UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Walter Ferreira Abrantes

O GeoGebra como objeto de aprendizagem no ensino do Teorema Fundamental do Cálculo: uma revisão bibliográfica e sugestão de aplicação

Rio Tinto – PB
2023

Walter Ferreira Abrantes

O GeoGebra como objeto de aprendizagem no ensino do Teorema Fundamental do Cálculo: uma revisão bibliográfica e uma proposta de aplicação

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra**.** Claudilene Gomes da Costa.

Rio Tinto – PB
2023

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A161g Abrantes, Walter Ferreira.
O GeoGebra como objeto de aprendizagem no ensino do Teorema Fundamental do Cálculo: uma revisão bibliográfica e sugestão de aplicação / Walter Ferreira Abrantes. - Rio Tinto, 2023.
57 f. : il.

Orientação: Claudilene Gomes da Costa Costa.
TCC (Licenciatura em Matemárica) - UFPB/CCAE.

1. Teorema Fundamental do Cálculo. 2. GeoGebra. 3. Matemática - ensino. 4. Metodologias ativas. 5. Software educacional. I. Costa, Claudilene Gomes da. II. Título.

UFPB/CCAE CDU 512:37

Elaborado por JOSIVAN COELHO DOS SANTOS VASCONCELOS - CRB-15-764

Walter Ferreira Abrantes

O GeoGebra como objeto de aprendizagem no ensino do Teorema Fundamental do Cálculo: uma revisão bibliográfica e uma proposta de aplicação

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Claudilene Gomes da Costa.

Aprovado em: 6/6/2023

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Claudilene Gomes da Costa. (Orientadora) – UFPB/DCX

Prof. Dr. José Fabrício Lima de Souza – UFPB/DCX

Prof. Ms. Carlos Alex Alves – Doutorando UNESP/PPGEdC

Aos meus pais, pelo incentivo, carinho e apoio irrestrito, propiciando vitória nesta minha caminhada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por toda a força e orientação que recebi durante essa jornada acadêmica. Sou imensamente grato aos meus pais, Walter Gomes de Abrantes e Aldafran Ferreira da Cruz, cujo apoio incondicional e orientação foram fundamentais para que eu chegasse até aqui.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão à minha orientadora, Claudilene Gomes, pela constante ajuda e orientação que recebi ao longo do curso e, especialmente, durante a produção deste trabalho. Sua dedicação e expertise foram essenciais para o meu desenvolvimento acadêmico.

Não posso deixar de agradecer aos meus amigos que fiz aqui em Rio Tinto. Em momentos difíceis, eles estiveram sempre ao meu lado, oferecendo apoio inestimável. Nos momentos felizes, eles comemoraram comigo, compartilhando alegria e cumplicidade. Em particular, gostaria de destacar o papel de Rafaella Sualdini, Antônio Neto e Lyzia Sousa, mas todos os meus amigos desempenharam um papel importante nesta fase da minha vida.

A todos que contribuíram para a minha jornada acadêmica, expresso minha gratidão sincera. Cada um de vocês desempenhou um papel significativo na minha formação e crescimento pessoal. Obrigado por todo o apoio, amizade e encorajamento ao longo deste percurso.

A matemática é a linguagem em que Deus escreveu o universo.

Galileu Galilei

RESUMO

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) é a peça central do cálculo diferencial e integral, conectando essas duas áreas. Ele estabelece que a integração e a diferenciação são operações inversas, demonstrando que problemas como calcular a área sob o gráfico de uma função em um intervalo e construir uma tangente em um ponto da função estão intrinsecamente relacionados e podem ser resolvidos simultaneamente. Uma forma eficaz de ensinar esse conceito é por meio do uso de software educacional, como o GeoGebra. Essa ferramenta interativa e de fácil manipulação foi desenvolvida com o propósito de contribuir diretamente para o processo de ensino-aprendizagem, combinando recursos algébricos e geométricos. Isso é especialmente útil, já que os alunos geralmente enfrentam dificuldades nessas áreas e, principalmente, em relacioná-las entre si. O presente trabalho teve como objetivo geral apresentar uma metodologia ativa de ensino que vise contribuir e facilitar o aprendizado do TFC a partir da utilização do aplicativo GeoGebra em sala de aula. A metodologia utilizada na pesquisa em relação aos procedimentos técnicos foi a bibliográfica, em relação aos objetivos utilizou-se a pesquisa exploratória e em relação a abordagem do problema foi utilizada a pesquisa qualitativa. A pesquisa foi realizada nos portais Google acadêmico e Scielo. Ao final da pesquisa, foi possível concluir que o software GeoGebra tem um impacto positivo no desempenho dos alunos na escola. Os alunos também têm percepções positivas sobre o software GeoGebra em termos de entusiasmo, confiança e motivação. Este software deve ser apresentado aos educadores de Matemática para que os alunos possam explorar o mundo da Matemática de forma mais ampla e tornar os alunos capazes de pensar crítica e criativamente.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo. GeoGebra. Ensino da Matemática. Metodologias ativas.

ABSTRACT

The Fundamental Theorem of Calculus (FTC) serves as the cornerstone of differential and integral calculus, bridging these two areas. It establishes that integration and differentiation are inverse operations, demonstrating that problems such as calculating the area under a function's graph over an interval and constructing a tangent at a point on the function are inherently connected and can be solved simultaneously. An effective approach to teach this concept is through the utilization of educational software, such as GeoGebra. This interactive and easily manipulable tool was developed with the purpose of directly contributing to the teaching and learning process by combining algebraic and geometric resources. This is particularly valuable as students often encounter difficulties in these areas, especially in connecting them to one another. The main objective of this study was to present an active teaching methodology aimed at facilitating and enhancing the learning of the FTC through the utilization of the GeoGebra application in the classroom. The research methodology employed a bibliographical approach for technical procedures, an exploratory research design for objectives, and a qualitative research approach to address the problem. The research was conducted using the Google Scholar and Scielo platforms. The findings of this study concluded that the GeoGebra software has a positive impact on students' academic performance. Students also expressed positive perceptions of the GeoGebra software, highlighting enthusiasm, confidence, and motivation. It is recommended that this software be introduced to Mathematics educators, enabling students to explore the realm of Mathematics more comprehensively and fostering critical and creative thinking skills.

Keywords: Fundamental Theorem of Calculus. GeoGebra. Mathematics Teaching. Active methodologies.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do Tema

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) traz a ideia central do cálculo diferencial e integral, que é o elo entre esses dois cálculos. Este teorema mostra que integração e diferenciação são operações inversas, e conclui que os problemas de calcular a área sob o gráfico de uma função em um segmento e o problema de construir uma tangente em um ponto de função estão relacionados e podem ser resolvidos juntos (SANTOS; AMARAL, 2012).

O TFC é uma ferramenta poderosa para calcular integrais definidas, pois reduz o problema ao cálculo das primitivas das funções. Em geral, esta tarefa não é muito simples, pois existem funções cujas primitivas precisam de uma técnica mais depurada para serem calculadas. Os alunos de graduação em Matemática, precisam aprender e compreender o TFC. Assim, em busca de tornar o assunto mais atrativo, porventura proporcionando condições mais eficazes de aprendizagem, acredita-se que a implementação da utilização de software aplicado no ensino Matemático pode trazer vários benefícios (SANTOS; AMARAL, 2012).

De acordo com Santos e Amaral (2012, p. 84),

> (...) o surgimento e a utilização dos objetos virtuais de aprendizagem estão cada vez mais presentes no cotidiano dos estudantes, sejam eles nos espaços formais, como escolas e cursos, como também em outros espaços, tais como museus e sites de entretenimento.

A busca por um software que atenda suas necessidades é fundamental quando buscamos estes objetos virtuais.

Na escolha de um software que possa ajudar no aprendizado e aplicação do teorema, sugere-se a utilização do GeoGebra pois suas ferramentas educacionais são interativas e de fácil manipulação. O GeoGebra foi criado com objetivo de contribuir diretamente no processo de ensino aprendizagem, o qual pudesse combinar artifícios algébricos e geométricos, visto que, os alunos em geral sempre apresentam dificuldades nestas áreas, e principalmente em relacioná-las (ARBAIN; SHUKOR, 2015).

Com base nessa abordagem, o presente trabalho intitula-se "Uso do GeoGebra no ensino do Teorema Fundamental do Cálculo: uma revisão bibliográfica e proposta de aplicação". Neste estudo, apresentaremos uma proposta de ensino que visa contribuir para a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), utilizando o recurso tecnológico GeoGebra como ferramenta de apoio. Reconhecendo as dificuldades enfrentadas pelos alunos do curso de Licenciatura em Matemática, nosso objetivo é oferecer uma abordagem inovadora que utilize o GeoGebra para auxiliar no entendimento e na aplicação prática do TFC.

1.2 Problemática e justificativa

Consoante a competência 5 da Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação), é possível utilizar tecnologias para disseminar conhecimentos acerca de um assunto ou ponto de vista, além disso, para facilitar o entendimento de um conteúdo. Somado a isso, a criação ou a utilização de tecnologias que facilitem a compreensão de um objeto de conhecimento, que é o TFC queremos expor neste trabalho.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) já enfatizam a importância dos recursos tecnológicos para a educação, visando a melhoria da qualidade do ensino-aprendizagem. Afirmam que a informática na educação "permite criar ambientes de aprendizagem que fazem sugerir novas formas de pensar e aprender" (p. 147).

De acordo com as Propostas Curriculares do Estado da Paraíba (2022) o uso de tecnologia para auxiliar a educação como forma de ferramenta, vem sido cada vez mais incentivado devido tais tecnologias fazer parte, cada vez mais intrínseca da atualidade, ou seja, ferramentas utilizadas para contribuir com aumento da eficiência e interesse dos alunos no ensino, desenvolvendo seu senso crítico, raciocínio lógico e dedutivo, capacidade de observação, de pesquisa e estratégia de comunicação.

Dessa forma, importante ressaltar que não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática (BRASIL, 2006, p. 87).

Conforme Nascimento (2012), oferecer o uso de softwares de geometria dinâmica no processo de aprendizagem da geometria pode contribuir para diversos fatores, principalmente em relação à visualização geométrica.

Diante disso, essa pesquisa pretende responder a seguinte questão: Quais as possibilidades da utilização do GeoGebra no ensino do Teorema Fundamental do

Cálculo? Como aplicar o GeoGebra no ensino do Teorema Fundamental do Cálculo como uma metodologia ativa em sala de aula?

Ao longo da minha trajetória no curso de Licenciatura em Matemática, tive a oportunidade de atuar como docente nas primeiras monitorias de cálculo. Devido a vivência nas monitorias de cálculos, percebi a grande dificuldade que os alunos tinham na compreensão deste conteúdo, isso me motivou a pesquisar na área e buscar uma nova metodologia de ensino.

Quanto à realização pessoal, é bastante significante, pois acredito que a implementação de softwares como ferramenta de ensino é bastante importante para o ensino-aprendizado em diversas áreas da Matemática, oferecendo novas metodologias de ensinar e aprender os conceitos matemáticos de maneira mais interativa, visual e prazerosa tanto para alunos como professores.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Pretende-se apresentar uma metodologia ativa de ensino que vise contribuir e facilitar o aprendizado do TFC a partir da utilização do aplicativo GeoGebra em sala de aula.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Averiguar possíveis dificuldades de aprendizagem relacionadas ao TFC;
- Verificar o interesse e desempenho dos alunos com o TFC a partir da utilização GeoGebra
- Apresentar por meio da utilização do software GeoGebra sugestões que venham contribuir com a visualização geométrica do TFC;
- Verificar se o uso de softwares GeoGebra é um recurso facilitador para a aprendizagem e visualização do conteúdo do TFC;
- Contribuir com uma metodologia ativa passível de ser aplicada em sala de aula para futuras verificações.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Conteúdo matemático: Teorema Fundamental do Cálculo

No curso de Licenciatura em matemática é ofertado o Cálculo Diferencial e Integral no início do curso, esse ramo da matemática estuda aproximações, variações, movimentos e quadraturas. Por ser um ramo cuja origem se dá pela busca de soluções de dois problemas fundamentais: o cálculo de áreas e volumes e o traçado de curvas por tangentes. Embora seu foco seja na solução desses problemas, trata-se de processos de integração e derivada (ASCHENBRENNER *et al.*, 2017).

O Teorema Fundamental do Cálculo não leva o nome de nenhum associado individual a ele pelo fato de ter diversos colaboradores para chegar como se encontra hoje, de acordo com Silva (2019) as contribuições de vários matemáticos envolvidos na trajetória do TFC acompanha a seguinte linha cronológica: Eudoxo (390 - 320 a.C.), Arquimedes (287 - 212 a.C.), Apolônio (262 - 190 a.C.), Torricelli (1608 - 1647), Fermat (1601 - 1665), Descartes (1596 - 1650), Gregory (1638 - 1675), Barrow (1630 - 1677), Newton(1642 - 1727), Leibniz (1646 - 1716), Cauchy (1789 - 1857), dentre outros (ASCHENBRENNER *et al.*, 2017).

O processo foi iniciado com Eudoxo de Cnidus (390 - 320 a.C.) que desenvolveu o "Método da Exaustão", afirmando que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente:

> Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegara por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2011, p. 419).

Considerado a mola propulsora do Cálculo Integral o método da exaustão, temos a quadratura do círculo que consiste em inscrever e circunscrever polígonos regulares cujas áreas são conhecidas, no círculo, e, à medida que a quantidade de lados desses polígonos aumenta, teremos uma aproximação real da área do círculo (EVES, 2011).

Boyer (1974) afirma ainda que tempos depois o método da exaustão apresentado, foi aprimorado por Arquimedes (287 - 212 a.C.), tornando-se uma importante ferramenta no cálculo de áreas, superfícies e volumes. Após as contribuições de Arquimedes, tivemos as de Apolônio que contribuiu com as obras "A quadratura da parábola e Sobre as espirais" juntamente com o "Tratado de Apolônio" (262 a. C - 190 a.C) "(...)Foi a matemática pura de Apolônio que permitiu cerca de 1800 anos mais tarde, os "Principia de Newton"; esse, por sua vez, deu aos cientistas de hoje condições para que a viagem de ida e volta à Lua fosse possível. (BOYER,1974, p.111)

Depois de Apolônio tivemos outras contribuições para o desenvolvimento de TFC, apenas no século XVI, com o matemático Evangelista Torricelli (1608 - 1647), que alavancou os estudos sobre o TFC. De acordo com Silva (2019):

> Torricelli publicou a primeira demonstração matemática de que a área é exatamente o triplo da área do círculo gerador, usando métodos infinitesimais como o método dos indivisíveis de Cavalieri (1598 - 1647) e o método da exaustão de Arquimedes-Eudoxo. Em paralelo ele também publicou a construção da tangente em um ponto genérico da cicloide empregando o método de composição de movimentos, já usado por Galileu (1564 - 1643) e Descartes (1596 - 1650). Todos esses resultados foram publicados por Torricelli em 1644 na obra “De Parabole”. (Silva, 2019, p. 18)

As maiores contribuições para a matemática vieram a partir do século XVII com o estabelecimento de duas áreas importantes: a Geometria Analítica e o Cálculo Infinitesimal. "Do século dezessete em diante, portanto, a matemática desenvolve-se mais em termos de lógica interna do que sob a ação de forças econômicas, sociais ou tecnológicas, (...)" (BOYER, 1974, p. 245). A relação entre a Geometria e a Álgebra, só foi definida de forma independente pelos matemáticos Pierre de Fermat (1601 - 1665) e René Descartes (1596 - 1650), considerados os principais autores das mudanças que constituiu o que chamamos hoje de “geometria analítica” (BOYER, 1974).

Mais a frente tivemos as contribuições de James Gregory (1638 - 1675), Isaac Barrow (1630 - 1677), ambos autores foram de suma importância para o desenvolvimento do TFC. Gregory utilizava o “método de exaustão” em quadraturas de espirais, parábolas e hipérboles. Já Barrow deu suas contribuições na construção de retas tangentes a curvas, ele utilizava métodos geométricos nas suas demonstrações, baseava-se em tangentes, quadraturas e curvas (SILVA, 2019).

Passando-se mais de dois mil anos desde os primeiros registros de desenvolvimento do TFC, e com o Cálculo Diferencial e Integral já bem desenvolvido com Integrações, tangentes, quadraturas e curvas, Newton (1642 - 1727) deu as contribuições mais importantes na formalização do Teorema Fundamental do Cálculo com a sistematização do cálculo infinitesimal e o Teorema binomial. Concomitante às contribuições de Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), desenvolveu grande parte da notação do TFC e estabeleceu que compusesse o cálculo Infinitesimal, fórmulas elementares de diferenciação (KNIJNIK, 2016).

Com o passar do tempo o rigor matemático foi se tornando cada vez mais presente, seu início no século XIX, se deu à Cauchy (1789 -1857) que aceitavelmente reescreveu os conceitos matemáticos do cálculo. Seus estudos foram determinantes para a prova formal do TFC que segundo Silva (2019):

> A prova formal do Teorema Fundamental do Cálculo que temos hoje foi formulada para funções contínuas por Cauchy (1789-1857), publicada em seu

> “Lessons Given at the École Royale Polytechnique on the Infinitesimal Calculus” (1823). Os argumentos usados nos livros de cálculos hoje foram os mesmos usados por Cauchy, de forma elegante e útil ele uniu rigorosamente os dois principais ramos do cálculo. (SILVA, 2019, p. 30)

Neste capítulo, estudamos a história do Teorema Fundamental do Cálculo e exploramos suas origens. Através das contribuições notáveis de matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Leibniz, compreendemos como a necessidade de calcular áreas e encontrar taxas de variação levou ao surgimento desse teorema fundamental.

Ao longo deste capítulo, exploramos os fundamentos essenciais do cálculo e estabelecemos uma compreensão sólida da interconexão poderosa entre a noção de integral e derivada. Agora, equipados com esse conhecimento, podemos avançar para o próximo capítulo, onde nos aprofundaremos na demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo.

2.2 Demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo

A utilização da demonstração para o ensino matemático é fundamental para contribuir no processo de formação de conhecimento do aluno, assim fazendo com que o aluno compreenda que matemática não se resume a resolução de exercícios.

A demonstração matemática deve ser considerada por alunos e professores como parte integrante da matemática, ou seja, eles não podem ser separados uns dos outros. Portanto, o uso de demonstrações é importante para o ensino e domínio dos conteúdos desta disciplina.

O conhecimento matemático é baseado na demonstração e não na observação, cujo objetivo é estabelecer a verdade de uma afirmação e convencer da exatidão do que é mostrado, o que se torna o aspecto central da matemática que distingue a matemática das outras ciências.

A Demonstração é necessária para o estabelecimento da verdade matemática, assumindo uma dimensão explicativa aplicada a uma teoria.

> (...) na maior parte dos casos em que os resultados em questão são intuitivamente evidentes por si mesmos e/ou são apoiados numa quase empírica evidência convincente, a função da demonstração para os matemáticos não é a de verificação, mas sim a de explicação (...) (DE VILLIERS, 2001, p. 33).

Para realizar a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo, iremos nos basear no trabalho de Silva (2019), que apresentou uma abordagem clara e concisa do teorema. Além disso, utilizaremos como referência os renomados livros de Cálculo, como "Cálculo Vol. 1" de Stewart (2010), "Cálculo Vol. 1" de Thomas (2002) e "Análise Real Vol. 1" de Elon Lages (2011).

Temos uma função, $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua. Então f é integrável em qualquer subintervalo de $[a,b]$, a função $g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida da seguinte forma: $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, com $a \leq x \leq b$ é contínua em $[a,b]$, é diferenciável em (a,b) e $g'(x) = f(x)$ (A derivada da g existe e vale exatamente o valor da função f). Obs.: g é chamada antiderivada ou primitiva de f.

Note que se integrarmos a função f no intervalo $[a,x]$, deixando a extremidade superior variar, e derivar em relação a essa variável, voltaremos a função f, já se fixarmos um número x, então a integral $\int_a^x f(t)\,dt$ é um número definido. De acordo com o teorema, a integral definida (Integral de Riemann) é uma operação inversa da operação de derivação. Com este resultado poderemos resolver esta integral sistematicamente, procurando a função g cuja derivada é uma função dada f.

Se f for uma função positiva, então $g(x)$ pode ser interpretada como a área abaixo do gráfico de f que varia de a até x, onde $a \leq x \leq b$. Na verdade, conhecendo a integral, definimos a área como sendo a integral da função positiva no intervalo.

A partir da primeira parte da demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo enunciada a seguir, fica fácil descobrir qual a função que nos dá a área da região variável.

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte I. Se f for contínua em $[a,b]$, então a função g definida por $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt, a \leq x \leq b$ é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) e $g'(x) = f(x)$. (STEWART, 2010, p. 359)

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

A parte II do TFC é um corolário imediato, e, é a técnica para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$, se f for contínua. Este teorema afirma o seguinte: "Se f: $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua, e seja $F(x)$ uma antiderivada para f, ou seja, $F'(x) = f(x)$ (neste caso sabemos que existe pelo menos uma $F(x)$ como foi visto na demonstração da Parte I do TFC), então, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$".

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte II. Se f for contínua em $[a,b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)}$ onde F é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $F'(x) = f(x)$. (STEWART, 2010, p. 361)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big|_a^b = f(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Justapondo as duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

Teorema Fundamental do Cálculo. Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, contínua e $g(x) \ = \int_a^x f(x)\,dt$.

1. g é $diferenciável\ em\ (a,b)\ e\ g'(x) = f(x)$.

2. $Se\ F(x)\ satisfizer\ F'(x) = f(x)\ em\ (a,b), então\ \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma relação fundamental entre as operações de integral e derivada, que são consideradas inversas uma da outra, com uma constante como diferença. Esse teorema possui amplas aplicações em diferentes áreas do conhecimento, como cálculo de comprimentos, áreas e volumes, além de encontrar utilidade na Física, Economia e diversas outras disciplinas.

2.4 Dificuldades dos alunos com o Teorema Fundamental do Cálculo

Existem muitos estudos que abordam as dificuldades no aprendizado de Cálculo Diferencial e Integral, da disciplina básica e obrigatória em diferentes cursos de graduação como conceitos aplicáveis em muitas áreas do conhecimento (LI, 2007).

Essas pesquisas abordam o problema sob diversos ângulos, perspectivas e contextos e cada uma delas oferece sempre mais e mais elementos que permitem a ampliação da análise das dificuldades detectadas no aprendizado pelos alunos, as quais incorrem em altos índices de abandonos e repetências (SOUZA, 2012).

Autores sempre alertam que as reprovações nestas disciplinas acabam retendo os alunos, uma, duas, três e até mais vezes, o que é um problema para a Universidade já que tem impacto, por exemplo, na necessidade de se disponibilizar professores para os alunos retidos e geram retardo na formatura das turmas (SOUZA, 2012).

Na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), o Teorema Fundamental do Cálculo apresenta dificuldades inerentes à sua aprendizagem. Procuramos algumas pesquisas para ilustrar este ponto e encontramos quatro estudos que focaram especificamente o aprendizado do TFC (CAMPOS, 2007).

Os fatores que influenciam as atitudes dos alunos em relação à Matemática são os materiais didáticos utilizados pelos professores, gestão da sala de aula, conhecimento do conteúdo do professor e personalidade, relacionando os tópicos com a situação da vida real (YILMAZ *et al.*, 2010) e métodos de ensino (PAPANASTASIOU, 2000).

A matemática pode ser considerada um desafio assunto. Aprender matemática envolve entender as teorias e fórmulas para descrever algo típico sala de aula, o desafio para os alunos é explorar problemas complexos. Com os avanços da tecnologia multimídia, dificuldades de aprendizagem podem ser superadas. O desafio é mais complexo no ensino e aprendizagem da Matemática, onde os professores têm que equilibrar o mental, papelaria e ferramentas digitais de ensino e aprendizagem que envolve conceitos matemáticos abstratos e difíceis de serem compreendido pelos alunos (PRIETO *et al.*, 2013).

A tecnologia desempenha um papel importante no desenvolvimento do processo educacional (GURSUL;KESER, 2009). Equipamentos tecnológicos existentes como GeoGebra, Geometer's Sketchpad e o Mathematica devem ser utilizados ao máximo pelos educadores. O uso da tecnologia é importante porque serve como um objeto de educação, que afeta o conteúdo e os objetivos da aprendizagem, e como um meio para melhorar o processo de ensino e aprendizagem (VOOGT, 2008).

Segundo Hohenwarter (2008), o GeoGebra é um programa de computador (software) para Matemática, especialmente para aprender geometria e álgebra. Abramovich (2013) define o GeoGebra como um aplicativo de software online gratuito para o estudo de geometria, álgebra e cálculo em nível de série e ensino diferente. Estudos sobre a percepção dos alunos sobre a aplicação da tecnologia nas aulas de Matemática recebeu menos atenção.

Portanto, um estudo sobre a eficácia no desempenho do aluno, o GeoGebra deve ser conduzido para ver como ele pode ser benéfico para melhorar o sistema educacional na Malásia. O segundo objetivo deste estudo foi identificar a percepção dos alunos sobre o uso de GeoGebra na aprendizagem da Matemática. Há muita controvérsia nas últimas duas décadas sobre os efeitos do uso de as ferramentas da tecnologia (calculadoras e computadores) no ensino e aprendizagem da Matemática (SMITH, 2002).

Portanto, este estudo teve como objetivo comprovar até que ponto as ferramentas tecnológicas podem impactar no ensino e aprendizagem de Matemática. A seguir uma discussão sobre a BNC e o ensino por meio de tecnologia e sobre o proprio TFC.

2.4.1 BNC-Formação

No Brasil, a Educação vem sendo organizada por leis e medidas provisórias. Para ilustrar isso, apresentamos, neste texto introdutório, uma cronologia dos documentos legais que pautaram e ainda pautam os modos de pensar a Educação Básica no país com o objetivo de contextualizar as condições de possibilidade para a elaboração da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018).

Tomamos como partida a Constituição Federal que foi promulgada em 1988, na qual o Capítulo III intitulado Da Educação, da Cultura e do Desporto estabelece no artigo 210 que: “Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais” (BRASIL, 1988).

A resolução CNE/CP 2/2019. Diário Oficial da União, Brasília, 15 de abril de 2020, Seção 1, pp. 46-49 define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial em nível superior de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação) (BRASIL, 2019).

A BNC-Formação é essencial e indispensável na formação acadêmica dos licenciados, pois têm como referência a BNCC. Na BNC está contido as competências gerais docentes, bem como as competências específicas e as habilidades correspondentes a elas, necessárias para a formação de professores capacitados e competentes. Nesse sentido a BNC (BRASIL, 2019, p. 02) cita:

> Art. 2º A formação docente pressupõe o desenvolvimento, pelo licenciando, das competências gerais previstas na BNC-Educação Básica, bem como das aprendizagens essenciais a serem garantidas aos estudantes, quanto aos aspectos intelectual, físico, cultural, social e emocional de sua formação, tendo como perspectiva o desenvolvimento pleno das pessoas, visando à Educação Integral. (BRASIL. 2019, p. 02)

Com base na competência geral 5 (Tabela 1) e nas competências específicas e habilidades (Tabela 02), podemos observar a necessidade de conhecimento e capacitação docente sobre as tecnologias digitais para implantação nas suas futuras práticas de ensino.

Tabela 1 – Competência 5 da BNC.

COMPETÊNCIA GERAL DOCENTE
Competência 5: Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas docentes, como recurso pedagógico e como ferramenta de formação, para comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e potencializar as aprendizagens.

Fonte: Brasil, 2019.

A competência de número 5 explana a concepção de um conhecimento utilitário, ou seja, se refere à utilização do conhecimento matemático para a resolução de problemas cotidianos. Bauman (2009) faz uma analogia com o funcionamento dos mísseis para ilustrar que conhecimento, na modernidade líquida, tem se configurado como algo que deve ser descartado quando não há mais utilidade para o mesmo.

O sociólogo explica que os mísseis inteligentes, diferentemente dos mísseis balísticos (mísseis com alvo e trajetória previamente definidos), calculam no ar mudando rapidamente de objetivo. Assim, devem ser inicialmente dotados da capacidade de aprender e de aprender de modo rápido. Isso é obvio. O que é menos evidente, se bem não menos importante dentro de uma rápida capacidade de aprendizagem, é, todavia, a capacidade de esquecer instantaneamente o que se aprendeu antes (BAUMAN, 2009, p. 672).

Tabela 2 - Competências Específicas.

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS		
1. CONHECIMENTO PROFISSIONAL	**2. PRÁTICA PROFISSIONAL**	**3. ENGAJAMENTO PROFISSIONAL**
1.3 Reconhecer os contextos	**2.1** Planejar ações de ensino que resultem em efetivas aprendizagens	**3.2** Comprometer-se com a aprendizagem dos estudantes e colocar em prática o princípio de que todos são capazes de aprender
	2.4 Conduzir as práticas pedagógicas dos objetos do conhecimento, das competências e habilidades	**3.3** Participar do Projeto Pedagógico da escola e da construção de valores democráticos

Competências Específicas	**Habilidades**
1.3 Reconhecer os contextos	**1.3.3** Conhecer o desenvolvimento tecnológico mundial, conectando-o aos objetos de conhecimento, além de fazer uso crítico de recursos e informações.

2.1 Planejar ações de ensino que resultem em efetivas aprendizagens	**2.1.5** Realizar a curadoria educacional, utilizar as tecnologias digitais, os conteúdos virtuais e outros recursos tecnológicos e incorporá-los à prática pedagógica, para potencializar e transformar as experiências de aprendizagem dos estudantes e estimular uma atitude investigativa.
2.4 Conduzir as práticas pedagógicas dos objetos do conhecimento, das competências e habilidades	**2.4.5** Usar as tecnologias apropriadas nas práticas de ensino.
3.2 Comprometer-se com a aprendizagem dos estudantes e colocar em prática o princípio de que todos são capazes de aprender	**3.2.3** Conhecer, entender e dar valor positivo às diferentes identidades e necessidades dos estudantes, bem como ser capaz de utilizar os recursos tecnológicos como recurso pedagógico para garantir a inclusão, o desenvolvimento das competências da BNCC e as aprendizagens dos objetos de conhecimento para todos os estudantes.
3.3 Participar do Projeto Pedagógico da escola e da construção de valores democráticos	**3.3.2** Trabalhar coletivamente, participar das comunidades de aprendizagem e incentivar o uso dos recursos tecnológicos para compartilhamento das experiências profissionais.

Fonte: Brasil, 2019.

O objetivo de utilização das tecnologias digitais para explicar o TFC é o ensino mais didático e lúdico para uma maior aprendizagem. O uso de tecnologias digitais necessita de capacitação do futuro docente que deve estar preparado para a utilização desses recursos tecnológicos, como afirma Valente (2005):

> A preparação do professor é fundamental para que a educação dê o salto de qualidade e deixe de ser baseada na transmissão de informações para incorporar também aspectos da construção do conhecimento do aluno, usando

> para isso as tecnologias digitais que estão cada vez mais presentes em nossa sociedade (VALENTE, 2005, p. 30).

A BNC não faz menção ao descarte do que se aprende, entretanto nas competências analisadas é dada ênfase à utilização de tecnologias digitais para modelar e resolver problemas dos diferentes contextos, logo o aluno deve ser capaz de lidar com situações novas e de forma rápida e sintética (BRASIL, 2019).

As políticas educacionais estabelecidas no Brasil, nas últimas décadas, têm se configurado em torno de ações que se propõem a organizar sistematicamente a Educação Básica por meio de reformas curriculares. A proposta da Base insere-se no conjunto dessas ações, com a intenção de fomentar um currículo nacional e de constituir-se como um documento normativo que estabelece um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver de modo progressivo, assumindo-se, assim, como uma referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares (BRASIL, 2018).

É possível verificar que o ensino de Matemática oscila entre duas posições epistemológicas bastante fluidas em suas variâncias, mas relativamente coesas em seus princípios (BECKER, 2012). Encontram-se posições nas quais as noções de conhecimento se alicerçam em epistemologias empiristas, de origem comportamental, entendendo que o Todavia, a Matemática não é só vista como resultado do trabalho duro e intricado. Também é possível observar posições fundamentadas em crenças epistemológicas de ordem inatistas, de origem biologista e orgânica, nas quais o conhecimento provém de forma espontânea ao sujeito.

Destacam-se aí as ideias de dom e talento ou das chamadas inteligências múltiplas (GARDNER, 1995). Com esta posição epistemológica, a Matemática é considerada como um campo para poucos privilegiados, isto é, para aqueles que possuem algum tipo de tendência, habilidade especial ou inclinação para a área. Estas crenças desdobram-se em um ensino que procura radicalizar o nível de dificuldade das tarefas a fim de identificar aqueles que teriam essa dita capacidade inata. Espera-se muito do estudante, sem oferecer um ensino muito sistematizado, na expectativa de que a aprendizagem naturalmente aconteça para aqueles que podem. Na concepção inatista, segundo Becker (2012), o gênio é aquele que não se esforça, mas que mostra uma predisposição e um talento "natural" para o domínio matemático.

2.5 O GeoGebra como recurso para o Ensino de Matemática

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Tendo como uma das finalidades auxiliar no ensino e aprendizagem da matemática. Com ele é possível realizar cálculos aritméticos, algébricos e utilizar múltiplas representações gráficas de objetos matemáticos (ARBAIN; SHUKOR, 2015).

O sistema educacional começou a mudar muito drástico na presença de Tecnologia da Informações e Comunicação (TIC). Maioria países começaram a integrar o uso de TIC em seu sistema educacional. O governo malaio através do Ministério da Educação e o Ministério do Ensino Superior também planejaram para integrar as TIC na educação da Malásia sistema (ARBAIN; SHUKOR, 2015).

O uso do computador no ensino e aprender tornou-se um catalisador para mudar a abordagem de ensino e aprendizagem, especialmente para cursos de matemática. Agora lá existem muitos softwares matemáticos no mercado, como Mathematica, Matlab, Maple V, Geometers' Sketchpad, Autograf, Graphic Calculadora e outros (ABRAMOVICH, 2013).

Essas ferramentas de software podem fornecer um poderoso símbolo e cálculos numéricos, pode produzir cálculos rápidos e também ajudar os alunos em resumo conceitos matemáticos. No entanto, o uso de qualquer software matemático como o acima requer gastos elevados, caso o governo decide implementá-lo em todas as escolas (ABRAMOVICH, 2013).

A existência de código aberto de softwares pode superar esse problema. Atualmente, existem empresas e pessoas físicas que desenvolvem softwares matemáticos com o objetivo de distribuí-los gratuitamente ao público. O termo software de código aberto tornou-se cada vez mais popular entre os usuários de computador que procuram uma alternativa aos softwares pagos (KORENOVA, 2012).

Através da pesquisa pode-se encontrar uma variedade de softwares matemáticos que pode ser baixado e usado gratuitamente. Software matemático como Maxima, Scilab, Axiom, YACAS, estão prontos para serem baixados e usados para ensinar e aprender. Além disso, os professores que têm habilidades em programação também podem desenvolver seus próprios softwares matemáticos para seus alunos usarem (KORENOVA, 2012).

O material didático como este tem vantagens, pois é desenvolvido especificamente para seus próprios alunos. Muitos estudos têm sido conduzidos para determinar a adequação ou eficácia do uso de software de computador no ensino e aprendizagem matemática. Os resultados do uso de computadores para auxiliar no ensino da matemática têm sido misturados (LI, 2007).

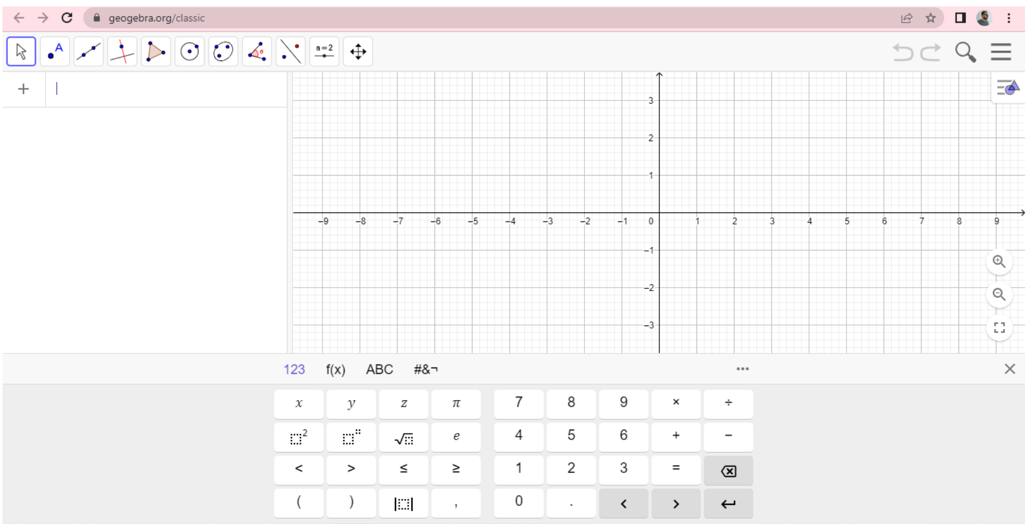
Por exemplo, os estudos de Magallanes (2003) compararam o uso software Etnomatemática e o método tradicional. As descobertas indicaram que houve diferenças significativas no teste pontuações entre os dois grupos com alunos que utilizou o software Etnomatemática conseguiram pontuações mais altas.

A pesquisa de Tarmizi *et al.* (2023) mostrou que ensinar e aprender matemática usando a calculadora gráfica foi encontrado para ser significativamente eficiente instrucionalmente, em comparação com o software convencional e Autograph. Significar enquanto os achados de Kamariah *et al.* (2009) indicaram que o uso de Gemeters Sketchpad (GSP) induziu maior processo de pensamento matemático entre os GSP grupo.

Atualmente, o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 60 idiomas. Os desenvolvedores do GeoGebra permitem que ele seja baixado do site oficial (www.geogebra.org) e instalado em computadores com sistemas operacionais diversos.

Na figura 02 podemos observar a tela inicial do software classic 06, dividida em duas partes por duas janelas, a janela de álgebra e a janela de visualização geométrica (área de trabalho); campo de entrada, onde são inseridas equações, funções, coordenadas de pontos a serem marcadas, e após pressionar a tecla Enter, os objetos geométricos são exibidos.

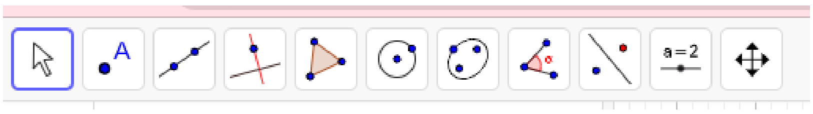
Figura 2 – Tela inicial do software GeoGebra.



Fonte: Software GeoGebra

Na interface podemos encontrar um menu (figura 3) com sete comandos: Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela e Ajuda. Além de apresentar uma barra de ferramentas composta por onze caixas de ferramentas, cada uma dessas caixas apresenta outras ferramentas que se relacionam com a função do ícone inicial. A seguir, podem ser observadas o menu e a barra de ferramentas.

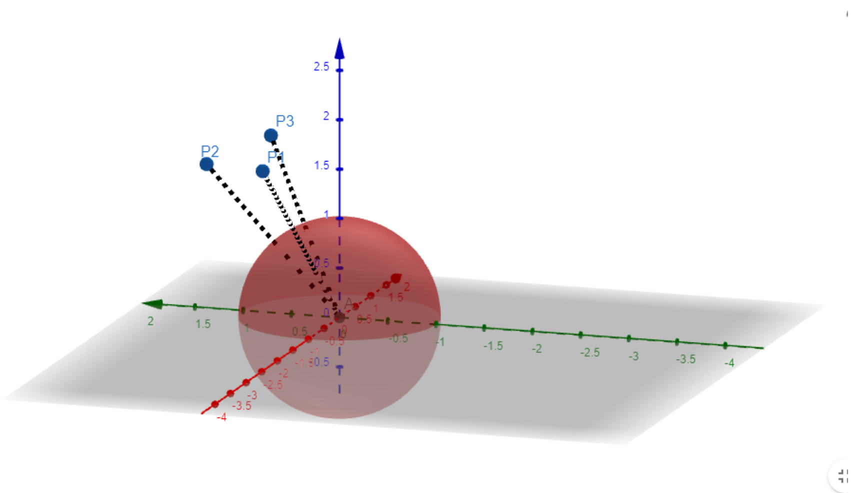
Figura 3 - Menu e barra de ferramentas.



Fonte: Software GeoGebra.

Um de seus instrumentos é a possibilidade de visualização 3D (figura 4), o que possibilita o estudo de objetos em um espaço tridimensional, permitindo a construção de gráficos de superfícies no espaço e a visualização em diversas perspectivas, além de permitir a análise das características existentes. Na figura 04, é apresentada a janela de visualização 3D do software GeoGebra.

Figura 4 – Janela de visualização 3D do software GeoGebra.



Fonte: Software GeoGebra.

Dessa forma, o uso do GeoGebra como recurso pedagógico nas aulas de Matemática, pode contribuir para o desenvolvimento da visualização geométrica e a comprovação de teorias e conceitos matemáticos.

Para Nascimento (2012, p. 03), “a habilidade de visualizar pode ser desenvolvida, à medida que se forneça ao aluno materiais de apoio didático baseados em elementos concretos representativos do objeto geométrico em estudo”.

Nascimento em seu discurso apresenta um entendimento sobre o termo Dinâmico e o termo Interativo:

> O termo “Dinâmico” do nome pode ser mais bem entendido como oposição à estrutura “estática” das construções da geometria tradicional. E o termo “Interativo” é que após o aluno realizar uma construção, ele pode alterar as posições dos objetos iniciais e o programa redesenha a construção, preservando as propriedades originais. (NASCIMENTO, 2012, p. 05).

Diante disso, o GeoGebra pode se imaginar capaz de generalizar conceitos matemáticos com suas construções. Isso leva a uma abstração adicional das propriedades e características da representação e exibição de objetos construídos.

3 CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

3.1 Apresentação do contexto da pesquisa

Esta pesquisa, intitulada Uso do GeoGebra no ensino do Teorema Fundamental do Cálculo: uma revisão bibliográfica e uma proposta de aplicação, pretende-se apresentar uma metodologia ativa de ensino que vise contribuir e facilitar o aprendizado do TFC a partir da utilização do aplicativo GeoGebra em sala de aula, através do delineamento de uma proposta de trabalho baseada no referencial teórico acima.

3.2 Classificação da pesquisa

De acordo com o objetivo, o estudo pode ser descrito como exploratório e qualitativo. É exploratória porque visa apresentar o problema em estudo, no caso desta pesquisa, o estudo do TFC, com o objetivo de apresentar uma metodologia ativa de ensino que vise contribuir e facilitar o aprendizado do TFC a partir da utilização do aplicativo GeoGebra em sala de aula. É qualitativa na medida em que visa descrever se o uso do software no ensino do TFC é um recurso de aprendizagem, e quais foram suas contribuições na mesma.

De acordo com Gil (2008, p. 42),

> (...) as pesquisas descritivas são, juntamente com as exploratórias, as que habitualmente realizam os pesquisadores sociais preocupados com a atuação prática. São também as mais solicitadas por organizações como instituições educacionais (...) (GIL, 2008, p. 42).

Assim, com relação ao método de abordagem, a pesquisa caracteriza-se como qualitativa. Na abordagem qualitativa, a pesquisa tem o ambiente como fonte direta dos dados.

Dessa forma, utilizando a abordagem qualitativa, esse estudo objetiva apresentar uma metodologia ativa de ensino que vise contribuir e facilitar o aprendizado do TFC a partir da utilização do aplicativo GeoGebra em sala de aula.

Nessa concepção, Gil (2008, P.133) afirma que:

> A análise qualitativa depende de muitos fatores, tais como a natureza dos dados coletados, a extensão da amostra, os instrumentos de pesquisa e os pressupostos teóricos que nortearam a investigação. Pode-se, no entanto, definir esse processo como uma sequência de atividades, que envolve a redução dos dados, a categorização desses dados, sua interpretação e a redação do relatório (GIL, 2008, p. 133).

3.3 Etapas da Pesquisa

Para a realização deste trabalho adoutou-se por optar seguir as seguintes etapas. Primeiramente foi determinado o tema que seria pesquisado, onde, como já discutido acima, o Teorema Fundamental do Cálculo e uso do software GeoGebra em sala de aula.

Em seguida determinou-se que iria se tratar de pesquisa do tipo revisão bibliográfica. A pesquisa científica possui diferentes modalidades, uma das quais é a pesquisa bibliográfica que será abordada neste TCC, expondo todas as etapas que devem ser seguidas em sua realização. Este tipo de pesquisa é idealizado por diversos autores, incluindo Marconi e Lakatos (2003) e Gil (2002).

A pesquisa bibliográfica está inserida principalmente no meio acadêmico e visa aprimorar e atualizar conhecimentos, por meio de uma investigação científica de trabalhos publicados. Sendo que este se trata de uma revisão bibliográfica com carater (GIL, 2008).

A revisão de literatura é um tipo de artigo que fornece uma visão geral de um tópico e do estado da arte. Ele também fornece um resumo da literatura sobre esse tópico e como ela se relaciona com seu próprio estudo. O objetivo desta é fornecer uma visão geral do conhecimento atual sobre um determinado tópico. Existem cinco tipos de revisão literária: a integrativa de literatura, sistemática, narrativa, rigorosa e de narrativa comum (GIL, 2008).

A revisão de literatura exploratória é sempre recomendada para o levantamento da produção científica disponível e para a (re) construção de redes de pensamentos e conceitos, que articulam saberes de diversas fontes na tentativa de trilhar caminhos na direção daquilo que se deseja conhecer (MARCONI & LAKATOS, 2003).

A leitura de partes do material bibliográfico teve por objetivo verificar as obras que interessam a esta produção textual. A partir desse momento, procedeu-se a leitura analítica dos textos selecionados, identificando as ideias-chave, classificando-as e sintetizando-as.

Portanto, o presente TCC trata-se de uma revisão de literatura com carater exloratório, sendo que a pesquisa foi realizada nos portais Google acadêmico e Scielo. Posteriormente foram selecionados artigos científicos relevantes para a construção deste texto. Os mesmo foram tabulados e analisados a fim de iniciar a construção da revisão bibliográfica. Por fim foi finalizada a redação e apresentação do trabalho científico.

3.4 Tipo de Estudo

Os artigos científicos mais comuns, mais encontrados na literatura quando fazemos buscas para pesquisa, são de cinco casos: Revisão Bibliográfica, Estudo de Caso, Revisão Bibliométrica, Pesquisa Ação e Survey.

Como já afirmado acima, este estudo é do tipo revisão bibliográfica exploratória. A revisão de literatura exploratória é sempre recomendada para o levantamento da produção científica disponível e para a (re) construção de redes de pensamentos e conceitos, que articulam saberes de diversas fontes na tentativa de trilhar caminhos na direção daquilo que se deseja conhecer (MARCONI & LAKATOS, 2003).

Por fim, e de forma mais complexa, as leituras forão interpretadas, em relação umas às outras e ao problema a ser resolvido com a pesquisa, consolidando os raciocínios e argumentos baseados em elementos bem definidos. Portanto, o método a ser aplicado à pesquisa bibliográfica por meio da leitura do material escolhido partirá da organização lógica do tema, garantindo que a escrita textual seja tratada de forma gradativa e equilibrada, para então passar ao mais formato consolidado do texto, a partir do aprofundamento das análises, das mudanças de alguns paradigmas e, sobretudo, do maior conhecimento inerente ao assunto.

Para Prodanov e Freitas (2013,) o método é considerado o caminho para se chegar a um determinado fim. No passado muitos pensadores defenderam a existência de apenas um método que servissem para todas as áreas do conhecimento. Defendiam “um método que fosse universal”. Porém, muitos outros métodos são defendidos por cientistas e filósofos da ciência. Esses métodos devem ser utilizados de acordo com o que se pretende investigar e também pela classe de proposições.

3.5. Técnica de Coleta de dados

Botelho et Al (2011) e Rother (2007) indagam que a técnica metodológica de revisão bibliográfica, tem como finalidade a revisão narrativa, capaz de unir o conhecimento disponível sobre um determinado tema de uma elucidação mais ampla, não sistemática, descritiva e teórica, favorecendo a aproximação com o objeto de estudo e conseguindo replicar os dados abordados em diversos artigos de mesmo teor, regiões e momentos, para momentos diversos, podendo-se discutir sobre o tema e encontrar soluções, bem como viabilizar ou não um problema de pesquisa, de acordo com outras pesquisas referenciadas e comprobatórias.

Dessa maneira a pesquisa foi organizada em 5 etapas, ordinariamente seguidas onde:

1. Consistiu na escolha e delimitação do tema, onde os pesquisadores elegeram o assunto “metodologia da revisão bibliográfica narrativa” para iniciar a investigação.
2. Logo em seguida, a segunda fase corresponde à organização lógica do trabalho, onde foram traçados os objetivos, plano de atividades e cronograma;

3. A terceira etapa se deu com a identificação e localização das fontes capazes de fornecer informações pertinentes sobre o tema abordado.

Assim, o método de revisão narrativa segue etapas, a saber: Identificação do tema e seleção da questão de pesquisa; Estabelecimento de critérios de inclusão e exclusão e seleção das publicações; Definição das informações extraídas das publicações revisadas; Categorização dos dados obtidos; Avaliação dos estudos selecionados; Interpretação, síntese e apresentação dos resultados da pesquisa (SOUZA, SILVA, CARVALHO; 2010).

Esse método será seguido para responder aos problemas de pesquisa propostos. Com proposição de uma pesquisa qualitativa ou quantitativa ou quali-quanti, para contribuir ainda mais com o processo de pesquisas que surgiram nesse período e que provavelmente surgirão ainda mais. (SOUZA, SILVA, CARVALHO; 2010).

Ferreira (2002, p.258) quanto ao mapeamento, afirma que mapear e discutir uma certa produção acadêmica em diferentes campos do conhecimento, tentando responder que aspectos e dimensões vêm sendo destacados e privilegiados em diferentes épocas e lugares, de que formas e em que condições têm sido produzidas certas dissertações de mestrado, teses de doutorado, publicações em periódicos e comunicações em canais de congressos e de seminários. Também são reconhecidas por realizarem uma metodologia de caráter inventariante e descritivo da produção acadêmica e científica sobre o tema que busca investigar, à luz de categorias e facetas que se caracterizam enquanto tais em cada trabalho e no conjunto deles, sob os quais o fenômeno passa a ser analisado

Assim, foram incluídas referências extraídas de bibliotecas virtuais nas seguintes bases de dados: Google acadêmico e EBSCO, onde foram buscados artigos relevantes ao tema, dos últimos 4 anos, utilizando-se principalmente dos termos chave da pesquisa: Teorema Fundamental do Cálculo. GeoGebra. Ensino da Matemática. Metodologias ativas.; relacionando com o tema, onde foram encontrados de forma mais generalista do tema: aproximadamente 1490 artigos, papers e publicações, onde foram utilizados como mais relevantes 70, que se utilizam dos mesmos e principais autores utilizados na presente pesquisa. Em que, as buscas foram realizadas durante os meses de fevereiro a maio de 2023 onde na quarta etapa sucedeu-se a compilação e leitura do material, que consistem na leitura atentiva com a finalidade de respaldar o embasamento teórico-prático sobre o tema.

A última etapa consistiu-se na sistematização dos dados que serão apresentados neste trabalho, por meio de uma discussão, replicação dos dados com intuito de responder diretamente os objetivos gerais e específicos da presente pesquisa, validando-os de maneira estrutural e propondo uma próxima pesquisa para contribuir academicamente com mais fatores de transformação desse promissor e delicado mercado.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Arbain e Shukor (2015) desenvolveram uma metodologia de ensino na sala de aula a fim de avaliar os efeitos de empregar o software GeoGebra na aprendizagem dos alunos. Segundo os autores o software GeoGebra parece ter um efeito positivo no teste pós-desempenho realizado com os alunos. Os resultados deste estudo também mostram que o uso do GeoGebra no processo de aprendizagem e ensino pode dar um impacto muito bom na melhoria da capacidade dos alunos.

Avaliações de Royati *et al.* (2010) também mostram que os alunos do grupo de trabalho com o apoio do software GeoGebra obtiveram notas melhores do que alunos que aprendem com métodos tradicionais. Os resultados deste estudo indicam que existem diferenças significativas entre as notas médias dos alunos no pós-teste do GeoGebra. O que sugere que o GeoGebra é muito útil no ensino tradicional em sala de aula e mais eficaz do que o ensino tradicional.

O aumento nas pontuações dos testes de desempenho dos alunos provavelmente se deve a fatores de sua atração pela tecnologia. O desenvolvimento de ferramentas tecnológicas aumenta o interesse do aluno em descobrir o novo. Os alunos tendem a explorar o mundo da tecnologia para aplicá-la na aprendizagem da Matemática (LI, 2007).

A aprendizagem e o ensino da Matemática não devem ser focados apenas na teoria, mas também numa variedade de aprendizagens e de abordagens que envolvem o uso de auxiliares de ensino comprovados para ajudar a estimular o interesse dos alunos pela matéria (LI, 2007).

Os softwares de matemática disponíveis no mercado ou mesmo online têm facilitado a tarefa do professor de transmitir conhecimento benéfico para os alunos. No entanto, cabe ao professor utilizar os materiais existentes sem a necessidade de destinar tempo extra para desenvolver outras ajudas de ensino (ABRAMOVICH, 2013).

Nesse sentido, os conceitos de derivada e integral e as relações entre eles são de importância crucial não apenas em cálculo mas também em vários outros ramos da matemática (KEINER, 2001). No entanto, foi indicado na pesquisa relacionada (JOBES, 2018) que os alunos geralmente experimentam dificuldades em aprender esses conceitos, que também impedi-los de conceituar TFC (THOMPSON *et al.*, 2013).

Por exemplo, enquanto eles usam TFC para os cálculos de uma integral definida, eles têm dificuldades em explicando as razões por trás desse teorema (MAHIR, 2009). Dificuldades dos alunos particularmente decorrem da luta para entender uma série de conceitos, como função, taxa de variação, quantidades infinitesimais, limite e função de acumulação, e as conexões entre eles (VERZOSA *et al.*, 2014).

O propósito e o uso de argumentos em matemática contribuem para o convencimento e processo de justificação, que é considerado como parte funcional da construção da prova, uma vez que a ponte entre o aluno e a prova é feita pela argumentação. Como Pedemonte, (2007, p.26) afirmou que "a argumentação em matemática como prova é mais próxima da dialética (e depois da teoria de Toulmin), já que deveria produzir enunciados verdadeiros".

Considerando a abordagem de Pedemonte (2007), um ambiente de aprendizagem deve ser concebido de acordo com o processo de comunicação social, a fim de melhorar os processos de argumentação dos alunos (KRUMMHEUER, 1995). Nesse contexto, o método ACODESA (do francês: Apprentissage Collaboratif, Débat Scientifque, Autoréfexion - Aprendizagem Colaborativa, Debate Científico, Auto-Reflexão – tradução do autor) proposto por Hitt (2011) pode ser usado para criar tal ambiente de aprendizagem.

O método ACODESA apoia estes processos no âmbito da perspectiva semiótica e auxilia na criação de representações de institucionalização a partir de representações pessoais nos ambientes, onde a interação social é proporcionada (HITT; GONZÁLEZ-MARTIN, 2015). Além disso, o método ACODESA, como método de ensino, combina o trabalho individual e colaborativo para apoiar os alunos na argumentação, discussão produtiva e a evolução de suas representações.

O papel do pesquisador (como professor) nas etapas de aprendizagem colaborativa no ensino, sendo um método de estimular o aprimoramento das argumentações dos participantes (HITT; GONZÁLEZ-MARTIN, 2015). Além disso, o método ACODESA proporciona um equilíbrio entre o uso de tecnologia digital e a produção de lápis e papel em um ambiente de aprendizagem (HITT, 2011).

Em termos de tecnologia digital, o software dinâmico é considerado como ferramentas importantes para apoiar a passagem dos alunos da argumentação para a dedução lógica em matemática (HEALEY; HOYLES, 2002). Entre as diferentes versões de dinâmica software, GeoGebra, combinando as características do sistema de geometria dinâmica e do sistema de álgebra computacional, suporta os processos de prova e argumentação dos alunos e tem um efeito positivo nas atitudes dos alunos em relação à prova (ZENGIN, 2017).

Por outro lado, pesquisas apontam que o uso de ferramentas de software de geometria dinâmica como arrastar e medir pode representar um obstáculo para a argumentação dedutiva (EDWARDS, 1997). Neste ponto, como sugerido por Edwards (1997), utilizei o método ACODESA para sistematizar esses processos e dar suporte ao uso do GeoGebra para promover a argumentação dos alunos em cálculo.

Combinando o uso do método ACODESA com o GeoGebra promove a evolução do conhecimento pessoal significados matemáticos desde os potenciais semióticos do GeoGebra surgem durante as tarefas centradas em artefatos nas etapas do método ACODESA (ZENGIN, 2018).

Hoje em dia, existem muitas maneiras dos alunos se comunicarem nas aulas de matemática. Especificamente, a participação nesta atividade pode envolver diálogo com o instrutor, trabalho em pequenos grupos ou fazer uma apresentação na frente da turma para explicar melhor um conceito que foi aprendido. Pensar matematicamente e desenvolver excelentes habilidades de comunicação são essenciais para um futuro de sucesso.

Há um mal-entendido generalizado de que um argumento é uma solução para um problema. Mais notavelmente, pode-se argumentar independentemente de a conclusão desejada pelo ouvinte estar ou não correta. A correção ou incorreção do raciocínio de um aluno não importa quando se trata de provar ou refutar contra-exemplos (SALSABILA, 2019).

Isso sugere que o debate seja mais amplo sobre o processo de descoberta de provas matemáticas do que sobre qualquer prova particular. Teoremas e julgamentos podem ser comprovados oralmente ou por escrito. Os professores normalmente categorizam a comunicação matemática dos alunos em quatro tipos distintos: oral (falar e ouvir), escrita (tarefas de escrita), oral (leitura) e audição (ouvir a linguagem falada) (UTOMO; SYARIFAH, 2021).

Tem havido alguma pesquisa sobre como incentivar a comunicação matemática dos alunos em relação a determinado conteúdo de matemática. Em primeiro lugar, os professores podem usar planos de aula baseados na Educação Matemática Realística (RME) para ajudar os alunos a comunicar melhor as ideias matemáticas (SUPRIYANTO *et al.*, 2020).

De acordo com Yang *et al.*. (2016), os alunos que precisam melhorar suas habilidades de comunicação matemática usam a tutoria recíproca entre pares apoiada por computador.

Isso é consistente com os resultados de Lestari *et al.* (2019), que usou diferenças de gênero em alunos para determinar a eficácia de uma estratégia de tutoria recíproca assistida pelo GeoGebra para melhorar as habilidades de comunicação matemática dos alunos. Então, para ajudar os alunos a ter um melhor desempenho em leitura e matemática, Fuchs et al. (2020) empregou estratégias de aprendizagem assistida por pares (PALS).

Numerosos estudos sobre habilidades de comunicação matemática foram recentemente conduzidos em vários tópicos matemáticos, incluindo fatoração algébrica (DISASMITOWATI; UTAMI, 2017) e relação e função (SETIYANI *et al.*, 2020).

O método ACODESA (HITT; GONZÁLEZ-MARTÍN, 2015) organiza as atividades de aprendizagem para considerar as circunstâncias únicas do aluno e o contexto social e cultural mais amplo em que estão submersos. A abordagem instrucional é considerada por Fuchs *et al.* (2020) em seu estudo sobre PALS. Existem cinco fases distintas neste processo.

- Trabalho individual: O professor dá à turma uma tarefa desconhecida, e os alunos devem conceber soluções criativas e executá-las.
- Trabalho em equipe: A Fase 1 implica que os alunos trabalhem em pequenos grupos juntos na mesma tarefa. Nesta fase, os alunos têm a tarefa de decidir o que fazer a seguir com base na opinião de seus colegas. Os pôsteres são uma ótima maneira de mostrar o trabalho do aluno e obter feedback do instrutor.
- Debate: A turma discute o cartaz de um grupo que o professor seleciona (normalmente o grupo que errou na resposta). Nesta fase, os instrutores estabelecem as bases para que os alunos construam suas linhas de raciocínio.
- Auto-reflexão: A classe terá dever de casa para completar que o professor atribuiu. Consolidar o conhecimento neste ponto é uma grande ajuda para os alunos.
- Processo de institucionalização: Com base nos resultados do trabalho em grupo dos alunos, o professor fornece feedback e uma explicação do problema.

Portanto, pretende-se a seguir uma sugestão prática para que a aprendizagem do TFC seja realizada com o apoio do software GeoGebra, com o apoio do método de aprendizagem ACODESA.

3.1 Proposta de metodologia ativa englobando o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo e o GeoGebra

As metodologias ativas se constituem em "alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e de aprendizagem no aprendiz, envolvendo-o na aprendizagem por descoberta, investigação ou resolução de problemas" (VALENTE, 2018, p. 27). Essas metodologias contrastam com os modelos de ensino rígidos e com o ensino tradicional, pois dão ênfase ao papel protagonista do aluno e o professor passa a ser um mentor e orientador.

No entanto, Mattar (2017, p. 19) afirma que “metodologias ativas não são novidade”. O autor aponta que Paulo Freire, por exemplo, já defendia uma postura mais ativa dos alunos no processo de aprendizagem. Almeida (2018) corrobora afirmando que essa concepção surgiu a partir de um movimento chamado Escola Nova, em que os “pensadores Willian James, John Dewey e Édouard Claparède defendiam uma metodologia de ensino centrada na aprendizagem pela experiência e no desenvolvimento da autonomia do aprendiz” (ALMEIDA, 2018, p. xi).

O pensamento da Escola Nova converge com as ideias de Freire (1996), que já defendia uma postura mais ativa dos alunos no processo de aprendizagem. Desse modo, é importante destacar que os processos de ensino e aprendizagem estão cada vez mais tendendo ao uso de metodologias ativas, uma vez que, com o avanço tecnológico, o acesso à informação se tornou mais fácil, favorecendo a implementação de diferentes alternativas. Assim, “está ficando cada vez mais claro que a função do professor enquanto transmissor de conteúdo, não faz mais sentido” (VALENTE, 2018, p. 28).

Valente (2018) afirma que as metodologias ativas procuram criar situações de aprendizagem nas quais os aprendizes possam fazer coisas, pensar e conceituar o que fazem e construir conhecimentos sobre os conteúdos envolvidos nas atividades que realizaram, bem como desenvolver a capacidade crítica, refletir sobre as práticas realizadas, fornecer e receber feedback, aprender a interagir com colegas e professor, além de explorar atitudes e valores pessoais.

Tradicionalmente, as metodologias ativas têm sido implementadas por meio de diversas estratégias, dentre as quais se apresentam como metodologias ativas: a) sala de aula invertida, b) método do caso c) peer instruction 11, d) aprendizagem baseada em problemas e problematização, e) aprendizagem baseada em projetos e problemas, f) pesquisa, g) aprendizagem baseada em games e gamificação, incluindo dramatização e simulação, h) design thinking12 , i) avaliação por pares e autoavaliação (MATTAR, 2017).

O método ACODESA promove o desenvolvimento dos sinais dos alunos e significantes relacionados à prova em um ambiente de aprendizagem e permite que as diferentes representações construídas para a prova no GeoGebra evoluam na interação social e comunicação. O software GeoGebra foi discutido como um artefato mediador em o método ACODESA (ZENGIN, 2018) e como uma ferramenta de aprendizagem conexional (ZENGIN, 2019).

A linguagem matemática consiste em palavras, tabelas e ilustrações como gráficos e símbolos que aprimoram a expressão verbal e escrita dos alunos. Os alunos podem aplicar melhor seus conhecimentos quando investigam e explicam um problema matemático, escrevem ou falam sobre os resultados e argumentam. Usar uma representação matemática para explicar como as coisas estão conectadas pode melhorar a capacidade dos alunos de transmitir ideias a outras pessoas.

Como parte das fases de explicação e discussão da solução de problemas (SARI; DARHIM, 2020), os alunos exibirão seu conhecimento de conceitos matemáticos relevantes para o problema em questão. Haverá muitas oportunidades para os alunos demonstrarem sua compreensão e avaliarem a veracidade da afirmação ao longo do curso.

3.2 Apresentação da sequência didática

A sequência didática baseada nas etapas do método ACODESA como trabalho individual, trabalho em equipe, debate, autorreflexão e processo de institucionalização. A princípio deve-se iniciar com a realização de uma processo de familiarização dos alunos com o uso do GeoGebra. Para tal sugere-se empregar as etapas da ACODESA ao se envolverem com várias atividades do GeoGebra baseadas principalmente no uso e construção de modelos.

Além disso, sugere-se ao docente informar e reformar a importância de seguir os objetivos da proposta de atividade, e reforçar as declarações com as propriedades e definições de conceitos durante o uso do GeoGebra (THOMAS *et. al.*, 2010) e o manual de Introdução ao GeoGebra (HOHENWARTER; HOHENWARTER, 2013). Assim, os alunos se acostumaram com as ferramentas relacionadas ao Cálculo no GeoGebra antes da intervenção.

Objetivos:

Geral:

- Desenvolver a compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) por meio do uso do software GeoGebra, permitindo aos alunos visualizar, explorar e aplicar o teorema de maneira prática e conceitualmente sólida.

Específicos:

- Dominar o uso das ferramentas do software GeoGebra para resolver problemas e realizar atividades relacionadas à análise real.

- Compreender os conceitos de partições de um intervalo, integral superior e inferior, funções integráveis e o Teorema Fundamental do Cálculo.
- Explorar as funcionalidades do GeoGebra para visualizar e manipular gráficos de funções.
- Aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular áreas e encontrar antiderivadas.
- Desenvolver habilidades de resolução de problemas usando o GeoGebra como uma ferramenta de apoio.

Objetos de conhecimento matemático: Teorema Fundamental do Cálculo.

Público-alvo: Alunos do curso de Licenciatura em Matemática a partir do 3º período

Tempo estimado: 5 horas/aula

Material necessário: Computadores ou Notebooks, aplicativo do GeoGebra, Datashow, Quadro e lápis.

Desenvolvimento:

1ª etapa:

Na primeira etapa, os alunos realizarão um trabalho individual no qual o professor apresentará uma tarefa desconhecida para a turma. Eles serão desafiados a resolver a problemática utilizando as ferramentas do software dinâmico GeoGebra. Espera-se que os alunos desenvolvam soluções criativas para resolver o problema proposto. Essa etapa permitirá que eles adquiram habilidades na utilização das ferramentas do GeoGebra, promovendo o aprendizado prático e exploratório da aplicação.

Título da atividade: Explorando Funções no GeoGebra: Compreendendo e Visualizando Relações Matemáticas
Nesta atividade, iremos explorar as poderosas ferramentas do GeoGebra para visualizar e compreender diferentes tipos de funções matemáticas. Vamos investigar as propriedades das funções lineares, quadráticas e exponenciais, além de utilizar recursos avançados, como cálculo de derivadas e integrais. Ao longo da atividade, você terá a oportunidade de interagir com os gráficos das funções, alterar seus parâmetros e fazer descobertas matemáticas por meio da experimentação. Vamos começar essa jornada emocionante de exploração e aprendizado!

Atividade: Explorando Funções no GeoGebra

Objetivo: Aprender a usar as ferramentas do GeoGebra para explorar funções.

Passo 1: Abra o GeoGebra

Abra o aplicativo ou a versão web do GeoGebra no seu dispositivo.

Passo 2: Criar um novo arquivo

Crie um novo arquivo clicando em "Novo" ou em "Arquivo" > "Novo" no menu.

Passo 3: Configurações iniciais

Defina as configurações iniciais do GeoGebra, como a escolha do sistema de coordenadas (2D ou 3D) e a exibição da grade, se necessário.

Passo 4: Criando uma função linear

a) Selecione a ferramenta "Função" na barra de ferramentas.
b) Digite uma função linear simples na barra de entrada, como "y = 2x + 1".
c) Pressione Enter para plotar a função no plano.
d) Use a ferramenta "Mover" para arrastar o gráfico da função e observar como os valores de x e y se relacionam.

Passo 5: Criando uma função quadrática

a) Selecione a ferramenta "Função" novamente.
b) Digite uma função quadrática na barra de entrada, como "y = x^2 - 4x + 3".
c) Pressione Enter para plotar a função no plano.
d) Use a ferramenta "Mover" para explorar o comportamento do gráfico da função quadrática.

Passo 6: Criando uma função exponencial

a) Selecione a ferramenta "Função" mais uma vez.
b) Digite uma função exponencial na barra de entrada, como "y = 2^x".
c) Pressione Enter para plotar a função no plano.
d) Use a ferramenta "Mover" para observar como a função exponencial cresce à medida que x aumenta.

Passo 7: Explorando outras ferramentas

Explore outras ferramentas do GeoGebra, como a ferramenta "Tabela" para visualizar os valores de x e y para uma função, a ferramenta "Derivada" para calcular a derivada de uma função e a ferramenta "Integral" para calcular a integral de uma função.

2ª etapa:

Na segunda etapa, os alunos serão organizados em pequenos grupos para realizar um trabalho em equipe. Eles terão a tarefa de resolver uma segunda atividade, o Teorema Fundamental do Cálculo em Análise Real – GeoGebra (link). Nessa fase, os alunos serão encorajados a tomar decisões colaborativas com base nas opiniões de seus colegas. O objetivo é promover a discussão e a troca de ideias entre os membros do grupo, estimulando a construção conjunta do conhecimento. Ao finalizar a atividade, os resultados serão debatidos em sala de aula, permitindo uma análise crítica e aprofundada dos resultados alcançados pelos diferentes grupos.

A segunda etapa será dividida em 4 momentos, nos quais iremos desenvolver as atividades propostas por LACERDA *et. al.*, (2020). Esses momentos foram cuidadosamente planejados para fornecer aos alunos uma experiência completa e abrangente.

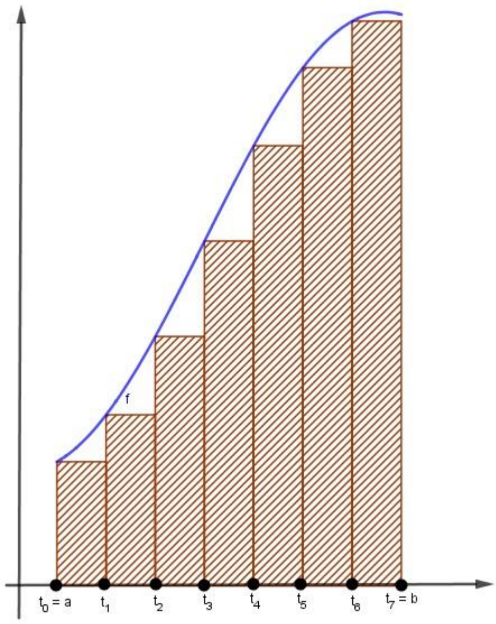
No primeiro momento, iremos realizar uma revisão sobre o assunto matemático das Partições de um intervalo. Esse conceito fundamental da Análise Real será explorado de forma aprofundada, permitindo aos alunos consolidar seus conhecimentos e aprimorar sua compreensão.

Durante essa revisão, exploraremos os principais aspectos das Partições de um intervalo, como pontos de divisão, subintervalos e critérios para a escolha adequada das partições.

Ao final desse primeiro momento, espera-se que os alunos tenham consolidado seu conhecimento sobre as Partições de um intervalo, desenvolvendo habilidades de análise, raciocínio e resolução de problemas nessa área específica da Análise Real. Essa base sólida será fundamental para os próximos momentos do nosso estudo, nos quais exploraremos outros temas relacionados.

Partições de um intervalo
Uma partição de um intervalo é uma coleção finita de subintervalos disjuntos que, juntos, cobrem completamente o intervalo dado.

Para ser mais específico, considere um intervalo $[a, b]$ em que a é o ponto inicial e b é o ponto final. Uma partição desse intervalo é uma coleção de subintervalos disjuntos $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$, onde cada subintervalo I_k é da forma $[x_{k-1}, x_k]$, em que $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} \leq b$.



Esses subintervalos devem satisfazer duas condições importantes:

1. Cobertura completa: A união de todos os subintervalos da partição deve ser igual ao intervalo original $[a, b]$, ou seja, $[a, b] = \cup\ (I_k)$ para k variando de 1 a n.
2. Disjunção: Os subintervalos devem ser disjuntos entre si, o que significa que não devem compartilhar nenhum ponto em comum, exceto possivelmente nos pontos finais. Em outras palavras, para todo k diferente de j, os intervalos I_k e I_j devem ser disjuntos, exceto possivelmente nos pontos x_k e x_j.

Essa divisão em subintervalos permite que estudemos diferentes partes do intervalo de forma mais detalhada e realizemos cálculos específicos para cada subintervalo. A escolha da partição pode ter um impacto nas aproximações e nos resultados obtidos em certos cálculos, como integração de funções ou definição de somas de Riemann.

Em resumo, uma partição de um intervalo é uma coleção de subintervalos disjuntos que cobrem completamente o intervalo original. Essa abordagem é útil em várias áreas da matemática para analisar e calcular propriedades de funções contínuas em intervalos.

No segundo momento, realizaremos uma revisão aprofundada sobre o tema das integrais superiores e inferiores. Esses conceitos essenciais da Análise Real serão explorados com o objetivo de aprimorar a compreensão dos alunos e fortalecer sua capacidade de trabalhar com essas ferramentas.

Ao final desse segundo momento, espera-se que os alunos tenham uma compreensão sólida dos conceitos de integrais superiores e inferiores, assim como a capacidade de aplicá-los de forma adequada em situações diversas. Isso proporcionará uma base sólida para o próximo momento, no qual exploraremos o tema das funções integráveis.

Integrais superiores e inferiores

Considere uma função $f(x)$ definida em um intervalo fechado $[a, b]$. A integral definida dessa função ao longo desse intervalo representa a área entre a curva da função e o eixo x, limitada pelos pontos a e b.

A integral definida é denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$, onde $f(x)$ é a função que está sendo integrada e dx indica a variável de integração.

Agora, vamos falar sobre as integrais superiores e inferiores. Para entender esses conceitos, precisamos considerar partições do intervalo $[a, b]$.

Uma partição P do intervalo $[a, b]$ é uma coleção finita de pontos que divide o intervalo em subintervalos menores. Denotamos essa partição como $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Dado um subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ da partição P, definimos a soma superior S_k e a soma inferior s_k da função $f(x)$ nesse subintervalo da seguinte forma:

$$S_k = sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, para\ todo\ x_{k-1} \leq x \leq x_k,$$
$$s_k = inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, para\ todo\ x_{k-1} \leq x \leq x_k.$$

Aqui, $sup\{\ \}$ representa o supremo, ou seja, o menor limite superior, e $inf\{\ \}$ representa o ínfimo, ou seja, o maior limite inferior.

A integral superior I_s e a integral inferior I_u da função $f(x)$ em relação à partição P são definidas como:

$$I_s(P) = \sum_{k=1}^{n} S_k(x_k - x_{k-1}),$$

$$I_u(P) = \sum_{k=1}^{n} s_k(x_k - x_{k-1}) \,.$$

A integral superior I_s é a soma das áreas dos retângulos cujas alturas são os supremos das funções em cada subintervalo, enquanto a integral inferior I_u é a soma das áreas dos retângulos cujas alturas são os ínfimos das funções em cada subintervalo.

Finalmente, a integral superior $I_s(f)$ e a integral inferior $I_u(f)$ da função $f(x)$ sobre o intervalo $[a, b]$ são definidas como os limites das integrais superiores e inferiores, respectivamente, quando refinamos cada vez mais as partições. Matematicamente, temos:

$$I_s(f) = inf\{I_s(P) : P \text{ é } uma\ partição\ de\ [a, b]\},$$

$$I_u(f) = sup\{I_u(P) : P \text{ é } uma\ partição\ de\ [a, b]\}.$$

Em resumo, as integrais superiores e inferiores nos ajudam a obter estimativas da área entre a curva de uma função e o eixo x em um intervalo específico. A integral superior é a menor estimativa dessa área, enquanto a integral inferior é a maior estimativa. Calcular as integrais superiores e inferiores é fundamental para a definição formal das integrais e para aproximar o valor exato da área sob uma curva.

No terceiro momento, dedicaremos um tempo para uma explicação abrangente sobre Funções Integráveis, abordando as condições necessárias para que uma função seja considerada integrável. Para enriquecer essa abordagem, aplicaremos as atividades propostas por LACERDA *et. al.,* (2020), que se concentram no estudo de funções integráveis, utilizando o software GeoGebra como uma ferramenta de suporte.

As atividades propostas por Lacerda serão aplicadas, possibilitando aos alunos a oportunidade de investigar e analisar funções integráveis, utilizando o GeoGebra como uma ferramenta dinâmica para a visualização e exploração dessas funções. Por meio dessa abordagem prática, os alunos desenvolverão habilidades de análise, interpretação e resolução de problemas, consolidando seu conhecimento sobre funções integráveis e fortalecendo sua compreensão da relação entre a teoria e sua aplicação prática.

Ao final desse terceiro momento, espera-se que os alunos tenham adquirido um entendimento sólido das funções integráveis e das condições necessárias para sua integração. Além disso, espera-se que eles tenham a capacidade de utilizar o software GeoGebra de forma eficaz para explorar e visualizar essas funções, ampliando assim suas habilidades matemáticas e sua capacidade de análise crítica. Esses conhecimentos serão valiosos para a próxima etapa do nosso estudo, em que aplicaremos o Teorema Fundamental do Cálculo.

Funções Integráveis

Uma função $f(x)$ definida em um intervalo fechado $[a, b]$ é considerada integrável se satisfaz certas condições específicas. Existem diferentes definições de integrabilidade, mas aqui vou abordar a definição mais comum, conhecida como integrabilidade de Riemann.

Uma função $f(x)$ é dita integrável no intervalo $[a, b]$ se e somente se ela for limitada no intervalo e sua oscilação total for zero.

1. Limitação: A função $f(x)$ é limitada no intervalo $[a, b]$ se existirem constantes M e N tais que $M \leq f(x) \leq N$ para todo x no intervalo $[a, b]$. Em outras palavras, a função não pode "disparar" para infinito em nenhum ponto dentro do intervalo.
2. Oscilação Total Zero: A oscilação total de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ é definida como a diferença entre o supremo e o ínfimo dos valores da função em todo o intervalo: $sup\{f(x)\} - inf\{f(x)\}$. Uma função é considerada ter oscilação total zero se essa diferença for zero.

Funções integráveis

Segundo Lima (2013), por definição, uma função limitada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se integrável quando

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)x$$

Este valor comum é dito Integral de f e indicado por $\int_a^b f(x)dx$.

Fonte: Material de LACERDA *et. al.*, (2020)

Se uma função $f(x)$ satisfaz essas duas condições - limitação e oscilação total zero - então ela é considerada integrável no intervalo $[a, b]$ de acordo com a definição de Riemann.

Essas condições garantem que a função seja "bem-comportada" o suficiente para permitir o cálculo de sua integral definida ao longo do intervalo. No entanto, é importante destacar que nem todas as funções satisfazem essas condições e, portanto, nem todas as funções são integráveis.

Em resumo, uma função $f(x)$ é considerada integrável no intervalo $[a, b]$ se for limitada no intervalo e tiver oscilação total zero. Essas condições são necessárias para que a função possa ser adequadamente integrada usando as técnicas tradicionais de cálculo de integrais.

Realizaremos as atividades propostas por LACERDA *et. al.*, (2020) com o objetivo de aprofundar nosso aprendizado. As atividades selecionadas são cuidadosamente elaboradas para promover a compreensão dos conceitos abordados, estimular o pensamento crítico dos alunos e fortalecer suas habilidades na resolução de problemas.

Link da atividade: Teorema Fundamental do Cálculo em Análise Real – GeoGebra (www.geogebra.org/m/ypmrgfph)

No quarto momento e último, realizaremos uma breve revisão do Teorema Fundamental do Cálculo e faremos as últimas atividades propostas por Lacerda, encerrando assim a segunda etapa do nosso estudo. Essa revisão final será uma oportunidade para recapitular e consolidar os principais conceitos e aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo.

Durante essa revisão, os alunos terão a chance de relembrar as etapas e os passos envolvidos na aplicação do teorema, bem como discutir suas aplicações em diferentes situações matemáticas. Além disso, eles realizarão as últimas atividades propostas por LACERDA *et. al.*, (2020), que são cuidadosamente projetadas para desafiar os alunos e aprimorar seu domínio do teorema.

Com a conclusão desta etapa, daremos início à próxima fase do nosso plano de aula, que consiste em um debate em sala de aula e o feedback do professor. Durante o debate, os alunos terão a oportunidade de discutir os resultados das atividades realizadas em grupo, compartilhar suas descobertas e trocar ideias sobre o Teorema Fundamental do Cálculo. O professor, por sua vez, desempenhará o papel de mediador, fornecendo orientações e esclarecimentos adicionais quando necessário.

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)
O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma importante relação entre a derivada e a integral de uma função. Existem duas partes essenciais nesse teorema: a primeira parte, também conhecida como Teorema Fundamental do Cálculo (Parte I), e a segunda parte, chamada Teorema Fundamental do Cálculo (Parte II). Parte I do Teorema Fundamental do Cálculo: Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e $F(x)$ uma função definida pela integral de $f(x)$ em relação a x, ou seja, $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, em que t é a variável de integração. Nesse caso, se $f(x)$ for contínua em $[a, b]$, então $F(x)$ é diferenciável em (a, b) e sua derivada é igual à função $f(x)$, ou seja, $dF(x)/dx = f(x)$ para todo x em (a, b). Em outras palavras, o Teorema Fundamental do Cálculo (Parte I) afirma que se você integra uma função contínua $f(x)$, obtém uma função $F(x)$, e se diferenciar essa função $F(x)$, você recupera a função original $f(x)$. Parte II do Teorema Fundamental do Cálculo: Suponha que $f(x)$ seja uma função contínua em um intervalo $[a, b]$ e $F(x)$ seja uma antiderivada de $f(x)$ nesse intervalo, ou seja, $F'(x) = f(x)$ para todo x em $[a, b]$. Nesse caso, a integral definida de $f(x)$ de a até b é igual à diferença das avaliações da antiderivada $F(x)$ nos pontos a e b, ou seja, $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$. Essa segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo estabelece que, se você tem uma antiderivada $F(x)$ da função $f(x)$, então a integral definida de $f(x)$ de a até b pode ser calculada simplesmente avaliando a antiderivada nos limites b e a, e subtraindo o resultado. Essas duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo fornecem uma poderosa relação entre a diferenciação e a integração, permitindo-nos calcular integrais definidas e relacionar as propriedades das funções com as áreas sob as curvas. Em resumo, o Teorema Fundamental do Cálculo (Parte I) afirma que a derivada de uma função integral é a função original, enquanto o Teorema Fundamental do

Cálculo (Parte II) estabelece que a integral definida de uma função pode ser calculada através da diferença das avaliações da sua antiderivada nos limites de integração.

Aplicaremos as atividades propostas por LACERDA *et. al.*, (2020) com o objetivo de consolidar a teoria do Teorema Fundamental do Cálculo e aprimorar a compreensão do seu funcionamento por meio da visualização. Essa abordagem prática, aliada ao uso do software GeoGebra, permitirá aos alunos uma compreensão mais aprofundada e intuitiva do teorema, tornando-o mais tangível e concreto.

Link da atividade: Teorema Fundamental do Cálculo em Análise Real – GeoGebra (www.geogebra.org/m/ypmrgfph)

Através desta breve revisão teórica e das atividades propostas por Lacerda, foi possível visualizar os resultados do Teorema Fundamental do Cálculo utilizando o GeoGebra. Essa ferramenta interativa nos permitiu explorar e compreender a construção dos conceitos de forma mais concreta e visual. Ao utilizar o GeoGebra, pudemos observar graficamente a relação entre as funções, a área sob a curva e as propriedades das antiderivadas. Essa abordagem prática e dinâmica enriqueceu nosso estudo e nos proporcionou uma compreensão mais aprofundada do Teorema Fundamental do Cálculo. Com essa combinação de teoria e prática, finalizamos nosso estudo completo sobre esse importante tema matemático.

3ª etapa:

Na terceira etapa, será realizado um debate em sala de aula para que os alunos discutam os resultados das atividades realizadas em grupo. O professor selecionará um grupo, geralmente aquele que apresentou erros na resposta ou na construção do conceito, para promover um debate entre os alunos, mediado pelo professor. Nessa fase, os instrutores fornecerão as bases necessárias para que os alunos desenvolvam suas próprias linhas de raciocínio e argumentação. O objetivo é estimular a análise crítica dos resultados, permitindo que os alunos compreendam as limitações e os erros cometidos, além de proporcionar oportunidades de aprendizado colaborativo, em que os alunos possam trocar ideias e experiências. O feedback do professor será fornecido, juntamente com uma explicação mais aprofundada do problema, com base nos resultados do trabalho em grupo dos alunos.

4ª etapa:

Na quarta e última etapa, os alunos realizarão uma auto-reflexão sobre o conteúdo estudado. Além disso, o professor atribuirá uma tarefa de casa que visa consolidar o conhecimento adquirido até o momento. Essa etapa tem como objetivo ajudar os alunos a solidificar e aplicar os conceitos aprendidos durante as etapas anteriores.

Durante a auto-reflexão, os alunos são encorajados a refletir sobre o que aprenderam, identificar suas áreas de maior compreensão e possíveis pontos que necessitem de maior revisão. A tarefa de casa atribuída pelo professor proporcionará uma oportunidade adicional para a prática e aplicação dos conhecimentos adquiridos, permitindo que os alunos aprofundem sua compreensão.

Além disso, nessa etapa, ocorre o processo de institucionalização. Com base nos resultados do trabalho em grupo dos alunos, o professor fornecerá feedback individualizado, destacando os acertos e as áreas que necessitam de aprimoramento. Também serão oferecidas explicações adicionais para esclarecer dúvidas e consolidar o entendimento dos conceitos abordados.

Dessa forma, a quarta etapa visa consolidar o conhecimento adquirido, proporcionando uma oportunidade para os alunos praticarem, aplicarem e aprimorarem seus conhecimentos por meio da auto-reflexão, tarefas de casa e feedback personalizado do professor.

Avaliação:

A avaliação ocorrerá de forma contínua ao longo de todas as etapas do processo. Cada etapa terá seus objetivos específicos, e a avaliação será realizada para verificar se esses objetivos foram alcançados. Serão utilizados diferentes métodos de avaliação, como observação em sala de aula, participação dos alunos, trabalhos individuais e em grupo, debates e exercícios práticos.

Além disso, ao final de todas as etapas, será feita uma avaliação global do progresso dos alunos em relação aos objetivos gerais do plano de aula. Essa avaliação permitirá verificar se todos os objetivos propostos foram alcançados e se os alunos adquiriram o conhecimento esperado.

É importante ressaltar que a avaliação não tem apenas a finalidade de atribuir notas, mas também de identificar lacunas de aprendizado e promover o desenvolvimento contínuo dos alunos. O feedback contínuo será fornecido aos alunos, destacando seus pontos fortes e áreas que precisam ser aprimoradas, a fim de estimular o crescimento e a melhoria constante.

Dessa forma, a avaliação contínua no plano de aula proporciona um acompanhamento constante do progresso dos alunos, garantindo que os objetivos sejam alcançados e oferecendo suporte para o desenvolvimento contínuo de cada estudante.

Referências:

LACERDA, G. K. S.; CARVALHO, T. R. S. de; ESQUINCALHA, A. da C.; LUZ, V. da C. A compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo em uma atividade exploratória com o uso do GeoGebra
Understanding the Fundamental Calculus Theorem in an exploratory activity using GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, *[S. l.]*, v. 9, n. 2, p. 35–51, 2020. DOI: 10.23925/2237-9657.2020.v9i2p035-051. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/46630. Acesso em: 19 maio. 2023.

THOMAS, George B.; WEIR, Maucire D.; HASS, Joel. **Cálculo volume 1**. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

4 CONCLUSÃO

A tecnologia é essencial no ensino e aprender matemática. O resultado disso estudo pode ter uma implicação no ensino e aprendizagem de matemática em escolas. Este estudo mostra que existe melhoria no desempenho dos alunos para alunos que estão usando código aberto software e aqueles que usam um software autodesenvolvido curso, no entanto, ele não tem evidências que indicam qual software é melhor, pois este não era o objetivo.

Novos estudos precisam ser realizados para identificar outros fatores que a integração de tecnologia no ensino e aprendizagem de matemática pode beneficiar educadores e alunos.

Conclusivamente, este estudo mostrou que o software GeoGebra tem um impacto positivo no desempenho dos alunos na escola. Os alunos também têm percepções positivas sobre o software GeoGebra em termos de entusiasmo, confiança e motivação. Este software deve ser apresentado aos educadores de Matemática para que os alunos possam explorar o mundo da Matemática de forma mais ampla e tornar os alunos capazes de pensar crítica e criativamente (ARBAIN; SHUKOR, 2015).

A integração de software matemático no ensino e aprendizagem é importante devido à sua capacidade de fazer cálculos rápidos e também ajudar os alunos a visualizar matemática difícilmente através de somente a exposição de conceitos. Vários softwares matemáticos disponíveis como Mathematica, Maple, Geometers Sketchpad, Autograf e outros.

Sendo que para alguns casos, os professores precisam adquirir este software se decidirem usá-lo. No entanto, a existência de software matemático na forma de software de código aberto pode resolver este problema. Existem muitos códigos abertos softwares matemáticos que podem ser baixados gratuitamente a partir de vários sites na Internet.

As habilidades e eficácia desses softwares ainda não foi totalmente explorada. Além disso, pesquisadores ou educadores podem decidir desenvolver seus próprios software para seu uso. Neste estudo, usamos o GeoGebra como forma de software de código aberto e também software desenvolvido especificamente para o propósito do estudo (e-transformação).

A aprendizagem e o ensino da Matemática não devem ser focados apenas na teoria, mas também numa variedade de aprendizagens. Abordagens que envolvem o uso de auxiliares de ensino comprovados para ajudar a estimular o interesse dos alunos pela matemática. Os softwares de matemática disponíveis no mercado ou mesmo online têm facilitado a tarefa do professor de transmitir conhecimento benéfico para os alunos.

No entanto, cabe ao professor utilizar os materiais existentes sem a necessidade de destinar tempo extra para desenvolver outras ajudas de ensino.

Conclusivamente, este estudo mostrou que o software GeoGebra tem um impacto positivo no desempenho dos alunos na escola. tópico Estatísticas. Os alunos também têm percepções positivas sobre o software GeoGebra em termos de entusiasmo, confiança, e motivação. Este software deve ser apresentado aos educadores de Matemática para que os alunos possam explorar o mundo da Matemática de forma mais ampla e tornar os alunos capazes de pensar crítica e criativamente

Alunos que utilizaram o software GeoGebra, e a e-transformação mostraram melhora no desempenho ao comparar os resultados das pontuações pré e pós-testes de ambos grupos. Isso mostrou que o uso de tecnologia pode ter um efeito positivo sobre conquistas estudantes. No entanto, as descobertas não apresentaram nenhuma diferença significativa entre alunos que usaram o GeoGebra em comparação com outro software.

É fundamental destacar que a sequência didática proposta sugere uma aula utilizando uma metodologia ativa em conjunto com um software. Dessa forma, esse trabalho pode servir como referência para futuras pesquisas, promovendo o avanço de estudos realizados por estudantes, professores, pesquisadores e outros interessados no tema.

Por fim, ao longo deste trabalho foi possível observar nas competências, enumeradas pela BNC, a atribuição ao aluno da responsabilidade em relação ao seu aprendizado, bem como a dinamização da sua aprendizagem, ou seja, a produção de sujeitos flexíveis e que consigam perseverar na solução de problemas. A Matemática, como componente curricular, é apresentada como um conhecimento a serem aplicadas e utilizadas pelo aluno nesse auto responsabilização e flexibilização, pois cabe a ele encontrar formas de utilizá-la. A Matemática também é apresentada como ciência crucial na resolução de problemas, inclusive no que remete ao mundo do trabalho.

REFERÊNCIAS

ABRAMOVICH, S. (2013). **Computers in Mathematics Education**: An Introduction. Computers in the Schools 30(1-2): 4-11.

ARBAIN, N; SHUKOR, N. A. **The effects of GeoGebra on students achievement.** Procedia-Social and Behavioral Sciences, v. 172, p. 208-214, 2015.

ASCHENBRENNER, Matthias; DRIES, Lou van den; VAN DER HOEVEN, Joris. **Asymptotic differential algebra and model theory of transseries**. arXiv preprint arXiv:1509.02588, 2015.

BAUMAN, Z.**: entrevista sobre a educação. Desafios pedagógicos e modernidade líquida**. Cadernos de Pesquisa, v. 39, n. 137, p. 661-684, maio/ago. 2009.

BECKER, F. **Epistemologia do Professor de Matemática**. Porto Alegre: Vozes, 2012.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília, DF: Senado Federal, 1988.

BRASIL **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática (1º e 2º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998. v. 3.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Secretaria de Educação Básica, Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL. Resolução CNE/CP n. 22/2019, de 20 de dezembro de 2019. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação).** Distrito Federal, 2019. Disponível em: https://sig-arq.ufpb.br/arquivos/2021129122d91d286294282c60c00b7b6/BCN_Formaco_2019.pdf. Acesso em: 29 de junho de 2022

BROGAN, C. L., PÉREZ, L. M., HUNTER, T. R., Dent, W. R. F., Hales, A. S., Hills, R. E., ... & Tatematsu, K. (2015). **The 2014 ALMA long baseline campaign:** first results from high angular resolution observations toward the HL Tau region. *The Astrophysical journal letters*, *808*(1), L3.

CAMPOS, C**. A educação estatística:** uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da estatística em cursos de graduação. 2007.

DE VILLIERS, M. D. **Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad**. Revista Educação e Matemática, Lisboa, Portugal, no 62, p.31-36, mar./abr. 2001.

DISASMITOWATI, C.E; UTAMI, A.S. **Analysis of students' mathematical communication skill for algebraic factorization using algebra block.** In: International Conference on Research in Education. 2017. p. 72-84.

EDWARDS, C.H. **Cálculo com geometría analítica**. Prentice Hall Hispanoamericana, 1997.

EVES, H. (1953). **Introdução a História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: UNICAMP, 1995.

EVES, H. Introdução à história da matemática, trad. **Higyno H. Domingues. Brasil: Editora UNICAMP**, 2011.

GARDNER, H. **Inteligências Múltiplas:** a teoria na prática. Porto Alegre: Artmed, 1995.

GIL, A. C *et al.* **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2008.

GÜRSUL, F; KESER, H. **The effects of online and face to face problem based learning environments in mathematics education on student's academic achievement**. Procedia-Social and Behavioral Sciences, v. 1, n. 1, p. 2817-2824, 2009.

HEALY, L., & HOYLES, C. (2002). **Software tools for geometrical problem solving:** Potentials and pitfalls. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6(3), 235–256.

HITT, F. (2011). **Construction of mathematical knowledge using graphic** calculators (CAS) in the mathematics classroom. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42(6), 723–735.

HITT, F., & González-Martín, A. (2015). **Covariation between variables in a modelling process:** The ACODESA (collaborative learning, scientifc debate and self-refexion) method. Educational Studies in Mathematics, 88(2), 201–219.

HOHENWARTER, M et al. **Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra**. 2008.

HOHENWATER, M. and K. HOHENWATER (2004). **Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra**. Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference.

JEANNOTTE, Doris; KIERAN, Carolyn. **A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics.** Educational Studies in Mathematics, v. 96, p. 1-16, 2017.

FUCHS. K et al. (2004). **Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra**. Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference.

KAMARIAH, A.B; AHMAD, F; MOHD A.L; W. S., ROHANI A.T (2010). **Exploring secondary school students' motivation using technologies in teaching and learning mathematics.** Procedia-Social and Behavioral Sciences 2(2): 4650-4654.

KEINER, J; KUNIS, S; POTTS, D. **Efficient reconstruction of functions on the sphere from scattered data**. In: PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. Berlin: WILEY-VCH Verlag, 2001.

KNIJNIK, G. **Pesquisar em educação matemática na contemporaneidade: perspectivas e desafios**. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, São Paulo, v. 9, n. 3, p. 1-14, nov. 2016.

KORENOVA, L. (2012). **The use of A digital environment for developing the creativity of mathematically gifted high school students.** 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.

KRUMMHEUER, G. **Mathematics learning in narrative classroom cultures:** Studies of argumentation in primary mathematics education. For the learning of mathematics, v. 20, n. 1, p. 22-32, 1995.

LACERDA, G.K Silva et al. **A compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo em uma atividade exploratória com o uso do GeoGebra** Understanding the Fundamental Calculus Theorem in an exploratory activity using GeoGebra. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, v. 9, n. 2, p. 35-51, 2020.

LAKATOS, E.M; MARCONI, M. **Fundamentos de metodologia científica**, v. 5, 2003.

LESTARI, F.P; AHMADI, F; ROCHMAD, R. **The Implementation of Mathematics Comic through Contextual Teaching and Learning to Improve Critical Thinking Ability and Character**. European Journal of Educational Research, v. 10, n. 1, p. 497-508, 2021.

Li, Q. (2007). Student and teacher views about technology: A tale of two cities? Journal of research on Technology in Education 39(4).

MAGALLANES, A.M. (2003). **Comparison of student test score in a coordinate plane unit using traditional classroom techniques versus traditional techniques coupled with an ethnomathematics software at torch middle schoo**l. Tesis Master, National University.

MAHIR, N. (2009). **Conceptual and procedural performance of undergraduate students in integration**. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40(2), 201–211.

NASCIMENTO, A. G. C.; ESQUINCALHA, A. C. **Construção de um GeoGebra Book para estudo de Cálculo e Análise**. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA "DESENVOLVIMENTO CURRICULAR, FORMAÇÃO DE PROFESSORES E TECNOLOGIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA", 1, 2017, Santo Antônio de Pádua, RJ. Anais... Santo Antônio de Pádua: PROPPI/UFF, p. 52-56, 2012.

NASCIMENTO, E. G. A. **Avaliação do uso do Software GeoGebra no Ensino de Geometria: REFLEXÃO DA PRÁTICA NA ESCOLA.** 2012. Actos de la Conferencia Latino-americana de GeoGebra. Uruguai. Disponível em: <http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/67.pdf> . Acesso em: 30 abr. 2023.

PAPANASTASIOU, C. (2002). **Effects of background and school factors on the mathematics achievement.** Educational Research and Evaluation 8(1): 55-70.

PEDEMONTE, B. (2007). **How can the relationship between argumentation and proof be analysed?** Educational Studies in **Mathematics, 66(1), 23–41.**

PRIETO, N., et al. (2013). **Designing Geometry 2.0 learning environments:** a preliminary study with primary school students. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology(ahead-of-print): 1-21.

PRODANOV, Cleber Cristiano; DE FREITAS, Ernani Cesar. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico-2ª Edição**. Editora Feevale, 2013.

RAAB, Clemens G.; REGENSBURGER, Georg. **The fundamental theorem of calculus in differential rings.** arXiv preprint arXiv:2301.13134, 2023.

REIKERÅS, Elin. **Relations between play skills and mathematical skills in toddlers**. ZDM, v. 52, n. 4, p. 703-716, 2020.

ROYATI, A.S; AHMAD, F.M; AYUB, R; AHMAD, T (2010). **The effects of GeoGebra on Mathematics achievement**: Enlightening coordinate geometry learning. Procedia-Social and Behavioral Sciences 8: 686-693.

SALSABILA, E. et al. **Analysis of Mathematical Literacy on Students' Metacognition in Conic Section Material**. In: Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing, 2019. p. 012057.

SANTOS, M. E. K. L dos. AMARAL, L. H. **Avaliação de objetos virtuais de aprendizagem no ensino de matemática**. Artigo. REnCiMa, v. 3, n. 2, p. 83-93, jul/dez 2012.

SARI, D.P et al. **Implementation of REACT strategy to develop mathematical representation, reasoning, and disposition ability**. 2020.

SETIYANI, S; FITRIYANI, N; SAGITA, L. **Improving Student's Mathematical Problem Solving Skills through Quizizz**. Journal of Research and Advances in Mathematics Education, v. 5, n. 3, p. 276-288, 2020.

SILVA, M.F. **TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO: Origem, Demonstração e Aplicação.** Orientador: Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda. 2019. 47. Trabalho de Conclusão de Curso - Especialização em Matemática, IFPB - Cajazeiras, 2019.

SMITH, De. **How Effective Is Touch Math for Improving Students with Special Needs Academic Achievement on Math Addition Mad Minute Timed Tests?**. 2002.

SOFTWARE GeoGebra: https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html#:~:text=GeoGebra%20foi%20criado%20em%202001,popularidade%20tem%20crescido%20desde%20ent%C3%A3o. 2023.

SOUZA, E ;RAMALHO, S. **Uma Experiência com Modelagem Matemática para a Abordagem de Conceitos de Físic**a/An Experience with Mathematical Modelling for the Approach of Concepts of Physics. **Acta Scientiae**, v. 14, n. 2, p. 309-325, 2012.

STEWART, James. **Cálculo**. 6 º edição, volume 1. Ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

SUPRIYANTO, A et al. **Teacher professional quality:** Counselling services with technology in Pandemic Covid-19. Counsellia: Jurnal Bimbingan dan Konseling, v. 10, n. 2, p. 176-189, 2020.

TARMIZI, A.F; MD. AYUB, K; ABU, B; AIDAM, S. MD; YUNUS. (2008). **Instructional Efficiency of Utilization of Autograph Technology Vs Handheld Graphing Calculator for Learning Algebra**. International Journal of Education and Information Technologies, 2(3), 184-193. 2023.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D., HASS, J. R. (2010). **Thomas Calculus** (12th ed.). Pearson Education Inc.

THOMPSON, P. W.; BYERLEY, C.; HATFELD, N. (2013). **A Conceptual Approach to Calculus Made Possible by Technology. Computers in the Schools**, 30(1–2), 124–147.

UTOMO, D P; SYARIFAH, D. L. **Examining mathematical representation to solve problems in trends in mathematics and science study:** Voices from Indonesian secondary school students. International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST), v. 5, n. 3, 2021.

VALENTE, J. A. **Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador. O papel do computador no processo ensino-aprendizagem**. In: JOSE ARMANDO VALENTE. (Org.). **Integração das Tecnologias na Educação**. 1 ed. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação a Distância, 2005, p. 22-31. Disponível em: http://www.redebrasil.tv.br/salto/livro/1sf.pdf. Acesso em: 29 jun. 2022.

VERZOSA, D.; GUZON, A. F.; DE LASPEÑAS, MA. L. A. N. . (2014). **Using dynamic tools to develop an understanding of the fundamental ideas of calculus**. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45(2), 190–199.

VOOGT, J. **IT and curriculum processes:** Dilemmas and challenges. International handbook of information technology in primary and secondary education, p. 117-132, 2008.

YANG, S JH; HSIAO, C-C. **Exploring student perceptions, learning outcome and gender differences in a flipped mathematics course.** British Journal of Educational Technology, v. 47, n. 6, p. 1096-1112, 2016.

ZENGIN, Y. **Construction of proof of the Fundamental Theorem of Calculus using dynamic mathematics software in the calculus classroom.** Education and Information Technologies, v. 27, n. 2, p. 2331-2366, 2022.

ZENGIN, Y. **Investigating the use of the Khan Academy and mathematics software with a flipped classroom approach in mathematics teaching**. Journal of Educational Technology & Society, v. 20, n. 2, p. 89-100, 2017.