Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Limites de massas quasi-locais de
esferas em variedades
Riemannianas

Thays Ingrid dos Santos Nunes

JOÃO PESSOA – PB
FEVEREIRO DE 2022

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Limites de massas quasi-locais de esferas em variedades Riemannianas

por

Thays Ingrid dos Santos Nunes

sob a orientação do

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

N9721 Nunes, Thays Ingrid dos Santos.

Limites de massas quasi-locais de esferas em variedades Riemannianas / Thays Ingrid dos Santos Nunes. - João Pessoa, 2022.

116 f.

Orientação: Allan George de Carvalho Freitas.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Massa ADM. 3. Massa de Brown-York.
4. Coordenadas normais. 5. Teorema da massa positiva.
I. Freitas, Allan George de Carvalho. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Limites de massas quasi-locais de esferas em variedades Riemannianas

por

Thays Ingrid dos Santos Nunes

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada em 25 de fevereiro de 2022.

Banca Examinadora:

Allan George de Carvalho Freitas

Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas – UFPB

(Orientador)

Fábio Reis dos Santos

Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos – UFPE

(Examinador Externo)

Marcio Silva Santos

Prof. Dr. Marcio Silva Santos – UFPB

(Examinador Interno)

À minha avó Maria (in memoriam)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força e saúde para enfrentar todas as dificuldades. À minha família, em especial aos meus pais, Susana Santos e Tony Nunes, por todo amor, educação e apoio. Às minhas irmãs, Thayna Nunes e Thaynara Nunes, por todo carinho e apoio. Agradeço também à minha companheira Hévila Holanda, por todo cuidado, apoio, amor e paciência nos momentos mais difíceis. E aos meus filhos felinos, Aurora e Joaquim, obrigada por estarem sempre ao meu lado, amo vocês.

Ao meu orientador, Prof. Allan Freitas, pelo empenho e dedicação na elaboração deste trabalho e todos os ensinamentos durante minha trajetória no mestrado.

Aos professores da graduação por todos ensinamentos e incentivos para dar continuidade à carreira acadêmica, em especial agradeço à Prof.^a Yane Araújo. Agradeço também aos professores do mestrado, em especial ao Prof. Marcio Santos, que por meio das suas aulas de Geometria me motivou a seguir dentro desta área.

Aos membros da banca, professores Fábio Reis e Marcio Santos, pelas significativas contribuições na correção deste trabalho.

Agradeço também aos amigos por todos os momentos de descontração e apoio durante o mestrado.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, abordamos alguns conceitos referentes à Relatividade Matemática, a fim de discutirmos resultados relacionados a limites de massas quasi-locais de esferas em variedades Riemannianas tridimensionais, à luz do artigo intitulado “*Large-sphere and small-sphere limits of the Brown-York mass*” dos autores X.-Q. Fan, Y. Shi e L.-F. Tam. Inicialmente, estudamos e utilizamos propriedades de decaimento de alguns objetos geométricos em uma variedade assintoticamente plana tridimensional de forma a estudarmos o limite da massa quasi-local de Brown-York em esferas coordenadas com raios suficientemente grandes, concluindo que este limite converge, no infinito, para a massa de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) da variedade assintoticamente plana em questão. Posteriormente, estudamos expansões em coordenadas normais de estruturas geométricas de modo a compreendermos a massa de Brown-York para esferas geodésicas com raios suficientemente pequenos, utilizando tais resultados para apresentarmos expansões de massas quasi-locais, bem como, comportamento de determinados volumes esféricos. Também estudamos resultados do mesmo caráter para as massas quasi-locais de Hawking e isoperimétrica, além de abordarmos aplicações destas expansões em face do Teorema da massa positiva.

Palavras-chave: Massa ADM; Massa de Brown-York; Coordenadas normais; Teorema da massa positiva.

Abstract

In this work, we approach some concepts related to Mathematical Relativity, in order to discuss results related to quasi-local mass limits of spheres in three-dimensional Riemannian manifolds, in the light of the article entitled “*Large-sphere and small-sphere limits of the Brown-York mass*” by authors X.-Q. Fan, Y. Shi and L.-F. Tam. Initially, we studied and used decay properties of some geometric objects in an asymptotically flat three-dimensional manifold in order to study the limit of the quasi-local Brown-York mass in coordinate spheres with sufficiently large radius, concluding that this limit converges, in the infinite, for the Arnowitt-Deser-Misner (ADM) mass of the asymptotically flat manifold in question. Subsequently, we studied expansions in normal coordinates of geometric structures in order to study the Brown-York mass for geodesic spheres with sufficiently small radius, using these results to present quasi-local mass expansions, as well as the behavior of certain spherical volumes. We also study results of the same character for the quasi-local Hawking and isoperimetric masses, in addition to approaching applications of these expansions in the face of the positive mass theorem.

Keywords: ADM mass; Brown-York mass; Normal coordinates; Positive mass theorem.

Sumário

Introdução	2
1 Conceitos e resultados preliminares	5
1.1 Tópicos de geometria Riemanniana	5
1.1.1 Curvaturas em variedades Riemannianas	7
1.1.2 Geometria extrínseca: imersões isométricas e a segunda forma fundamental	12
1.1.3 Operadores em variedades Riemannianas	14
1.1.4 Geodésicas; Vizinhanças normais e Campos de Jacobi	15
1.2 Notações de limites assintóticos: O-grande e o-pequeno	20
1.3 Variedades assintoticamente planas	22
1.4 Massa ADM e algumas massas quasi-locais	23
1.4.1 A massa de Arnowitt-Deser-Misner (ADM)	24
1.4.2 Algumas massas quasi-locais	24
2 Limite da Massa de Brown-York de esferas com raios suficientemente grande	26
2.1 Decaimento de algumas estruturas geométricas	26
2.2 A relação entre as massas ADM e de Brown-York	47
2.3 Aplicações e a massa Isoperimétrica	50
3 Expansões de massas quasi-locais de esferas geodésicas	56
3.1 Expansão da métrica em coordenadas normais	56
3.2 Expansão de alguns objetos geométricos	64
3.3 Expansão da massa de Brown-York	97
3.4 Expansão da massa de Hawking	103
Referências Bibliográficas	109

Introdução

Nosso trabalho se ambienta na importante relação estabelecida ao longo dos anos entre a Geometria Riemanniana e a Relatividade Geral, teoria esta desenvolvida brilhantemente por Albert Einstein em 1915. Em específico, trabalharemos noções de algumas massas na relatividade geral à vista de estudos geométricos. Neste estudo, há uma grande dificuldade em obter uma formulação geral de massa e, por isso, existem várias noções, cada uma aplicada numa determinada situação. Por exemplo, para certos espaços-tempo que são assintoticamente planos, temos uma noção de massa denominada massa de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) [1], que será utilizada no nosso estudo.

Estritamente, neste trabalho, apresentaremos resultados envolvendo algumas massas quasi-locais e a massa ADM alicerçados no artigo de X.-Q. Fan, Y. Shi e L.-F. Tam. [7], intitulado “*Large-sphere and small-sphere limits of the Brown-York mass*”. As formulações de massas quasi-locais surgiram, nas literaturas, há cerca de quarenta anos, com a finalidade de medir a energia de determinadas superfícies compactas. Naturalmente, existem algumas condições que esperamos que as massas quasi-locais cumpram como, por exemplo, a não negatividade. Além disso, o comportamento dessas massas quasi-locais, no infinito, devem convergir para a massa de Arnowitt-Deser-Misner (ADM).

Em nosso estudo, um dos objetivos será analisar resultados que envolvem este último comportamento das massas quasi-locais. Mais especificamente, numa variedade assintoticamente plana, analisamos a relação da massa quasi-local de Brown-York de esferas coordenadas com a massa ADM desta variedade, no infinito. Para mais, também almejamos investigar expansões de massas quasi-locais em esferas geodésicas com relação às massas de Brown-York e de Hawking.

Para tanto, estruturamos esta dissertação em três partes. No primeiro capítulo, elencamos resultados e conceitos preliminares com respeito às Variedades Diferenciáveis e alguns tópicos de Geometria Riemanniana necessários para o estudo dos capítulos seguintes, bem como aspectos referentes às Variedades Assintoticamente Planas de dimensão 3, as quais, de forma sucinta, são variedades Riemannianas que, a menos de

um compacto, são difeomorfas ao complementar de uma bola fechada em $\mathbb{R}^3$, em que a métrica se aproxima da métrica euclidiana no infinito. Além disso, abordamos as caracterizações das massas trabalhadas ao longo dos resultados dos próximos capítulos como, por exemplo, a massa ADM de uma variedade assintoticamente plana (M, g) , que sucintamente é definida como o limite no infinito de integrais que envolvem as derivadas parciais da métrica g . Mais especificamente,

$$m_{ADM}(M) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j d\Sigma_r^0.$$

Além disso, veremos a massa de Brown-York da fronteira de uma variedade compacta (Ω, g) em dimensão 3 com fronteira suave e com curvatura de Gauss de $\partial\Omega$ positiva, a qual, concisamente, é definida por

$$m_{BY}(\partial\Omega) = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Omega} (H_0 - H) d\Sigma,$$

em que H é a curvatura média de $\partial\Omega$ com respeito ao vetor normal unitário externo e a métrica g e H_0 é a curvatura média de $\partial\Omega$ com relação ao vetor externo unitário quando mergulhado em $\mathbb{R}^3$.

No segundo capítulo, o objetivo principal é demonstrar um relevante teorema do artigo [7], o qual relaciona as duas massas que caracterizamos acima. Mais especificamente, vamos provar que se (M, g) é uma variedade assintoticamente plana de ordem $1 \geq \tau > \frac{1}{2}$ com um fim e S_r são esferas coordenadas, então

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m_{BY}(S_r) = m_{ADM}(M), \tag{1}$$

ou seja, sob certas circunstâncias, o limite da massa de Brown-York de esferas de uma variedade assintoticamente plana tridimensional, quando o raio das esferas tende ao infinito, é exatamente a massa ADM da variedade em questão. Dessa forma, neste capítulo, apresentamos inicialmente alguns resultados técnicos que nos dão informações sobre decaimentos de alguns objetos geométricos como, por exemplo, as curvaturas médias H e H_0 dada definição da massa de Brown-York apresentada acima. Em seguida aplicamos tais resultados para demonstrar o limite (1). Além disso, analisamos uma generalização deste resultado. Para mais, a partir das demonstrações, também abordamos resultados que comparam volumes de esferas, donde utilizamos observações dos resultados anteriores e uma versão do Teorema da massa positiva, o qual garante que em uma variedade assintoticamente plana tridimensional com curvatura escalar não-negativa a massa $m_{ADM} \geq 0$, valendo a igualdade se, e somente se, a variedade é isométrica ao $\mathbb{R}^3$. Por fim, mostramos que a massa isoperimétrica de uma variedade

assintoticamente plana de dimensão três coincide com a massa ADM desta variedade.

No Capítulo 3, o objetivo é exibir expansões de massas quasi-locais de esferas geodésicas numa variedade Riemanniana (N, g) de dimensão três. Para este estudo, foi crucial estudar as expansões de Taylor de métricas e curvaturas em vizinhanças normais, com o objetivo de aplicá-las nas respectivas definições das massas quasi-locais. Finalmente, apresentamos várias aplicações que envolvem o volume de esferas geodésicas, as quais também decorrem do Teorema da massa positiva de Shi-Tam [20].

Capítulo 1

Conceitos e resultados preliminares

Em razão do nosso trabalho englobar estudos relacionados à Análise Geométrica e à Física Matemática, necessitamos apresentar alguns conceitos e resultados prévios da Análise, Geometria Riemanniana e Relatividade Matemática. Este capítulo tem por finalidade estabelecer notações e terminologias que auxiliarão na compreensão do texto, bem como, relembrar caracterizações e resultados que serão utilizados ao longo dos dois capítulos seguintes.

1.1 Tópicos de geometria Riemanniana

Ao longo do texto apresentaremos alguns resultados envolvendo objetos geométricos como, por exemplos, as curvaturas. Além disso, também trabalharemos no Capítulo 3 com coordenadas normais. Para tanto, necessitamos compreender alguns conceitos e resultados básicos da Geometria Riemanniana, os quais serão elencados a seguir. Destacamos que este capítulo foi fundamentado por meio dos clássicos livros de J. Lee [13], Petersen [16] e de Carmo [4].

No nosso contexto, salvo menção contrária, estaremos trabalhando com variedades Riemanniana de dimensão 3. No entanto, de modo mais geral, vamos definir uma variedade Riemannianas de dimensão n . Para tanto, vamos trabalhar com variedades de classe C^∞ (diferenciáveis), Hausdorff, conexas e com base enumerável. Ademais, identificaremos as coordenadas locais de uma carta (U, φ) da variedade diferenciável M de dimensão n como $(x^1, x^2, \dots, x^n)$, tal que U é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Além disso, $T_p M$ denotará o espaço tangente de M no ponto $p \in M$. Salientamos que o leitor deve estar familiarizado com os resultados básicos relativos as variedades diferenciáveis, podendo consultar o Capítulo 0 de [4] para um estudo preliminar.

Definição 1.1. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Uma *métrica Riemanniana* em M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um

produto interno $g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$, ou seja,

i) g_p é uma forma bilinear;

ii) $g_p(v, w) = g_p(w, v)$, $\forall v, w \in T_pM$; (*simétrica*)

iii) $g_p(v, v) \geq 0$, para todo $v \in T_pM$. $g_p(v, v) = 0$ se e só se $v = 0$, (*positiva definida*)

de forma que essa correspondência varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno do ponto p , com $\varphi(x^1, \dots, x^n) = q \in \varphi(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x^i}(q) = d\varphi(e_i)$, onde e_i é o vetor da base canônica do $\mathbb{R}^n$, então as funções definidas por

$$g_q \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(q), \frac{\partial}{\partial x^j}(q) \right) = g_{ij}(x^1, \dots, x^n).$$

são diferenciáveis.

Esta definição independe da escolha do sistema de coordenadas. O índice p em g_p pode ser omitido, desde que não acarrete confusões. Além disso, em alguns momentos podemos identificar $g_p(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$. As funções g_{ij} são chamadas de **componentes da métrica Riemanniana**. O par (M, g) é chamado de **variedade Riemanniana**. Destacamos que em alguns momentos, por simplicidade, vamos considerar a seguinte notação $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

As seguintes definições concedem noções equivalente para a estrutura apresentada acima.

Definição 1.2. Sejam (M, g) e $(N, \hat{g})$ variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$ é dito uma **isometria** se

$$g_p(v, w) = \hat{g}_{f(p)}(df_p(v), df_p(w)), \quad \forall p \in M, \forall v, w \in T_pM. \quad (1.1)$$

Além disso, dizemos que f é uma **isometria local** em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \longrightarrow f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo a condição (1.1).

Exemplo 1.1. Um dos exemplos mais simples de variedade Riemanniana é o espaço euclidiano n -dimensional munido com o produto interno usual. Neste caso, a base coordenada de $T_p\mathbb{R}^n$ é identificada com os vetores da base canônica e_i e a expressão da métrica é dada por $\delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$.

Definição 1.3. Sejam M uma variedade diferenciável, (N, g_N) uma variedade Riemanniana e $f : M \longrightarrow N$ uma imersão, ou seja, f é diferenciável e $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ é

injetiva para todo $p \in M$. Então, podemos induzir uma métrica g_M em M , denominada **métrica pullback**, dada por

$$g_M(v, w) = g_N(df_p(v), df_p(w)), \quad v, w \in T_p M.$$

O resultado a seguir garante a existência de métricas em quaisquer variedades diferenciáveis.

Proposição 1.1. Uma variedade diferenciável Hausdorff e com base enumerável possui uma métrica Riemanniana.

Demonstração: Uma demonstração deste resultado, via partição da unidade, pode ser encontrada em [4]. ■

1.1.1 Curvaturas em variedades Riemannianas

A partir deste momento, vamos exibir a noção de curvatura que, de maneira intuitiva, mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclidiana. Assim, apresentaremos também a generalização da noção de curvaturas Gaussiana e média das superfícies, bem como o tensor de Ricci e resultados que serão utilizados em algumas demonstrações dos próximos capítulos.

Para isto, denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de campos de vetores de classe C^∞ de M e $\mathfrak{D}(M)$ o conjunto das funções reais de classe C^∞ em M . Ademais, vamos considerar as seguintes caracterizações.

Definição 1.4. Seja M uma variedade diferenciável. Uma **conexão afim** ∇ em M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que a cada par de campos de vetores (X, Y) associa um outro campo de vetores denotado por $\nabla_X Y$, satisfazendo as seguintes propriedades:

- i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
- ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
- iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathfrak{D}(M)$.

Observação 1.1. Pode-se verificar que dada uma variedade diferenciável M com uma conexão afim ∇ , existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \longrightarrow M$ um outro campo de vetores $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;
- ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$;
- iii) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, ou seja, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

donde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I . Tal correspondência é denominada **derivada covariante** de V ao longo de c . Além disso, note que tais noções nos fornecem maneiras de derivar vetores ao longo de curvas.

Definição 1.5. Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana, com a métrica denotada por $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ e ∇ uma conexão afim de M . Dizemos que tal conexão é **compatível** com a métrica g , se para toda curva diferenciável α , tem-se $\langle X, X' \rangle$ é constante, para quaisquer X e X' campos ao longo de α .

Definição 1.6. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita uma conexão **simétrica** quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = XY - YX,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Tendo em vista as definições acima, podemos garantir que existe uma única conexão afim ∇ em uma variedade Riemanniana M que é simétrica e compatível com a métrica Riemanniana, denominada **conexão Riemanniana** de M .

Observe também que podemos analisar a conexão em um sistema de coordenadas (U, φ) . Para tanto, considere sua base coordenada $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$, então podemos escrever

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

onde as funções Γ_{ij}^k definidas em U são os **símbolos de Christoffel** da conexão ∇ em U , tais que,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m (g_{jm} \partial_i + g_{mi} \partial_j - g_{ij} \partial_m) g^{mk} \quad (1.2)$$

é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana.

Definição 1.7. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. O **tensor curvatura** é definido pela aplicação $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M)$$

em que ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Observação 1.2. A curvatura R é multilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, no sentido que para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathfrak{D}(M)$, tem-se

$$\begin{aligned} R(fX + gY, W) &= fR(X, W) + gR(Y, W); \\ R(X, fZ + gW) &= fR(X, Z) + gR(X, W); \\ R(X, Y)(fZ + gW) &= fR(X, Y)Z + gR(X, Y)W. \end{aligned}$$

Além disso, vale a seguinte propriedade, conhecida como identidade de Bianchi,

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Ainda neste contexto, considere $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ e defina

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

Alguns autores também denotam o tensor acima como **tensor curvatura**. Observamos que podemos apresentar o **tensor curvatura** por meio de um sistema de coordenadas. Para isso, considere a carta (U, φ) em torno de p e $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ a sua base coordenada, então definimos as coordenadas do tensor de curvatura por:

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_l R_{ijk}^l \partial_l,$$

tais que R_{ijk}^l são as componentes da curvatura R em (U, φ) . Além disso, em coordenadas, definimos as coordenadas do tensor de curvatura por:

$$R_{ijkl} = R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l),$$

decorre das observações o seguinte resultado:

Proposição 1.2. (*Propriedades do Tensor Curvatura*). Assumindo todas as noções e notações anteriores. Temos que o tensor curvatura possui as seguintes propriedades:

- i) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$;
- ii) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$;
- iii) $R_{ijkl} = R_{klij}$;
- iv) $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$; (*Primeira Identidade de Bianchi*)

v) $R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = 0$. (*Segunda Identidade de Bianchi*)

Demonstração: A demonstração dessas propriedades podem ser encontradas no Capítulo 4 de [13]. ■

Observação 1.3. Na Proposição acima a notação ∇ denota a derivada covariante. Por exemplo, $R_{ijkl;m}$ é a derivada covariante de R_{ijkl} com relação ao vetor ∂_m .

Outro conceito que está relacionado com o operador curvatura é a curvatura seccional ou Riemanniana, que definimos a seguir

Definição 1.8. Sejam $p \in M$ e $\sigma \subset T_p M$ um subespaço vetorial bidimensional. A *curvatura seccional* de σ é dada por

$$K(\sigma) = \frac{R(x, y, x, y)}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

em que $x, y \in \sigma$ e são vetores linearmente independentes.

Observação 1.4. A noção de curvatura seccional vista anteriormente, está bem definida, isto é, independe da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Como veremos no resultado a seguir, o conhecimento da curvatura seccional determina completamente o tensor de curvatura de uma variedade.

Proposição 1.3. Sejam E um espaço vetorial de dimensão $m \geq 2$ munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $R : E \times E \times E \rightarrow E$, e $R' : E \times E \times E \rightarrow E$ aplicações tri-lineares que satisfazem as condições *i)*, *ii)*, *iii)* e *iv)* da Proposição 1.2 para

$$\mathcal{R}(x, y, z, t) = \langle R(x, y)z, t \rangle, \quad \mathcal{R}'(x, y, z, t) = \langle R'(x, y)z, t \rangle.$$

Sejam $x, y \in E$ são vetores linearmente independentes e considere,

$$K(\sigma) = \frac{\mathcal{R}(x, y, z, t)}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}, \quad K'(\sigma) = \frac{\mathcal{R}'(x, y, z, t)}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

em que σ é o espaço gerado por x e y . Se para todo $\sigma \subset E$, $K(\sigma) = K'(\sigma)$. Então, $R = R'$.

Demonstração: Veja o Capítulo 4 da referência [4]. ■

Existem outros tipos notáveis de curvaturas que podem ser obtidas através de traços do tensor de curvatura, as quais serão fortemente utilizadas durante os resultados apresentados neste trabalho.

Definição 1.9. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n . O **tensor curvatura de Ricci** de M (ou tensor de Ricci), denotado por Ric , é dado por

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{tr}\{Z \longrightarrow R(Z, X)Y\},$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Considerando um sistema de coordenadas, temos que as componentes do tensor de Ricci são dadas por

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^n R_{kij}^k = \sum_{k,m=1}^n g^{km} R_{kijm},$$

em que g^{km} são as componentes da inversa da métrica g .

Observação 1.5. Por meio das propriedades do tensor curvatura, Proposição [1.2](#), não é difícil verificar que o tensor curvatura de Ricci é simétrico, isto é, $R_{ij} = R_{ji}$.

Doravante, vamos definir a curvatura escalar.

Definição 1.10. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Definimos a **curvatura escalar** de M , denotada por R , como a função $R \in \mathfrak{D}(M)$ dada pelo traço do tensor de Ricci com respeito a métrica g , ou seja, se $x \in M$, temos que

$$R(x) = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij}.$$

Em dimensão 3, existe uma importante relação entre os tensores de curvatura, que é uma consequência da Proposição [1.3](#). Especificamente, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.4. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 3. Então, as componentes do tensor curvatura podem ser descritas da seguinte forma

$$R_{ijkl} = g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} - g_{jk}R_{il} + g_{jl}R_{ik} - \frac{1}{2}R(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}).$$

Demonstração: Primeiramente, considere

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - g_{ik}R_{jl} + g_{il}R_{jk} + g_{jk}R_{il} - g_{jl}R_{ik} + \frac{1}{2}R(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) = 0.$$

Através de alguns cálculos, não é difícil mostrar que o tensor W_{ijkl} satisfaz todas as condições da Proposição [1.2](#). Além disso, considerando uma base ortonormal no espaço tangente a M , digamos $\{e_1, e_2, e_3\}$. Observe que, nesta base, para $i \neq j$, $i \neq k$ e $j \neq k$

obtemos

$$\begin{aligned}
 W_{ijij} &= R_{ijij} - g_{ii}R_{jj} + g_{ij}R_{jj} + g_{ij}R_{ji} - g_{jj}R_{ii} + \frac{1}{2}R(g_{ii}g_{jj} - g_{ij}g_{ji}) \\
 &= R_{ijij} - R_{jj} - R_{ii} + \frac{1}{2}R \\
 &= R_{ijij} - R_{jj} - R_{ii} + \frac{1}{2}(R_{ii} + R_{jj} + R_{kk}) \\
 &= R_{ijij} + \left(\frac{-R_{jj} - R_{ii} + R_{kk}}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\left(\frac{-R_{jj} - R_{ii} + R_{kk}}{2} \right) = -R_{ijij},$$

temos $W_{ijij} = 0$. Assim, as curvaturas seccionais com relação aos vetores da base $\{e_1, e_2, e_3\}$, dois a dois diferentes, são nulas. Portanto, pela Proposição [1.3](#), concluímos

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - g_{ik}R_{jl} + g_{il}R_{jk} + g_{jk}R_{il} - g_{jl}R_{ik} + \frac{1}{2}R(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) = 0,$$

ou seja,

$$R_{ijkl} = g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} - g_{jk}R_{il} + g_{jl}R_{ik} - \frac{1}{2}R(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação 1.6. As componentes W_{ijkl} , definidas durante a demonstração anterior, são conhecidas como as componentes do Tensor de Weyl. Assim, o resultado acima garante que as componentes do tensor de Weyl se anulam no caso tridimensional.

1.1.2 Geometria extrínseca: imersões isométricas e a segunda forma fundamental

Agora, vamos apresentar a noção da segunda forma fundamental, a fim de definirmos a curvatura média. O propósito é generalizar a caracterização de segunda forma fundamental proveniente do estudo das superfícies. Para tanto, vamos considerar $f : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão, onde M é uma variedade diferenciável de dimensão n e $\bar{M}$ é uma variedade Riemanniana de dimensão $n + k$. Sabemos que, f induz uma métrica sobre M , a métrica pullback (ver Definição [1.3](#)). Além disso, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p , de modo que $f(U) \subset \bar{M}$ é uma subvariedade de $\bar{M}$. Então, existe uma vizinhança $\bar{U}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \bar{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do $\mathbb{R}^k$, tal que φ aplica $f(U) \cap \bar{U}$ num aberto do subespaço $\mathbb{R}^n$. Por simplicidade e a fim de considerarmos determinadas extensões, identificamos U com $f(U)$ e cada $v \in T_q M$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)} \bar{M}$. Por meio do difeomorfismo φ ,

podemos estender um campo vetorial definido em U para um campo em $\overline{U}$. Ademais, para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ garante a seguinte decomposição:

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$$

em que $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Desse modo, se $v \in T_p\overline{M}$, então

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_pM, \quad v^N \in (T_pM)^\perp$$

onde v^T e v^N são as componentes tangencial e normal de v , respectivamente. Denotaremos por $\mathfrak{X}(U)^\perp$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U)$ ou simplesmente U .

Agora vamos definir a segunda forma fundamental da imersão f . Para tanto, sejam ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões Riemannianas de M e $\overline{M}$, respectivamente. Considere X, Y campos de vetores locais de M , o campo definidor por

$$\hat{A}(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M . No Capítulo 6 de [4], verifica-se que $\hat{A}(X, Y)$ está bem definida, ou seja, não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$. Além disso, $\hat{A} : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$, como definida acima, é uma aplicação bilinear e simétrica. Dessa forma, considerando $p \in M$ e $n \in (T_pM)^\perp$, a aplicação $A : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$A_n(x, y) = \langle \hat{A}(x, y), n \rangle \quad x, y \in T_pM$$

é também uma forma bilinear simétrica. Definimos a **segunda forma fundamental** de f em p segundo o vetor normal n pela aplicação $A : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$A(x) = A_n(x, x).$$

Às vezes também chamamos de segunda forma fundamental a aplicação $\hat{A}$. Como A_n é uma forma bilinear, então associamos uma aplicação linear auto-adjunta $S_n : T_pM \rightarrow T_pM$ tal que

$$\langle S_n(x), y \rangle = \langle \hat{A}(x, y), n \rangle.$$

Além disso, pode-se verificar que, se considerarmos $p \in M$, $x \in T_pM$, $n \in (T_pM)^\perp$ e N uma extensão local de n a M . Então,

$$S_n(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T,$$

em que $\bar{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\bar{M}$.

Observação 1.7. Um caso interessante e que se enquadra nas situações que serão abordadas nos próximos capítulos, é quando a codimensão da imersão f é $k = 1$, ou seja, $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$. Neste caso, $f(M) \subset \bar{M}$ é denominada hipersuperfície. Sendo assim, considere $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$ um vetor unitário e uma base ortonormal de vetores $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$. Definimos a **curvatura de Gauss-Kronecker** da imersão f por

$$K = \det(A(e_i, e_i)).$$

E a **curvatura média** como

$$H = \text{tr} A = \sum_{i=1}^n A(e_i, e_i),$$

onde o traço analisado acima é com respeito a métrica g .

Além disso, ao longo dos próximos capítulos, vamos utilizar as fórmulas de Minkowski, as quais envolvem as integrais das curvaturas definidas acima. Mais especificamente, temos as seguintes relações:

Proposição 1.5. (Fórmulas Integrais de Minkowski). Sejam S uma superfície compacta e orientável em $\mathbb{R}^3$ e $p \in S$. Então valem as seguintes fórmulas:

- i) $\int_S H_0(p) n(p) \cdot p dS = 2 \int_S dS;$
- ii) $\int_S H_0(p) dS = 2 \int_S K(p) n(p) \cdot p dS,$

Em que $\cdot$ é o produto interno em $\mathbb{R}^3$, $n(p)$ o vetor externo normal unitário a S em p e dS é o elemento de área. Além disso, H_0 e K são as curvaturas média e gaussiana, respectivamente.

Para o leitor interessado em mais detalhes referente a este resultado sugerimos o Capítulo 6 do livro do Klingenberg [12].

1.1.3 Operadores em variedades Riemannianas

Ao longo deste trabalho utilizaremos alguns operadores como o gradiente e o laplaciano. Os quais já são comumente utilizados em contextos Euclidianos, porém, por meio da derivada covariante, também se estendem às variedades diferenciáveis, como veremos a seguir.

Definição 1.11. Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o **gradiente** de f , denotado por $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$, como

$$\langle \nabla f, X \rangle = df(X) = X(f), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Agora, considere a conexão Riemanniana ∇ de M , definimos a **divergência** de X como a função diferenciável $div : M \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$divX(p) = tr\{v \rightarrow \nabla_v X(p)\}.$$

Posto isto, temos a seguinte caracterização:

Definição 1.12. Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O **laplaciano** de f é a função $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Vale destacar que as propriedades de derivação conhecidas para estes operadores nos espaços euclidianos são validas também neste contexto.

1.1.4 Geodésicas; Vizinhanças normais e Campos de Jacobi

No último capítulo, utilizaremos fortemente a noções de coordenadas normais. Dessa forma, necessitamos compreender alguns conceitos e resultados a respeito das curvas geodésicas, os quais apresentaremos a seguir.

Definição 1.13. Seja M uma variedade Riemanniana. A curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ é dita **uma geodésica** quando

$$\frac{D\gamma'}{dt}(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Observação 1.8. Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, a restrição $\gamma|_{[a,b]}$ é chamada de segmento de geodésica ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$. Além disso, por abuso de linguagem, é conveniente chamarmos de geodésica à imagem $\gamma(I)$ de uma geodésica γ .

Concisamente, uma geodésica é uma curva na qual o campo velocidade é paralelo ao longo da curva. Pode-se verificar facilmente geodésica são curvas com o comprimento do vetor velocidade constante. Especificamente, se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, então

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt}(\gamma'(t)), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

ou seja, $|\gamma'(t)| = c$, com c constante. Em particular, quando $c = 1$, a geodésica é dita normalizada. Além disso, supomos que $|\gamma'(t)| \neq 0$, pois não consideramos os casos degenerados, cuja geodésicas se reduzem a um ponto. Dessa forma, definimos o comprimento de arco s de γ a partir de um parâmetro fixo $t = t_0$ como

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'| dt = c(t - t_0).$$

Toda geodésica pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco para se tornar uma geodésica normalizada. Podemos garantir também a existência e unicidade de geodésicas. Precisamente, consideramos uma variedade Riemanniana M e temos que para todo $p \in M$, $v \in T_p M$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, existem um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, com $t_0 \in I$ e uma geodésica $\gamma : I \rightarrow M$, tal que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma'(t_0) = v$. Ao leitor interessado em detalhes dessas afirmações indicamos o Capítulo 3 de [4].

Agora, vamos definir a aplicação exponencial que será de fundamental importância para o estudo das coordenadas normais. Mas antes, vamos citar algumas afirmações, as quais podem ser encontradas no livro do Carmo [4] e que nos auxiliarão na compreensão da caracterização da aplicação exponencial. Sendo assim, considere M uma variedade diferenciável, V uma vizinhança de um ponto $p \in M$ e X é um campo C^∞ . Então, existem um aberto $V_0 \subset V$, com $p \in V_0$ e uma aplicação diferenciável

$$\varphi : (-\delta, \delta) \times V_0 \rightarrow V$$

para algum $\delta > 0$ tais que para cada $q \in V_0$ $\varphi_q(t) = \varphi(t, q) : (-\delta, \delta) \rightarrow V$ é a única trajetória do campo X tal que $\varphi(0, q) = q$. Sendo assim, está bem definido o campo geodésico em TM , que sucintamente é o único campo cujas trajetórias são da forma $t \rightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$, em que γ é uma geodésica de M . De modo geral, a aplicação φ é chamada de fluxo geodésico do fibrado tangente TM . Por conseguinte, existem uma vizinhança U de p e constantes $\delta, \varepsilon > 0$, bem como, uma aplicação diferenciável

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow M$$

em que

$$U = \{(q, v); q \in V \text{ e } v \in T_q M, |v| < \varepsilon\},$$

tais que a curva $t \rightarrow \gamma(t, q, v)$, com $t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que satisfaz as condições $\gamma(0) = q$, $\gamma'(0) = v$, para todo $q \in V$ e $v \in T_q M$, no qual $|v| < \varepsilon$. Além disso, por meio de reparametrizações, se diminuirmos o intervalo podemos aumentar a velocidade da geodésica. Em verdade, temos a seguinte propriedade de homogeneidade

de uma geodésica.

Proposição 1.6. Se a geodésica $\gamma(t, q, v)$ está definida no intervalo $(-\delta, \delta)$. Então, a geodésica $\gamma(t, q, \alpha v)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, está definida no intervalo $(-\frac{\delta}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha})$ e

$$\gamma(t, q, \alpha v) = \gamma(\alpha t, q, v).$$

Como consequência dos resultados elencados acima temos o próximo corolário, o qual permite aumentar, uniformemente, o intervalo da definição de geodésica (Ver Definição [1.13](#)) numa vizinhança de p .

Corolário 1.7. Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M , $\varepsilon > 0$ e uma aplicação diferenciável

$$\gamma : (-2, 2) \times U \longrightarrow M$$

donde

$$U = \{(q, v); q \in V \text{ e } v \in T_q M, |v| < \varepsilon\},$$

tais que $t \longrightarrow \gamma(t, q, w)$, $t \in (-2, 2)$ é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade w , para cada $q \in V$ e cada $w \in T_q M$, com $|w| < \varepsilon$.

De posse deste resultado, podemos considerar a seguinte definição.

Definição 1.14. Sejam M uma variedade Riemanniana e $v \in T_q M$, com $q \in M$. Considere o aberto U como no Corolário [1.7](#), a aplicação $exp : U \longrightarrow M$ dada por

$$exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right)$$

é denominada aplicação **exponencial**.

Observação 1.9. Observe que existem outras formas restritas de considerar a aplicação exponencial. Na maior parte do tempo, vamos utilizar a restrição da aplicação exponencial a um espaço tangente $T_q M$. Mais especificamente, definimos a aplicação exponencial

$$exp_q(v) : B_\varepsilon(0) \longrightarrow M$$

por $exp_q(v) = exp(q, v)$. Onde $B_\varepsilon(0)$ é a bola aberta de raio ε centrada na origem do espaço tangente $T_q M$. Evidentemente, a aplicação exponencial é diferenciável e, além disso, $exp_q(0) = q$.

Um propriedade fundamental da aplicação exponencial é a proposição a seguir, a qual garante, sob certas condições, que existe uma vizinhança de um espaço tangente de modo que a exponencial é um difeomorfismo deste aberto sobre um aberto de M . Precisamente, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.8. Sejam M uma variedade Riemanniana e $q \in M$. Existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_q M \longrightarrow M$$

é um difeomorfismo sobre um aberto de M .

Demonstração: Segue diretamente das propriedades de derivação e do teorema da aplicação inversa. ■

Enfim, estamos prontos para definir uma vizinhança normal a qual é primordial para os estudos apresentados ao longo deste escrito.

Definição 1.15. Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Uma vizinhança V de p em M , onde existe uma vizinhança U da origem em $T_p M$, tal que a exponencial $\exp_p$ é um difeomorfismo de U sobre V é dita uma **vizinhança normal** de p .

Além disso, nas circunstâncias da definição acima, se $B_\varepsilon(0)$ é uma bola aberta centrada na origem de forma que seu fecho $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset U$, então denominamos $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ como a **bola geodésica** de centro p e raio ε , a qual de notamos por $B_\varepsilon(p)$. E a fronteira $\partial B_\varepsilon(p)$ de uma bola geodésica é dita uma **esfera geodésica** denotada por $S_\varepsilon(p)$. Quando pensamos em uma vizinhança de uma variedade M , é natural, relacionarmos à um sistema de coordenadas. Formalmente, sejam $V = \exp_p(U)$ uma vizinhança normal de p em M , $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$ e $\mathcal{I} : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_p M$ o isomorfismo natural $\mathcal{I}(x) = \sum x^i e_i$, com $x = (x^1, \dots, x^n)$. Considere a parametrização $\phi : \mathcal{I}^{-1}(U) \longrightarrow V$ dada por

$$\phi(x) = (\exp \circ \mathcal{I})(x) = \exp_p \left(\sum_{i=1}^n x^i e_i \right),$$

então as coordenadas da parametrização ϕ são denominadas **coordenadas normais** em p . Estas coordenadas estabelecem particularidades importantes, que utilizaremos no Capítulo 3. Mais especificamente, seja (M, g) uma variedade Riemanniana, em coordenadas normais, temos que

- i) $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$;
- ii) $\partial g_{ij}(p) = 0$;
- iii) $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.

em que ∂ é denota as derivadas parciais com respeito à estas coordenadas. Ao leitor interessado em tais propriedades indicamos [13].

A seguir apresentaremos caracterizações de uma variedade Riemanniana M completa, a qual concisamente permite definir a aplicação exponencial em todo espaço tangente. Especificamente, temos que

Definição 1.16. Seja M uma variedade Riemanniana. Dizemos que M é **geodesicamente completa** (ou simplesmente **completa**) quando para todo $p \in M$, a aplicação exponencial exp_p , está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.17. A distância entre dois pontos $p, q \in M$, denotada por $d(p, q)$, é o ínfimo do comprimento de todas as curvas diferenciáveis por partes que ligam p a q . Onde o comprimento de uma curva diferenciável $\alpha : [a, b] \rightarrow M$, que liga $\alpha(a) = p$ a $\alpha(b) = q$, é dado por

$$l_p^q(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

Observação 1.10. Sabemos que (M, d) é um espaço métrico. Além disso, a topologia induzida por d em M coincide com a topologia inicial de M (Veja o livro do Carmo [4]).

O resultado a seguir é um teorema relevante para o sentido de completude.

Teorema 1.9. (Teorema de Hopf- Rinow). *Uma variedade Riemanniana M é geodesicamente completa se, e somente se, (M, d) é completa como espaço métrico.*

Demonstração: Uma versão da demonstração deste resultado pode ser encontrada no Capítulo 7 do livro [4]. ■

De agora em diante, vamos compreender os campos de Jacobi, os quais são campos de vetores ao longo de geodésicas caracterizados por meio de uma equação diferencial e que surgem naturalmente no estudo da aplicação exponencial. Especificamente, temos a seguinte definição.

Definição 1.18. Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma geodésica. O campo vetorial J ao longo de γ que satisfaz a equação

$$\frac{D^2 J}{dt^2} = R(J, \gamma')\gamma'. \quad (1.3)$$

é denominado **campo de Jacobi** ao longo de γ . Além disso a equação acima é chamada de **equação de Jacobi**.

Assim, temos a seguinte proposição que garante a existência e unicidade de campos de Jacobi determinado por meio de suas condições iniciais.

Proposição 1.10. Sejam M uma variedade Riemanniana e $\gamma : I \rightarrow M$ uma geodésica. Dados $t_0 \in I$ e $V, W \in T_{\gamma(t_0)}M$, existe um único campo de Jacobi ao longo de γ de modo que

$$J(t_0) = V, \quad \frac{DJ}{dt}(t_0) = W.$$

Em particular, quando $J(0) = 0$ e

$$\frac{DJ}{dt}(0) = V = \sum_{i=1}^n V^i \partial_i.$$

Então,

$$J(t) = \sum_{i=1}^n t V^i \partial_i|_{\gamma(t)}.$$

1.2 Notações de limites assintóticos: O-grande e o-pequeno

Ao longo do texto utilizaremos determinadas notações, as quais, de modo geral, possuem informações sobre o comportamento assintótico de funções. Tanto no Capítulo 2 como na próxima seção, vamos trabalhar com a notação O-grande no seguinte sentido:

Definição 1.19. Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. A notação $f(x) = O(g(x))$ equivale a dizemos que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

para x suficientemente grande. Esta notação conhecida é denominada **Notação O-grande**.

Observação 1.11. Em alguns momentos vamos utilizar uma variação da notação definida acima, que denotamos de **notação o-pequeno** e é simbolizada por $f(x) = o(g(x))$. A qual exprime que para todo $\varepsilon > 0$

$$|f(x)| < \varepsilon|g(x)|,$$

desde que x seja suficientemente grande. Além disso, as notações $O(g(x))$ e $o(g(x))$ podem ser consideradas como o conjunto das funções f que satisfazem $f(x) = O(g(x))$ e $f(x) = o(g(x))$, respectivamente. Nessa perspectiva, segue direto da definição da notação O-grande que $o(g(x)) \subset O(g(x))$.

Geralmente, durante o Capítulo 2 e a seção de variedade assintoticamente plana, estaremos trabalhando com funções $f(r) = O(r^k)$, com $k < 0$. Logo, para r suficien-

temente grande, temos que $0 \leq |f(r)| \leq M|r|^k$, para alguma constante $M > 0$ ou, equivalentemente,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |f(r)| = 0.$$

A notação O-grande $f(x) = O(g(x))$ também pode ser utilizada para representar o comportamento de f perto de algum número real. Mais especificamente, temos a seguinte definição:

Definição 1.20. Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. A notação $f(x) = O(g(x))$ equivale a dizermos que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M|g(x)|,$$

para x suficientemente próximo de um valor $a \in \mathbb{R}$.

Observação 1.12. No Capítulo 3 utilizaremos uma variação da notação da definição anterior. Efetivamente, a notação $f(r) = O(r^m)$, para r suficientemente próximo de 0 e com $m \in \mathbb{Z}$, equivale ao seguinte limite:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r)}{r^{m-1}} = 0.$$

Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(r) = r^3$ pertence ao conjunto das funções $O(r^3)$, pois

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r = 0.$$

Ademais, denotamos por $O(1)$ é o conjunto das funções constantes ou limitadas.

Agora, vamos apresentar algumas propriedades referentes às notações definidas acima. Vale destacar que estas propriedades serão ferramentas utilizadas ao longo das demonstrações dos próximos capítulos. Por simplicidade, vamos enunciar tais resultados utilizando a noção O-grande, sendo válidas para todas as definições anteriores.

Proposição 1.11. Sejam f_1, f_2, g_1 e g_2 funções definidas em $\mathbb{R}^n$. Então temos as seguintes propriedades:

- i) Se $f_1(x) = O(g_1(x))$ e C é uma constante não-nula, então $Cf_1(x) = O(g_1(x))$;
- ii) Se $f_1(x) = O(g_1(x))$ e $f_2(x) = O(g_2(x))$, então $f_1(x)f_2(x) = O(g_1(x)g_2(x))$;
- iii) $f_1(x)O(g_1(x)) = O(f_1(x)g_1(x))$.

Demonstração: As demonstrações dessas propriedades seguem imediatamente da definição. ■

Observação 1.13. Ao decorrer do nosso estudos, utilizaremos a notação $f(r) = O_k(r^\alpha)$, com $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, que concisamente indica condições de decaimento sobre a ordem das derivadas. Por exemplo, se f é uma função diferenciável, tal que $f(r) = O_2(r^\alpha)$. Então, temos que

$$f(r) = O(r^\alpha), \quad \partial f(r) = O(r^{\alpha-1}) \quad \text{e} \quad \partial\partial f(r) = O(r^{\alpha-2})$$

donde ∂ é o operador derivada parcial.

1.3 Variedades assintoticamente planas

A partir desse momento, apresentaremos o conceito de variedade assintoticamente plana, o qual vamos utilizar ao logo do texto. De forma sucinta, as variedades assintoticamente planas são variedades Riemannianas que, a menos de um compacto, são espaços difeomorfos ao complementar de uma bola fechada em $\mathbb{R}^3$, no qual a métrica se aproxima da métrica euclidiana no infinito. Formalmente, temos a seguinte definição de variedade assintoticamente plana:

Definição 1.21. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa de dimensão 3. Dizemos que (M, g) é uma **variedade assintoticamente plana** de ordem τ com um fim se existem um compacto $K \subset M$ e um difeomorfismo $\phi : M \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$, tais que nas coordenadas induzidas por ϕ , denotadas por $x = (x_1, x_2, x_3)$, tem-se

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \sigma_{ij}$$

com $\sigma_{ij} = g_{ij} - \delta_{ij} = O_3(r^{-\tau})$ ou, equivalentemente,

$$|\sigma_{ij}| + r|\partial\sigma_{ij}| + r^2|\partial\partial\sigma_{ij}| + r^3|\partial\partial\partial\sigma_{ij}| = O(r^{-\tau}),$$

para alguma constante $\frac{1}{2} < \tau \leq 1$. Em que $|x| = r$ e ∂ denota as derivadas parciais em $\mathbb{R}^3$ com respeito ao sistema de coordenadas x_i , denotado por sistema de coordenadas admissíveis.

Observação 1.14. Vale destacar que a definição anterior pode ser considerada para uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$. Contudo, nesta dissertação trabalharemos com variedades assintoticamente planas de dimensão 3. Além disso, estamos considerando o caso de uma variedade Riemanniana com um fim. Contudo, podemos caracterizar de maneira mais geral uma variedade assintoticamente plana com r fins de forma que existe um compacto K , tal que $M \setminus K$ é a união finita de fins $M_1, \dots, M_r$,

donde para cada M_r existe um difeomorfismo $\phi_r : M_r \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus B_{R_r}(0)$ e nas coordenadas induzidas por ϕ_r temos as mesmas condições acima para a métrica.

Exemplo 1.2. O exemplo mais simples de variedade assintoticamente plana é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ munido com a métrica euclidiana usual δ .

Exemplo 1.3. Outro exemplo de variedade assintoticamente plana é a variedade de *Schwarzschild* de dimensão 3 e ordem $\tau = 1$, dada por $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ munida com a métrica

$$g = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \delta,$$

onde $m > 0$ é uma constante e $r = |x|$ é a distância euclidiana do ponto $x \in \mathbb{R}^3$ à origem.

As particularidades de uma variedade assintoticamente plana acarretam condições de decaimento para algumas estruturas geométricas que nos auxiliarão ao longo deste trabalho e que apresentaremos a seguir.

Proposição 1.12. Seja (M, g) uma variedade assintoticamente plana de ordem τ . Então,

- i) $g^{ij} = \delta_{ij} + O_1(r^{-\tau})$;
- ii) $\Gamma_{ij}^k = O_1(r^{-\tau-1})$.

em que g^{ij} são expressões da inversa da métrica g .

Demonstração: Não é difícil provar tais resultados. O primeiro item, segue das propriedades de inversa e das condições de decaimento da métrica g da Definição [1.21](#). Por outro lado, o último item, segue da Definição [1.21](#) e da expressão clássica dos símbolos de Christoffel, analisadas em [\(1.2\)](#). ■

1.4 Massa ADM e algumas massas quasi-locais

Como já mencionado, um dos resultados centrais analisados nesse escrito, relacionam a massa quasi-local de Brown-York de esferas com raios suficientemente grandes com a massa ADM de uma variedade assintoticamente plana. Nesta seção, definiremos precisamente estes entes utilizados em nosso trabalho.

1.4.1 A massa de Arnowitt-Deser-Misner (ADM)

Definição 1.22. A massa de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) de um variedade assintoticamente plana M é dada por

$$m_{ADM}(M) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j d\Sigma_r^0$$

em que S_r é a esfera euclidiana com raio r centro no origem, $d\Sigma_r^0$ é o elemento de área induzido pela métrica euclidiana, ν^j são as coordenadas do vetor normal externo de S_r em $\mathbb{R}^3$ e $g_{ij,i}$ e $g_{ii,j}$ são as derivadas parciais das componentes da métrica.

Observação 1.15. Tendo em vista a definição acima é natural nos questionarmos sobre as condições impostas sobre existência do limite acima, neste sentido estamos assumindo que a curvatura escalar está em $L^1(M)$ de modo que este limite exista. Além disso, vale destacar que por meio de um resultado do Bartnik [2] temos que a definição de massa ADM independe da escolha das coordenadas admissíveis que satisfaçam a condição de decaimento da definição de massa ADM.

Em seguida, enunciaremos uma versão de um importante e notável resultado para a Geometria Riemanniana e a Relatividade Geral: O Teorema da Massa Positiva. Em que, sob certas condições, a massa ADM é não-negativa.

Teorema 1.13. (Teorema da Massa Positiva). *Seja (M, g) uma variedade assintoticamente plana de dimensão 3. Se a curvatura escalar é não-negativa. Então,*

$$m_{ADM}(M) \geq 0.$$

Em particular, $m_{ADM}(M) = 0$ se, e somente se, (M, g) é isométrica ao $(\mathbb{R}^3, \delta)$, onde δ é a métrica euclidiana.

Demonstração: Uma versão da demonstração deste teorema foi apresentada por Schoen e Yau [19]. ■

Este resultado será de fundamental importância na demonstração dos principais resultados apresentados durante os próximos capítulos. Destacamos que existem versões deste teorema para dimensões maiores, mas dado a natureza deste trabalho não mencionaremos.

1.4.2 Algumas massas quasi-locais

Agora, vamos elencar a caracterizações das massas quasi-locais utilizadas ao longo do nosso trabalho, as quais se relacionam com a massa ADM.

Definição 1.23. Seja (Ω, g) uma variedade compacta de dimensão 3 com fronteira $\partial\Omega$ suave, tal que a curvatura Gaussiana de $\partial\Omega$ é positiva. A massa quasi-local de Brown-York de $\partial\Omega$ é dada por

$$m_{BY}(\partial\Omega) = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Omega} (H_0 - H) d\Sigma,$$

em que H é a curvatura média de $\partial\Omega$ com respeito ao vetor normal externo e unitário a métrica g , $d\Sigma$ é o elemento de área induzido em $\partial\Omega$ por g e H_0 é a curvatura média de $\partial\Omega$ em relação ao vetor normal externo unitário quando $\partial\Omega$ é mergulhado em $\mathbb{R}^3$.

Observação 1.16. A massa de Brown-York está bem definida mediante a um resultado apresentado por Nirenberg [15] (1953, p. 353), o qual assegura que $\partial\Omega$ pode ser mergulhada isometricamente em $\mathbb{R}^3$. Com unicidade garantida por Cohn-Vossen [6] (ou ainda [10, 17, 18]). No estudo da massa de Brown-York, uma das dificuldades é estimar

$$\int_{\partial\Omega} H_0 d\Sigma.$$

Para tanto, usaremos as fórmulas integrais de Minkowski, dadas na Proposição 1.5, e as estimativas de Nirenberg [15], que garantem a existência dos mergulhos isométricos.

Agora apresentaremos a massa isoperimétrica introduzida por Huisken [11] que, como veremos, se relaciona com a massa ADM de uma variedade assintoticamente plana.

Definição 1.24. Seja (M, g) uma variedade assintoticamente plana. A *massa isoperimétrica* de M é dada por

$$m_{ISO}(M) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{2}{\mathcal{A}(r)} \left(V(r) - \frac{1}{6\pi^{\frac{1}{2}}} \mathcal{A}^{\frac{3}{2}}(r) \right)$$

onde $V(r)$ é o volume do interior da esfera S_r em relação a métrica g e $\mathcal{A}(r)$ é área de das esferas coordenadas S_r em relação a métrica g .

Outra importante massa quasi-local é a massa de Hawking [9] que definimos a seguir.

Definição 1.25. Sejam (Ω, g) uma variedade de dimensão 3 com fronteira $\partial\Omega$ suave e H a curvatura média de $\partial\Omega$ com respeito ao vetor normal externo unitário. A *massa de Hawking* é dada por

$$m_H(\partial\Omega) = \frac{|\partial\Omega|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(16\pi - \int_{\partial\Omega} H^2 d\Sigma \right),$$

onde $d\Sigma$ é o elemento de área induzido em $\partial\Omega$ por g e $|\partial\Omega|$ é a área de $\partial\Omega$.

Capítulo 2

Limite da Massa de Brown-York de esferas com raios suficientemente grande

O objetivo deste capítulo é demonstrar um relevante e interessante resultado que estudamos através do artigo de X.-Q. Fan, Y. Shi, L.-F. Tam [7], o qual compara a massa de Brown-York de esferas, com raios suficientemente grandes, com a massa ADM de uma variedade assintoticamente plana. Mais especificamente, vamos provar que se (M, g) é uma variedade assintoticamente plana de ordem $\tau > \frac{1}{2}$ com coordenadas $x = (x^1, x^2, x^3)$, de modo que g_{ij} satisfaçam as condições de decaimento da Definição 1.21 e $S_r = \{x; |x|_g = r\}$ são esferas coordenadas. Então,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m_{BY}(S_r) = m_{ADM}(M).$$

Para tanto, necessitamos de alguns resultados prévios que nos dizem informações sobre decaimentos de alguns objetos geométricos.

Observação 2.1. Ao longo dos Capítulos 2 e 3 utilizaremos, por simplicidade, a notação de Einstein, a qual omite o símbolo de somatório. Onde, os índices que se repetem uma vez em um mesmo termo indica a soma que está sendo realizada.

2.1 Decaimento de algumas estruturas geométricas

A fim de analisarmos a segunda forma fundamental das esferas coordenadas S_r , abordadas no início deste capítulo. Vamos inicialmente estudar o vetor normal desta

imersão. Dessa forma, considere o vetor normal das esferas coordenadas,

$$n = n^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\nabla r}{|\nabla r|}, \quad (2.1)$$

em que,

$$r = \left(\sum_{i=1}^3 (x^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

e n é o vetor normal externo unitário. Observe que em (2.1) utilizamos a notação de Einstein para somatórios, abordada anteriormente. Doravante, tal convenção será utilizada de maneira natural, a fim de facilitar os cálculos.

Ademais, pela definição de gradiente, podemos determinar os coeficientes n^i . Com efeito, sabe-se que

$$\left\langle \nabla r, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \frac{\partial r}{\partial x^i}. \quad (2.3)$$

Por outro lado, não é difícil perceber de (2.2) que para cada i , tem-se

$$\frac{\partial r}{\partial x^i} = \frac{x^i}{r}. \quad (2.4)$$

Daí, por (2.1), (2.3) e (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x^j}{r} &= \left\langle \nabla r, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \\ &= \left\langle |\nabla r| n^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \\ &= |\nabla r| n^i \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \\ &= |\nabla r| n^i g_{ij}. \end{aligned}$$

Então,

$$n^i g_{ij} = \frac{x^j}{r |\nabla r|}.$$

Daí,

$$n^i g_{ij} g^{ij} = \frac{x^j g^{ij}}{r |\nabla r|}.$$

Logo,

$$n^i = \frac{x^j g^{ij}}{r |\nabla r|}. \quad (2.5)$$

Além disso, considerando $n_i = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, n \right\rangle$ e substituindo em (2.1), obtemos

$$n_i = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, n^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = g_{ij} n^j.$$

Portanto, substituindo (2.5) na igualdade acima, tem-se

$$n_i = \frac{x^i}{r |\nabla r|}. \quad (2.6)$$

Para o que segue, recordemos que a métrica induzida sob S_r é

$$h_{ij} = g_{ij} - n_i n_j \quad (2.7)$$

e a segunda forma fundamental é

$$A_{ij} = h_i^k h_j^l n_{k;l}, \quad (2.8)$$

em que $n_{k;l}$ é a derivada covariante de n_k com respeito a g .

A partir de agora, vamos explicitar o decaimento da segunda forma fundamental A_{ij} , a fim de terminarmos decaimentos para as curvatura de Gauss e a curvatura média.

Lema 2.1. Sejam (M, g) uma variedade assintoticamente plana de dimensão 3 e S_r as esferas coordenadas consideradas anteriormente. Então temos os seguintes decaimentos da segunda forma fundamental

$$A_{ij} = \frac{h_{ij}}{r} + O(r^{-1-\tau}).$$

Demonstração: De (2.1) sabemos que

$$\nabla r = |\nabla r| n$$

Logo,

$$\nabla r = \frac{x^i g^{ij}}{r} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

assim,

$$\begin{aligned}
 |\nabla r|^2 &= g(\nabla r, \nabla r), \\
 &= g\left(\frac{x^j g^{ij}}{r} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{x^i g^{ij}}{r} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
 &= \frac{x^j x^i (g^{ij})^2}{r^2} g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
 &= \frac{x^j x^i (g^{ij})^2}{r^2} g_{ij} \\
 &= \frac{x^j x^i (g^{ij})^2 g_{ij}}{r^2} \\
 &= \frac{x^j x^i g^{ij} \delta_{ii}}{r^2}.
 \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$|\nabla r|^2 = \frac{x^j x^i g^{ij}}{r^2}. \quad (2.9)$$

Por outro lado, $x^i = O(r)$, uma vez que

$$|x^i| = \sqrt{(x^i)^2} \leq \left(\sum_{i=1}^3 (x^i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = r.$$

Além disso, como estamos trabalhando numa variedade assintoticamente plana, temos que

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \sigma_{ij},$$

em que $\sigma_{ij} = O(r^{-\tau})$, com $1 \geq \tau > \frac{1}{2}$. E como analisamos na Proposição [1.12](#), tem-se

$$g^{ij} = \delta_{ij} + O(r^{-\tau}).$$

Como,

$$g_{ij} g^{ii} = \delta_{ij} g^{ii} + \sigma_{ij} g^{ii}.$$

Temos,

$$\begin{aligned}
 g^{ij} &= \delta_{ij} - \sigma_{ij} g^{ii} \\
 &= \delta_{ij} - \sigma_{ij} (1 + O(r^{-\tau})) \\
 &= \delta_{ij} - \sigma_{ij} - \sigma_{ij} O(r^{-\tau}).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$g^{ij} = \delta_{ij} - \sigma_{ij} + O(r^{-2\tau}). \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) em (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla r|^2 &= \frac{x^i x^j}{r^2} (\delta_{ij} - \sigma_{ij} + O(r^{-2\tau})) \\ &= \frac{x^i x^j}{r^2} \delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2} \sigma_{ij} + \frac{x^i x^j}{r^2} O(r^{-2\tau}) \\ &= \frac{x^i x^j}{r^2} \delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2} \sigma_{ij} + O(r^{-2\tau}), \end{aligned}$$

pois, $x^k = O(r)$ e $r^{-2} = O(r^{-2})$. Daí,

$$\frac{x^i x^j}{r^2} = O(1).$$

Note ainda que,

$$x^i x^j \delta_{ij} = \delta \left(x^i \frac{\partial}{\partial x^i}, x^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta(x, x) = r^2. \quad (2.11)$$

Sendo assim,

$$|\nabla r|^2 = 1 - \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} + O(r^{-2\tau}). \quad (2.12)$$

Em particular,

$$|\nabla r|^2 = 1 + O(r^{-\tau}) \quad (2.13)$$

uma vez que, $\frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} = O(r^{-\tau})$. Por outro lado, de (2.9), (2.11) e da regra do produto, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} (|\nabla r|^2) &= \frac{\partial}{\partial x^k} (g^{ij}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left[1 + (g^{ij} - \delta_{ij}) \frac{x^i x^j}{r^2} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} (g^{ij} - \delta_{ij}) \left(\frac{x^i x^j}{r^2} \right) + (g^{ij} - \delta_{ij}) \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{x^i x^j}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Além disso, das condições de decaimento da Definição 1.21, temos que

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (g^{ij} - \delta_{ij}) = O(r^{-\tau-1}). \quad (2.14)$$

E não é difícil perceber que

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{x^l}{r} \right) = \frac{\delta_{kl}}{r} - \frac{x^k x^l}{r^3} = O(r^{-1}). \quad (2.15)$$

Logo, de (2.14) e (2.15), obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x^k} (|\nabla r|^2) &= \frac{\partial}{\partial x^k} (g^{ij} - \delta_{ij}) \left(\frac{x^i x^j}{r^2} \right) + (g^{ij} - \delta_{ij}) \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{x^i x^j}{r^2} \right) \\
 &= O(r^{-\tau-1}) + (g^{ij} - \delta_{ij}) \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{x^i}{r} \right) \frac{x^j}{r} + \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{x^j}{r} \right) \frac{x^i}{r} \right] \\
 &= O(r^{-\tau-1}) + O(r^{-\tau}) O(r^{-1}) \\
 &= O(r^{-\tau-1}).
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Então,

$$|\nabla r|^2 = 1 + O_1(r^{-\tau}). \tag{2.17}$$

Observe também que,

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} + O(r^{-2\tau}) \right)^2 &= 1 + \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} \right)^2 + (O(r^{-2\tau}))^2 + 2 \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} \right) \\
 &\quad + 2O(r^{-2\tau}) + 2 \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} \right) O(r^{-2\tau}) \\
 &= 1 - \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} + O(r^{-2\tau}) + O(r^{-3\tau}) + O(r^{-4\tau}) \\
 &= 1 - \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} + O(r^{-2\tau}).
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Daí, comparando (2.18) com (2.12), obtemos

$$|\nabla r| = 1 - \frac{1}{2} \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} + O(r^{-2\tau}). \tag{2.19}$$

Consequentemente,

$$|\nabla r| = 1 + O(r^{-\tau}). \tag{2.20}$$

Como τ é positivo, temos que para r suficientemente grande $O(r^{-\tau}) = 0$, então

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\nabla r| = 1.$$

Assim,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|\nabla r|} = 1,$$

ou seja,

$$\frac{1}{|\nabla r|} = O(1). \tag{2.21}$$

Agora, multiplicando (2.20) por $\frac{1}{|\nabla r|}$ e substituindo (2.21), tem-se

$$\frac{1}{|\nabla r|} = 1 + O(r^{-\tau}). \quad (2.22)$$

Desse modo, utilizando (2.6), (2.22) e o fato que $x^i = O(r)$, obtemos

$$n_i = \frac{x^i}{r|\nabla r|} = \frac{x^i}{r} + O(r^{-\tau}). \quad (2.23)$$

Observe que,

$$\begin{aligned} n_{i;j} &= \frac{\partial n_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k n_k \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{x^i}{r|\nabla r|} \right) - \Gamma_{ij}^k n_k \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{x^i}{r} \right) \frac{1}{|\nabla r|} + \frac{x^i}{r} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{|\nabla r|} \right) - \Gamma_{ij}^k n_k. \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos da Proposição 1.12 que $\Gamma_{ij}^k = O(r^{-\tau-1})$. Além disso, por (2.23), percebemos que $n_k = O(1)$, então

$$n_{i;j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{x^i}{r} \right) \frac{1}{|\nabla r|} + \frac{x^i}{r} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{|\nabla r|} \right) + O(r^{-\tau-1}).$$

E por (2.15) e (2.22) temos que,

$$\begin{aligned} n_{i;j} &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{x^i}{r} \right) \frac{1}{|\nabla r|} + \frac{x^i}{r} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{|\nabla r|} \right) + O(r^{-\tau-1}) \\ &= \left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x^i x^j}{r^3} \right) (1 + O(r^{-\tau})) + \frac{x^i}{r} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{|\nabla r|} \right) + O(r^{-\tau-1}) \\ &= \left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x^i x^j}{r^3} \right) + \frac{x^i}{r} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{|\nabla r|} \right) + O(r^{-\tau-1}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Mas, pelas regras de derivação, observamos que,

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{|\nabla r|} \right) = -\frac{1}{|\nabla r|^2} \frac{\partial}{\partial x^j} (|\nabla r|). \quad (2.25)$$

Além disso, pela regra da cadeia e por (2.16), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (|\nabla r|^2) = 2|\nabla r| \frac{\partial}{\partial x^j} (|\nabla r|) = O(r^{-\tau-1}).$$

Ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(|\nabla r|) = \frac{1}{2|\nabla r|}O(r^{-\tau-1}).$$

Por (2.21) temos que $\frac{\partial}{\partial x^j}(|\nabla r|) = O(r^{-\tau-1})$. Então, por (2.24), concluímos que

$$n_{i;j} = \left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x^i x^j}{r^3} \right) + O(r^{-\tau-1}). \quad (2.26)$$

Ademais, de (2.7), (2.6) e da Definição 1.21, tem-se

$$h_{ij} = \delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2 |\nabla r|^2} + O(r^{-\tau}). \quad (2.27)$$

Por outro lado, de (2.22) não é difícil verificar que

$$\frac{1}{|\nabla r|^2} = 1 + O(r^{-\tau}). \quad (2.28)$$

Agora, substituindo (2.28) em (2.27) e usando o fato que $x^k = O(r)$, obtemos

$$h_{ij} = \delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2} + O(r^{-\tau}). \quad (2.29)$$

Enfim, estamos pronto para apresentar um decaimento para segunda forma fundamental. Para tanto, seja $h_i^j = g^{jk} h_{ki}$. Usando (2.29), (2.26) e o fato que n é um vetor unitário, temos

$$\begin{aligned} A_{ij} - \frac{h_{ij}}{r} &= h_i^k h_j^l n_{k;l} - \frac{h_{ij}}{r} \\ &= h_j^l n_{i;l} - \frac{h_{ij}}{r} \\ &= n_{i;j} - \frac{1}{r} \left(\delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2} + O(r^{-\tau}) \right) \\ &= \left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x^i x^j}{r^3} \right) - \left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x^i x^j}{r^3} \right) + O(r^{-\tau-1}) \\ &= O(r^{-\tau-1}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$A_{ij} = \frac{h_{ij}}{r} + O(r^{-\tau-1}).$$

■

O próximo resultado, que é uma consequência imediata do Lema 2.1, garante decaimentos para curvaturas média e Gaussiana, bem como, decaimentos para o elemento de área $d\Sigma_r$ induzido em S_r por g e para área das esferas coordenadas com relação à

métrica g .

Corolário 2.2. Assumindo todas as hipóteses do Lema [2.1](#). Temos:

$$\begin{aligned} H &= \frac{2}{r} + O(r^{-1-\tau}); \\ K &= \frac{1}{r^2} + O(r^{-2-\tau}); \\ d\Sigma_r &= (1 + h^{ij}\sigma_{ij} + O(r^{-2\tau}))^{\frac{1}{2}} d\Sigma_r^0. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\mathcal{A}(r) = 4\pi r^2 + \frac{1}{2} \int_{S_r} h^{ij}\sigma_{ij} d\Sigma_r^0 + O(r^{2-2\tau}), \quad (2.30)$$

em que $d\Sigma_r$ e $d\Sigma_r^0$ são os elementos de área da esfera S_r com respeito a métrica g e da esfera euclidiana de raio r , respectivamente. E $\mathcal{A}(r)$ é a área de S_r com respeito a métrica g .

Demonstração: De fato, primeiramente do Lema [2.1](#), temos que

$$H = h^{ij} A_{ij} = h^{ij} \frac{h_{ij}}{r} + h^{ij} O(r^{-\tau-1}) = \frac{2}{r} + h^{ij} O(r^{-\tau-1}).$$

Como $h_{ij} = O(1)$, temos que

$$H = \frac{2}{r} + O(r^{-1-\tau}).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} K &= \det(A_{ij}) \\ &= A_{11}A_{22} - (A_{12})^2 \\ &= \left(\frac{h_{11}}{r} + O(r^{-\tau-1}) \right) \left(\frac{h_{22}}{r} + O(r^{-\tau-1}) \right) - \left(\frac{h_{12}}{r} + O(r^{-\tau-1}) \right)^2 \\ &= \frac{1}{r^2} (h_{11}h_{22} - (h_{12})^2) + O(r^{-\tau-2}) + O(r^{-2\tau-2}) \\ &= \frac{1}{r^2} \det(h_{ij}) + O(r^{-\tau-2}). \end{aligned}$$

Logo,

$$K = \frac{1}{r^2} + O(r^{-\tau-2}).$$

Por fim, considere $\{e_1, e_2\}$ conjunto de vetores ortonormais em S_r com respeito a

métrica euclidiana, então

$$\begin{aligned}
 d\Sigma_r &= (g(e_1, e_1)g(e_2, e_2) - g(e_1, e_2)^2)^{\frac{1}{2}} d\Sigma_r^0 \\
 &= (1 + \sigma(e_1, e_1) + \sigma(e_2, e_2) + O(r^{-2\tau}))^{\frac{1}{2}} d\Sigma_r^0 \\
 &= [1 + (e_1(x^i)e_1(x^j) + e_2(x^i)e_2(x^j))\sigma_{ij} + O(r^{-2\tau})]^{\frac{1}{2}} d\Sigma_r^0 \\
 &= \left[1 + \left(\nabla_0 x^i \cdot \nabla_0 x^j - \frac{\partial x^i}{\partial r} \frac{\partial x^j}{\partial r} \right) \sigma_{ij} + O(r^{-2\tau}) \right]^{\frac{1}{2}} d\Sigma_r^0
 \end{aligned}$$

onde ∇_0 é a derivada com respeito a métrica Euclidiana. Portanto,

$$d\Sigma_r = (1 + h^{ij}\sigma_{ij} + O(r^{-2\tau}))^{\frac{1}{2}} d\Sigma_r^0$$

Além disso, não é difícil perceber que

$$\left(1 + \frac{1}{2} h^{ij}\sigma_{ij} + O(r^{-2\tau}) \right)^2 = (1 + h^{ij}\sigma_{ij} + O(r^{-2\tau}))$$

Logo,

$$d\Sigma_r = (1 + \frac{1}{2} h^{ij}\sigma_{ij} + O(r^{-2\tau})) d\Sigma_r^0.$$

E integrando a igualdade acima, concluímos

$$\mathcal{A}(r) = 4\pi r^2 + \frac{1}{2} \int_{S_r} h^{ij}\sigma_{ij} d\Sigma_r^0 + O(r^{2-2\tau}).$$

■

Observação 2.2. Podemos observar, de modo geral, que os decaimentos dos objetos geométricos analisados no Lema [2.1](#) e no Corolário [2.2](#) se aproximam no infinito das estruturas geométrica de esferas euclidianas com raio r . Estas significativas propriedades estão intrinsecamente ligadas ao fato de estarmos trabalhando com a métrica g de uma variedades assintoticamente plana de ordem $1 \geq \tau > \frac{1}{2}$, com as condições de decaimento da Definição [1.21](#).

De posse desses resultados, temos como principal objetivo mostrar, sob certas hipóteses, que o limite da massa de Brown-York de esferas de uma variedade assintoticamente plana tridimensional, quando o raio das esferas tende ao infinito, é exatamente a massa ADM da variedade assintoticamente plana em questão. Para tanto adequando a Definição [1.23](#) para as esferas coordenadas S_r obtemos, concisamente, que

$$m_{BY}(S_r) = \frac{1}{8\pi} \int_{S_r} (H_0 - H) d\Sigma_r$$

nos quais $S_r = \partial B_r$ em que $B_r = \{x \in M; |x| < r\}$ e H é a curvatura média de S_r com respeito ao vetor normal unitário externo e a métrica g e H_0 é a curvatura média de S_r com relação ao vetor externo unitário quando mergulhado em $\mathbb{R}^3$. Sendo assim, apresentaremos nos próximos resultados decaimentos para as seguintes integrais:

$$\int_{S_r} H d\Sigma_r \quad \text{e} \quad \int_{S_r} H_0 d\Sigma_r.$$

em que utilizaremos as fórmulas de Minkowski, encontradas na Proposição [1.5](#), bem como os resultados anteriores.

Lema 2.3.

$$\int_{S_r} H d\Sigma_r = \frac{\mathcal{A}(r)}{r} + 4\pi r - 8\pi m_{ADM}(M) + o(1)$$

quando $r \rightarrow \infty$.

Demonstração: A priori, observe que da primeira fórmula de variação do funcional área (Veja [14](#)) tem-se

$$\frac{d}{dr}(\mathcal{A}(r)) = \int_{S_r} \frac{1}{|\nabla r|} H d\Sigma_r. \quad (2.31)$$

Por outro lado, da demonstração do Lema [2.1](#), mais especificamente do item [\(2.19\)](#), temos que

$$|\nabla r| = 1 - \frac{1}{2} \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} + O(r^{-2\tau}).$$

Daí, multiplicando a equação acima por $|\nabla r|^{-1}$ e utilizando [\(2.22\)](#), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\nabla r|} |\nabla r| &= \frac{1}{|\nabla r|} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} \frac{1}{|\nabla r|} + O(r^{-2\tau}) \frac{1}{|\nabla r|} \\ &= \frac{1}{|\nabla r|} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} (1 + O(r^{-\tau})) + O(r^{-2\tau}) \\ &= \frac{1}{|\nabla r|} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} + O(r^{-2\tau}). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\frac{1}{|\nabla r|} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} + O(r^{-2\tau}). \quad (2.32)$$

Sendo assim, por [\(2.31\)](#) e [\(2.32\)](#), temos

$$\frac{d}{dr}(\mathcal{A}(r)) = \int_{S_r} H d\Sigma_r + \frac{1}{2} \int_{S_r} \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} H d\Sigma_r + \int_{S_r} O(r^{-2\tau}) H d\Sigma_r.$$

Mas, pelo comportamento da curvatura média H analisado no Corolário [2.2](#),

$$H = \frac{2}{r} + O(r^{-1-\tau}) = O(r^{-1})$$

visto que $-1 > -1 - \tau$, pois $\tau > 0$. E como $\sigma_{ij} = O(r^{-\tau})$ e $x^k = O(r)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(\mathcal{A}(r)) &= \int_{S_r} H d\Sigma_r + \frac{1}{2} \int_{S_r} \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} \left(\frac{2}{r} + O(r^{-1-\tau}) \right) d\Sigma_r + \int_{S_r} O(r^{-2\tau-1}) d\Sigma_r \\ &= \int_{S_r} H d\Sigma_r + \int_{S_r} \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^3} d\Sigma_r + O(r^{1-2\tau}). \end{aligned}$$

Note ainda que do Corolário [2.2](#) podemos concluir que

$$d\Sigma_r = (1 + O(r^{-\tau})) d\Sigma_r^0 \quad (2.33)$$

pois, $h^{ij} = O(1)$, $\sigma_{ij} = O(r^{-\tau})$ e $-\tau > -2\tau$. Por isso, podemos concluir que

$$\frac{d}{dr}(\mathcal{A}(r)) = \int_{S_r} H d\Sigma_r + \int_{S_r} \sigma_{ij} \frac{x^i x^j}{r^3} d\Sigma_r^0 + O(r^{1-2\tau}). \quad (2.34)$$

Ademais, no Corolário [2.2](#) derivamos [\(2.30\)](#) em relação a r e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(\mathcal{A}(r)) &= 8\pi r + \frac{1}{2} \int_{S_r} \frac{\partial}{\partial r} (h^{ij} \sigma_{ij}) d\Sigma_r^0 + \frac{1}{r} \int_{S_r} h^{ij} \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 + O(r^{-2\tau+1}) \\ &= 8\pi r + \frac{1}{2} \int_{S_r} h^{ij} \sigma_{ij,k} \frac{x^k}{r} d\Sigma_r^0 + \frac{1}{r} \int_{S_r} h^{ij} \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 + O(r^{-2\tau+1}). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Por outro lado, $h^{ij} = g^{ij} - n^i n^j$. Logo, por [\(2.5\)](#), temos que

$$h^{ij} = \delta_{ij} - \frac{x^i g^{ij} x^j g^{ij}}{r^2 |\nabla r|^2} + O(r^{-\tau}).$$

Por [\(2.28\)](#), da demonstração do Lema [2.1](#), obtemos

$$\begin{aligned} h^{ij} &= \delta_{ij} - \frac{x^i g^{ij} x^j g^{ij}}{r^2} (1 + O(r^{-\tau})) + O(r^{-\tau}) \\ &= \delta_{ij} - \frac{x^i g^{ij} x^j g^{ij}}{r^2} + \frac{x^i g^{ij} x^j g^{ij}}{r^2} O(r^{-\tau}) + O(r^{-\tau}) \\ &= \delta_{ij} - \frac{x^i (\delta_{ij} + O(r^{-\tau})) x^j (\delta_{ij} + O(r^{-\tau}))}{r^2} + O(r^{-\tau}) \\ &= \delta_{ij} - \left(\frac{x^j}{r} + O(-\tau) \frac{x^i}{r} \right) \left(\frac{x^i}{r} + O(-\tau) \frac{x^j}{r} \right) + O(r^{-\tau}) \\ &= \delta_{ij} - \left(\frac{x^j}{r} + O(-\tau) \right) \left(\frac{x^i}{r} + O(-\tau) \right) + O(r^{-\tau}) \\ &= \delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2} - \frac{x^i}{r} O(r^{-\tau}) - \frac{x^j}{r} O(r^{-\tau}) + O(r^{-2\tau}) + O(r^{-\tau}). \end{aligned}$$

Então,

$$h^{ij} = \delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2} + O(r^{-\tau}). \quad (2.36)$$

2. Limite da Massa de Brown-York de esferas com raios suficientemente grande

Daí, substituindo (2.36) em (2.35) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}(\mathcal{A}(r)) &= 8\pi r + \frac{1}{2} \int_{S_r} \left(\delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2} + O(r^{-\tau}) \right) \sigma_{ij,k} \frac{x^k}{r} d\Sigma_r^0 \\
&+ \frac{1}{r} \int_{S_r} h^{ij} \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 + O(r^{-2\tau+1}) \\
&= 8\pi r + \frac{1}{2} \int_{S_r} \sigma_{ii,k} \frac{x^k}{r} d\Sigma_r^0 - \frac{1}{2} \int_{S_r} \sigma_{ij,k} \frac{x^i x^j x^k}{r^3} d\Sigma_r^0 \\
&+ \frac{1}{r} \int_{S_r} h^{ij} \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 + O(r^{-2\tau+1}). \tag{2.37}
\end{aligned}$$

No entanto, pela regra do produto, sabemos que

$$\int_{S_r} \sigma_{ij,k} \frac{x^j x^i x^k}{r^3} d\Sigma_r^0 = \int_{S_r} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sigma_{ij} \frac{x^j}{r} \right) \frac{x^i x^k}{r^2} d\Sigma_r^0 - \int_{S_r} \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{x^j}{r} \right) \frac{x^i x^k}{r^2} d\Sigma_r^0.$$

Mas de (2.15), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{x^j}{r} \right) \frac{x^i x^k}{r^2} &= \left(\frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{x^j x^k}{r^3} \right) \frac{x^i x^k}{r^2} \\
&= \left(\frac{x^i x^j}{r^3} - \frac{x^i x^j (x^k)^2}{r^5} \right) \\
&= \left(\frac{x^i x^j}{r^3} - \frac{x^i x^j r^2}{r^5} \right) \\
&= \left(\frac{x^i x^j}{r^3} - \frac{x^i x^j}{r^3} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Note que estamos somando em k , uma vez que estamos utilizando a notação de Einstein.

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{S_r} \sigma_{ij,k} \frac{x^j x^i x^k}{r^3} d\Sigma_r^0 &= \int_{S_r} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sigma_{ij} \frac{x^j}{r} \right) \frac{x^i x^k}{r^2} d\Sigma_r^0 \\
&= \int_{S_r} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sigma_{ij} \frac{x^j}{r} \right) \frac{x^i x^k}{r^2} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sigma_{ij} \frac{x^j}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sigma_{ij} \frac{x^j}{r} \right) \right] d\Sigma_r^0 \\
&= - \int_{S_r} \left(\delta_{ik} - \frac{x^i x^k}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sigma_{ij} \frac{x^j}{r} \right) d\Sigma_r^0 \\
&+ \int_{S_r} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sigma_{ij} \frac{x^j}{r} \right) d\Sigma_r^0. \tag{2.38}
\end{aligned}$$

Agora, por derivação por partes, observamos que

$$\begin{aligned}
-\int_{S_r} \left(\delta_{ik} - \frac{x^i x^k}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sigma_{ij} \frac{x^j}{r} \right) d\Sigma_r^0 &= - \left(\delta_{ik} - \frac{x^i x^k}{r^2} \right) \left(\sigma_{ij} \frac{x^j}{r} \right) \\
&- \int_{S_r} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{x^i x^k}{r^2} \right) \sigma_{ij} \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 \\
&= - \left(\delta_{ik} \frac{x^j}{r} - \frac{x^i x^k x^j}{r^3} \right) \sigma_{ij} \\
&- \int_{S_r} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{x^i x^k}{r^2} \right) \sigma_{ij} \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 \\
&= -\sigma_{ij} \sum_{k \neq i} \left(\frac{x^i x^k x^j}{r^3} \right) \sigma_{ij} \\
&- \int_{S_r} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{x^i x^k}{r^2} \right) \sigma_{ij} \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 \\
&= - \int_{S_r} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{x^i x^k}{r^2} \right) \sigma_{ij} \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 + O(r^{-\tau}).
\end{aligned}$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned}
-\int_{S_r} \left(\delta_{ik} - \frac{x^i x^k}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sigma_{ij} \frac{x^j}{r} \right) d\Sigma_r^0 &= - \int_{S_r} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{x^i}{r} \right) \frac{x^k}{r} \sigma_{ij} \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 \\
&- \int_{S_r} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{x^k}{r} \right) \frac{x^i}{r} \sigma_{ij} \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 + O(r^{-\tau}) \\
&= - \int_{S_r} \left(\frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{x^i x^k}{r^3} \right) \sigma_{ij} \frac{x^j x^k}{r^2} d\Sigma_r^0 \\
&- \int_{S_r} \left(\frac{1}{r} - \frac{(x^k)^2}{r^3} \right) \sigma_{ij} \frac{x^j x^i}{r^2} d\Sigma_r^0 + O(r^{-\tau}) \\
&= - \int_{S_r} \left(\frac{x^k x^j}{r^3} \delta_{ik} - \frac{x^j x^i (x^k)^2}{r^5} \right) \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 \\
&- \int_{S_r} \left(\frac{3}{r} - \frac{1}{r} \right) \sigma_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} d\Sigma_r^0 + O(r^{-\tau}) \\
&= - \int_{S_r} \left(\frac{x^i x^j}{r^3} - \frac{x^j x^i}{r^5} \right) \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 \\
&- 2 \int_{S_r} \sigma_{ij} \frac{x^i x^j}{r^3} d\Sigma_r^0 + O(r^{-\tau}) \\
&= -2 \int_{S_r} \sigma_{ij} \frac{x^i x^j}{r^3} d\Sigma_r^0 + O(r^{-\tau}) \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_{S_r} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sigma_{ij} \frac{x^j}{r} \right) d\Sigma_r^0 &= \int_{S_r} \left(\sigma_{ij,i} \frac{x^j}{r} + \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{x^j}{r} \right) \right) d\Sigma_r^0 \\ &= \int_{S_r} \sigma_{ij,i} \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 + \int_{S_r} \sigma_{ij} \left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x^i x^j}{r^3} \right) d\Sigma_r^0. \end{aligned}$$

E como por (2.36), tem-se

$$\frac{h^{ij}}{r} = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x^i x^j}{r^3} + O(r^{-\tau-1}).$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{S_r} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sigma_{ij} \frac{x^j}{r} \right) d\Sigma_r^0 &= \int_{S_r} \sigma_{ij,i} \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 + \int_{S_r} \sigma_{ij} \left(\frac{h^{ij}}{r} + O(r^{-\tau-1}) \right) d\Sigma_r^0 \\ &= \int_{S_r} \sigma_{ij,i} \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 + \frac{1}{r} \int_{S_r} h^{ij} \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 + O(r^{-2\tau+1}), \quad (2.40) \end{aligned}$$

pois $\sigma_{ij} = O(r^\tau)$. Então, substituindo (2.39) e (2.40) em (2.38), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{S_r} \sigma_{ij,k} \frac{x^j x^i x^k}{r^3} d\Sigma_r^0 &= -2 \int_{S_r} \sigma_{ij} \frac{x^i x^j}{r^3} d\Sigma_r^0 + O(r^{-\tau}) + \int_{S_r} \sigma_{ij,i} \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 \\ &\quad + \frac{1}{r} \int_{S_r} h^{ij} \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 + O(r^{-2\tau+1}) \end{aligned}$$

e como $\tau \leq 1$, temos que $-\tau + 1 \geq 0$. Então, $-2\tau + 1 \geq -\tau$. Daí,

$$\int_{S_r} \sigma_{ij,k} \frac{x^j x^i x^k}{r^3} d\Sigma_r^0 = -2 \int_{S_r} \sigma_{ij} \frac{x^i x^j}{r^3} d\Sigma_r^0 + \int_{S_r} \sigma_{ij,i} \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 + \frac{1}{r} \int_{S_r} h^{ij} \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 + O(r^{-2\tau+1})$$

Assim, substituindo a igualdade acima em (2.37), concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(\mathcal{A}(r)) &= 8\pi r + \frac{1}{2} \int_{S_r} \sigma_{ii,k} \frac{x^k}{r} d\Sigma_r^0 + \int_{S_r} \sigma_{ij} \frac{x^i x^j}{r^3} d\Sigma_r^0 - \frac{1}{2} \int_{S_r} \sigma_{ij,i} \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 \\ &\quad - \frac{1}{2r} \int_{S_r} h^{ij} \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 + \frac{1}{r} \int_{S_r} h^{ij} \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 + O(r^{-2\tau+1}) \\ &= 8\pi r + \frac{1}{2} \int_{S_r} \sigma_{ii,j} \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 + \int_{S_r} \sigma_{ij} \frac{x^i x^j}{r^3} d\Sigma_r^0 - \frac{1}{2} \int_{S_r} \sigma_{ij,i} \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 \\ &\quad + \frac{1}{2r} \int_{S_r} h^{ij} \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 + O(r^{-2\tau+1}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(\mathcal{A}(r)) &= 8\pi r + \frac{1}{2} \int_{S_r} (\sigma_{ii,j} - \sigma_{ij,i}) \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 + \int_{S_r} \sigma_{ij} \frac{x^i x^j}{r^3} d\Sigma_r^0 \\ &+ \frac{1}{2r} \int_{S_r} h^{ij} \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 + O(r^{-2\tau+1}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Por outro lado, das Definições [1.22](#) e [1.21](#), obtemos

$$-8\pi m_{ADM}(M) = \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \int_{S_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{S_r} (\sigma_{ii,j} - \sigma_{ij,i}) \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0.$$

E por definição de limite, é fácil ver que

$$-8\pi m_{ADM}(M) = \frac{1}{2} \int_{S_r} (\sigma_{ii,j} - \sigma_{ij,i}) \frac{x^j}{r} d\Sigma_r^0 + o(1).$$

Sendo assim, por [\(2.41\)](#), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(\mathcal{A}(r)) &= 8\pi r - 8\pi m_{ADM}(M) + \int_{S_r} \sigma_{ij} \frac{x^i x^j}{r^3} d\Sigma_r^0 \\ &+ \frac{1}{2r} \int_{S_r} h^{ij} \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 + o(1), \end{aligned} \quad (2.42)$$

desde que $r \rightarrow \infty$ e porque $1 - 2\tau < 0$, pois $\tau > \frac{1}{2}$. Note ainda que do Corolário [2.2](#), mais especificamente de [\(2.30\)](#), temos que

$$\frac{1}{2r} \int_{S_r} h^{ij} \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 = \frac{\mathcal{A}(r)}{r} - 4\pi r + O(r^{-2\tau+1}).$$

E substituindo em [\(2.42\)](#), concluímos

$$\frac{d}{dr}(\mathcal{A}(r)) = \frac{\mathcal{A}(r)}{r} + 4\pi r - 8\pi m_{ADM}(M) + \int_{S_r} \sigma_{ij} \frac{x^i x^j}{r^3} d\Sigma_r^0 + o(1). \quad (2.43)$$

Finalmente, comparando [\(2.34\)](#) e [\(2.43\)](#) e fazendo $r \rightarrow \infty$, tem-se

$$\int_{S_r} H d\Sigma_r + \int_{S_r} \sigma_{ij} \frac{x^i x^j}{r^3} d\Sigma_r^0 = \frac{\mathcal{A}(r)}{r} + 4\pi r - 8\pi m_{ADM}(M) + \int_{S_r} \sigma_{ij} \frac{x^i x^j}{r^3} d\Sigma_r^0 + o(1).$$

Portanto,

$$\int_{S_r} H d\Sigma_r = \frac{\mathcal{A}(r)}{r} + 4\pi r - 8\pi m_{ADM}(M) + o(1),$$

quando $r \rightarrow \infty$. ■

Note que até o presente momento não analisamos o comportamento da curvatura H_0 , proveniente de um determinado mergulho. Desse modo, estudaremos, em seguida,

um resultado que garante a existência de um mergulho isométrico S_r em $\mathbb{R}^3$, alicerçados no resultado de Nirenberg [15]. E, por conseguinte, de maneira análoga ao Lema 2.3, concebemos um decaimento para a integral envolvendo H_0 .

Lema 2.4. Sejam (M, g) uma variedade assintoticamente plana de dimensão 3, satisfazendo as condições de decaimento para $\tau > 0$ e S_r uma esfera coordenada. Então, para r suficientemente grande, existe um mergulho isométrico X_r de S_r em $\mathbb{R}^3$, tal que

$$\begin{aligned} X_r \cdot n_0 &= r + O(r^{1-\tau}), \\ H_0 &= \frac{2}{r} + H_1, \quad \text{com } H_1 = O(r^{1-\tau}), \end{aligned}$$

desde que $r \rightarrow \infty$, em que n_0 é o vetor normal externo unitário da superfície $X_r(S_r)$, H_0 é a curvatura média de X_r e $\cdot$ é o produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Demonstração: Para $r > 0$ considere a aplicação $F : \overline{M} \rightarrow M$, dada por

$$F(y) = ry = x.$$

Daí, para induzir uma métrica em $\overline{M}$ basta considerarmos a métrica pull back induzida pela aplicação F , uma vez que F é evidentemente um difeomorfismo. Logo, considere

$$\overline{g}(u, v) = g(dFu, dFv).$$

Por outro lado, $dFu = ru$, para todo $u \in T_p \overline{M}$. Assim,

$$\overline{g}_{ij} = r^2 g_{ij}.$$

Agora, considere $\overline{h}$ a métrica induzida nas esferas nas coordenadas y , então

$$\begin{aligned} \overline{h}_{ij} &= \overline{g}_{ij} - \overline{n}_i \overline{n}_j \\ &= r^2 g_{ij} - \overline{n}_i \overline{n}_j, \end{aligned} \tag{2.44}$$

em que $\overline{h}_{ij} = \overline{h} \left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right)$ e $g_{ij} = g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$. Sendo assim, prosseguimos de forma análoga ao que foi feito no início deste Capítulo 2 para determinar ∇r . Inicialmente, vamos determinar $\overline{\nabla} \rho$ com

$$\rho = \left(\sum_{i=1}^3 (y^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

ou seja, se $\bar{n} = \frac{\bar{\nabla}\rho}{|\bar{\nabla}\rho|}$ e

$$\bar{n} = \bar{n}^j \frac{\partial}{\partial y^j},$$

então,

$$\bar{n}^j = \frac{y^i \bar{g}^{ij}}{\rho |\bar{\nabla}\rho|}. \quad (2.45)$$

Além disso, como

$$\bar{n}_j = \bar{g} \left(\bar{n}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \bar{n}^i \bar{g}_{ij}$$

Por (2.45), obtemos

$$\bar{n}_j = \frac{y_j}{\rho |\bar{\nabla}\rho|}. \quad (2.46)$$

Logo,

$$|\bar{\nabla}\rho|^2 = \frac{y^i y^j \bar{g}^{ij}}{\rho^2}. \quad (2.47)$$

No entanto, observe que multiplicando $\bar{g}_{ij} = r^2 g_{ij}$ por $\bar{g}^{ki}$, tem-se

$$\bar{g}^{ki} \bar{g}_{ij} = r^2 \bar{g}^{ki} g_{ij}.$$

Daí, $\delta_{kj} = r^2 \bar{g}^{ij} g_{ij}$ e agora multiplicando esta igualdade por g^{ij} , concluímos que

$$g^{ik} = r^2 \bar{g}^{ki}.$$

Portanto, como estamos supondo $r > 0$, obtemos

$$\bar{g}^{ij} = \frac{1}{r^2} g^{ik}. \quad (2.48)$$

Assim, substituindo (2.48) em (2.47), temos que

$$|\bar{\nabla}\rho|^2 = \frac{\bar{g}^{ij} y^i y^j}{\rho^2} = r^{-2} g^{ij} \frac{y^i y^j}{\rho^2}.$$

Agora, considere a seguinte métrica em $\Sigma_\rho = \{y; |y| = \rho\}$

$$ds_r^2 = r^{-2} \bar{h}_{ij}.$$

Dessa forma, por (2.44) e (2.46), tem-se

$$\begin{aligned} ds_r^2 &= r^{-2} (r^2 g_{ij} - \bar{n}_i \bar{n}_j) \\ &= g_{ij} - r^{-2} \left(\frac{y^i y^j}{\rho^2 |\bar{\nabla}\rho|^2} \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Por outro lado, de (2.47) temos que

$$\rho^2 |\bar{\nabla} \rho|^2 = r^{-2} g^{kl} y^k y^l. \quad (2.50)$$

Logo, substituindo (2.50) em (2.49), obtemos

$$ds_r^2 = g_{ij} - \frac{y^i y^j}{g^{kl} y^k y^l}.$$

Além disso, é evidente que a métrica padrão h_{ij}^0 em Σ_ρ é dada por

$$ds_0^2 = h_{ij}^0 = \delta_{ij} - \frac{y^i y^j}{\rho^2}.$$

pois em $\mathbb{R}^3$

$$\bar{\nabla} \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial y^1}, \frac{\partial \rho}{\partial y^2}, \frac{\partial \rho}{\partial y^3} \right),$$

com

$$\frac{\partial \rho}{\partial y^i} = \frac{y^i}{\rho}.$$

Desse modo, obtemos

$$\|ds_r^2 - ds_0^2\|_{C^3(\Sigma_\rho)} = O(r^{-\tau}),$$

para $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 2$. Note que Σ_1 é a esfera unitária nas coordenadas y^i . Sendo assim, pelos resultados do Nirenberg [15], existe um mergulho isométrico $\bar{X}_r : (\mathbb{S}^2, ds_r^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que

$$\|\bar{X}_r - X_0\|_{C^2(\mathbb{S}^2)} = O(r^{-\tau}),$$

em que X_0 é a aplicação identidade em $\mathbb{R}^3$. Como $X_0 \cdot n_0 = 1$, em que n_0 é o vetor normal externo a esfera unitária, temos que

$$\bar{X}_r \cdot n_{0,r} = 1 + O(r^{-\tau}),$$

onde $n_{0,r}$ é o vetor normal unitário a superfície $\bar{X}_r(\mathbb{S}^2)$. Identificando S_r com a métrica induzida por g como $(\mathbb{S}^2, \bar{h})$, segue que $X_r = r\bar{X}_r$ é um mergulho isométrico de S_r com a métrica induzida por g . Daí em diante, verifica-se que

$$X_r \cdot n_0 = r + O(r^{1-\tau}).$$

Por meio do decaimento do mergulho $\bar{X}_r$ com respeito à aplicação identidade X_0 ,

tem-se

$$\bar{H}_0 - 2 = O(r^{-\tau}),$$

em que $\bar{H}_0$ é a curvatura média com relação a $\bar{X}_r$. Portanto,

$$H_0 = \frac{2}{r} + O(r^{-\tau-1}).$$

■

Lema 2.5. Sejam (M, g) uma variedade assintoticamente plana satisfazendo as condições de decaimento e S_r uma esfera coordenada. Então,

$$\int_{S_r} H_0 d\Sigma_r = 4\pi r + \frac{\mathcal{A}(r)}{r} + O(r^{-2\tau+1}),$$

em que H_0 é a curvatura média pelo mergulho do Lema [2.4](#).

Demonstração: Como estamos supondo as mesmas hipóteses do Lema [2.4](#), então para r suficientemente grande existe um mergulho isométrico $X_r : S_r \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que

$$\begin{aligned} X_r \cdot n_0 &= r + O(r^{1-\tau}), \\ H_0 &= \frac{2}{r} + H_1, \quad \text{com } H_1 = O(r^{1-\tau}). \end{aligned}$$

Pelo Lema [2.2](#), sabemos que

$$K - \frac{1}{r^2} = O(r^{-2-\tau}).$$

Considere $\bar{K} = K - \frac{1}{r^2}$. Então, utilizando as fórmulas integrais de Minkowski, Pro-

posição [1.5](#), temos que

$$\begin{aligned}
 \int_{S_r} H_0 d\Sigma_r &= 2 \int_{S_r} K X_r \cdot n_0 d\Sigma_r \\
 &= 2 \int_{S_r} \left(\frac{1}{r^2} + \bar{K} \right) X_r \cdot n_0 d\Sigma_r \\
 &= \frac{2}{r^2} \int_{S_r} X_r \cdot n_0 d\Sigma_r + 2 \int_{S_r} \bar{K} X_r \cdot n_0 d\Sigma_r \\
 &= \frac{6V_0(r)}{r^2} + 2 \int_{S_r} \bar{K} (r + O(r^{1-\tau})) d\Sigma_r \\
 &= \frac{6V_0(r)}{r^2} + 2r \int_{S_r} \bar{K} d\Sigma_r + 2 \int_{S_r} \bar{K} O(r^{1-\tau}) d\Sigma_r \\
 &= \frac{6V_0(r)}{r^2} + 2r \int_{S_r} \left(K - \frac{1}{r^2} \right) d\Sigma_r + \int_{S_r} O(r^{-1-2\tau}) d\Sigma_r \\
 &= \frac{6V_0(r)}{r^2} + 2r \int_{S_r} K d\Sigma_r - \frac{2}{r} \int_{S_r} 1 d\Sigma_r + O(r^{-2\tau+1}).
 \end{aligned}$$

Pelo teorema de Gauss- Bonnet para superfícies, concluímos que

$$\int_{S_r} H_0 d\Sigma_r = \frac{6V_0(r)}{r^2} + 8\pi r - \frac{2\mathcal{A}(r)}{r} + O(r^{-2\tau+1}), \quad (2.51)$$

em que $V_0(r)$ é o volume do interior da superfície $X_r(S_r)$ em $\mathbb{R}^3$. Além disso, pela Proposição [1.5](#), obtemos

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{A}(r) &= \int_{S_r} H_0 X_r \cdot n_0 d\Sigma_r \\
 &= \int_{S_r} \left(\frac{2}{r} + H_1 \right) X_r \cdot n_0 d\Sigma_r.
 \end{aligned}$$

Logo, como $H_1 = O(r^{-\tau-1})$

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{A}(r) &= \frac{2}{r} \int_{S_r} X_r \cdot n_0 d\Sigma_r + \int_{S_r} H_1 X_r \cdot n_0 d\Sigma_r \\
 &= \frac{6V_0(r)}{r} + \int_{S_r} H_1 (r + O(r^{1-\tau})) d\Sigma_r \\
 &= \frac{6V_0(r)}{r} + r \int_{S_r} H_1 d\Sigma_r + \int_{S_r} O(r^{-2\tau}) d\Sigma_r \\
 &= \frac{6V_0(r)}{r} + r \int_{S_r} \left(-\frac{2}{r} + H_0 \right) d\Sigma_r + O(r^{2-2\tau}) \\
 &= \frac{6V_0(r)}{r} - 2\mathcal{A}(r) + r \int_{S_r} H_0 d\Sigma_r + O(r^{2-2\tau}). \quad (2.52)
 \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\int_{S_r} H_0 d\Sigma_r = -\frac{6V_0(r)}{r^2} + 8\pi r + \frac{4\mathcal{A}(r)}{r} + O(r^{-2\tau+1}). \quad (2.53)$$

Assim, de (2.51) e (2.53), concluímos

$$\int_{S_r} H_0 d\Sigma_r = 4\pi r + \frac{\mathcal{A}(r)}{r} + O(r^{-2\tau+1}).$$

■

2.2 A relação entre as massas ADM e de Brown-York

Finalmente, a partir de examinarmos as integrais das curvaturas H e H_0 e da definição Definição 1.23, demonstraremos de maneira imediata o seguinte resultado que relacionam, sob certas condições, a massa de Brown- York e a Massa ADM.

Teorema 2.6. *Sejam (M, g) uma variedade assintoticamente plana de ordem $\tau > \frac{1}{2}$ e S_r esferas coordenadas. Então,*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m_{BY}(S_r) = m_{ADM}(M).$$

Demonstração: Com efeito, dos Lemas 2.3 e 2.5, temos que

$$\int_{S_r} (H_0 - H) d\Sigma_r = 4\pi r + \frac{\mathcal{A}(r)}{r} - \frac{\mathcal{A}(r)}{r} - 4\pi r + 8\pi m_{ADM}(M) + o(1),$$

desde que $r \rightarrow \infty$. Assim, pela definição da massa Brown-York, tem-se

$$m_{BY}(S_r) = \frac{1}{8\pi} \int_{S_r} (H_0 - H) d\Sigma_r = m_{ADM}(M) + o(1),$$

ou seja,

$$m_{BY}(S_r) - m_{ADM}(M) = o(1).$$

Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $A > 0$ tais que para todo $r > M$ tem-se

$$|m_{BY}(S_r) - m_{ADM}(M)| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m_{BY}(S_r) = m_{ADM}(M).$$

■

Observação 2.3. Note que, de maneira intuitiva, quando pensamos em calcular massas de certos corpos é natural pensarmos em conjuntos compactos, como na definição da massa Brown-York, contudo aparecem certas dificuldades para calcularmos massas de objetos mais gerais como as variedades. Isto ressalta a relevância deste resultado, fornecendo uma alternativa de determinamos a massa ADM de uma variedade Riemanniana.

Ademais, apresentaremos uma consequência do Teorema 2.6, a qual generaliza o resultado anterior, no sentido que podemos substituir S_r por esferas suavemente deformadas. Mais especificamente, consideraremos uma função suave ρ em M que satisfaz condições de decaimento então podemos demonstrar, por meio da unicidade da massa ADM, que o limite da massa de Brown-York do conjunto das curvas de níveis de ρ denotada por Σ_ρ tende a massa ADM da variedade M .

Corolário 2.7. Admitindo as mesmas condições do Teorema 2.6, considere ρ uma função suave em M tal que

$$|\rho - r| + r|\partial(\rho - r)| + r^2|\partial\partial(\rho - r)| + r^3|\partial\partial\partial(\rho - r)| = O(r^\kappa), \quad (2.54)$$

para algum $0 < \kappa < 1 - \tau$. Então,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} m_{BY}(\Sigma_\rho) = m_{ADM}(M),$$

em que Σ_ρ é o conjunto de nível da função ρ .

Demonstração: Para cada x_0 fixe $\rho(x_0) = \rho$. E considere a aplicação $F : M \rightarrow \overline{M}$ dada por

$$F(x) = \frac{\rho}{r}x = y.$$

Note que F é um difeomorfismo e mais ainda,

$$dFv = \frac{\rho}{r}v.$$

Dessa forma, a métrica pull back para o espaço $\overline{M}$ induzida por tal aplicação é tal que

$$\overline{g}(u, v) = g(dFu, dFv).$$

Logo, pelas propriedades da métrica g , tem-se

$$\overline{g}(u, v) = \frac{\rho^2}{r^2}g(u, v).$$

2. Limite da Massa de Brown-York de esferas com raios suficientemente grande

Além disso,

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\rho^2}{r^2} g_{ij}.$$

Agora, vamos mostrar que a métrica $\bar{g}$ satisfaz as mesmas condições de decaimento da Definição [1.21](#), isto é,

$$\bar{g}_{ij} = \delta_{ij} + O_3(r^{-\tau}).$$

Com efeito, por [\(2.54\)](#)

$$\rho - r = O(r^\kappa),$$

com $0 < \kappa < 1 - \tau$. Então,

$$\rho = r + O(r^{1-\tau}) = O(r),$$

pois $0 < \tau$. Logo, $\rho^2 = O(r^2)$ e assim,

$$\frac{\rho^2}{r^2} = O(1).$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij} - \delta_{ij} &= \frac{\rho^2}{r^2} g_{ij} - \delta_{ij} \\ &= \frac{\rho^2}{r^2} \delta_{ij} + \frac{\rho^2}{r^2} O(r^{-\tau}) - \delta_{ij} \\ &= O(1)(\delta_{ij} - \delta_{ij}) + O(r^{-\tau}) \\ &= O(r^{-\tau}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^{-\tau}).$$

Além disso, pela Definição [1.21](#), tem-se

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij,k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\rho^2}{r^2} \right) g_{ij} + \frac{\rho^2}{r^2} g_{ij,k} \\ &= \frac{1}{r^2} 2\rho \frac{\partial \rho}{\partial x^k} g_{ij} + O(1)O(r^{-\tau-1}) \\ &= O(r^{-\tau-1})(\delta_{ij} + O(r^{-\tau})) + O(r^{-\tau-1}) \\ &= O(r^{-2\tau-1}) + O(r^{-\tau-1}) \\ &= O(r^{-\tau-1}). \end{aligned}$$

Visto que da condição (2.54), temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^k} = O(r^{\kappa-1}),$$

pois $\kappa - 1 < -\tau < 0$, isto é,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^k} = O(r^{-\tau}).$$

Por outro lado, sabemos também que

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^l \partial x^k} = O(r^{-\kappa-2}).$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^l \partial x^k} = O(r^{-\tau-1}).$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij,kl} &= \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{1}{r^2} 2\rho \frac{\partial \rho}{\partial x^k} g_{ij} + \frac{\rho^2}{r^2} g_{ij,k} \right) \\ &= \frac{2}{r^2} \frac{\partial \rho}{\partial x^l} \frac{\partial \rho}{\partial x^k} g_{ij} + \frac{2}{r^2} \rho \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^l \partial x^k} g_{ij} + \frac{2}{r^2} \rho \frac{\partial \rho}{\partial x^k} g_{ij,l} + \frac{2}{r^2} \rho \frac{\partial \rho}{\partial x^l} g_{ij,k} + \frac{\rho^2}{r^2} g_{ij,kl} \\ &= (O(r^{-2-2\tau}) + O(r^{-2-2\tau})) g_{ij} + O(r^{-2-\tau}) + O(r^{-2-\tau}) \\ &= O(r^{-\tau-2}), \end{aligned}$$

pois $-\tau > -2\tau$ e $g_{ij} = O(1)$. Analogamente, mostramos que

$$\bar{g}_{ij,klm} = O(r^{-\tau-3}).$$

pois, por hipótese, temos que

$$\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^m \partial x^l \partial x^k} = O(r^{-\kappa-3}) = O(r^{-\tau-2}).$$

Sendo assim, $\bar{g}$ satisfaz todas as condições da Definição 1.21. Por fim, observe que Σ_ρ é a esfera coordenada referente as coordenadas y^i . Portanto, da unicidade da massa ADM, que foi verificada por Bartnik [2], segue o resultado. ■

2.3 Aplicações e a massa Isoperimétrica

Apresentaremos a seguir uma consequência natural dos Lemas 2.3 e 2.5, que relaciona o volume do interior da esfera coordenadas S_r com volume euclidiano do interior

da superfície gerada por meio da imagem de S_r do mergulho X_r determinado no Lema [2.4](#)

Teorema 2.8. *Seja (M, g) uma variedade assintoticamente plana de ordem $\tau > \frac{1}{2}$ com um fim. Então,*

$$V_0(r) - V(r) = -2m_{ADM}(M)\pi r^2 + o(r^2),$$

onde $V(r)$ é o volume do interior da esfera coordenadas S_r com relação a métrica g e $V_0(r)$ é o volume euclidiano do interior da superfície S_r quando mergulhada em $\mathbb{R}^3$.

Demonstração: Primeiramente observe que pela primeira fórmula de variação do funcional volume (Veja [14](#)) e por [\(2.32\)](#), temos

$$\begin{aligned} V'(r) &= \int_{S_r} \frac{1}{|\nabla r|} d\Sigma_r \\ &= \int_{S_r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} + O(r^{-2\tau}) \right) d\Sigma_r \\ &= \mathcal{A}(r) + \frac{1}{2} \int_{S_r} \frac{\sigma_{ij} x^i x^j}{r^2} d\Sigma_r + O(r^{2-2\tau}). \end{aligned}$$

Porém, sabemos que $d\Sigma_r = (1 + O(r^{-\tau}))d\Sigma_r^0$, $\sigma_{ij} = O(r^{-\tau})$ e $x^l = O(r^{-\tau})$. Então,

$$\frac{\mathcal{A}(r)}{r} = \frac{V'(r)}{r} - \frac{1}{2} \int_{S_r} \sigma_{ij} \frac{x^i x^j}{r^3} d\Sigma_r^0 + O(r^{1-2\tau}).$$

Daí,

$$\int_{S_r} \sigma_{ij} \frac{x^i x^j}{r^3} d\Sigma_r^0 = \frac{1}{r} (2V'(r) - 2\mathcal{A}(r)) + O(r^{1-2\tau}).$$

Por outro lado, como vimos na prova do Lema [2.3](#)

$$\frac{d}{dr}(\mathcal{A}(r)) = \frac{\mathcal{A}(r)}{r} + 4\pi r - 8\pi m_{ADM}(M) + \int_{S_r} \sigma_{ij} \frac{x^i x^j}{r^3} d\Sigma_r^0 + o(1).$$

Assim,

$$\frac{d}{dr}(\mathcal{A}(r)) = \frac{\mathcal{A}(r)}{r} + 4\pi r - 8\pi m_{ADM}(M) + \frac{1}{r} (2V'(r) - 2\mathcal{A}(r)) + o(1). \quad (2.55)$$

Note que,

$$\frac{d}{dr}(r\mathcal{A}(r)) = \mathcal{A}(r) + r \frac{d}{dr}(\mathcal{A}(r)). \quad (2.56)$$

Então, substituindo (2.55) em (2.56), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(r\mathcal{A}(r)) &= \mathcal{A}(r) + r \left(\frac{\mathcal{A}(r)}{r} + 4\pi r - 8\pi m_{ADM}(M) + \frac{1}{r}(2V'(r) - 2\mathcal{A}(r)) + o(1) \right) \\ &= 2\mathcal{A}(r) + 4\pi r^2 - 8\pi m_{ADM}(M)r + 2V'(r) - 2\mathcal{A}(r) + o(r) \\ &= 4\pi r^2 - 8\pi m_{ADM}(M)r + 2V'(r) + o(r). \end{aligned}$$

Logo,

$$V'(r) = \frac{1}{2} \frac{d}{dr}(r\mathcal{A}(r)) - 2\pi r^2 + 4\pi m_{ADM}(M)r + o(r).$$

Daí, integrando em relação a r , tem-se

$$V(r) = \frac{1}{2}r\mathcal{A}(r) - \frac{2\pi r^3}{3} + 2\pi m_{ADM}(M)r^2 + o(r^2). \quad (2.57)$$

No entanto, de (2.51) e (2.52) da demonstração do Lema 2.5, temos que

$$r \int_{S_r} H_0 d\Sigma_r = \frac{6V_0(r)}{r} + 8\pi r^2 - 2\mathcal{A}(r) + O(r^{-2\tau+2}) \quad (2.58)$$

e

$$2\mathcal{A}(r) = \frac{6V_0(r)}{r} - 2\mathcal{A}(r) + r \int_{S_r} H_0 d\Sigma_r + O(r^{2-2\tau}). \quad (2.59)$$

Assim, substituindo (2.58) em (2.59), concluímos

$$2\mathcal{A}(r) = \frac{12V_0(r)}{r} - 4\mathcal{A}(r) + 8\pi r^2 + O(r^{2-2\tau}).$$

Por isso,

$$V_0(r) = \frac{1}{2}r\mathcal{A}(r) - \frac{2}{3}\pi r^3 + O(r^{3-2\tau}). \quad (2.60)$$

Portanto, de (2.57) e (2.60), tem-se

$$V_0(r) - V(r) = -2\pi m_{ADM}(M)r^2 + o(r^2) + O(r^{3-2\tau}).$$

Mas note que,

$$r^{-2}O(r^{3-2\tau}) = O(r^{1-2\tau})$$

e como $1 - 2\tau < 0$, então $O(r^{1-2\tau}) = o(1)$. Logo,

$$V_0(r) - V(r) = -2\pi m_{ADM}(M)r^2 + o(r^2).$$

■

Corolário 2.9. Assumindo as notações anteriores. Se a curvatura escalar de (M, g) é

não-negativa, então

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r) - V_0(r)}{r^2} \geq 0$$

em que a igualdade é satisfeita se, e somente se, (M, g) é isométrica ao $\mathbb{R}^3$.

Demonstração: De fato, do Teorema [2.8](#) obtemos

$$-\frac{V_0(r) - V(r)}{r^2} = 2\pi m_{ADM}(M) + o(1).$$

Por outro lado, do Teorema da Massa Positiva, temos que $m_{ADM}(M) \geq 0$, em que a igualdade acontece se e só se (M, g) é isométrica ao $\mathbb{R}^3$. Logo,

$$\frac{V(r) - V_0(r)}{r^2} + o(1) = 2\pi m_{ADM}(M) \geq 0.$$

Então,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r) - V_0(r)}{r^2} \geq 0$$

no qual vale a igualdade se, e somente se, a variedade (M, g) é isométrica ao $\mathbb{R}^3$. ■

Corolário 2.10. A massa ADM e a massa isoperimétrica de uma variedade assintoticamente plana M são iguais.

Demonstração: Com efeito, da Definição [1.24](#), sabemos que

$$m_{ISO} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{2}{\mathcal{A}(r)} \left(V(r) - \frac{1}{6\pi^{\frac{1}{2}}} (\mathcal{A}(r))^{\frac{3}{2}} \right).$$

Mas, pela demonstração do Teorema [2.8](#), estritamente por [\(2.57\)](#), temos que

$$\begin{aligned} \frac{2}{\mathcal{A}(r)} \left(V(r) - \frac{1}{6\pi^{\frac{1}{2}}} (\mathcal{A}(r))^{\frac{3}{2}} \right) &= \frac{2}{\mathcal{A}(r)} \left(\frac{1}{2} r \mathcal{A}(r) - \frac{2\pi r^3}{3} + 2\pi m_{ADM}(M) r^2 + o(r^2) \right) \\ &\quad - \frac{1}{6\pi^{\frac{1}{2}}} (\mathcal{A}(r))^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\mathcal{A}(r)} \tag{2.61} \\ &= r - \frac{4\pi r^3}{3\mathcal{A}(r)} + \frac{4\pi r^2}{\mathcal{A}(r)} m_{ADM}(M) - \frac{1}{3\pi^{\frac{1}{2}}} \mathcal{A}(r)^{\frac{1}{2}} + o(1) \\ &= r + \frac{4\pi r^2}{\mathcal{A}(r)} \left(m_{ADM}(M) - \frac{r}{3} \right) - \frac{2r}{3} \left(\frac{\mathcal{A}(r)}{4\pi r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + o(1). \end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Corolário [2.2](#), temos que

$$\frac{\mathcal{A}(r)}{4\pi r^2} = 1 + \frac{1}{8\pi r^2} \int_{S_r} h^{ij} \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 + O(r^{-2\tau}).$$

Assim, considere

$$\mathcal{J} = \frac{1}{8\pi r^2} \int_{S_r} h^{ij} \sigma_{ij} d\Sigma_r^0 = O(r^{-\tau}).$$

Logo,

$$\frac{\mathcal{A}(r)}{4\pi r^2} = 1 + \mathcal{J} + O(r^{-2\tau}) = 1 + O(r^{-\tau}) = O(1). \quad (2.62)$$

Então, multiplicando a segunda igualdade em (2.62) por $\frac{4\pi r^2}{\mathcal{A}(r)}$, obtemos

$$\frac{4\pi r^2}{\mathcal{A}(r)} = 1 + O(r^{-\tau}).$$

Agora, prosseguindo de forma análoga, multiplicando a primeira igualdade em (2.61) por $\frac{4\pi r^2}{\mathcal{A}(r)}$, temos que

$$\frac{4\pi r^2}{\mathcal{A}(r)} = 1 - \mathcal{J} + O(r^{-2\tau}). \quad (2.63)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(r)}{4\pi r^2} &= 1 + \mathcal{J} + O(r^{-2\tau}) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\mathcal{J} + O(r^{-2\tau})\right)^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$\left(\frac{\mathcal{A}(r)}{4\pi r^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\mathcal{J} + O(r^{-2\tau}). \quad (2.64)$$

Dessa forma, substituindo (2.63) e (2.64) em (2.61), concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{2}{\mathcal{A}(r)} \left(V(r) - \frac{1}{6\pi^{\frac{1}{2}}} (\mathcal{A}(r))^{\frac{3}{2}} \right) &= r + \frac{4\pi r^2}{\mathcal{A}(r)} \left(m_{ADM}(M) - \frac{r}{3} \right) - \frac{2r}{3} \left(\frac{\mathcal{A}(r)}{4\pi r^2} \right)^{\frac{1}{2}} + o(1) \\ &= r + (1 - \mathcal{J} + O(r^{-2\tau})) \left(m_{ADM}(M) - \frac{r}{3} \right) \\ &\quad - \frac{2r}{3} \left(1 + \frac{1}{2}\mathcal{J} + O(r^{-2\tau}) \right) + o(1) \\ &= m_{ADM}(M) + o(1), \end{aligned} \quad (2.65)$$

pois $\tau > \frac{1}{2}$. Portanto,

$$m_{ISO} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{2}{\mathcal{A}(r)} \left(V(r) - \frac{1}{6\pi^{\frac{1}{2}}} (\mathcal{A}(r))^{\frac{3}{2}} \right) = m_{ADM}(M).$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação 2.4. Vale destacar, que em alguns literaturas (Veja Huisken [11]), a massa isoperimétrica pode ser definida como

$$m_{ISO} = \frac{2}{\mathcal{A}(r)} \left(V(r) - \frac{1}{6\pi^{\frac{1}{2}}} (\mathcal{A}(r))^{\frac{3}{2}} \right).$$

Sendo assim, como analisado no resultado acima, teríamos que $\lim_{r \rightarrow \infty} m_{ISO} = m_{ADM}$.

Capítulo 3

Expansões de massas quasi-locais de esferas geodésicas

O objetivo desse capítulo é apresentarmos expansões para algumas massas quasi-locais de esferas geodésicas. Para isso, precisamos analisar algumas estruturas geométricas em coordenadas normais.

3.1 Expansão da métrica em coordenadas normais

Primeiramente, vamos analisar a expansão de Taylor da métrica de uma variedade Riemanniana. Especificamente, temos a seguinte expansão.

Lema 3.1. Sejam (N, g) uma variedade Riemanniana e $p \in N$. Então, para qualquer x próximo de p , os componentes métricos de g nas coordenadas normais podem ser expressos como

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \delta_{ij} + \frac{1}{3}R_{iklj}(p)x^k x^l + \frac{1}{6}R_{iklj;m}(p)x^k x^l x^m \\ &+ \left(\frac{1}{20}R_{iklj;mn}(p) + \frac{2}{45}R_{ikls}(p)R_{jmns}(p) \right) x^k x^l x^m x^n + O(r^5). \end{aligned}$$

Demonstração: Como analisado no capítulo 1, vamos iniciar fixando

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$$

e consideremos $\gamma(t) = (tx^1, \dots, tx^n)$ uma geodésica radial, então

$$J(t) = tW^i \partial_i$$

é um campo de Jacobi em $\gamma(t)$, com $W^i \in \mathbb{R}$, $J(0) = 0$ e $\dot{J}(0) = W^i \partial_i$. Sendo assim,

considere

$$f(t) = \langle J(t), J(t) \rangle.$$

A fim de facilitar as notações durante as contas que faremos a seguir, denote $\cdot$ como a derivada covariante com respeito a t , e defina o operador $R_\gamma : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, como

$$R_\gamma X = RX = R(X, \dot{\gamma})\dot{\gamma}. \quad (3.1)$$

Logo, pela simetrias de R , tem-se

$$\langle RX, Y \rangle = \langle RY, X \rangle, \quad (3.2)$$

pois,

$$\begin{aligned} \langle R(X, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, Y \rangle &= -\langle R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma}, Y \rangle \\ &= -(-\langle R(\dot{\gamma}, X)Y, \dot{\gamma} \rangle) \\ &= \langle R(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, X \rangle. \end{aligned}$$

Isto significa que R é um operador simétrico e derivando (3.1) também podemos concluir que $\dot{R}, \ddot{R}, \ddot{\ddot{R}}, \dots$, são simétricos. De fato, por derivação, obtemos

$$\langle \dot{R}X, Y \rangle + \langle RX, \dot{Y} \rangle = \langle \dot{R}Y, X \rangle + \langle RY, \dot{X} \rangle.$$

Assim,

$$\langle \dot{R}X, Y \rangle + \langle R\dot{X}, Y \rangle + \langle RX, \dot{Y} \rangle = \langle \dot{R}Y, X \rangle + \langle R\dot{Y}, X \rangle + \langle RY, \dot{X} \rangle$$

E, por (3.2), temos que

$$\langle \dot{R}X, Y \rangle = \langle \dot{R}Y, X \rangle$$

e de forma análoga mostra-se as simetrias de $\ddot{R}, \ddot{\ddot{R}}, R^4, \dots$. Além disso, pela equação de Jacobi, vista anteriormente em (1.3), temos que

$$\ddot{J} = RJ. \quad (3.3)$$

Agora, vamos calcular as derivadas de $f = \langle J, J \rangle$ até ordem 6. Então, note que

$$f'(t) = 2\langle \dot{J}, J \rangle. \quad (3.4)$$

Por (3.3), temos que

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2\langle \ddot{J}, J \rangle + 2\langle \dot{J}, \dot{J} \rangle \\ &= 2\langle RJ, J \rangle + 2\langle \dot{J}, \dot{J} \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Daí, derivando novamente e utilizando a simetria de R e suas derivadas, obtemos que

$$\begin{aligned} f'''(t) &= 2\langle \dot{R}J, J \rangle + 2\langle RJ, \dot{J} \rangle + 2\langle \ddot{J}, \dot{J} \rangle + 2\langle \dot{J}, \ddot{J} \rangle \\ &= 2\langle \dot{R}J, J \rangle + 2\langle R\dot{J}, J \rangle + 2\langle RJ, \dot{J} \rangle + 4\langle R, \dot{J} \rangle \\ &= 2\langle \dot{R}J, J \rangle + 8\langle R\dot{J}, J \rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Similarmente, tem-se

$$\begin{aligned} f^{(4)}(t) &= 2\langle \ddot{R}J, J \rangle + 2\langle \dot{R}\dot{J}, J \rangle + 2\langle \dot{R}J, \dot{J} \rangle + 8\langle \dot{R}\dot{J}, J \rangle + 8\langle R\ddot{J}, J \rangle + 8\langle R\dot{J}, \dot{J} \rangle \\ &= 2\langle \ddot{R}J, J \rangle + 12\langle \dot{R}\dot{J}, J \rangle + 8\langle RJ, RJ \rangle + 8\langle R\dot{J}, \dot{J} \rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} f^{(5)}(t) &= 2\langle \ddot{R}\dot{J}, J \rangle + 2\langle \ddot{R}\dot{J}, J \rangle + 2\langle \ddot{R}J, \dot{J} \rangle + 12\langle \ddot{R}\dot{J}, J \rangle + 12\langle \dot{R}\ddot{J}, J \rangle + 12\langle \dot{R}\dot{J}, \dot{J} \rangle \\ &+ 8\langle \dot{R}\dot{J}, RJ \rangle + 8\langle R\dot{J}, RJ \rangle + 8\langle RJ, R\dot{J} \rangle + 8\langle RJ, R\dot{J} \rangle + 8\langle \dot{R}\dot{J}, \dot{J} \rangle + 8\langle R\ddot{J}, \dot{J} \rangle \\ &+ 8\langle R\dot{J}, \ddot{J} \rangle \\ &= 2\langle \ddot{R}\dot{J}, J \rangle + 16\langle \ddot{R}\dot{J}, J \rangle + 28\langle \dot{R}\dot{J}, RJ \rangle + 20\langle \dot{R}\dot{J}, \dot{J} \rangle + 32\langle R\dot{J}, RJ \rangle. \end{aligned} \quad (3.8)$$

E,

$$\begin{aligned} f^{(6)}(t) &= 2\langle R^4J, J \rangle + 2\langle \ddot{R}\dot{J}, J \rangle + 2\langle \ddot{R}J, \dot{J} \rangle + 16\langle \ddot{R}\dot{J}, J \rangle + 16\langle \dot{R}\ddot{J}, J \rangle + 16\langle \dot{R}\dot{J}, \dot{J} \rangle \\ &+ 28\langle \ddot{R}\dot{J}, RJ \rangle + 28\langle \dot{R}\dot{J}, RJ \rangle + 28\langle \dot{R}J, \dot{R}J \rangle + 28\langle \dot{R}J, R\dot{J} \rangle + 20\langle \ddot{R}\dot{J}, \dot{J} \rangle \\ &+ 20\langle \dot{R}\ddot{J}, \dot{J} \rangle + 20\langle \dot{R}\dot{J}, \ddot{J} \rangle + 32\langle \dot{R}\dot{J}, RJ \rangle + 32\langle R\ddot{J}, RJ \rangle + 32\langle R\dot{J}, \dot{R}J \rangle \\ &+ 32\langle R\dot{J}, R\dot{J} \rangle \\ &= 2\langle R^4J, J \rangle + 20\langle \ddot{R}\dot{J}, J \rangle + 44\langle \ddot{R}J, RJ \rangle + 36\langle \ddot{R}\dot{J}, \dot{J} \rangle + 100\langle \dot{R}\dot{J}, RJ \rangle \\ &+ 28\langle \dot{R}J, \dot{R}J \rangle + 60\langle \dot{R}J, R\dot{J} \rangle + 32\langle R\ddot{J}, RJ \rangle + 32\langle R\dot{J}, R\dot{J} \rangle. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sabemos que

$$J(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{J}(0) = W = W^i \partial_i.$$

3. Expansões de massas quasi-locais de esferas geodésicas

Então, analisando (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9) quando $t = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 0; \\
 f'(0) &= 0; \\
 f''(0) &= 2\langle W, W \rangle; \\
 f'''(0) &= 0; \\
 f^{(4)}(0) &= 8\langle W, RW \rangle = 8\langle R(W, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, W \rangle; \\
 f^{(5)}(0) &= 20\langle W, R \rangle = 20\langle \nabla_t R(W, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, W \rangle; \\
 f^{(6)}(0) &= 32\langle RW, RW \rangle + 36\langle W, \ddot{R}W \rangle \\
 &= 32\langle R(W, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, R(W, \dot{\gamma})\dot{\gamma} \rangle + 36\langle \nabla_t^2 R(W, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, W \rangle.
 \end{aligned}$$

Observando que $\dot{J}(0) = W = W^i \partial_i(p)$, $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$, $\dot{\gamma}(0) = (x^1, x^2, \dots, x^n) = x^i \partial_i$ e que derivada covariante de um tensor de ordem n é um tensor de ordem $n + 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
 f(0) &= f'(0) = f'''(0) = 0; \\
 f''(0) &= 2\langle W^i \partial_i(p), W^j \partial_j(p) \rangle = 2g_{ij}(p)W^i W^j = 2\delta_{ij}W^i W^j; \\
 f^{(4)}(0) &= 8\langle R(W, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, W \rangle = 8R_{iklj}x^k x^l W^i W^j; \\
 f^{(5)}(0) &= 20\langle \nabla_t R(W, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, W \rangle = 20R_{iklj;m}x^k x^l x^m W^i W^j; \\
 f^{(6)}(0) &= 32\langle R(W, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, R(W, \dot{\gamma})\dot{\gamma} \rangle + 36\langle \nabla_t^2 R(W, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, W \rangle \\
 &= (32R_{ikls}R_{jmns} + 36R_{iklj;mn})x^k x^l x^m x^n W^i W^j.
 \end{aligned}$$

Também sabe-se que $f(t) = \langle J(t), J(t) \rangle$, em que $J(t) = tW^i \partial_i$, com $\gamma(t) = tx$. Logo,

$$\begin{aligned}
 f(t) &= g(tW^i \partial_i, tW^j \partial_j) \\
 &= t^2 W^i W^j g(\partial_i, \partial_j),
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(t) = t^2 g_{ij}(tx) W^i W^j.$$

Por outro lado, a expansão de Taylor de ordem 6 em $t = 0$ é

$$f(t) = f(0) + \sum_{i=1}^6 \frac{1}{i!} f^{(i)}(0) t^i + O(t^7).$$

Dessa forma, ficamos com

$$\begin{aligned} t^2 g_{ij}(tx) W^i W^j &= \frac{2}{2!} \delta_{ij} t^2 W^i W^j + \frac{8}{4!} R_{iklj} x^l x^k t^4 W^i W^j + \frac{20}{5!} R_{iklj;m} x^k x^l x^m t^5 W^i W^j \\ &+ \frac{1}{6!} t^6 (32 R_{ikls} R_{jmns} + 36 R_{iklj;mn}) x^k x^l x^m x^n W^i W^j + O(t^7). \end{aligned}$$

Logo, para $t \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} g_{ij}(tx) &= \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{iklj} x^l x^k t^2 + \frac{1}{6} R_{iklj;m} x^k x^l x^m t^3 \\ &+ \left(\frac{1}{20} R_{iklj;mn} + \frac{2}{45} R_{ikls} R_{jmns} \right) t^4 x^k x^l x^m x^n + O(t^5). \end{aligned}$$

Portanto, fazendo uma simples mudança de variável, concluímos que

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{iklj} x^l x^k + \frac{1}{6} R_{iklj;m} x^k x^l x^m \\ &+ \left(\frac{1}{20} R_{iklj;mn} + \frac{2}{45} R_{ikls} R_{jmns} \right) x^k x^l x^m x^n + O(r^5), \end{aligned}$$

em que $|x| = r$. ■

Uma consequência do Lema [3.1](#) é o seguinte resultado, o qual garante uma expansão de Taylor de ordem 5 para o determinante da métrica em coordenadas normais.

Corolário 3.2. Sejam (N, g) uma variedade Riemannina e $p \in N$. Então, para qualquer x próximo de p , os componentes métricos de g nas coordenadas normais podem ser expressos como

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= 1 - \frac{1}{3} R_{ij} x^i x^j - \frac{1}{6} R_{ij;k} x^i x^j x^k \\ &- \left(\frac{1}{20} R_{ij;kl} + \frac{1}{90} R_{hijm} R_{hklm} - \frac{1}{18} R_{ij} R_{kl} \right) x^i x^j x^k x^l + O(r^5). \end{aligned}$$

Demonstração: Note que na demonstração do Lema [3.1](#) podemos definir

$$RX = R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma} = -R(X, \dot{\gamma})\dot{\gamma}.$$

Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{iklj}(p) x^k x^l - \frac{1}{6} R_{iklj;m}(p) x^k x^l x^m \\ &+ \left(-\frac{1}{20} R_{iklj;mn}(p) + \frac{2}{45} R_{ikls}(p) R_{jmns}(p) \right) x^k x^l x^m x^n + O(r^5). \quad (3.10) \end{aligned}$$

Além disso, denotando $g = g_{ij}(x)$ afirmamos que a expansão de Taylor de ordem 5 do

determinante de g_{ij} é dada por:

$$\begin{aligned} \det g(x) &= \det g(p) + \partial_i(\det g)(p)x^i + \frac{1}{2!}\partial_{ij}^2(\det g)(p)x^i x^j + \frac{1}{3!}\partial_{ijk}^3(\det g)(p)x^i x^j x^k \\ &+ \frac{1}{4!}\partial_{ijkl}^4(\det g)(p)x^i x^j x^k x^l + O(r^5). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Observe que de (3.10) temos que

$$g(p) = \delta_{ij}, \quad \partial_k g(p) = 0, \quad \partial_{kl}^2 g(p) = -\frac{2}{3}R_{iklj}(p), \quad \partial_{klm}^3 g(p) = -R_{iklj;m}(p)$$

e

$$\partial_{klmn}^4 g(p) = 4! \left(-\frac{1}{20}R_{iklj;mn}(p) + \frac{1}{45}R_{ikls}(p)R_{jmns}(p) \right).$$

Encontraremos os coeficientes da expansão analisada em (3.11). Dessa forma, note que

$$\det(g(p)) = \det(\delta_{ij}) = 1. \quad (3.12)$$

Por outro lado, sabemos que

$$\partial_k(\det g) = g^{-1}\partial_k g.$$

Logo,

$$\partial_k(\det g)(p) = 0. \quad (3.13)$$

Além disso, pela regra de derivação do produto, tem-se

$$\begin{aligned} \partial_{kl}^2(\det g) &= \partial_l(g^{-1}\partial_k g) \\ &= (\partial_l g^{-1})(\partial_k g) + g^{-1}\partial_{kl}^2 g. \end{aligned}$$

Assim, analisando em p , temos que

$$\partial_{kl}^2(\det g)(p) = g^{-1} \left(-\frac{2}{3}R_{iklj}(p) \right) = -\frac{2}{3}R_{kl}(p), \quad (3.14)$$

visto que $\partial_k g(p) = 0$, pois estamos trabalhando em coordenadas normais. Analogamente,

$$\begin{aligned} \partial_{klm}^3(\det g) &= \partial_m(\partial_l g^{-1}\partial_k g + g^{-1}\partial_{kl}^2 g) \\ &= (\partial_{lm}^2 g^{-1})(\partial_k g) + (\partial_l g^{-1})(\partial_{km}^2 g) + (\partial_m g^{-1})(\partial_{kl}^2 g) + g^{-1}\partial_{klm}^3 g. \end{aligned}$$

No entanto, como $\partial_a g(p) = 0$, então $\partial_a g^{-1}(p) = 0$. Logo,

$$\partial_{klm}^3(\det g)(p) = -g^{-1}R_{iklj;m}(p).$$

Daí, para explicitar $\partial_{klm}^3(\det g)(p)$, analisaremos $g^{-1}R_{iklj;m}$. Sendo assim, note que

$$\begin{aligned} g^{-1}R_{iklj;m} &= \partial_m(g^{-1}R_{iklj}) - (\partial_m g^{-1})R_{iklj} \\ &= \partial_m(R_{kl}) - (\partial_m g^{-1})R_{iklj} \\ &= R_{kl;m} - (\partial_m g^{-1})R_{iklj}. \end{aligned}$$

E, como $\partial_m g^{-1}(p) = 0$, concluímos que

$$g^{-1}R_{iklj;m}(p) = R_{kl;m}(p).$$

Logo,

$$\partial_{klm}^3(\det g)(p) = -R_{kl;m}(p). \quad (3.15)$$

Por fim, para determinarmos a expansão de Taylor de ordem 5 do determinante da métrica, precisamos encontrar $\partial_{klmn}^4(\det g)(p)$. Para tanto, mostraremos o seguinte fato:

$$\partial_{st}^2(g^{-1}) = -g^{-1}(\partial_{st}^2 g)g^{-1}$$

em p . Com efeito, sabemos que $gg^{-1} = \delta$, então $\partial_t(gg^{-1}) = 0$. Daí,

$$(\partial_{st}^2 g)g^{-1} + (\partial_t)g(\partial_s g^{-1}) + (\partial_s g)(\partial_t g^{-1}) + g(\partial_{st}^2 g^{-1}) = 0.$$

Assim, avaliando em p , concluímos que

$$\partial_{st}^2 g^{-1} = -g^{-1}(\partial_{st}^2 g)g^{-1}.$$

Agora vamos analisar $\partial_{klmn}^4(\det g)(p)$. Observe que,

$$\begin{aligned} \partial_{klmn}^4(\det g) &= \partial_n[(\partial_{lm}^2 g^{-1})(\partial_k g) + (\partial_l g^{-1})(\partial_{km}^2 g) + (\partial_m g^{-1})(\partial_{kl}^2 g) + g^{-1}\partial_{klm}^3 g] \\ &= (\partial_{lmn}^3 g^{-1})(\partial_k g) + (\partial_{lm}^2 g^{-1})(\partial_{kn}^2 g) + (\partial_{ln}^2 g^{-1})(\partial_{km}^2 g) + (\partial_l g^{-1})(\partial_{kmn}^3 g) \\ &+ (\partial_{mn}^2 g^{-1})(\partial_{kl}^2 g) + (\partial_m g^{-1})(\partial_{kln}^3 g) + (\partial_n g^{-1})(\partial_{klm}^3 g) + g^{-1}\partial_{klmn}^4 g. \end{aligned}$$

Desse modo, quando avaliamos a derivada acima em p , tem-se

$$\begin{aligned}
 \partial_{klmn}^4(\det g)(p) &= -(g^{-1}\partial_{lm}^2 g(p))(g^{-1}\partial_{kn}^2 g(p)) - (g^{-1}\partial_{ln}^2 g(p))(g^{-1}\partial_{km}^2 g(p)) \\
 &\quad - (g^{-1}\partial_{mn}^2 g(p))(g^{-1}\partial_{kl}^2 g(p)) + g^{-1}\partial_{klmn}^4 g(p) \\
 &= -g^{-1}\left(\frac{2}{3}R_{iljm}(p)\right)g^{-1}\left(-\frac{2}{3}R_{iknj}(p)\right) \\
 &\quad - g^{-1}\left(\frac{2}{3}R_{iljn}(p)\right)g^{-1}\left(-\frac{2}{3}R_{ikmj}(p)\right) \\
 &\quad - g^{-1}\left(\frac{2}{3}R_{imjn}(p)\right)g^{-1}\left(-\frac{2}{3}R_{iklj}(p)\right) + g^{-1}\partial_{klmn}^4 g(p) \\
 &= \frac{4}{9}(R_{lm}(p)R_{kn}(p) + R_{ln}(p)R_{km}(p) + R_{mn}(p)R_{kl}(p)) \\
 &\quad + g^{-1}\partial_{klmn}^4 g(p).
 \end{aligned}$$

Então basta analisarmos $g^{-1}\partial_{klmn}^4 g(p)$. Note que,

$$\begin{aligned}
 g^{-1}\partial_{klmn}^4 g(p) &= 4!\left(-\frac{1}{20}(g^{-1}R_{iklj;mn})(p) + \frac{1}{45}\delta^{ij}R_{ikls}(p)R_{jmns}(p)\right) \\
 &= 4!\left(-\frac{1}{20}(g^{-1}R_{iklj;mn})(p) + \frac{1}{45}R_{tkls}(p)R_{tmns}(p)\right).
 \end{aligned}$$

Daí, resta analisarmos $g^{-1}R_{iklj;mn}(p)$. Para isso, observe que

$$\begin{aligned}
 g^{-1}R_{iklj;mn} &= \partial_n(g^{-1}R_{iklj;m}) - (\partial_n g^{-1})R_{iklj;m} \\
 &= \partial_n[\partial_m(g^{-1}R_{iklj}) - (\partial_m g^{-1})R_{iklj}] - (\partial_n g^{-1})R_{iklj;m} \\
 &= \partial_n(\partial_m(R_{kl})) - (\partial_{mn}^2 g^{-1})R_{iklj} - (\partial_m g^{-1})R_{iklj;n} - (\partial_n g^{-1})R_{iklj;m} \\
 &= R_{kl;mn} - (\partial_{mn}^2 g^{-1})R_{iklj} - (\partial_m g^{-1})R_{iklj;n} - (\partial_n g^{-1})R_{iklj;m}.
 \end{aligned}$$

E, como $g^{-1}(p) = \delta_{ij}$, pois estamos trabalhando em coordenadas normais, então

$$\begin{aligned}
 g^{-1}R_{iklj;mn}(p) &= R_{kl;mn}(p) + g^{-1}(\partial_{mn}^2 g(p))(g^{-1}R_{iklj}(p)) \\
 &= R_{kl;mn}(p) + \frac{2}{3}R_{tmns}(p)R_{tkls}(p).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 g^{-1}\partial_{klmn}^4 g(p) &= 4! \left(-\frac{1}{20}(g^{-1}R_{iklj;mn})(p) + \frac{1}{45}\delta^{ij}R_{ikls}(p)R_{jmns}(p) \right) \\
 &= 4! \left(-\frac{1}{20}R_{kl;mn}(p) - \frac{2}{60}R_{tmns}(p)R_{tkls}(p) + \frac{1}{45}R_{tkls}(p)R_{tmns}(p) \right) \\
 &= 4! \left(-\frac{1}{20}(g^{-1}R_{iklj;mn})(p) + \frac{1}{45}\delta^{ij}R_{ikls}(p)R_{jmns}(p) \right) \\
 &= 4! \left(-\frac{1}{20}R_{kl;mn}(p) - \frac{1}{90}R_{tkls}(p)R_{tmns}(p) \right).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \partial_{klmn}^4(\det g)(p) &= \frac{4}{9}(R_{lm}(p)R_{kn}(p) + R_{ln}(p)R_{km}(p) + R_{mn}(p)R_{kl}(p)) \\
 &\quad + 4! \left(-\frac{1}{20}R_{kl;mn}(p) - \frac{1}{90}R_{tkls}(p)R_{tmns}(p) \right). \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

Portanto, substituindo (3.12) - (3.16) em (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}
 \det(g_{ij}) &= 1 - \frac{1}{2!} \frac{2}{3} R_{ij} x^i x^j - \frac{1}{3!} R_{ij;k} x^i x^j x^k \\
 &\quad + \frac{1}{4!} \left(\frac{4}{9} (R_{jk}(p)R_{il}(p) + R_{jl}(p)R_{ik}(p) + R_{kl}(p)R_{ij}(p)) \right) x^i x^j x^k x^l \\
 &\quad - \frac{1}{4!} \left[4! \left(\frac{1}{20} R_{ij;kl} + \frac{1}{90} R_{hijm} R_{hklm} \right) \right] x^i x^j x^k x^l + O(r^5) \\
 &= 1 - \frac{1}{3} R_{ij} x^i x^j - \frac{1}{6} R_{ij;k} x^i x^j x^k + \frac{4}{4!9} (3R_{ij}(p)R_{kl}(p)) x^i x^j x^k x^l \\
 &\quad - \left(\frac{1}{20} R_{ij;kl} + \frac{1}{90} R_{hijm} R_{hklm} \right) x^i x^j x^k x^l + O(r^5) \\
 &= 1 - \frac{1}{3} R_{ij} x^i x^j - \frac{1}{6} R_{ij;k} x^i x^j x^k \\
 &\quad - \left(\frac{1}{20} R_{ij;kl} + \frac{1}{90} R_{hijm} R_{hklm} - \frac{1}{18} R_{ij} R_{kl} \right) x^i x^j x^k x^l + O(r^5).
 \end{aligned}$$

■

3.2 Expansão de alguns objetos geométricos

A partir das expansões analisadas na seção anterior, podemos apresentar uma expansão para a área de esferas geodésicas numa variedade Riemanniana de dimensão 3.

Lema 3.3. Sejam (N, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 3 e $\mathcal{A}(r)$ a área da

3. Expansões de massas quasi-locais de esferas geodésicas

esfera geodésica $S_r = \{|x| = r\}$ com raio r em N centro p . Então,

$$\mathcal{A}(r) = 4\pi r^2 + A_4 + A_6 + O(r^7),$$

em que

$$A_4 = -\frac{2\pi r^4 R}{9}, \quad A_6 = \frac{\pi r^6}{675}(4R^2 - 2|\text{Ric}|^2 - 9\Delta R).$$

Aqui $\Delta = \Delta_g$ denota o operador Laplaciano com respeito a métrica g e $|\text{Ric}|$ é a norma do tensor Ricci. Além disso, todos os termos envolvendo as curvaturas são analisados em p .

Demonstração: Primeiramente, vamos analisar a expansão de Taylor de ordem 5 da função $\sqrt{f}$, na qual, pelo Lema [3.1](#), tem-se

$$\begin{aligned} f &= \det(g_{ij}) \\ &= 1 - \frac{1}{3}R_{ij}x^i x^j - \frac{1}{6}R_{ij;k}x^i x^j x^k \\ &\quad - \left(\frac{1}{20}R_{ij;kl} + \frac{1}{90}R_{hijm}R_{hklm} - \frac{1}{18}R_{ij}R_{kl} \right) x^i x^j x^k x^l + O(r^5). \end{aligned}$$

Então,

$$f(p) = 1, \quad \partial_i f(p) = 0, \quad \partial_{ij}^2 f(p) = -\frac{2}{3}R_{ij}(p), \quad \partial_{ijk}^3 f(p) = -R_{ij;k}(p)$$

e

$$\partial_{ijkl}^4 f(p) = -4! \left(\frac{1}{20}R_{ij;kl} + \frac{1}{90}R_{hijm}R_{hklm} - \frac{1}{18}R_{ij}R_{kl} \right).$$

Dessa forma, utilizando propriedades de derivação, temos que

$$\partial_i \sqrt{f} = \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \partial_i(f). \quad (3.17)$$

E, derivando a igualdade acima em relação a j , tem-se

$$\begin{aligned} \partial_{ij}^2 \sqrt{f} &= \partial_j(\partial_i \sqrt{f}) \\ &= \partial_j \left(\frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \partial_i f \right) \\ &= -\frac{1}{4} f^{-\frac{3}{2}} (\partial_j f)(\partial_i f) + \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} (\partial_{ij}^2 f). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Agora, derivando em relação a k , obtemos

$$\begin{aligned}
 \partial_{ijk}^3 \sqrt{f} &= \partial_k(\partial_{ij}^2) \\
 &= \partial_k \left(-\frac{1}{4}(\partial_j f)(\partial_j f) + \frac{1}{2}f^{-\frac{1}{2}}(\partial_{ij}^2 f) \right) \\
 &= \frac{3}{8}f^{-\frac{5}{2}}(\partial_k f)(\partial_j f)(\partial_i f) - \frac{1}{4}f^{-\frac{3}{2}}(\partial_{kj}^2 f)(\partial_i f) - \frac{1}{4}f^{-\frac{3}{2}}(\partial_j f)(\partial_{ik}^2 f) \\
 &\quad - \frac{1}{4}f^{-\frac{3}{2}}(\partial_k f)(\partial_{ij}^2 f) + \frac{1}{2}f^{-\frac{1}{2}}\partial_{ijk}^3 f. \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
 \partial_{ijkl}^4 \sqrt{f} &= \partial_l \left(\frac{3}{8}f^{-\frac{5}{2}}(\partial_k f)(\partial_j f)(\partial_i f) \right) - \partial_l \left(\frac{1}{4}f^{-\frac{3}{2}}(\partial_{kj}^2 f)(\partial_i f) \right) \\
 &\quad - \partial_l \left(\frac{1}{4}f^{-\frac{3}{2}}(\partial_j f)(\partial_{ik}^2 f) \right) - \partial_l \left(\frac{1}{4}f^{-\frac{3}{2}}(\partial_k f)(\partial_{ij}^2 f) \right) \\
 &\quad + \partial_l \left(\frac{1}{2}f^{-\frac{1}{2}}\partial_{ijk}^3 f \right) \\
 &= -\frac{15}{16}f^{-\frac{7}{2}}(\partial_l f)(\partial_k f)(\partial_j f)(\partial_i f) + \frac{3}{8}f^{-\frac{5}{2}}(\partial_{kl}^2 f)(\partial_j f)(\partial_i f) \\
 &\quad + \frac{3}{8}f^{-\frac{5}{2}}(\partial_k f)(\partial_{jl}^2 f)(\partial_i f) + \frac{3}{8}f^{-\frac{5}{2}}(\partial_k f)(\partial_j f)(\partial_{il}^2 f) \\
 &\quad + \frac{3}{8}f^{-\frac{5}{2}}(\partial_l f)(\partial_{kj}^2 f)(\partial_i f) - \frac{1}{4}f^{-\frac{3}{2}}(\partial_{kij}^3 f)(\partial_i f) \\
 &\quad - \frac{1}{4}f^{-\frac{3}{2}}(\partial_{kj}^2 f)(\partial_{il}^2 f) + \frac{3}{8}f^{-\frac{5}{2}}(\partial_l f)(\partial_j f)(\partial_{ik}^2 f) \\
 &\quad - \frac{1}{4}f^{-\frac{3}{2}}(\partial_{jl}^2 f)(\partial_{ik}^2 f) - \frac{1}{4}f^{-\frac{3}{2}}(\partial_j f)(\partial_{ikl}^3 f) \\
 &\quad + \frac{3}{8}f^{-\frac{5}{2}}(\partial_l f)(\partial_k f)(\partial_{ij}^2 f) - \frac{1}{4}f^{-\frac{3}{2}}(\partial_{lk}^2 f)(\partial_{ij}^2 f) \\
 &\quad - \frac{1}{4}f^{-\frac{3}{2}}(\partial_k f)(\partial_{ijl}^3 f) - \frac{1}{4}f^{-\frac{3}{2}}(\partial_l f)(\partial_{ijk}^3 f) + \frac{1}{2}f^{-\frac{1}{2}}(\partial_{ijkl}^4 f). \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Daí, pelo que já observamos no início da demonstração e analisando [\(3.17\)](#), [\(3.18\)](#), [\(3.19\)](#) e [\(3.20\)](#) em p , obtemos

$$\sqrt{f}(p) = 1, \quad \partial_i \sqrt{f}(p) = 0, \quad \partial_{ij}^2 \sqrt{f}(p) = -\frac{1}{3}R_{ij}, \quad \partial_{ijk}^3 \sqrt{f}(p) = -\frac{1}{2}R_{ij;k}$$

e

$$\begin{aligned}
 \partial_{ijkl}^4 \sqrt{f}(p) &= -\frac{1}{4} \left[\left(\frac{2}{3}R_{kj} \right) \left(\frac{2}{3}R_{il} \right) + \left(\frac{2}{3}R_{jl} \right) \left(\frac{2}{3}R_{ik} \right) + \left(\frac{2}{3}R_{lk} \right) \left(\frac{2}{3}R_{ij} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{4!}{2} \left(\frac{1}{20}R_{ij;kl} + \frac{1}{90}R_{hijm}R_{hklm} - \frac{1}{18}R_{ij}R_{kl} \right).
 \end{aligned}$$

Por outro lado, a expansão de Taylor de f de ordem 5 é dada por

$$\begin{aligned}\sqrt{f}(x) &= \sqrt{f}(p) + \partial_i \sqrt{f}(p) x^i + \frac{1}{2!} \partial_{ij}^2 \sqrt{f}(p) x^i x^j + \frac{1}{3!} \partial_{ijk}^3 \sqrt{f}(p) x^i x^j x^k \\ &+ \frac{1}{4!} \partial_{ijkl}^4 \sqrt{f}(p) x^i x^j x^k x^l + O(r^5).\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\sqrt{f}(x) &= 1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} R_{ij} x^i x^j \right) + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2} R_{ij;k} \right) x^i x^j x^k \\ &- \frac{1}{4!} \left(\left(\frac{1}{3} R_{kj} \right) \left(\frac{1}{3} R_{il} \right) + \left(\frac{1}{3} R_{jl} \right) \left(\frac{1}{3} R_{ik} \right) - \left(\frac{1}{3} R_{lk} \right) \left(\frac{1}{3} R_{ij} \right) \right) x^i x^j x^k x^l \\ &+ \frac{1}{4!} \left[-\frac{4!}{2} \left(\frac{1}{20} R_{ij;kl} + \frac{1}{90} R_{hijm} R_{hkml} - \frac{1}{18} R_{ij} R_{kl} \right) \right] x^i x^j x^k x^l + O(r^5) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} R_{ij} x^i x^j \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{6} R_{ij;k} \right) x^i x^j x^k - \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{3} R_{ij} x^i x^j \right)^2 \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{1}{20} R_{ij;kl} + \frac{1}{90} R_{hijm} R_{hkml} - \frac{1}{18} R_{ij} R_{kl} \right) x^i x^j x^k x^l + O(r^5),\end{aligned}$$

isto é,

$$\sqrt{f}(x) = 1 + \frac{1}{2}(b_2 + b_3 + b_4) - \frac{1}{8}(b_2)^2 + O(r^5), \quad (3.21)$$

em que

$$\begin{aligned}b_2 &= -\frac{1}{3} R_{ij} x^i x^j \\ b_3 &= -\frac{1}{6} R_{ij;k} x^i x^j x^k \\ b_4 &= -\left(\frac{1}{20} R_{ij;kl} + \frac{1}{90} R_{hijm} R_{hkml} - \frac{1}{18} R_{ij} R_{kl} \right) x^i x^j x^k x^l.\end{aligned}$$

Portanto,

$$V(r) = \int_{B_r} \sqrt{f} dv_0,$$

no qual dv_0 é o elemento de volume euclidiano com respeito a métrica euclidiana e $B_r = \{x; |x| < r\}$. Um vez que, $|\frac{\partial}{\partial r}| = 1$ na métrica g e utilizando (3.21) tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(r) &= V'(r) \\ &= \int_{S_r} \sqrt{f} d\Sigma_r^0 \\ &= \int_{S_r} \left(1 + \frac{1}{2}(b_2 + b_3 + b_4) - \frac{1}{8}(b_2)^2 + O(r^5) \right) d\Sigma_r^0 \\ &= 4\pi r^2 + \frac{1}{2} \int_{S_r} b_2 d\Sigma_r^0 + \frac{1}{2} \int_{S_r} \left(b_4 - \frac{1}{4}(b_2)^2 \right) d\Sigma_r^0 + O(r^7).\end{aligned} \quad (3.22)$$

Pois,

$$\int_{S_r} b_3 d\Sigma_r^0 = 0.$$

Com efeito, basta observar que

$$\int_{S_r} x^i x^j x^k d\Sigma_r^0 = 0.$$

Para verificar o fato acima, precisamos estudar os seguintes casos:

1º caso: Se $i = j = k$, então

$$\int_{S_r} x^i x^j x^k d\Sigma_r^0 = \int_{S_r} (x^i)^3 d\Sigma_r^0.$$

Daí, por simetria podemos considerar, sem perda de generalidade, uma parametrização através de coordenadas esféricas, tal que

$$\begin{aligned} \int_{S_r} x^i x^j x^k d\Sigma_r^0 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r \operatorname{sen} \phi \cos \theta)^3 (r^2 \operatorname{sen} \phi) d\phi d\theta \\ &= r^5 \left(\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta \right) \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}^4 \phi d\phi \right) = 0. \end{aligned}$$

E, de forma análoga podemos analisar os outros casos

2º caso: Se $i = k$ e $i \neq j$, então

$$\begin{aligned} \int_{S_r} x^i x^j x^k d\Sigma_r^0 &= \int_{S_r} (x^i)^2 x^k d\Sigma_r^0 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r \operatorname{sen} \phi \cos \theta)^2 (r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta) (r^2 \operatorname{sen} \phi) d\phi d\theta \\ &= r^5 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta \right) \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}^4 \phi d\phi \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

3º caso: Se $i \neq j$, $i \neq k$ e $j \neq k$, então

$$\begin{aligned} \int_{S_r} x^i x^j x^k d\Sigma_r^0 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r \operatorname{sen} \phi \cos \theta) (r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta) (r \cos \phi) (r^2 \operatorname{sen} \phi) d\theta d\phi \\ &= r^5 \left(\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 \phi \cos \phi d\phi \right) \left(\int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, como os tensores estão avaliadas em p , concluímos

$$\int_{S_r} b_3 d\Sigma_r^0 = \int_{S_r} \left(-\frac{1}{6} R_{ij;k} x^i x^j x^k \right) d\Sigma_r^0 = -\frac{1}{6} R_{ij;k} \int_{S_r} x^i x^j x^k d\Sigma_r^0 = 0.$$

3. Expansões de massas quasi-locais de esferas geodésicas

Agora, a fim de encontrarmos uma expansão para $\mathcal{A}(r)$, necessitamos calcular as integrais em (3.22). Para isto, vamos iniciar calculando

$$\frac{1}{2} \int_{S_r} b_2 d\Sigma_r^0 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \int_{S_r} R_{ij} x^i x^j d\Sigma_r^0 \right). \quad (3.23)$$

A priori, observe que como as coordenadas normais são escolhidas de modo que a curvatura Ricci seja da forma $R_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, em que λ_1, λ_2 e λ_3 são os autovalores do tensor de Ricci, então

$$R_{ij} x^i x^j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \lambda_i \delta_{ij} x^i x^j = \sum_{i=1}^3 \lambda_i (x^i)^2.$$

Logo, para calcularmos (3.23), é suficiente encontrarmos

$$\int_{S_r} (x^i)^2 d\Sigma_r^0.$$

Então, por simetria e sem perda de generalidade, temos que

$$\begin{aligned} \int_{S_r} (x^i)^2 d\Sigma_r^0 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r \sin\phi \cos\theta)^2 (r^2 \sin\phi) d\phi d\theta \\ &= r^4 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi \right) \\ &= \frac{4}{3} \pi r^4, \end{aligned} \quad (3.24)$$

para todo, $i \in \{1, 2, 3\}$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{S_r} b_2 d\Sigma_r^0 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \int_{S_r} R_{ij} x^i x^j d\Sigma_r^0 \right) \\ &= -\frac{1}{6} \int_{S_r} \sum_{i=1}^3 \lambda_i (x^i)^2 d\Sigma_r^0 \\ &= -\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \int_{S_r} \lambda_i (x^i)^2 d\Sigma_r^0 \\ &= -\frac{1}{6} \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i \right) \left(\frac{4}{3} \pi r^4 \right) \\ &= -\frac{2\pi r^4}{9} R, \end{aligned} \quad (3.25)$$

3. Expansões de massas quasi-locais de esferas geodésicas

onde $R = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. De agora em diante, vamos computar a seguinte integral

$$\int_{S_r} \left(b_4 - \frac{1}{4}(b_2)^2 \right) d\Sigma_r^0.$$

Primeiramente, reorganizando os termos em b_4 , obtemos

$$\begin{aligned} b_4 &= - \left(\frac{1}{20} R_{ij;kl} + \frac{1}{90} R_{hijm} R_{hklm} - \frac{1}{18} R_{ij} R_{kl} \right) x^i x^j x^k x^l \\ &= - \frac{1}{20} R_{ij;kl} x^i x^j x^k x^l - \frac{1}{90} \sum_{h,m} \left(\sum_{i,j} R_{hijm} x^i x^j \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \sum_{ij} R_{ij} x^i x^j \right)^2 \\ &= - \frac{1}{20} R_{ij;kl} x^i x^j x^k x^l - \frac{1}{90} \sum_{h,m} \left(\sum_{k,l} R_{hklm} x^k x^l \right)^2 + \frac{1}{2} (b_2)^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{S_r} \left(b_4 - \frac{1}{4}(b_2)^2 \right) d\Sigma_r^0 &= -\frac{1}{4} \int_{S_r} (b_2)^2 d\Sigma_r^0 - \frac{1}{20} \int_{S_r} \sum_{i,j,k,l} R_{ij;kl} x^i x^j x^k x^l d\Sigma_r^0 \\ &\quad - \frac{1}{90} \int_{S_r} \sum_{h,m} \left(\sum_{k,l} R_{hklm} x^k x^l \right)^2 d\Sigma_r^0 + \frac{1}{2} \int_{S_r} (b_2)^2 d\Sigma_r^0 \\ &= \frac{1}{4} \int_{S_r} (b_2)^2 d\Sigma_r^0 - \frac{1}{20} \int_{S_r} \sum_{i,j,k,l} R_{ij;kl} x^i x^j x^k x^l d\Sigma_r^0 \\ &\quad - \frac{1}{90} \int_{S_r} \sum_{h,m} \left(\sum_{k,l} R_{hklm} x^k x^l \right)^2 d\Sigma_r^0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Desse modo, vamos calcular

$$\int_{S_r} (b_2)^2 d\Sigma_r^0 = \int_{S_r} \left(-\frac{1}{3} R_{ij} x^i x^j \right)^2 d\Sigma_r^0.$$

Prosseguindo de forma análoga ao que fizemos em [\(3.24\)](#), concluímos que

$$\int_{S_r} (x^i)^4 d\Sigma_r^0 = \frac{4}{5} \pi r^6, \tag{3.27}$$

para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Além disso, como $r^2 = \sum (x^i)^2$, então

$$r^4 = \sum_{i=1}^3 (x^i)^4 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (x^i x^j)^2.$$

Daí, por simetria, tem-se

$$\int_{S_r} r^4 d\Sigma_r^0 = 3 \int_{S_r} (x^i)^4 d\Sigma_r^0 + 6 \int_{S_r} (x^i x^j)^2 d\Sigma_r^0$$

e, por (3.27), obtemos

$$4\pi r^6 = \frac{12}{5}\pi r^6 + 6 \int_{S_r} (x^i x^j)^2 d\Sigma_r^0.$$

Portanto,

$$\int_{S_r} (x^i x^j)^2 d\Sigma_r^0 = \frac{4}{15}\pi r^6, \quad (3.28)$$

para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$, com $i \neq j$. Logo, por (3.27) e (3.24)

$$\begin{aligned} \int_{S_r} (R_{ij} x^i x^j)^2 d\Sigma_r^0 &= \int_{S_r} \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i (x^i) \right)^2 d\Sigma_r^0 \\ &= \int_{S_r} \left[\sum_{i=1}^3 (\lambda_i)^2 (x^i)^4 + \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j (x^i x^j)^2 \right] d\Sigma_r^0 \\ &= \sum_{i=1}^3 (\lambda_i)^2 \int_{S_r} (x^i)^4 d\Sigma_r^0 + \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j \int_{S_r} (x^i x^j)^2 d\Sigma_r^0 \\ &= \frac{4}{5}\pi r^6 \sum_{i=1}^3 (\lambda_i)^2 + \frac{4}{15}\pi r^6 \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j \\ &= \frac{4}{15}\pi r^6 \left(3 \sum_{i=1}^3 (\lambda_i)^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j \right). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Por outro lado, note que

$$R = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad \text{e} \quad |\text{Ric}|^2 = (\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 + (\lambda_3)^2.$$

Então,

$$R^2 = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i)^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j = |\text{Ric}|^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j. \quad (3.30)$$

Em vista disso e por (3.29), temos que

$$\int_{S_r} (R_{ij} x^i x^j)^2 d\Sigma_r^0 = \frac{4}{15}\pi r^6 (2|\text{Ric}|^2 + R^2).$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
 \int_{S_r} (b_2)^2 d\Sigma_r^0 &= \int_{S_r} \left(-\frac{1}{3} R_{ij} x^i x^j \right)^2 d\Sigma_r^0 \\
 &= \frac{1}{9} \int_{S_r} (R_{ij} x^i x^j)^2 d\Sigma_r^0 \\
 &= \frac{4}{135} \pi r^6 (2|\text{Ric}|^2 + R^2). \tag{3.31}
 \end{aligned}$$

Daí, substituindo (3.31) em (3.26), tem-se

$$\begin{aligned}
 \int_{S_r} \left(b_4 - \frac{1}{4} (b_2)^2 \right) d\Sigma_r^0 &= \frac{1}{135} \pi r^6 (2|\text{Ric}|^2 + R^2) - \frac{1}{20} \int_{S_r} \sum_{i,j,k,l} R_{ij;kl} x^i x^j x^k x^l d\Sigma_r^0 \\
 &\quad - \frac{1}{90} \int_{S_r} \sum_{h,m} \left(\sum_{k,l} R_{hklm} x^k x^l \right)^2 d\Sigma_r^0. \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

Além disso, sabemos que (N, g) é tridimensional, então, pela Proposição 1.4, em p obtemos que

$$\begin{aligned}
 R_{ijkl} &= g_{ik} R_{jl} - g_{il} R_{jk} - g_{jk} R_{il} + g_{jl} R_{ik} - \frac{1}{2} R (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) \\
 &= \delta_{ik} R_{jl} - \delta_{il} R_{jk} - \delta_{jk} R_{il} + \delta_{jl} R_{ik} - \frac{1}{2} R (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}), \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

uma vez que $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$, pois estamos trabalhando em coordenadas normais. No entanto, em S_r ficamos com

$$\begin{aligned}
 R_{ijkl} x^j x^k &= \delta_{ik} R_{jl} x^j x^k - \delta_{il} R_{jk} x^j x^k - \delta_{jk} R_{il} x^j x^k + \delta_{jl} R_{ik} x^j x^k \\
 &\quad - \frac{1}{2} R (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) x^j x^k \\
 &= \delta_{ik} \lambda_l \delta_{jl} x^j x^k - \delta_{il} \lambda_k \delta_{jk} x^j x^k - \delta_{jk} \lambda_i \delta_{il} x^j x^k + \delta_{jl} \lambda_i \delta_{ik} x^j x^k \\
 &\quad - \frac{1}{2} R x^l x^i + \frac{1}{2} R \delta_{il} (x^k)^2 \\
 &= \lambda_i x^i x^l - \delta_{il} \lambda_k (x^k)^2 - \lambda_i \delta_{il} (x^k)^2 + \lambda_i x^i x^l - \frac{1}{2} R x^i x^l + \frac{1}{2} R \delta_{il} r^2 \\
 &= \left(\lambda_i + \lambda_l - \frac{R}{2} \right) x^i x^l - \delta_{il} \left(\sum_{k=1}^3 \lambda_k (x^k)^2 + \left(\lambda_i - \frac{R}{2} \right) r^2 \right). \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

3. Expansões de massas quasi-locais de esferas geodésicas

E assim, usando (3.28) e do fato que $\delta_{il} = 0$, quando $i \neq l$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{S_r} \sum_{i \neq l} \left(\sum_{j,k} R_{ijkl} x^j x^k \right)^2 d\Sigma_r^0 &= \int_{S_r} \sum_{i \neq l} \left(\left(\lambda_i + \lambda_l - \frac{R}{2} \right) x^i x^l \right)^2 d\Sigma_r^0 \\
 &= \int_{S_r} \sum_{i \neq l} \left(\lambda_i + \lambda_l - \frac{R}{2} \right)^2 (x^i x^l)^2 d\Sigma_r^0 \\
 &= \sum_{i \neq l} \left(\lambda_i + \lambda_l - \frac{R}{2} \right)^2 \int_{S_r} (x^i x^l)^2 d\Sigma_r^0 \\
 &= \frac{4}{15} \pi r^6 \sum_{i \neq l} \left(\lambda_i + \lambda_l - \frac{R}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{4}{15} \pi r^6 \left(\sum_{i \neq l} ((\lambda_i)^2 + (\lambda_l)^2) + 2 \sum_{i \neq l} \lambda_i \lambda_l \right) \\
 &\quad - \frac{4}{15} \pi r^6 \left(R \sum_{i \neq l} (\lambda_i - \lambda_l) + \sum_{i \neq l} \frac{R^2}{4} \right).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \int_{S_r} \sum_{i \neq l} \left(\sum_{j,k} R_{ijkl} x^j x^k \right)^2 d\Sigma_r^0 &= \frac{4}{15} \pi r^6 \left(4 \sum_{i=1}^3 (\lambda_i)^2 + 2 \sum_{i \neq l} \lambda_i \lambda_l - 4R^2 + \frac{6R^2}{4} \right) \\
 &= \frac{4}{15} \pi r^6 \left(2|\text{Ric}|^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^3 (\lambda_i)^2 + \sum_{i \neq l} \lambda_i \lambda_l \right) - \frac{5R^2}{2} \right) \\
 &= \frac{4}{15} \pi r^6 \left(2|\text{Ric}|^2 + 2R^2 - \frac{5}{2}R^2 \right).
 \end{aligned}$$

Então,

$$\int_{S_r} \sum_{i \neq l} \left(\sum_{j,k} R_{ijkl} x^j x^k \right)^2 d\Sigma_r^0 = \frac{4}{15} \pi r^6 \left(2|\text{Ric}|^2 - \frac{R^2}{2} \right).$$

Acabamos de analisar o caso no qual $i \neq l$, mas de agora em diante vamos analisar o caso em que $i = l$. Mais especificamente, se $i = l = 1$ então, por (3.34), (3.27) e (3.28),

tem-se

$$\begin{aligned}
 \int_{S_r} (R_{1jk1}x^jx^k)^2 d\Sigma_r^0 &= \int_{S_r} \left(\left(2\lambda_1 - \frac{R}{2}\right) (x^1)^2 - \sum_k \lambda_k (x^k)^2 - \left(\lambda_1 - \frac{R}{2}\right) r^2 \right)^2 d\Sigma_r^0 \\
 &= \int_{S_r} \left(2\lambda_1 - \frac{R}{2}\right)^2 (x^1)^4 d\Sigma_r^0 + \int_{S_r} \left(\sum_k \lambda_k (x^k)^2\right)^2 d\Sigma_r^0 \\
 &+ \int_{S_r} \left(\lambda_1 - \frac{R}{2}\right)^2 r^4 d\Sigma_r^0 - 2 \int_{S_r} \left(2\lambda_1 - \frac{R}{2}\right) \sum_k \lambda_k (x^1x^k)^2 d\Sigma_r^0 \\
 &- 2 \int_{S_r} \left(2\lambda_1 - \frac{R}{2}\right) \left(\lambda_1 - \frac{R}{2}\right) (x^1)^2 r^2 d\Sigma_r^0 \\
 &+ 2 \int_{S_r} \left(\lambda_1 - \frac{R}{2}\right) r^2 \sum_k \lambda_k (x^k)^2 d\Sigma_r^0 \\
 &= \pi r^6 \left(-\frac{4}{15}(\lambda_1)^2 + \frac{8}{15}R\lambda_1 - \frac{4}{15}R^2 + \frac{8}{15}|\text{Ric}|^2 \right).
 \end{aligned}$$

Analogamente, concluímos que

$$\int_{S_r} (R_{2jk2}x^jx^k)^2 d\Sigma_r^0 = \pi r^6 \left(-\frac{4}{15}(\lambda_2)^2 + \frac{8}{15}R\lambda_2 - \frac{4}{15}R^2 + \frac{8}{15}|\text{Ric}|^2 \right)$$

e

$$\int_{S_r} (R_{3jk3}x^jx^k)^2 d\Sigma_r^0 = \pi r^6 \left(-\frac{4}{15}(\lambda_3)^2 + \frac{8}{15}R\lambda_3 - \frac{4}{15}R^2 + \frac{8}{15}|\text{Ric}|^2 \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int_{S_r} \sum_{i,l} \left(\sum_{j,k} R_{ijkl}x^jx^k \right)^2 d\Sigma_r^0 &= \int_{S_r} \sum_{i \neq l} \left(\sum_{j,k} R_{ijkl}x^jx^k \right)^2 d\Sigma_r^0 \\
 &+ \int_{S_r} \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j,k} R_{ijkix^jx^k} \right)^2 d\Sigma_r^0 \\
 &= \frac{4}{15}\pi r^6 \left(2|\text{Ric}|^2 - \frac{R^2}{2} \right) + \pi r^6 \left(-\frac{4}{15} \sum_{i=1}^3 (\lambda_i)^2 \right) \\
 &+ \pi r^6 \left(\left(\frac{8}{15}R \sum_{i=1}^3 \lambda_i \right) + 3 \left(\frac{4}{15}R^2 + \frac{8}{15}|\text{Ric}|^2 \right) \right).
 \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}
 \int_{S_r} (R_{ijkl}x^jx^k)^2 d\Sigma_r^0 &= \pi r^6 \left(\frac{8}{15}|\text{Ric}|^2 - \frac{2}{15}R^2 - \frac{4}{15}|\text{Ric}|^2 + \frac{8}{15}R^2 - \frac{4}{5}R^2 + \frac{8}{5}|\text{Ric}|^2 \right) \\
 &= \frac{1}{15}(28|\text{Ric}|^2 - 6R^2)\pi r^6. \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

Por fim, basta calcularmos

$$\int_{S_r} \sum_{i,j,k,l} R_{ij;kl} x^i x^j x^k x^l d\Sigma_r^0.$$

Inicialmente, seguindo de maneira similar ao que já fizemos noutros momentos durante a demonstração, podemos perceber que se $i = l$, $i \neq j$, $i \neq k$ e $k \neq j$, então

$$\begin{aligned} \int_{S_r} x^i x^j x^k x^l d\Sigma_r^0 &= \int_{S_r} (x^i)^2 x^j x^k d\Sigma_r^0 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r \operatorname{sen} \phi \cos \theta)^2 (r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta) (r \cos \phi) (r^2 \operatorname{sen} \phi) d\phi d\theta \\ &= r^6 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta \right) \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}^4 \phi \cos \phi d\phi \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $i = l = k$ e $i \neq j$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{S_r} x^i x^j x^k x^l d\Sigma_r^0 &= \int_{S_r} (x^i)^3 x^j d\Sigma_r^0 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r \operatorname{sen} \phi \cos \theta)^3 (r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta) (r^2 \operatorname{sen} \phi) d\phi d\theta \\ &= r^6 \left(\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta \right) \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}^5 \phi d\phi \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, por simetria e sem perda de generalidade concluímos que

$$\int_{S_r} \sum_{i,j,k,l} R_{ij;kl} x^i x^j x^k x^l d\Sigma_r^0 = 0,$$

a menos nos casos em que $x^i x^j x^k x^l = (x^i)^4$ ou $x^i x^j x^k x^l = (x^i x^j)^2$, com $i \neq j$. E, sabemos que

$$\int_{S_r} (x^i)^4 d\Sigma_r^0 = \frac{4}{5} \pi r^6 \quad \text{e} \quad \int_{S_r} (x^i x^j)^2 d\Sigma_r^0 = \frac{4}{15} \pi r^6.$$

Daí, observamos que

$$\begin{aligned}
\int_{S_r} \sum_{j,k,l} R_{1j;kl} x^1 x^j x^k x^l d\Sigma_r^0 &= \sum_{k,l} \int_{S_r} R_{11;kl} (x^1)^2 x^k x^l d\Sigma_r^0 + \sum_{k,l} \int_{S_r} R_{12;kl} x^1 x^2 x^k x^l \\
&+ \sum_{k,l} \int_{S_r} R_{13;kl} x^1 x^3 x^k x^l d\Sigma_r^0 \\
&= \sum_l \int_{S_r} R_{11;1l} (x^1)^3 x^l d\Sigma_r^0 + \sum_l \int_{S_r} R_{11;2l} (x^1)^2 x^2 x^l d\Sigma_r^0 \\
&+ \sum_l \int_{S_r} R_{11;3l} (x^1)^2 x^3 x^l d\Sigma_r^0 + \sum_l \int_{S_r} R_{12;1l} (x^1)^2 x^2 x^l d\Sigma_r^0 \\
&+ \sum_l \int_{S_r} R_{12;2l} x^1 (x^2)^2 x^l d\Sigma_r^0 + \sum_l \int_{S_r} R_{12;3l} x^1 x^2 x^3 x^l d\Sigma_r^0 \\
&+ \sum_l \int_{S_r} R_{13;1l} (x^1)^2 x^3 x^l d\Sigma_r^0 + \sum_l \int_{S_r} R_{13;2l} x^1 x^2 x^3 x^l d\Sigma_r^0 \\
&+ \sum_l \int_{S_r} R_{13;3l} x^1 (x^3)^2 x^l d\Sigma_r^0 \\
&= \int_{S_r} R_{11;11} (x^1)^4 d\Sigma_r^0 + \int_{S_r} R_{11;22} (x^1 x^2)^2 d\Sigma_r^0 \\
&+ \int_{S_r} R_{11;33} (x^1 x^3)^2 d\Sigma_r^0 + \int_{S_r} R_{12;12} (x^1 x^2)^2 d\Sigma_r^0 \\
&+ \int_{S_r} R_{12;21} (x^1 x^2)^2 d\Sigma_r^0 + \int_{S_r} R_{13;13} (x^1 x^3)^2 d\Sigma_r^0 \\
&+ \int_{S_r} R_{13;31} (x^1 x^3)^2 d\Sigma_r^0.
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\int_{S_r} \sum_{j,k,l} R_{1j;kl} x^i x^j x^k x^l d\Sigma_r^0 &= \frac{4}{5} \pi r^6 R_{11;11} + \frac{4}{15} \pi r^6 (R_{12;12} + R_{12;21} \\
&+ R_{13;13} + R_{13;31} + R_{11;22} + R_{11;33}). \quad (3.36)
\end{aligned}$$

E, analogamente, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{S_r} \sum_{j,k,l} R_{2j;kl} x^i x^j x^k x^l d\Sigma_r^0 &= \frac{4}{5} \pi r^6 R_{22;22} + \frac{4}{15} \pi r^6 (R_{21;21} + R_{21;12} \\
&+ R_{23;23} + R_{23;32} + R_{22;11} + R_{22;33}) \quad (3.37)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{S_r} \sum_{j,k,l} R_{3j;kl} x^i x^j x^k x^l d\Sigma_r^0 &= \frac{4}{5} \pi r^6 R_{33;33} + \frac{4}{15} \pi r^6 (R_{31;31} + R_{31;13} \\
&+ R_{32;32} + R_{32;23} + R_{33;11} + R_{33;22}). \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Logo, por (3.36), (3.37) e (3.38), obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{S_r} \sum_{i,j,k,l} R_{ij;kl} x^i x^j x^k x^l d\Sigma_r^0 &= \frac{4}{5} \pi r^6 (R_{11;11} + R_{22;22} + R_{33;33}) + \frac{4}{15} \pi r^6 (R_{12;12} + R_{12;21} \\
 &+ R_{13;13} + R_{13;31} + R_{11;22} + R_{11;33} + R_{21;21} + R_{21;12} \\
 &+ R_{23;23} + R_{23;32} + R_{22;11} + R_{22;33} + R_{31;31} + R_{31;13} \\
 &+ R_{32;32} + R_{32;23} + R_{33;11} + R_{33;22}) \\
 &= \frac{4}{15} \pi r^6 (3R_{11;11} + 3R_{22;22} + 3R_{33;33} + 2R_{21;21} + 2R_{13;13} \\
 &+ 2R_{31;31} + R_{11;22} + R_{11;33} + 2R_{12;12} + 2R_{23;23} + 2R_{32;32} \\
 &+ R_{22;11} + R_{22;33} + R_{33;11} + R_{33;22}).
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_{S_r} \sum_{i,j,k,l} R_{ij;kl} x^i x^j x^k x^l d\Sigma_r^0 = \frac{4}{15} \pi r^6 \sum_{i,j} (R_{ii;jj} + 2R_{ij;ij}).$$

No entanto, pela segunda identidade de Bianchi, temos que

$$\sum_i R_{ij;ij} = \frac{1}{2} R_{;jj}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_{S_r} \sum_{i,j,k,l} R_{ij;kl} x^i x^j x^k x^l d\Sigma_r^0 &= \frac{4}{15} \pi r^6 \sum_j \left(\sum_i R_{ii;jj} + 2 \sum_i R_{ij;ij} \right) \\
 &= \frac{4}{15} \pi r^6 \sum_j \left(\sum_i R_{ii;jj} + R_{;jj} \right) \\
 &= \frac{4}{15} \pi r^6 \sum_j (R_{;jj} + R_{;jj}) \\
 &= \frac{8}{15} \pi r^6 \sum_j R_{;jj} \\
 &= \frac{8}{15} \pi r^6 \Delta R(p), \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

visto que,

$$R = \sum_i^3 R_{ii} \quad \text{e} \quad \Delta R = \sum_j R_{;jj}.$$

Então, substituindo (3.35) e (3.39) em (3.32), temos que

$$\begin{aligned}
 \int_{S_r} \left(b_4 - \frac{1}{4}(b_2)^2 \right) d\Sigma_r^0 &= \frac{1}{135}\pi r^6(2|\text{Ric}|^2 + R^2) - \frac{2}{75}\pi r^6 \Delta R(p) \\
 &\quad - \frac{1}{90} \left(\frac{1}{15}(28|\text{Ric}|^2 - 6R^2)\pi r^6 \right) \\
 &= \frac{2}{135}\pi r^6|\text{Ric}|^2 + \frac{1}{135}\pi r^6 R^2 - \frac{2}{75}\pi r^6 \Delta R(p) \\
 &\quad - \frac{14}{675}\pi r^6|\text{Ric}|^2 + \frac{1}{225}\pi r^6 R^2 \\
 &= \pi r^6 \left(-\frac{2}{75}\Delta R(p) - \frac{4}{675}|\text{Ric}|^2 + \frac{8}{675}R^2 \right). \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Portanto, por (3.22), (3.25) e (3.40), concluímos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(r) &= 4\pi r^2 - \frac{2}{9}\pi r^4 R - \frac{1}{2}\pi r^6 \left(\frac{2}{75}\Delta R(p) \right) - \frac{1}{2}\pi r^6 \left(\frac{4}{675}|\text{Ric}|^2 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\pi r^6 \left(\frac{8}{675}R^2 \right) + O(r^7) \\
 &= 4\pi r^2 - \frac{2}{9}\pi r^4 R + \frac{\pi r^6}{675}(9\Delta R(p) - 2|\text{Ric}|^2 + 4R^2) + O(r^7).
 \end{aligned}$$

Isto é,

$$\mathcal{A}(r) = 4\pi r^2 + A_4 + A_6 + O(r^7),$$

com

$$A_4 = -\frac{2\pi r^4 R}{9}, \quad A_6 = \frac{\pi r^6}{675}(4R^2 - 2|\text{Ric}|^2 - \Delta R).$$

■

Uma consequência imediata do lema anterior, é o seguinte resultado, o qual garante uma expansão para a integral

$$\int_{S_r} H d\Sigma_r,$$

onde H é curvatura média de S_r com respeito a métrica g . Tal expansão é de fundamental importância para garantirmos a expansão da massa de Brown-York.

Corolário 3.4. Sejam (N, g) uma variedade de dimensão 3, $\mathcal{A}(r)$ a área da esfera geodésica $S_r = \{|x| = r\}$ com raio r em N centro p e H a curvatura média de S_r com respeito a métrica g . Então,

$$\int_{S_r} H d\Sigma_r = 8\pi r + \frac{4A_4 + 6A_6}{r} + O(r^6),$$

em que A_4 e A_6 são da forma do Lema 3.3

Demonstração: Da primeira fórmula variacional tem-se

$$\frac{d}{dr}(\mathcal{A}(r)) = \int_{S_r} \frac{1}{|\nabla r|} H d\Sigma_r.$$

Por outro lado, como estamos trabalhando em coordenadas normais da Definição [1.11](#), definição de gradiente, temos que $|\nabla r| = 1$, então

$$\frac{d}{dr}(\mathcal{A}(r)) = \int_{S_r} H d\Sigma_r.$$

Pelo Lema [3.3](#) e por derivação, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{S_r} H d\Sigma_r &= \frac{d}{dr}(4\pi r^2 + A_4 + A_6 + O(r^7)) \\ &= 8\pi r + \frac{d}{dr}(A_4 + A_6) + O(r^6), \end{aligned}$$

com

$$A_4 = -\frac{2\pi r^4 R}{9}, \quad A_6 = \frac{\pi r^6}{675}(4R^2 - 2|\text{Ric}|^2 - 9\Delta R).$$

Logo,

$$\frac{d}{dr}(A_4) = 4 \left(-\frac{2\pi r^3 R}{9} \right), \quad \frac{d}{dr}(A_6) = 6 \left(\frac{\pi r^5}{675}(4R^2 - 2|\text{Ric}|^2 - 9\Delta R) \right).$$

Portanto,

$$\int_{S_r} H d\Sigma_r = 8\pi r + \frac{4A_4 + 6A_6}{r} + O(r^6).$$

■

Como intencionamos determinar a curvatura H_0 , Definição [1.23](#), mas que neste contexto refere-se a um mergulho isométrico de S_r no $\mathbb{R}^3$. Analisaremos, em seguida, um resultado que garante, a existência desse mergulho isométrico de S_r em $\mathbb{R}^3$, frente o resultado Nirenberg [\[15\]](#).

Lema 3.5. Para r suficientemente pequeno existe um mergulho isométrico Z da esfera geodésica S_r em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$Z \cdot n = r + \frac{r^3}{6} \left(\frac{R}{2} - 2R_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} \right) + O(r^4),$$

em que n é o vetor externo normal unitário de $Z(S_r)$ em $\mathbb{R}^3$.

Demonstração: Para $r > 0$, considere a aplicação $F : N \rightarrow \bar{N}$, dada por

$$F(x) = \frac{1}{r}x.$$

3. Expansões de massas quasi-locais de esferas geodésicas

Note que a aplicação $G : \bar{N} \rightarrow N$ definida por $G(y) = ry = x$ é a inversa da função F e, evidentemente, ambas são diferenciáveis, logo são difeomorfismos. Sabemos que (N, g) é uma variedade Riemanniana e G é um difeomorfismo, então podemos considerar a métrica pull-back $\bar{g}$ da forma

$$\bar{g}(u, v) = g(dGu, dGv).$$

Como $dFw = rw$, para todo $w \in T_pM$ e pelas propriedades de métrica, obtemos

$$\bar{g}_{ij} = r^2 g_{ij}.$$

Logo,

$$g_{ij} = r^{-2} \bar{g}_{ij}.$$

Agora, considere h a métrica em g induzida na esfera unitária S^2 no espaço $\bar{N}$. Então,

$$h_{ij} = g_{ij} - y^i y^j.$$

Seguindo de forma semelhante ao Lema [2.4](#) a fim de provarmos o resultado em questão é suficiente mostrarmos que, para r suficientemente pequeno, podemos encontrar um mergulho isométrico Z_r de (S^2, h) em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$Z_r \cdot n_r = 1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) + O(r^3),$$

no qual n_r é o vetor normal externo unitário de $Z_r(S^2)$. Para tanto, seja $\tilde{h}$ a métrica induzida de $r^{-2}\tilde{g}$ em S^2 , tal que

$$\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right) = r^2 \left(\delta_{ij} + \frac{r^2}{3} R_{ijkl} y^k y^l \right).$$

Por outro lado, seja $\hat{h}$ a métrica em S^2 induzida pelo pullback da métrica euclidiana dada pelo mergulho $\hat{Z} = (z^1, z^2, z^3)$ em $\mathbb{R}^3$ com

$$\begin{aligned} z^1 &= y^1 \left(1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_1 - \sum_i \lambda_i (y^i)^2 \right) \right); \\ z^2 &= y^2 \left(1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_2 - \sum_i \lambda_i (y^i)^2 \right) \right); \\ z^3 &= y^3 \left(1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_3 - \sum_i \lambda_i (y^i)^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Afirmamos que,

$$\|h - \tilde{h}\|_{C^3} + \|\hat{h} - \tilde{h}\|_{C^3} = O(r^3),$$

em que a norma é calculada com respeito à métrica padrão. A priori, suponhamos que a afirmação é verdadeira, por [15] podemos concluir que existem mergulhos, Z_r , $\tilde{Z}$ e $\hat{Z}$ para (S^2, h) , $(S^2, \tilde{h})$ e $(S^2, \hat{h})$, respectivamente, tais que

$$\|Z_r \cdot n_r - \hat{Z} \cdot \hat{n}\|_{C^0(S^2)} = O(r^3),$$

com $\hat{n}$ vetor normal externo unitário normal de $\hat{Z}(S^2)$. Então, nós podemos provar o lema calculando $\hat{Z} \cdot \hat{n}$. Primeiramente, vamos demonstrar a afirmação e em seguida calcular $\hat{Z} \cdot \hat{n}$. Não é difícil perceber que $\|h - \tilde{h}\|_{C^3} = O(r^3)$, pois pelo Lema 3.1 e a definição de $\tilde{g}$

$$\begin{aligned} h_{ij} - \tilde{h}_{ij} &= g_{ij} - y^i y^j - r^{-2} \tilde{g}_{ij} + y^i y^j \\ &= g_{ij} - r^{-2} \tilde{g}_{ij} \\ &= \left(\delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{iklj} x^k x^l + O(r^3) \right) \\ &\quad - r^{-2} \left[r^2 \left(\delta_{ij} + \frac{r^2}{3} R_{iklj} y^k y^l \right) \right] \\ &= O(r^3). \end{aligned}$$

Para encontrar $\tilde{h}$, seja

$$r^{-2} \tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}.$$

E considere $\lambda_{ij} = -(\lambda_i + \lambda_j) + \frac{R}{2}$. Como já analisamos no Lema 3.3, temos que

$$R_{iklj} x^k x^l \left(\lambda_i + \lambda_j - \frac{R}{2} \right) x^i x^j - \delta_{ij} \left(\sum_{k=1}^3 \lambda_k (x^k)^2 + \left(\lambda_i - \frac{R}{2} \right) r^2 \right). \quad (3.41)$$

Logo, como

$$r^{-2} \tilde{g}_{ij} = \left(\delta_{ij} + \frac{r^2}{3} R_{iklj} y^k y^l \right),$$

então

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_{11} &= r^{-2}g_{11} - \delta_{11} \\
 &= \delta_{11} + \frac{r^2}{3}R_{1kl1}y^ky^l - \delta_{11} \\
 &= \frac{1}{3}R_{1kl1}x^kx^l \\
 &= \frac{1}{3} \left[\left(\lambda_1 + \lambda_1 - \frac{R}{2} \right) (x^1)^2 - \delta_{11} \left(\sum_k \lambda_k (x^k)^2 + \left(\lambda_1 - \frac{R}{2} \right) r^2 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(2\lambda_1(x^1)^2 - \frac{R}{2}(x^1)^2 - \lambda_1(x^1)^2 - \lambda_2(x^2)^2 - \lambda_3(x^3)^2 - \lambda_1r^2 + \frac{R}{2}r^2 \right).
 \end{aligned}$$

Mas como $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$, então

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_{11} &= \frac{1}{3} \left(-\lambda_2(x^2)^2 - \lambda_3(x^3)^2 - \lambda_1(x^2)^2 - \lambda_1(x^3)^2 + \frac{R}{2}(x^2)^2 + \frac{R}{2}(x^3)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left[\left(-(\lambda_2 + \lambda_1) + \frac{R}{2} \right) (x^2)^2 + \left(-(\lambda_3 + \lambda_1) + \frac{R}{2} \right) (x^3)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{3}(\lambda_{12}(x^2)^2 + \lambda_{13}(x^3)^2).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\tilde{\sigma}_{11} = \frac{r^2}{3}(\lambda_{12}(y^2)^2 + \lambda_{13}(y^3)^2).$$

E, de maneira análoga, concluímos que

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_{22} &= \frac{r^2}{3}(\lambda_{12}(y^1)^2 + \lambda_{23}(y^3)^2); \\
 \tilde{\sigma}_{33} &= \frac{r^2}{3}(\lambda_{13}(y^1)^2 + \lambda_{23}(y^2)^2).
 \end{aligned}$$

Agora se $i \neq j$ logo $\delta_{ij} = 0$ e por [3.41](#), temos que

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_{ij} &= r^{-2}\tilde{g}_{ij} - \delta_{ij} \\
 &= r^{-2}\tilde{g}_{ij} \\
 &= \delta_{ij} + \frac{r^2}{3}R_{iklj}y^ky^l \\
 &= \frac{1}{3}R_{iklj}x^kx^l \\
 &= \frac{1}{3} \left(\lambda_i + \lambda_j - \frac{R}{2} \right) x^ix^j \\
 &= -\frac{1}{3} \left(-(\lambda_i + \lambda_j) + \frac{R}{2} \right) x^ix^j \\
 &= -\frac{1}{3}\lambda_{ij}x^ix^j.
 \end{aligned}$$

Assim, como $x = ry$, temos que

$$\tilde{\sigma}_{ij} = -\frac{r^2}{3}\lambda_{ij}y^i y^j,$$

desde que $i \neq j$. E, nesse contexto, não estamos somando os índices repetidos. Por outro lado, sejam

$$e_1 = \partial_\theta = a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (3.42)$$

$$e_2 = (\text{sen}\theta)^{-1} \partial_\phi = b_i \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (3.43)$$

em que (θ, ϕ) são as coordenadas esféricas da esfera S^2 . Daí, se $(y^1, y^2, y^3) \in S^2$, então

$$\begin{aligned} y^1 &= \text{sen}\theta \cos \phi; \\ y^2 &= \text{sen}\theta \text{sen}\phi; \\ y^3 &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.44)$$

com $(\theta, \phi) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$. Sendo assim, derivando cada y^i em relação a θ e depois em relação a ϕ , obtemos

$$\begin{aligned} (y^1)_\theta &= \cos \theta \cos \phi; \\ (y^2)_\theta &= \cos \theta \text{sen}\phi; \\ (y^3)_\theta &= -\text{sen}\theta. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Também,

$$\begin{aligned} (y^1)_\phi &= -\text{sen}\theta \text{sen}\phi; \\ (y^2)_\phi &= \text{sen}\theta \cos \phi; \\ (y^3)_\phi &= 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Portanto, por (3.42) e (3.43), tem-se

$$a_1 = \cos \theta \cos \phi, \quad a_2 = \cos \theta \text{sen}\phi, \quad a_3 = -\text{sen}\theta, \quad (3.47)$$

$$b_1 = -\text{sen}\theta \text{sen}\phi, \quad b_2 = \text{sen}\theta \cos \phi, \quad b_3 = 0. \quad (3.48)$$

Desse modo, na base $\{e_1, e_2\}$, as expressões de $\tilde{h}$ são dadas por

$$\tilde{h}_{11} = \tilde{h}(e_1, e_1) = \tilde{h} \left(a_i \frac{\partial}{\partial y^i}, a_j \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = a_i a_j \tilde{h}(\partial_i, \partial_j),$$

em que

$$\tilde{h}(\partial_i, \partial_j) = \tilde{h} \left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \delta_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{11} &= (a_1)^2 \tilde{h}(\partial_1, \partial_1) + (a_2)^2 \tilde{h}(\partial_2, \partial_2) + (a_3)^2 \tilde{h}(\partial_3, \partial_3) + 2a_1 a_2 \tilde{h}(\partial_1, \partial_2) \\ &+ 2a_1 a_3 \tilde{h}(\partial_1, \partial_3) + 2a_2 a_3 \tilde{h}(\partial_2, \partial_3) \\ &= (a_1)^2 \left(1 + \frac{r^2}{3} (\lambda_{12}(y^2)^2 + \lambda_{13}(y^3)^2) \right) + (a_2)^2 \left(1 + \frac{r^2}{3} (\lambda_{12}(y^1)^2 + \lambda_{23}(y^3)^2) \right) \\ &+ (a_3)^2 \left(1 + \frac{r^2}{3} (\lambda_{13}(y^1)^2 + \lambda_{23}(y^2)^2) \right) + 2a_1 a_2 \left(-\frac{r^2}{3} \lambda_{12} y^1 y^2 \right) \\ &+ 2a_1 a_3 \left(-\frac{r^2}{3} \lambda_{13} y^1 y^3 \right) + 2a_2 a_3 \left(-\frac{r^2}{3} \lambda_{23} y^2 y^3 \right) \\ &= (a_1)^2 + \frac{r^2}{3} ((a_1)^2 (y^2)^2 + (a_2)^2 (y^1)^2 - 2a_1 a_2 y^1 y^2) \lambda_{12} + (a_2)^2 \\ &+ \frac{r^2}{3} ((a_1)^2 (y^3)^2 + (a_3)^2 (y^1)^2 - 2a_1 a_3 y^1 y^3) \lambda_{13} + (a_3)^2 \\ &+ \frac{r^2}{3} ((a_2)^2 (y^3)^2 + (a_3)^2 (y^2)^2 - 2a_2 a_3 y^2 y^3) \lambda_{23} \\ &= \sum_{i=1}^3 (a_i)^2 + \frac{r^2}{3} (a_1 y^2 - a_2 y^1)^2 \lambda_{12} + \frac{r^2}{3} (a_2 y^3 - a_3 y^1)^2 \lambda_{13} + \frac{r^2}{3} (a_2 y^3 - a_3 y^2)^2 \lambda_{23}. \end{aligned}$$

Por outro lado, de (3.44), (3.47) e (3.48) é fácil perceber que

$$\sum_{i=1}^3 (a_i)^2 = \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi + (-\sin \theta)^2 = \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \sin^2 \theta = 1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} a_1 y^2 - a_2 y^1 &= \cos \theta \cos \phi \sin \theta \sin \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \theta \cos \phi = 0; \\ a_1 y^3 - a_3 y^1 &= \cos \theta \cos \phi \cos \theta - (-\sin \theta) \sin \theta \cos \phi = \cos \phi; \\ a_2 y^3 - a_3 y^2 &= \cos \theta \sin \phi \cos \theta - (-\sin \theta) \sin \theta \sin \phi = \sin \phi. \end{aligned}$$

Então,

$$\tilde{h}_{11} = 1 + \frac{r^2}{3} (\lambda_{23} \sin^2 \phi + \lambda_{13} \cos^2 \phi).$$

Analogamente, como já vimos em (3.48) $b_3 = 0$, então

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_{12} &= a_1 b_1 \tilde{h}(\partial_1, \partial_1) + a_1 b_2 \tilde{h}(\partial_1, \partial_2) + a_1 b_3 \tilde{h}(\partial_1, \partial_3) \\
 &+ a_2 b_1 \tilde{h}(\partial_1, \partial_2) + a_2 b_2 \tilde{h}(\partial_2, \partial_2) + a_2 b_3 \tilde{h}(\partial_2, \partial_3) \\
 &+ a_3 b_1 \tilde{h}(\partial_1, \partial_3) + a_3 b_2 \tilde{h}(\partial_2, \partial_3) + a_3 b_3 \tilde{h}(\partial_3, \partial_3) \\
 &= a_1 b_1 \tilde{h}(\partial_1, \partial_1) + a_2 b_2 \tilde{h}(\partial_2, \partial_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \tilde{h}(\partial_1, \partial_2) \\
 &+ a_3 b_1 \tilde{h}(\partial_1, \partial_3) + a_3 b_2 \tilde{h}(\partial_2, \partial_3) \\
 &= a_1 b_1 \left(1 + \frac{r^2}{3} (\lambda_{12}(y^2)^2 + \lambda_{13}(y^3)^2) \right) + a_2 b_2 \left(1 + \frac{r^2}{3} (\lambda_{12}(y^1)^2 + \lambda_{23}(y^3)^2) \right) \\
 &+ (a_1 b_2 + a_2 b_1) \left(-\frac{r^2}{3} \lambda_{12} y^1 y^2 \right) + a_3 b_1 \left(-\frac{r^2}{3} \lambda_{13} y^1 y^3 \right) + a_3 b_2 \left(-\frac{r^2}{3} \lambda_{23} y^2 y^3 \right).
 \end{aligned}$$

Além disso, de (3.47) temos que

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_{12} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \frac{r^2}{3} (a_1 b_1 (y^2)^2 + a_2 b_2 (y^1)^2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1) y^1 y^2) \lambda_{12} \\
 &+ \frac{r^2}{3} (a_1 b_1 (y^3)^2 - a_3 b_1 y^1 y^3) \lambda_{13} + \frac{r^2}{3} (a_2 b_2 (y^3)^2 - a_3 b_2 y^2 y^3) \lambda_{23}. \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

Note que,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = \cos \theta \cos \phi (-\sin \phi) + \cos \theta \sin \phi \cos \phi = 0. \quad (3.50)$$

E,

$$\begin{aligned}
 a_1 b_1 (y^2)^2 + a_2 b_2 (y^1)^2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1) &= (\cos \theta \cos \phi (-\sin \phi) \sin^2 \theta) \sin^2 \phi \\
 &+ (\cos \theta \sin \phi \cos \phi \sin^2 \theta) \cos^2 \phi - (\cos \theta \cos^2 \phi \\
 &- \cos \theta \sin^2 \phi) \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi \\
 &= -\cos \theta \cos \phi \sin^3 \phi \sin^2 \theta + \cos \theta \sin \phi \cos^3 \phi \sin^2 \theta \\
 &- \cos \theta \cos^3 \phi \sin^2 \theta \sin \phi + \cos \theta \sin^3 \phi \sin^2 \theta \cos \phi \\
 &= 0. \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

Ademais,

$$\begin{aligned}
 a_1 b_1 (y^3)^2 - a_3 b_1 y^1 y^3 &= \cos \theta \cos \phi (-\sin \phi) \cos^2 \theta - \sin \phi \sin^2 \theta \cos \phi \cos \theta \\
 &= -\cos \theta \cos \phi \sin \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= -\cos \theta \cos \phi \sin \phi. \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

De forma análoga conclui-se

$$a_2 b_2 (y^3)^2 - a_3 b_2 y^1 y^3 = \cos \theta \sin \phi \cos \phi. \quad (3.53)$$

3. Expansões de massas quasi-locais de esferas geodésicas

Daí, substituindo (3.50), (3.51), (3.52), (3.53) em 3.49 obtemos

$$\tilde{h}_{12} = \frac{r^2}{3}(-\lambda_{13} + \lambda_{23}) \cos \theta \cos \phi \sin \phi.$$

Por fim, prosseguindo de maneira similar ao que fizemos acima, tem-se

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{22} &= (b_1)^2 \tilde{h}(\partial_1, \partial_1) + (b_2)^2 \tilde{h}(\partial_2, \partial_2) + (b_3)^2 \tilde{h}(\partial_3, \partial_3) \\ &+ 2b_1 b_2 \tilde{h}(\partial_1, \partial_2) + 2b_1 b_3 \tilde{h}(\partial_1, \partial_3) + 2\tilde{h}(\partial_2, \partial_3) \\ &= (b_1)^2 \left(1 + \frac{r^2}{3} (\lambda_{12}(y^2)^2 + \lambda_{13}(y^3)^2) \right) + 2b_1 b_2 \left(-\frac{r^2}{3} \lambda_{12} y^1 y^2 \right) \\ &+ (b_2)^2 \left(1 + \frac{r^2}{3} (\lambda_{12}(y^1)^2 + \lambda_{23}(y^3)^2) \right) \\ &= (b_1)^2 + (b_2)^2 + \frac{r^2}{3} ((b_1)^2 (y^2)^2 - 2b_1 b_2 y^1 y^2 + (b_2)^2 (y^1)^2) \lambda_{12} \\ &+ \frac{r^2}{3} ((b_1)^2 (y^3)^2) \lambda_{13} + \frac{r^2}{3} ((b_2)^2 (y^3)^2) \lambda_{23} \\ &= (b_1)^2 + (b_2)^2 + \frac{r^2}{3} (b_1 y^2 - b_2 y^1)^2 \lambda_{12} + \frac{r^2}{3} (b_1 y^3)^2 \lambda_{13} + \frac{r^2}{3} (b_2 y^3)^2 \lambda_{23}. \end{aligned}$$

Por outro lado, não é difícil observar que

$$\begin{aligned} (b_1)^2 + (b_2)^2 &= 1 \\ (b_1 y^2 - b_2 y^1)^2 &= \sin^2 \theta \\ (b_1 y^3)^2 &= \sin^2 \phi \cos^2 \theta \\ (b_2 y^3)^2 &= \cos^2 \phi \cos^2 \theta \end{aligned} \tag{3.54}$$

Logo,

$$\tilde{h}_{22} = 1 + \frac{r^2}{3} (\lambda_{12} \sin^2 \theta + \lambda_{13} \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \lambda_{23} \cos^2 \theta \cos^2 \phi). \tag{3.55}$$

Agora, vamos calcular $\hat{h}$. Observe que pela regra do produto, tem-se

$$\begin{aligned} (z^1)_\theta &= (y^1)_\theta \left(1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_1 - \sum_i \lambda_i (y^i)^2 \right) \right) - \frac{r^2}{6} y^1 \left(\sum_i \lambda_i (y^i)^2 \right)_\theta, \\ (z^2)_\theta &= (y^2)_\theta \left(1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_2 - \sum_i \lambda_i (y^i)^2 \right) \right) - \frac{r^2}{6} y^2 \left(\sum_i \lambda_i (y^i)^2 \right)_\theta, \\ (z^3)_\theta &= (y^3)_\theta \left(1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_3 - \sum_i \lambda_i (y^i)^2 \right) \right) - \frac{r^2}{6} y^3 \left(\sum_i \lambda_i (y^i)^2 \right)_\theta. \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}(z^1)_\phi &= (y^1)_\phi \left(1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_1 - \sum_i \lambda_i (y^i)^2 \right) \right) - \frac{r^2}{6} y^1 \left(\sum_i \lambda_i (y^i)^2 \right)_\phi, \\(z^2)_\phi &= (y^2)_\phi \left(1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_2 - \sum_i \lambda_i (y^i)^2 \right) \right) - \frac{r^2}{6} y^2 \left(\sum_i \lambda_i (y^i)^2 \right)_\phi, \\(z^3)_\phi &= (y^3)_\phi \left(1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_3 - \sum_i \lambda_i (y^i)^2 \right) \right) - \frac{r^2}{6} y^3 \left(\sum_i \lambda_i (y^i)^2 \right)_\phi.\end{aligned}$$

Então, como $\hat{Z}_\theta = ((z^1)_\theta, (z^2)_\theta, (z^3)_\theta)$ e $\hat{Z}_\phi = ((z^1)_\phi, (z^2)_\phi, (z^3)_\phi)$, temos que

$$\begin{aligned}\hat{Z}_\theta \cdot \hat{Z}_\theta &= (z^1)_\theta^2 + (z^2)_\theta^2 + (z^3)_\theta^2 \\&= \sum_i \left[(y^i)_\theta \left(1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_i - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) \right) - \frac{r^2}{6} y^i \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right)_\theta \right]^2 \\&= \sum_i (y^i)_\theta^2 \left(1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_i - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) \right)^2 \\&\quad - \frac{r^2}{3} \sum_i (y^i)_\theta y^i \left(1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_i - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) \right) \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right)_\theta \\&\quad + \frac{r^4}{36} \sum_i (y^i)^2 \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right)_\theta^2 \\&= \sum_i (y^i)_\theta^2 \left(1 + \frac{r^2}{3} \left(\frac{R}{2} - \lambda_i - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) \right) \\&\quad + \frac{r^4}{36} \sum_i (y^i)_\theta^2 \left(\frac{R}{2} - \lambda_i - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right)^2 - \frac{r^2}{3} \sum_i (y^i)_\theta y^i \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right)_\theta \\&\quad - \frac{r^4}{18} \sum_i (y^i)_\theta y^i \left(\frac{R}{2} - \lambda_i - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right)_\theta \\&\quad + \frac{r^4}{36} \sum_i (y^i)_\theta^2 \left(\frac{R}{2} - \lambda_i - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right)^2.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\hat{Z}_\theta \cdot \hat{Z}_\theta &= \sum_i (y^i)_\theta^2 \left(1 + \frac{r^2}{3} \left(\frac{R}{2} - \lambda_i - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) \right) \\&\quad - \frac{r^2}{3} \sum_i (y^i)_\theta y^i \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right)_\theta + O(r^4).\end{aligned}\tag{3.56}$$

Pois, pela limitação das funções seno e cosseno, temos que $|y^i| \leq 1$ e $|(y^i)_\theta| \leq 1$ e

$r^4 = O(r^4)$. Além disso, de (3.44) e (3.45), concluímos que

$$\sum_{i=1}^3 (y^i)^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^3 (y^i)_\theta^2 = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^3 y^i (y^i)_\theta = 0. \quad (3.57)$$

Logo, de (3.56) e (3.57), temos que

$$\begin{aligned} \hat{Z}_\theta \cdot \hat{Z}_\theta &= \sum_i (y^i)_\theta^2 + \frac{r^2}{3} \sum_i (y^i)_\theta^2 \left(\frac{R}{2} - \lambda_i - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) \\ &\quad - \frac{r^2}{3} \sum_i (y^i)_\theta y^i \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right)_\theta + O(r^4) \\ &= 1 + \frac{r^2}{3} \left(\frac{R}{2} - \sum_i \lambda_i (y^i)_\theta^2 - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) + O(r^4). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Desse modo,

$$\hat{Z}_\theta \cdot \hat{Z}_\theta = 1 + \frac{r^2}{3} \left(\frac{R}{2} - \sum_i \lambda_i ((y^i)_\theta^2 + (y^i)^2) \right) + O(r^4). \quad (3.59)$$

Mas, por (3.44) e (3.45), tem-se

$$\begin{aligned} \sum_i \lambda_i ((y^i)_\theta^2 + (y^i)^2) &= \lambda_1 ((y^1)_\theta^2 + (y^1)^2) + \lambda_2 ((y^2)_\theta^2 + (y^2)^2) + \lambda_3 ((y^3)_\theta^2 + (y^3)^2) \\ &= \lambda_1 (\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \\ &\quad + \lambda_2 (\cos^2 \theta \sin^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi) \\ &\quad + \lambda_3 ((-\sin \theta)^2 + \cos^2 \theta) \\ &= \lambda_1 \cos^2 \phi + \lambda_2 \sin^2 \phi + \lambda_3. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Então, substituindo (3.60) em (3.59), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{Z}_\theta \cdot \hat{Z}_\theta &= 1 + \frac{r^2}{3} \left(\frac{R}{2} - \lambda_1 \cos^2 \phi - \lambda_2 \sin^2 \phi - \lambda_3 \right) + O(r^4) \\ &= 1 + \frac{r^2}{3} \left(\frac{R}{2} (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - \lambda_1 \cos^2 \phi - \lambda_2 \sin^2 \phi - \lambda_3 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \right) \\ &\quad + O(r^4) \\ &= 1 + \frac{r^2}{3} \left[\left(-(\lambda_1 + \lambda_3) + \frac{R}{2} \right) \cos^2 \phi + \left(-(\lambda_2 + \lambda_3) + \frac{R}{2} \right) \sin^2 \phi \right]. \end{aligned}$$

Portanto, como $\lambda_{ij} = -(\lambda_i + \lambda_j) + \frac{R}{2}$, ficamos com

$$\hat{Z}_\theta \cdot \hat{Z}_\theta = 1 + \frac{r^2}{3}(\lambda_{13} \cos^2 \phi + \lambda_{23} \sin^2 \phi) + O(r^4).$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} \hat{Z}_\phi \cdot \hat{Z}_\phi &= (z_1)_\phi^2 + (z_2)_\phi^2 + (z_3)_\phi^2 \\ &= \sum_i \left((y^i)_\phi \left(1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_i - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) \right) - \frac{r^2}{6} y^i \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right)_\phi \right)^2 \\ &= \sum_i (y^i)_\phi^2 \left(1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_i - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) \right)^2 \\ &\quad - \frac{r^2}{3} \sum_i (y^i)_\phi y^i \left(1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_i - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) \right) \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right)_\phi \\ &\quad + \frac{r^4}{36} \sum_i (y^i)^2 \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right)_\phi^2 \\ &= \sum_i (y^i)_\phi^2 \left(1 + \frac{r^2}{3} \left(\frac{R}{2} - \lambda_i - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) \right) \\ &\quad - \frac{r^2}{3} \sum_i y^i (y^i)_\phi \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right)_\phi + O(r^4). \end{aligned}$$

Note que, por (3.44) e (3.46), temos que

$$\sum_i y^i (y^i)_\phi = 0 \quad \text{e} \quad \sum_i (y^i)_\phi^2 = \sin^2 \theta.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \hat{Z}_\phi \cdot \hat{Z}_\phi &= \sum_i (y^i)_\phi^2 + \frac{r^2 R}{3} \sum_i (y^i)_\phi^2 - \frac{r^2}{3} \sum_i \lambda_i (y^i)_\phi^2 \\ &\quad - \left(\sum_i (y^i)_\phi^2 \right) \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) - \frac{r^2}{3} \left(\sum_i y^i (y^i)_\phi \right) \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right)_\phi \\ &\quad + O(r^4) \\ &= \sin^2 \theta + \frac{r^2}{3} \left(\frac{R}{2} \sin^2 \theta \right) - \frac{r^2}{3} \sum_i \lambda_i (y^i)_\phi^2 - \sin^2 \theta \left(\sum_i \lambda_i (y^i)^2 \right) + O(r^4) \\ &= \sin^2 \theta + \frac{r^2}{3} \left(\frac{R}{2} \sin^2 \theta - \sum_i \lambda_i ((y^i)_\phi^2 + (y^i)^2 \sin^2 \theta) \right) + O(r^4). \end{aligned}$$

3. Expansões de massas quasi-locais de esferas geodésicas

Dessa forma, substituindo (3.44) e (3.46), temos que

$$\begin{aligned}\hat{Z}_\phi \cdot \hat{Z}_\phi &= \text{sen}^2\theta \left[1 + \frac{r^2}{3}(\lambda_{12} \text{sen}^2\theta + \lambda_{13} \cos^2\theta \text{sen}^2\phi + \lambda_{23} \cos^2\theta \cos^2\phi) \right] \\ &+ O(r^4).\end{aligned}$$

Ademais, seguindo de maneira análoga, temos que

$$\hat{Z}_\theta \cdot \hat{Z}_\phi = \frac{r^2}{3}(-\lambda_{13} + \lambda_{23}) \text{sen}\theta \cos\theta \cos\phi \text{sen}\phi + O(r^4).$$

Desse modo, obtemos que

$$\|\tilde{h} - \hat{h}\| = O(r^4),$$

pois observe que

$$\hat{h}(\partial_\theta, \partial_\theta) = \hat{Z}_\theta \cdot \hat{Z}_\theta, \quad \hat{h}(\partial_\phi, \partial_\theta) = \hat{Z}_\phi \cdot \hat{Z}_\theta \quad \text{e} \quad \hat{h}(\partial_\phi, \partial_\phi) = \hat{Z}_\phi \cdot \hat{Z}_\phi.$$

E na base $\{e_1, e_2\}$, note que

$$\hat{h}_{11} = \hat{h}(e_1, e_1) = \hat{h}(\partial_\theta, \partial_\theta) = \hat{Z}_\theta \cdot \hat{Z}_\theta = \tilde{h}_{11} + O(r^4)$$

logo, $|\tilde{h}_{11} - \hat{h}_{11}| = O(r^4)$. Além disso, temos que $|\tilde{h}_{11} - \hat{h}_{11}| = O(r^4)$, visto que,

$$\begin{aligned}\hat{h}_{22} &= \hat{h}(e_2, e_2) \\ &= \hat{h}\left(\frac{1}{\text{sen}\theta}\partial_\phi, \frac{1}{\text{sen}\theta}\partial_\phi\right) \\ &= \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \left(\text{sen}^2\theta \tilde{h}_{22} + O(r^4) \right) \\ &= \tilde{h}_{22} + O(r^4).\end{aligned}$$

Analogamente, temos que $|\tilde{h}_{12} - \hat{h}_{12}| = O(r^4)$ o que prova a afirmação. Agora, vamos encontrar $\hat{Z} \cdot \hat{n}$. Sendo assim, considere $A = (y^1, y^2, y^3)$, $B = A_\theta$, $C = \frac{1}{\text{sen}\theta}A_\phi$, $\bar{A} = (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3)$, $\bar{B} = (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3)$ e $\bar{C} = (\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3)$, tais que

$$\begin{aligned}\bar{A}_i &= \frac{r^2 y^i}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_k - \sum_i \lambda_k (y^k)^2 \right) \\ \bar{B}_i &= \frac{(y^i)_\theta r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_i - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) - \frac{r^2}{6} y^i \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right)_\theta \\ \bar{C}_i &= \frac{(y^i)_\phi r^2}{6 \text{sen}\theta} \left(\frac{R}{2} - \lambda_i - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) - \frac{r^2}{6 \text{sen}\theta} y^i \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right)_\phi\end{aligned}$$

Não é difícil perceber $\{A, B, C\}$ é um conjunto de vetores ortonormais e orientados positivamente em $\mathbb{R}^3$ para $A \in \mathbb{S}^2$. Sejam $\hat{Z} = A + \bar{A}$, $\hat{Z}_1 = B + \bar{B}$ e $\hat{Z}_2 = C + \bar{C}$. Então,

$$\begin{aligned} \hat{Z} \cdot \hat{Z}_1 \wedge \hat{Z}_2 &= (A + \bar{A}) \cdot (B + \bar{B}) \wedge (C + \bar{C}) \\ &= (A + \bar{A}) \cdot (B \wedge C + B \wedge \bar{C} + \bar{B} \wedge C + \bar{B} \wedge \bar{C}) \\ &= A \cdot B \wedge C + A \cdot B \wedge \bar{C} + A \cdot \bar{B} \wedge C + A \cdot \bar{B} \wedge \bar{C} \\ &\quad + \bar{A} \cdot B \wedge C + \bar{A} \cdot B \wedge \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \wedge C + \bar{A} \cdot \bar{B} \wedge \bar{C} \\ &= A \cdot B \wedge C + A \cdot B \wedge \bar{C} + A \cdot \bar{B} \wedge C + \bar{A} \cdot B \wedge C \\ &\quad + O(r^4). \end{aligned}$$

Pois,

$$A \cdot \bar{B} \wedge \bar{C} + \bar{A} \cdot B \wedge \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \wedge C + \bar{A} \cdot \bar{B} \wedge \bar{C} = O(r^4).$$

Além disso, $B \wedge C = A$, $B \wedge A = -C$ e $A \wedge C = -B$. Desse modo, pelas propriedades de produto misto, temos que

$$\hat{Z} \cdot \hat{Z}_1 \wedge \hat{Z}_2 = 1 + C \cdot \bar{C} + B \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{A} + O(r^4).$$

Por outro lado, como $\sum (y^i)^2 = 1$, observe que

$$\begin{aligned} A \cdot \bar{A} &= \sum_i (y^i) \bar{A}_i \\ &= \sum_i \frac{(y^i)^2 r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \lambda_i - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) \\ &= \frac{r^2}{6} \left[\sum_i \left((y^i)^2 \frac{R}{2} - \lambda_i (y^i)^2 - (y^i)^2 \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) \right] \\ &= \frac{r^2}{2} \left(\frac{R}{6} - \sum_i \lambda_i (y^i)^2 - \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$A \cdot \bar{A} = \frac{r^2}{2} \left(\frac{R}{2} - 2 \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right).$$

Prosseguindo de forma análoga, tem-se

$$\begin{aligned} B \cdot \bar{B} &= \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - \sum_k \lambda_k ((y^k)_\theta^2 + (y^k)^2) \right) \\ &= \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - (\lambda_1 \cos^2 \phi + \lambda_2 \sin^2 \phi + \lambda_3) \right). \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} C \cdot \bar{C} &= \frac{r^2}{6 \operatorname{sen}^2 \theta} \left(\frac{R}{2} \operatorname{sen}^2 \theta - \sum_k \lambda_k ((y^k)_\phi^2 + (y^k)^2 \operatorname{sen}^2 \theta) \right) \\ &= \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - (\lambda_1 (\operatorname{sen}^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \phi) + \lambda_2 (\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \phi) + \lambda_3 \cos^2 \theta) \right). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\hat{Z} \cdot \hat{Z}_1 \wedge \hat{Z}_2 = 1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - 3 \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) + O(r^4).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \hat{Z}_1 \wedge \hat{Z}_2 &= (B + \bar{B}) \wedge (C + \bar{C}) \\ &= A + B \wedge \bar{C} + \bar{B} \wedge C + \bar{B} \wedge \bar{C}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\hat{Z}_1 \wedge \hat{Z}_2|^2 &= (A + B \wedge \bar{C} + \bar{B} \wedge C + \bar{B} \wedge \bar{C}) \wedge (A + B \wedge \bar{C} + \bar{B} \wedge C + \bar{B} \wedge \bar{C}) \\ &= 1 + 2\bar{C} \cdot B \wedge A - 2\bar{B} \cdot A \wedge C + O(r^4) \\ &= 1 + 2\bar{C} \cdot C + 2\bar{B} \cdot B + O(r^4) \\ &= 1 + \frac{r^2}{3} (R - \lambda_1 (1 + \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \phi) - \lambda_2 (1 + \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \phi) \\ &\quad - \lambda_3 (1 + \cos^2 \theta)) + O(r^4) \\ &= 1 - \frac{r^2}{3} \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) + O(r^4). \end{aligned}$$

Então,

$$|\hat{Z}_1 \wedge \hat{Z}_2|^{-1} = 1 + \frac{r^2}{6} \left(\sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) + O(r^4)$$

Daí, considerando

$$\hat{Z}(A) = A + \bar{A} \quad \text{e} \quad \hat{n} = \frac{\hat{Z}_1 \wedge \hat{Z}_2}{|\hat{Z}_1 \wedge \hat{Z}_2|},$$

com $A \in \mathbb{S}^2$. Obtemos,

$$\hat{Z} \cdot \hat{n} = \frac{Z \cdot \hat{Z}_1 \wedge \hat{Z}_2}{|\hat{Z}_1 \wedge \hat{Z}_2|} = 1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - 2 \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) + O(r^4).$$

Assim,

$$Z_r \cdot n_r = 1 + \frac{r^2}{6} \left(\frac{R}{2} - 2 \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) + O(r^3).$$

Portanto, identificando S_r com a métrica induzida por g com $(\mathbb{S}^2, h)$, então $Z = rZ_r$ é o mergulho isométrico de S_r com a métrica induzida por g , tal que

$$Z \cdot n = r + \frac{r^3}{6} \left(\frac{R}{2} - 2 \sum_k \lambda_k (y^k)^2 \right) + O(r^3).$$

Além disso, como $R_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ e $x = ry$, temos que

$$Z \cdot n = r + \frac{r^3}{6} \left(\frac{R}{2} - 2R_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} \right) + O(r^3),$$

como queríamos provar. ■

De agora em diante, estudaremos um resultado que garante expansões para algumas curvaturas curvaturas.

Lema 3.6. Sejam K e H a curvatura de Gauss e a curvatura média de S_r em (N, g) , respectivamente. Além disso, seja H_0 a curvatura média de $(S_r, g|_{S_r})$ quando mergulhado em $\mathbb{R}^3$. Então, temos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{r^2} + \frac{R}{2} - \frac{4}{3} R_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} + O(r), \\ H &= \frac{2}{r} - \frac{1}{3} R_{ij} \frac{x^i x^j}{r} + O(r^2), \end{aligned}$$

e

$$H_0 = \frac{2}{r} + r \left(\frac{R}{2} - \frac{4}{3} R_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} \right) + O(r^2).$$

Demonstração: Primeiramente, vamos encontrar uma expansão para a segunda forma fundamental. Para tanto, considere $n = \frac{\partial}{\partial r}$ o vetor normal de S_r e

$$h_{ij} = g_{ij} - n_i n_j$$

a métrica induzida em S_r com $n_i = \frac{x^i}{r}$. Pelo Lema 3.1 sabemos que

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{islj} x^s x^l + O(r^3) = \delta_{ij} + O(r^2),$$

uma vez que as componentes do tensor curvatura e suas derivadas estão sendo avaliadas em p e $x^k = O(r)$. Então, a fim de determinarmos uma expansão para os símbolos de

Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ij} \right) g^{mk} \quad (3.61)$$

analisaremos a priori as derivadas das componentes g_{ij} . Dessa forma, note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jm} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\delta_{jm} + \frac{1}{3} R_{jslm} x^s x^l + O(r^3) \right) \\ &= \frac{1}{3} R_{jslm} (\delta_{is} x^l + x^s \delta_{il}) + O(r^2) \\ &= \frac{1}{3} R_{jilm} x^l + \frac{1}{3} R_{jsim} x^s + O(r^2). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Analogamente, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x^j} g_{mi} = \frac{1}{3} R_{mjli} x^l + \frac{1}{3} R_{msji} x^s + O(r^2) \quad (3.63)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x^m} g_{ij} = \frac{1}{3} R_{imlj} x^l + \frac{1}{3} R_{ismj} x^s + O(r^2). \quad (3.64)$$

Ademais, observe também que $g_{mi} = \delta_{mi} = \delta_{mi} + O(r)$ logo quando r tende a zero temos que g_{mi} se aproxima da métrica euclidiana, então g^{-1} também se comporta como a métrica euclidiana, desde que r seja suficientemente pequeno. Sendo assim,

$$g^{ki} g_{mi} = g^{ki} \delta_{mi} + g^{ki} O(r)$$

daí,

$$g^{mk} = \delta_{mk} + O(r). \quad (3.65)$$

Agora, substituindo (3.62), (3.63), (3.64) e (3.65) em (3.61) e utilizando a Proposição 1.2, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} (R_{jilm} x^l + R_{jsim} x^s + R_{mjli} x^l + R_{msji} x^s - R_{imlj} x^l - R_{ismj} x^s) + O(r^2) \right) g^{mk} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} (R_{jilm} + R_{iljm} - R_{imlj}) x^l + \frac{1}{3} (R_{jsim} + R_{ijsm} - R_{ismj}) x^s + O(r^2) \right) g^{mk} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} (R_{ljim} + R_{imlj}) x^l - \frac{1}{3} (R_{sijm} + R_{ismj}) x^s + O(r^2) \right) g^{mk}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}(R_{ljim} + R_{ljim})x^l - \frac{1}{3}(R_{sijm} + R_{sijm})x^s + O(r^2) \right) g^{mk} \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}R_{ljim}x^l - \frac{2}{3}R_{sijm}x^s + O(r^2) \right) g^{mk} \\
 &= \frac{1}{3}(R_{jlim}x^l + R_{isjm}x^s + O(r^2))(\delta_{mk} + O(r)) \\
 &= \frac{1}{3}(R_{jlik}x^l + R_{isjk}x^s) + O(r^2) + O(r^3) \\
 &= \frac{1}{3}(R_{jmik} + R_{imjk})x^m + O(r^2).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{3}(R_{kimj} + R_{kjmi})x^m + O(r^2).$$

Tendo em vista a expansão acima e sabendo que n é um vetor unitário, temos que

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= n_{j;i} \\
 &= \frac{\partial n^j}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^k n_k \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{x^j}{r} \right) - \left(\frac{1}{3}(R_{kimj} + R_{kjmi})x^m + O(r^2) \right) \frac{x^k}{r} \\
 &= \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x^i x^j}{r^3} - \frac{1}{3}(R_{kimj} + R_{kjmi}) \frac{x^m x^k}{r} + O(r^2).
 \end{aligned}$$

Dessa forma, como estamos somando com respeito aos índices m e k , concluímos que

$$A_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x^i x^j}{r^3} - \frac{2}{3}R_{kimj} \frac{x^m x^k}{r} + O(r^2).$$

Agora, considere $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal com respeito à métrica euclidiana em S_r e seja λ_1 e λ_2 os autovalores de A . Então,

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 \lambda_2 &= \frac{A(e_1, e_1)A(e_2, e_2) - A^2(e_1, e_2)}{g(e_1, e_1)g(e_2, e_2) - g^2(e_1, e_2)} \\
 &= \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{3}R_{kimj} \frac{x^k x^m}{r^2} (e_1(x^i)e_1(x^j) + e_2(x^i)e_2(x^j)) + O(r) \right) \\
 &\quad \times \left(1 - \frac{1}{3}R_{ikmj}x^k x^m (e_1(x^i)e_1(x^j) + e_2(x^i)e_2(x^j)) + O(r^3) \right) \\
 &= \frac{1}{r^2} - \frac{1}{3}R_{ikmj} \frac{x^k x^m}{r^2} (e_1(x^i)e_1(x^j) + e_2(x^i)e_2(x^j)) + O(r) \\
 &= \frac{1}{r^2} - \frac{1}{3}R_{ikmj} \frac{x^k x^m}{r^2} h^{ij} + O(r) \\
 &= \frac{1}{r^2} - \frac{1}{3}R_{km} \frac{x^k x^m}{r^2} + O(r),
 \end{aligned}$$

3. Expansões de massas quasi-locais de esferas geodésicas

onde usamos o fato que $\sum_i (e_a(x^i))^2 = 1$ e $e_a(\sum_i (x^i)^2) = 0$ em S_r para $a = 1, 2$, e o fato que

$$e_1(x^i)e_1(x^j) + e_2(x^i)e_2(x^j) = \delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2}.$$

Portanto, pela equação de Gauss, para $x \in S_r$, temos que

$$\begin{aligned} K(x) &= \lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{2} h^{ik} h^{jl} R_{ijkl}(x) \\ &= \frac{1}{r^2} - \frac{1}{3} R_{km} \frac{x^k x^m}{r^2} + \frac{1}{2} h^{ik} h^{jl} (R_{ijkl}(p) + O(r)) \\ &= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2} R(p) - \frac{4}{3} R_{ij}(p) \frac{x^i x^j}{r^2} + O(r), \end{aligned}$$

em que $h^{ij} = g^{ij} - n^i n^j$. Por outro, para $x \in S_r$, temos que

$$\begin{aligned} H(x) &= h^{ij} A_{ij} \\ &= h^{ij} \left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{2}{3} R_{kimj} \frac{x^k x^m}{r} \right) + O(r^2) \\ &= \left(\delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ikmj} x^k x^m - \frac{x^i x^j}{r^2} \right) \left(\frac{\delta_{ij}}{r} \right) + O(r^2) \\ &= \frac{2}{r} - \frac{1}{3} R_{ij} \frac{x^i x^j}{r} + O(r^2), \end{aligned} \tag{3.66}$$

pois $h^{ij} x^i x^j = 0$, desde que r tende a 0. Além disso, considerando Z_r o mergulho da prova do Lema [3.5](#), temos que $\|Z_r - Id\|_{C_2(\mathbb{S}^2)} = O(r^2)$, em que Id é a identidade em $\mathbb{S}^2$. Daí, sejam H_r e K_r as curvaturas médias e de Gauss de $Z_r(\mathbb{S}^2)$, respectivamente. Considerando $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de vetores em $\mathbb{S}^2$ com respeito a métrica padrão, então o tensor métrico h e a segunda forma fundamental A da superfície $Z_r(\mathbb{S}^2)$ satisfazem

$$h(e_a, e_b) = \delta_{ab} + \alpha_{ab}, \quad A(e_a, e_b) = \delta_{ab} + \beta_{ab},$$

tais que $\alpha_{ab} = O(r^2)$ e $\beta_{ab} = O(r^2)$. Dessa forma, $h^{-1}(e_a, e_b) = \delta^{ab} - \alpha_{ab}$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} H_r &= h^{-1}(e_a, e_b) A(e_a, e_b) \\ &= (\delta^{ab} - \alpha_{ab})(\delta_{ab} + \beta_{ab}) \\ &= \delta^{ab} \delta_{ab} + \delta^{ab} \beta_{ab} - \alpha_{ab} \delta_{ab} - \alpha_{ab} \beta_{ab} \\ &= 2 - \alpha_{11} - \alpha_{22} + \beta_{11} + \beta_{22} + O(r^4). \end{aligned}$$

Além disso, como $\delta_{ab} = h(e_a, e_b) - \alpha_{ab}$. Então, $A(e_a, e_b) = h(e_a, e_b) - \alpha_{ab} + \beta_{ab}$.

$$K_r = \det(A(e_a, e_b)) = 1 - \alpha_{11} - \alpha_{22} + \beta_{11} + \beta_{22} + O(r^4).$$

Agora, por meio de um mergulho de $(S_r, g|_{S_r})$ em $\mathbb{R}^3$, temos que

$$K = \frac{1}{r^2}K_r = \frac{1}{r^2}(1 - \alpha_{11} - \alpha_{22} + \beta_{11} + \beta_{22}) + O(r^2)$$

e

$$H_0 = \frac{1}{r}H_r = \frac{1}{r}(2 - \alpha_{11} - \alpha_{22} + \beta_{11} + \beta_{22}) + O(r^3).$$

Logo,

$$2 - \alpha_{11} - \alpha_{22} + \beta_{11} + \beta_{22} = r^2K + 1 + O(r^4).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} H_0 &= rK + \frac{1}{r} + O(r^3) \\ &= r \left(\frac{1}{r^2} + \frac{R}{2} - \frac{4}{3}R_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} + O(r) \right) + \frac{1}{r} + O(r^3) \\ &= \frac{2}{r} + r \left(\frac{R}{2} - \frac{4}{3}R_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} \right) + O(r^2). \end{aligned}$$

■

3.3 Expansão da massa de Brown-York

Agora, analisaremos um resultado que permite expandir a massa de Brown-York de esferas coordenadas S_r , de forma que tal expansão envolve a curvatura escalar e a norma do tensor Ricci. Para isso, utilizamos fortemente as fórmulas de Minkowski dadas na Proposição [1.5](#).

Teorema 3.7. *Sejam (N, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 3, p um ponto interior em N e S_r a esfera geodésica de raio r e centro p . Para r pequeno o suficiente, temos que*

$$m_{BY}(S_r) = \frac{r^3}{12}R(p) + \frac{r^5}{1440}[24|Ric|^2(p) - 13R^2(p) + 12\Delta R(p)] + O(r^6), \quad (3.67)$$

em que Δ é o operador Laplaciano de (N, g) .

Demonstração: Para r suficientemente pequeno, considere o mergulho isométrico Z de $(S_r, g|_{S_r})$, determinado no Lema [3.5](#). Além disso, dos Lemas [3.5](#) e [3.6](#), temos que

$$K = \frac{1}{r^2} + k_0 + O(r), \quad H_0 = \frac{2}{r} + h_1 + O(r^2) \quad \text{e} \quad Z \cdot n = r + n_3 + O(r^4), \quad (3.68)$$

em que

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{R}{2} - \frac{4}{3} R_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2}, \\ n_3 &= \frac{r^3}{6} \left(\frac{R}{2} - 2R_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} \right), \\ h_1 &= r k_0. \end{aligned}$$

Daí, pela Proposição [1.5](#) e utilizando o Lema [2.4](#), temos que

$$\begin{aligned} \int_{S_r} H_0 d\Sigma_r &= 2 \int_{S_r} K Z \cdot n d\Sigma_r \\ &= 2 \int_{S_r} \left(\frac{1}{r^2} + k_0 + O(r) \right) d\Sigma_r \\ &= 2 \int_{S_r} \frac{1}{r^2} Z \cdot n d\Sigma_r + 2 \int_{S_r} (k_0 + O(r)) Z \cdot n d\Sigma_r \\ &= 2 \int_{S_r} \frac{1}{r^2} Z \cdot n d\Sigma_r + 2 \int_{S_r} \left(\frac{1}{r^2} + k_0 + O(r) - \frac{1}{r^2} \right) Z \cdot n d\Sigma_r \\ &= 2 \int_{S_r} \frac{1}{r^2} Z \cdot n d\Sigma_r + 2 \int_{S_r} \left(K - \frac{1}{r^2} \right) Z \cdot n d\Sigma_r \\ &= 2 \int_{S_r} \frac{1}{r^2} Z \cdot n d\Sigma_r + 2 \int_{S_r} \left(K - \frac{1}{r^2} \right) (r + n_3 + O(r^4)) d\Sigma_r \\ &= 2 \int_{S_r} \frac{1}{r^2} Z \cdot n d\Sigma_r + 2 \int_{S_r} \left(K - \frac{1}{r^2} \right) (r + n_3) d\Sigma_r \\ &\quad + 2 \int_{S_r} \left(\frac{1}{r^2} + k_0 + O(r) - \frac{1}{r^2} \right) O(r^4) d\Sigma_r \end{aligned}$$

Mas, do Teorema de Gauss-Bonnet e pelo fato que k_0 é limitado e $n_3 = O(r^3)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{S_r} H_0 d\Sigma_r &= \frac{6}{r^2} V_0(r) + 2 \int_{S_r} \left(K - \frac{1}{r^2} \right) (r + n_3) d\Sigma_r + O(r^6) + O(r^7) \\ &= \frac{6}{r^2} V_0(r) + 2 \int_{S_r} \left(K - \frac{1}{r^2} \right) r d\Sigma_r + 2 \int_{S_r} (k_0 + O(r)) n_3 d\Sigma_r + O(r^6) \\ &= \frac{6}{r^2} V_0(r) + 8\pi r - \frac{2}{r} \mathcal{A}(r) + 2 \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r + 2 \int_{S_r} n_3 O(r) d\Sigma_r + O(r^6) \end{aligned}$$

E como $n_3 = O(r^3)$, concluímos que

$$\int_{S_r} H_0 d\Sigma_r = \frac{6}{r^2} V_0(r) + 8\pi r - \frac{2\mathcal{A}(r)}{r} + 2 \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r + O(r^6) \quad (3.69)$$

Por outro lado, da Proposição [1.5](#) e do Lema [3.5](#), obtemos

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{A}(r) &= \int_{S_r} H_0 Z \cdot nd\Sigma_r \\
 &= \int_{S_r} \left(\frac{2}{r} + h_1 + O(r^2) \right) Z \cdot nd\Sigma_r \\
 &= \int_{S_r} \frac{2}{r} Z \cdot nd\Sigma_r + \int_{S_r} \left(\frac{2}{r} + h_1 + O(r^2) - \frac{2}{r} \right) Z \cdot nd\Sigma_r \\
 &= \frac{2}{r} \int_{S_r} Z \cdot nd\Sigma_r + \int_{S_r} \left(H_0 - \frac{2}{r} \right) (r + n_3 + O(r^4)) d\Sigma_r \\
 &= \frac{6}{r} V_0(r) + \int_{S_r} \left(H_0 - \frac{2}{r} \right) (r + n_3) d\Sigma_r + \int_{S_r} \left(H_0 - \frac{2}{r} \right) O(r^4) d\Sigma_r \\
 &= \frac{6}{r} V_0(r) + \int_{S_r} \left(H_0 - \frac{2}{r} \right) (r + n_3) d\Sigma_r + \int_{S_r} (h_1 + O(r^2)) O(r^4) d\Sigma_r
 \end{aligned}$$

No entanto $n_3 = O(r^3)$ e, uma vez que, k_0 é limitado temos que $h_1 = rk_0 = O(r)$. Então,

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{A}(r) &= \frac{6}{r} V_0(r) + \int_{S_r} \left(H_0 - \frac{2}{r} \right) (r + n_3) d\Sigma_r + \int_{S_r} d\Sigma_r + \int_{S_r} O(r^5) d\Sigma_r \\
 &= \frac{6}{r} V_0(r) + r \int_{S_r} H_0 d\Sigma_r - \int_{S_r} 2d\Sigma_r + \int_{S_r} (h_1 + O(r^2)) n_3 d\Sigma_r + O(r^7) \\
 &= \frac{6}{r} V_0(r) + r \int_{S_r} H_0 d\Sigma_r - 2\mathcal{A}(r) + \int_{S_r} h_1 n_3 d\Sigma_r + \int_{S_r} O(r^5) d\Sigma_r + O(r^7) \\
 &= \frac{6}{r} V_0(r) + r \int_{S_r} H_0 d\Sigma_r - 2\mathcal{A}(r) + r \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r + O(r^7).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{S_r} H_0 d\Sigma_r = \frac{1}{r} \left(-\frac{6}{r} V_0(r) + 4\mathcal{A}(r) - r \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r + O(r^7) \right)$$

ou seja,

$$\int_{S_r} H_0 d\Sigma_r = -\frac{6}{r^2} V_0(r) + \frac{4\mathcal{A}(r)}{r} - \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r + O(r^6) \quad (3.70)$$

Sendo assim, somando [\(3.69\)](#) e [\(3.70\)](#), obtemos

$$2 \int_{S_r} H_0 d\Sigma_r = 8\pi r + \frac{2}{r} \mathcal{A}(r) + \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r + O(r^6).$$

Logo,

$$\int_{S_r} H_0 d\Sigma_r = 4\pi r + \frac{1}{r} \mathcal{A}(r) + \frac{1}{2} \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r + O(r^6). \quad (3.71)$$

Por outro lado, lembre que do Lema [3.3](#) temos que

$$\mathcal{A}(r) = 4\pi r^2 + A_4 + A_6 + O(r^7). \quad (3.72)$$

Daí, substituindo (3.72) em (3.71), obtemos

$$\int_{S_r} H_0 d\Sigma_r = 8\pi r + \frac{A_4 + A_6}{r} + \frac{1}{2} \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r + O(r^6). \quad (3.73)$$

Além disso, do Corolário 3.4, temos que

$$\int_{S_r} H d\Sigma_r = 8\pi r + \frac{4A_4 + 6A_6}{r} + O(r^6). \quad (3.74)$$

Então, de (3.73) e (3.74), concluímos que

$$\int_{S_r} (H_0 - H) d\Sigma_r = - \left(\frac{3A_4 + 5A_6}{r} \right) + \frac{1}{2} \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r + O(r^6). \quad (3.75)$$

Dessa forma, para determinarmos a expansão de Taylor da massa de Brown-York das esferas geodésicas S_r , precisamos analisar a integral

$$\int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r.$$

Para tanto, da demonstração do Lema 3.3 relembramos que

$$\int_{S_r} b_2 d\Sigma_r^0 = -\frac{2\pi r^4}{9} R \quad (3.76)$$

em que $b_2 = -\frac{1}{3} R_{ij} x^i x^j$. Além disso,

$$\frac{1}{2} \int_{S_r} (R_{ij} x^i x^j)^2 d\Sigma_r^0 = \frac{4}{15} \pi r^6 (R^2 + 2|\text{Ric}|^2) \quad (3.77)$$

Por outro lado, como $d\Sigma_r = (1 + O(r)) d\Sigma_r^0$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r &= \int_{S_r} \left(\frac{R}{2} - \frac{4}{3} R_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} \right) \frac{r^3}{6} \left(\frac{R}{2} - 2R_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} \right) d\Sigma_r \\ &= \frac{r^3}{6} \int_{S_r} \left(\frac{R}{2} - \frac{4}{3} R_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} \right) \left(\frac{R}{2} - 2R_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} \right) d\Sigma_r^0 \\ &+ \frac{r^3}{6} \int_{S_r} O(r) \left(\frac{R}{2} - \frac{4}{3} R_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} \right) \left(\frac{R}{2} - 2R_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} \right) d\Sigma_r^0 \\ &= \frac{r^3}{6} \int_{S_r} \left(\frac{R}{2} - \frac{4}{3} R_{ij} \frac{x^i x^j}{2} \right) \left(\frac{R}{2} - 2R_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} \right) d\Sigma_r^0 + O(r^6). \end{aligned}$$

Pois, R e R_{ij} estão sendo avaliados em p . Além disso,

$$\left(\frac{R}{2} - \frac{4}{3} R_{ij} \frac{x^i x^j}{2} \right) \left(\frac{R}{2} - 2R_{ij} \frac{x^i x^j}{2} \right)$$

é limitado, visto que $|x^k| \leq r$. Daí, por (3.76) e (3.77), tem-se

$$\begin{aligned}
 \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r &= \frac{r^3}{6} \int_{S_r} \left(\frac{R^2}{4} - \left(1 + \frac{2}{3}\right) RR_{ij} \frac{x^i x^j}{2} + \frac{8}{3} \left(R_{ij} \frac{x^i x^j}{r^2} \right)^2 \right) d\Sigma_r^0 + O(r^6) \\
 &= \frac{r^3}{6} \left(\pi R^2 r^2 + \frac{5R}{r^2} \int_{S_r} \left(-\frac{1}{3} R_{ij} x^i x^j \right) d\Sigma_r^0 + \frac{8}{3r^4} \int_{S_r} (R_{ij} x^i x^j)^2 d\Sigma_r^0 \right) \\
 &\quad + O(r^6) \\
 &= \frac{r^3}{6} \left(\pi R^2 r^2 + \frac{5R}{r^2} \int_{S_r} b_2 d\Sigma_r^0 + \frac{8}{3r^4} \int_{S_r} (R_{ij} x^i x^j)^2 d\Sigma_r^0 \right) + O(r^6) \\
 &= \frac{r^3}{6} \left[\pi R^2 r^2 - \frac{20}{9} \pi R^2 + \frac{8}{3r^4} \left(\frac{4}{15} \pi r^6 (R^2 + 2|\text{Ric}|^2) \right) \right] + O(r^6) \\
 &= \frac{\pi r^5}{6} \left(R^2 - \frac{20}{9} R^2 + \frac{32}{45} R^2 + \frac{64}{45} |\text{Ric}|^2 \right) + O(r^6) \\
 &= \frac{\pi r^5}{270} (64|\text{Ric}|^2 - 23R^2) + O(r^6). \tag{3.78}
 \end{aligned}$$

Assim, substituindo (3.78) em (3.75), obtemos

$$\int_{S_r} (H_0 - H) d\Sigma_r = -\frac{(3A_4 + 5A_6)}{r} + \frac{\pi r^5}{540} (64|\text{Ric}|^2 - 23R^2) + O(r^6). \tag{3.79}$$

Então, pela definição massa de Bown-York e pelo Lema 3.3, concluímos que

$$\begin{aligned}
 m_{BY}(S_r) &= \frac{1}{8\pi} \int_{S_r} (H_0 - H) d\Sigma_r^0 \\
 &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{2\pi r^3}{3} R - \frac{\pi r^5}{135} (4R^2 - 2|\text{Ric}|^2 - 9\Delta R) + \frac{\pi r^5}{540} (64|\text{Ric}|^2 - 23R^2) \right) \\
 &\quad + O(r^6) \\
 &= \frac{r^3}{12} R + \frac{r^5}{8\pi} \left(\frac{6\pi}{45} |\text{Ric}|^2 - \frac{13}{180} R^2 + \frac{3}{45} \Delta R \right) + O(r^6).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$m_{BY}(S_r) = \frac{r^3}{12} R(p) + \frac{r^5}{1440} [24|\text{Ric}|^2(p) - 13R^2(p) + 12\Delta R(p)] + O(r^6).$$

■

Em seguida, apresentaremos uma consequência do resultado anterior, sucintamente, é possível concluir que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m_{BY}(S_r)}{r^5} \geq 0.$$

Um ponto interessante é que tal resultado pode ser obtido de maneira imediata através da positividade da massa abordadas por Y.-G. Shi e L.-F Tam em [20]. Mas em especial, garantiremos o comportamento do limite acima, sem utilizar tal resultado.

Corolário 3.8. Assumindo todas as condições impostas no Teorema 3.7 e supondo que $R \geq 0$ em uma vizinhança de p . Então,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m_{BY}(S_r)}{r^5} \geq 0$$

e a igualdade é satisfeita se, e somente se, (N, g) for plana em p e R se anular, até a segunda ordem, em p .

Demonstração: Do Teorema 3.7, sabemos que

$$m_{BY}(S_r) = \frac{r^3}{12}R(p) + \frac{r^5}{1440}[24|\text{Ric}|^2(p) - 13R^2(p) + 12\Delta R(p)] + O(r^6).$$

Logo, para $r \neq 0$, obtemos

$$\frac{m_{BY}(S_r)}{r^5} = \frac{1}{r^2} \frac{R(p)}{12} + \frac{1}{1440}[24|\text{Ric}|^2(p) - 13R^2(p) + 12\Delta R(p)] + O(r).$$

Daí, como

$$\frac{1}{1440}[24|\text{Ric}|^2(p) - 13R^2(p) + 12\Delta R(p)]$$

é constante e $O(r)$ é a classe das funções tendem a zero, desde que r se aproxima de 0.

Então, para assegurarmos o resultado em questão, precisamos analisar o termo

$$\frac{1}{r^2} \frac{R(p)}{12}.$$

A priori, note que por hipótese temos que $R \geq 0$ em uma vizinhança de p , em particular $R(p) \geq 0$. Dessa forma, se $R(p) > 0$, garantimos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m_{BY}(S_r)}{r^5} > 0,$$

pois

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \frac{R(p)}{12} = +\infty > 0.$$

Por outro lado, no caso em que $R(p) = 0$ então como $R \geq 0$ em uma vizinhança de p , temos que $R(p)$ é mínimo local de R , então $\Delta R(p) = 0$. Então, pelo Teorema 2.6, obtemos

$$m_{BY}(S_r) = \frac{r^5}{1440}24|\text{Ric}|^2(p) + O(r^6)$$

e se $r \neq 0$, tem-se

$$\frac{m_{BY}(S_r)}{r^5} = \frac{24}{1440}|\text{Ric}|^2(p) + O(r).$$

Sendo assim, para este caso também verificamos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m_{BY}(S_r)}{r^5} = \frac{24}{1440} |\text{Ric}|^2(p) \geq 0.$$

Por fim, suponhamos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m_{BY}(S_r)}{r^5} = 0$$

então $R(p) = 0$ pois, do contrário, pela expansão da massa de Brown-York, o limite acima divergiria. Desse modo, R tem um número local em p então $\nabla R(p) = 0$ e $\Delta R(p) = 0$, logo

$$\frac{24}{1440} |\text{Ric}|^2(p) = 0.$$

Então, $|\text{Ric}|(p) = 0$ e como (N, g) é tridimensional concluímos, pela Proposição [1.4](#), que N é plana em p . Além disso, o Hessiano de R tem autovalores não negativos, então o Hessiano de R deve se anular em p , logo R as derivadas de segunda ordem em p se anulam. Reciprocamente, se (N, g) é plano em p e R as derivadas de segunda ordem em p se anulam, então $\nabla R(p) = 0$, $\Delta R(p) = 0$ e $|\text{Ric}|(p) = 0$, daí

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m_{BY}(S_r)}{r^5} = \lim_{r \rightarrow 0} O(r) = 0.$$

■

Observação 3.1. Observemos que podemos fazer uma analogia deste resultado com os estudos do Capítulo 2. Especificamente, considere uma variedade assintoticamente plana M com curvatura escalar não negativa, de modo que a massa de Brown-York das esferas coordenadas tendem a zero, no infinito. Então, do Teorema [2.6](#), temos que $m_{ADM}(M) = 0$, ou seja, pelo Teorema da Massa Positiva a variedade M é isomorfa ao espaço euclidiano.

3.4 Expansão da massa de Hawking

Em seguida, de modo análogo ao que apresentamos na seção anterior, analisaremos a expansão da massa quasi-local de Hawking.

Teorema 3.9. *Sejam (N, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 3, p um ponto interior em N e S_r a esfera geodésica de raio r e centro p . Para r pequeno o suficiente, temos que*

$$m_H(S_r) = \frac{r^3}{12} R(p) + \frac{r^5}{720} (6\Delta R(p) - 5R^2(p)) + O(r^6) \quad (3.80)$$

Demonstração: Primeiramente, note que do Lema [3.6](#), tem-se

$$H = \frac{2}{r} + H_1 + O(r^2)$$

onde $H_1 = -\frac{1}{3}R_{ij}\frac{x^i x^j}{r}$. Como $H_1 = O(r)$, pois $x^k = O(r)$. Temos,

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{2}{r} + H_1 + O(r^2)\right)^2 \\ &= \frac{4}{r^2} + H_1^2 + O(r^4) + \frac{4}{r}H_1 + \frac{4}{r}O(r^2) + 2H_1O(r^2) \\ &= -\frac{4}{r^2} + H_1^2 + \frac{8}{r^2} + \frac{4}{r}H_1 + \frac{4}{r}O(r^2) + O(r^4) + O(r^3) \\ &= -\frac{4}{r^2} + H_1^2 + \frac{4}{r}\left(\frac{2}{r} + H_1 + O(r^2)\right) + O(r^3). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Assim,

$$H^2 = -\frac{4}{r^2} + \frac{4}{r}H + H_1^2 + O(r^3). \quad (3.82)$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{S_r} H^2 d\Sigma_r &= -\frac{4}{r^2}\mathcal{A}(r) + \frac{4}{r} \int_{S_r} H d\Sigma_r + \int_{S_r} H_1^2 d\Sigma_r + O(r^5) \\ &= -\frac{4}{r^2}\mathcal{A}(r) + \frac{4}{r} \int_{S_r} H d\Sigma_r + \int_{S_r} H_1^2 d\Sigma_r^0 + O(r^5) \end{aligned} \quad (3.83)$$

pois, $H_1^2 = O(r^2)$ e $d\Sigma_r = (1 + O(r))d\Sigma_r^0$. Por outro lado, pelo Corolário [3.4](#), temos que

$$\int_{S_r} H d\Sigma_r = 8\pi r + \frac{4A_4 + 6A_6}{r} + O(r^6). \quad (3.84)$$

E, pelo Lema [3.3](#), sabemos que

$$\mathcal{A}(r) = 4\pi r^2 + A_4 + A_6 + O(r^7). \quad (3.85)$$

Daí, substituindo [\(3.84\)](#) e [\(3.85\)](#) em [\(3.83\)](#), concluímos

$$\begin{aligned} \int_{S_r} H^2 d\Sigma_r &= -\frac{4}{r^2}(4\pi r^2 + A_4 + A_6 + O(r^7)) + \frac{4}{r}\left(8\pi r + \frac{4A_4}{r} + \frac{6A_6}{r} + O(r^6)\right) \\ &\quad + \int_{S_r} H_1^2 d\Sigma_r^0 + O(r^5) \\ &= 16\pi + \frac{12A_4}{r^2} + \frac{20A_6}{r^2} + \int_{S_r} H_1^2 d\Sigma_r^0 + O(r^5). \end{aligned}$$

Logo,

$$16\pi - \int_{S_r} H^2 d\Sigma_r = -\frac{12A_4}{r^2} - \frac{20A_6}{r^2} - \int_{S_r} H_1^2 d\Sigma_r^0 + O(r^5). \quad (3.86)$$

Por outro lado, como

$$A_6 = \frac{\pi r^6}{675}(4R^2(p) - 2|\text{Ric}|^2(p) - 9\Delta R(p)) = O(r^6),$$

então $\mathcal{A}(r) = 4\pi r^2 + A_4 + A_6 + O(r^7) = 4\pi r^2 + A_4 + O(r^6)$. Entretanto,

$$\begin{aligned} \left(2\pi^{\frac{1}{2}}r + \frac{1}{4}\pi^{-\frac{1}{2}}r^{-1}A_4 + O(r^5)\right)^2 &= 4\pi r^2 + \frac{1}{16}\pi^{-1}r^{-2}A_4^2 + O(r^{10}) + A_4 + 4\pi^{\frac{1}{2}}rO(r^5) \\ &+ \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}r^{-1}A_4O(r^5) \\ &= 4\pi r^2 + O(r^6) + O(r^{10} + A_4 + O(r^6) + O(r^8)) \\ &= 4\pi r^2 + A_4 + O(r^6) \\ &= \mathcal{A}(r), \end{aligned} \quad (3.87)$$

pois $A_4 = -(2\pi r^4 R(p))/9 = O(r^4)$. Dessa forma,

$$\frac{\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(r)}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}r}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{A_4}{8\pi r^2} + O(r^4)\right) = \frac{r}{32\pi} \left(1 + \frac{A_4}{8\pi r^2} + O(r^4)\right) \quad (3.88)$$

Portanto, por (3.86), (3.88) e a definição da massa de Hawking, obtemos

$$\begin{aligned} m_H(S_r) &= \frac{\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(r)}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(16\pi - \int_{S_r} H^2 d\Sigma_r\right) \\ &= \frac{r}{32\pi} \left(1 + \frac{A_4}{8\pi r^2} + O(r^4)\right) \left(-\frac{12A_4}{r^2} - \frac{20A_6}{r^2} - \int_{S_r} H_1^2 d\Sigma_r^0 + O(r^5)\right) \\ &= \frac{r}{32\pi} \left(-\frac{12A_4}{r^2} - \frac{20A_6}{r^2} - \int_{S_r} H_1^2 d\Sigma_r^0 + O(r^5) - \frac{12A_4^2}{8\pi r^4} - \frac{20A_4A_6}{8\pi r^4} + \right) \\ &+ \frac{r}{32\pi} \left(-\frac{A_4}{8\pi r^2} \int_{S_r} H_1^2 d\Sigma_r^0 + O(r^7) + O(r^6) + O(r^8) - O(r^4) \int_{S_r} H_1^2 d\Sigma_r^0\right) \\ &+ O(r^{10}) \end{aligned}$$

Contudo, como $H_1 = O(r)$, $A_4 = O(r^4)$, $A_6 = O(r^6)$, então

$$m_H(S_r) = -\frac{3A_4}{8\pi r} - \frac{5A_6}{8\pi r} - \frac{r}{32\pi} \int_{S_r} H_1^2 d\Sigma_r^0 - \frac{3A_4^2}{64\pi^2 r^3} + O(r^6). \quad (3.89)$$

Para finalizarmos a expansão acima, podemos ainda encontrar a integral

$$\int_{S_r} H_1^2 d\Sigma^0,$$

com $H_1 = -\frac{1}{3r}R_{ij}x^i x^j$. Para isto, seguimos como na demonstração do Teorema (3.7), mais especificamente por (3.77), obtemos

$$\int_{S_r} H_1^2 d\Sigma_r^0 = \frac{1}{9r^2} \int_{S_r} (R_{ij}x^i x^j)^2 d\Sigma_r^0 = \frac{1}{9r^2} \left(\frac{4}{15} \pi r^6 (R^2 + 2|\text{Ric}|^2) \right)$$

ou seja,

$$\int_{S_r} H_1^2 d\Sigma_r^0 = \frac{4}{135} \pi r^4 (R^2 + 2|\text{Ric}|^2). \quad (3.90)$$

Assim, substituindo A_4 e A_6 do Lema (3.3) bem como (3.90) em (3.89), temos que

$$\begin{aligned} m_H(S_r) &= -\frac{3}{8\pi r} \left(-\frac{2\pi r^4 R}{9} \right) - \frac{5}{8\pi r} \left(\frac{\pi r^6}{675} (4R^2 - 2|\text{Ric}|^2 - 9\Delta R) \right) \\ &\quad - \frac{r}{32\pi} \left(\frac{4\pi}{135} \pi r^4 (R^2 + 2|\text{Ric}|^2) \right) - \frac{3}{64\pi^2 r^3} \left(\frac{4\pi^2 r^8}{81} R^2 \right) + O(r^6) \\ &= \frac{r^3}{12} R - \frac{r^5}{270} R^2 + \frac{r^5}{540} |\text{Ric}|^2 + \frac{3r^5}{360} \Delta R - \frac{r^5}{1080} R^2 - \frac{r^5}{432} R^2 + O(r^6) \\ &= \frac{r^3}{12} R + r^5 \left(-\frac{5}{1080} R^2 + \frac{3}{360} \Delta R - \frac{1}{432} R^2 \right) + O(r^6) \\ &= \frac{r^3}{12} R + r^5 \left(\frac{6}{720} \Delta R - \frac{30}{4320} R^2 \right) + O(r^6) \end{aligned} \quad (3.91)$$

Portanto,

$$m_H(S_r) = \frac{r^3}{12} R(p) + \frac{r^5}{720} (6\Delta R(p) - 5R^2(p)) + O(r^6)$$

■

Observação 3.2. É interessante observar que as expansões da massa de Brown-York e da massa de Hawking são iguais até a ordem 4 e se diferenciam a partir do momento que surge o termo r^5 .

Por fim, assim como no Capítulo 2, também podemos comparar o volume da bola geodésica de centro p e raio r com o volume da região limitada por S_r quando mergulhado em $\mathbb{R}^3$. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.10. *Sejam (N, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 3, p um ponto interior em N e S_r a esfera geodésica de raio r e centro p . Então,*

$$V_0(r) - V(r) = -\frac{\pi}{15} R(p) r^5 + \frac{\pi r^7}{1890} \left(\frac{177}{4} R^2(p) - 144 |\text{Ric}|^2 - 9\Delta R \right) + O(r^8).$$

Demonstração: Na demonstração do Teorema (3.7) temos que

$$\int_{S_r} H_0 d\Sigma_r = \frac{6}{r^2} V_0(r) + 8\pi r - \frac{2\mathcal{A}(r)}{r} + 2 \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma + O(r^6) \quad (3.92)$$

e

$$\int_{S_r} H_0 d\Sigma_r = -\frac{6}{r^2} V_0(r) + \frac{4\mathcal{A}(r)}{r} - \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma + O(r^6). \quad (3.93)$$

Daí, subtraindo (3.93) de (3.92) temos que

$$0 = \frac{12V_0(r)}{r^2} + 8\pi r - \frac{6\mathcal{A}(r)}{r} + 3 \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma + O(r^6).$$

Logo, como k_0 é limitado, $d\Sigma_r = (1 + O(r))d\Sigma_r^0$ e $n_3 = O(r^3)$, obtemos

$$\begin{aligned} V_0(r) &= \frac{r^2}{12} \left(-8\pi r + \frac{6\mathcal{A}(r)}{r} - 3 \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r + O(r^6) \right) \\ &= -\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{r\mathcal{A}(r)}{2} - \frac{r^2}{4} \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r^0 + O(r^8) \end{aligned} \quad (3.94)$$

Por outro lado, do Lema 3.3, sabemos que

$$\mathcal{A}(r) = 4\pi r^2 + A_4 + A_6 + O(r^7) \quad (3.95)$$

tais que

$$A_4 = -\frac{2\pi r^4 R}{9}, \quad A_6 = \frac{\pi r^6}{675} (4R^2 - 2|\text{Ric}|^2 - 9\Delta R)$$

Daí, substituindo (3.95) em (3.94), tem-se

$$\begin{aligned} V_0(r) &= -\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{r}{2} (4\pi r^2 + A_4 + A_6 + O(r^7)) - \frac{r^2}{4} \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r^0 + O(r^8) \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{r}{2} A_4 + \frac{r}{2} A_6 - \frac{r^2}{4} \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r^0 + O(r^8). \end{aligned} \quad (3.96)$$

No entanto, das definições de A_4 e A_6 , obtemos

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_0^r \mathcal{A}(t) dt \\ &= \int_0^r (4\pi t^2 + A_4(t) + A_6(t) + O(t^7)) dt \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{1}{5} \left(-\frac{2\pi r^5 R}{9} \right) + \frac{1}{7} \left(\frac{\pi r^7}{675} (4R^2 - 2|\text{Ric}|^2 - 9\Delta R) \right) + O(r^8) \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{r}{5} A_4 + \frac{r}{7} A_6 + O(r^8) \end{aligned} \quad (3.97)$$

Portanto, substituindo A_4 e A_6 bem como de (3.95) e (3.97), temos que

$$\begin{aligned}
 V_0(r) - V(r) &= \frac{3r}{10}A_4 + \frac{5r}{14}A_6 - \frac{r^2}{4} \int_{S_r} k_0 n_3 d\Sigma_r^0 + O(r^8) \\
 &= \frac{3r}{10} \left(-\frac{2\pi r^4}{9} R \right) + \frac{5r}{14} \left(\frac{\pi r^6}{675} (4R^2 - 2|\text{Ric}|^2 - 9\Delta R) \right) \\
 &\quad - \frac{r^2}{4} \left(\frac{\pi r^5}{270} (64|\text{Ric}|^2 - 23R^2) + O(r^6) \right) + O(r^8) \\
 &= -\frac{\pi}{15} Rr^5 + \frac{\pi r^7}{14} \left(\frac{4}{135} R^2 - \frac{2}{135} |\text{Ric}|^2 - \frac{9}{135} \Delta R \right) \\
 &\quad + \frac{\pi r^7}{135} \left(-8|\text{Ric}|^2 + \frac{23}{8} R^2 \right) + O(r^8) \\
 &= -\frac{\pi}{15} Rr^5 + \frac{\pi r^7}{135} \left(\frac{2}{7} + \frac{23}{8} \right) R^2 - \frac{\pi r^7}{135} \left(\frac{1}{7} + 8 \right) |\text{Ric}|^2 \\
 &\quad - \frac{1}{135} \left(\frac{9}{14} \Delta R \right) + O(r^8) \\
 &= -\frac{\pi}{15} Rr^5 + \frac{\pi r^7}{135} \left(\frac{177}{56} R^2 - \frac{57}{7} |\text{Ric}|^2 - \frac{9}{14} \Delta R \right) + O(r^8).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$V_0(r) - V(r) = -\frac{\pi}{15} Rr^5 + \frac{\pi r^7}{1890} \left(\frac{177}{4} R^2 - 144|\text{Ric}|^2 - 9\Delta R \right) + O(r^8).$$

■

Corolário 3.11. Sejam (N, g) uma variedade Riemanniana de dimensão 3, p um ponto interior em N e S_r a esfera geodésica de raio r e centro p . Se $R \geq 0$ em uma vizinhança de p , então

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{V_0(r) - V(r)}{r^7} \leq 0$$

sendo satisfeita a igualdade se e só se (N, g) é plana em p e R se anula até segunda ordem em p .

Demonstração: A demonstração deste resultado é análoga a demonstração do Corolário 3.8. Em que, ao invés de utilizarmos o Teorema 3.7, trabalharemos com o Teorema 3.10. ■

Referências Bibliográficas

- [1] R. ARNOWITT, S. DESER AND C.W. MISNER, *Coordinate invariance and energy expressions in general relativity*, Phys. Rev. (2) **122** (1961), 997–1006.
- [2] R. BARTNIK, *The mass of an asymptotically flat manifold*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (5) (1986), 661–693.
- [3] J.D. BROWN, S.R. LAU, J.W. YORK, *Canonical quasilocal energy and small spheres*, Phys. Rev. D (3) **59** (6) (1999), 064028.
- [4] M. P. DO CARMO, *Geometria Riemanniana*, Coleção Projeto Euclides 5^a Ed., SBM, Rio de Janeiro, 2015.
- [5] S.S. CHERN, W.H. CHEN, K.S. LAM, *Lectures on differential geometry*, International Press, Cambridge, MA, 1994.
- [6] S. COHN-VOSSEN, *Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl., **27** (1927), 125–134.
- [7] X.-Q. FAN, Y. SHI, L.-F. TAM, *Large-sphere and small-sphere limits of the Brown-York mass*, Comm. Anal. Geom. **17** (2009), no. 1, 37-72.
- [8] R.S. HAMILTON, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom. **17** (2) (1982), 255–306.
- [9] S.W. HAWKING, *Gravitational radiation in an expanding universe*, J. Math. Phys. **9** (1968), 598–604.
- [10] G. HERGLOTZ, *Über die Steinersche Formel für Parallelfächen*, Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. **15** (1943), 165–177.
- [11] G. HUISKEN, *An isoperimetric concept for mass and quasilocal mass*, in Mathematical Aspects of General Relativity, Report no. 2/2006, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach,
[http : //www.mfo.de/programme/schedule/2006/02/OWR_2006_02.pdf](http://www.mfo.de/programme/schedule/2006/02/OWR_2006_02.pdf)

- [12] W. KLINGENBERG, *A course in differential geometry*, Translated from the German by David Hoffman. Graduate Texts in Mathematics **51**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1978.
- [13] J. M. LEE, *Introduction to Riemannian manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 176, Springer International Publishing, AG, 2018.
- [14] R. LÓPEZ, *Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary*, Springer Monographs in Mathematics, Berlin, 2013.
- [15] L. NIRENBERG, *The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large*, Comm. Pure Appl. Math. **6** (1953), 337–394.
- [16] P. PETERSEN, *Riemannian Geometry*, 3^a Ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 176, Springer International Publishing, AG, 2016.
- [17] A.V. POGORELOV, *Extrinsic geometry of convex surfaces*, Translated from the Russian by Israel Program for Scientific Translations. Translations of Mathematical Monographs **35**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1973.
- [18] R. SACKSTEDER, *The rigidity of hypersurfaces*, J. Math. Mech. **11** (1962), 929–939.
- [19] R. SCHOEN, S.-T. YAU, *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, Comm. Math. Phys. **65** (1979), 45–76.
- [20] Y.-G. SHI AND L.-F. TAM, *Positive mass theorem and the boundary behaviors of compact manifolds with non-negative scalar curvature*, J. Diff. Geom. **62** (2002), 79–125.