Universidade Federal da Paraíba
Campus IV – Litoral Norte
Centro de Ciências Aplicadas e Educação
Departamento de Ciências Exatas
Licenciatura em Matemática

ANDERSON JOÃO DOS SANTOS

O "problema da mistura" envolvendo porcentagens: um estudo da mobilização das estratégias de resolução de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental

RIO TINTO/PB

2022.2

ANDERSON JOÃO DOS SANTOS

O “problema da mistura” envolvendo porcentagens: um estudo da mobilização das estratégias de resolução de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Cibelle de Fátima Castro de Assis

RIO TINTO/PB

2022.2

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S237p Santos, Anderson João dos.
O "problema da mistura" envolvendo porcentagens: um estudo da mobilização das estratégias de resolução de estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental / Anderson João dos Santos. - Rio Tinto, 2023.
68 f.

Orientação: Cibelle de Fátima Castro de Assis.
Monografia (Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCAE.

1. Matemática - ensino. 2. Porcentagem - estratégias de resolução. 3. Regra de três. 4. Resolução de problemas. I. Assis, Cibelle de Fátima Castro de. II. Título.

UFPB/CCAE CDU 51:37

Elaborado por JOSIVAN COELHO DOS SANTOS VASCONCELOS - CRB-15-764

Anderson João dos Santos

O “problema da mistura” envolvendo porcentagens: um estudo da mobilização das estratégias de resolução de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientador(a): Prof.ª Dr.ª Cibelle de Fátima Castro de Assis

Aprovado em: 06 /06 /2023

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dr.ª Cibelle de Fátima Castro de Assis (Orientador) – UFPB/DCX

Prof.ª Dr.ª Graciana Ferreira Dias (Membro) – UFPB/DCX

Prof.ª Ma. Agnes Liliane Lima Soares de Santana (Membro) – UFPB/DCX

Dedico este trabalho aos meus pais, Gonçalo João dos Santos (*in memorian*) e Maria de Lourdes dos Santos, a quem amo muito.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu Deus pela vida, por ter me dado sabedoria para enfrentar os desafios, pela companhia nos momentos de estudos, pela força para caminhar em direção à finalização desse trabalho e por ter guiado cada passo meu.

À minha mãe, Maria de Lourdes dos Santos, pelo amor, pelo carinho, pelas orações, pela educação e por sempre estar ao meu lado entregando o seu melhor.

Aos meus irmãos, Alexsandro João dos Santos, Alexsandra dos Santos Silva, Adriano João dos Santos, Adriana dos Santos Silva e Andresa João dos Santos pelo incentivo e por me proporcionar momentos de lazer, que são indispensáveis para todo ser humano.

À minha sobrinha, Isis Nicolly dos Santos Silva, por me fazer sorrir e trazer alegria nos momentos de desânimo.

À minha professora orientadora, Cibelle de Fátima Castro de Assis, pela orientação, pelo compromisso, pelo cuidado com o trabalho, pela paciência, pelas sugestões, por ter me ajudado a enfrentar as dificuldades e por acreditar em mim.

Às professoras Graciana Ferreira Dias e Agnes Liliane Lima Soares de Santana por aceitarem o convite para compor a banca examinadora.

Aos docentes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba – Campus IV pelas aulas e ricas trocas de conhecimento durante a jornada acadêmica.

À toda equipe da escola na qual a pesquisa foi realizada, especialmente à professora de Matemática por confiar no meu trabalho e permitir o contato entre mim e seus estudantes.

Aos meus colegas de curso pela parceria, pelo apoio, pelos momentos de aprendizado e de dificuldades enfrentado durante esses últimos anos.

Obrigado a todos!

RESUMO

O presente estudo teve por objetivo principal analisar as estratégias que estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental utilizam ao resolverem uma situação-problema envolvendo cálculos de porcentagem. A fundamentação teórica desse trabalho abordou a resolução de problemas em Matemática e as dificuldades dos alunos, os tipos de problema em Matemática, as estratégias no processo de resolução de problemas e a regra de três como estratégia para problemas envolvendo porcentagem. Em termos metodológicos, a pesquisa realizada é classificada, quanto a abordagem do objeto, como qualitativa. Quanto aos objetivos, classifica-se como exploratória e quanto aos procedimentos técnicos, como estudo de caso. Os objetivos da pesquisa foram alcançados por meio de cinco etapas: levantamento e estudo de um problema matemático envolvendo cálculos de porcentagem (etapas 1 e 2); elaboração e proposição do problema selecionado junto a uma turma de 36 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal da cidade de Capim/PB (etapa 3); categorização (etapa 4) e verificação das estratégias de resolução adotadas pelos alunos participantes dessa pesquisa (etapa 5). O problema foi trabalhado em sala de aula em duas fases. Na primeira fase, os estudantes deveriam representar o problema com um desenho e resolvê-lo com suas próprias estratégias. Na segunda fase, foram indicadas as estratégias da regra de três, resolução em sentido inverso com tentativa e erro e construir uma tabela como estratégias que ajudariam os estudantes a resolverem o problema proposto. Os estudantes participantes da pesquisa mobilizaram, com mais empenho, a estratégia da regra de três, mas a estratégia de construir uma tabela também aparece nas resoluções, porém em quantitativo menor. Enquanto 23 alunos escolheram utilizar a estratégia da regra de três, 10 preferiram adotar a estratégia de construir uma tabela. As análises permitem inferir que os estudantes não conhecem diferentes estratégias de resolução de problemas e que o estudo envolvendo porcentagem é um objeto de conhecimento matemático desafiador para estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Matemática - ensino; porcentagem - estratégias de resolução; regra de três; resolução de problemas.

ABSTRACT

The main objective of this study was to analyze the strategies that 9th grade students use when solving a problem situation involving percentage calculations. The theoretical basis of this work addressed the resolution of problems in mathematics and the difficulties of students, the types of problems in mathematics, the strategies in the process of problem solving and the rule of three as a strategy for problems involving percentage. In methodological terms, the research conducted is classified, as to the approach to the object, as qualitative. As to the objectives, it is classified as exploratory, and as to the technical procedures, as a case study. The research objectives were achieved through five stages: survey and study of a mathematical problem involving percentage calculations (stages 1 and 2); elaboration and proposition of the selected problem to a class of 36 students in the 9th grade of a municipal school in Capim/PB (stage 3); categorization (stage 4) and verification of the resolution strategies adopted by the students participating in this research (stage 5). The problem was worked in the classroom in two phases. In the first phase, students were to represent the problem with a drawing and solve it with their own strategies. In the second phase, the strategies of rule of three, inverse resolution with trial and error, and building a table were indicated as strategies that would help students solve the proposed problem. The students participating in the research mobilized, with more effort, the strategy of the rule of three, but the strategy of building a table also appears in the resolutions, but in a smaller quantity. While 23 students chose to use the rule of three, 10 preferred to adopt the strategy of building a table. The analyses allow us to infer that students do not know different problem solving strategies and that the study involving percentages is a challenging mathematical knowledge object for 9th grade students.

Keywords: Mathematics - teaching; percentage - solving strategies; rule of three; problem solving.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Delimitação do Tema e Problema de Pesquisa

É nítida a presença da porcentagem em diferentes situações do cotidiano, seja ela no cálculo de juros ou até mesmo na representação de um desconto atribuído à algum produto em promoção.

No que se refere ao ensino de porcentagem como objeto de conhecimento da Matemática, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), o cálculo de porcentagens deve ser introduzido a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental e seguir de forma progressiva até os anos finais em diversos contextos, inclusive na educação financeira. Essa ideia é percebida na seguinte habilidade indicada para o 5º ano do Ensino Fundamental:

> (EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros (BRASIL, 2018, p. 295).

Nessa linha de raciocínio, convém mencionar outras habilidades referentes ao objeto de conhecimento porcentagem para os anos finais do Ensino Fundamental, 7º e 9º anos, presentes no mesmo documento BNCC (BRASIL, 2018):

> (EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros (BRASIL, 2018, p. 307).
>
> (EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira (BRASIL, 2018, p. 317).

Essas habilidades contemplam conhecimentos prévios de diferentes objetos matemáticos que os estudantes da Educação Básica precisam desenvolver ao longo dos anos, como concepções de acréscimos, decréscimos e percentuais sucessivos, por exemplo. Observa-se que as habilidades citadas fazem referência tanto à resolução de problemas quanto às estratégias de resolução, sejam elas pessoais, cálculo mental e calculadora.

No que se refere à resolução de problemas envolvendo porcentagem no ambiente escolar, é muito comum os estudantes se prenderem aos cálculos mecânicos e à regra de três como estratégias para calcular a porcentagem referente a determinada quantidade apresentada. Nesse sentido, convém ressaltar que o ensino baseado exclusivamente em algoritmos convencionais e regras não devem ser as únicas maneiras de abordar os objetos de conhecimento matemáticos em sala de aula. Isso porque, conforme Dante (2005) não há garantia da continuidade do uso desses métodos daqui a vinte anos, por exemplo. Adicionado a isso, como consequência do predomínio desse modo de aprendizagem, tem-se estudantes que, além de não se sentirem desafiados diante da Matemática, também não desenvolvem as habilidades de "[...] iniciativa, espírito explorador, criatividade e independência através da resolução de problemas" (DANTE, 2005, p. 12).

Em se tratando de dificuldades dos estudantes no desenvolvimento de habilidades relacionadas à aprendizagem matemática, os resultados apresentados no relatório do Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB de 2019 (BRASIL, 2021), revelam um nível de proficiência aquém do esperado. Segundo o relatório mencionado anteriormente, proficiência é definida da seguinte forma:

> Refere-se tanto aos conhecimentos ou habilidades medidos pelo teste (ex: proficiência em Língua Portuguesa), como ao número que representa a medida desses conhecimentos ou habilidades (geralmente simbolizado pela letra grega θ na Teoria de Resposta ao Item – TRI). Proficiência também é chamada de traço latente ou habilidade. (BRASIL, 2021, p. 29)

Ainda de acordo com o relatório do SAEB de 2019 (BRASIL, 2021), a proficiência média nacional em Matemática é de 263,0, (considerando 200 pontos o mínimo e 400 o máximo). Tal resultado significa que muitos estudantes ainda se encontram no nível básico de aprendizagem matemática.

O maior percentual em níveis de proficiência em Matemática dos alunos brasileiros do 9º ano do Ensino Fundamental é no 3º nível, com 18,17%. Isso implica dizer que esses estudantes provavelmente desenvolveram habilidades matemáticas referentes aos níveis 1 e 2.

No que diz respeito à proficiência na resolução de problemas com cálculos de porcentagem, tem-se no mesmo documento, a seguinte habilidade "[...] determinar a porcentagem envolvendo números inteiros [...]" (BRASIL, 2021, p. 166). Tal habilidade é exigida no 5º nível, o que se subentende ser necessário também o desenvolvimento pelos alunos das habilidades previstas nos níveis anteriores. Nesse contexto, podemos concluir que há um longo caminho a ser percorrido para que os estudantes desenvolvam o conjunto de habilidades necessárias para a contribuição do desenvolvimento daquela que trata de porcentagem com números inteiros.

Verificando o nível de proficiência dados em percentual, dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, em Matemática, no Saeb em 2019 apresentados no relatório, percebemos que a porcentagem de alunos que se encontram no 5º nível (aquele no qual aparece o conhecimento envolvendo porcentagem) ainda é menor que o anterior, isto é, o 4º nível. De fato, enquanto 12,89% faz referência ao nível 5, 17,79% refere-se ao nível 4. Sendo assim, fica evidente que o estudo de porcentagens pode ser considerado um conhecimento matemático de dificuldade para muitos estudantes do nosso país, o que contribui em uma baixa proficiência em Matemática, especificamente, na resolução de problemas.

Na visão de Polya (1978), o ensino da Matemática não deve estar centrado em problemas rotineiros, pois os estudantes também precisam estar envolvidos em situações que os desafiem. Nesse contexto, é de extrema importância que o professor realize uma escolha correta do problema a ser proposto em sala de aula, a fim de promover uma situação de aprendizagem com significado em Matemática. Em vista disso, "[...] de fato, é importante que o problema possa gerar muitos processos de pensamento, levar muitas hipóteses e propiciar várias estratégias de solução" (DANTE, 2010, p. 52 *apud* ALVES; PROENÇA, 2014, p. 2).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1998) destacam:

> A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las (BRASIL, 1998, p. 40).

Conforme a ideia apresentada, é possível perceber a relevância da metodologia de ensino por meio da resolução de problemas, visto que ela proporciona aos estudantes situações de aprendizagem a partir de contextos da vida real e não apenas a busca pela resolução de problemas.

Na compreensão de Alves e Proença (2014), o trabalho com resolução de problemas em sala de aula é uma alternativa de ensino que pode conduzir os estudantes para a construção do conhecimento. Diferentemente dos exercícios algorítmicos que não exploram o desenvolvimento de nenhuma estratégia de resolução, as situações-problemas na Matemática contribuem para os estudantes desenvolverem a "[...] capacidade de raciocinar e aprender, fazendo uso de levantamento de hipótese" (ALVES; PROENÇA, 2014, p. 2).

Diante das evidências apresentadas, identificamos a necessidade de um estudo sobre as estratégias dos alunos. Particularmente, neste estudo, a partir da situação proposta no "Problema da mistura", focaremos em responder a seguinte questão: *Quais estratégias de resolução são mobilizadas pelos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental?* Na busca por essa resposta, investigaremos se os estudantes desenvolvem diferentes estratégias de resolução, se usam apenas a regra de três, se limitam à apenas uma e ainda, entre tais estratégias, quais são mais ou menos recorrentes na resolução dos estudantes.

1.2 Justificativa da Pesquisa

O interesse pelo tema de pesquisa apresentado se justifica por diversas razões. Inicialmente, pela minha participação como bolsista do Projeto de Extensão "*Resolvendo problemas de Matemática em colaboração: formação docente e processos de aprendizagem nos anos finais do Ensino Fundamental*" coordenado pelas professoras Cristiane Fernandes de Souza e Cibelle de Fátima Castro de Assis no qual empregou a metodologia da Resolução de Problemas. Esse projeto teve como objetivo desenvolver propostas didáticas voltadas para o ensino de Matemática, no contexto do ensino remoto e híbrido, com o foco na aprendizagem matemática dos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e no aumento do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) das escolas parceiras localizadas no município de Rio Tinto/PB.

O projeto proporcionou a realização de atividades que abordaram temáticas distintas. Uma delas consistiu na análise das respostas dos estudantes em alguns problemas selecionados. Ao analisar as respostas do problema que envolvia o cálculo de porcentagem, notei a ausência de estratégias pessoais que pudessem ajudar, de alguma maneira, os alunos a encontrarem a solução para o problema indicado.

Uma segunda razão está ligada a própria resolução de problemas. Segundo Alves e Proença (2016), a resolução de problemas nas aulas de Matemática contribui para o desenvolvimento do saber matemático do estudante. Logo, percebe-se a importância do trabalho com resolução de problemas independentemente do objeto de conhecimento escolhido. No entanto, resolver problemas não se limita em apenas encontrar uma solução, tendo em vista que as estratégias utilizadas no caminho revelam se o conceito matemático foi, de fato, construído corretamente pelo estudante. Lorenzato (2010) considera que o acontecimento oposto, isto é, as dificuldades na formação dos significados pelo aluno precisam ser valorizadas pelo professor, pois tudo aquilo que é indicado pelo estudante tem relação com os seus pensamentos, ou seja, tanto as respostas quanto os indícios delas já constituem informações relevantes para o professor desenvolver o seu trabalho.

Sabemos que nem todos os caminhos levam à solução de determinado problema. Diante deste cenário, a partir das estratégias apresentadas pelos alunos, o professor pode considerar que:

> [...] aceitar e analisar as diversas estratégias de resolução como válidas e importantes etapas do desenvolvimento do pensamento permitem a aprendizagem pela reflexão e auxiliam o aluno a ter autonomia e confiança em sua capacidade de pensar matematicamente" (CAVALCANTI, 2001, p. 121).

Assim, percebemos a importância das análises e discussões que devem ser realizadas pelo docente para promover momentos de interações e reafirmar que a aprendizagem matemática é um processo, cuja reflexão tem contribuição relevante.

Também nos parece importante aprofundar a discussão sobre um objeto de conhecimento da Matemática que está bastante conectado com o cotidiano das pessoas e que também perpassa toda a Educação Básica. O estudo proposto pode contribuir para a melhoria do ensino-aprendizagem da Matemática, na medida em que busca abordar e valorizar a aprendizagem do conceito de porcentagem numa perspectiva voltada para a compreensão, interpretação de informações e descobertas. Ou seja, a construção do saber matemático dos estudantes e as produções de significados de cada um deles são fatores consideráveis durante a realização dessa pesquisa.

Sendo assim, acredita-se que os resultados dessa pesquisa têm muito a colaborar para os professores de Matemática em atuação na Educação Básica, bem como para aqueles em formação. Isso porque propõe a realização de atividades na qual o aluno é o protagonista de todo o processo, o professor é mediador e incentivador, e cada habilidade matemática demonstrada é valorizada. Além disso, preocupa-se em abordar a resolução de problemas e as estratégias dos alunos de uma maneira ativa e prazerosa. Professores interessados nesse estudo, ou outros profissionais da Educação, poderão dar continuidade à pesquisa, trabalhando, por exemplo, com outro objeto de conhecimento matemático no qual a porcentagem se faça presente. Por último, é válido citar que a referida pesquisa pode ajudar os professores de

Matemática a refletir sobre suas práticas de ensino, suas concepções sobre resolução de problemas e valorizar as diferentes estratégias de seus alunos.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Analisar as estratégias que estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental utilizam ao resolverem uma situação-problema envolvendo cálculos de porcentagem.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Selecionar uma situação-problema envolvendo cálculo de porcentagem que possibilite o uso de diferentes estratégias de resolução além da regra de três;
- Propor a resolução da situação-problema selecionada a uma turma de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, por diferentes estratégias;
- Verificar as estratégias de resolução mobilizadas pelos estudantes e quais estratégias conduzem os alunos à solução do problema.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No presente capítulo serão apresentadas as ideias que contribuem para o entendimento acerca do tema da pesquisa. Nesse sentido, este capítulo foi dividido em quatro seções. A primeira seção apresenta uma discussão sobre a importância da resolução de problemas em Matemática quando trabalhada, ao mesmo tempo, com a leitura e a interpretação. Tal combinação torna-se necessária para a compreensão de problemas matemáticos e, consequentemente, colabora no desenvolvimento de estratégias de resolução. Além disso, também são apresentadas as quatro etapas de resolução de problemas discutidas por Polya (1978).

A segunda seção trata da apresentação de algumas tipologias de problemas matemáticos que rompem com algumas crenças dos sujeitos perante à Matemática. As classificações dos tipos de problemas apresentados estão baseadas em Dante (2005), Stancanelli (2001) e Toledo e Toledo (1997).

A terceira seção apresenta algumas estratégias de resolução de problemas matemáticos que podem, e devem, ser utilizadas em sala de aula, independentemente se o objeto de conhecimento matemático trabalhado pelo professor é porcentagem ou não. Nesse contexto, baseamos em Musser e Shaughnessy (1997), Dante (2011) e Van de Walle (2009) para o desenvolvimento dessa temática.

Por fim, a quarta seção trata da discussão a respeito da regra de três no envolvimento dos cálculos de porcentagens com um olhar para a maneira como a BNCC (BRASIL, 2018) aborda essa regra que ainda vem sendo utilizada no ambiente escolar. Partindo desses pontos, será possível avançar na compreensão sobre o tema.

2.1 A Resolução de Problemas em Matemática e as dificuldades dos alunos

Quando nos deparamos com uma situação que apresenta alguma dificuldade, estamos diante de um problema. Dante (2005, p. 10) define um problema matemático como “qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la”. Dessa forma, é possível perceber que os problemas matemáticos necessitam de respostas e que estão vinculados a um processo de pensamento determinante na busca de uma solução. Nesse momento de busca, faz-se necessário recorrer aos conhecimentos prévios construídos ao longo da escolarização e traçar estratégias de resoluções.

A partir de leituras realizadas em Musser e Shaughnessy (1997), Dante (2005), Van de Walle (2009), Lorenzato (2010), percebemos que ao se trabalhar com a metodologia de ensino baseado na resolução de problemas, o professor pode direcionar o seu olhar para diferentes aspectos: aplicação correta de um determinado algoritmo; apresentação de procedimentos matemáticos adequados à situação-problema proposta, isto é, o professor pode verificar se os passos dos alunos seguem uma ordem coerente; os erros mais comuns cometidos pelos estudantes e também as estratégias utilizadas por eles para encontrar a solução dos problemas propostos em sala de aula. Esse último exemplo, especificamente, é o foco da nossa pesquisa.

Dante (2005) aponta diferentes objetivos da Matemática por meio da resolução de problemas em sala de aula, incluindo: fazer o aluno pensar produtivamente; desenvolver o raciocínio do aluno; ensinar o aluno a enfrentar situações novas; dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da matemática; tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras; equipar o aluno com estratégias para resolver problemas e dar uma boa base matemática às pessoas. No que se refere ao penúltimo objetivo relacionado às estratégias, o autor enfatiza:

> Para resolver problemas, precisamos desenvolver determinadas estratégias que, em geral, se aplicam a um grande número de situações. Esse mecanismo auxilia a análise e a solução de situações onde um ou mais elementos desconhecidos são procurados (DANTE, 2005, p. 14).

Durante toda a trajetória da vida escolar, os estudantes são colocados em situações que exigem leitura e interpretação de informações. Diante disso, uma boa prática de leitura aliada à uma interpretação de texto coerente contribui para a resolução de problemas matemáticos. Leitura e interpretação andam lado a lado na medida em que uma habilidade auxilia no desenvolvimento da outra. Apesar de muitos estudantes apresentarem dificuldades com a leitura e a interpretação da informação, é válido salientar a importância de ambas para a aprendizagem da Matemática, mas também que elas não são as únicas fontes de dificuldades dos estudantes.

Tendo em vista que a linguagem matemática possui algumas características únicas e que não se assemelha à linguagem usual, Dante (2005) destaca a importância de o professor atentar para uma linguagem mais próxima da realidade dos estudantes, a fim de levá-los a um completo entendimento da situação-problema. Lorenzato (2010) corrobora o exposto e acrescenta que a distinção entre a linguagem popular e a linguagem matemática explicam algumas das dificuldades dos estudantes na compreensão de vocábulos presentes na Matemática. Nesse contexto, a partir de diferentes leituras os estudantes são capazes de construir o seu próprio vocabulário matemático, que os ajudarão na interpretação e resolução de problemas futuros. Em relação a esse ponto, Lorenzato (2010) reforça que:

> [...] a linguagem matemática, devido às suas características atuais, é muito útil; no entanto, ela pode tornar-se um forte complicador para a aprendizagem da matemática e, por isso, demanda especial atenção do professor. Uma sugestão que pode auxiliar alunos e professores é a organização de um glossário de termos e símbolos, conforme estes forem aparecendo nos estudos (LORENZATO, 2010, p. 48).

Considerando que aprender a resolver problemas não é uma tarefa fácil, Polya (1978) apresenta quatro etapas extremamente importantes que contribuem para o processo de resolução de problemas. São elas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Na primeira fase, o estudante precisa entender o problema, isto é, identificar a incógnita, os dados e a condicionante. No estabelecimento do plano, deve-se pensar em possíveis caminhos que possam ajudar a encontrar solução para o problema. Para Polya (1978, p. 5) “o caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso”, por isso, o estudante precisa estar sempre realizando tentativas a fim de solucionar o problema, já que as ideias não surgem repentinamente.

A execução do plano diz respeito ao momento no qual o estudante coloca em prática o que foi estabelecido na etapa anterior. Além disso, é fundamental verificar cada passo com a finalidade de evitar possíveis erros que possam ser cometidos. Por último, o retrospecto consiste em verificar o resultado encontrado. Partindo dessa ideia, Polya (1978) ressalta a importância do hábito de analisar o método que levou à resolução do problema, pois contribui para o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas e pode ser novamente utilizado em outras situações.

Polya (1978) aponta para a importância de o aluno demonstrar interesse e querer resolver o problema, porém isso só é possível quando ele compreende completamente a situação-problema que foi adequadamente escolhida pelo professor. No mesmo sentido, tem-se que “[...] o enunciado verbal do problema precisa ficar bem entendido. O aluno deve também estar em condições de identificar as partes principais do problema, a incógnita, os dados, a condicionante” (POLYA, 1978, p. 4).

A integração da leitura atenta e interpretação nas aulas de Matemática contribui para a compreensão dos educandos no objeto matemático trabalhado em sala de aula. Nesse sentido, Ribeiro *et al.* (2020), destacam que somente após a interpretação do problema é possível traçar uma estratégia de resolução para os problemas propostos. Posto isso, nota-se uma forte relação da leitura e interpretação de textos com a construção de novos conhecimentos e estratégias que levam à resolução de problemas matemáticos.

2.2 Os tipos de problemas em Matemática

Diante das diferentes maneiras de abordar a Matemática nas salas de aula, a resolução de problemas pode ser considerada uma escolha benéfica, desde que planejada adequadamente. Porém, tendo em vista a variedade de problemas presente na literatura, é válido se atentar para os tipos de problemas matemáticos que são propostos aos estudantes, suas características, quais conhecimentos prévios são essenciais para determinar a solução, bem como em qual momento e de que forma a ação será melhor executada.

Os problemas matemáticos não são todos do mesmo tipo, eles diferem entre si e podem apresentar grau de dificuldades diferentes exigindo dos alunos diferentes níveis de conhecimento.

A respeito das classificações dos problemas matemáticos, Echeverría e Pozo (1998) colocam:

> Existem inúmeras classificações das possíveis estruturas dos problemas, tanto em função da área à qual pertencem e do conteúdo dos mesmos como tipo de operações e processos necessários para resolvê-los, ou de outras características. Assim, por exemplo, seria possível diferenciar entre problemas do tipo dedutivo ou do tipo indutivo, dependendo dos raciocínios que o sujeito precisasse realizar (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 20).

Sob essa análise, percebe-se a grande dificuldade de execução da tarefa de classificação de problemas, pois cada um apresentam características distintas. Para apresentarmos alguns dos diferentes tipos de problemas em Matemáticas, baseamos em Toledo e Toledo (1997), Stancanelli (2001) e Dante (2011).

Continuando a ideia a respeito dos tipos de problemas, Dante (2011) apresenta uma tipologia que difere exercício de problema. Manteremos a palavra exercício para não alterar a definição apresentada pelo autor. Dante (2011) define os tipos de problemas matemáticos da seguinte forma:

> Exercícios de reconhecimento – seu objetivo é fazer com que o aluno reconheça, identifique ou lembre um conceito, um fato específico, uma definição, uma propriedade etc. (DANTE, 2011, p. 14).
>
> Exercícios de algoritmos – são aqueles que podem ser resolvidos passo a passo. Geralmente, no nível elementar, são exercícios que pedem a execução dos algoritmos da adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais. Seu objetivo é treinar a habilidade em executar um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores (DANTE, 2011, p. 14).
>
> Problemas-padrão – sua resolução envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos e não exige nenhuma estratégia. [...] o objetivo desses problemas é recordar e fixar os fatos básicos por meio dos algoritmos das quatro operações fundamentais, além de reforçar o vínculo existente entre essas operações e seu emprego nas situações do dia a dia. De modo geral, eles não aguçam a curiosidade do aluno nem o desafiam (DANTE, 2011, p. 14).
>
> Problemas-padrão simples – resolvidos com uma única operação (DANTE, 2011, p. 14).
>
> Problemas-padrão compostos – resolvidos com duas ou mais operações (DANTE, 2011, p. 14).
>
> Problemas-processo ou heurísticos – são problemas cuja solução envolve operações que não estão contidas explicitamente no enunciado. Em geral, não podem ser traduzidos diretamente para a linguagem matemática, nem resolvidos pela aplicação automática de algoritmos, pois exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá levá-lo à solução (DANTE, 2011, p. 14).
>
> Problemas de aplicação – são aqueles que retratam situações reais do dia a dia e que exigem o uso da matemática para serem resolvidos (DANTE, 2011, p. 16).
>
> Problemas de quebra-cabeça – são problemas que envolvem e desafiam os alunos. [...] sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque, alguma regularidade, que é a chave da solução (DANTE, 2011, p. 16).

Além desses, Stancanelli (2001) também apresenta vários tipos de problemas matemáticos. Segundo a autora, esses problemas podem ser denominados como Problemas sem Solução, Problemas com Mais de uma Solução, Problemas com Excesso de Dados, Problemas de Lógica e Problemas Não-Convencionais.

Como problemas sem solução entendemos que são aqueles cujas informações (dados) são insuficientes para determinar a solução. Ainda, é importante considerar também que pode acontecer de estarem todos os dados, mas, de fato, não haver solução para esses problemas. De acordo com essa noção, Stancanelli (2001, p. 107) ressalta que “trabalhar com esse tipo de problema rompe com a concepção de que [...] todo problema tem solução”. Esses problemas se tornam interessantes para as aulas de Matemática na medida em que levam os estudantes aos processos de pensamentos e justificativas, sejam elas orais ou escritas, do porque o problema proposto pelo professor não possui solução gerando, assim, momentos de aprendizagens.

Outra justificativa que torna os problemas sem soluções adequados ao ensino da Matemática consiste na possibilidade de o docente propor que os estudantes tornem, com alterações nos dados ou no contexto, o problema possível. Nessa situação, pode ser observada a criatividade dos estudantes e como eles se colocam diante desse tipo de atividade provavelmente pouco trabalhada nos ambientes escolares.

Diferentemente dos problemas sem solução, os problemas com mais de uma solução se opõem ao primeiro pela quantidade de respostas consideradas válidas e coerentes. Mais uma vez, o trabalho com esse tipo de problema rompe outra crença, dessa vez, com “[...] a crença de que há sempre uma maneira de resolvê-lo e que, mesmo quando há várias soluções, uma delas é a correta” (STANCANELLI, 2001, p. 109).

Um exemplo de problema com mais de uma solução pode ser encontrado em Stancanelli (2001), essa autora traz um problema de planificação com o cubo que possui 11 diferentes soluções.

Os Problemas com excesso de dados, encontrados, por exemplo, em gráficos e tabelas, constituem situações nas quais são apresentadas informações desnecessárias para a solução do problema. Nesses casos, é comum nos depararmos com textos longos e alguns dados numéricos sem contribuição nenhuma na resolução matemática. Por outro lado, os estudantes precisarão de, além da compreensão do que é solicitado no problema, muita atenção para identificar “informações supérfluas que devem ser [...] descartadas” (STANCANELLI, 2001, p. 111).

Podemos considerar que a partir do descarte das informações desnecessárias dos problemas com excesso de dados, temos uma situação-problema denominada por Dante (2011) como problema-padrão, pois provavelmente eles são solucionados com mais de uma operação. Sendo assim, classificado como problema-padrão composto.

Em sala de aula, buscando diversificar seu trabalho, o professor pode apresentar um problema mais simples aos alunos, logo em seguida propor um parecido, porém com excesso de dados. Isso para explorar esse tipo de problemas na sua ação pedagógica, mostrar aos estudantes a importância de enfrentar situações novas e que nem sempre os problemas serão apresentados de maneira única, bem como promover momentos de interações entre a turma. Além disso, Stancanelli (2001) afirma que trabalhar esses problemas rompe com a crença da necessidade de utilização de todos os dados na busca da solução de um problema.

Com base nas considerações de Stancanelli (2001), o discernimento é relevante para resolver problemas de lógica. No entendimento da autora, esses problemas estimulam e facilitam o desenvolvimento de habilidades essenciais ao aprendizado da Matemática, como a checagem e a análise. Em problemas de lógica, uma estratégia de resolução também é necessária.

Continuando a nossa apresentação sobre os tipos de problemas apresentados por Stancanelli (2001), encontramos também os Problemas Não-Convencionais. Segundo a autora, trata-se de problemas que não têm uma única solução e, a partir de algumas alterações nos seus dados, transformam-se em problemas mais interessantes. Mais uma vez observamos em Stancanelli (2001) o destaque para a importância da compreensão do enunciado nesses tipos de problemas e que, geralmente, as soluções por tentativas são utilizadas.

Além de Dante (2011) e Stancanelli (2001), Toledo e Toledo (1997) também abordam alguns tipos de problemas matemáticos. Eles os classificam como Problemas de arme e efetue, Problemas de enredo, Problemas Não-convencionais e Problemas de aplicação. Nessa perspectiva, esses autores apontam que:

> Problemas de Arme e Efetue – problemas desse tipo constituem treino de técnicas operatórias e de memorização de tabuada (TOLEDO; TOLEDO, 1997, p. 85).
>
> Problemas de Enredo – são problemas tradicionais envolvendo as operações que estão sendo estudadas no momento. Desenvolvem no aluno a capacidade de traduzir em expressões matemáticas as situações descritas em linguagem comum (TOLEDO; TOLEDO, 1997, p. 85).
>
> Problemas Não-Convencionais – desenvolvem no aluno a capacidade de planejar, elaborar estratégias de compreensão do problema, tentar soluções e avaliar a adequação do raciocínio desenvolvido e os resultados encontrados (TOLEDO; TOLEDO, 1997, p. 85).
>
> Problemas de aplicação – esse tipo de problema é elaborado a partir de uma situação de vivências dos alunos, e a solução requer o uso de conceitos, técnicas e processos matemáticos (TOLEDO; TOLEDO, 1997, p. 86).

Diante de todas as classificações apresentadas por diferentes autores podemos concluir, portanto, que um problema matemático pode receber outra nomeação dependendo de quem o analisa. Por exemplo, os Problemas de Arme e Efetue apresentado por Toledo e Toledo (1997) podem ser interpretados como Exercícios de Algoritmos conforme Dante (2011), pois o arme e efetue costumam estar associados aos algoritmos das operações fundamentais.

Ademais, percebemos que os problemas de aplicação também aparecem nas obras de Dante (2011) e Toledo e Toledo (1997), nas quais tais autores referem-se a esse tipo de problema quando a Matemática e vida cotidiana estão relacionadas. Dessa forma, constituem problemas interessantes de se trabalhar em sala de aula. Diante do exposto, tem-se que "problemas de aplicação são especialmente importantes no currículo, pois envolvem obrigatoriamente a integração de disciplinas, tão enfatizada e tão pouco praticada" (TOLEDO; TOLEDO, 1997, p. 86).

Outro ponto que merece atenção diz respeito à menção do desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas aparente nas classificações realizadas por Dante (2011), Stancanelli (2001) e Toledo e Toledo (1997). Tal constatação evidencia ainda mais um dos objetivos da resolução de problemas apontados por Dante (2005), o de: "equipar o aluno com estratégias para resolver problemas".

2.3 Estratégias no processo de Resolução de Problemas

As estratégias de resolução de problemas podem ser interpretadas como os métodos utilizados para determinar a solução de um problema. Em se tratando das estratégias no processo de resolução de problemas, Cavalcanti (2001) argumenta que é preciso dar atenção ao modo como os estudantes resolvem os problemas, pois nesse processo de investigação o professor é capaz de perceber a autonomia e confiança dos estudantes e permitir que eles possam "[...] combinar seus conhecimentos para resolver a situação apresentada" (CAVALCANTI, 2001, p. 121). Diante disso, percebe-se a importância de propor problemas interessantes em sala de aula, objetivando o empenho e dedicação dos alunos na busca da solução.

A respeito das estratégias de resolução de problemas, Musser e Shaughnessy (1997) destacam algumas que consideram apropriadas para serem desenvolvidas no ambiente escolar, porém sem nenhuma menção aos tipos de problemas e objetos de conhecimentos matemáticos mais adequados em cada uma. São elas:

> - Resolução por tentativa e erro – [...] talvez seja o mais direto para a resolução de problemas: envolve simplesmente a aplicação das operações pertinentes às informações dadas (MUSSER; SHAUGHNESSY, 1997, p. 189).

- Resolução por padrões – a estratégia de “padrões” considera casos particulares do problema. Generalizando-se a partir desses casos, chega-se à solução (MUSSER; SHAUGHNESSY, 1997, p. 192).

- Resolução por um problema mais simples – esta estratégia pode envolver a resolução de um “caso particular” de um problema, ou um recuo temporário de um problema complicado para uma versão resumida. No último caso, a estratégia do problema mais simples muitas vezes vem acompanhada do emprego de um padrão [...] (MUSSER; SHAUGHNESSY, 1997, p. 194).

- Resolução em sentido inverso – a estratégia de trabalhar em sentido inverso difere das anteriores pelo fato de partir do objetivo, ou do que deve ser provado, e não dos dados (MUSSER; SHAUGHNESSY, 1997, p. 196).

- Resolução por simulação – [...] a solução de um problema compreende preparar, realizar um experimento, coletar dados e tomar uma decisão baseada numa análise dos dados. Como realizar o experimento talvez não seja prático, uma simulação pode se constituir numa estratégia de resolução de problemas adequada e poderosa (MUSSER; SHAUGHNESSY, 1997, p. 198).

Além das estratégias supracitadas, é válido mencionar aquela definida por Dante (2005): “reduzir à unidade”. Segundo o autor, trata-se de “uma estratégia poderosa para solucionar alguns problemas” (DANTE, 2005, p. 57). Para Jaconiano et al. (2019) esse método

> [...] consiste em reduzir à unidade todas as variáveis envolvidas em uma dada condição, por meio do uso de proporções. Depois de estabelecida tal condição, o passo seguinte é a transformação da sentença unitária na condição válida para a variável que se deve determinar por meio de multiplicação (JACONIANO *et al*., 2019, p. 106).

Os autores destacam que a redução à unidade unida à metodologia de resolução de problemas promove reflexão e criação nos estudantes. Entretanto, ainda é pouco utilizada no ensino.

No mesmo sentido, tem-se as estratégias apresentadas por Van de Walle (2009). Para o autor, elas “[...] são mais prováveis de ocorrer em lições onde o conteúdo matemático é o principal objetivo” (VAN DE WALLE, 2009, p. 77).

- *Desenhar uma figura, simular algo, usar um modelo*. Esta é a estratégia de usar modelos como “brinquedos para pensar” [...]. “Simular algo” estende os modelos para uma real interpretação da situação-problema (VAN DE WALLE, 2009, p. 77).

- *Procurar um padrão*. A busca de padrões está no centro de muitas tarefas baseadas em resolução de problemas, em especial na área do raciocínio algébrico. Padrões numéricos e operacionais desempenham um grande papel no auxílio aos alunos na aprendizagem e domínio de fatos básicos e continua a ser um fator principal nas séries finais do EF e do EM (VAN DE WALLE, 2009, p. 78).

- *Construir uma tabela ou quadro*. Os quadros de dados, tabelas de função, tabelas para operações e tabelas envolvendo razões ou medidas são algumas das principais formas de análise e de comunicação. O uso de um quadro é combinado geralmente com a busca de padrões como um modo de resolver problemas ou construir novas ideias (VAN DE WALLE, 2009, p. 78).

- *Experimentar uma forma mais simples do problema*. Aqui a ideia geral é modificar ou simplificar as quantidades (ou variáveis) em um problema, de forma que a tarefa resultante seja mais fácil de compreender e de analisar. Ao resolver o problema mais fácil, espera-se obter algum insight que possa ser usado, então, para resolver o problema original mais complexo (VAN DE WALLE, 2009, p. 78).

- *Experimentar e verificar*. Isso poderia ser chamado “experimente e veja o que você consegue descobrir”. Um bom modo para trabalhar em uma tarefa que lhe deixou perplexo é tentar alguma coisa. Faça uma tentativa! A reflexão, mesmo sobre uma tentativa falha, pode conduzir a uma ideia melhor (VAN DE WALLE, 2009, p. 78).

- *Faça uma lista organizada*. Essa estratégia envolve considerar sistematicamente todos os possíveis resultados em uma situação, ou descobrir quantas possibilidades há ou verificar se todos os possíveis resultados foram considerados [...] (VAN DE WALLE, 2009, p. 78).

Em se tratando dos problemas de lógica, o raciocínio é fundamental. Diante disso, Stancanelli (2001) vai de acordo com algumas das estratégias de resolução apresentadas por Musser e Shaugnessy (1997) e Van de Walle (2009) ao reforçar que:

> O método de tentativa e erro, o uso de tabelas, diagramas e listas são **estratégias importantes** para a resolução de problemas de lógica. Além da exigência de usar uma dessas estratégias não-convencionais para sua resolução, os problemas de lógica, pelo inusitado das histórias e pela sua estrutura, estimulam mais a análise dos dados, favorecem a leitura e interpretação do texto e, por serem motivadores, atenuam a pressão para obter-se a resposta correta imediatamente (STANCANELLI, 2001, p. 114, grifo nosso).

Em se tratando de problemas que envolvem cálculo de porcentagens, retomamos a referência da BNCC (BRASIL, 2018) quanto ao uso de calculadoras e cálculo mental mencionadas nas habilidades seguintes:

> (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros (BRASIL, 2018, p. 301).
>
> (EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros (BRASIL, 2018, p. 307).

Sendo assim, consideramos esse breve estudo das estratégias de resolução de problemas em Matemática como alternativas possíveis de serem mobilizadas pelos estudantes ao buscarem a solução de uma situação-problema.

De acordo com Dante (2005, p. 54) “cada problema exige uma determinada estratégia”. Nesse sentido, todas as estratégias apresentadas são válidas e relevantes na resolução de problemas, cabendo, ao professor, portanto, valorizar a individualidade e facilidade de uso de cada estudante ao se apropriar, por exemplo, de alguma dessas. Afinal, diferentes caminhos podem levar ao mesmo destino.

2.4 Regra de três como estratégia para problemas envolvendo porcentagem

Para os estudantes encontrarem a solução de algum problema muitas vezes é necessário a mobilização de conhecimentos prévios construídos ao longo da escolarização. Nesse sentido, a aprendizagem matemática configura-se como uma integração constante entre o que já se sabe e o que se busca aprender. Com a aprendizagem da regra de três não é diferente, pois para resolvê-la, o aluno precisa ter conhecimento a respeito de razão, proporção, grandezas direta ou inversamente proporcionais, bem como um bom domínio com as operações de multiplicação e divisão.

Em se tratando da regra de três, tem-se:

> [...] é a principal e a mais excelente regra de toda a aritmética. Para todas as outras regras há necessidade dela, e ela perpassa por todas as outras, para cujos casos, é chamada pelos filósofos de regra de ouro; mas nestes últimos dias, está sendo chamada por nós como regra de três, porque é requerido três números na operação (BROOKS, 1880, p. 330 *apud* SILVA, 2011, p. 49).

Araújo (2019, p. 24) menciona que a regra de três pode ser entendida como “[...] um método prático para resolver problemas, do qual deverá encontrar um quarto valor que não conhecemos, pois desses valores, apenas três deles são conhecidos [...]". Conforme a ideia apresentada, é possível entender porque muitos estudantes utilizam a regra de três como estratégia de resolução em problemas envolvendo porcentagens. Isso se deve ao fato de que, ao calcularmos uma porcentagem referente à determinado valor, estamos trabalhando com grandezas diretamente proporcionais. Sendo assim, com a estrutura de uma regra de três e realizando procedimentos matemáticos corretos, o estudante é capaz de calcular porcentagem sobre diferentes valores, desde que nenhuma informação importante seja omitida no problema.

No estudo da regra de três nos deparamos com dois tipos, a regra de três simples e a regra de três composta. Nesse contexto, a regra de três simples trata-se de descobrir um quarto valor com o conhecimento de três, envolvendo duas grandezas. A regra de três composta envolve mais de duas grandezas, sendo essas diretamente ou inversamente proporcionais. Nos problemas que abordam três grandezas, por exemplo, os alunos precisam determinar o sexto valor, pois cinco são informados.

A disposição das grandezas, segundo Silva (2011, p. 32), "[...] segue da fundamentação na proporcionalidade, pois a proporção, a razão, só é admitida entre grandezas de mesma espécie". Silva (2011) aponta para a maneira de dispor os dados numéricos nos problemas envolvendo regra de três. Segundo o autor, no século XIV, os dados eram separados por linhas horizontais (a – b – c). Entretanto, essa organização não é mais apresentada nos livros didáticos. Atualmente, separamos as grandezas uma ao lado da outra e dispomos os valores referentes a cada uma delas. Após isso, analisamos se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais. Por último, montamos a proporção e resolvemos a equação.

O cálculo da regra de três pode ser utilizado em diferentes situações do cotidiano. Nessa perspectiva, Araújo (2019) destaca:

> Geralmente é ensinado aos estudantes do Ensino Fundamental e é um assunto que apresenta abrangência multidisciplinar, podendo ser aplicado para a resolução de problemas matemáticos, cálculos financeiros, cálculos de volume, **cálculos de porcentagens**, cálculos de juros, entre outros [...] (ARAÚJO, 2019, p. 24, grifo nosso).

Em relação aos pontos levantados, nota-se a relevância da abordagem da regra de três nas aulas de Matemática, já que não se trata somente de uma simples regra ou mais um dos diferentes cálculos matemáticos apresentados pelos professores e cobrados em avaliações, mas sim de uma contribuição enquanto estratégia coerente e válida a qual o estudante pode recorrer, para resolver problemas que envolvam porcentagem.

A BNCC (BRASIL, 2018) traz um exemplo de uma situação-problema na qual a compreensão do estudante sobre a variação proporcional direta entre duas grandezas é o suficiente para encontrar a solução, sem fazer uso da regra de três. O exemplo é o seguinte: "Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco?" (BRASIL, 2018, p. 270).

A partir desse exemplo, percebemos que os conhecimentos sobre outros objetos da Matemática podem contribuir na resolução de problemas, e que a compreensão das relações entre eles são fundamentais no processo resolutivo.

Silva (2011, p. 24) afirma que "a regra de três não é um objeto específico da matemática, mas [...] um procedimento de caráter prático [...]". De fato, analisando a BNCC (BRASIL, 2018) percebemos que a regra de três não aparece separadamente como um objeto de conhecimento matemático, mas, como complemento de outro objeto, isto é, o "cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da "regra de três"" (BRASIL, 2018, p. 300).

Além disso, notamos que a regra de três pode ser percebida explicitamente em apenas uma habilidade de Matemática voltada para o 6º ano, associada ao cálculo de porcentagem. A seguir transcrevemos a habilidade mencionada:

> (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da **"regra de três"**, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros" (BRASIL, 2018, p. 301, grifo nosso).

Dessa forma, tal habilidade destaca a importância do cálculo de porcentagem por meio de estratégias distintas da regra de três que os estudantes da Educação Básica precisam conhecer e dominar. Entretanto, indiretamente, também podemos concluir que a regra de três se faz presente em outras habilidades que demandam o cálculo de proporcionalidade entre grandezas. De fato, existem duas habilidades do 8° e 9° ano, relacionadas com a resolução de problemas envolvendo grandezas diretamente e inversamente proporcionais. As habilidades são as seguintes:

> (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas (BRASIL, 2018, p. 313).
>
> (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive

> escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas (BRASIL, 2018, p. 317).

Entendemos que essa relação certamente acontece porque quando as grandezas são proporcionais existirá a constante de proporção. Nesse sentido, a regra de três pode ser entendida como consequência de uma propriedade da proporção na qual o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Por esse motivo, ambas estão relacionadas e são úteis na resolução de problemas envolvendo proporcionalidade e porcentagens.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 Apresentação do contexto da pesquisa

Esta pesquisa, intitulada *"O "problema da mistura" envolvendo porcentagens: um estudo da mobilização das estratégias de resolução de estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental",* tem como objetivo geral analisar as estratégias que estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental utilizam ao resolverem uma situação-problema envolvendo cálculos de porcentagem.

A pesquisa foi desenvolvida junto a um grupo de estudantes de uma turma de 9° ano do Ensino Fundamental no ano letivo de 2023. Optamos pelo 9º ano por se tratar de um ano escolar no qual os alunos são concluintes do Ensino Fundamental, e como consequência disso, os estudantes já estudaram, ou deveriam ter estudado, os objetos de conhecimento matemático porcentagem e proporção, além da regra de três. A realização da pesquisa aconteceu por meio da aplicação e análise das respostas ao "Problema da mistura" que envolve cálculo de porcentagens. Os alunos envolvidos na pesquisa resolveram a questão em sala de aula.

3.2 Classificação da pesquisa

Uma pesquisa pode ser classificada segundo a natureza de abordagem do objeto a ser pesquisado, quanto aos objetivos e quanto aos procedimentos técnicos de investigação.

No caso da pesquisa apresentada, segundo D'Ambrósio e D'Ambrósio (2006) e Gil (2018), classifica-se, quanto à abordagem do objeto, como qualitativa, quanto aos objetivos como exploratória e quanto aos procedimentos técnicos como estudo de caso.

Quanto à abordagem do objeto, a nossa pesquisa classifica-se como qualitativa. De acordo com D'Ambrósio e D'Ambrósio (2006, p. 78), uma pesquisa é dita qualitativa quando, "tem como foco entender e interpretar dados e discurso, mesmo quando envolve grupos de participantes." De fato, na nossa pesquisa fazemos uma análise das estratégias dos estudantes envolvidos, sob um olhar qualitativo das respostas apresentadas. Ou seja, o mais importante é a maneira como os estudantes resolvem o problema proposto, e não a quantidade de respostas corretas. Sendo assim, a qualidade da informação tem extrema relevância para o desenvolvimento da pesquisa.

Para Gil (2018), uma pesquisa é dita exploratória, quando:

> "[...] têm como propósito proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses. Seu planejamento tende a ser bastante flexível, pois interessa considerar os mais variados aspectos relativos ao fato ou fenômeno estudado (GIL, 2018, p. 25).

Realmente, na nossa pesquisa, de acordo com os objetivos apresentados, queremos conhecer as estratégias adotadas pelos estudantes na situação-problema proposta, tornando esse objeto de investigação mais claro.

Por fim, quanto aos procedimentos técnicos, é uma pesquisa do tipo estudo de caso. Para Gil (2018, p. 33), uma pesquisa é dita estudo de caso, quando "[...] consiste no estudo profundo e exaustivo de um ou poucos casos, de maneira que permita seu amplo e detalhado conhecimento [...]". De fato, a nossa pesquisa busca investigar as estratégias de um grupo particular de alunos trazendo detalhes e descobertas do objeto estudado.

3.3 Etapas e instrumentos da pesquisa

A realização da pesquisa ocorreu conforme as seguintes etapas e instrumentos para coleta de dados:

Etapa 1 – Levantamento e seleção de problemas que envolvem porcentagem: Inicialmente, levantamos, previamente na literatura, problemas que envolvessem cálculo de porcentagem e estratégias de resolução diferentes da regra de três e que fossem adequados ao 9º ano. Para isso, buscamos no *site*[1] da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) uma situação-problema que tratasse da nossa temática. Selecionamos uma situação-problema, intitulada de "Problema da mistura", retirada de uma prova da OBMEP do ano de 2018.

Etapa 2 – Estudo do problema: Neste estudo identificamos as habilidades contempladas na BNCC referentes ao problema, os conhecimentos prévios considerados necessários para a determinação da solução e o tipo de problema envolvido. O "Problema da mistura" possui uma única solução, mas de acordo com a literatura existe a possibilidade do uso de diferentes estratégias de resolução possíveis. Diante disso, podemos citar Musser e Shaughnessy (1997) se tratando das estratégias de tentativa e erro e resolução em sentido inverso; Van de Walle (2009) com a construção de tabelas e o experimentar uma forma mais simples do problema. Além disso, nesta etapa 2 também percebemos que a estratégia de

[1] http://www.obmep.org.br/provas.htm

desenhar uma figura vista em Van de Walle (2009) pode ser considerada válida embora não leve à solução do problema. Por fim, a justificativa da ausência da estratégia “reduzir à unidade” de Dante (2005) se dá pelo fato de não utilizarmos na solução do “Problema da mistura”.

Etapa 3 – Elaboração da proposta e proposição do problema aos alunos: Nesta etapa elaboramos o material a ser entregue aos alunos e aplicamos a proposta em sala de aula. A proposta foi criada para ser desenvolvida em duas fases: na primeira, sem qualquer indicação de estratégia, e na segunda indicamos as estratégias regra de três, resolução em sentido inverso juntamente com tentativa e erro e construir uma tabela. Nos apêndices A e B desse texto encontra-se a proposta de atividade que foi realizada pelos estudantes nas duas fases.

Etapa 4 - Categorização das estratégias: Categorizamos as estratégias de resolução dos estudantes para a situação-problema selecionada de acordo com o estudo prévio do “Problema da mistura” na etapa 2.

Etapa 5 – Verificação das estratégias: A partir das respostas dos alunos, podemos perceber qual(is) estratégia(s) foram mais utilizadas por eles, se mais de uma estratégia foi utilizada e entre elas quais os levaram à solução. Observando as respostas dos estudantes organizamos em três casos na primeira fase e quatro casos na segunda. Os casos da primeira fase são: respostas de alunos que acertaram a questão (caso 1); respostas de alunos que não acertaram a questão (caso 2) e respostas de alunos que não acertaram a questão ou não indicaram uma estratégia de resolução (caso 3). Já os casos da segunda fase são: respostas de alunos que acertaram a questão desenvolvendo duas estratégias (caso 1); respostas de alunos que acertaram a questão desenvolvendo uma estratégia (caso 2); respostas de alunos que não acertaram ou não finalizaram a questão, mas que indicaram o desenvolvimento de alguma estratégia (caso 3) e, o último caso, respostas em brancos e respostas de alunos que nem acertaram a questão, nem indicaram alguma estratégia (caso 4).

Neste trabalho, não focamos nas dificuldades e erros dos alunos levantados a partir de seus registros escritos durante a resolução do “Problema da mistura”.

3.4 Cronograma de desenvolvimento da pesquisa

A pesquisa que apresentamos neste trabalho se desenvolveu conforme o cronograma a seguir (Quadro 1).

Quadro 1 - Cronograma de realização da pesquisa

Atividades	**Janeiro**	**Fevereiro**	**Março**	**Abril**
Reformulação do Pré-Projeto de TCC	x			
Aprofundamento Teórico	x			
Etapa 1 – Levantamento e seleção de problemas que envolvem porcentagem	x			
Etapa 2 – Estudo do problema		x		
Etapa 3 – Elaboração da proposta e proposição do problema aos alunos		x	x	
Etapa 4 – Categorização das estratégias				x
Etapa 5 – Verificação das estratégias				x
Análise dos dados				x
Escrita do TCC				x

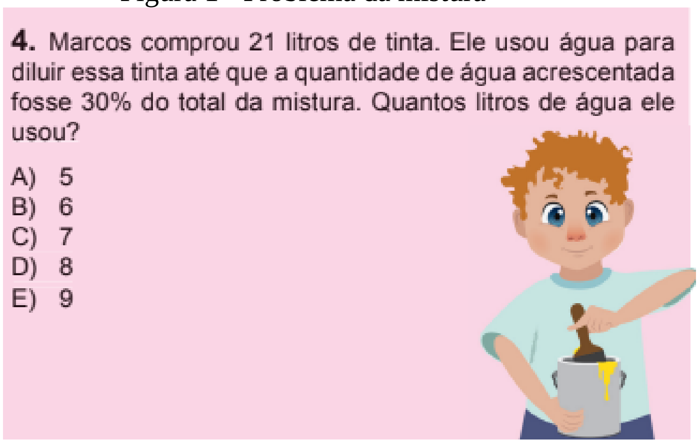
Fonte: Acervo da pesquisa (2023)

4 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA E ANÁLISE DOS DADOS

4.1 Estudo do “Problema da mistura”

A situação-problema que trabalhamos na presente pesquisa foi extraída de uma das edições da OBMEP, mais especificamente, do ano de 2018. Ela consiste na determinação da quantidade de litros de água que, quando misturados com os 21 litros de tinta já adquiridos por Marcos, corresponderá à 30% do total da mistura. A figura 1 mostra a situação-problema da nossa pesquisa e as alternativas com as possíveis repostas. A resposta para o problema está indicada na alternativa E) que corresponde a 9 litros de água.

Figura 1 - Problema da mistura



Fonte: OBMEP (2018)

O objeto de conhecimento que acreditamos estar mais próximo do que trata a situação-problema, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 300), é o “cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da regra de três””. Esse objeto matemático está associado à seguinte habilidade do 6º ano:

> (EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros (BRASIL, 2018, p. 301).

Analisado o “Problema da mistura” consideramos coerente essa associação pelo fato de outras estratégias que não somente a regra de três levar à solução do problema.

Como qualquer outro problema matemático, na busca da solução, os estudantes precisarão mobilizar conhecimentos prévios construídos ao longo da sua escolarização. Na análise do problema proposto, percebemos a necessidade da compreensão dos conceitos de razão e proporção, do domínio das operações básicas com os números naturais e entendimento de grandezas diretamente proporcionais. É importante destacar que esses objetos estão indicados na BNCC (BRASIL, 2018) para serem trabalhados em Unidades Temáticas e anos diferentes. Apenas a habilidade que trata de cálculos com números naturais está associada à Unidade Temática Números, as outras estão em Álgebra. Sendo assim, podemos concluir que as habilidades matemáticas da BNCC (BRASIL, 2018) que tratam desses objetos estão indiretamente envolvidas no Problema da Mistura. Tais habilidades de 5°, 6° e 8° ano são as seguintes:

> (EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e dela com o todo (BRASIL, 2018, p. 295).
>
> (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora (BRASIL, 2018, p. 301).
>
> (EF06MA15) Resolver problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo (BRASIL, 2018, p. 303).
>
> (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas (BRASIL, 2018, p. 313).

Quanto ao tipo de problema matemático abordado na pesquisa, o classificamos, respectivamente, segundo Dante (2011) e Toledo e Toledo (1997), como problema-padrão composto e problema de aplicação. Isso porque ao mesmo tempo que é necessário usar mais de uma operação para determinar a solução, também pode ser retratado como uma situação vivenciada pelos estudantes.

Para finalizar essa análise do problema, destacamos dois aspectos sobre possíveis erros e dificuldades dos alunos. O primeiro está associado a linguagem matemática. Sabemos que a compreensão do enunciado e o seu entendimento através da linguagem matemática na situação-problema podem contribuir ou não para o desenvolvimento da solução. Observando o enunciado do problema, levantamos a hipótese de que a condição “30% do total da mistura” pode não ser totalmente compreendida pelos alunos, apresentando-se como uma das dificuldades para a resolução do problema. Nesse caso, por não compreenderem o significado, os alunos nem conseguem representar essa condição tampouco associar a quantidade de tinta à 70% da mistura.

Como consequência desta dificuldade, o segundo e último aspecto evidencia um possível erro comum dos alunos nessa resolução que seria de calcular 30% de 21 e encontrar como resposta 6,3 litros. Esse cálculo permite aos estudantes utilizar todos os dados do enunciado. Consequentemente, eles podem concluir que a resposta para o problema é 6 litros (arredondamento para baixo) ou 7 litros (arredondamento para cima), sendo ambas soluções incorretas, porém presentes como alternativas de solução do problema.

4.2 Duas soluções dadas pela OBMEP

Duas soluções ao "Problema da mistura" foram divulgadas pela OBMEP (2018). A primeira pode ser observada na figura 2.

Figura 2 - Solução 1 da OBMEP para o Problema da mistura

Solução 1: O enunciado nos diz que a quantidade de tinta é 70% do total da mistura, já que a quantidade de água é 30%. Logo, como (70/100) da quantidade total é 21 litros, a quantidade total da mistura é 21 x 100 ÷ 70 = 30 litros. Deste modo, a quantidade de água utilizada foi de 30% de 30, ou seja, 9 litros.

Fonte: https://drive.google.com/file/d/1O2bwJFziFzowfinKI8dbJ9iHpfBCzBT5/view

Percebemos que nessa solução 1 houve uma interpretação a respeito das informações dadas no enunciado para chegar na solução 9 litros. Isto é, o desenvolvimento inicial da solução não partiu dos 21 litros de tinta, mas dos 70% do total da mistura. Ainda, notamos a não utilização da regra de três nessa solução. A figura 3 mostra a segunda solução da OBMEP para o "Problema da mistura". Observemos:

Figura 3 - Solução 2 da OBMEP para o Problema da mistura

Solução 2: (com rudimentos de álgebra): Se x é a quantidade adicionada de água, $\frac{x}{21+x} = \frac{30}{100}$. Concluímos, então, que $x = 9$ litros.

Fonte: https://drive.google.com/file/d/1O2bwJFziFzowfinKI8dbJ9iHpfBCzBT5/view

Nesta solução é perceptível o uso da álgebra. Nesse sentido, utilizando a incógnita x para representar a quantidade de água usada por Marcos para diluir os 21 litros de tinta, temos que *21 + x* representa a quantidade total da mistura, ou seja, os litros de tinta e água diluídos. A relação de igualdade na segunda solução foi obtida utilizando a quantidade de água (*x*), o total da mistura (*21 + x*) e os 30% (representado na solução de maneira fracionária) que é referente à quantidade de água na mistura. Como resultado, obtemos uma equação polinomial de 1° grau. Cabe destacar que o estudo dessas equações ainda não é realizado no 6° ano do Ensino Fundamental, pois a linguagem algébrica, segundo a BNCC (BRASIL, 2018) é tratada a partir do 7° ano. Dessa forma, podemos concluir que o "Problema da mistura" é mais indicado para ser trabalhado em turmas posteriores ao 6° ano, por isso a nossa escolha se deu em uma turma do 9° ano.

Observando as habilidades indicadas para o 7° ano do Ensino Fundamental, encontramos a seguinte que possivelmente tem relação com a solução dois da OBMEP e está associada ao objeto matemático "equações polinomiais do 1° grau" (BRASIL, 2018, p. 306).

> (EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1° grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade (BRASIL, 2018, p. 306).

Conforme os ensinamentos de Dante (2005, p. 59) tem-se que "devemos focalizar, enfatizar e valorizar mais a análise do problema, os procedimentos que podem levar à solução e a revisão da solução obtida, do que simplesmente a resposta correta". Diante do exposto, pudemos perceber o quão importante é, na atividade docente, a análise de diferentes soluções antes de propor algum problema em sala de aula.

4.3 Análise prévia das estratégias de resolução

A seguir apresentamos cinco estratégias que podem ser utilizadas durante a resolução do Problema da Mistura e que possuem relação com as soluções da OBMEP.

Estratégia 1 – Desenhar uma figura

Esta estratégia corresponde a construção de uma figura que represente a situação do problema. Embora ela não leve à resolução, o desenvolvimento de algo semelhante pelos estudantes indica que o problema foi interpretado por eles, configurando-se, assim, como aspecto positivo no processo de aprendizagem. Tal representação (figura 4) pode ser percebida como uma estratégia de resolução incompleta já que a solução não é apresentada explicitamente.

Figura 4 - Representação do Problema da mistura

Fonte: autoria própria (2023)

Através da análise da figura 4 podemos identificar se os alunos puderam, por exemplo, inferir que a quantidade de tinta, ou seja, os 21 litros correspondem à 70% da mistura, sendo esse entendimento fundamental para a determinação da solução do problema.

Estratégia 2 – Regra de Três

Outra maneira de resolver o problema é utilizando apenas a regra de três simples. Do enunciado do problema sabemos que a quantidade de tinta é 21 litros. Além disso, o acréscimo de água deve corresponder à 30% do total da mistura. Como 30% será a quantidade de água na mistura, então 70% refere-se à quantidade de tinta, pois 100% - 30% = 70%. Agora, utilizando a regra de três simples, podemos calcular quantos litros correspondem à 30% da mistura.

litros	**%**
21 (tinta)	70 (tinta)
x (água)	30 (água)

$$70x = 21 \times 30 \Rightarrow 70x = 630 \Rightarrow x = 630 \div 70 \Rightarrow x = 9 \text{ litros}$$

Portanto, Marcos usou 9 litros de água para diluir a mistura.

Por fim, é possível notar que essa estratégia de resolução apresenta uma relação com a primeira solução da OBMEP. Isso porque em ambas soluções a utilização e o entendimento a respeito do significado dos 70%, que foi omitido no problema, torna-se essencial na solução do problema.

Estratégia 3 – Resolução em Sentido Inverso juntamente com Tentativa e Erro

Vamos utilizar as cinco alternativas de resposta apresentadas ao problema para determinar a sua solução. Precisamos descobrir se a quantidade de litros de água adicionada por Marcos (expressa nas alternativas) à quantidade de tinta vai corresponder à 30% do total de litros da mistura. Nesta estratégia não usaremos a regra de três.

- *Alternativa A) 5 litros*

Suponhamos que a resposta seja 5 litros. Então, temos que 21 litros (situação inicial) + 5 litros (adicionados) = 26 litros. Queremos saber se 30% de 26 litros corresponde a 5 litros. Calculando a porcentagem, temos que: $\frac{30}{100} \times 26 = \frac{780}{100} = 7{,}8$. Como 5 ≠ 7,8, temos que 30% de 26 não é 5. Sendo assim, 5 litros não é a resposta do problema.

- *Alternativa B) 6 litros*

Consideramos 6 litros como a resposta. Assim, temos que 21 litros (situação inicial) + 6 litros (adicionados) = 27 litros. Precisamos verificar se 30% de 27 litros corresponde a 6 litros. Calculando a porcentagem, temos que: $\frac{30}{100} \times 27 = \frac{810}{100} = 8{,}1$. Como 6 ≠ 8,1, temos que 30% de 27 não é 6. Portanto, 6 litros não é a resposta do problema.

- *Alternativa C) 7 litros*

Admitimos que 7 litros seja a resposta. Sabemos que 21 litros (situação inicial) + 7 litros (adicionados) = 28 litros. Precisamos ainda confirmar se 30% de 28 litros corresponde a 7 litros. Calculando a porcentagem, temos que: $\frac{30}{100} \times 28 = \frac{840}{100} = 8{,}4$. Como 7 ≠ 8,4, temos que 30% de 28 não é 7. Logo, 7 litros não é a resposta do problema.

- *Alternativa D) 8 litros*

Imaginamos que 8 litros seja a solução. Então, temos que 21 litros (situação inicial) + 8 litros (adicionados) = 29 litros. Vamos verificar se 30% de 29 litros corresponde a 8 litros. Calculando a porcentagem, temos que: $\frac{30}{100} \times 29 = \frac{870}{100} = 8{,}7$. Como 8 ≠ 8,7, temos que 30% de 29 não é 8. Assim, 8 litros não é a resposta do problema.

- *Alternativa E) 9 litros*

Prevemos uma resposta de 9 litros. Então, temos que 21 litros (situação inicial) + 9 litros (adicionados) = 30 litros. Precisamos saber se 30% de 30 litros corresponde a 9 litros. Quando calculamos a porcentagem, descobrimos que: $\frac{30}{100} \times 30 = \frac{900}{100} = 9$. Como 9 = 9, temos que 30% de 30 é 9. Portanto, 9 litros é a resposta do problema.

Estratégia 4 – Construir uma Tabela

Para este problema podemos organizar os cálculos em uma tabela testando, a cada adição de 1 litro de água, se a quantidade de água acrescentada por Marcos para diluir os 21 litros de tinta corresponde à 30% do total da mistura. Essa quarta estratégia engloba outra vista anteriormente, a saber, a regra de três. Além disso, dentro da tabela há um processo de tentativa e erro. Vejamos o desenvolvimento dela:

Tinta (litros)	**Água (litros)**	**Total da mistura**	**Cálculo da porcentagem de água na mistura**	**Cálculo da porcentagem de tinta na mistura**
21 litros	1 litro	22 litros	litros % 22 100 1 x 22x = 100.1 22x = 100 x = 100/22 x = 4,5%	$100\% - 4{,}5\% = 95{,}5\%$
21 litros	2 litros	23 litros	litros % 23 100 2 x 23x = 100.2 23x = 200 x = 200/23 x = 8,6%	$100\% - 8{,}6\% = 91{,}4\%$
21 litros	3 litros	24 litros	litros % 24 100 3 x 24x = 100.3 24x = 300 x = 300/24 x = 12,5%	$100\% - 12{,}5\% = 87{,}5\%$

21 litros	4 litros	25 litros	litros % 25 100 4 x 25x = 100.4 25x = 400 x = 400/25 x = 16%	$100\% - 16\% = 84\%$
21 litros	5 litros	26 litros	litros % 26 100 5 x 26x = 100.5 26x = 500 x = 500/26 x = 19,2%	$100\% - 19{,}2\% = 80{,}8\%$
21 litros	6 litros	27 litros	litros % 27 100 6 x 27x = 100.6 27x = 600 x = 600/27 x = 22,22%	$100\% - 22{,}22\% = 77{,}78\%$
21 litros	7 litros	28 litros	litros % 28 100 7 x 28x = 100.7 28x = 700 x = 700/28 x = 25%	$100\% - 25\% = 75\%$
21 litros	8 litros	29 litros	litros % 29 100 8 x 29x = 100.8 29x = 800 x = 800/29 x = 27,5%	$100\% - 27{,}5\% = 72{,}5\%$
21 litros	9 litros	30 litros	litros % 30 100 9 x 30x = 100.9 30x = 900 x = 900/30 x = 30%	$100\% - 30\% = 70\%$

Dessa forma, concluímos que Marcos usou 9 litros de água para diluir a mistura.

Nessa estratégia, a atenção e interpretação para os resultados encontrados com as operações são cruciais, pois não há a necessidade do desenvolvimento contínuo dos cálculos para três, quatro e cinco litros, por exemplo, visto que o aluno pode perceber que a resposta de 5 litros (indicada na alternativa A) está longe de ser 30% e que quanto maior a quantidade de litros de água, menor é a proporção de tinta na mistura. Assim, algumas etapas podem ser omitidas no desenvolvimento da estratégia acima, não interferindo na solução do problema. Além disso, aquele aluno mais atento pode testar os cálculos com 9 litros, pois é uma das alternativas de resposta e encontrar a solução com um tempo menor se comparado a outro que não teve essa ideia. Por questão de organização e melhor entendimento do processo resolutivo, todos os cálculos foram desenvolvidos no nosso trabalho.

Estratégia 5 – Experimentar uma forma mais simples do problema

O problema pede para descobrirmos a quantidade de litros de água que correspondem à 30% do total da mistura. Ao invés de utilizarmos 30% para determinar a solução (como vimos na estratégia 2), vamos descobrir quantos litros de água correspondem 10% da mistura. Observe:

$$\begin{array}{cc} \textbf{litros} & \textbf{\%} \\ 21 \text{ (tinta)} & 70 \text{ (tinta)} \\ x \text{ (água)} & 10 \text{ (água)} \end{array}$$

$$70x = 21 \times 10 \Rightarrow 70x = 210 \Rightarrow x = 210 \div 70 \Rightarrow x = 3 \text{ litros}$$

Logo, concluímos que 10% da mistura corresponde à 3 litros de água. Agora, iremos descobrir quantos litros de água correspondem à 20% da mistura. Observemos que:

$$\begin{array}{cc} \textbf{litros} & \textbf{\%} \\ 21 \text{ (tinta)} & 70 \text{ (tinta)} \\ x \text{ (água)} & 20 \text{ (água)} \end{array}$$

$$70x = 21 \times 20 \Rightarrow 70x = 420 \Rightarrow x = 420 \div 70 \Rightarrow x = 6 \text{ litros}$$

Assim, concluímos que 20% da mistura corresponde à 6 litros de água. Por fim, como o problema pede para determinar a quantidade de litros de água que correspondem à 30% do total da mistura e já percebemos que a cada 10% equivalem à 3 litros, multiplicando por 3 temos a solução do nosso problema. Vejamos:

10% ----------------------> 3 litros

30% ----------------------> 9 litros

Portanto, Marcos usou 9 litros de água para diluir a mistura.

4.4 A resolução do problema pelos alunos e suas estratégias

Realizamos uma pesquisa em uma Escola Municipal de Ensino Fundamental localizada na cidade de Capim no Estado da Paraíba. A escolha pela escola mencionada se deu por ser a única da cidade a oferecer os anos finais do Ensino Fundamental e estar localizada próxima à residência do pesquisador. Contamos com a colaboração da professora de Matemática do 9º ano B. Na ocasião do convite, foi assinado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE (Apêndice A) para assegurar a integridade dos dados dos participantes da pesquisa e a colaboração voluntária da professora.

4.4.1 Apresentação do contexto da proposição do problema

O “Problema da mistura” foi proposto para uma turma de 9° ano do Ensino Fundamental, em dois momentos, os quais denominamos fase 1 e fase 2. A aplicação do problema em sala de aula coincidiu com os horários das aulas de Matemática da turma participante em dois dias seguidos. A primeira fase aconteceu no dia 27 de março de 2023 e a segunda no dia seguinte, isto é, 28 de março de 2023. Para a primeira fase estipulamos uma duração de 40 minutos, enquanto na segunda fase o tempo máximo para a resolução do problema eram 120 minutos (duas horas). Em ambas as fases, a professora da turma não interferiu com explicações aos estudantes em nenhum momento.

Dos 38 estudantes matriculados na turma, 34 participaram da primeira fase resolutiva. Nessa primeira fase, os alunos deveriam resolver o “Problema da mistura” sem o uso de calculadoras e representá-lo com um desenho (Ver apêndice B). É válido destacar que não exigimos dos alunos precisão ou que colorissem os desenhos, apenas esclarecemos que as representações precisavam obedecer aos dados do enunciado do problema.

A respeito da resolução da situação-problema na primeira fase, optamos por não apresentar no material entregue aos estudantes nenhuma indicação de estratégia prévia ou qualquer outra informação que contribuísse para a resolução. Entretanto, trabalhamos cuidadosamente a primeira etapa do processo de resolução de problemas tratada em Polya (1978), melhor dizendo, a compreensão do problema. Nesse sentido, realizamos a leitura compartilhada do problema objetivando que todos os estudantes pudessem compreender cada frase do enunciado do problema e, consequentemente, o problema completamente. A proposta do desenho teve o objetivo de auxiliá-los na compreensão do enunciado e na mobilização do uso da linguagem matemática na representação do problema.

Nesse momento vários questionamentos foram trazidos para a fase 1, alguns exemplos foram: *Quem é Marcos? O que ele comprou? A tinta será diluída com o quê? Qual o significado da palavra diluir? A mistura precisa ter qual percentual de água? Como podemos representar 30%? O que precisamos descobrir para resolver o problema?* Somente após concluída a etapa de compreensão do problema, única intervenção do pesquisador na aplicação da proposta na fase 1, os estudantes perceberem que precisavam descobrir a quantidade de litros de água usada por Marcos para diluir a tinta, e que os litros de água deveriam representar 30% do total de litros da mistura.

Na segunda fase da aplicação do “Problema da mistura” em sala de aula foi explicado que os estudantes resolveriam o mesmo problema da fase 1, porém eles receberiam algumas dicas (3 estratégias) que os ajudariam a resolver o problema proposto. Além disso, precisariam determinar a solução do problema por meio de, no mínimo, duas estratégias diferentes, teriam mais tempo para resolver a situação-problema e poderiam usar calculadoras.

As dicas de estratégias foram expostas em forma de um diálogo fictício entre uma professora de Matemática e seus alunos no texto distribuído aos alunos (Apêndice C). Os estudantes participantes da pesquisa não se sentiram à vontade para ler o diálogo em conjunto, por isso o pesquisador precisou lê-lo para toda a turma e explicar pausadamente em que consistia cada estratégia. Durante a explicação das estratégias, o pesquisador utilizou o quadro da sala de aula para esclarecer as dúvidas dos estudantes quanto a realização dos cálculos necessários para o desenvolvimento completo das estratégias indicadas.

Após a explicação das estratégias presentes no material, os estudantes da turma iniciaram a resolução do “Problema da mistura”. Nesta segunda fase, 36 estudantes participaram, contudo três deles entregaram o material sem nenhum cálculo e desenvolvimento de estratégias, apenas assinaram seus nomes.

Por último, destacamos que o motivo pelo qual decidimos dividir a aplicação em dois momentos de maneira distinta foi porque não queríamos simplesmente apresentar o problema aos alunos e analisar as respostas deles, mas contribuir com o processo de aprendizagem dos educandos ao exibir e valorizar principalmente as diferentes formas de resolver problemas matemáticos em sala de aula.

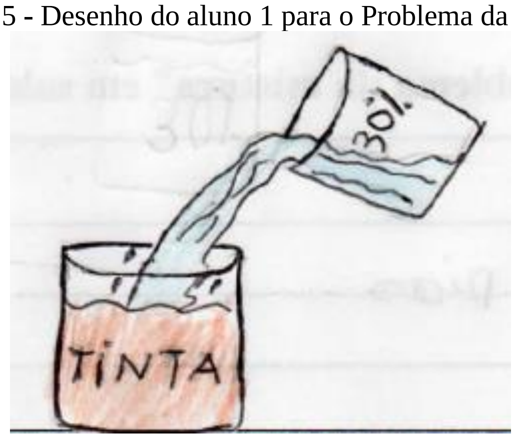
4.4.2 As respostas e as estratégias dos alunos para o problema

Na fase 1, analisamos as respostas dos alunos ao problema separando-as em três casos: caso 1 – respostas de alunos que acertaram a questão; caso 2 – respostas de alunos que não acertaram a questão ou não finalizaram a resolução, mas que indicaram alguma estratégia; caso 3 – respostas de alunos que nem acertaram a questão, nem indicaram uma estratégia de resolução.

Conforme mencionado anteriormente, além de resolver o "Problema da mistura" os alunos participantes da pesquisa precisaram representar a situação-problema com um desenho. Nesse contexto, dos 34 estudantes que participaram da fase 1, apenas um deles não entregou o desenho. Sendo assim, 97,06% representa o percentual de estudantes que conseguiram desenvolver a estratégia do desenho vista em Van de Walle (2009).

A figura 5 mostra o desenho de um estudante para o "Problema da mistura".

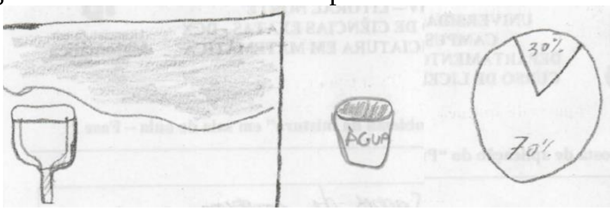
Figura 5 - Desenho do aluno 1 para o Problema da mistura



Fonte: acervo da pesquisa (2023)

Analisando o desenho do aluno, percebemos que ele compreendeu bem o problema e fez uma representação coerente, pois conseguiu mostrar que a água diluirá a quantidade de tinta representando 30% do total de litros da mistura. Ainda se tratando das representações coerentes, é relevante analisarmos o desenho do aluno 2 na figura 6 a seguir.

Figura 6 - Desenho do aluno 2 para o Problema da mistura

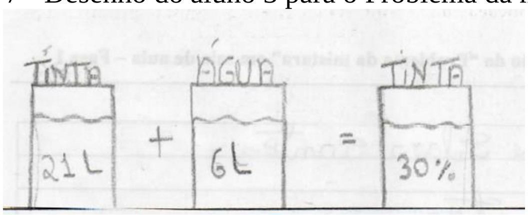


Fonte: acervo da pesquisa (2023)

Observando o desenho acima, fica evidente que o aluno 2 também compreendeu o problema e ainda entendeu que 70% (dado ausente no enunciado do problema) era um dado importante para o desenvolvimento da resolução, embora não tenha deixado explícito que esse dado era referente à quantidade de tinta na mistura. Com a distribuição percentual acima, o estudante mostra seu entendimento a respeito da mistura contendo água e tinta representar 100%, ou seja, o total.

Apesar de a maioria dos estudantes entregarem os desenhos, é válido destacar que alguns deles não correspondem totalmente ao problema. Essa constatação é percebida na figura 7 abaixo.

Figura 7 - Desenho do aluno 3 para o Problema da mistura

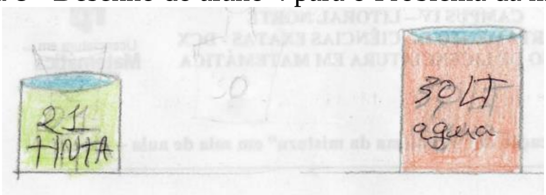


Fonte: acervo da pesquisa (2023)

Ao observamos a representação acima, notamos que o aluno fez o desenho já apontando a sua resposta (6L). Entretanto, comete um erro ao indicar que 21L + 6L = 30%, o que não é correto. Além disso, registrou que 30% representa a quantidade de tinta na mistura.

Outro exemplo de representação incoerente para o “Problema da mistura” pode ser visto na figura 8 com o desenho do aluno 4.

Figura 8 - Desenho do aluno 4 para o Problema da mistura



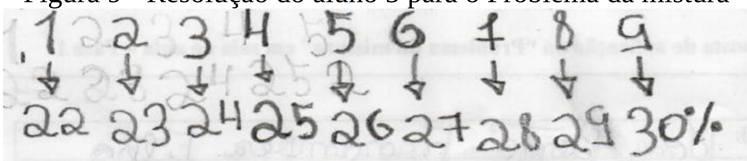
Fonte: acervo da pesquisa (2023)

Observando a figura 8 notamos que, provavelmente, o estudante desejasse indicar 30% referente à quantidade de água mencionada no problema, porém indicou “30 LT água”, o que nos leva considerá-la também como mais uma representação incoerente.

Com base na análise dos desenhos dos estudantes participantes da primeira etapa, concluímos que 84,85% deles entregaram uma representação coerente, enquanto 15,15% entregaram representações incoerentes. Nesse sentido, consideramos representações coerentes aquelas que trazem, por exemplo, desenhos de baldes de água e tinta e incoerentes aquelas com cálculos matemáticos incorretos e ausência de objetos que pudessem retratar o problema proposto. Outro fato importante a se atentar diz respeito à presença de informações numéricas nos desenhos dos estudantes. Dos 33 estudantes que entregaram os desenhos, 14 deles trouxeram dados numéricos nas representações, representando 42,42%, enquanto 19 alunos não utilizaram tais informações, o que representa 57,58% dos alunos participantes.

Em se tratando do número de estudantes que acertaram completamente a questão (caso 1) na primeira fase da aplicação do problema, temos apenas um aluno (aluno 5) que representa 2,94% dos estudantes. A estratégia adotada por ele para resolver o problema merece atenção e pode ser observada na figura 9.

Figura 9 - Resolução do aluno 5 para o Problema da mistura



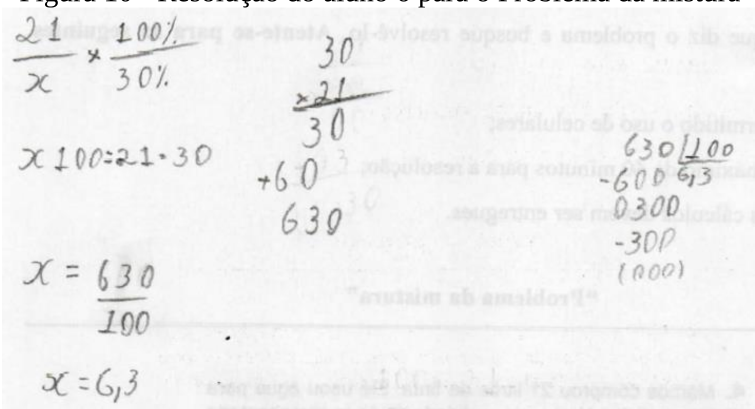
Fonte: acervo da pesquisa (2023)

Ao analisarmos a resolução acima, notamos que houve um entendimento a respeito de adicionar litros à quantidade inicial (21 litros de tinta). O aluno iniciou adicionando um litro aos 21 já existentes, obtendo como resultado 22 litros, mas percebeu que deveria encontrar o número 30, por isso continuou desenvolvendo seu raciocínio e quando percebeu que a soma de 21+ 9 = 30 concluiu a resolução acrescentando o símbolo de porcentagem (%) ao número 30, obtendo, de maneira incorreta, 30%. Assim, percebeu que 9 litros estavam relacionados aos “30%” finalizando sua resolução e encontrando a solução.

Continuando a análise das respostas dos alunos na fase 1, 91,17% (31 alunos) refere-se ao percentual de alunos incluídos no caso 2, isto é, aqueles estudantes que não acertaram a questão ou não finalizaram a resolução, mas que indicaram alguma estratégia. Percebemos na resolução dos estudantes a predominância no uso da regra de três, mas em algumas resoluções também aparecem cálculos de multiplicação e divisão.

A figura 10 mostra um exemplo de uma resolução completa, porém com o resultado incorreto. Nesse sentido, é interessante, ainda, mencionarmos que tal resultado (x = 6,3) encontrado pelo aluno 6 confirma parcialmente a nossa hipótese inicial, já que consideramos essa possibilidade de resposta por meio de um cálculo de porcentagem (30% de 21) e não com a utilização de uma regra de três como vemos na figura 10.

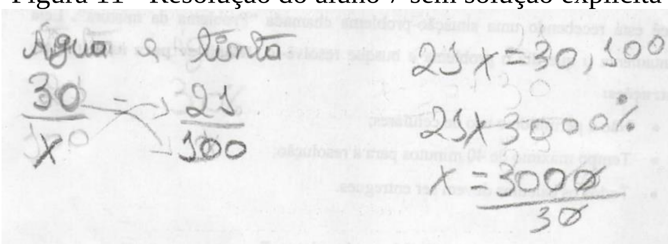
Figura 10 - Resolução do aluno 6 para o Problema da mistura



Fonte: acervo da pesquisa (2023)

Semelhantemente à resolução da figura 10, a figura 11 mostra outra resolução também com o uso da regra de três, porém nesse caso o aluno 7 não deixa explícita qual a solução encontrada para o problema.

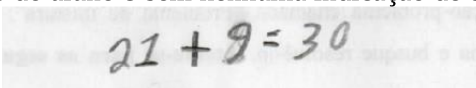
Figura 11 - Resolução do aluno 7 sem solução explícita



Fonte: acervo da pesquisa (2023)

A respeito do caso 3, dois estudantes estão inseridos nessa categoria. Esse número representa 5,88% dos alunos participantes da pesquisa durante a primeira fase da aplicação do "Problema da mistura" em sala de aula. Um deles deixou o espaço destinado para rascunhos e cálculos em branco e o outro (aluno 8) indicou apenas uma adição entre os números 21 e 9, conforme mostra a figura 12.

Figura 12 - Resolução do aluno 8 sem nenhuma indicação de estratégia de resolução



Fonte: acervo da pesquisa (2023)

Observando essa evidência de resolução percebemos que o aluno 8 desconsiderou o dado em representação percentual expresso no enunciado do problema, por isso encontrou equivocadamente o número inteiro 30. Por outro lado, podemos inferir que o estudante certamente pensou qual seria o número que somado com 21 resultaria em 30, por isso vemos o número 9 no indício da resolução na figura 12.

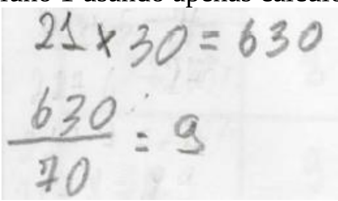
Os registros em forma de desenhos mostram claramente que a maioria dos estudantes compreenderam o problema, porém há um quantitativo consideravelmente grande daqueles que apresentaram dificuldades nas representações. Isso revela que os estudantes não estão familiarizados com esse tipo de atividade, por isso a metodologia de resolução de problemas atrelada ao desenvolvimento de estratégias precisa ser constantemente trabalhada nas salas de aulas de Matemática desde o Ensino Fundamental. Nesse contexto, a literatura demonstra que há necessidade de ênfase na apresentação das estratégias de resolução de problemas durante as etapas da Educação Básica para que os alunos tenham conhecimento e condições para resolver os problemas matemáticos existentes e futuros.

Diante de todos os dados apresentados referentes à resolução do problema em sala de aula na fase 1, constatou-se que, quase por unanimidade, os estudantes participantes não encontraram a solução correta para o "Problema da mistura", salvo o aluno 5 que desenvolveu um processo de testagem como vimos anteriormente na figura 9. Além disso, verificou-se que muitos estudantes não buscaram adotar suas próprias estratégias de resolução, apenas consideraram o uso da regra de três como única maneira de determinação da solução do problema proposto. Ainda, mesmo que não seja nosso objetivo é possível identificar em alguns casos os erros dos estudantes no que se refere aos cálculos de multiplicação e divisão, bem como dificuldade em distinguir um número diante de sua representação inteira e percentual.

Na fase 2, novamente, analisamos as respostas dos alunos ao problema separando-as em quatro casos: caso 1 – respostas de alunos que acertaram a questão desenvolvendo duas estratégias; caso 2 – respostas de alunos que acertaram a questão desenvolvendo uma estratégia; caso 3 – respostas de alunos que não acertaram ou não finalizaram a questão, mas que indicaram o desenvolvimento de alguma estratégia; caso 4 – respostas de alunos que nem acertaram a questão, nem indicaram alguma estratégia de resolução. Esse último caso também inclui as respostas em branco.

No que se refere às resoluções para o "Problema da mistura" que apresentam as estratégias da regra de três e construir uma tabela, três estudantes conseguiram determinar a solução, os quais representam 8,33% dos participantes na segunda fase da aplicação. Dois desses alunos (alunos 1 e 6), utilizaram cálculo de multiplicação e divisão para determinar a solução, porém sem a estrutura da regra de três. A figura 13 mostra a resolução do aluno 1.

Figura 13 - Resolução do aluno 1 usando apenas cálculo de multiplicação e divisão

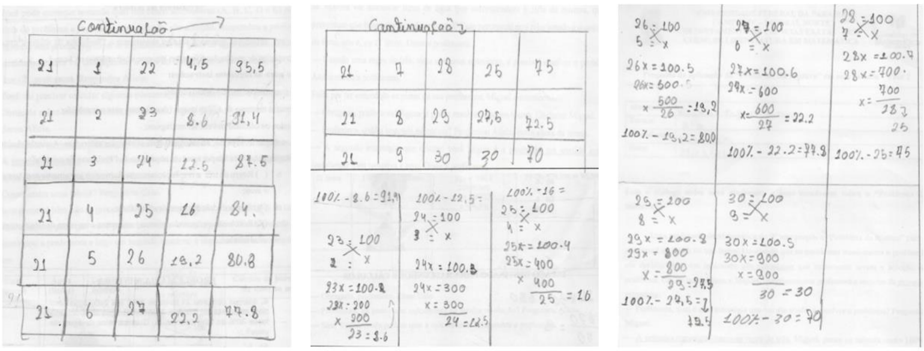


Fonte: acervo da pesquisa (2023)

É válido destacar que os alunos participantes da pesquisa não foram informados sobre a possibilidade de encontrar a solução dessa maneira porque desejávamos o desenvolvimento das estratégias de resolução indicadas no material (Apêndice C). No entanto, essa resolução é válida e coerente porque os resultados estão indicados corretamente e o aluno mostra que compreendeu o problema ao utilizar um dado ausente.

A estratégia de construir uma tabela foi bem desenvolvida pelo aluno 1, entretanto percebemos que ele não traz o símbolo de porcentagem (%) para indicar que seus resultados estão representados de forma percentual. Essa desatenção dos estudantes foi percebida em 21 resoluções. Na figura 14 abaixo vemos a maneira como o aluno 1 desenvolveu a estratégia de construir uma tabela para encontrar a solução para o "Problema da mistura".

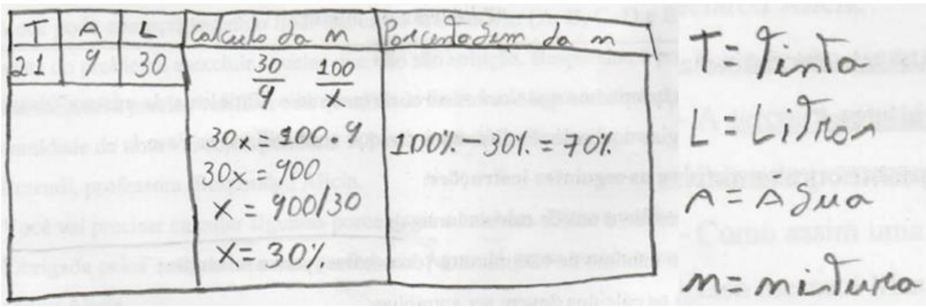
Figura 14 - Resolução do aluno 1 usando a estratégia de construir uma tabela



Fonte: acervo da pesquisa (2023)

Diferentemente da resolução vista na figura 14, a resolução na figura 15 confirma novamente o esperado: a possibilidade de algum aluno não desenvolver todos os cálculos na tabela e ainda determinar a solução correta.

Figura 15 - Resolução do aluno 6 usando a estratégia de construir uma tabela sem todos os cálculos



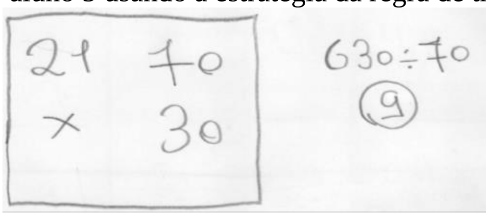
Fonte: acervo da pesquisa (2023)

Nesta resolução, provavelmente, o aluno 6 desejou utilizá-la apenas para confirmar seu resultado encontrado com a sua primeira estratégia, pois ele não desenvolveu os cálculos para a adição de 7 litros de água, por exemplo, como acontece na resolução da figura 14. Apesar de a tabela estar incompleta, notamos uma organização do aluno 6 ao perceber que houve um cuidado em indicar o significado das letras presentes na sua tabela. Ainda, outro aspecto importante da resolução vista na figura 15 é que o estudante não deixa de trazer o símbolo de porcentagem (%) nos seus cálculos. Isso mostra que o aluno entende a importância desse símbolo para a sua resposta.

Quanto ao caso 2, quatro estudantes (alunos 5, 10, 11 e 12) acertaram a questão desenvolvendo uma estratégia. Apenas o aluno 11 desenvolveu a estratégia da regra de três completamente, enquanto os alunos 5 e 10 não apresentaram nas resoluções a estrutura correta da regra. O aluno 12 resolveu o "Problema da mistura" por meio da estratégia de construir uma tabela, mas a tabela do aluno só foi construída a partir dos cálculos referentes à adição de 9 litros de água. Sendo assim, 11,11% representa o percentual de estudantes incluídos no caso 2.

A estratégia mais adotada, quase em unanimidade, foi a regra de três, mas também aparece para o segundo caso a estratégia de construir uma tabela, mesmo sem todos os cálculos. Na figura 16, vemos a maneira que o aluno 5 buscou para resolver o problema.

Figura 16 - Resolução do aluno 5 usando a estratégia da regra de três sem a estrutura correta

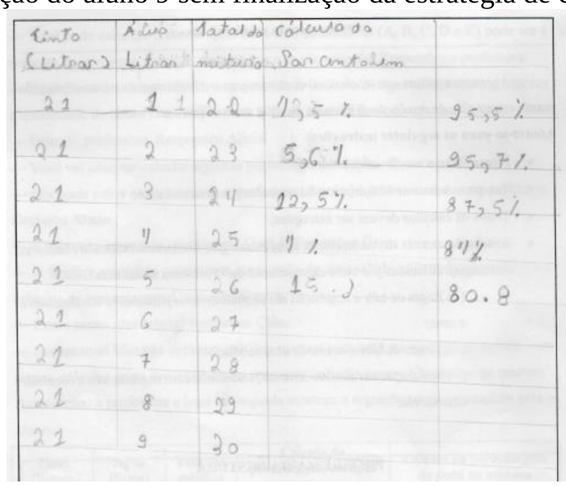


Fonte: acervo da pesquisa (2023)

Observando a resolução acima, nitidamente vemos que o aluno 5 não traz a identificação a que corresponde os números inscritos no quadro por ele e não desenvolve todos os cálculos. Com essa resolução, percebemos mais uma vez a falta de atenção quanto a distribuição dos dados do problema na estrutura da regra. Evidentemente, o estudante acertou a questão, porém podemos verificar que a estratégia adotada não foi desenvolvida completamente.

A respeito do terceiro caso, das respostas de alunos que não acertaram ou não finalizaram a questão, mas que indicaram o desenvolvimento de alguma estratégia, 26 estudantes estão inseridos nessa categoria. Eles representam 72,22%, ou seja, a maioria dos participantes da pesquisa. Na figura 17 podemos observar um exemplo de resolução para o caso 3 da segunda fase da aplicação do problema em sala de aula.

Figura 17 - Resolução do aluno 9 sem finalização da estratégia de construir uma tabela



Tinta (Litros)	Água Litros	Total da mistura	Cálculo da Porcentagem	
21	1	22	4,5 %	95,5 %
21	2	23	5,6 %	95,7 %
21	3	24	12,5 %	87,5 %
21	4	25	4 %	84 %
21	5	26	15.2	80.8
21	6	27		
21	7	28		
21	8	29		
21	9	30		

Fonte: acervo da pesquisa (2023)

Na resolução do aluno 9, fica evidente a dificuldade do estudante em desenvolver completamente a estratégia de construir uma tabela. Isso porque é preciso realizar os cálculos de porcentagens necessários para as colunas quatro e cinco da tabela.

Por fim, o quarto e último caso é referente às resoluções dos alunos que nem acertaram a questão, nem indicaram alguma estratégia de resolução. Além disso, os alunos que não responderam também estão incluídos nesse quarto caso. Analisando as resoluções dos participaram da pesquisa, verificamos que três estudantes estão nessa categoria. Logo, 8,33% é o percentual dos estudantes, considerando os fatores do caso 4.

Em vista dos dados apresentados, notamos que nenhum estudante buscou resolver o “Problema da mistura” utilizando a estratégia da resolução em sentido inverso somente. Isso nos revela que essa estratégia provavelmente seja a mais difícil para ser desenvolvida por estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental. Além disso, consideramos também que a dificuldade dos alunos com cálculos de porcentagem (habilidade fundamental para o desenvolvimento da estratégia) e o não entendimento sobre o significado dos 30% do total de litros da mistura, que sofre alteração em cada tentativa, possa ter contribuído para os estudantes não buscarem desenvolver essa estratégia.

Das três estratégias apresentadas, a regra de três é a mais recorrente nas resoluções sejam elas finalizadas ou não. Contudo, ainda é perceptível que a estrutura da regra não é totalmente desenvolvida pelos estudantes. Com relação a estratégia de construir uma tabela notamos que poucos alunos a desenvolveram completamente. Dessa forma, tal estratégia possibilitou os estudantes alcançarem uma resolução parcial para o problema.

Os resultados da pesquisa revelam que os estudantes não demonstram conhecer diferentes estratégias de resolução de problemas. Em contrapartida, o número de estudantes que acertaram a questão aumentou consideravelmente, quando comparado ao resultado do mesmo problema na primeira fase da aplicação. Na primeira fase apenas um aluno acertou a questão, já na segunda sete estudantes responderam corretamente o problema proposto.

Acreditamos que essa mudança se deve especialmente às dicas de estratégias que foram entregues aos alunos e a possibilidade do uso das calculadoras. Com esse objeto em mãos, os alunos puderam ter a certeza que os cálculos realizados por eles estavam corretos. Sendo assim, podemos pontuar que elas influenciaram nos acertos e também no foco pela busca da realização de alguma estratégia e não apenas nos cálculos.

Portanto, esses resultados reforçam a necessidade de trabalharmos frequentemente problemas matemáticos interessantes em sala de aula que possibilitem várias estratégias de resolução para, assim, equiparmos os nossos alunos com estratégias para resolver problemas parecidos com o proposto na presente pesquisa.

Os dados do nosso trabalho confirmam a indispensabilidade dos conhecimentos prévios dos estudantes quando eles resolvem problemas matemáticos. No entendimento de Dante (2005) o processo de resolver problemas é vagaroso e contínuo, logo não seria diferente com as estratégias de resolução. Assim, esse estudo reforça a importância de as aulas de Matemática serem desafiadoras para que, a médio ou longo prazo, os estudantes estejam familiarizados com diferentes maneiras de resolver problemas e não se limitar à regra de três.

Evidencia-se, com o trabalho elaborado na perspectiva das estratégias de resolução de problemas, que os estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental ainda não desenvolveram completamente habilidades referentes à resolução de problemas com cálculos de porcentagem sem a utilização da regra de três. Isso reforça a necessidade de um trabalho com um planejamento de ensino voltado para o atendimento dessas defasagens, pois estamos mencionando uma habilidade que, segundo a BNCC (BRASIL, 2018), deveria ser desenvolvida já no 6° ano do Ensino Fundamental. Diante disso, concluímos que a porcentagem deve ser trabalhada regularmente nas salas de aula de Matemática, pois esse objeto de conhecimento é dificuldade para muitos estudantes concluintes do Ensino Fundamental.

Além disso, é importante destacar alguns apontamentos que podem ter interferido nos resultados do nosso trabalho. O primeiro deles está relacionado ao tipo de problema proposto aos alunos. Como vimos em Dante (2011), Stancanelli (2001) e Toledo e Toledo (1997) há uma grande variedade de problemas matemáticos na literatura. Com base nessa observação, é interessante considerarmos que a ausência de um estudo prévio do tipo de problema proposto em sala de aula, bem como a incerteza quanto ao problema escolhido possibilitar o desenvolvimento de várias estratégias de resolução são razões que podem contribuir para resultados distintos desses apresentados no nosso trabalho.

O segundo apontamento tem relação ao argumento de Dante (2005) no que diz respeito ao trabalho com problemas que tenham uma linguagem matemática próxima da realidade dos alunos. Nesse cenário, acreditamos que o “Problema da mistura” cumpre esse requisito, pois aborda um contexto cotidiano: diluir uma quantidade de tinta. No entanto, um problema com linguagem matemática mais refinada e contexto desconhecido pelos estudantes podem também ser considerados como aspectos contribuintes para outros resultados. Em vista disso, podemos citar a não compreensão do significado de algum vocábulo ou símbolo matemático presente no enunciado do problema e o não interesse na busca da solução, por exemplo.

A partir de nossas reflexões e estudos, destacamos que a possibilidade do trabalho com o desenvolvimento das estratégias de resolução de problemas nas aulas de Matemática revela-se como principal contribuição do nosso trabalho para professores de Matemática, estudantes da área e literatura existente.

Com a elaboração desse estudo, concluímos que as estratégias de resolução de problema requerem entendimento sobre a própria estratégia e conhecimento matemático de quem as utilizam. Isso foi observado na aplicação do problema em sala de aula, quando a estratégia de resolução em sentido inverso juntamente com tentativa e erro não foi adotada pelos estudantes participantes da pesquisa. Acreditamos que o ato de tentar repetidamente quando já se tem confirmação sobre uma resposta encontrada não ser a correta precisa ser mais trabalhado nas atividades escolares, especialmente no contexto do processo do ensino-aprendizagem da Matemática.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho possibilitou um entendimento a respeito das estratégias de resolução de problemas a partir de uma situação-problema que envolve cálculos de porcentagem. Esse objeto matemático é considerado como fonte de dificuldades de muitos estudantes e tais dificuldades perpassam toda a Educação Básica. Neste estudo, buscamos responder o seguinte problema de pesquisa: Quais estratégias de resolução são mobilizadas pelos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental?

Para se atingir uma compreensão sobre o tema e responder ao problema de pesquisa proposto, definiu-se como objetivo geral analisar as estratégias que estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental utilizam ao resolverem uma situação-problema envolvendo cálculos de porcentagem. Consequentemente, definiu-se três objetivos específicos que foram atingidos. O primeiro, de selecionar uma situação-problema envolvendo cálculo de porcentagem que possibilite o uso de diferentes estratégias de resolução além da regra de três. O segundo, de propor a resolução da situação-problema selecionada a uma turma de estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental, por diferentes estratégias. O terceiro, e último, de verificar as estratégias de resolução mobilizadas pelos estudantes e quais estratégias conduzem os alunos à solução do problema.

Os objetivos foram alcançados conforme os passos determinados na metodologia da pesquisa. O alcance do primeiro objetivo específico deu-se pela seleção de um problema que envolve porcentagem, retirado da OBMEP do ano de 2018 (etapa 1). Quanto ao segundo objetivo, a proposição da resolução do problema em sala de aula (etapa 3) confirma que ele foi atingido. Por fim, o terceiro objetivo específico foi alcançado por meio da verificação das estratégias dos estudantes (etapa 5) ao problema apresentado nesse trabalho.

O problema de pesquisa mencionado anteriormente foi respondido por meio da aplicação, em duas fases, de uma proposta em sala de aula contendo uma situação-problema denominada “Problema da mistura” junto a 36 estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental. A partir da análise dos registros escritos dos alunos, foi possível verificar que a regra de três foi a estratégia mais utilizada nas resoluções, embora seja perceptível, ainda, as dificuldades, desatenções e equívocos na estrutura da regra indicada pelos estudantes.

Participaram da primeira e segunda fase da aplicação do problema em sala de aula 34 e 36 estudantes, respectivamente. Os resultados revelam que a maioria dos alunos (33 alunos) conseguiram representar o problema com um desenho, porém, na primeira fase, apenas um estudante finalizou e determinou a resposta correta para o “Problema da mistura”. A maior parte dos estudantes participantes da primeira fase estão inseridos no caso 2. Ou seja, 31 alunos é o quantitativo no segundo caso. A respeito dos resultados da segunda fase, observou-se um maior número de estudantes (26 estudantes) no terceiro caso. Esses alunos não acertaram ou não finalizaram a questão, mas indicaram o desenvolvimento de alguma estratégia.

Quanto à resposta para o problema de pesquisa levantado, verificou-se que os estudantes participantes da pesquisa mobilizaram, com mais empenho, a estratégia da regra de três, mas a estratégia de construir uma tabela também aparece nas resoluções, porém em quantitativo menor. Nesse sentido, consideramos a praticidade da regra como fator principal para esse resultado visto que ela não é um objeto de conhecimento matemático. A metodologia da resolução de problemas para a aprendizagem matemática, especificamente a aprendizagem de porcentagem, foi considerada uma alternativa eficaz no desenvolvimento da pesquisa.

Os estudos realizados apresentaram limitações. Diante disso, é válido mencionar a aplicação da proposta apenas em uma turma de 9º ano, a proposição de somente um problema com uma tipologia e a não análise aprofundada das dificuldades e erros cometidos pelos estudantes durante o procedimento resolutivo do "Problema da mistura".

As dificuldades do pesquisador surgiram durante todo o processo de desenvolvimento desse estudo, ou seja, nas cinco etapas apresentadas na metodologia da pesquisa. A terceira etapa, elaboração da proposta e proposição do problema aos alunos, sem dúvida, foi a mais desafiadora. O cuidado para elaborar um material (Apêndices B e C) curto e de fácil compreensão atrelado ao modo de agir e se direcionar aos estudantes em sala de aula explicam os motivos pelos quais tal etapa foi considerada, pelo pesquisador, a mais desafiadora da presente pesquisa.

A experiência em retornar ao local no qual cursei todo o Ensino Fundamental foi gratificante porque tive a possibilidade de reencontrar nos corredores da escola pessoas queridas que contribuíram com a minha formação. Na sala de aula, a realidade do trabalho docente me permitiu enxergar certezas e incertezas. Era certo que todos os alunos não conseguiriam resolver o problema proposto, porém havia a esperança que as três estratégias indicadas no material (Apêndice C) fossem desenvolvidas, mesmo que parcialmente, por alguns deles.

A finalização dessa pesquisa é sinônimo de aprendizado. Pude aprender um pouco mais a respeito de um tema tão interessante e pouco explorado nas salas de aula que é o trabalho com estratégias de resolução de problemas. Além disso, pude vivenciar novamente outra situação na qual o planejamento docente é essencial. Por fim, posso mencionar aquilo que aprendemos nas disciplinas voltadas para o ensino de Matemática na Graduação: só é possível ensinar para os nossos alunos aquilo que conhecemos. Assim sendo, um professor não consegue trabalhar as estratégias de resolução de problemas, se ele mesmo não consegue resolver o mesmo problema de maneiras distintas.

Para dar sequência a essa pesquisa, sugerimos que outros pesquisadores abordem o tema apresentado na perspectiva de diferentes representações da porcentagem, isto é, representações fracionária e decimal. Recomendamos também a possibilidade de propor a estratégia de experimentar uma forma mais simples do problema, trazer excesso de dados para o “Problema da mistura” objetivando uma análise das resoluções dos estudantes para o novo problema elaborado e retirar, talvez, o uso da calculadora. Uma última sugestão para estudos futuros é adaptar a proposta aqui apresentada e aplicá-la em diferentes anos do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

ALVES, S. C.; PROENÇA, M. C. de. O ensino e a aprendizagem do conceito de porcentagem por meio da resolução de problemas. *In*: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2014.** Curitiba: SEED/PR., 2016. v.1. (Cadernos PDE). Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_uem_mat_artigo_sidneia_cristina_alves.pdf. Acesso em: 17 set. 2022.

ARAÚJO, F. I. A. de. **A resolução de problemas contextualizados voltados para aplicação de regra de três simples com abordagem em cortes de carnes**. 2019. TCC (Graduação) – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade do Estado do Amazonas, Presidente Figueiredo, 2019. Disponível em: http://repositorioinstitucional.uea.edu.br/simple-search?query=Regra+de+tr%C3%AAs&sort_by=score&order=desc&rpp=10&filter_field_1=author&filter_type_1=equals&filter_value_1=Ara%C3%BAjo%2C+Francisco+Ilmar+Amaral+de&etal=0&filtername=type&filterquery=Trabalho+de+Conclus%C3%A3o+de+Curso&filtertype=equals. Acesso em: 28 out. 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Relatório de resultados do Saeb 2019**: volume 1: 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e séries finais do Ensino Médio. Brasília, DF: INEP, 2021. Disponível em: https: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2019/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2019_volume_1.pdf. Acesso em: 24 set. 2022.

CAVALCANTI, C. T. Diferentes formas de resolver problemas. *In*: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001, p. 121-149.

D’AMBRÓSIO, B. S.; D’AMBRÓSIO, U. Formação de professores de matemática: professor-pesquisador. **Atos de Pesquisa em Educação**, v. 1, n. 1, p. 75-85, jan./abr. 2006. Disponível em: https://bu.furb.br/ojs/index.php/atosdepesquisa/article/view/65/33. Acesso em: 12 dez. 2022.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12 ed. São Paulo: Ática, 2005.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. 1 ed. São Paulo: Ática, 2011.

ECHEVERRÍA, M. D. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. *In*: POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998, p. 13-42.

GIL, A. C. **Como elaborar Projetos de Pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2018.

JACONIANO, E. A. *et al*. Resolução de problemas de proporcionalidade por meio da redução à unidade. **Educação Matemática em Revista**. Brasília, v. 24, n. 61, p. 98-113, jan./mar. 2019. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/24252/1/Tovar2019Resolu%C3%A7%C3%A3o.pdf. Acesso em: 10 dez. 2022.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010.

MUSSER, G. L.; SHAUGHNESSY, J. M. Estratégias de resolução de problemas na matemática escolar. *In*: KRULIK, S.; REYS, R. E. (orgs.). **A resolução de problemas na matemática escolar**. Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, p. 188-201.

OBMEP. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP. **Provas e soluções.** Disponível em: https://drive.google.com/file/d/125nUD1ceE0YaKxWjh_en6cEfnAkZOVGI/view. Acesso em: 10 jun. 2023.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONTES, E. A. S. Modelo de ensino e aprendizagem de matemática baseado em resolução de problemas através de uma situação-problema. **Revista Sítio Novo**. v. 2, n. 2, p. 44-56, jul./dez. 2018. Disponível em: https://sitionovo.ifto.edu.br/index.php/sitionovo/article/view/136. Acesso em: 12 out. 2022.

RIBEIRO, V. M. *et al*. A importância da leitura e interpretação de textos na resolução de problemas matemáticos. **Série Educar**: Matemática, Tecnologia, Educação Profissional. Belo Horizonte – MG, v. 34, p. 7-10, 2020. Disponível em: https://www.poisson.com.br/livros/serie_educar/volume34/Educar_vol34.pdf#page=7. Acesso em: 10 out. 2022.

SILVA, D. P. da. **Regra de Três:** prática escolar em modelagem matemática. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2011. Disponível em: http://www.repositorio.ufpa.br/bitstream/2011/2951/1/Dissertacao_RegraTresPratica.pdf. Acesso em: 28 out. 2022.

STANCANELLI, R. Conhecendo diferentes tipos de problemas. *In*: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001, p. 103-120.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. **Didática de matemática**: como dois e dois: a construção da matemática. São Paulo: FTD, 1997.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezada Professora,

Esta pesquisa tem como tema o estudo das estratégias de resolução de uma situação-problema envolvendo porcentagem e está sendo desenvolvida por Anderson João dos Santos, discente do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba, sob a orientação da Profa. Cibelle de Fátima Castro de Assis.

O objetivo geral da pesquisa é analisar as estratégias que estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental utilizam ao resolverem uma situação-problema envolvendo cálculos de porcentagem e está sendo realizada por meio de aplicação e análise das respostas dos estudantes em um questionário contendo uma situação-problema que envolve cálculos de porcentagens. A aplicação acontecerá em dois momentos nos quais os estudantes resolverão o problema proposto utilizando diferentes estratégias de resolução. A partir dessas resoluções, o pesquisador poderá realizar a categorização e verificação das estratégias utilizadas pelos alunos, em abril de 2023.

Solicitamos sua autorização para a realização deste trabalho, juntamente com a colaboração de seus alunos e também para a publicação dos resultados deste estudo no Trabalho de Conclusão de Curso do discente Anderson João dos Santos, bem como posteriores publicações em eventos da área de Educação Matemática.

Por ocasião da análise e publicação dos resultados, seu nome e de seus alunos serão mantidos em sigilo. Informamos que essa pesquisa não oferece riscos, previsíveis, para sua integridade moral ou física, como também para seus alunos.

Esclarecemos que sua participação e de seus alunos no estudo é voluntária e, portanto, a senhora não é obrigada a fornecer as informações e/ou colaborar com as atividades solicitadas pelo pesquisador. O pesquisador estará à disposição para quaisquer esclarecimentos que considerem necessários.

Diante do exposto, declaro que fui devidamente esclarecida e dou o meu consentimento para publicação dos resultados. Estou ciente que receberei uma cópia desse documento.

Anderson João dos Santos

Assinatura do Pesquisador

Assinatura da Professora de Matemática

Cibelle Castro Assis

Assinatura da Professora Orientadora

APÊNDICE B – PROPOSTA DE APLICAÇÃO DO “PROBLEMA DA MISTURA” EM SALA DE AULA – FASE 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS IV – LITORAL NORTE
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS - DCX
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Licenciatura em Matemática
UFPB - CAMPUS IV

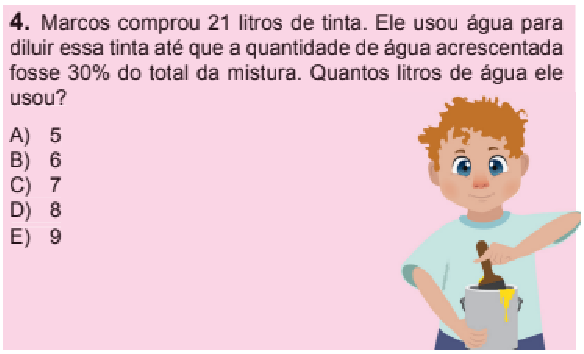
Proposta de aplicação do “Problema da mistura” em sala de aula – Fase 1

Aluno(a):	
Turma:	
Disciplina:	
Data:	

Você está recebendo uma situação-problema chamada “Problema da mistura”. Leia atentamente o que diz o problema e busque resolvê-lo. **Atente-se para as seguintes instruções:**

- Não é permitido o uso de celulares;
- Tempo máximo de 40 minutos para a resolução;
- Todos os cálculos devem ser entregues.

“Problema da mistura”


4. Marcos comprou 21 litros de tinta. Ele usou água para diluir essa tinta até que a quantidade de água acrescentada fosse 30% do total da mistura. Quantos litros de água ele usou?

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

Sua resposta:

____

____

____

COMO VOCÊ REPRESENTARIA, EM FORMA DE UM DESENHO, O "PROBLEMA DA MISTURA"?

ESPAÇO DESTINADO PARA RASCUNHOS E CÁLCULOS

APÊNDICE C – PROPOSTA DE APLICAÇÃO DO “PROBLEMA DA MISTURA” EM SALA DE AULA – FASE 2

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CAMPUS IV – LITORAL NORTE
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS - DCX
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Proposta de aplicação do “Problema da mistura” em sala de aula – Fase 2

Aluno(a):	
Turma:	
Disciplina:	
Data:	

Leia o diálogo entre uma professora e seus alunos sobre o “Problema da mistura”.

Uma professora de Matemática do 9° ano propôs o “Problema da mistura” para a sua turma no início do ano letivo. Desejando que os estudantes resolvessem o problema, ela decidiu ajudá-los indicando três estratégias que, certamente, os levarão à solução do problema. O aluno Miguel questionou a professora a respeito da primeira estratégia:

— Professora, qual é essa estratégia que vai me ajudar a resolver o problema? Perguntou Miguel.

— A primeira estratégia chama-se regra de três. Miguel, pense na mistura como 100%. Se Marcos vai adicionar litros de água que correspondem à 30% da mistura, qual o percentual que falta para completar o total? Esse percentual está relacionado à quantidade de tinta, isto é, os 21 litros. Disse a professora.

— Usando uma regra de três, vista nos anos anteriores, é possível resolver o problema. Acrescentou a professora.

Feliz por ter entendido as pistas da sua professora, Miguel comemorou.

— Obrigado, professora! Agora já posso resolver esse problema. Declarou Miguel.

— Professora, qual a segunda estratégia? Perguntou Alicia, outra aluna da turma.

— A segunda estratégia que oriento você seguir é a resolução em sentido inverso juntamente com tentativa e erro. Disse a professora.

— Como eu uso essas estratégias, professora? Perguntou Alicia.

— Você pode começar testando qual das cinco alternativas (A, B, C, D e E) pode ser a resposta do problema e excluir aquelas que não são solução. Respondeu a professora.

— Também será preciso verificar se a quantidade de litros de água adicionada por Marcos à quantidade de tinta vai corresponder à 30% do total de litros da mistura.

— Entendi, professora. Respondeu Alicia.

— Você vai precisar calcular algumas porcentagens também. Disse a professora.

— Obrigada pelos esclarecimentos, professora. Agora já posso resolver esse problema. Declarou Alicia.

— E a terceira estratégia, professora? Qual é? Perguntou Caio.

— A terceira estratégia consiste na construção de uma tabela utilizando regra de três e cálculos de porcentagem. Disse a professora.

— Como assim uma tabela? Perguntou Caio.

— Isso mesmo! Mas não se preocupe! Vou mostrar para você um exemplo de tabela, com alguns cálculos, para que você possa encontrar solução para o “Problema da mistura”. Acrescentou a professora. Em seguida, mostrou a seguinte tabela incompleta para o aluno.

Tinta (litros)	**Água (litros)**	**Total da mistura**	**Cálculo da porcentagem de água na mistura**	**Cálculo da porcentagem de tinta na mistura**
21 litros	1 litro	22 litros	litros % 22 100 1 x 22x = 100.1 22x = 100 x = 100/22 x = 4,5%	$100\% - 4{,}5\% = 95{,}5\%$

— Obrigado, professora! Disse Caio.

— Professora, eu posso usar calculadora na minha resolução? Perguntou Alicia.

— Sim. Todos vocês podem usar a calculadora. Respondeu a professora.

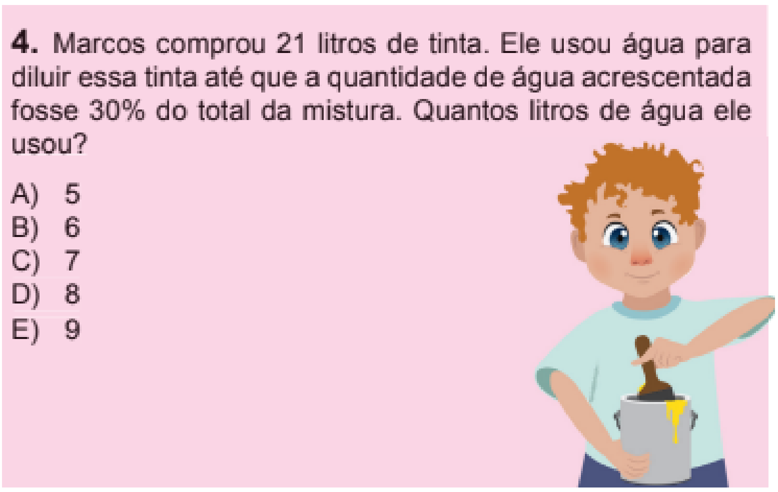
“Problema da mistura”

Agora, propomos que você resolva novamente o “Problema da mistura” usando outras estratégias de resolução diferentes das que você utilizou na Fase 1.

Atente-se para as seguintes instruções:

- É permitido o uso de calculadoras;
- Tempo máximo de 120 minutos (duas horas) para a resolução;
- Todos os cálculos devem ser entregues;
- Resolução através de, no mínimo, duas estratégias diferentes. Assinale abaixo as estratégias utilizadas por você na resolução do “Problema da mistura”:
    - (   ) Regra de três e resolução em sentido inverso juntamente com tentativa e erro;
    - (   ) Regra de três e construir uma tabela;
    - (   ) Resolução em sentido inverso juntamente com regra de três e construir uma tabela.

PROBLEMA DA MISTURA


4. Marcos comprou 21 litros de tinta. Ele usou água para diluir essa tinta até que a quantidade de água acrescentada fosse 30% do total da mistura. Quantos litros de água ele usou?

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

ESPAÇO DESTINADO PARA RASCUNHOS E CÁLCULOS