 2017. ed. 2017

Mean Value Theorem Review. Khan Academy, 2023. Disponível em:<<https://tinyurl.com/3use5jvz>>. Acesso em: 20 mar. 2023.

MEDEIROS, Tâmara Kadidja Silva de. **A utilização das demonstrações matemáticas no ensino médio.** Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Caicó, 2020.

Novo Ensino Médio - perguntas e respostas. BRASIL, Ministério da Educação. Disponível em:<<https://tinyurl.com/4unyrhzt>>. Acesso em: 15 dez. 2022.

PEREIRA et. al. **Cálculo Diferencial e Integral: Uma Introdução ao Ensino Médio.** In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. 05., 2018. **Anal eletrônico.** Olinda, Pernambuco: Editora Realize, 2018, p. 1-2. Disponível em:<<https://tinyurl.com/524tepe4>>. Acesso em: 25 fev. 2023.

PETRY, Morgana. **Cálculo Diferencial no Ensino Médio: Uma abordagem possível e interdisciplinar com auxílio da tecnologia.** São Leopoldo, 2016. Disponível em:<<https://tinyurl.com/29jzt96j>>. Acesso em: 25 fev. 2023.

PISA 2018 Worldwide Ranking – average score of mathematics, science and reading. FactsMaps, 2019. Disponível em:<<https://tinyurl.com/5zufs5f4>>. Acesso em: 30 out. 2022.

Resultados Ideb. Inep, 2022. Disponível em:<<http://ideb.inep.gov.br/resultado/>>. Acesso em: 15 jun. 2022.

Sainte-Mère-Église Church Stained Glass Window - panoramio.jpg. Wikipedia Commons, 2016. Disponível em:< <https://tinyurl.com/3c662jbb> >. Acesso em: 16 mai. 2023.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO E DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA (SEECT). Conselho Estadual de Educação da Paraíba. **Resolução n° 410/2021, de 15 de dezembro de 2021.** Institui e

orienta a implementação do Referencial Curricular da Paraíba para o ensino médio, como referência para elaboração dos currículos das instituições integrantes do sistema estadual de ensino da paraíba, e estabelece diretrizes complementares conforme dispõe a Resolução CNE/CEB nº 3/2018, e dá outras providências.

Paraíba, 2021. Disponível em:<<https://tinyurl.com/bdz74a7e>>. Acesso em: 25 fev. 2023.

SEECT; UNDIME. **Proposta Curricular do Ensino Médio**. Governo da Paraíba, 2020. Disponível em:<<https://tinyurl.com/bdez985>>. Acesso em: 20 fev. 2023.

SILVA, Jhone C.; JUNIOR, Edson D. M. **Demonstrações matemáticas no Ensino Médio: o que pensam e sentem os estudantes**. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Año XVI - Número 59. Agosto 2020. Páginas 204-226.

SOUZA, Veriano. **A Origem do Cálculo Diferencial e Integral**. Universidade Cândido Mendes. Ago. 2001.

STEWART, James. **Cálculo – Volume 1**. Pioneira Thomson Learning, 5ª ed. 2006.

STYLIANIDES, Gabriel J.; STYLIANIDES Andreas J.; **Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning**. Mathematical Thinking and Learning, 10:2, pp. 103-133, 2008.

VASCONCELOS, Allanny K. B. **Uma proposta de eletiva para um itinerário formativo: a geometria e a cartografia da Terra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2021.

Wolfram Research, Inc., **Wolfram|Alpha** Computational Intelligence, Champaign, IL, 2023. Disponível em:< <https://www.wolframalpha.com>>. Acesso em: 20 mar. 2023.