



Universidade Federal da Paraíba
Campus IV – Litoral Norte
Centro de Ciências Aplicadas e Educação
Departamento de Ciências Exatas
Licenciatura em Matemática

TEREZINHA ÉRICA DE LIMA COUTINHO

**Os significados das frações e o Tangram: um estudo de propostas didáticas para
os anos finais do Ensino Fundamental**

RIO TINTO/PB

2022.2

TEREZINHA ÉRICA DE LIMA COUTINHO

Os significados das frações e o Tangram: um estudo de propostas didáticas para os anos finais do Ensino Fundamental

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador (a): Profa. Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis

RIO TINTO/PB

2022.2

**Catálogo na publicação Seção de
Catálogo e Classificação**

C871s Coutinho, Terezinha Erica de Lima.

Os significados das frações e o Tangram: um estudo de propostas didáticas para os anos finais do Ensino Fundamental / Terezinha Erica de Lima Coutinho. - RioTinto, 2023.

50 f. : il.

Orientação: Cibelle de Fátima Castro de Assis. TCC (Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCAE.

UFPB/CCAE

CDU 51:37

TEREZINHA ÉRICA DE LIMA COUTINHO

Os significados das frações e o Tangram: um estudo de propostas didáticas para os anos finais do Ensino Fundamental

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientador (a): Prof. Cibelle Assis

Aprovado em: 06/06/2023

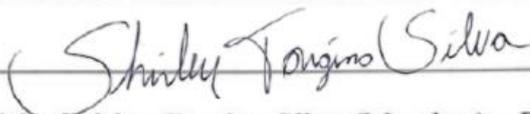
BANCA EXAMINADORA



Profa. Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis (Orientador) – UFPB/DCX



Profa. Dra. Graciana Ferreira Dias – UFPB/DCX



Profa. Ms. Shirley Targino Silva (Membro) – PPGE/UFPB

À Eloá e Eloíse, que crescerão em um mundo mais inclusivo, onde mulheres lutam para estarem onde quiserem, inclusive sendo professoras de matemática.

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, que me abençoa diariamente, me levantando nos dias difíceis e me conduzindo com as devidas lições de amor, paciência e graça divina.

Agradeço a minha família, e em especial, a minha mãe, que me incentivou por toda minha vida acadêmica, me tornando uma das primeiras pessoas da família a ter um diploma universitário. A ela também, que cuidou das minhas filhas durante todos os finais de semana, melhor que eu mesma, para que esse trabalho fosse escrito.

Agradeço ao meu esposo, que foi meu alicerce, lembrando diariamente forças que eu achava que não tinha, fazendo com que eu não desistisse. Obrigada pelo companheirismo e por não desistir de mim, principalmente nos dias de exaustão e estresse extremo.

Agradeço as minhas colegas de curso e agora de profissão: Mikaella, Nathalia, Marina, Cecília e Karolayne, que trouxeram momentos de descontração e leveza durante as aulas presenciais do curso. Nosso sexteto levará a matemática a crianças e adolescentes de maneira única e apaixonante.

Agradeço a minha banca, Shirley e Graciana, que contribuíram de forma ímpar a minha formação docente, de maneira que nem elas próprias imaginam. O mundo precisa conhecê-las.

Agradeço a minha prezada orientadora, Cibelle, pela dedicação, paciência e por todas as correções e ensinamentos, me permitindo apresentar um melhor desempenho no meu processo de formação, fazendo com que eu pudesse concluir este trabalho. Você é minha inspiração profissional.

Por último, com lágrimas nos olhos, e não menos importante, eu agradeço a duas pessoas: Eloá e Eloíse. Elas que são o motivo da minha força, garra e coragem. Agradeço a estas duas bebês, que com dois sorrisos, me dizem: Mamãe, estamos bem, estamos juntas. Vai, você consegue!

“É justo que muito custe o que muito vale.”

Santa Tereza D'Ávila

RESUMO

O objetivo desta pesquisa foi analisar propostas didáticas com o uso do Tangram para o estudo de frações voltadas para os anos finais do Ensino Fundamental. Realizada uma pesquisa que se caracteriza por ser de caráter quantitativo-qualitativo, exploratório e bibliográfico. O estudo foi organizado em 4 (quatro) etapas: estudo na literatura específica sobre os significados para as frações (etapa 1); identificação das habilidades dos Anos Finais do Ensino Fundamental voltados para o estudo das frações (etapa 2); levantamento de propostas didáticas para o estudo de frações com o Tangram a partir de TCC encontrados nos repositórios de universidades federais do Nordeste (etapa 3) e por fim, categorização das propostas de acordo com o ano escolar, o objeto do conhecimento, as habilidades e o significado de fração trabalhado (etapa 4). Os resultados revelaram que os tipos de significados de frações podem ser caracterizados por: parte/todo, fração como razão ou fração como resultado de uma divisão (quociente); entre as 7 (sete) propostas didáticas analisadas neste estudo, 5 (cinco) contemplaram o estudo de frações como representação de partes de um todo, 1 (uma) trouxe o significado de fração como razão e 1 (uma) de fração como resultado de uma divisão (quociente). Observando as habilidades, concluímos que o conjunto de atividades apresentadas pode favorecer o desenvolvimento dos estudantes de aprendizagens esperadas para o 6º ano, porém recomendamos explorar outros significados de fração além do significado parte todo. O trabalho deve ser continuado e ampliado, aplicando as propostas didáticas em turmas dos Anos Finais, analisando e acompanhando o desempenho dos alunos.

Palavras-chave: Tangram; Significados das Frações; Ensino Fundamental; Aprendizagem Matemática.

ABSTRACT

The objective of this research was to analyze didactic proposals with the use of Tangram for the study of fractions approached for the final years of Elementary School. We carried out a research characterized by being quantitative-qualitative, exploratory and bibliographical. The study was organized into 4 stages: study of the specific literature on the meanings of fractions (stage 1); identification of skills from the Final Years of Elementary School, back to the study of fractions (stage 2); survey of didactic proposals for the study of fractions with Tangram from TCC found in the repositories of federal universities in the Northeast (stage 3) and finally, categorization of proposals according to the school year, the object of knowledge, skills and the meaning of worked processing (step 4). The results reveal that the types of meanings of fractions can be characterized by part/whole, revenue as a ratio or revenue as a result of a division (quotient); Tangram is considered a didactic resource that facilitates the teaching of fractional numbers; among the 7 (seven) didactic proposals conducted in this study, 5 (five) contemplated the study of fractions as representing parts of a whole, 1 (one) brought the meaning of explanation as a reason and 1 (one) of obtaining as a result of a division (quotient). Observing the skills, we conclude that the set of activities learned can favor the development of students as expected learners for the 6th grade, however, it is recommended to explore other meanings of receiving in addition to the whole part meaning. Evidently, the work must be continued and expanded, applying to Final Years classes, analyzing and monitoring the performance of students.

Keywords: Tangram; Meanings; Fractions; Elementary School

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Método de fatoração	21
Figura 2 - Significados que a fração representa.....	23
Figura 3 - Pizza dividida em oito pedaços, sendo consumidos quatro.	23
Figura 4 - Quatro barras de chocolates divididas em 5 partes cada uma.....	24
Figura 5 – Imagem do Tangram	31
Figura 6 - Construindo e aplicando o Tangram em sala de aula.....	36
Figura 7 - Abordagem dos conceitos fracionários através do trabalho com o Tangram	37

LISTA DE QUADROS E TABELAS

Quadro 1 - Habilidades da BNCC 6º ano.....	26
Quadro 2 - Habilidades da BNCC 7º ano.....	26
Quadro 3 - Habilidade da BNCC 8º ano	26
Quadro 4 - Jogos e suas respectivas propostas pedagógicas	30
Quadro 5 - Análise de monografias e dissertações sobre o ensino de frações com o Tangram.....	33
Quadro 6 - Ano, objeto de conhecimento e habilidade referente a proposta 1	37
Quadro 7 - Ano, objeto de conhecimento e habilidade referente a proposta 2.....	38
Quadro 8 - Proposta de atividade introdutória sobre frações com o Tangram	38
Quadro 9 - Ano, objeto de conhecimento e habilidade referente a proposta 3	39
Quadro 10 - Proposta 4 de atividade sobre frações com o Tangram (parte/todo).....	39
Quadro 11 - Ano, objeto de conhecimento e habilidade referente a proposta 4	40
Quadro 12 - Proposta 5 de atividade sobre frações com o Tangram.....	41
Quadro 13 - Ano, objeto de conhecimento e habilidade referente a proposta 5.....	42
Quadro 14 - Proposta 6 de atividade sobre frações com o Tangram.....	42
Quadro 15 - Ano, objeto de conhecimento e habilidade referente a proposta 6.....	43
Quadro 16 - Proposta 7 de atividade sobre frações com o Tangram.....	43
Quadro 17 - Ano, objeto de conhecimento e habilidade referente a proposta 7.....	45

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
1.1	Apresentação da Temática.....	11
1.2	Problemática e Justificativa da Pesquisa	13
1.3	Objetivos.....	14
1.2.1	Objetivo Geral	14
1.2.2	Objetivos Específicos	15
1.4	Considerações Metodológicas.....	15
2	UM ESTUDO SOBRE FRAÇÕES	17
2.1	Frações: uma breve apresentação.....	17
2.2	Frações: definições, significados e representações	23
2.3	O estudo das frações: orientações, objetos e habilidades da BNCC	25
2.4	Dificuldades dos estudantes com o estudo das frações.....	27
2.5	As frações e o recurso didático Tangram	29
3	DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA	32
3.1	Classificação da pesquisa	32
3.2	Levantamento geral.....	33
3.3	Apresentação e análise das propostas selecionadas	35
3.3.1	Proposta 1 – Semelhança de triângulos: Fração como razão	36
3.3.2	Proposta 2 – Fração que representa uma figura do triângulo: Parte/todo	37
3.3.3	Proposta 3 – Fração como unidade temática na sequência didática	38
3.3.4	Proposta 4 – Fração com o Tangram (parte /todo).....	39
3.3.5	Proposta 5 – Comparação de Fração e suas representações	40
3.3.6	Proposta 6 – Adição e subtração de frações (parte/todo)	41
3.3.7	Proposta 7 – Fração e Porcentagem	42
3.4	Conclusão sobre as propostas selecionadas.....	44
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	46
	REFERÊNCIAS	47

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação da Temática

O estudo do objeto de conhecimento matemático frações é iniciado nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Nesses anos escolares os docentes ainda estão introduzindo o conteúdo de divisão, e o estudo das frações fica restrito apenas a ideia de “metade” ou “terço”, onde os números fracionários são vistos mais de forma oral, do que escrita.

É através do estudo das frações que os discentes se conscientizam sobre certas situações de divisões do seu cotidiano como, por exemplo, na partição de uma pizza de 12 fatias entre 4 crianças, ou um bolo repartido em 6 fatias dividido para 6 crianças. Além de observar como são esses números fracionários, os alunos precisam reconhecê-los e aprender sua escrita por extenso.

O conteúdo de fração deve ser lecionado de forma leve e dinâmica, despertando o interesse dos alunos pela temática e desmistificando a ideia de que a matemática só pode ser compreendida de forma tradicional.

Como pedagoga e atuante em turmas de até 5º ano do Ensino Fundamental, preocupo-me com a forma em que os alunos, ainda pequenos, temem qualquer assunto da disciplina de matemática e como as frações estão no topo da lista desses conteúdos. Desde muito novos alguns estudantes alimentam a ideia do quanto aprender matemática é difícil e que todos os cálculos, porcentagens, demonstrações e tudo que venha da matemática é complicado de assimilar e nada do que os professores ensinam vai ser levado em consideração no seu futuro profissional. No estudo das frações principalmente, eles questionam, por exemplo, “qual profissão vai exigir que eu saiba dividir frações?”. Por inúmeras vezes nos deparamos com questionamentos dos alunos nesse quesito e um dos principais fatores que ocasionam essas reclamações é a falta de uma boa base de conhecimento matemático. Porém, como professores, observamos que também falta motivação dos discentes em aprender a disciplina. É nossa função trazer algo que faça com que eles entrem no conteúdo, tendo interesse. “Por que não aprender matemática brincando, colorindo e recortando, como acontece na disciplina de Artes?”.

Para que essa resistência dos alunos possa ser cessada, é necessário que eles entendam a real razão de se estudar matemática. Segundo o BRASIL (2001), a aprendizagem matemática desenvolve o raciocínio lógico, senso crítico, interpretação, criatividade, capacidade de fazer análises, resolução de problemas, produção de estratégias. Algumas pessoas admiram, se

espelham e se tornam professores de matemática justamente por se apaixonar por uma ciência desafiadora, objetiva, clara e exata.

Encontramos matemática na natureza, na sociedade, na cidade, no campo, na nossa casa, na divisão de fatias de pizza. Não devemos nos apegar a crença de que a matemática é uma forma de resolver problemas, mas sim de que ela nos ajuda diariamente nas nossas ações, mesmo as mais simples. O ser humano precisa contar, medir, ordenar, somar, diminuir, dividir, multiplicar, inclusive fracionar, inúmeras vezes ao longo do dia. Nem sempre encontrar formas de ajudar os alunos a gostarem da matemática é uma tarefa fácil. É preciso uma atenção também para fora da sala de aula, para o que corre no dia a dia, mostrando que a matemática está ao nosso redor.

Em experiências adquiridas em sala de aula, percebi que alguns alunos apresentam uma insuficiência matemática quanto ao conteúdo de frações quando iniciam o 6º ano do Ensino Fundamental (Anos Finais). Carências essas que foram trazidas desde o final dos anos iniciais (5º ano). A procura por um ensino dinâmico e atrativo desde essa fase inicial alimenta uma esperança de que, futuramente, nos Anos Finais, esse temor dos alunos pela matemática não exista mais. Como futura professora dos anos finais do Ensino Fundamental, atrevo-me a buscar formas de garantir que essa situação seja revertida.

Acreditamos que um atrativo para os discentes é a ludicidade, onde a disciplina não perde o foco de ensino, mas desenvolve uma metodologia centrada no prazer de aprender brincando. O estudo das frações pode vir a ser mais prazeroso para os alunos com o uso de recursos didáticos ou materiais manipulativos, como o material didático Tangram.

Temos a consciência que existem escolas que não disponibilizam materiais manipulativos como o material dourado ou o ábaco para que os alunos vejam a matemática fora do quadro branco e aprendam de outras formas. Algumas escolas priorizam o método tradicional, onde as aprovações são realizadas somente por meio de provas escritas e não levam em consideração o tempo de aprendizagem e a maneira como cada discente aprende, regredindo com o conhecimento que poderiam ser construídos.

O papel do professor é de extrema importância para que o aluno se sinta confortável em sala de aula e conseqüentemente seu ensino seja completo. A metodologia tradicional onde o professor é o narrador, e o aluno o ouvinte, tendo a função de memorizar tudo que foi ensinado, não interagindo e nem justificando seu entendimento sobre o conteúdo, não vem contribuindo muito para uma aprendizagem com significado.

1.2 Problemática e Justificativa da Pesquisa

Alguns materiais manipuláveis despertam o interesse dos discentes desde o Ensino Infantil e podem continuar sendo úteis na aprendizagem por toda vida acadêmica, seguindo dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental ou Ensino Médio. Além de abrir um leque de habilidades no início da vida escolar como socialização, diminuição da ansiedade, concentração, foco e percepção espacial, os usos de materiais manipuláveis, também continuam agregando ao discente o estudo de figuras planas, por meio de sequências didáticas e atividades que facilitem a aprendizagem.

Levando em consideração a forma tradicional que a matemática é ensinada, esses materiais ajudam a aumentar o desejo de aprender e possibilitam uma melhor compreensão em áreas específicas, como o ensino de Frações. Quando utilizados de forma consciente e com um devido planejamento para determinadas séries e conteúdos, os materiais manipuláveis despertam o gosto pela matemática, vencendo preconceitos e auxiliando no processo aprendizagem.

Entre os materiais manipuláveis, o Tangram é uma das possibilidades de trabalhar com o conteúdo de frações no Ensino Fundamental. Smole e Diniz (2016, p. 106), ressaltam que a partir do 4º ano, o Tangram pode ser utilizado para trabalhar a conceituação de frações e operações entre frações. Contribuindo de forma prazerosa e interessante, o Tangram constrói e fixa o conceito de fração e pode ser criado até pelos próprios alunos com diversos materiais presentes no dia a dia, como papelão por exemplo, fazendo com que ele seja um jogo completamente acessível aos alunos e disponibilizado nas escolas. O Tangram permite aos alunos uma abordagem mais concreta dos conteúdos através da manipulação das figuras planas que servem de base para a construção do conhecimento do conteúdo como a comparação, equivalência e o próprio conceito de fração.

De acordo com a proposta de Van de Walle (2009, p.326), “um dos melhores caminhos para introduzir o conceito de fração é através de determinadas tarefas de compartilhamento”. Pois, a ideia de partes fracionárias é fundamental para um forte desenvolvimento dos conceitos de fração que deve ser explorada com tarefas adicionais, uma vez que, dessa forma ajudará os alunos a usarem mais os termos fracionários, levando-os a contar as partes fracionárias e descobrir seus significados.

Toledo e Toledo (1997) afirmam que, na introdução dos números racionais na forma fracionária é importante fazer com que os estudantes experimentem manipular materiais

variados (repartição de figuras impressas em folhas de ofício ou em cartolinas, etc.), ao contrário de apenas colori-las. Com essa prática, além de dividir em partes iguais, os alunos poderão comparar as partes, verificar seus resultados e averiguar através da recomposição de figuras, se está completa ou não, tirando suas próprias conclusões.

Cavaliere (2005) destaca que as frações (propriamente ditas) são pouco usadas no dia a dia e por isso são esquecidas, fazendo com que poucas pessoas saibam realizar cálculos com frações, mesmo que esse assunto já tenha sido estudado em séries iniciais. Ainda, segundo Cavaliere (2005, p. 31) “O pouco uso das frações no cotidiano é uma das razões pelas quais as crianças têm dificuldades com as frações porque diariamente não são oferecidas oportunidades para que as crianças se familiarizem com essa ideia”.

Utilizando o Tangram como apoio a esses diversos conteúdos matemáticos desde o início dos anos escolares, os próprios discentes conseguirão assimilar o conteúdo de forma mais clara e familiar, adaptando o material didático a diversos assuntos estudados. No caso do ensino de frações, a utilização do Tangram de forma contínua complementa a experiência adquirida pelos alunos, desenvolvendo habilidades e despertando interesses.

No entanto, na BNCC (2018) dos anos finais do Ensino Fundamental, há uma menção explícita para o estudo das frações considerando seus diferentes significados: parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. Nos questionamos se é possível ter propostas didáticas com uso de Tangram que contemplem esses significados.

Acreditamos que essa problemática justifica o levantamento e a categorização de propostas de ensino com o Tangram envolvendo o estudo das frações largamente difundidas nos estudos e pesquisas em Educação Matemática. Como resultados, produziremos um recurso “síntese” para o professor de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental para trabalhar com as frações juntamente com as habilidades da BNCC.

1.3 Objetivos

Para a realização desta pesquisa delineamos o seguinte objetivo geral:

1.2.1 Objetivo Geral

Analisar propostas didáticas com o uso do Tangram para o estudo de frações voltadas para os anos finais do Ensino Fundamental.

1.2.2 Objetivos Específicos

Para o alcance do objetivo geral apresentado, seguiremos os seguintes objetivos específicos:

- Levantar na literatura os significados para as frações;
- Apresentar as habilidades do Ensino Fundamental voltados para o estudo das frações;
- Realizar um levantamento de propostas didáticas para o estudo de frações com o Tangram;
- Categorizar as propostas de acordo com o ano escolar, o objeto do conhecimento, as habilidades e o significado de fração trabalhado.

1.4 Considerações Metodológicas

A realização desta pesquisa ocorreu em duas etapas. A primeira etapa foi dedicada ao estudo bibliográfico prévio sobre frações. A segunda etapa tratou do levantamento, categorização e organização das propostas didáticas para o ensino de frações com o uso do Tangram.

Na etapa 1, realizamos um estudo sobre o conceito e os diversos significados das frações, sobre as operações com números fracionários e suas representações geométricas. Realizamos também um levantamento na BNCC sobre os objetos de conhecimento e as habilidades esperadas em torno do estudo das frações para o Ensino Fundamental. Esse estudo realizado na primeira etapa permitiu a análise e a categorização das propostas didáticas previstas para a etapa 2. Na etapa 2, iniciamos pelo levantamento de Trabalhos de Conclusão de Curso - TCC de cursos de Licenciatura em Matemática que abordam o uso do Tangram em proposta de ensino em matemática. Em seguida, passamos a fase da seleção e categorização das propostas para ilustrar as possibilidades de uso do Tangram no estudo das frações para os anos finais do Ensino Fundamental.

1.5 Estrutura do TCC

Este Trabalho de Conclusão de Curso – TCC está organizado em quatro capítulos, considerando essa Introdução como o capítulo 1. No Capítulo 2, apresentamos um estudo sobre as frações: definição, tipos e significados das frações; objetos do conhecimento e habilidades do Ensino Fundamental segundo a BNCC; dificuldades dos alunos na aprendizagem com

frações, e por fim, uma apresentação do recurso Tangram. No Capítulo 3, traremos o resultado da pesquisa bibliográfica realizada no levantamento das propostas didáticas que consideram o Tangram como recurso trazendo as fontes consultadas e as propostas selecionadas. Em seguida, apresentamos o resultado da análise dessas propostas categorizando aquelas selecionadas de acordo com o ano escolar, o objeto do conhecimento, as habilidades e o significado de fração contemplado na proposta. No Capítulo 4 faremos as considerações finais do trabalho. Por fim, listamos as referências utilizadas na pesquisa.

2 UM ESTUDO SOBRE FRAÇÕES

Este capítulo se dedica a apresentação do estudo sobre frações que realizamos. Este estudo faz referência a etapa 1 delineada para esta pesquisa que, além de solidificar nosso conhecimento sobre o objeto matemático frações, também teve como objetivo iluminar a análise e a categorização das propostas didáticas com uso do Tangram previstas para a etapa 2.

Dessa forma, apresentaremos, inicialmente, os números fracionários e o que eles representam os elementos de uma fração, os tipos de frações, casos das frações equivalentes, simplificadas e irredutíveis. Veremos também, exemplos das operações com frações e sobre o conjunto dos números racionais. Em seguida, apresentamos os objetos do conhecimento e habilidades do Ensino Fundamental segundo a BNCC, dificuldades dos alunos na aprendizagem com frações, e por fim, uma apresentação do recurso didático Tangram.

2.1 Frações: uma breve apresentação

Os números fracionários surgiram da necessidade do homem de realizar medições que não eram possíveis apenas com os números naturais. Assim como o surgimento dos números naturais está associado à necessidade do homem de contar os objetos, os números fracionários estão associados à necessidade de dividir.

Segundo Boyer (2012), não se pode afirmar nada sobre a origem da matemática, seja sobre aritmética ou geometria. Afinal, seu princípio é mais antigo do que a arte de escrever. Assim, não se podem apontar épocas e datas exatas pela falta de registros das civilizações antigas. Isso não é diferente com as frações.

Berlinghoff e Gouvêa (2010) dizem que as frações fazem parte da matemática há 4 mil anos ou mais. Mas não é possível precisar quando elas surgiram ou quem as descobriu, novamente porque os registros são poucos e talvez as primeiras ideias sobre frações nem tenham sido registradas por falta de meios para fazer isso.

Em épocas anteriores, quando as pessoas precisavam considerar partes de objetos, eles eram quebrados – algumas vezes literalmente – em pedaços menores, e então os pedaços eram contados (mesmo nossa palavra “fração”, com a mesma raiz de “fratura” e “fragmento”, sugere a quebra de algo). (BERLINGHOFF e GOUVÊA, 2010, p. 87)

Assim, a ideia de fração associada a fragmento remete a uma ideia de que, tudo que pode ser “repartido” é chamado de inteiro, e se caso esse objeto for repartido em partes iguais,

cada parte pode ser representada por meio de frações. As frações correspondem a uma representação das partes de um todo e cada parte igual é uma fração do inteiro.

A fração também representa uma divisão com termos chamados de numerador (dividendo) e denominador (divisor). Em frações onde os denominadores são iguais, a maior fração será aquela em que o numerador é maior. Caso as frações tenham o mesmo numerador, a maior fração será a que possui menor denominador. Toda fração é uma divisão, dessa forma, a fração que apresentar um resultado maior, será a maior fração.

Por definição, um número é racional quando pode ser escrito da forma P/Q onde Q é diferente de 0. Assim, os números inteiros (positivos, negativos e o zero), os numerais decimais finitos (cujo o valor pode se determinar) e qualquer dízima periódica (números decimais em que, a partir de alguma casa decimal, um algarismo ou grupo de algarismos passa a se repetir infinitamente) são representantes do conjunto de números fracionários ou racionais. No caso dos números inteiros, qualquer um deles pode ser escrito na forma de fração: para tanto, basta dividi-lo por 1, pois todo número dividido por 1 é igual a si mesmo. Exemplos dos números decimais finitos, na forma fracionária, são aqueles cujo denominador é 10 ou potência de 10: $1/10$; $5/100$, $3/1000$, etc. Para encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica, podemos também utilizar um método prático. Quando a dízima for simples, o numerador será igual a parte inteira com o período menos a parte inteira, e no denominador, a quantidade de "noves" igual ao número de algarismo do período.

As frações também podem ser do tipo próprias, impróprias, aparentes e mistas. As frações próprias são maiores que um inteiro, pois seu numerador é maior que o denominador. Um exemplo de fração própria é $\frac{2}{5}$, lemos dois quintos, pois o seu numerador é diferente de zero e é menor que o denominador.

As frações são impróprias quando o numerador é maior que o denominador. Exceto em caso de múltiplos. Um exemplo de fração imprópria é $\frac{7}{4}$, lemos sete quartos.

Uma fração é chamada aparente quando o resultado da divisão é um número inteiro. Um exemplo de fração aparente é $\frac{6}{3}$, lemos seis terços, pois o numerador é múltiplo do denominador. Se dividirmos o numerador (seis) pelo denominador (três) o resultado será um número inteiro (dois). Consideremos que ela apenas tem a aparência de fração.

A fração é considerada mista quando cuja representação possui uma parte inteira e uma parte fracionária. Um exemplo de fração mista é $2\frac{8}{9}$, lemos dois inteiros e oito nonos. A fração é chamada de mista pois temos a representação de um número inteiro e, ao lado dele, a parte

não inteira da fração. Pelo fato do número misto se tratar de uma parte inteira e uma parte fracionária, não há a possibilidade de trabalhá-lo como parte de um todo, pois no próprio número já temos a parte inteira (maior que 1). Logo, sempre transformaremos o número misto em frações impróprias.

Entendemos, primeiramente, que a fração “dois inteiros e oito nonos” significa que temos duas partes inteiras mais oito nonos.

$$2\frac{8}{9} = 2 + \frac{8}{9}$$

Para fazer a conversão da fração mista exemplificada, em uma fração imprópria (quando o numerador é maior que o denominador), iniciamos encontrando o Mínimo Múltiplo Comum e obtemos $\frac{(2 \cdot 9) + 8}{9}$. O novo numerador é encontrado multiplicando-se a parte inteira da parte fracionária, e somando-se o resultado encontrado com o numerador da parte fracionária. Já o denominador será o mesmo da parte fracionária. Exemplo de conversão:

$$2\frac{8}{9} = \frac{(2 \cdot 9) + 8}{9} = \frac{26}{9}$$

Lemos o resultado de conversão: vinte e seis nonos (fração imprópria). No exemplo citado, as frações $2\frac{8}{9}$ e $\frac{26}{9}$ são equivalentes. Uma é a representação dessa quantidade como uma fração mista, e a outra é a sua representação como uma fração imprópria.

Entretanto, podemos também transformar a fração imprópria em número misto. Nesse caso o numerador é maior que o denominador, então veremos quantas partes do denominador consegue-se colocar no numerador. Tomemos o exemplo anterior:

$$\frac{26}{9} = \frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{8}{9} = 1 + 1 + \frac{8}{9} = 2 + \frac{8}{9} \text{ ou } 2\frac{8}{9}$$

Logo, percebemos que cabem duas partes inteiras do denominador (9) no numerador (26).

As frações também podem ser ditas equivalentes, simplificadas ou irredutíveis. As frações equivalentes são aquelas que representam o mesmo valor ou mesmo número racional. Para encontrarmos a fração equivalente, basta multiplicar o seu numerador e o denominador da fração por um mesmo número. Por exemplo, para a fração doze dezesseis avos, uma fração equivalente foi obtida através da multiplicação de seis (numerador) e oito (denominador) por 2. As frações seis oitavos e doze dezesseis avos são chamadas de frações equivalentes.

$$\frac{6 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{12}{16}$$

Também é possível encontrar frações equivalentes dividindo-as pelo mesmo número. Dessa forma, chamamos de fração simplificada. Por exemplo, para a fração vinte e dois quarenta e oito avos, uma vez dividida por 2, temos como resultado a fração onze vinte e quatro avos. Diante desse resultado não podemos mais continuar dividindo a fração pelo mesmo número.

$$\frac{22 : 2}{48 : 2} = \frac{11}{24}$$

Quando o resultado da simplificação não pode ser mais simplificado, chamamos de fração irredutível.

Válido nos números racionais, as operações matemáticas que envolvem fração possuem os seguintes procedimentos:

Adição e subtração: Se os denominadores das frações forem iguais, preservamos os denominadores e realizamos a operação indicada (somando ou subtraindo) os numeradores.

Exemplo de adição com denominadores iguais:

$$\frac{2}{9} + \frac{6}{9} + \frac{8}{9} = \frac{16}{9}$$

No exemplo acima, as frações dois nonos, seis nonos e oito nonos possuem denominadores iguais (nove) então basta apenas somar os numeradores e o denominador permanece o mesmo. O resultado lê-se dezesseis nonos.

Exemplo de subtração com denominadores iguais:

$$\frac{12}{7} - \frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

No exemplo acima, as frações doze sétimos, cinco sétimos e dois sétimos possuem denominadores iguais (sete). Nesse caso subtraímos apenas os numeradores e o denominador é preservado. O resultado lê-se cinco sétimos.

Caso os denominadores sejam diferentes, para resolver a fração é necessário torna-los iguais. Precisamos encontrar a fração equivalente, onde os denominadores serão os mesmos e efetuaremos o processo feito anteriormente. Tomemos o exemplo de soma de frações com denominadores diferentes a seguir:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} =$$

Primeiramente, é necessário encontrar o MMC (Mínimo Múltiplo Comum) entre os denominadores (dois, quatro e seis) das frações. O MMC corresponde ao menor número inteiro positivo, diferente de zero, que é múltiplo ao mesmo tempo dos três denominadores citados. Para encontrar os múltiplos de um número, basta multiplicá-los pela sequência dos números naturais.

Múltiplos de 2: {0,2,4,6,8,9,10,12,...}

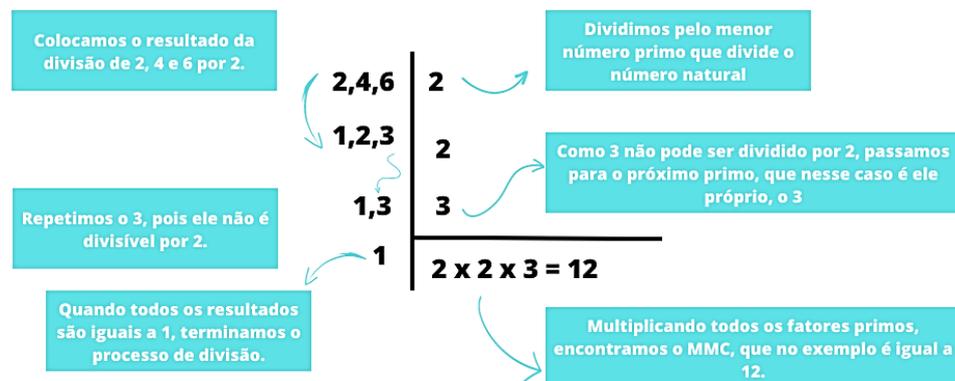
Múltiplos de 4: {0,4,8,12,16...}

Múltiplos de 6: {0,6,12,18...}

Observando os conjuntos dos números acima, o menor múltiplo comum presente nos três conjuntos de múltiplos é o 12. Portanto, dizemos que o 12 é o mínimo múltiplo comum (MMC) de 2, 4 e 6.

Podemos também encontrar o MMC com o método da fatoração, decompondo os números em fatores primos. Exemplo de fatoração (figura 1):

Figura 1 - Método de fatoração



Fonte: Adaptado da Internet

Disponível em: < <https://www.todamateria.com.br/mmc-minimo-multiplo-comum/> > Acesso em: 05 de mai. de 2023.

No método citado acima, dividimos os elementos por números primos, ou seja, números naturais divisíveis por 1 e ele mesmo.

Assim, dividiremos 12 pelos respectivos denominadores (6,4,2). Multiplicaremos o resultado encontrado (6,3,2) pelo numerador (1,3,5), respectivamente, da primeira fração. O resultado será o cálculo do MMC dividido pelo denominador e multiplicado pelo numerador, o mesmo procedimento será feito com as demais frações.

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{6 + 9 + 10}{12}$$

Obtemos:

12 dividido por 2 vezes $1 = 6$

12 dividido por 4 vezes $3 = 9$

12 dividido por 6 vezes $5 = 10$

Como já temos o denominador encontrado, podemos somar normalmente os numeradores (6, 9 e 10).

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{6 + 9 + 10}{12} = \frac{25}{12}$$

Lemos: vinte e cinco doze avos.

Multiplicação de frações

Multiplicamos o numerador com numerador e denominador com denominador.

Exemplo de multiplicação de frações:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{15} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 15} = \frac{10}{45}$$

Multiplicamos o numerador da primeira fração (dois) com o numerador da segunda fração (cinco). Em seguida, multiplicamos os denominadores (três e quinze). Lemos: dez quarenta e cinco avos.

Divisão de frações

Para resolvermos a divisão de frações, repetimos a primeira fração e multiplicamos pelo inverso da segunda. Para o exemplo a seguir, repetimos a primeira fração (dois terços) resolveremos, em seguida, a operação de multiplicação, como explicado no exemplo “multiplicações de frações”, acima. Multiplicaremos o numerador da primeira fração (dois), pelo numerador da segunda fração (cinco). Em seguida, multiplicaremos os denominadores (três e sete). Lemos o resultado: dez vinte e um avos.

$$\frac{2}{3} : \frac{7}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$$

2.2 Frações: definições, significados e representações

A definição da fração pode ser entendida como a forma pela qual expressamos uma quantidade por meio da razão/divisão de dois números inteiros. O significado da fração é determinado pelas condições impostas, por exemplo, no enunciado de um problema em uma situação particular. Para Smole e Diniz (2016, p.25), os significados mais importantes sobre as representações do que é uma fração são: 1) fração como parte todo; 2) fração como razão e 3) fração como resultado de uma divisão (quociente) (Figura 2).

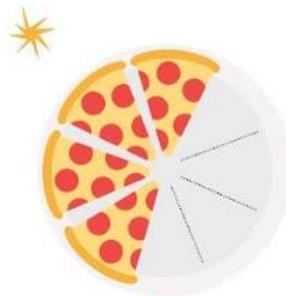
Figura 2 - Significados que a fração representa



Fonte: Adaptado de Smole e Diniz (2016)

No caso do significado de fração como parte todo (caso 1), temos o exemplo da relação da pizza (inteiro) e suas fatias (partes iguais). Ao cortarmos uma pizza em oito fatias iguais, cada parte representa um oitavo de pizza. Caso sejam consumidas quatro fatias, restam quatro, das oitos fatias totais, lemos: quatro oitavos (figura 3):

Figura 3 - Pizza dividida em oito pedaços, sendo consumidos quatro.



Fonte: Da autora

Observamos no exemplo citado, que a fração que representa a pizza completa ($\frac{8}{8}$) e a fração que representa a pizza consumida ($\frac{4}{8}$) são equivalentes.

No caso do significado de fração como razão (caso 2), temos o exemplo clássico de uma situação onde se utiliza uma escala. A escala pode ser compreendida como a razão entre o tamanho da representação de um objeto e o tamanho do objeto real. Por exemplo, em uma planta de uma sala de estar onde foi usada uma escala 1 para 50, 1:50 ou $\frac{1}{50}$. Neste caso, a ideia de razão indica que cada centímetro no desenho representa 50 centímetros real. Como exemplo, temos o seguinte problema: um dos contornos do chão da sala de estar de Júlia tem 4 cm de comprimento no desenho. Qual o comprimento, em metros, da parede que fica sobre esse contorno no quarto real?

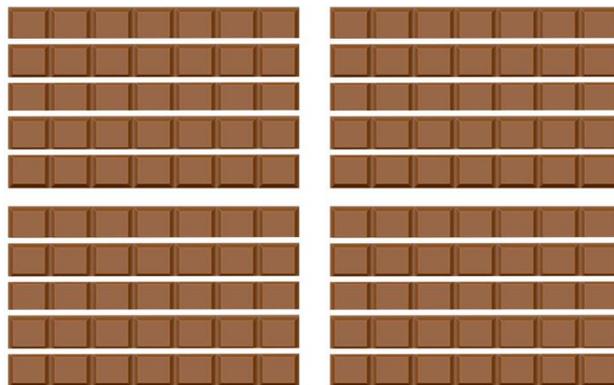
Chamaremos o comprimento de m . Interpretando tal escala como sendo a razão entre 1 a 50, devemos determinar a medida real de um contorno de 4 centímetros no quarto. Pelos cálculos a seguir, temos que o comprimento dessa parede é 200 centímetros ou 2 metros.

$$\frac{1}{50} = \frac{4}{m} \rightarrow 1 \cdot m = 50 \cdot 4 \rightarrow m = 200 \text{ cm}$$

O centímetro equivale a dividir 1 metro em 100 partes iguais, ou seja, 200 cm equivalem a 2 metros.

No caso da fração como quociente, significado de fração como resultado de uma divisão (caso 3), o numerador é dividido pelo denominador. Um exemplo clássico deste caso, é o da divisão das barras de chocolate dado pelo seguinte enunciado: Lucas gostaria de dividir igualmente 4 barras de chocolate para 5 pessoas. Uma forma de resolver o problema é dividir cada uma das barras, em 5 pedaços (Figura 4).

Figura 4 - Quatro barras de chocolates divididas em 5 partes cada uma.



Fonte: Adaptado de FIGUEIREDO; MOURA; ARAUJO (2018)

O que nos leva ao total de 20 pedaços para dividir entre 5 pessoas. Logo, cada pessoa ganhará 4 pedaços, ou seja, $\frac{4}{5}$ de uma barra de chocolate.

Na situação da pizza (caso 1), temos a contagem de pedaços iguais, produzindo uma facilidade da regra da soma das frações com denominadores iguais. Nesse exemplo, temos a partição de um todo em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada com $1/n$. Na situação das barras de chocolate, (caso 3) a fração indica uma divisão e seu resultado. Nestas situações de fração como quociente, temos duas variáveis, sendo que uma corresponde ao numerador e a outra ao denominador.

2.3 O estudo das frações: orientações, objetos e habilidades da BNCC

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018) sobre a Matemática no Ensino Fundamental, as habilidades propostas em cada unidade temática precisam ser detalhadas a cada ano, porém essa compreensão não pode acontecer de maneira fracionada.

Em todas as unidades temáticas, a delimitação dos objetos de conhecimento e das habilidades considera que as noções matemáticas são retomadas, ampliadas e aprofundadas ano a ano. No entanto, é fundamental considerar que a leitura dessas habilidades não seja feita de maneira fragmentada. A compreensão do papel que determinada habilidade representa no conjunto das aprendizagens demanda a compreensão de como ela se conecta com habilidades dos anos anteriores, o que leva à identificação das aprendizagens já consolidadas, e em que medida o trabalho para o desenvolvimento da habilidade em questão serve de base para as aprendizagens posteriores. (Brasil, 2018, p. 276).

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018, p. 280), prevê a introdução de conceitos elementares sobre fração já a partir do 2º ano do Ensino Fundamental, sendo aprofundados gradativamente até o 8º ano do Ensino Fundamental. Ou seja, a BNCC propõe uma organização na qual o ensino de frações deverá ser aprofundado gradualmente a cada ano.

Entre os objetos de conhecimento da BNCC para o 6º ano, na unidade temática Números, sobre o estudo das Frações, temos: significados parte/todo, quociente (fração que indica uma divisão e seu resultado), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações. As habilidades relacionadas a esse objeto de conhecimento para o 6º ano estão no Quadro 1:

Quadro 1 - Habilidades da BNCC 6º ano

(EF06MA07)	Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
(EF06MA08)	Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
(EF06MA09)	Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
(EF06MA10)	Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

Fonte: BNCC – Brasil (2018)

Entre os objetos de conhecimento da BNCC para o 7º ano, na unidade temática Números, sobre o estudo das Frações, temos: Fração e seus significados como parte de inteiros, resultados da divisão, razão e operador (fração como fator multiplicativo). As habilidades relacionadas a esse objeto de conhecimento para o 7º ano estão no Quadro 2:

Quadro 2 - Habilidades da BNCC 7º ano

(EF07MA08)	Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
(EF07MA09)	Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

Fonte: BNCC – Brasil (2018)

Entre os objetos de conhecimento da BNCC para o 8º ano, na unidade temática Números, sobre o estudo das Frações, temos dízimas periódicas: fração geratriz. A habilidade relacionada a esse objeto de conhecimento para o 7º ano é (Quadro 3):

Quadro 3 - Habilidade da BNCC 8º ano

(EF08MA05)	Reconhecer e utilizar procedimentos para obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.
-------------------	---

Fonte: BNCC – Brasil (2018)

Entre os objetos de conhecimento da BNCC para o 9º ano, não encontramos unidades temáticas relacionadas a Fração. Neste ano escolar, os alunos se deparam com números fracionários apenas como potência com expoentes, efetuando cálculos, presente na habilidade

(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários” (BRASIL, 2017, p. 315).

Assim, concluímos que apenas no 6º ano e 7º ano há menção dos significados das frações a serem trabalhadas, especificamente nas habilidades: EF06MA07 o significado de ideias de partes de inteiros e resultado de divisão; na EF07MA08 o significado de ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador; e na EF07MA09, o significado de associação entre razão e fração.

Os objetivos e as habilidades da BNCC são aptidões desenvolvidas ao longo de cada etapa de ensino e que contribuem para o desenvolvimento das competências gerais e específicas da Base. As habilidades referentes a cada série vão se conectando e se complementando ano a ano.

A leitura dos objetos de conhecimento e das habilidades essenciais de cada ano nas cinco unidades temáticas permite uma visão das possíveis articulações entre as habilidades indicadas para as diferentes temáticas. Entretanto, recomenda-se que se faça também uma leitura (vertical) de cada unidade temática, do 6º ao 9º ano, com a finalidade de identificar como foi estabelecida a progressão das habilidades. Essa maneira é conveniente para comparar as habilidades de um dado tema a ser efetivadas em um dado ano escolar com as aprendizagens propostas em anos anteriores e também para reconhecer em que medida elas se articulam com as indicadas para os anos posteriores, tendo em vista que as noções matemáticas são retomadas ano a ano, com ampliação e aprofundamento crescentes. (Brasil, 2018, p. 298-299).

Segundo a BNCC, a unidade temática Números tem, no pensamento numérico, seu maior significado, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar os objetos e de interpretar quantidades. Os alunos desenvolvem ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. No estudo desses campos numéricos, segundo a BNCC (BRASIL, 2018), devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações.

2.4 Dificuldades dos estudantes com o estudo das frações

Sobre o ensino das frações Bertoni (2009, p. 12) destaca que este conteúdo “tem sido um assunto temido, mal compreendido, mal aprendido. [...] há muita coisa poluindo e escondendo o cristal puro que fração é: um número. Uma ideia Matemática associada à quantificação.” Como consequência, as dificuldades de aprendizagem existem e estão presentes diariamente na rotina dos professores e de seus alunos.

De acordo com Santos (2010), pesquisas realizadas no âmbito escolar apontam que a grande maioria dos professores parte diretamente para a aplicação de regras e/ou operações com

frações, sem levar em consideração a construção do conhecimento lógico-matemático do aluno. E que a maioria dos livros didáticos aborda as frações com bastante rigidez, ou seja, apresentam inicialmente o conceito de fração e a sua representação simbólica e logo em seguida as operações são mecanicamente trabalhadas.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) sobre o ensino de fração tem-se que:

[...] na vida cotidiana o uso de frações limita-se a metades, terços, quartos e mais pela via da linguagem oral do que das representações. A prática mais comum para explorar o conceito de fração é a que recorre a situações em que está implícita a relação parte-todo; é o caso das tradicionais divisões de um chocolate, ou de uma pizza, em partes iguais (BRASIL, 1997, p. 68).

Para Bertoni (2009, p. 60), a fração como resultado de divisão é "um aspecto pouco explorado na escola." Poucos alunos conseguem perceber que as frações (como partes de uma unidade) podem ser vistas como resultados de divisões de um certo número de unidades em partes iguais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática destacam que:

Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número [...] (BRASIL, 1998, p.100).

Refletimos, mediante a citação dos PCN (BRASIL, 1998), que o ensino das frações necessita ser amplo e abordado de maneira significativa, para que não haja complicações no processo de aprendizagem do aluno, evitando a pouca compreensão.

Segundo Campos, Pires e Curi (2001), o propósito inicial do ensino aprendizagem dos números racionais é mostrar aos alunos que os números naturais, por si só, não são capazes de solucionar todas as situações problema que lhes são propostos, como por exemplo, uma divisão e seu resultado ou a probabilidade de um evento acontecer, fazendo com que os alunos percebam nos números racionais a solução para eventuais situações. Ainda de acordo com os PCN (BRASIL, 1998), várias são as barreiras encontradas no aprendizado das frações. Sendo assim, os principais obstáculos que os alunos acabam enfrentando por pensarem nos números racionais como sendo números naturais são:

- Diversas escritas fracionárias podem representar um único número racional, por exemplo $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots$;

- A comparação entre os números racionais: na prática habitual dos números naturais os alunos entendem que $5 > 4$, já comparando os números racionais eles terão que compreender que $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}, \dots$;
- No conjunto dos números naturais, ao multiplicar um número natural por outro (que seja diferente de 0 ou 1), o resultado sempre seria maior que as parcelas efetuadas, já no conjunto dos racionais há uma mudança, ao multiplicar, por exemplo, $\frac{1}{2}$ por 4, o resultado não será maior que 4.

A simples “transferência” das propriedades ou características de um tipo de número para outro pode tornar-se um “problema” no processo de aprendizagem das frações (CAMPOS; SILVA; PIETROPAOLO, 2009). Apresentar o conteúdo de maneira variada, em situações do cotidiano, presentes no dia a dia, é uma forma de incentivar o aprendizado, proporcionando os estudantes a realizar as mesmas atividades com números naturais.

Para Llinares e Sánchez (1988), a constatação do baixo rendimento conceitual e a pouca destreza com frações leva a questionar o nível apropriado para o seu aprendizado. A esse respeito, Freundenthal (1973 apud LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 26) diz que “as frações complicadas e as operações com elas são invenções dos professores que só podem entendê-las em um nível superior”.

2.5 As frações e o recurso didático Tangram

Atuando no processo de apropriação do conhecimento, os recursos didáticos possuem um papel de destaque na vida dos discentes permitindo que eles possuam um enriquecimento criativo, estimulando a interação e comunicação nas relações interpessoais, pois a ludicidade é uma peça fundamental no processo de desenvolvimento do ser humano.

De acordo com as vivências adquiridas em sala de aula, notamos que os jogos pedagógicos podem trazer benefícios significativos na aprendizagem dos discentes, visto que o ato de brincar transforma a sala de aula em um ambiente familiar e social, fazendo com que os alunos aliviem suas frustrações e tensões, expressem suas angústias e conflitos interiores e expressem suas fantasias e sonhos por meio dos jogos.

O ambiente se torna mais rico e produtivo quando algo novo e interessante é proposto pelo professor e novos conceitos são adquiridos pelos alunos. Porém, um jogo precisa ter uma função pedagógica. Entregar um jogo qualquer e pedir que os alunos “só brinquem” sem um

contexto ou uma referência de uso, não traz benefícios para a aprendizagem. É preciso ter um valor pedagógico presente em cada atividade e respeitar o currículo, promovendo socialização, cooperação e trabalho em equipe.

O caráter lúdico dos jogos matemáticos influencia e estimula o aluno a aprimorar suas habilidades na disciplina, desenvolvendo concentração, criticidade, autoconfiança, contribuindo na sua formação matemática. Para Matos e Andrade (2013), o uso de jogos tem grande importância nas aulas de Matemática, uma vez que possibilita uma interação espontânea entre os estudantes e o professor e a aprendizagem ocorre naturalmente, sem dificuldades.

No quadro 4 temos exemplos de jogos que podem ser trabalhados em sala de aula sobre o estudo de frações, em diversas séries, auxiliando no processo de aprendizagem sobre o conceito de fração e representação fracionária.

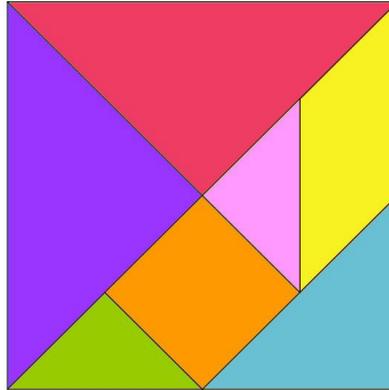
Quadro 4 – Jogos e suas respectivas propostas pedagógicas

JOGO	PROPOSTA DE ESTUDO DAS FRAÇÕES
Dominó de frações	Explorar o conceito de fração, a representação fracionária, a leitura e a escrita da mesma.
Papa Tudo das frações	Identificar frações equivalentes.
Trilha das frações	Compreender o conceito de fração fracionária, interpretar problemas com o conceito de frações e trabalhar raciocínio lógico.
Stop das frações	Explorar as quatro operações, potenciação e radiciação de frações e simplificações.
Memória as frações	Explorar as operações de adição e subtração com o mesmo denominador, simplificação e representação fracionária.

Fonte: KRANZ e OLGIN (2001)

Além dos jogos citados no quadro acima, temos o Tangram. O Tangram (Figura 5) é um quebra-cabeça chinês surgido na China, formado por 7 peças, onde juntas constituem objetos de diversos formatos e formas geométricas distintas. Temos 2 triângulos grandes, 1 triângulo médio, 2 triângulos pequenos, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Este material didático pode ser usado em diversas áreas, sendo destaque na matemática, pela sua simplicidade de construção e aplicação. Pode ser usado por todas as faixas etárias.

Figura 5 – Imagem do Tangram



Fonte: Espaço Educar (2023)

O material didático Tangram pode ser usado nas aulas de Matemática tanto para introduzir o conceito e as operações com frações, como para estudar polinômios, explorar o conceito de área, resolver problemas envolvendo o Teorema de Pitágoras, como também é interessante para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Piccinin e Martins (2014, p. 17), no entanto, destacam que o uso do Tangram não precisa ficar restrito apenas ao uso costumeiro, inerente a Geometria Plana, pois este material manipulativo “pode estimular o interesse dos alunos pelo estudo da Matemática, auxiliando no desenvolvimento do raciocínio lógico, exercitando a paciência e a concentração, melhorando a socialização e o trabalho em grupo, assim como o espírito investigativo e crítico.” O Tangram possibilita a motivação por parte dos discentes, tornando a aula mais dinâmica, divertida e participativa, fazendo com que os alunos consigam compreender a ideia de fração de maneira ativa no processo de aprendizagem.

Fornari (2014) destaca ainda que o Tangram,

[...]vem de encontro às necessidades dos alunos em desenvolver a transição do conhecimento construído de forma concreta até chegar à abstração, desenvolvendo ao mesmo tempo requisitos para a construção de conhecimentos posteriores que oferece inúmeras possibilidades em despertar condições de elaborar, compreender e construir os conceitos fracionários e geométricos já vistos em anos anteriores, mediante a sua utilização e exploração. (FORNARI, 2014, p. 2).

Além de auxiliar no ensino e aprendizagem de frações, ainda podemos abordar o conteúdo de forma crítica e reflexiva, partindo da manipulação de figuras planas presentes no Tangram. Estimulando a curiosidade, o discente percebe o quanto é necessário e instigante resolver situações, notando o quanto a matemática é fascinante para ele, dependendo como ela é trabalhada em sala.

3 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

3.1 Classificação da pesquisa

A pesquisa aqui tratada tem como enfoque principal o um estudo de propostas didáticas para os anos finais do Ensino Fundamental. Classificamos, segundo Gil (2008), como quantitativa-qualitativa, exploratória e bibliográfica.

Segundo Gil (2006) as pesquisas quantitativas consideram que tudo possa ser contável, ou seja, que sejam geradas informações a partir de números para assim classificá-los e analisá-los, já as qualitativas consistem em coletas de dados por meio de observação, relato, entrevista e outros, por meio de uma dinâmica entre o mundo e o sujeito, não traduzida por números.

Em relação aos seus objetivos, a pesquisa desenvolvida é classificada por exploratória, tendo em vista que, segundo Gil (2008),

A pesquisa exploratória tem como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formação de problemas preciosos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores [...]. Habitualmente envolvem levantamento bibliográfico e documental, entrevistas não padronizadas [...]. Com o objetivo de proporcionar visão geral (GIL, 2008, p.27).

Quanto aos procedimentos para coleta de dados, desenvolvemos uma pesquisa do tipo bibliográfica. Ela caracteriza-se pela

[...] busca de informações bibliográficas, seleção de documentos que se relacionam com o problema de pesquisa (livros, verbetes de enciclopédia, artigos de revistas, trabalhos de congressos, teses etc.) e o respectivo fichamento das referências para que sejam posteriormente utilizadas (na identificação do material referenciado ou na bibliografia final) (Macedo, 1995, p.13)

Dividimos o trabalho em uma pesquisa bibliográfica e a elaboração de um levantamento de propostas didáticas. Por ser uma pesquisa quantitativa, de caráter exploratório e bibliográfico buscamos explorar possibilidades e evidenciar através do levantamento de dados em monografias que possuem como foco o material manipulativo no ensino de frações e quais as contribuições deste, em especial o Tangram, como recurso didático no processo de ensino e aprendizagem de frações, ou seja, primeiramente foi feita uma revisão bibliográfica acerca de frações. Em seguida foi proposta uma análise cujas atividades têm como ponto de partida o Tangram.

3.2 Levantamento geral

Nesta pesquisa foi realizado um levantamento de Trabalhos de Conclusão de Curso – TCC relacionadas ao ensino de frações e o Tangram produzidos por alunos de Universidades Federais do Nordeste (Quadro 5). Como resultado foram encontrados TCC produzidos nos anos de 2011, 2013 e 2022 acessíveis no Repositório Institucional da UFPB e outro em 2015, acessível no Repositório Institucional da Universidade Federal de Alagoas - UFAL. Para a busca dos TCC foram utilizadas as palavras-chave tangram, ensino fundamental, frações e universidade federal.

Quadro 5 - Levantamento de monografias e dissertações sobre o ensino de frações com o Tangram

Curso / Instituição	Título	Estudante	Orientador	Ano
Matemática/ UFPB	Jogos e quebra-cabeças didáticos no ensino da matemática: vantagens e desvantagens do uso desses recursos no Ensino Fundamental II.	Ivonete Lima do Nascimento	Prof. Dr. José Gomes de Assis	2011
Matemática/ UFPB	Abordagem do Conceito de Fração: uma análise de livros didáticos	Ângela Tereza Silva de Souza	Profª. Dra. Cristiane Fernandes de Souza	2013
Matemática/UFPB	A utilização do tangram na matemática escolar: uma proposta didática para as unidades temáticas do ensino fundamental	Jorge Flávio Silva Santos	Profª. Dra. Severina Andréa Dantes de Farias	2022
Pós-graduação em ensino de ciências e matemática/UFAL	As frações e os jogos matemáticos: uma relação de interação em turmas do 6º ano do ensino fundamental	Uiltamar Miranda da Silva	Prof. Dr. Givaldo Oliveira dos santos	2015

Fonte: Dados elaborados pela pesquisadora

No primeiro TCC analisado, de autoria de Nascimento (2011), intitulado “Jogos e quebra-cabeças didáticos no ensino da matemática: vantagens e desvantagens do uso desses recursos no Ensino Fundamental II”, a pesquisadora procurou encontrar jogos e quebra-cabeças

didáticos que auxiliam os professores dos Anos Finais no processo de ensino da matemática. A pesquisa foi realizada com os professores da rede pública da cidade de Lucena/PB e tem como objetivo geral investigar as razões do não uso pelos professores do Ensino Fundamental de jogos e quebra-cabeças didáticos como recurso metodológico. A pesquisadora apresentou o Tangram aos alunos e logo após contar a história deste material e como ele surgiu, iniciou a montagem e o recorte das peças desenhadas. Já durante esse processo é observado pelos discentes a composição, comparação e identificação de figuras geométricas, a semelhança de triângulos, noções de fração e de vários outros conteúdos matemáticos. O professor da turma observada possuía o intuito de trabalhar o conceito de área associado a frações e por isso contou com o auxílio do Tangram. Propôs o seguinte questionamento aos alunos: A que fração da área inicial do Tangram corresponde o quadrado? Nesse primeiro TCC analisado, a autora não exemplifica o significado de fração, porém podemos destacar a ideia de razão.

No segundo TCC de autoria de Souza (2013), intitulado de “Abordagem do Conceito de Fração: Uma análise de livros didáticos”, a pesquisadora se dedicou a investigar os conceitos e significados de frações nos livros didáticos, analisando se eles atendem orientações oficiais e se as metodologias propostas nesses materiais didáticos favorecem a aprendizagem dos discentes. Foram analisados três livros do 6º ano, destinados a alunos da rede municipal de ensino da cidade de Itapororoca/PB e foi observado que todos os livros apresentaram falhas quanto as questões analisadas pela pesquisadora. Fatos históricos pouco aprofundados, demonstrações, sugestões de atividades pouco contextualizadas, analisando que seria necessário adequá-los para que assim possam proporcionar uma melhor aprendizagem de conteúdo matemático. Observando o livro didático “Matemática e realidade” do 6º ano de Iezzi, Dolce e Machado (2009), é visto que o conteúdo de frações é iniciado com o uso do Tangram, ou seja, antes do conceito de fração, foram abordadas partes fracionárias. Inicialmente, a história do Tangram é contada e logo são observadas todas as 7 figuras formadas. Dessa forma, é notado uma nova forma de explicar o assunto de frações, visto que ao invés de apresentar as partes fracionárias por meio dos denominadores, é apresentado pela composição e decomposição das figuras. A autora escreve que o livro didático não faz explicações individuais dos significados dos conceitos de fração, assim como os exemplos explicativos são poucos e limitados, sendo assim não são suficientes para que os alunos entendam o significado abordado. Nesta análise, foi notado que autores não abordam os diferentes conceitos de fração, se atendo apenas ao conceito parte todo.

No terceiro TCC analisado de autoria de Santos (2022), intitulado “A utilização do Tangram na matemática escolar: uma proposta didática para as unidades temáticas do ensino fundamental”, a pesquisa se baseou em elaborar atividades didáticas para as unidades temáticas de matemática do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, discutindo habilidades e utilizando o Tangram. Foi aplicada em duas turmas do 6º ano de uma escola pública da zona rural do município de Campina Grande – PB. Nesta proposta, o autor mostra que o Tangram é um material rico para ser trabalhado em sala de aula e descreve algumas possibilidades desse material no ensino da contemplando diferentes unidades temáticas para cada série dos anos finais do Ensino Fundamental. Utilizando as unidades temáticas Geometria e Números, o autor desenvolveu uma sequência semanal de 5 atividades sobre o objeto de conhecimento Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural.

No TCC analisado de autoria de Silva (2015), intitulado “As frações e os jogos matemáticos: uma relação de interação em turmas do 6º ano do Ensino Fundamental”, o autor teve como objetivo desenvolver, aplicar e analisar uma sequência didática destinada à promoção da apropriação do conteúdo frações por parte dos alunos, através de jogos matemáticos em turmas do 6º ano do ensino fundamental. A sequência didática proposta objetiva a melhoria da qualidade das aulas de matemática, auxiliando os alunos na realização de atividades cotidianas que envolvam o conteúdo frações e incentivando os professores a trabalharem o lúdico de forma mais espontânea, direcionando-os para o crescimento e amadurecimento de uma prática pedagógica mais adequada ao educando. Como recurso adicional a construção de figuras, foi utilizado o tangram como uma importante ferramenta didática para a aprendizagem de parte do conteúdo frações, direcionando-o a explorar a ideia de que uma fração de uma figura representa uma parte dessa figura. Neste TCC, foi analisado a ideia de fração como razão.

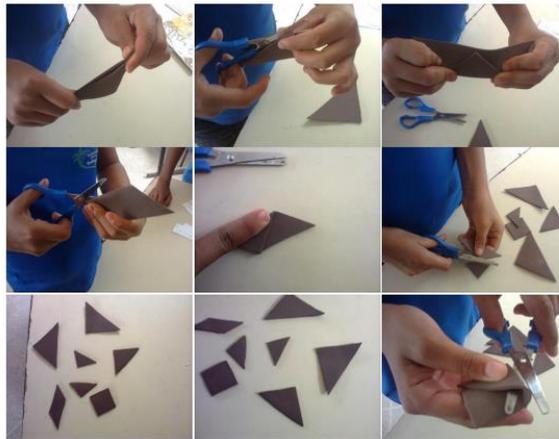
3.3 Apresentação e análise das propostas selecionadas

Analisando as propostas de ensino do conteúdo de frações tratadas nos TCC, partiremos nessa seção para a apresentação das propostas selecionadas. Nosso objetivo nesta fase é apresentar exemplos de diferentes propostas quanto aos significados da fração. Além disso, fazemos referência ao ano escolar, ao objeto matemático e à habilidade contemplada.

3.3.1 Proposta 1 – Semelhança de triângulos: Fração como razão

A primeira proposta considerada é de autoria de Nascimento (2011) sobre o objeto de conhecimento Semelhança de Triângulos da unidade Geometria para o 9º ano. Com o auxílio das peças do Tangram, a proposta propõe identificar/calcular a razão de semelhança. (Figura 6).

Figura 6 - Construindo e aplicando o Tangram em sala de aula



Fonte: Nascimento (2011, p.37)

Embora a Base Nacional Comum Curricular não apresente objetos de conhecimentos referentes ao ensino de frações no 9º ano, identificamos na habilidade “Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes” o uso do significado de fração como razão. Devido o conteúdo abordado ser Semelhança de Triângulos, irei trabalhar a fração com a ideia de razão, porém o foco não é a razão e sim a semelhança de triângulos. Mas, ao tratarmos de proporção, sempre iremos nos deparar com razão. Na unidade temática Álgebra o objeto de conhecimento Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais, trata da habilidade de “Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.” O quadro 6, a seguir, resume as informações sobre a proposta.

Quadro 6 - Ano, objeto de conhecimento e habilidade referente a proposta 1

Ano	Objeto de conhecimento	Habilidade	Significado de fração
9º ano	Semelhança de triângulos	(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.	Fração como razão

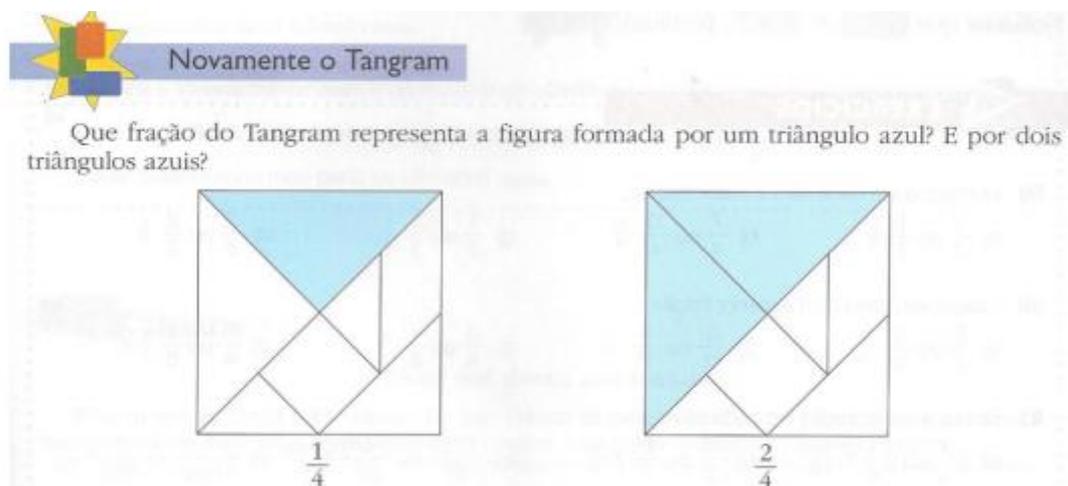
Fonte: Dados elaborados pela pesquisadora

3.3.2 Proposta 2 – Fração que representa uma figura do triângulo: Parte/todo

Essa proposta foi retirada do TCC de Souza (2013) que traz uma questão do livro didático de matemática dos autores Iezzi, Dolce e Machado, para as turmas do 6º ano. A proposta encontra-se na página 177 do livro didático.

A questão apresenta duas imagens do Tangram (Figura 7) e pede que os alunos escrevam qual fração representa cada figura formada. Na primeira imagem temos apenas 1 triângulo pintado de azul, representando $\frac{1}{4}$ da figura. Na segunda imagem, temos dois triângulos pintados de azul, que representam $\frac{2}{4}$.

Figura 7 - Abordagem dos conceitos fracionários através do trabalho com o Tangram



Fonte: Souza (2016, p.54)

Analisando a proposta, podemos afirmar que se trata do significado de fração referente a parte/todo, pois quando a fração é desse tipo o *todo* (ou o inteiro) é representado na fração no denominador que fica abaixo da parte consumida/pintada. Podemos dizer então, que na primeira imagem acima, a parte pintada de azul corresponde a uma parte, das quatro partes totais do Tangram, ou seja, um quarto. A habilidade presente nessa proposta é a EF06MA07, pois além de compreender o conceito de números fracionários e entender a ideia de partes de inteiros, também é possível notar a equivalência de frações. O quadro 7 resume as principais informações sobre a proposta de atividade.

Quadro 7 - Ano, objeto de conhecimento e habilidade referente a proposta 2

Ano	Objeto de conhecimento	Habilidade	Significado de Fração
6º ano	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.	Fração como parte todo

Fonte: Dados elaborados pela pesquisadora

3.3.3 Proposta 3 – Fração como unidade temática na sequência didática

Essa proposta foi retirada do TCC de Santos (2022) que traz uma atividade voltada para o 6º ano. No quadro 8 apresentamos a terceira proposta:

Quadro 8 - Proposta de atividade introdutória sobre frações com o Tangram

Proposta 3
<p>Iniciaremos a aula apresentando o jogo e contando a história e umas das lendas que fala sobre a criação do Tangram. Em seguida, fornecemos o papel quadriculado, régua e esquadro para construção do Tangram, passaremos as instruções para confecção verbalmente, na medida em que vamos dando as instruções abordaremos alguns conceitos geométricos como: polígonos, reta, ponto vértices, diagonal. Ao fim da construção os alunos vão ser questionados a respeito dos nomes das figuras geométricas que estão representadas no Tangram e os convidaremos a manusearem as peças de forma livre, em seguida disponibilizamos alguns modelos de figuras para servir de modelos para ser reproduzidos com objetivo de deixá-los familiarizados com o jogo. Depois de observarmos por alguns minutos começaremos a lançar os desafios:</p> <p>Atividade</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Forme o quadrado utilizando 2, 3, 4, 5 e 7 peças. 2. Forme o triângulo utilizando 2, 3, 4 e 7 peças. 3. Forme o paralelogramo utilizando 2, 3, 4, 6 e 7 peças. 4. Forme o trapézio utilizando 2, 3, 4, 5, 6 e 7 peças. <p>Caso seja necessário podemos juntá-los em duplas para haver interação e para ajudar aqueles que terão mais dificuldade. Encerraremos com uma conversa, discutindo o que eles acharam do jogo, e abordaremos a forma como o Tangram está dividido em partes e que pode ser representada na forma numérica, abrindo caminho para o que abordaremos no dia seguinte (Frações).</p>

Fonte: Santos (2022, p.39 e 40).

Analisando a proposta, observamos que o significado de fração não está presente nesse início, visto que a princípio os alunos entram em contato com as peças do Tangram formando quadrados, triângulos, paralelogramos e trapézios manualmente e se familiarizando com o material didático. Em relação às habilidades do 6º ano, identificamos a EF06MA19 e EF06MA20, mesmo não contemplando toda a habilidade, podemos destacar a parte de identificação das características do triângulo e do quadrilátero, respectivamente. No quadro 9 apresentamos um resumo desta atividade.

Quadro 9 - Ano, objeto de conhecimento e habilidade referente a proposta 3

Ano	Objeto de conhecimento	Habilidade
6º ano	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados.	(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.

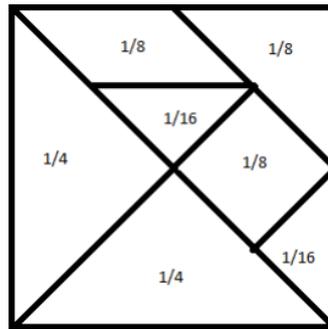
Fonte: Dados elaborados pela pesquisadora

3.3.4 Proposta 4 – Fração com o Tangram (parte /todo)

Essa proposta foi retirada do TCC de Santos (2022) que traz uma atividade voltada para o 6º ano. No quadro 10 apresentamos a quarta proposta:

Quadro 10 - Proposta 4 de atividade sobre frações com o Tangram (parte/todo)

Proposta 4
<p>Agora vamos utilizar o Tangram material concreto para demonstrar a ideia de fração como parte de um todo.</p> <p>Começaremos utilizando os dois triângulos grandes formando um quadrado e representaremos por $\frac{1}{2}$ cada triângulo. Na medida que os alunos entenderem os conceitos ampliaremos a discussão utilizando todas as peças do Tangram, aos poucos vamos trabalhando as representações de cada peça utilizando a sobreposição. Onde eles vão perceber que os triângulos grandes passaram a valer $\frac{1}{4}$, então faremos entenderem que o valor de cada peça vai depender de qual todo estamos nos referindo. Representação fracionária do quadrado formado com todas as peças do Tangram.</p>



Atividade

1. Tendo como o todo o quadrado pequeno, qual o valor em fração do triângulo pequeno?
 2. Tendo como o todo o triângulo médio, qual o valor em fração do triângulo pequeno?
 3. Tendo como o todo o paralelogramo, qual o valor em fração do triângulo pequeno?
 4. Tendo como o todo o triângulo grande, qual o valor em fração do triângulo pequeno?
 5. Construir um quadrado utilizando as sete peças do Tangram.
 6. Considerando o quadrado formado pelas sete peças do Tangram e o triângulo pequeno como a unidade de medida, represente de forma numérica a representação em forma de fração de cada peça do Tangram em relação ao todo (quadrado). Utilizar a sobreposição das peças para calcular.
- Encerraremos em uma roda de conversa discutindo sobre o aprendizado dos alunos: O que eles não entendiam que agora ficou claro? O que ainda não entendem? Ficou claro que o valor fracionário de cada peça depende de qual todo estamos nos referindo? Entre outros questionamentos que surgirem ou o professor julgue necessário posteriormente.

Fonte: Santos (2022, p.40 e 41).

Analisando a proposta, concluímos que ela se assemelha a proposta 2. Porém ela considera utilizar a sobreposição das peças para calcular a representação de fração de cada peça do Tangram, considerando que é necessário saber quantas figuras cabem dentro da outra, com isso nos estamos criando frações equivalentes a original, tomando como relação as figuras proporcionais. No quadro 11 apresentamos um resumo desta atividade.

Quadro 11 - Ano, objeto de conhecimento e habilidade referente a proposta 4

Ano	Objeto de conhecimento	Habilidade	Significado de Fração
6º ano	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.	Fração como parte todo

Fonte: Dados elaborados pela pesquisadora

3.3.5 Proposta 5 – Comparação de Fração e suas representações

Essa proposta foi retirada do TCC de Santos (2022) que traz uma atividade voltada para o 6º ano sobre comparação de frações. No quadro 10 apresentamos a quinta proposta:

Quadro 12 - Proposta 5 de atividade sobre frações com o Tangram

Proposta 5
<p>Nesta aula iremos fazer comparações de frações, escrevemos na lousa as frações $1/16$, $1/8$, $1/4$ entre outras e perguntaremos para a turma quem é maior e representaremos por ($<$ $>$), para eles já irem se acostumando com símbolos matemáticos, em seguida utilizaremos mais uma vez o Tangram para demonstrar concretamente qual é maior. Poderemos também utilizar outros números após a compreensão de ($<$ $>$).</p> <p>Atividade</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Sabendo que o triângulo grande vale $1/4$ do todo do quadrado formado pelas 7 peças do Tangram. Quantos triângulos pequenos $1/16$ equivalem ao triângulo grande? Demonstre por comparação utilizando o Tangram. 2. Vimos na aula anterior que o quadrado, o paralelogramo e o triângulo médio tem o mesmo valor em fração $1/8$. Compare com triângulo grande quantos $1/8$ é preciso para completar $1/4$, e $2/4$. <p>Após vermos que o assunto está fixado na cabeça dos alunos entraremos nas frações equivalentes e simplificação das frações. Explicaremos que ao dividirmos o quadrado do Tangram apenas em duas partes obteremos $1/2$, então faremos a comparação com $2/4$ que é o valor dos 2 triângulos grandes e mostraremos pra eles que esses valores são iguais, além disso poderemos utilizar a calculadora para mostrar que o resultado da conta também é o mesmo.</p>

Fonte: Santos (2022, p.41 e 42).

Na análise desta proposta, é bastante viável fazer o levantamento com as partes do tangram (parte/todo), relacionando-as sempre com o tangram completo, assim, não precisaremos transformar as frações, apenas fazer a comparação de acordo com os denominadores visto que o numerador sempre será 1. Entretanto, podemos fazer o estudo com a ideia de fração como quociente, já que comparar números decimais pode ser mais simples do que comparar frações.

Quadro 13 - Ano, objeto de conhecimento e habilidade referente a proposta 5

Ano	Objeto de conhecimento	Habilidade	Significado de Fração
6º ano	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	<p>(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.</p> <p>(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.</p>	Fração como parte todo Fração como resultado de divisão

Fonte: Dados elaborados pela pesquisadora

3.3.6 Proposta 6 – Adição e subtração de frações (parte/todo)

Essa proposta foi retirada do TCC de Santos (2022) que traz uma atividade voltada para o 6º ano sobre adição e subtração de frações. No quadro 14 apresentamos a sexta proposta:

Quadro 14 - Proposta 6 de atividade sobre frações com o Tangram

Proposta 6
<p>Iniciaremos hoje, a definir conceitos e propriedades da adição e subtração de frações.</p> <p>Definiremos que duas coisas só podem ser somadas ou subtraídas se tiverem a mesma natureza, daremos um exemplo que não se pode somar uma cadeira a uma mesa e sim cadeira com cadeira, mesa com mesa, então retornaremos ao Tangram e mostraremos que podemos somar triângulo pequeno com pequeno, somar grande com grande. Mas não dá para somar um triângulo grande com um pequeno sem fazer as devidas transformações, assim ficará mais fácil de entender o processo.</p> <p>Atividade.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Qual o valor de 2 triângulos grandes em sua representação fracionária $1/4 + 1/4$? 2. Qual o valor de 2 triângulos pequenos em sua representação fracionária $1/16 + 1/16$? 3. Qual valor de 1 quadrado, 1 triângulo médio e 1 paralelogramo em sua representação fracionária $1/8 + 1/8 + 1/8$? 4. É possível somar 1 triângulo grande com triângulo médio, $1/4 + 1/8$? Justifique e faça o cálculo se for possível.

Fonte: Santos (2022, p.42).

Nesta proposta de atividade o Tangram será muito utilizado. Porém, devemos nos atentar ao nos depararmos com as figuras, visto que não podemos juntar triângulos e quadrados, nem triângulos maiores e menores. Para fazer a soma ou subtração nesses casos, precisaremos fazer a equivalência. Exemplo: Quantos triângulos pequenos cabem dentro do triângulo médio? Assim conseguiremos deixar todas as frações com o mesmo denominador e como dito anteriormente, conseguiremos fazer as operações, visto que são da mesma natureza, fazendo uso da equivalência. Encontramos a ideia de parte todo na decomposição das figuras, ao transformar a equivalência. Tratando-se da habilidade, iremos comparar as frações deixando-as equivalentes.

Quadro 15 - Ano, objeto de conhecimento e habilidade referente a proposta 6

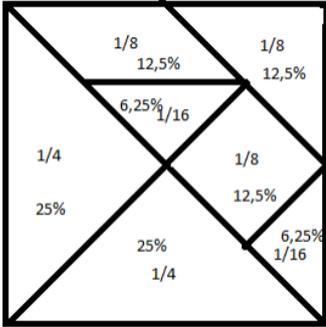
Ano	Objeto de conhecimento	Habilidade	Significado de Fração
6º ano	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.	Fração como parte todo

Fonte: Dados elaborados pela pesquisadora

3.3.7 Proposta 7 – Fração e Porcentagem

Essa proposta foi retirada do TCC de Santos (2022) que traz uma atividade voltada para o 6º ano sobre Fração e Porcentagem. No quadro 16 apresentamos a sétima proposta:

Quadro 16 - Proposta 7 de atividade sobre frações com o Tangram

Proposta 7
<p>No quinto dia utilizaremos o Tangram para mostrar a ligação entre Frações e Porcentagem. Começaremos mostrando que o todo do Tangram corresponde a 100%, então iremos questioná-los a respeito do triângulo grande, quantas vezes ele cabe dentro Tangram? Após eles chegarem a resposta faremos um novo questionamento:</p> <p>Se o Tangram corresponde a 100% e é preciso 4 triângulos grandes para cobrir o Tangram, qual o valor em porcentagem do triângulo grande com relação ao todo? Então faremos o mesmo processo com as demais peças do Tangram.</p> <div style="text-align: center; margin: 10px 0;">  </div> <p>Triângulo pequeno $1/16 = 6,25\%$ Para calcularmos o valor do percentual de cada peça trabalharemos o conceito da divisão. Então dividiremos os 100% do quadrado em 16 partes que resulta em triângulo pequeno igual a 6,25%. Repetiremos o mesmo procedimento com as demais peças, assim encontraremos a porcentagem de cada peça relacionada ao todo.</p> <p>Triângulo médio, quadrado e o paralelogramo $1/8 = 12,5\%$ Triângulo médio, do quadrado e do paralelogramo 100% dividido por 8 partes resulta em 12,5%. Triângulo grande $1/4 = 25\%$. Mais uma vez 100% dividido 4 partes resulta em 25%.</p> <p>Atividade</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Quantos por cento correspondem os dois triângulos grandes do Tangram em relação ao todo? 2. Quantos por cento correspondem os dois triângulos pequenos do Tangram em relação ao todo? 3. Quantos por cento corresponde a soma do Triângulo médio, do quadrado e do paralelogramo do Tangram em relação ao todo?

Fonte: Santos (2022, p.42, 43 e 44).

Podemos observar a ideia de parte/todo, tendo em vista a comparação sempre com o tangram completo, no qual teremos as relações proporcionais e assim determinar a porcentagem de cada parte do Tangram para posteriormente conseguir responder as atividades propostas. Também podemos encontrar a porcentagem quando transformamos a fração em quociente, tendo em vista que já sabemos quanto equivale cada parte do Tangram na parte fracionária.

Quadro 17 - Ano, objeto de conhecimento e habilidade referente a proposta 7

Ano	Objeto de conhecimento	Habilidades	Significado de Fração
6º ano	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária. (EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.	Fração como parte todo

Fonte: Dados elaborados pela pesquisadora

3.4 Conclusão sobre as propostas selecionadas

Considerando o levantamento de TCC realizado na internet nos repositórios institucionais da UFPB e da UFAL obtivemos 7 propostas de uso do Tangram com diferentes significados de fração. A partir dos resultados encontrados nesta pesquisa, concluímos que as condições impostas no enunciado de um problema em uma situação particular determinam qual seria o significado de fração. Os significados mais importantes sobre as representações do que é uma fração são: fração como parte todo; fração como razão e fração como resultado de uma divisão (quociente).

Concluímos que 5 propostas (2, 4, 5, 6 e 7) apresentam o significado de fração como parte todo; a proposta 1 traz o significado de fração como razão e a proposta 5, de fração como resultado de uma divisão (quociente).

Em nossa primeira proposta, encontramos uma atividade relacionada ao significado de fração como razão, utilizando semelhança de triângulos referente ao 9º ano. A segunda proposta traz uma atividade que apresenta significado de fração como parte todo e o objeto de conhecimento referente ao 6º ano é frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração

de frações. Este objeto de conhecimento também se aplica as propostas 4, 5, 6 e 7. Na terceira proposta não foi encontrado o significado de fração, visto que nesta atividade e Tangram é mencionado mediante o objeto de conhecimento polígonos: classificações quanto ao número de vértices, medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados, também para o 6º ano.

As propostas 4 e 6 apresentam o mesmo objeto de conhecimento, habilidade, ano e significado de fração da proposta 2. Na proposta 5 também apresentamos o mesmo objeto de conhecimento para o 6º ano, porém além de encontrarmos o significado de fração como parte todo, também encontramos a fração como resultado de uma divisão (quociente). Na proposta 7 para o 6º ano também temos o objeto de conhecimento frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração e também apresenta o significado de fração como parte todo.

No que diz respeito as habilidades identificadas nas propostas, temos:

- (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes
- (EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
- (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
- (EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
- (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos
- (EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.

Observando essas habilidades, concluímos que o conjunto de atividades apresentadas pode favorecer o desenvolvimento nos estudantes de aprendizagens esperadas para o 6º ano, com a ressalva de que o significado de fração como parte todo foi o mais explorado.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho teve como objetivo geral analisar propostas didáticas com o uso do Tangram para o estudo de frações voltadas para os anos finais do Ensino Fundamental, a partir da busca em TCC de Universidades Federais considerando as atividades e os significados de fração contemplados.

Ao longo do texto, levantamos na literatura os significados para as frações, apresentamos as habilidades presentes do Ensino Fundamental presentes na BNCC voltados para o estudo das frações, realizamos um levantamento de propostas didáticas para o estudo de frações com o Tangram e por fim, foram categorizadas as propostas de acordo com o ano escolar, o objeto do conhecimento, as habilidades e o significado de fração trabalhado. Nosso estudo teórico nos levou a compreensão de que os significados das frações se apresentam mediante a forma como eles são apresentados no enunciado do problema e a perspectiva mais explorada é a de fração como parte todo.

A busca pela análise dos TCC começou pelo repositório da UFPB e diferente do que imaginava, não foram encontradas muitas monografias com temáticas relacionadas ao significado de frações, mesmo expandindo a busca pelas Universidades Federais do Nordeste e depois, pelo país. O Tangram, em grande parte das pesquisas, apresenta-se como um dos materiais didáticos para auxiliar nos conteúdos matemático e poucas vezes como enfoque principal do estudo de frações. No caso da Universidade Federal da Paraíba, fomos informados que vários TCC defendidos ainda não se encontram disponíveis no repositório, o que limitou o alcance de novas propostas de uso do Tangram.

Caso tivesse mais tempo, seria interessante a aplicação das mesmas atividades analisadas nos TCC em turmas do 6º ao 9º ano, observando como os alunos iriam reagir ao entendimento do estudo de frações com o uso do Tangram, averiguando qual dos significados de fração é de fácil compreensão e qual o nível de interesse dos discentes pela matemática ao término do experimento.

Esperamos que esse trabalho possa ampliar a compreensão de professores sobre o estudo das frações. O estudo das frações é um dos conteúdos de difícil entendimento pelos alunos que acabaram de sair dos anos iniciais e adentram nos anos finais. O uso Tangram como recurso didático para o estudo das frações colabora com aulas mais dinâmicas, divertidas e ainda tem potencial para abordar em sala de aula os diferentes significados das frações em anos variados.

REFERÊNCIAS

ACACIO, Ana Clecia da Silva et al. A importância de uma metodologia em sala de aula: proposta de ensino dos conceitos de fração e de porcentagem através do tangram para a resolução de problemas. 2021

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Brasília: MEC/SEF. 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Brasília: MEC/SEF. 1997.

BERLINGOFF, W.P.; GOUVÊA, F.Q. A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Trad. ELZA GOMIDE, ELENA CASTRO. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

BERTONI, N. E. Módulo IV: Educação e Linguagem Matemática IV. 1. ed. Brasília-DF: Universidade de Brasília, 2009. 95 p. Disponível em: <<http://www.sbemrasil.org.br/files/fracoes.pdf>>. Citado na página 60.

BOYER, C.B. MERZBACH, U. C. **História da matemática**. Trad. HELENA CASRTO. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

CAMPOS, T. M. de M.; SILVA, A. F. G.; PIETROPAOLO, R. C. Considerações a respeito do ensino e aprendizagem de representações fracionárias de números racionais. In: GUIMARÃES, G.; B.; ROSA, R. E. S. (Org.). REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DE ESCOLARIZAÇÃO. RECIFE: SBEM, 2009. Cap. 9, p. 131-139.

CAVALIERI, L. O ensino das frações. 2005. 54f. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática) – Universidade Paranaense, Umuarama. 2005.

DE FIGUEIREDO, Jairo Vogado; DE MOURA, Egnilson Miranda; DE ARAÚJO, Joniel Mendes. O ensino de frações mediado por jogos de aprendizagem: uma proposta para o ensino. **REAMEC-Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, v. 6, n. 2, p. 259-272, 2018.

Disponível em: < <https://www.espacoeducar.net/2016/05/tipos-de-tangram-quais-os-tipos-de.html>>. Acesso em: 18 de mar. de 2023.

FERNANDES, A.R.B. et al. Principais motivos que dificultam a aprendizagem da Matemática. Universidade Federal da Paraíba (UFPB) - PRG - XI Encontro de Iniciação à Docência. Paraíba, 2008. Disponível em: <http://www.prac.ufpb.br/anais/xenex_xienid/xi_enid/prolicen/ANAIS/Area4/4CFTDCBSPL>. Acesso em: 11/04/2022.

FORNARI, E. L. d. S. O uso do Tangram no ensino de frações em turmas de 6o ano. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE., UNICENTRO, Honório Serpa-PR, v. 1, p. 20, 2014. Citado na página 100.

GANGI, S. R. Da S.A importância do jogo tangram no ensino da matemática como material lúdico, 2012.

GIL, Antonio Carlos. Como elaborar projetos de pesquisa. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GIL, Antônio C. Métodos e técnicas de pesquisa social. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2006.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. Matemática e Realidade. 6ª edição. 7º ano. São Paulo: Editora Atual, 2009. IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. Matemática. 1ª edição. 8º ano. São Paulo: Editora Moderna, 2009.

LLINARES, S. C.; SÁNCHEZ, M. V. G. Fracciones la relacion parte-todo. Madrid: Sintesis, 1988.

MACEDO, Neusa Dias de. **Iniciação à pesquisa bibliográfica**: guia do estudante para a fundamentação do trabalho de pesquisa. 2. ed. São Paulo: Edições Loyola, 1994

MATOS, Geane Vieira; ANDRADE, Silvana Souza. Educação Matemática nos Anos Iniciais: a contribuição dos jogos na aprendizagem das crianças com dificuldade em Matemática.

NASCIMENTO, Ivonete Lima do. Jogos e quebra-cabeças didáticos no ensino da matemática: vantagens e desvantagens do uso desses recursos no Ensino Fundamental II. 2013.

PICCININ, I.; MARTINS, M. A. O Uso do Tangram no Ensino de Frações. Os desafios da Escola Pública Paranaense na perspectiva pública do professor PDE, v. 1, p. 20, 2014. Disponível em: . Citado na página 99

SANCHEZ, J. Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica. Porto Alegre: Artmed, 2004.

SANTOS, Jorge Flávio Silva. A utilização do tangram na matemática escolar: uma proposta didática para as unidades temáticas do ensino fundamental. 2022.

SANTOS, M. J. C. dos. Reaprender frações por meio de oficinas pedagógicas: Desafio para a formação inicial. 1. ed. Fortaleza-CE: Edição do Autor, 2010. 209 p.

SANTOS, S.F; **O uso do Tangram como Propostas do Ensino de Frações**; Dissertação (Mestrado) _ Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Jataí, 2019.

SILVA, Uiltamar Miranda da et al. As frações e os jogos matemáticos: uma relação de interação em turmas do 6º ano do ensino fundamental. 2015.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. O. Materiais manipulativos para o ensino de frações e números decimais. 1. ed. Porto Alegre-RS: Penso, 2016. p.25

SOUZA, Ângela Tereza Silva de. Abordagem do conceito de fração: uma análise de livros didáticos. 2016.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. Didática de Matemática: como dois e dois. a comunicação da Matemática. São Paulo: FTD, 1997

WALLE, J. Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.