

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**ATIVIDADES DE GEOMETRIA PLANA COM PAPEL PARA O
ENSINO FUNDAMENTAL**

ELIEL FONSECA DA SILVA

João Pessoa – Paraíba

18 de maio de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ELIEL FONSECA DA SILVA

**ATIVIDADES DE GEOMETRIA PLANA COM PAPEL PARA O
ENSINO FUNDAMENTAL**

Trabalho de Conclusão de Curso a
presentado à Coordenação do curso de
Licenciatura em Matemática da
Universidade Federal da Paraíba como
requisito parcial para obtenção do título
de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª.Dra Rogéria
Gaudencio do Rêgo

João Pessoa – Paraíba

18 de maio de 2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586a Silva, Eliel Fonseca da.

Atividades de geometria plana com papel para o ensino fundamental / Eliel Fonseca da Silva. - João Pessoa, 2023.

58 p. : il.

Orientação: Rogéria Gaudencio do Rêgo.

TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Geometria plana. 2. Modelo Van Hiele. 3. BNCC. 4. Pensamento geométrico. I. Rêgo, Rogéria Gaudencio do. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

ELIEL FONSECA DA SILVA
**ATIVIDADES DE GEOMETRIA PLANA COM PAPEL PARA O
ENSINO FUNDAMENTAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Matemática.

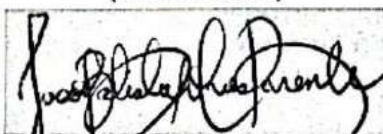
Orientadora: Profa. Dra Rogéria Gaudencio do Rêgo

Aprovado em: 16 / 06 /2023.

BANCA EXAMINADORA

Rogéria Gaudencio do Rêgo

Profa. Dra Rogéria Gaudencio do Rêgo- UFPB
(Orientadora)



Prof.º Me.º João Batista Alves Parente - UFPB
(Avaliador)

Roosevelt Imperiano Da Silva

Prof.º Dr.º Roosevelt Imperiano Da Silva - UFPB
(Avaliador)

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me concedeu força e coragem para enfrentar todos os obstáculos que surgiram durante o curso.

Aos meus pais, por ter me apoiado desde o princípio e ter me educado da maneira correta que foi primordial para conseguir essa realização.

A minha companheira, que sempre me deu forças e apoio sempre mostrando que eu era capaz.

A toda minha família que sempre me deu apoio, compartilho com eles esta realização que é um dos momentos mais importantes da minha vida.

A Prof.^a Dr.^a Rogéria Gaudencio do Rêgo pela orientação.

Aos membros da banca Prof.^o Me.^o João Batista Alves Parente, Prof.^o Dr.^o Roosevelt Imperiano Da Silva pelas orientações.

RESUMO

Nossa investigação teve como tema central o levantamento de atividades para o ensino de Geometria tendo como suporte recursos de baixo custo, com foco principalmente no papel comum. Nosso Objetivo Geral foi, portanto, levantar atividades de ensino de Matemática que possam ser propostas usando papel como recurso básico. Para alcançar esse Objetivo, tivemos como Objetivos Específicos: Identificar propostas de ensino de Matemática baseadas em recursos didáticos de baixo custo para a Educação Básica; e selecionar as propostas baseadas no uso de papel e vincular essas propostas a Objetos de aprendizagem e Habilidades matemáticas apresentadas na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). Nossa reflexão teórica teve como fundamento a Teoria Van Hiele sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico e nosso recorte de atividades se deu para o período de escolaridade compreendido entre o 6º e o 9º Anos do Ensino Fundamental. Nosso levantamento teve como resultado um conjunto de atividades que têm potencial para proporcionar uma maior participação dos estudantes nas aulas e uma melhor compreensão dos conteúdos envolvidos.

Palavras-chaves: Geometria plana, Modelo Van Hiele, BNCC, Pensamento Geométrico.

ABSTRACT

Our investigation had as its central theme the survey of activities for the teaching of Geometry supported by low-cost resources, focusing mainly on common paper. Our General Objective was, therefore, to raise Mathematics teaching activities that can be proposed using paper as a basic resource. To achieve this Objective, we had as Specific Objectives: Identify proposals for teaching Mathematics based on low-cost didactic resources for Basic Education; and select proposals based on the use of paper and link these proposals to Learning Objects and Mathematical Skills presented in the Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). Our theoretical reflection was based on the Van Hiele Theory on the development of geometric thinking and our activities were selected for the period of schooling between the 6th and 9th Years of Elementary School. Our survey resulted in a set of activities that have the potential to provide greater student participation in classes and a better understanding of the contents involved.

Keywords: Plane geometry, Van Hiele Model, BNCC, Geometry Thinking.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO – APRESENTAÇÃO DA TEMÁTICA DE NOSSO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO.....	8
1.1 Uma breve justificativa de nosso tema de investigação.....	8
1.2 Apresentação dos objetivos de nosso trabalho.....	10
1.3 A metodologia que adotamos em nossa investigação.....	11
1.4 A estrutura geral de nosso trabalho de conclusão de curso.....	11
2. O REFERENCIAL TEÓRICO DO PRESENTE TRABALHO.....	13
2.1 Sobre o pensamento geométrico.....	13
2.2 Os níveis de pensamento geométrico no modelo Van Hiele.....	15
2.2.1 Nível 0: visualização.....	16
2.2.2 Nível 1: análise.....	17
2.2.3 Nível 2: dedução informal.....	18
2.2.4 Nível 3: dedução.....	19
2.2.5 Nível 4: rigor.....	20
2.3 O desenvolvimento de atividades geométricas para o ensino fundamental: recursos didáticos e suas potencialidades e limitações.....	21
3. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS.....	25
3.1 O papel como recurso didático-metodológico básico para atividades de geometria.....	25
3.2 Quebra-cabeças de papel: explorando a geometria plana.....	26
3.3 O pentaminós no papel quadriculado.....	29
3.4 O uso do origami no ensino de geometria plana e espacial.....	33
3.5 O estudo de quadriláteros com tiras de papel.....	37
3.6 Considerações gerais sobre as propostas de atividades.....	41
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	43
REFERÊNCIAS.....	45
ANEXOS.....	46
ANEXO 1.....	46
ANEXO 2.....	50
ANEXO 3.....	53

1. INTRODUÇÃO – APRESENTAÇÃO DA TEMÁTICA DE NOSSO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

1.1 UMA BREVE JUSTIFICATIVA DE NOSSO TEMA DE INVESTIGAÇÃO

Durante nossa vida como estudante da Educação Básica ou mesmo do Ensino Superior, predominou nas aulas de Matemática um modelo de ensino baseado principalmente na apresentação dos conteúdos na lousa, com pouca ou quase nenhuma proposta de atividade usando recursos interativos, como materiais manipulativos.

No caso das escolas da rede pública, considerando a carência de recursos de diversas naturezas, não surpreende que os professores organizem seu planejamento de curso basicamente em torno do uso da lousa e do livro didático. Em geral, até a sequência de trabalho com os conteúdos é semelhante ao longo dos anos, começando-se pela apresentação de definições e exemplos e concluindo com a proposição de exercícios semelhantes aos que foram resolvidos como exemplo.

Para minimizar esse quadro, em especial na Educação Básica, é fundamental que o professor conheça recursos didáticos de fácil acesso e de baixo custo, que ele possa utilizar em sala de aula, de modo a proporcionar experiências de ensino nas quais os estudantes tenham participação mais efetiva.

Essa temática para nosso trabalho foi escolhida em razão de observarmos a necessidade de explorarmos tais tipos de atividades para que professores, em especial das escolas públicas, pudessem realizar aulas utilizando materiais manipulativos acessíveis para todos os alunos. Essa demanda foi sentida durante nossa formação, como destacamos anteriormente, e em nossas experiências junto à escolas públicas nas atividades vivenciadas na Graduação.

De acordo com Van de Walle (2009), a aprendizagem matemática está diretamente ligada às vivências dos alunos, e em sala de aula. Ele argumenta que ensinar não é

[...] uma questão de transferência de informação para os estudantes e que a aprendizagem não é uma questão de absorver informação passivamente de um livro ou de um professor. Os professores eficientes têm de ajudar os

estudantes a construir suas próprias ideias usando as que eles já possuem. (VAN DE WALLE, 2009, p.48)

Nessa direção, é fundamental que o professor proponha atividades que possibilitem ao estudante levantar hipóteses, testar essas hipóteses e fazer generalizações, participando intensamente de seu processo de elaboração de conhecimento. Para isso, qualquer material usado como recurso didático com essa estrutura deve ser acessível ao estudante, para que ele possa manipular de forma livre ou orientada e fazer reflexões sobre suas ações com o material.

Como argumente o mesmo autor, “[O]s modelos sempre devem estar acessíveis aos estudantes para escolha e uso livre. Uma variedade de modelos deve estar disponível para ajudar com uma ideia importante” (VAN DE WALLE, 2009, p.53). Assim, quantos mais modelos de representação forem disponibilizados para o estudante, quando ele estuda um conteúdo matemático, maiores serão as chances desse conteúdo ser compreendido por ele.

Não podemos, portanto, simplesmente substituir o uso da lousa pela apresentação de recursos que serão manipulados apenas pelo professor, o que pode acontecer caso a escola disponha de materiais didáticos em pequena quantidade, como uma única caixa de material dourado para todos os estudantes de uma turma. Não será muito diferente a manipulação do recurso pelo professor, por sua apresentação na lousa.

Nas oportunidades em que vivenciamos experiências de ensino em sala de aula, nos componentes de Estágio Supervisionado, na Graduação, foi possível observar que, ao utilizarmos materiais manipulativos nas aulas de matemática, os alunos conseguiram compreender melhor as ideias apresentadas e havia uma maior participação por parte dos alunos, inclusive aqueles que, segundo o professor efetivo da turma, costumavam dar um pouco de “trabalho em sala de aula”, referindo-se aos que não se concentravam nos momentos de apresentação dos conteúdos.

As questões iniciais referentes à pesquisa que iríamos realizar em nosso Trabalho de conclusão de Curso foram, portanto, na direção de identificar a existência de recursos didáticos acessíveis e de baixo custo que pudessem ser usados em aulas de Matemática da Educação básica, mesmo em escolas com infraestrutura mais precária.

1.2 APRESENTAÇÃO DOS OBJETIVOS DE NOSSO TRABALHO

Com base nos levantamentos iniciais que fizemos, um material se destacou dentre as opções que identificamos: o papel. Esse material é farto e fácil de ser obtido, em especial no caso em que podem ser utilizados papéis já usados ou de revistas, propagandas de supermercado e outros, que em geral são destinados para reciclagem. Nossa questão central de investigação foi, então: que atividades matemáticas podem ser propostas com o uso de papel na Educação Básica?

O Objetivo Geral de nosso trabalho foi considerando nossa questão de investigação: Levantar atividades de ensino de Matemática que podem ser propostas usando papel como recurso básico. Para alcançar esse Objetivo, tivemos como Objetivos Específicos:

- Identificar propostas de ensino de Matemática baseadas em recursos didáticos de baixo custo para a Educação Básica;
- Selecionar as propostas baseadas no uso de papel e vincular essas propostas a Objetos de aprendizagem e Habilidades matemáticas apresentadas na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

Nossa preocupação em estabelecer ligação com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) vem do fato de ser esse um documento relativamente novo, que rege a organização dos currículos da Educação Básica brasileira e que, portanto, deve ser considerado no planejamento de aulas do professor. Assim, todas as propostas de atividade que destacamos são relacionadas a esses elementos da BNCC, exemplificando as possibilidades de ligação com o documento.

Não tivemos a pretensão de esgotar, em nosso trabalho, toda a potencialidade do papel como recurso didático para o ensino de Matemática, porque entendemos que isso não seria possível, mesmo que tivéssemos um prazo maior para elaboração de nosso TCC, mas entendemos que é uma reflexão importante para ser feita por quem ensina a disciplina e precisa que sua tarefa seja eficaz e, portanto, produza conhecimento pelos alunos.

1.3 A METODOLOGIA QUE ADOTAMOS EM NOSSA INVESTIGAÇÃO

Para alcançarmos o Objetivo Geral que elaboramos para nossa investigação, realizamos um trabalho que pode ser definido como sendo de natureza qualitativa. Não há uma preocupação com medidas, quantificações ou técnicas estatísticas de qualquer natureza. Busca-se compreender, com base em dados qualificáveis, a realidade de determinados fenômenos, a partir da percepção dos diversos atores sociais (GIL, 1999; CERVO; BERVIAN, 2002).

Na pesquisa foi considerada a realidade vivenciada nas escolas públicas que não possuem poder aquisitivo para obter materiais manipulativos de custo mais elevado e por esta razão buscamos desenvolver materiais que possibilitassem a realização das atividades indicadas no processo de ensino de Geometria Plana.

Partindo de um estudo bibliográfico, para chegarmos ao nosso objetivo geral foi realizado um estudo através de material já elaborado, realizando todo o embasamento teórico até conseguirmos elaborar esse material que pode ser utilizado como um manual para professores do ensino básico de como trabalhar com material manipulativo, em especial, aquele produzido com papel.

1.4 A ESTRUTURA GERAL DE NOSSO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

O texto de nosso Trabalho de Conclusão de Curso está organizado em três Capítulos.

No primeiro Capítulo introduzimos de modo geral como está organizado o trabalho, apresentando: a escolha do tema e a justificativa dessa escolha; o objetivo geral e os objetivos específicos; a metodologia utilizada na elaboração da pesquisa, portanto, no primeiro capítulo fazemos uma apresentação geral do nosso trabalho.

No Capítulo 2, trazemos o referencial teórico, destacando a importância do pensamento geométrico de acordo com a teoria de Van Hiele, abordando cada nível de pensamento geométrico do modelo e pontuando suas potencialidades baseado na BNCC (BRASIL, 2018), portanto, no segundo

capítulo trazemos a abordagem dos níveis do pensamento geométrico de acordo com Van Hiele e discutimos a Geometria na BNCC (BRASIL, 2018).

No terceiro e último Capítulo, abordamos as atividades que foram elaboradas para ser feitas em sala utilizando o papel como material principal. O planejamento das atividades foi pensado para o período compreendido entre o 6º Ano e o 9º Ano do Ensino Fundamental e a cada atividade associamos o Objeto de conhecimento e as Habilidades correspondentes, considerando a BNCC (BRASIL, 2018) como referência. Encerramos o texto com nossas Considerações finais.

2. O REFERENCIAL TEÓRICO DO PRESENTE TRABALHO

2.1 SOBRE O PENSAMENTO GEOMÉTRICO

O pensamento geométrico é um tipo particular de pensamento vinculado à Matemática, muito importante para o desenvolvimento do estudante, desde os anos iniciais da Educação Básica. Ele precisa ser explorado de maneira gradativa, iniciando de maneira mais básica possível, pois os primeiros contatos que temos com o mundo envolvem essa relação com o espaço à nossa volta.

Em sala de aula, a partir dos anos iniciais podemos analisar as ideias elementares dos alunos sobre as primeiras ideias geométricas mais formais que serão exploradas, pois muitas vezes os objetos geométricos a serem estudados podem ser associados às suas experiências do dia a dia.

Formas na natureza, produtos feitos por ações humanas, construções, desenhos, obras de arte e muitas outras ideias e objetos presentes no cotidiano poderão servir de referência, o que dependerá da realidade na qual a criança está inserida.

O conhecimento geométrico é sustentado, de acordo com Pais (1996, apud WAN DE WALLE, 2009), em três princípios básicos: o intuitivo, o experimental e o teórico, que são fundamentais para a construção do conhecimento geométrico, devendo ser consideradas tanto as questões intuitivas quanto as elaborações formais e as atividades experimentais utilizando de objetos, desenhos e outras estratégias didático-metodológicas para complementar o conhecimento geométrico de maneira consistente.

A importância da Geometria já era destacada como essencial para a construção de um saber lógico, intuitivo e sistematizado e importante para a preparação pessoal e profissional do aluno e para o desenvolvimento de habilidades específicas, nos documentos oficiais do final da década de 1990.

Na Educação Básica enfatizava-se a importância do pensamento geométrico, por se tratar de um conhecimento fundamental para o desenvolvimento dos alunos, e os Parâmetros Curriculares Nacionais destacavam esses conhecimentos na formação dos alunos:

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. (BRASIL, 1997, p.56)

Os conteúdos de Geometria estavam presentes nas orientações dos PCN do Ensino Fundamental do 1º ao 9º Anos e organizados na Unidade denominada de “Espaço e forma”. Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) a Unidade temática é denominada de “Geometria” e está presente em todos os anos do mesmo nível de escolaridade citado.

A Matriz de conteúdos de Matemática para o Ensino Fundamental está organizada em cinco Unidades temáticas (Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística) por ano de escolaridade (1º ao 9º anos), às quais são associados Objetos de conhecimento e, a estes, Habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes.

Na apresentação da área de Matemática para o Ensino Fundamental, o documento destaca, ao tratar da Geometria, que seu estudo envolve “um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (BRASIL, 2018, p.271).

O documento traz recomendações específicas para os anos iniciais e para os anos finais do Ensino Fundamental, indicando o que se espera, com o ensino da Unidade temática de Geometria, para esse nível de escolaridade. Nos anos iniciais o trabalho com Geometria tem como objetivos a identificação e o reconhecimento de pontos de referência, compreendendo a ideia de deslocamento, orientando-se o estudante para que ele consiga realizar as construções de suas representações.

Já em relação às formas geométricas, seu ensino tem como objetivo a compreensão sobre elementos como lados, vértices e ângulos das figuras, saber comparar os polígonos através das suas formas e identificar as características gerais de figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais, reconhecendo-as em objetos do cotidiano.

Nos anos finais do Ensino Fundamental o principal objetivo do ensino de Geometria, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018) é a consolidação e ampliação do que foi estudado nos anos anteriores e, de maneira gradativa, fazer os devidos aprofundamentos, para que os alunos sejam capazes de elevar seu nível de pensamento geométrico e de resolver problemas relacionados a conteúdos dessa Unidade temática.

Neste item de nosso texto não iremos destacar Objetos de conhecimento ou Habilidades específicas da Unidade temática de Geometria, recorrendo a esses elementos quando apresentamos a parte prática de nossa pesquisa, referente à proposição de atividades relacionadas ao pensamento geométrico usando como principal suporte o papel. Ao tratarmos das atividades indicamos a possibilidade de exploração em vinculação com Objetos de conhecimento e Habilidades específicos em algum ano particular de escolaridade ou ao longo do Ensino Fundamental, quando isso for indicado.

No documento é destacada a importância da visualização e da representação como aspectos importantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico, uma vez que “[...] estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes.” (BRASIL, 2018, p.271).

A BNCC não faz referências teóricas explícitas vinculadas à Geometria, mas destacaremos em nosso texto uma teoria desenvolvida por um casal holandês, no final da década de 1950, e que é adotada na atualidade, em razão de ser um modelo teórico que tanto se aplica à análise do nível de desenvolvimento do pensamento geométrico do estudante, quanto para o planejamento das atividades a serem desenvolvidas em sala de aula.

2.2 OS NÍVEIS DE PENSAMENTO GEOMÉTRICO NO MODELO VAN HIELE

A apresentação dos níveis de pensamento geométrico no modelo que destacamos foi baseado em especial no texto de Van de Walle (2009, p.440-443), no Capítulo dedicado à Geometria. O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico denominado de Modelo Van Hiele pode ser utilizado

como guia para diagnosticar o nível de compreensão geométrica dos alunos no processo de aprendizagem, no planejamento de aulas e nas avaliações das habilidades dos alunos em Geometria. O modelo Van Hiele é constituído por cinco níveis de compreensão que são: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. Esses níveis são numerados, respectivamente como, Nível 0; Nível 1; Nível 2; Nível 3 e Nível 4. Em algumas traduções para língua portuguesa a numeração dos níveis do modelo é feita do 1 ao 5, mas aqui adotamos a mesma numeração de nossa referência principal sobre o tema.

De acordo com Van de Walle (2009, p.444), os níveis do Modelo Van Hiele são: (i) sequenciais, ou seja, “[P]ara chegar a qualquer nível acima do Nível 0, o aluno deve percorrer todos os níveis anteriores”; (ii) independem da idade do estudante – “Um estudante na 3ª série do EF ou no EM pode estar no mesmo Nível. Além disso, alguns estudantes e adultos permanecem no Nível 0 e um número significativo de adultos nunca alcança o Nível 2”; (iii) têm como fator de mais impacto sobre os avanços do pensamento geométrico o conjunto de experiências geométricas vivenciadas pelos estudantes; e (iv) são fundamentados no cuidado com o nível do *ensino e da linguagem, os quais devem ser adequados aos estudantes*.

Os estudantes obrigados a lidar com objetos de pensamento que não foram ainda construídos no nível anterior podem ser forçados a uma aprendizagem mecânica [marcada pela repetição e memorização sem compreensão] e alcançar apenas um êxito temporário e superficial (VAN DE WALLE, 2009, p.444).

A evolução para o nível posterior é, portanto, construído através do processo de pensamento dos contextos geométricos e das experiências vivenciadas ao longo do processo de ensino de Geometria, possibilitando que o estudante seja capaz de aplicar seu conhecimento para resolver problemas geométricos.

2.2.1 NÍVEL 0: VISUALIZAÇÃO

Os objetos de pensamento no nível 0 são as formas e “o que elas parecem”(VAN DE WALLE, 2009, p.440), ou seja, os conhecimentos geométricos situados nesse nível são caracterizados pelo reconhecimento de

figuras geométricas por sua forma geral, associando-as a objetos do cotidiano. Nesse nível não são observadas as propriedades que definem uma figura geométrica, privilegiando-se apenas sua aparência, o que pode levar a inconsistências, como não reconhecer uma figura como o quadrado se ele estiver representado sobre um de seus vértices.

De acordo com Van de Walle (2009, p.440), “os produtos de pensamento no nível 0 são classes ou agrupamentos de formas que são “parecidas””, ou seja, na passagem do nível 0 para o próximo nível, espera-se que o estudante seja capaz de fazer agrupamentos de figuras de um conjunto considerando características que lhe permitem organizá-las em um subgrupo que atende determinadas características.

Por exemplo, ser capaz de reconhecer as características básicas que tornam um retângulo um retângulo (quatro lados: lados opostos paralelos: lados opostos de mesmo comprimento: quatro ângulos retos: diagonais congruentes:dentre outras).

É importante observar que as atividades propostas para estudantes que precisam estruturar o nível 0 de pensamento no Modelo Van Hiele deve ter ênfase nas formas que os alunos podem observar, classificar, separar, decompor, compor, dentre outras ações que realizam com figuras geométricas planas ou espaciais. O objetivo central das atividades deve ser explorar em que as formas são parecidas e/ou diferentes e envolver muitos agrupamentos e classificações.

2.2.2 NÍVEL 1: ANÁLISE

“Os objetos de pensamento no nível 1 são as classes de formas, mais do que as formas individuais” (VAN DE WALLE, 2009, p.441). Nesse nível os alunos devem ter desenvolvido a capacidade de identificar e expor mais de uma ou todas as formas dentro de uma classe e não apenas ser capaz de analisar uma única forma geométrica isolada.

Assim, os alunos nesse nível compreendem que uma coleção de formas é definida por suas propriedades, sendo assim, as características individuais observadas através da visualização no nível 0 podem ser generalizadas a todas as formas, para encaixar na classe desejada. Por exemplo, todos os

cubos possuem seis faces congruentes e cada uma dessas faces é um quadrado, os vértices possuem três arestas cada um, apresentam ângulos congruentes, isto é, com a mesma medida, etc.).

“Os produtos de pensamento no nível 1 são as propriedades das formas” (VAN DE WALLE, 2009, p.441), ou seja, uma vez desenvolvido esse nível, o estudante deve ser capaz de identificar as propriedades que caracterizam os objetos geométricos.

As atividades propostas para estudantes do nível 1 de pensamento no Modelo Van Hiele devem enfatizar ideias como simetria, classificação quanto ao ângulo reto (reto, obtuso, agudo), linhas paralelas e perpendiculares e o conceito de segmentos de reta e ângulos congruente (VAN DE WALLE, 2009). O objetivo central das atividades deve ser explorar propriedades geométricas tradicionais e aplicações de propriedades que sejam comuns aos objetos que se situam naquela categoria.

2.2.3 NÍVEL 2: DEDUÇÃO INFORMAL

De acordo com Van de Walle (2009, p.442) “Os objetos de pensamento no nível 2 são as propriedades das formas”. Os alunos do nível 2 possuem pensamentos geométricos sem a restrição a um objeto particular, desenvolvendo relações entre as propriedades de diferentes objetos. Por exemplo, “Se todos os quatro ângulos são retos, a forma deve ser um retângulo”; “Se isso é um quadrado, todos os ângulos são ângulos retos”; “Se isso é um quadrado, ele tem de ser um retângulo”.

Com o avanço no desenvolvimento do pensamento geométrico o estudante deve ser capaz de conseguir introduzir o raciocínio lógico para classificar as formas usando a quantidade mínima de características e de relacioná-las para diferentes conjuntos de figuras, fazendo generalizações do tipo: todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado”.

No nível 2 os alunos possuem a capacidade de compreender os argumentos dedutivos informais, relacionados às formas e suas propriedades:

As “provas” podem ser mais intuitivas do que rigorosamente dedutivas. Entretanto, há uma apreciação de que um

argumento lógico é necessário. Entretanto, uma apreciação da estrutura axiomática de um sistema dedutivo formal permanece sob a superfície. *Os produtos de pensamento no Nível 2 são relações entre as propriedades de objetos geométricos.* (VAN DE WALLE, 2009, p.442 – destaques do autor).

Realizando atividades que explorem o raciocínio lógico informal, os alunos compreendem várias propriedades das formas e as relações entre diferentes conjuntos de formas.

2.2.4 NÍVEL 3: DEDUÇÃO

“Os objetos de pensamento no nível 3 são relações entre as propriedades dos objetos geométricos” (VAN DE WALLE, 2009, p.443). No nível 3 os alunos analisam os argumentos informais construindo um sistema completo através de axiomas, teoremas, corolários e postulados que buscam estabelecer verdades geométricas, no sentido formal.

No nível 3, os alunos começam a ter os primeiros contatos com um sistema lógico fundamentado, desenvolvem a capacidade de trabalhar com sentenças abstratas sobre as propriedades geométricas, obtendo conclusões baseadas na lógica matemática. Sendo assim, nesse nível os estudantes reconhecem a necessidade de analisar as provas através de uma série de argumentos lógicos formais.

Na BNCC (BRASIL, 2018, p.272), o trabalho com demonstrações e provas informais e formais é indicado ainda no Ensino Fundamental – anos finais, quando os estudantes devem realizar “demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo”.

“Os produtos de pensamento do Nível 3 são sistemas axiomáticos dedutivos para a geometria [...] onde os alunos constroem uma lista de axiomas e definições para criar teoremas” e “também provam teoremas usando raciocínio lógico claramente articulado” (VAN DE WALLE, 2009, p.443).

Vale destacar que mesmo que o trabalho com a Unidade temática de Geometria ao longo do Ensino Fundamental, tenha a qualidade devida, ao concluir o Ensino Médio espera-se que seu pensamento geométrico do esteja

consolidado pelo menos no nível 2 do Modelo Van Hiele, uma vez que o trabalho com demonstrações e provas na Educação Básica é bastante limitado.

Entendemos que o nível 3 desse Modelo só é alcançado em componentes curriculares específicos de alguns cursos superiores que contemplem a Geometria como objeto próprio de estudo, como no caso da Licenciatura e do Bacharelado em Matemática.

Em nosso curso, por exemplo, a disciplina de Matemática para o Ensino Básico II (MEB II), tem como Objetivo Geral: “Apresentar a Geometria Euclidiana como um enfoque axiomático, dando ênfase ao desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo e seus práticos e experimentais” (<http://www.mat.ufpb.br/dmufpb/attachments/article/57/Matem%C3%A1tica%20para%20o%20Ensino%20B%C3%A1sico%20II%20-%201103206.pdf>). Como podemos observar, pelo Objetivo geral destacado, a ênfase no componente curricular é na geometria euclidiana, sendo ela a única disciplina obrigatória do Curso que tem como foco a Geometria.

2.2.5 NÍVEL 4: RIGOR

“Os objetos de pensamento no nível 4 são sistemas dedutivos axiomáticos para a geometria” (VAN DE WALLE, 2009, p.443). Esse nível requer um domínio sobre diferentes sistemas axiomáticos e não apenas a dedução de um teorema em um sistema. Por se tratar do nível mais elevado da teoria Van Hiele, esse nível em geral só é elaborado por estudantes do ensino superior que estuda Geometria como um ramo da Matemática.

Assim, um estudante que alcança o nível 4 de desenvolvimento do pensamento geométrico do Modelo Van Hiele, é capaz, por exemplo, de relacionar as diferenças e semelhanças entre teoremas da geometria euclidiana e das geometrias não-euclidianas, identificando o que vale em uma teoria que não vale em outra.

“Os produtos de pensamento no nível 4 são comparações e confrontos entre os diferentes sistemas axiomáticos da geometria” (VAN DE WALLE, 2009, p.443), que apenas estudantes de alguns cursos do ensino superior conseguem realizar.

De modo resumido, podemos concluir que na Educação Básica os estudantes devem realizar atividades que potencializem seu desenvolvimento ao longo dos diferentes níveis do pensamento geométrico, tendo-se como expectativa geral, que ele alcance o nível 2 do Modelo Van Hiele, ao concluir o Ensino Médio.

No Capítulo seguinte apresentamos atividades de Geometria que usam como principal suporte o papel, relacionado-os a Objetos de Conhecimento e Habilidades da BNCC (BRASIL, 2018), entendendo que, por nos atermos aos anos finais do Ensino Fundamental, os estudantes que ingressarem nesse nível de escolaridade já consolidaram pelo menos o nível 0 do Modelo Van Hiele, sendo desejável que tenham alcançado o nível 1, ainda que não o tenham consolidado e que alcancem o nível 2 ao final do 9º Ano, ainda que de modo não consolidado.

2.3 O DESENVOLVIMENTO DE ATIVIDADES GEOMÉTRICAS PARA O ENSINO FUNDAMENTAL: RECURSOS DIDÁTICOS E SUAS POTENCIALIDADES E LIMITAÇÕES

Van de Walle (2009) sugere diversas estratégias a serem adotadas no Ensino de Geometria na Educação Básica, considerando os diferentes níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, no Modelo Van Hiele. Para o desenvolvimento do nível 0, por exemplo, o autor sugere que sejam propostas aos estudantes muitas atividades de agrupamentos e classificações, assim como atividades que envolvam a exploração de muitos exemplos, que possibilitem o estudante a fazer deduções sobre as características mínimas que definem um objeto geométrico.

Para auxiliar os alunos a irem do Nível 0 ao Nível 1, eles devem ser desafiados a testar ideias sobre formas para uma variedade de exemplos de uma categoria particular. Diga-lhes, “Vejam se isso é verdade para outros retângulos”, ou “Você consegue desenhar um triângulo que não possua um ângulo reto?”. Em geral, os alunos devem ser desafiados a verificar se as observações feitas sobre uma forma particular se aplicam a outras formas de um tipo semelhante (VAN DE WALLE, 2009, p. 444).

Os exemplos de questões propostas pelo autor podem ser aplicados em atividades envolvendo o uso de quebra-cabeças ou modelos geométricos diversos de figuras geométricas, de modo que o estudante entenda, por exemplo, que a cor, o tamanho ou o material de que é feita a figura, não são propriedades que a definem, fazendo com que foquem naquilo que é essencial para isso.

O mesmo pode ser observado em relação às atividades propostas para os estudantes, tendo-se como objetivo fazê-los progredirem do nível 0 para o nível 1 e do nível 1 para o nível 2. Para o nível 1 o autor sugere “Enfocar mais as propriedades das figuras do que a simples identificação das mesmas” e “Aplicar ideias a uma classe inteira de figuras (por exemplo, todos os retângulos..., todos os prismas...) em vez de aos modelos individuais” (VAN DE WALLE, 2019, p.444).

Van de Walle (2009) destaca grupos de atividades que devem ser propostas aos estudantes, ao longo da Educação Básica, dentre as quais ressaltamos as que envolvem construção e dissecação de formas, as quais estão presentes em algumas das atividades que trazemos no próximo Capítulo de nosso trabalho. Como defende o autor,

As crianças precisam explorar livremente como as formas se encaixam criando formas maiores (composição) e como as formas maiores podem ser criadas a partir de formas menores (decomposição). Entre as formas bidimensionais para essas atividades, os blocos geométricos e os vários quebra-cabeças inspirados no Tangram são os mais conhecidos.

Como veremos adiante, além do Tangram podem ser exploradas em sala de aula variantes mais simples desse quebra-cabeça, usando materiais de baixo custo, o que potencializa sua realização em sala de aula, uma vez que não haverá restrições de desenvolvimento pelo fator de custo.

Como ferramenta de produção de formas geométricas planas o autor indica o uso do geoplano (base quadrada, retangular ou circular com pinos distribuídos em intervalos iguais, na qual se utiliza ligas elásticas para a elaboração de formas geométricas), orientando que as formas produzidas no geoplano sejam registradas em papel pelo estudante.

Entendemos que o acesso a geoplanos é limitado em nossas escolas, em especial da rede pública, e que as atividades propostas com base nesse recurso podem ser parcialmente substituídas por atividades baseadas no uso de papel quadriculado ou pontilhado, como sugere o próprio autor citado, ainda que se perca, nesse caso, o fator atrativo do material manipulativo citado.

Como alternativa para a construção de estruturas geométricas tridimensionais, uma vez que os modelos disponíveis no mercado podem ter um preço alto, Van de Walle (2009) sugere o uso de canudos de refrigerante, limpadores de cachimbo ou “*Barras de jornal enrolado*. Fantásticos esqueletos de poliedros de grande tamanho podem ser construídos usando papel de jornal e fita adesiva”.

Em atividades de construção ou de representação de formas geométricas, que deve continuar ao longo do trabalho com estudantes no nível 1 do Modelo Van Hiele, Van de Walle (2019) destaca o uso de *Softwares* de geometria dinâmica, como o *Cabri-geometre* e o *Régua e compasso que* “realçam muito a exploração de formas nesse nível”.

Embora seja importante destacar as potencialidades dos recursos tecnológicos, como aplicativos e softwares, em termos de motivação e facilidade de produção de formas, temos como fator limitador de seu uso a ausência de estrutura física e equipamentos em nossas escolas, em especial aquelas da rede pública.

Entendemos, com afirmam Rêgo e Rêgo (2010), que o uso de recursos no ensino de Matemática e, mais especificamente, no ensino de Geometria, não podem ter a questão de custo como um fator de impedimento ou de dificuldade de sua exploração em sala de aula. Por esta razão, ressaltamos as vantagens que o professor tem, do ponto de vista didático-metodológico, quando sabe adaptar ou produzir atividades que possam ser realizadas com materiais de baixo custo.

Como lembram esses autores, não adianta o professor ter um material manipulativo que será exibido aos estudantes, sem que eles tenham a oportunidade de explorá-lo e fazer, a partir de suas observações e levantamentos de hipóteses, abstrações e generalizações. Essa postura não será muito diferente da aula baseada apenas na exposição do conteúdo pelo

professor e a observação das imagens presentes no livro didático, pelo estudante.

3. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS

3.1 O PAPEL COMO RECURSO DIDÁTICO-METODOLÓGICO BÁSICO PARA ATIVIDADES DE GEOMETRIA

É natural pensarmos, quando nos referimos a recursos para o ensino de Geometria, no uso de modelos de figuras planas e espaciais em madeira ou plástico; de aplicativos como o Geogebra ou outros de mesma natureza; em geoplanos e outros recursos estruturados que são comercializados no Brasil.

O uso desses recursos em sala de aula, pressupõe que todos os estudantes de uma turma terão acesso a eles, de modo a poderem realizar as atividades propostas de modo adequado. Se os recursos forem em quantidade limitada, dificilmente o ensino se dará da melhor maneira e a aprendizagem pode ser comprometida.

De acordo com a discussão realizada no último item do Capítulo anterior, iremos, no presente Capítulo, evidenciar as potencialidades das atividades de Geometria que podem ser propostas a estudantes da Educação Básica tendo o papel como principal base. Esse recurso, além de ser de fácil acesso, é de baixo custo, uma vez que na maioria das atividades propostas é possível optar pela reutilização de folhas de papel (de revistas; folhetos de propaganda; ou outros).

As atividades propostas envolvem diferentes campos da Geometria, como a Geometria plana e a Geometria espacial que, em alguns casos, são exploradas dentro de um contexto próprio, mas têm estreita ligação e foram organizadas didaticamente de acordo com a natureza da proposta: quebra-cabeça; atividade investigativa; dentre outras, podendo ser adaptadas ou ampliadas, de acordo com o nível de escolaridade da turma.

Como em qualquer situação de uso de recursos com fins didáticos, é fundamental que estejam claros para o professor quais são os objetivos que se quer alcançar com os estudantes. Portanto, o planejamento precisa ser cuidadosamente considerado, para que os resultados tenham qualidade. Faz parte do planejamento do ensino elencar as possibilidades de exploração do recurso a ser usado, pensando-se nas questões que podem ser propostas e nas formas de registro das ações que forem realizadas pelos estudantes: fazer

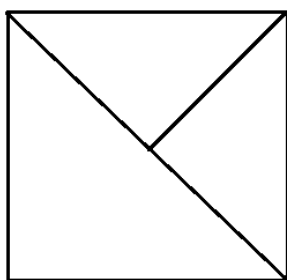
desenhos dos resultados; fotografar os objetos construídos e escrever um relatório com as descobertas; produzir materiais para mostras a serem apresentadas para a comunidade, com roteiros auto-explicativos, dentre outras possibilidades.

São várias as opções de enriquecimento das atividades propostas, tendo-se em mente que mesmo que o planejamento tenha sido bem feito, há sempre espaço para novas formas de reflexão. Portanto, mesmo com uma lista de questões interessantes a serem feitas aos estudantes, ela pode ser ampliada a cada nova aplicação da atividade.

3.2 QUEBRA-CABEÇAS DE PAPEL: EXPLORANDO A GEOMETRIA PLANA

Vamos iniciar a apresentação de propostas tratando das potencialidades dos quebra-cabeças de papel para a exploração de Objetos de conhecimento e Habilidades da BNCC (BRASIL, 2018), com um quebra-cabeça muito simples, cuja base é um quadrado de papel, cortado ao longo de uma das diagonais. Em seguida dividimos um dos triângulos retângulos em dois triângulos retângulos congruentes (Figura 1), formando as três peças do quebra-cabeça.

Figura 1. Quebra-cabeças de três peças



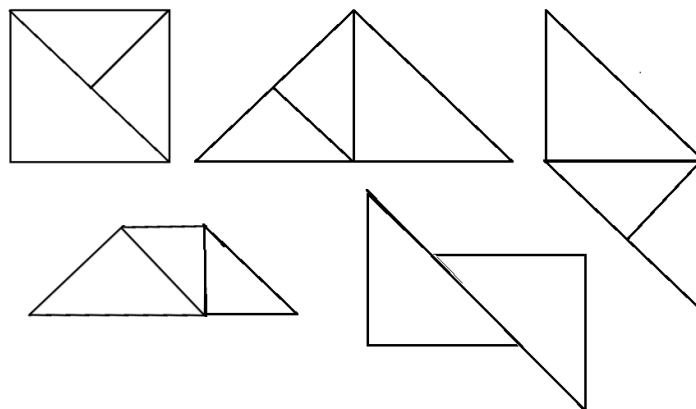
Fonte: produção do autor

Embora seja um conjunto de peças simples (apenas três triângulos retângulos isósceles) podemos propor com elas muitos desafios aos estudantes, com complexidade que varia de acordo com o nível de escolaridade e os objetivos de ensino com o recurso.

Para estudantes dos anos iniciais podemos sugerir que explorem livremente as peças, formando com elas as figuras que desejarem, indicando

as que eles conhecem pelo nome. Como podemos ver na Figura 2, há várias possibilidades de composição das peças, sem sobreposição.

Figura 2. Figuras formadas com as três peças

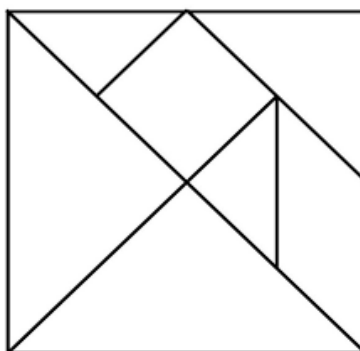


Fonte: produção do autor

Além das figuras de formato livre os estudantes podem criar várias figuras geométricas planas como os presentes na Figura 2: o quadrado; o triângulo; o paralelogramo; o trapézio; e um hexágono côncavo, por exemplo.

Podemos explorar outros quebra-cabeças planos, a exemplo de variantes do quebra-cabeça de três peças, simplesmente recortando o quadrado de modo diferente, o que pode ser, inclusive, fruto da criatividade dos estudantes. Outra sugestão é explorar as sete peças do Tangram (Figura 3), quebra-cabeça bastante popular e que possibilita a produção de uma enorme quantidade de figuras geométricas, com todas as peças ou parte delas.

Figura 3. Sete peças do Tangram



Fonte: produção do autor

Diversas atividades podem ser propostas a partir do processo inicial de geração de figuras com as peças de cada quebra-cabeça (independentemente do número de peças de cada um), envolvendo Objetos de conhecimento e Habilidades da BNCC (BRASIL, 2018), como destacado no Quadro 1, para o 6º, 7º, 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental.

Quadro 1. Objetos de conhecimento e Habilidades envolvidas no uso de quebra-cabeças planos.

6º Ano do EF (Geometria)		
OBJETO DE CONHECIMENTO	HABILIDADE	ATIVIDADES SUGERIDAS
Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados.	(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.	Registrar as figuras obtidas com as peças do quebra-cabeça utilizado, no 1º quadrante de um plano cartesiano, indicando as coordenadas dos vértices de cada figura.
Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados.	(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.	Classificar as figuras obtidas com as peças do quebra-cabeça utilizado (em especial triângulos e quadriláteros), considerando os elementos indicados nas Habilidades destacadas
Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas	(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.	Selecionar uma ou mais figuras dentre as obtidas com as peças do quebra-cabeça utilizado e ampliá-las ou reduzi-las, com o auxílio da malha quadriculada, considerando a constante de proporcionalidade indicada, analisando que elementos da figura sofrem transformação quando ampliadas ou reduzidas (medidas dos lados; perímetro e área) e quais são mantidos (medidas dos ângulos internos).
7º Ano do EF (Geometria)		
Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por	(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro. (EF07MA20) Reconhecer e representar,	Selecionar uma ou mais figuras dentre as obtidas com as peças do quebra-cabeça e explorar as Habilidades destacadas, com o auxílio da malha quadriculada.

um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem.	no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.	
8º Ano do EF (Geometria)		
Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros.	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.	Analisar as peças do tangram e verificar se possuem triângulos congruentes.
Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação.	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.	Observar através dos movimentos de translação, reflexão e rotação as mudanças que ocorre com as peças do tangram.
9º Ano do EF (Geometria)		
Semelhança de triângulos.	(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.	Aplicar os conceitos de semelhança de triângulos e verificar se existe triângulos semelhantes e qual a razão de semelhança.
Polígonos regulares.	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.	Observar se é possível e quais os polígonos regulares podem ser feitos com as peças do tangram.

Ao trabalharmos com quebra-cabeças ou outro material manipulativo, no ensino de Matemática, é importante termos objetivos de aprendizagem claros, que podem ser organizados em um roteiro de exploração do recurso e que poderá ser seguido pelos estudantes, de modo individual ou em pequenos grupos. No Anexo 1, apresentamos, como exemplo, propostas de atividades e questões que utilizam as peças do Tangram como base.

3.3 O PENTAMINÓS NO PAPEL QUADRICULADO

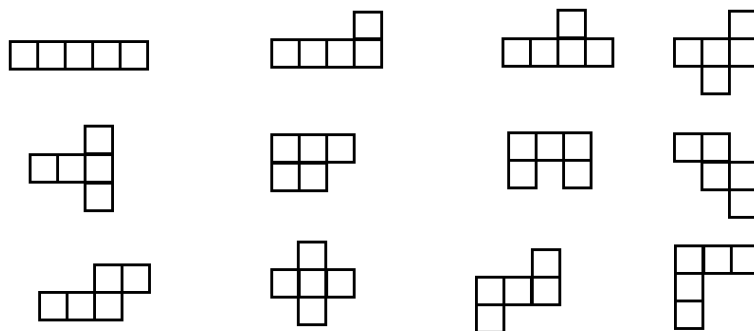
Vamos exemplificar as potencialidades do Pentaminós para a exploração de Objetos de conhecimento e Habilidades da BNCC (BRASIL, 2018), usando papel quadriculado. O pentaminó é um poliminó, ou seja, uma peça com estrutura semelhante a um dominó, composto de cinco quadrados congruentes,

conectados ortogonalmente, ou seja, dois quadrados vizinhos têm um lado comum.

Embora sejam figuras simples (apenas cinco quadrados congruentes conectados entre si) podemos propor atividades de diversas maneiras do nível básico ao avançado, de acordo com o nível de escolaridade e os objetivos de ensino. Para estudantes dos anos iniciais podemos apresentar as peças prontas, recortadas em papel ou cartolina e propor que as explorem livremente, formando com elas figuras de maneira aleatória e intuitiva.

Em etapas posteriores de escolaridade, podemos trabalhar com desafios para que os alunos consigam pensar geometricamente na resolução a atividade através no material proposto. Nesse caso, os próprios estudantes seriam instigados a descobrir quantos pentaminós podem ser criados, registrando-os em papel quadriculado. Como podemos ver na Figura 3, há apenas doze possibilidades de composição dos quadrados, sem sobreposição, de modo que dois quadrados vizinhos tenham um lado comum.

Figura 3. Figuras formadas pelos 12 pentaminós



Fonte: produção do autor

Diversas atividades podem ser propostas a partir do processo inicial de geração de figuras com o pentaminós, envolvendo Objetos de conhecimento e Habilidades da BNCC (BRASIL, 2018), como destacado no Quadro 2, para o 6º, 7º e 8 Anos do Ensino Fundamental.

Quadro 2. Objetos de conhecimento e Habilidades envolvidas no uso de pentaminós.

6º Ano do EF (Geometria)		
OBJETO DE CONHECIMENTO	HABILIDADE	ATIVIDADES SUGERIDAS
Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados.	(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.	Identificar a posição de cada peça do pentaminó no plano cartesiano através das coordenadas (x,y).
Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas.	(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais	Com o auxílio da malha quadriculada transcrever as peças dos pentaminós de maneira ampliada e reduzidas para trabalhar o conceito de semelhança de figuras geométricas.
7º Ano do EF (Geometria)		
Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem.	(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro. (EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.	Representar graficamente no plano cartesiano a planificação das peças do pentaminós, mostrando cada ponto e mover no plano as planificações do pentaminós de maneira ampliada e reduzida.
Simetrias de translação, rotação e reflexão.	(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.	Construir com as peças do pentaminós objetos geométricos planos, trabalhando simetrias de translação, rotação e reflexão.
Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero.	(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.	Calcular a área total do pentaminós recortado de papel, através da soma de área de cada quadrado.
8º Ano do EF (Geometria)		

Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.	(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.	Realizar a construção das peças do pentaminós e identificar os ângulos dos polígonos regulares.
Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros.	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.	Demonstrar as propriedades dos quadriláteros do pentaminós através da congruência de triângulos.
9º Ano do EF (Geometria)		
Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal.	(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.	Usando as peças do pentaminós para auxiliar na demonstração das relações simples formada pelos ângulos.
Polígonos regulares.	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.	Através da construção do pentaminós mostrar que as peças são polígonos regulares.
Distância entre pontos no plano cartesiano.	(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.	Com o auxílio do plano cartesiano e das peças do pentaminós após mover as peças pelo plano cartesiano saber identificar cada ponto e saber calcular a distância entre os pontos e a área dos quadrados que formam o pentaminós.

Em uma atividade de uso de pentaminós que conecta a Geometria plana à Geometria espacial, os pentaminós podem ser construídos em tamanho grande (cada quadrado com pelo menos cinco centímetros) e os estudantes fazerem uma investigação para descobrir quais deles formam uma caixa cúbica sem tampa.

Inicialmente eles devem usar a intuição e com os pentaminós ainda no papel, antes de serem recortados, devem apontar quais peças eles acreditam que irão atender à condição dada no problema, avaliando se conseguiram visualizar mentalmente as caixas, antes de montá-las espacialmente.

A atividade pode ser complementada perguntando-se as possíveis posições em que poderia ser colocado um sexto quadrado na peça, de modo a formar uma caixa cúbica completa (com tampa). Neste caso, os estudantes

podem registrar suas indicações em papel quadriculado e comparar suas respostas com as dos colegas, avaliando se todas as possibilidades foram contempladas.

3.4 O USO DO ORIGAMI NO ENSINO DE GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

Vamos agora tratar das potencialidades do Origami para a exploração de Objetos de conhecimento e Habilidades da BNCC (BRASIL, 2018). O origami é uma arte oriental, cujo nome advém das junções dos termos japonês “ori”, que significa “dobrar”, e “kami”, que significa “papel”.

No Brasil essa arte é conhecida também como dobradura e apesar de ter nome diferente em vários outros países a linguagem simbólica utilizada para indicar a sequência de passos de cada figura é universal. Assim, mesmo que você não saiba ler ou escrever a língua japonesa, é possível seguir as instruções de um Origami em livros escritos naquele idioma.

O Origami pode ser utilizado como ferramenta de ensino e aprendizagem em diversas áreas do conhecimento, pois temos diversos tipos de técnicas, materiais, recursos que podem ser trabalhados durante a confecção dos origamis.

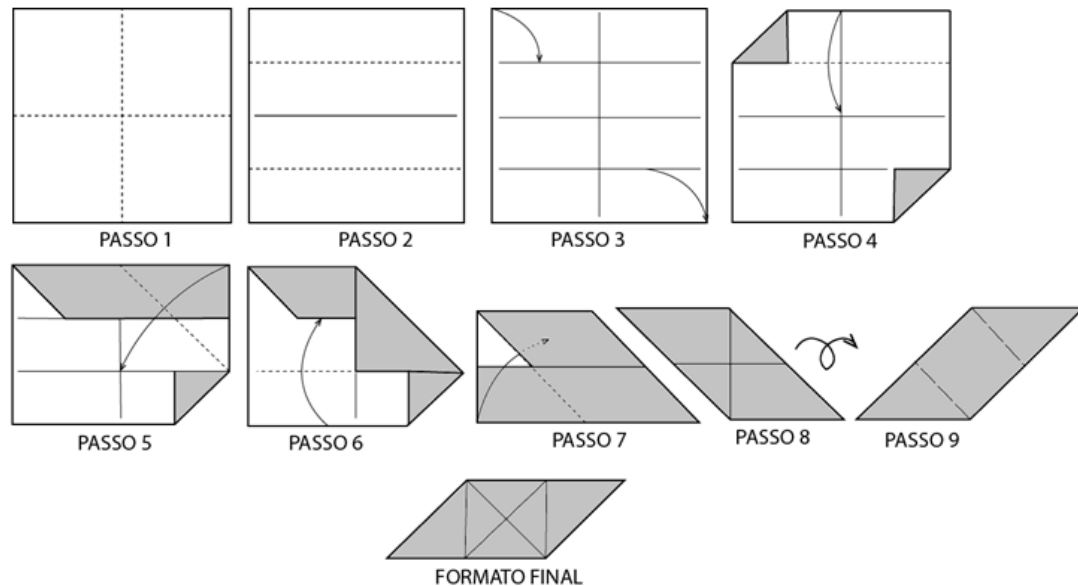
Nesse item vamos explorar os origamis e propor atividades para serem feitas com os alunos em sala de aula. Apesar de parecer ser algo simples, fazer dobraduras é muito importante para trabalhar diversos aspectos cognitivos dos alunos, além da sua função pedagógica, que auxilia no processo de ensino aprendizagem de diversos conteúdos de Matemática.

De acordo com Rêgo, Rêgo e Gaudencio Júnior (2018), o Origami pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades motoras, concentração, persistência e observação. Em relação à Matemática, seu uso pode colaborar na formação de conceitos, na compreensão de definições e no apoio a verificações da validade de propriedades ou teoremas.

Diversas atividades podem ser propostas a partir do uso do Origami, envolvendo Objetos de conhecimento e Habilidades da BNCC (BRASIL, 2018), como destacado no Quadro 3, para o 6º, 7º, 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental. Um exemplo de atividade com Origami é apresentado em seguida, envolvendo a construção de um cubo. Na Figura 4 temos o diagrama

dos módulos que compõem o cubo (RÊGO, RÊGO e GAUDENCIO JUNIOR, 2018).

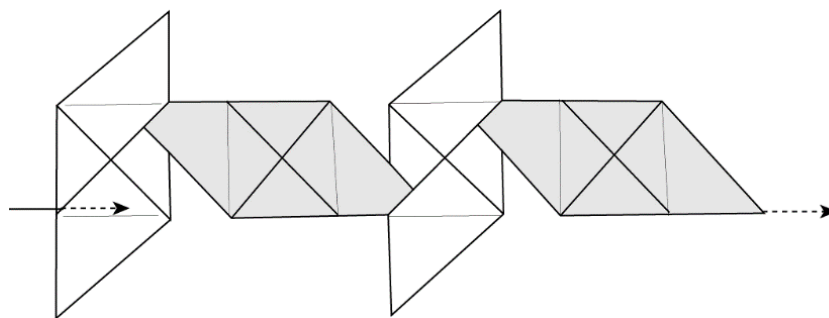
Figura 4. DIAGRAMA DO CUBO



Fonte: RÊGO, RÊGO e GAUDENCIO JUNIOR (2018, p.117)

Para confeccionar o cubo, fazer seis módulos e encaixar quatro deles, como indicado na Figura 5, formando um anel – as pontas triangulares de cada módulo são encaixadas na face quadrada do módulo seguinte. Fechar a base e o topo com os dois outros módulos, sem deixar pontas soltas.

Figura 5. Esquema de encaixe dos quatro primeiros módulos



Fonte: RÊGO, RÊGO e GAUDENCIO JUNIOR (2018, p.118)

Como exemplos de Questões propostas exploratórias, Rêgo, Rêgo e Gaudencio Junior (2018) sugerem:

1. Quantos quadrados podem ser identificados no primeiro passo do diagrama? São todos de mesmo tamanho? Se não, como você relacionaria os tamanhos dos quadrados que você conseguiu visualizar?

2. Quantos retângulos podem ser identificados no segundo passo do diagrama? São todos de mesmo tamanho? Registre todos os retângulos que podem ser visualizados, para ter certeza de que todos foram contados.
3. Quantos retângulos podem ser identificados no terceiro passo do diagrama? São todos de mesmo tamanho? Registre todos os retângulos que podem ser visualizados, para ter certeza de que todos foram contados.
- 4 Observe o polígono representado pelo contorno da figura resultante nos passos 4 a 8, selecione três delas e registre seu nome e todas as características que conseguir identificar, de cada polígono escolhido.

Seguindo a mesma linha da atividade e das questões aqui destacadas, inúmeras atividades semelhantes podem ser propostas para estudantes do Ensino Fundamental, adequando-se as perguntas aos objetivos a serem alcançados e o nível de escolaridade dos estudantes envolvidos (Quadro 3), associando-as ainda aos níveis do Modelo Van Hiele apresentados em nossa fundamentação teórica (VAN DE WALLE, 2009).

Quadro 3. Objetos de conhecimento e Habilidades envolvidas no uso de origami.

6º Ano do EF (Geometria)		
OBJETO DE CONHECIMENTO	HABILIDADE	ATIVIDADES SUGERIDAS
Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas.	(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.	Construção de origami semelhantes, maneira de ampliá-lo ou reduzi-lo mantendo suas propriedades de semelhança.
Ângulos: noção, usos e medida.	(EF06MA25) Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas. (EF06MA26) Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão.	Através das dobraduras do origami reconhecer os ângulos de 90° e 180° graus.
Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado.	(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.	Identificar a mudança ocorrida nas figuras do origami ao utilizar um quadrado ampliado ou reduzido.
7º Ano do EF (Geometria)		

Simetrias de translação, rotação e reflexão.	(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.	Através das dobraduras do origami reconhecer os movimentos de translação, reflexão e rotação.
Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero.	(EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas. (EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.	Utilizando a técnica do origami construir polígonos regulares e observar a rigidez formada pela peça do triângulo.
8º Ano do EF (Geometria)		
Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros.	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.	Construir origami para demonstrar as propriedades dos quadriláteros.
Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação.	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.	Reconhecer que as peças formadas pelo origami são obtidas através de dobraduras e consequentemente construí-los.
9º Ano do EF (Geometria)		
Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração.	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.	Construir diversos triângulos semelhantes com as peças do origami para trabalhar o teorema de Pitágoras.
Polígonos regulares.	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.	Construir o algoritmo de construção dos origamis que formam os polígonos regulares.

No Quadro 3, a última coluna contém sugestões de atividades com dobraduras, que contemplam as Habilidades listadas na coluna anterior, por sua vez, referentes aos Objetos de conhecimentos elencados. As atividades podem ser ampliadas e/ou adaptadas, a depender do nível da turma e as dobraduras podem ser feitas com papel usado (de revistas ou outras fontes), em uma proposta de reutilização de recursos.

Diversos sites da Internet disponibilizam diagramas que podem ser utilizados como fontes das atividades, recomendando-se que antes de propor para os estudantes, o professor faça a dobradura, para garantir que o diagrama é adequado aos objetivos que pretende alcançar. Há diagramas com diferentes níveis de complexidade e como seu uso tem fins orientados para a aprendizagem matemática, devemos evitar usar diagramas muito complexos, que possam dificultar inadequadamente o andamento da atividade.

Os origamis podem ser explorados na construção de figuras geométricas planas ou espaciais e os estudantes devem ser estimulados a indicarem as diferentes figuras observadas após a execução de cada novo passo da dobradura, usando linguagem adequada para se referir aos elementos das figuras (vértices; diagonal; lados opostos; etc), ampliando sua linguagem geométrica formal.

3.5 O ESTUDO DE QUADRILÁTEROS COM TIRAS DE PAPEL

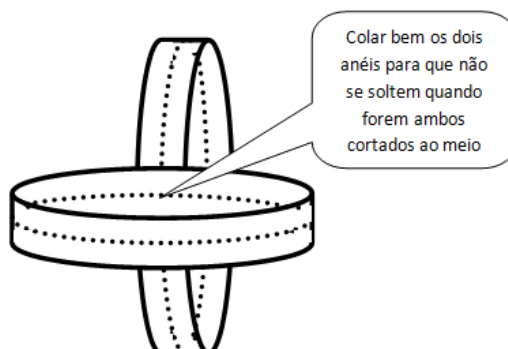
O estudo dos quadriláteros é muito importante, segundo os Objetos de conhecimento e Habilidades da BNCC (BRASIL, 2018). Quadriláteros são polígonos que possuem quatro lados e neste item iremos abordar o estudo dos quadriláteros através de anéis formados por tiras de papel. Para construir os anéis basta cortamos tiras de papel de aproximadamente 30 cm de comprimento e 4 cm de largura e colar as extremidades. Para isso podemos usar folhas de papel A4, usadas, cortando cada folha no sentido da maior medida, em quatro partes. Além do papel são utilizados cola e tesoura.

O estudo de quadrilátero é abordado durante todo o Ensino Fundamental, sendo aprofundado entre o 6º e o 9º anos, partindo de elementos básicos a níveis cada vez mais avançados, de acordo com o desenvolvimento da turma. Esse conteúdo pode ser explorado ao longo dos três primeiros níveis do Modelo Van Hiele (VAN DE WALLE, 2009), guiando-se o estudante desde a identificação de formas gerais dos quadriláteros notáveis (quadrado; retângulo; losango; paralelogramo; trapézio; quadrilátero qualquer), a relações entre subgrupos de quadriláteros.

O roteiro básico de uma atividade interessante (RÊGO; RÊGO; 2010) apresentado em seguida, podendo ser adaptado e/ou ampliado. Inicialmente os

estudantes constroem dois anéis de mesmo tamanho e largura e colam um no outro, como indicado na Figura 6.

Figura 6. Procedimento de colagem dos dois primeiros anéis



Depois da colagem, são propostas as questões elencadas em seguida.

Questão 1) O que acontece quando cortamos o anel ao meio (na linha pontilhada, no desenho acima - o pontilhado não precisa ser feito na tira, na ilustração serve apenas para indicar onde deverá ser realizado o corte com a tesoura). Cortar o anel e conferir o resultado. Neste caso, o resultado esperado é que o anel seja dividido em dois anéis de mesmo diâmetro, mas com cerca de metade da largura do anel inicial.

Questão 2) Colar dois anéis iguais ao primeiro, de mesmo tamanho e largura, um perpendicular ao outro, como indicado na figura ao lado. O que acontece se cortarmos ao meio os dois anéis colados, como fizemos com o anel da na questão 1? OBSERVAÇÃO: É fundamental que toda a superfície de contato entre os dois anéis esteja colada, para evitar que a estrutura desmonte no momento em que é cortada.

Quando o primeiro anel é cortado, o conjunto fica semelhante a uma alga (uma tira com duas argolas, uma em cada extremidade). Em seguida, deve-se cortar a tira entre as argolas ao meio, pois esta corresponde a uma das argolas que estavam inicialmente coladas.

Neste caso, o resultado esperado é que seja obtido um quadrado de papel, o que pode surpreender muitas pessoas. Depois de concluído o processo, é interessante explorar a definição e propriedades do quadrado, como a relação entre ângulos opostos; entre lados opostos; dentre outras possibilidades. Os estudantes podem usar instrumentos de desenho, como o transferidor e medir seus ângulos internos, comparando-os.

Questão 3) Como deveriam ser colados os anéis para que o resultado fosse um losango (não quadrado)? A questão apresentada já instiga a discussão sobre a relação entre losangos e quadrados, que é pertinente para a mudança do Nível 1 para o Nível 2 no Modelo Van Hiele (VAN DE WALLE, 2009), e deve ser estimulada no momento da realização da atividade. Os estudantes deverão ser capazes de entender, no Nível 2, que, por exemplo, todo quadrado é um losango, mas nem todo losango é quadrado.

Para obter como resultado um losango não quadrado, os dois anéis de papel devem ter o mesmo diâmetro e colados de forma que não se posicionem perpendicularmente um em relação ao outro, ou seja, devem ser colados inclinados, formando uma estrutura semelhante a uma letra x, antes de ambos os anéis serem cortados ao meio.

Questão 4) Como devem ser os anéis iniciais (de mesmo tamanho ou diferentes?) para que o resultado seja um retângulo (não quadrado)? A mesma discussão feita sobre a relação entre quadrados e losangos deve ser feita em relação a quadrados e retângulos, para que os estudantes entendam que todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é quadrado.

Questão 5) Como devem ser os anéis, e como colá-los, para que o resultado seja um paralelogramo (não quadrado)? Mais uma vez, a discussão feita sobre a relação entre quadrados, losangos e retângulos deve ser feita em relação a quadrados e paralelogramos, para que os estudantes entendam que todo quadrado é um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é quadrado.

Neste item trazemos diversas atividades que podem ser propostas com tiras de papel, envolvendo Objetos de conhecimento e Habilidades da BNCC (BRASIL, 2018), como destacado no Quadro 4, para o 6º, 7º, 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental.

Quadro 4. Objetos de conhecimento e Habilidades envolvidas no uso de tiras de papeis.

6º Ano do EF (Geometria)		
OBJETO DE CONHECIMENTO	HABILIDADE	ATIVIDADES SUGERIDAS

Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados.	(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.	Analisar as tiras de papel e verificar após o recorte a quantidade de lados e os vértices, identificar o valor de cada ângulo interno.
Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado.	(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.	Após fazer o recorte nas tiras de papéis calcular o valor do perímetro e fazer ampliação e redução das tiras de papel para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado.
7º Ano do EF (Geometria)		
Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem.	(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.	Após criar um plano cartesiano ampliado colocar uma das tiras de papel sobre o plano e através da multiplicação das coordenadas observar se o aluno vai saber para onde vai mover a tira de papel corretamente.
Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero.	(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.	Após realizar o recorte das tiras identificar a figura formada e observar os ângulos internos e externos e verificar as relações entre eles.
8º Ano do EF (Geometria)		
Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.	(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.	Com as tiras de papel feitas em tamanhos iguais e diferentes realizar a colagem de diferentes maneiras e observar quais ângulos são formados e quais polígonos aparecem.
Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação.	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.	Com as tiras de papel observar o que ocorre quando fazemos o movimento de translação, reflexão e rotação e quando recortamos se através desses movimentos ocorre alguma mudança nos resultados.

Área de figuras planas.	(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.	Realizar o cálculo de área do círculo formado pelas tiras de papel e calcular a área da figura formada após o recorte das tiras coladas.
9º Ano do EF (Geometria)		
Polígonos regulares.	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.	No 9º ano podemos trabalhar o raciocínio lógico dos alunos que, de forma intuitiva, apenas vendo as tiras têm uma ideia do que pode acontecer após o recorte.

Outras investigações complementares à proposta antes do Quadro 4 podem ser feitas, a exemplo das que seguem, adaptadas de Rêgo, Rêgo e Souza (2012): 1. Colar três anéis de mesmo tamanho, cada um perpendicular ao seguinte e cortar os três ao meio, tentando estimar e verificando o resultado; 2. Colar três anéis de tamanhos diferentes, dispostos entre si como no caso anterior. Ou três iguais colados inclinados um em relação ao outro, estimar e verificar o resultado.

Solicitar dos alunos que façam o registro de suas ações e resultados, indicando a dimensão dos anéis (se todos de mesmo tamanho ou não); a quantidade de anéis usada; como estavam colados uns em relação aos outros (se perpendiculares ou inclinados) e os resultados obtidos, explorando as características/propriedades de todas as figuras resultantes.

3.6 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE AS PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Não daríamos conta de, em um Trabalho de Conclusão de Curso, apresentar todas as possibilidades de atividades que podem ser realizadas em sala de aula usando-se como material principal o papel e, em alguns casos, materiais complementares como lápis, cola e tesoura. Nosso objetivo central foi chamar a atenção para um recurso que talvez não seja explorado em sala de aula em toda sua potencialidade, ainda que seja um material de baixo custo e muito acessível, pois podemos reutilizar papéis como de revistas, panfletos de supermercado, dentre outros.

É importante destacar a possibilidade de conexão entre os objetivos de cada atividade e as Habilidades da BNCC (BRASIL, 2018), em diferentes anos de escolaridade, considerando-se uma mesma proposta, variando-se o nível de discussão e os conteúdos explorados em cada ano de escolaridade.

Por exemplo, no caso da atividade com anéis de papel, se ela é proposta para estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, podem ser enfatizadas apenas as formas gerais das figuras obtidas e a conexão dessas formas com objetos do cotidiano. As figuras resultantes podem, ainda, ser utilizadas em colagens, compondo molduras de imagens pré-selecionadas pelo estudante, por exemplo.

Para estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, as propriedades das figuras envolvidas e as relações entre elas podem e devem ser discutidas, ampliando-se o nível de pensamento geométrico dos estudantes, considerando-se o Modelo Van Hiele (VAN DE WALLE, 2009), cuja passagem de um nível para o outro depende mais da natureza das atividades propostas do que de fatores como a idade dos estudantes.

Em todos os casos, é fundamental que o professor planeje cuidadosamente as ações que irá propor em sala de aula, experimentando-as antes de trabalhar com os estudantes, para antecipar possíveis desdobramentos, dúvidas ou encaminhamentos. Uma mesma atividade pode, como vimos pelos Quadros apresentados com base em Habilidades da BNCC (BRASIL, 2018), ser desenvolvida por estudantes de diferentes níveis de escolaridade, mas é preciso que sejam adaptadas às diferentes demandas de cada nível e mesmo à estrutura de cada turma.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A elaboração do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) possibilita que o aluno da Graduação elabore um texto de natureza acadêmica, sendo, em nosso caso, a primeira vez que passamos por esse processo. Além dos aspectos técnicos relacionados a essa elaboração, também temos a oportunidade de aprofundarmos nossas reflexões acerca de algum aspecto relativo ao ensino e/ou aprendizagem de Matemática, em especial na Educação Básica.

No caso de nossa experiência de elaboração do presente TCC, fizemos o levantamento de atividades com um mesmo recurso básico, o papel, em diferentes fontes e realizamos o cruzamento das potencialidades dessas atividades com elementos apresentados na Base Nacional Comum Curricular, documento que rege a estruturação curricular da Educação Básica no país, desde o ano de 2018.

Por ser um documento novo e importante para a compreensão da organização curricular da modalidade educacional na qual iremos atuar, a leitura do documento foi importante para nossa formação e compreensão de como podemos articular objetivos de ensino às demandas indicadas naquele documento.

Com base na pesquisa que realizamos, observamos que o papel possui inúmeras potencialidades como recurso base para atividades voltadas para o processo de ensino em diversas áreas, em especial na Matemática. Nós podemos utilizá-lo para construir materiais manipulativos que intensificam o desenvolvimento dos alunos no estudo de Geometria, visando facilitar a compreensão dos conteúdos dessa Unidade Temática.

Com o apoio do material manipulativo elaborado com papel, os estudantes conseguem visualizar melhor os elementos que são representados e discutidos nas atividades propostas, tendo-se cuidado para que os estudantes não confundam os conceitos que estão elaborando com o objeto concreto utilizado para facilitar o ensino.

Com base em nossa experiência pessoal nas intervenções vivenciadas durante o Estágio Docente Supervisionado, observamos que durante as aulas teóricas de Geometria, apenas o desenho no quadro não era suficiente para

que os estudantes compreendessem os elementos que estávamos apresentando. Dependendo da complexidade de algumas ideias geométricas, passamos a entender a necessidade de apoio de materiais manipulativos para o trabalho docente.

Em uma experiência posterior à nossa constatação, trazendo esses materiais e construindo figuras junto com os estudantes utilizando o papel e as técnicas relatadas nesse trabalho, observamos que no primeiro momento existiu certa dificuldade por parte da turma para compreender o objetivo do uso do material, porém, no decorrer do processo, eles conseguiram compreender a dinâmica e, seguindo as orientações, evidenciaram melhor compreensão do conteúdo.

Com os resultados positivos que alcançamos, nossa preocupação passou a ser pensar em atividades em que o papel fosse o principal recurso material, por ser mais acessível aos professores, em especial para que aqueles que atuam em escolas públicas consigam realizar as atividades que elencamos em nosso trabalho.

O processo de levantamento dessas atividades gerou o aumento de nosso interesse em realizar pesquisa com outros materiais que tenham eficácia no processo de ensino aprendizagem de Matemática da Educação Básica, defendendo a importância de as escolas possuírem um laboratório voltado para o ensino da Matemática. Muitos recursos do acervo desse laboratório poderiam ser criados pelos próprios alunos, para estimular seu desenvolvimento.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

CERVO, A. L. BERVIAN, P. A. Metodologia científica. 5.ed. São Paulo: Prentice Hall, 2002

GIL, A. C. Métodos e técnicas de pesquisa social. 5.ed. São Paulo: Atlas, 1999.

VAN DE WALLE, J. A. Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

RÊGO, R.G; RÊGO, R.M. Matematicativa, 2^a. Ed. João Pessoa, PB: EdUFPB, 2010

RÊGO, R.G; RÊGO, R.M; GAUDENCIO JÚNIOR, S. A geometria do Origami. 2^a. Ed. João Pessoa, PB: EdCENR, 2020

BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: SEF, 1998.

ANEXOS

ANEXO 1: Propostas de atividade com as peças do Tangram (RÊGO e RÊGO, 2005)
– Reproduzidas com a autorização dos autores.

O Tangram é um dos quebra cabeças mais populares em todo o mundo e também um dos mais antigos. Conhecido como “as sete tábuas da sabedoria”, é constituído de sete peças e permite a composição de centenas de figuras diferentes. Possibilita o desenvolvimento de uma série de habilidades a partir de atividades relacionadas a diversos conteúdos de Matemática.

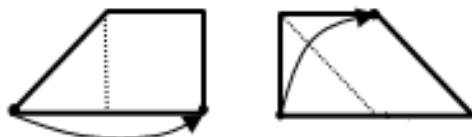
Vamos confeccionar um Tangram, determinando a divisão de suas peças através de dobraduras, a partir de um quadrado de papel. Recomenda-se que os alunos utilizem um quadrado com 15 cm de lado para a confecção do Tangram. O professor deverá utilizar um jogo de dimensão maior para que todos os alunos possam visualizar.

Passo 1 - Vincar o quadrado de papel ao longo de uma de suas diagonais e cortar, obtendo dois triângulos.

Passo 2 - Reservar um dos triângulos, vincar o outro, dividindo-o em dois triângulos congruentes e cortar. Os dois triângulos resultantes serão as duas primeiras peças do Tangram.

Passo 3 - Vincar o outro triângulo reservado, ao longo da bissetriz do ângulo reto, e depois cortá-lo ao longo da linha marcada, obtendo dois trapézios retângulos.

Passo 4 - Vincar os dois trapézios como indicado abaixo e cortar nos vincos, obtendo as quatro outras peças do Tangram - dois triângulos retângulos congruentes, um quadrado e um paralelogramo, formando as quatro últimas peças do Tangram.

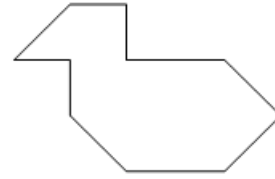
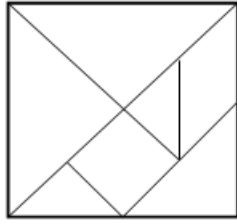


1. A CONFECÇÃO DE FIGURAS.

Confeccionado o Tangram, é possível representar uma grande variedade de figuras com as suas sete peças. O aluno pode utilizar as figuras obtidas na ilustração de trabalhos e textos ou como um excelente passatempo. O grau de dificuldade envolvido em quebra-cabeças deste tipo dependerá muito da forma como o mesmo for proposto.

Dado um conjunto de peças de Tangram, se o desafio proposto for a reprodução de uma figura usando as sete peças, sem sobreposição, olhando para um desenho apresentado em um tamanho menor do que a figura a ser obtida no final (ver imagens apresentadas em seguida), o grau de dificuldade será relativamente grande. Se o desafio proposto consistir no preenchimento do contorno de uma figura da mesma dimensão na qual o contorno das peças esteja colocado este apresenta um grau de dificuldade bem menor, sendo recomendado para crianças mais novas.

Embora pareça, à primeira vista, uma atividade muito simples, ela envolve o desenvolvimento da habilidade de discriminar formas e posição, o que é particularmente mais difícil no caso do quadrado composto com as 7 peças do Tangram.



2. IDENTIFICAÇÃO DE FORMAS GEOMÉTRICAS: Solicitar que os alunos identifiquem qual a forma de cada uma das peças do Tangram, justificando a denominação. Em seguida, pergunte se é possível encontrar nestas sete peças:

- uma peça que seja um retângulo;
- uma peça que seja um losango;
- duas peças que sejam paralelogramos.
- duas peças que sejam trapézios.

Peça que justifiquem por escrito as suas respostas.

3. DESAFIOS GEOMÉTRICOS:

- Como formar 01 quadrado usando apenas 01 peça?
- Como formar 01 quadrado usando 02 peças?
- Como formar 01 quadrado usando 03 peças?
- Como formar 01 quadrado usando 04 peças?
- Como formar 01 quadrado usando 05 peças?
- Como formar 01 paralelogramo usando 02 peças?
- Como formar 01 paralelogramo usando 05 peças?
- Como formar 01 retângulo usando 04 peças?
- Como formar 01 retângulo usando todas as peças?
- Como formar 01 triângulo usando todas as peças?
- Como formar 01 paralelogramo usando todas as peças?
- Como formar 01 hexágono usando todas as peças?
- Como formar 01 trapézio isósceles usando todas as peças?
- Como formar 02 quadrados congruentes usando todas as peças?
- Como formar 02 triângulos congruentes usando todas as peças?

4. CONSTRUÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS.

- Com **duas peças** construa: um quadrado; um paralelogramo; um triângulo e um trapézio.
- Com **três peças** construa: um triângulo; um retângulo; um trapézio e um paralelogramo.
- Com **três peças triangulares** (peças 1, 3 e 4): construa inicialmente um quadrado, em seguida transforme este quadrado em retângulo, e então transforme o retângulo em triângulo e, finalmente, transforme o triângulo em paralelogramo.
- Com **quatro peças** construa: um quadrado; um retângulo; um trapézio e um paralelogramo.

5. TRABALHANDO COM DEMONSTRAÇÕES.

Por que não podemos formar 01 quadrado usando 06 peças do Tangram?

6. QUESTÕES GEOMÉTRICAS GERAIS

- Quais as peças do Tangram que são semelhantes? Por quê?
- Usando as sete peças do Tangram, construir pares de figuras congruentes. Quais os pares que conseguiu formar?
- Onde estão situados os eixos de simetria reflexional das peças do Tangram? Todas elas têm pelo menos um eixo de simetria reflexional?

- d) Se o quadrado formado com as sete peças tem 10 cm de lado, qual a área da peça quadrada?

7. USO DA RÉGUA E DO TRANSFERIDOR.

- a) Medir os lados de cada peça do Tangram obtidas a partir de um quadrado com 15 cm, utilizando uma régua até uma aproximação de milímetros.
b) Calcular a área de cada uma das 7 peças.
c) Medir os ângulos internos das peças do Tangram, classificando-os (em agudo, reto ou obtuso).

8. DESAFIO ALGÉBRICO: Considerando que o lado do quadrado formado pelas sete peças do Tangram mede x cm, determine a dimensão dos lados de todas as outras peças do Tangram, em relação a x . Qual a área de cada peça, em relação a x ?

9. O TANGRAM E O TEOREMA DE PITÁGORAS.

- a) Calcular o comprimento dos lados de cada uma das 7 peças de um Tangram, construído a partir de um quadrado com 15 cm de lado.
b) Medir estes mesmos comprimentos com uma régua e compare os resultados.
c) Calcular a área das figuras pelos dois processos e comparar os resultados, registrando suas conclusões.

10. GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS.

Formar sobre cada lado do triângulo maior do Tangram um trapézio retângulo, com as outras seis peças, cada um deles utilizando duas peças. Qual a relação entre as áreas dos trapézios construídos sobre os lados menores do triângulo e a do trapézio construído sobre sua hipotenusa? E qual a relação entre as formas dos trapézios? Qual a relação do resultado que foi aqui obtido e o Teorema de Pitágoras?

11. DESAFIO DA CONVEXIDADE.

Com as sete peças do Tangram só é possível formar 13 figuras geométricas convexas. Tente descobrir quais são, sabendo que uma delas é o quadrado.

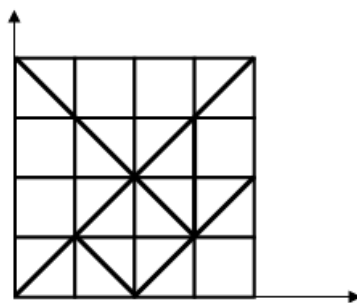
12. RAZÃO DE SEMELHANÇA.

Com as sete peças do Tangram construa um triângulo retângulo semelhante às peças triangulares que o compõem. Determine a razão de semelhança entre o triângulo obtido e a peça triangular maior; entre ele e a peça triangular média e entre ele e a peça triangular menor.

13. COORDENADAS CARTESIANAS.

Considere o esquema para corte das peças do Tangram, reproduzido no 1º quadrante do plano cartesiano dado em seguida. Identifique as coordenadas das extremidades das linhas de corte de cada peça. Pergunta-se: quais as modificações que precisaríamos fazer nas coordenadas se fizermos a reflexão da imagem do Tangram no 2º quadrante? E no 3º quadrante? E no 4º quadrante?

Podemos trabalhar com os alunos o corte das peças do seguinte modo: damos as coordenadas das extremidades dos cortes e solicitamos aos alunos que as localizem no plano, unindo-as de modo adequado por segmentos de reta e cortando-as posteriormente.



14. TRABALHANDO COM ÁREAS.

Considerando a unidade de comprimento dada no plano cartesiano acima e usando as peças obtidas a partir dele (as sete peças terão, no total, 16 unidades quadradas de área), construir:

- um retângulo com área igual a 8 unidades quadradas;
 - um triângulo com área igual a 9 unidades quadradas;
 - um trapézio com área igual a 6 unidades quadradas;
 - um retângulo com área igual a 16 unidades quadradas.
- e) Considerando a área do quadrado formado com as sete peças do Tangram como sendo 1, ou seja, como sendo a unidade padrão de área, responda as seguintes questões:
- Qual é a área de cada uma das peças do Tangram.
 - Justifique a seguinte adição de frações, sem efetuar os cálculos indicados e utilizando as peças do Tangram:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = 1$$

- Como você justificaria utilizando as peças do Tangram a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}?$$

ANEXO 2: Propostas de atividade com Pentaminós(RÊGO e RÊGO, 2005) – Reproduzidas com a autorização dos autores.

O pentaminó é um poliminó composto por cinco quadrados congruentes conectados ortogonalmente. Vamos confeccionar as peças do pentaminós utilizando apenas papel, régua, tesoura e lápis vamos desenhar os quadrados e recortar.

Passo 1 – Desenhar 1 quadrado.

Passo 2 – Recortar o quadrado desenhado.

Passo 3– Copiar o quadrado recortado e fazer mais 4 quadrados idênticos.

1. A CONFEÇÃO DE FIGURAS.

Na confecção das peças dos pentaminós é possível representar uma grande de figuras com os 5 quadrados do poliminó, nessa atividade o grau de dificuldade dependerá da maneira que trabalharemos o material.

Com as 5 peças do poliminós podemos trabalhar diversas atividades utilizando os quadrados recortados, inicialmente as atividades atribuídas de maneira mais simples para trabalhar as habilidades dos alunos e dependendo do desenvolvimento podemos ir dificultando as atividades de acordo com o nível de desenvolvimento dos alunos.

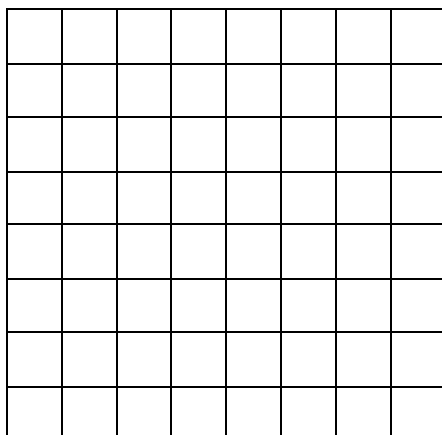
1. USO DA RÉGUA

- a) Medir os lados de cada peça do pentaminós.
- b) Calcular a área de cada quadrado e da área total das peças do pentaminós.
- c) Classificar os ângulos presente nas peças do pentaminós.

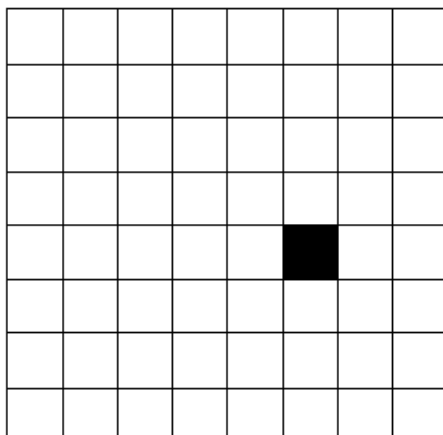
2. USO DO TABULEIRO

Nessa atividade utilizaremos um tabuleiro quadriculado 8x8 (com quadrados do tamanho dos quadrados do pentaminós e as 12 peças que compõe o pentaminos já cortadas). O jogo funciona da seguinte maneira, o primeiro jogador escolhe uma das peças e coloca sobre o tabuleiro, o segundo jogador escolhe outra peça e coloca sobre o tabuleiro e assim sucessivamente, não é permitido sobrepor as peças também não é permitido que a peça fique parte fora do tabuleiro as peças precisam está totalmente dentro do tabuleiro, cada jogador alternadamente repete a jogada, perde o jogador que não conseguir realizar a jogada.

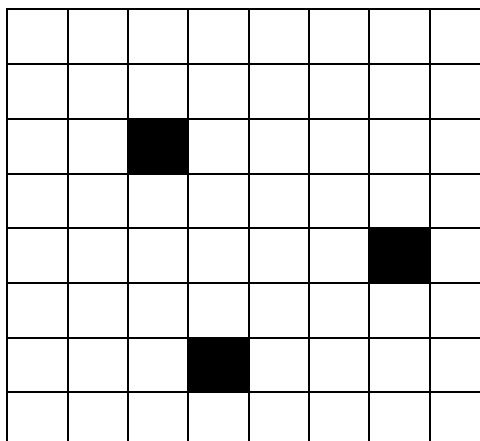
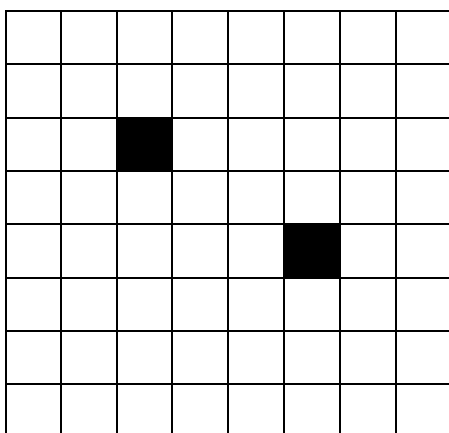
- a) Podemos utilizar o tabuleiro 8x8 livre para colocar as peças de acordo com a estratégia de cada jogador.
- b) Podemos estabelecer casas no tabuleiro 8x8 que não pode ser utilizada, ou seja, os jogadores não podem colocar as peças em cima das casas que forem pintadas, ou seja as casas pintadas serão bloqueadas. Por exemplo:**TABULEIRO LIVRE**



TABULEIRO COM UMA CASA BLOQUEADA



TABULEIRO COM DUAS E TRÊS CASAS BLOQUEADAS, RESPECTIVAMENTE



Quanto mais casas bloqueadas houverem, mais rápido o jogo vai acabar dependendo da estratégia utilizada, pois as possibilidades de encaixar as peças do pentaminó será reduzida com as casas bloqueadas.

4. DESAFIOS DE FORMAR RETÂNGULOS.

Nessa atividade tentaremos formar retângulos, utilizando as 12 peças do pentaminós.

- a) Um retângulo 10x6. A solução é única?
- b) Um retângulo 12x5.
- c) Um retângulo 15x4.
- d) Um retângulo 20x3.

5. DESAFIO DE TRIPLICAÇÃO.

Nessa atividade os alunos terão que escolher 1 peça e com as 11 peças restantes selecionar 9 peças e reproduzir o pentaminó escolhido em um tamanho três vezes maior que o original.

6. DESAFIO DO RETÂNGULO VAZADO.

Nessa atividade os alunos utilizaram todas as 12 peças do pentaminos para formar um retângulo 5x13, e no final do desafio ao conseguir formar o retângulo ele precisa ter um furo no centro que tenha a forma de qualquer um dos 12 pentaminos.

7. DESAFIO DE DUPLICAÇÃO.

Nessa atividade os alunos juntaram dois pentaminós formando uma figura. Após formar essa figura procurar outras 2 peças e formar a mesma figura formada anteriormente. Com as 8 peças que restaram formar a mesma figura, só que com o dobro do tamanho.

8. SIMETRIA REFLEXIVA

Nessa atividade os alunos terão que mostrar a simetria reflexiva das 12 peças do pentaminós.

9. SIMETRIA ROTACIONAL

Nessa atividade os alunos terão que mostrar a simetria rotacional das 12 peças do pentaminós.

ANEXO 3: Propostas de atividade de origami.(RÊGO, RÊGO, GAUDENCIO JÚNIOR,2012) – Reproduzidas com a autorização dos autores.

1.COMO OBTER UM QUADRADO A PARTIR DE UM RETANGULO DE PAPEL?

Material:retângulo de papel e tesoura.

Objetivos:trabalhar com as definições entre retângulo e quadrado, identificando diferenças e semelhanças entre eles; desenvolver o planejamento de estratégias; utilizar termos geométricos em um contexto.

Questão exploratória:como obter um quadrado a partir de uma folha retangular de papel, utilizando apenas uma tesoura?

Observação:é interessante verificar as estratégias desenvolvidas pelos(as) estudantes antes de apresentar qualquer solução.

2. ANALISANDO ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE.

Material:quadrado de papel.

Procedimento:solicitar que os(as) estudantes dobrem o quadrado uma vez, da forma que desejarem, fazendo vinco reto no papel. Em seguida, deverão fazer outra dobra, de maneira que os vincos se interceptem.

Questão exploratória:

a) Qual a relação entre os ângulos determinados pela interseção das duas linhas retas vincadas no papel (usar um transferidor)?

b) Como devemos realizar a segunda dobra, para que as linhas vincadas sejam perpendiculares?

c) Como devemos proceder para obter uma linha paralela à linha determinada na dobra inicial?

3.EXPLORANDO PEDAGOGICAMENTE AS DOBRADURAS

Material: quadrado de papel

Objetivos: explorar a identificação dos elementos de uma figura geométrica; uso de termos geométricos em um contexto.

Procedimento: uma vez que todos os(as) estudantes tenham obtido um quadrado de papel, após a realização da atividade 1, fazer questões do seguinte tipo para a turma:

a) Qual a forma final da figura obtida?

b) Quantos lados ela tem?

c) O que podemos dizer sobre seus ângulos? O que podemos dizer sobre seus lados? E sobre seus ângulos?

c) Qual a medida dos ângulos do quadrado? (Podemos sugerir o uso de transferidor, depois que o estudante fizer uma estimativa da medida dos ângulos).

d) Quais as diferenças e quais as semelhanças entre o quadrado obtido e o retângulo inicial?

Sugerir que os(as) estudantes anotem no quadrado todas as características que conseguirem identificar. O(A) professor(a) não deverá, inicialmente, dar sugestões, o que poderia induzir os resultados. As características poderiam ser, por exemplo, dimensão dos lados do quadrado; identificação dos elementos geométricos do mesmo (lados, vértices, ângulos internos); sua área; cor, textura e brilho do papel, etc. A atividade pode ser repetida com figuras diferentes recortadas no papel (triângulos, losangos, trapézios etc.).

4. DIVIDINDO UM QUADRADO EM DUAS PARTES IGUAIS, USANDO DOBRADURAS

Material: quadrado de papel

Questão exploratória: Como podemos dividir um quadrado em duas partes iguais, utilizando dobraduras?

Solicitar aos(as) estudantes que descrevam como são realizadas as dobras e listem as características das figuras resultantes em cada caso (no primeiro, triângulos retângulos e, no segundo caso, retângulos). Eles(as) poderão, ainda, estabelecer relações entre as áreas do quadrado inicial e das figuras obtidas no final. Peça-lhes também que, com um espelho, verifiquem se os vincos obtidos nos dois casos correspondem aos eixos de simetria do quadrado.

5. DIVIDINDO UM QUADRADO EM DUAS PARTES IGUAIS, COM UM CORTE RETO

Material: quadrado de papel

Questão exploratória 1: De quantas maneiras diferentes podemos dividir um quadrado em duas partes iguais (de mesma forma e tamanho), com um único corte reto?

Os(as) estudantes podem ser induzidos a responder que as maneiras distintas são duas, isto é, aquelas apresentadas na resolução da Atividade 4. Solicitar que verifiquem o que as duas soluções apresentadas têm em comum (o que poderá ser feito dobrando-se um mesmo quadrado de papel com as duas soluções). Eles(as) verão que os vincos do papel, correspondentes aos eixos de simetria do quadrado, interceptam-se no centro do mesmo.

Questão exploratória 2: Que outra proposta de solução poderia ser feita tendo a mesma característica em comum com as soluções dadas?

Sugerir que verifiquem se qualquer corte reto passando pelo centro do quadrado o dividirá em duas partes iguais e que confirmem seus resultados sobrepondo os dois pedaços de papel obtidos após o corte. Pedir-lhes que escrevam suas conclusões finais

(Observação: a questão admite infinitas soluções, uma vez que por um ponto passam infinitas retas e qualquer corte passando pelo centro do quadrado o dividirá em duas partes de mesmo tamanho e forma).

6. DIVIDINDO UM QUADRADO EM QUATRO PARTES IGUAIS

Material: quadrado de papel

Procedimento: a Atividade 5 poderá ser repetida questionando-se sobre quantas maneiras distintas podemos dividir um quadrado de papel em quatro partes iguais, usando dobraduras. Pedir aos(as) estudantes que descrevam cada solução, bem como as características das figuras obtidas no final e as relações de seus perímetros e áreas com as do quadrado inicial.

7. AS FRAÇÕES E O ORIGAMI

Material: quadrado de papel

Procedimento: se os(as) estudantes estão estudando potenciação, leve-os(as), após realizar as Atividades 5 e 6, a observar se é ou não difícil dividir o quadrado de papel em partes iguais correspondentes a potências do número 2, usando dobraduras (em 2, 4, 8, 16, etc, partes iguais).

Peça-lhes que verifiquem que estratégias desenvolveriam para dividir um quadrado de papel em três partes iguais, através de dobraduras (sem usar régua ou qualquer outro instrumento de desenho ou medição). Qual seria a estratégia para dividir o quadrado em partes iguais a múltiplos de 3 (6, 9, 12, etc, partes iguais)? Pedir-lhes que descrevam os procedimentos adotados em cada caso, registrando-os em um pequeno relatório.

As atividades envolvendo a dobra do quadrado em partes iguais podem ser realizadas para introduzir o conceito de fração, o estudo de frações equivalentes, a

adição de frações, dentre outras possibilidades. Por exemplo, considerando quadrados de papel de mesmo tamanho, divididos em duas, quatro e oito partes iguais, facilmente os(as) estudantes identificarão as frações equivalentes $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ (visualmente ou por sobreposição).

Outras divisões poderão ser propostas para a verificação de outros conjuntos de frações equivalentes envolvendo, por exemplo, a divisão do quadrado em três, seis e 12 partes iguais. É interessante investigar as diversas soluções possíveis para a divisão do quadrado em outros números de partes iguais usando-se dobraduras, como ilustrado para o caso da divisão em duas e em quatro partes iguais.

As frações dos quadrados poderão ser recortadas, pintadas, sobrepostas, soma-das, subtraídas, sempre solicitando o registro das ações realizadas com a ajuda dos recortes, fazendo questões que guiarão as observações dos(as) estudantes. Por exemplo: o que

Podem concluir, comparando-se duas frações de $\frac{1}{4}$ com uma fração de $\frac{1}{2}$?

8. TANGRAM (USANDO DOBRA E CORTE)

Material: quadrado de papel e tesoura

Objetivos: estudo de quadriláteros e triângulos; semelhança e congruência; percepção espacial; discriminação de formas e posição; composição e decomposição de figuras planas; frações.

O tangram é um dos quebra cabeças mais conhecidos em todo o mundo, e também um dos mais antigos. Constituído de sete peças, permite a composição de centenas de figuras diferentes, além de possibilitar o desenvolvimento de atividades relacionadas com diversos conteúdos de Matemática. Vamos confeccionar um Tangram, determinando a divisão de suas peças através de dobraduras, a partir de um quadrado de papel.

PASSO 1. Vincar o quadrado de papel ao longo de uma de suas diagonais e cortar, obtendo dois triângulos.

PASSO 2. Reservar um dos triângulos, vincar o outro, dividindo-o em dois triângulos congruentes e cortar. Os dois triângulos resultantes serão as duas primeiras peças do tangram.

PASSO 3. Dobrar o outro triângulo correspondente à metade do quadrado inicial e vincar ao longo da linha indicada na imagem. Cortar, separando as duas partes. O triângulo 3 será a terceira peça do Tangram.

PASSO 4. Vincar ao meio o trapézio que sobrou após o corte, formando dois trapézios retângulos, cortando para separá-los.

PASSO 5. Vincar os dois trapézios como indicado em seguida e cortar nos vincos, obtendo as quatro outras peças do Tangram - dois triângulos retângulos congruentes, um quadrado e um paralelogramo.

9. USO DO TANGRAM NO ENSINO DE FRAÇÕES

Para o desenvolvimento dessa atividade, é importante estabelecer um tamanho padrão do quadrado que servirá como base para cortar o Tangram, para toda a turma (Sugestão: quadrado com lados iguais a 15 cm). Inicialmente estabelecer qual das peças será considerada como unidade de referência. Para ilustrar, consideremos o triângulo maior como unidade.

Traçar o contorno de figuras formadas pela composição de duas ou mais peças do tangram, distribuir cópias com os(as) estudantes e pedir que verifiquem a que frações da unidade correspondem as figuras dadas (podem ser usadas as peças do quebra-cabeça lembrando que a unidade considerada é o triângulo maior).

Questões que podem ser propostas em relação às figuras apresentadas:

1. Quais das figuras representam frações maiores que a unidade considerada?
2. Nas demais figuras, que fração falta para completar uma unidade?
3. Crie figuras, usando mais de uma peça, que correspondam as seguintes frações da unidade (desenhe-as em uma folha de papel):

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{5}{4}$
- c) $\frac{3}{4}$
- d) $\frac{7}{4}$

4. Compare suas soluções com as de seus colegas. Elas tinham formas diferentes ou iguais às que você criou? Existem outras soluções para cada um dos casos pedidos? Tente descobrir outras.

5. Crie uma figura combinando peças do Tangram, faça o contorno da mesma e passe para seu colega como desafio, para que ele descubra que fração da unidade corresponde a figura que você criou.

Observação: em um outro momento podem ser estabelecidas como unidade outras peças do Tangram, o triângulo menor, por exemplo, e as questões serem totalmente refeitas, desde o início, considerando-se a nova unidade.

10. KIRIGAMI: DOBRANDO E CORTANDO

Material: quadrado de papel e tesoura

Objetivos: estudo de ângulos e polígonos; planejamento de estratégia; percepção espacial; discriminação de formas e posição.

Dobrar um quadrado de papel e fazer um corte reto.

Questões exploratórias (sugestões de questões e as respostas esperadas):

- Quantos lados tem o polígono obtido? (Resposta esperada: Quatro!)
- Qual será a forma do furo que obteremos no papel? (Essa questão deve feita antes do corte - levantar as hipóteses dos(as) estudantes).
- Qual a forma que obtivemos? Confere com o que você achava que seria?
- Como teremos que realizar o corte para que o polígono resultante seja um quadrado? (Solução: as distâncias da extremidade do corte ao vértice do quadrado de papel têm que ser iguais).
- Como teremos que realizar o corte para que o polígono resultante seja um losango com ângulos internos iguais a 60° e 120° ? (Solução: fazer o corte de modo que um dos ângulos meça 30° e o outro 60°).
- Podemos obter um quadrilátero côncavo realizando um único corte, do tipo indicado? (Resposta: não)

Observação: a forma do furo obtido com o corte dependerá do ângulo em que a segunda dobra do papel é realizada, assim como da quantidade de dobras do papel. Veja em seguida algumas variações. É importante solicitar aos(as) estudantes que escrevam relatórios acerca de suas observações, registrando com cuidado os ângulos em que foram feitas as dobras, o número delas e os resultados obtidos, tentando responder questões de mesma natureza das propostas na primeira parte da Atividade. Sugerir que experimentem outras maneiras de dobrar e cortar, analisando aspectos do tipo:

- Qual a relação entre o número de dobras e o número de lados da figura obtida?
- Qual a relação entre o ângulo de corte, em relação aos lados da figura que é cortada e o fato do polígono ser côncavo ou convexo?

Os(as) estudantes podem analisar o que acontece quando o número de cortes varia. Por exemplo, verificar qual a forma do furo quando o papel é dobrado como indicado no início da atividade e são feitos dois cortes retos. O que acontece quando variamos o ângulo entre os dois cortes retos? O ângulo é obtuso; testar ângulos menores e maiores que 90° .

Os(as) estudantes devem utilizar, sempre que possível, régua e transferidor, realizando as medidas necessárias, para que possam estabelecer relações entre lados e ângulos opostos dos polígonos, regularidade ou não dos mesmos, estimulando a observação, a comparação, a compreensão de definições, a descrição de formas e ações, o uso da terminologia correta, a produção de textos em aulas de Matemática, a explicitação de ideias e conclusões, entre outros objetivos.

11. COMO OBTER UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO A PARTIR DE UM QUADRADO DE PAPEL, USANDO DOBRADURA?

Material: quadrado de papel

Objetivos: introduzir elementos geométricos - polígonos regulares; trabalhar a percepção espacial, discriminação de formas e posição.

Questão: Como obter um triângulo equilátero a partir de um quadrado de papel, usando apenas dobradura, isto é, sem utilizar régua ou qualquer outro instrumento de desenho ou medida?

Questão exploratória: Por que o método apresentado funciona? Solicitar que os(as) estudantes discutam entre si e argumentem matematicamente sobre a solução (Resposta no final do livro).

Observação: após obter o triângulo, pedir que verifiquem se o mesmo é realmente equilátero (lados e ângulos iguais), usando régua e transferidor, e que anotem no triângulo as medidas dos lados e dos ângulos identificados e que tracem seus eixos de simetria.

12. COMO OBTER UM HEXÁGONO A PARTIR DE UM QUADRADO DE PAPEL, USANDO DOBRADURAS?

Material: quadrado de papel

Questão: Como, a partir de um quadrado de papel, obter um hexágono regular, usando dobraduras?

Objetivos: introduzir elementos geométricos (quadrado, triângulo, hexágono, polígonos regulares, vértices, lados) e a respectiva nomenclatura; trabalhar a percepção espacial, discriminação de formas e posição.

Questão: Como, a partir de um quadrado de papel, posso obter um hexágono regular, usando dobraduras?

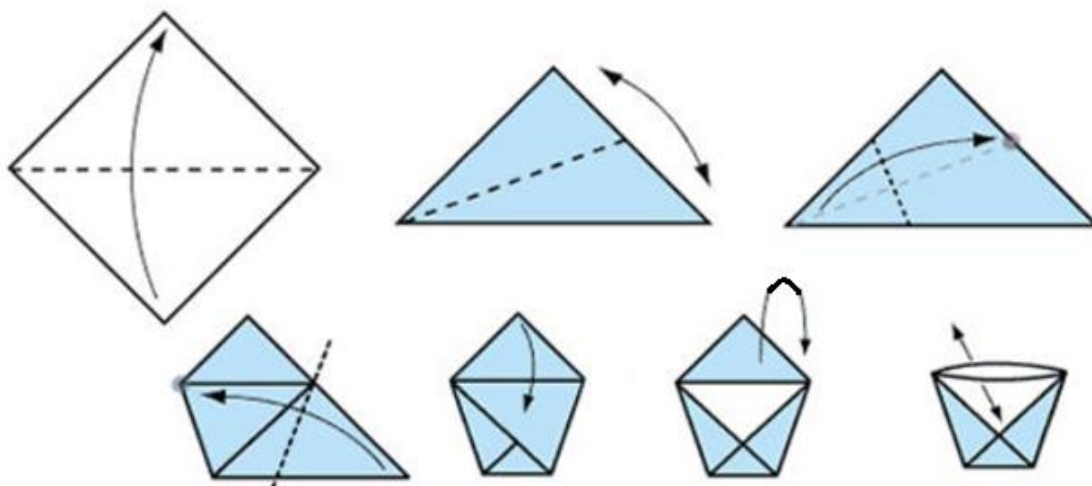
Observação: após terem obtido o hexágono, pedir que verifiquem se o mesmo é realmente regular (lados e ângulos iguais), usando régua e transferidor. Pedir que anotem no hexágono as medidas dos lados e dos ângulos por eles determinados, bem como o valor da soma dos ângulos internos do mesmo.

Pode-se complementar a atividade pedindo que tracem as diagonais do hexágono e identifiquem seus eixos de simetria, verificando se há alguma relação entre estes e as diagonais traçadas.

13.O COPO

Material: quadrado de papel (dimensão dos lados superior a 15 cm).

Objetivo: explorar elementos geométricos - Diagonal - Triângulo retângulo - Bissetriz - Quadriláteros - Trapézio - Ângulos.



OCTOGONO REGULAR: observando-se o copo (figura final), podemos distinguir de cada lado do copo, dois triângulos, sendo um deles isósceles, maior, e um escaleno, menor. Se encaixarmos o triângulo escaleno dentro da "boca" de outro copo de mesmo tamanho, e repetindo este procedimento até fecharmos a figura, obteremos um octógono regular.

O octógono pode ser decorado como se fosse uma pizza (com rodela de tomate e de cebola feitas de papel) e utilizado em aulas envolvendo o estudo de trações. Os(as) estudantes podem identificar seus eixos de simetria e a relação destes com as diagonais do octógono, bem como a medida de seus ângulos internos e a soma desses valores.

14. CONSTRUINDO PIRÂMIDES

Material: quadrado de papel (dimensão dos lados superior a 15 cm).

Procedimento: para obter uma pirâmide de base triangular, faça três copos, vinque-os separando os dois triângulos que você pode observar em qualquer um dos dois lados cada copo, encaixando o triângulo menor (escaleno) dentro da "boca" do copo seguinte, até fechar a figura.

Observe que, na sala de aula pode ocorrer o seguinte fato: apesar de os copos terem sido feitos com quadrados de papel de mesmo tamanho, o encaixe, como indicado, não permite a construção de uma pirâmide. Como explicar este fato? Caso isto ocorra, pedir que os(as) estudantes comparem dois dos copos e tentem descobrir se há alguma diferença entre eles.

Para que haja um encaixe perfeito, é preciso que todos os copos tenham todos a mesma forma. Caso os copos sejam simétricos, o encaixe não possibilitará a confecção de pirâmides - neste caso, desdobrar o copo e dobrá-lo novamente, de modo adequado. Para fazer pirâmides com outros tipos de bases (quadradas, pentagonais e hexagonais), basta modificar a quantidade de copos. O ideal é trabalhar com, no máximo, seis copos.

Com sete copos a pirâmide fica muito achatada e com oito copos a figura resultante será plana (pode ser utilizada no trabalho com frações). Para realizar os encaixes basta seguir a sequência de passos do procedimento indicado para a pirâmide com três copos. Se desejar, colocar cola nas partes que serão inseridas na boca do como seguinte, para dar maior rigidez à figura. Pode-se, ainda, confeccionar a base em uma folha de papel e colar nas pirâmides, que poderão ser usadas em maquetes, exploradas em atividades de representação de vistas, dentre outras possibilidades.