UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Rafael de Lima Brito

Construções do logaritmo e da exponencial

Rio Tinto – PB
Julho de 2021

Rafael de Lima Brito

Construções do logaritmo e da exponencial

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

Rio Tinto – PB
Julho de 2021

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

B862c Brito, Rafael de Lima.
Construções do logaritmo e da exponencial / Rafael de Lima Brito. – Rio Tinto, 2021.
60 f. : il.

Orientação: Jamilson Ramos Campos.
TCC (Graduação) – UFPB/CCAE.
1. Função logarítmica. 2. Função exponencial. 3. Número de Euler. I. Campos, Jamilson Ramos. II. Título.

UFPB/CCAE CDU 51

Rafael de Lima Brito

Construções do logaritmo e da exponencial

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

Aprovado em 09 de julho de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Laudelino de Menezes Neto - UFPB

Prof. Dr. Hélio Pires de Almeida - UFPB

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos - UFPB
Orientador

Dedicatória

Dedico esse trabalho a minha mãe, Miracelia Cordovei, aos meus irmãos e à minha esposa.

Agradecimentos

Ao inerrante e inefável Deus todo poderoso, criador dos céus e da terra e tudo quanto nela há. Dono da vida.

A minha mãe, Miracelia, que muito lutou por mim, sempre acreditando nos meus sonhos. Ela me deu forças para prosseguir quando mais precisei e mesmo estando tão longe sempre foi uma motivação para continuar caminhando em meio aos obstáculos da vida. Aos meus irmãos, agradeço o carinho e admiração.

A minha mui digníssima esposa Jéssica Alves, o melhor presente dado por Deus, a qual sou muito grato por todo apoio e incentivo desde o primeiro período do curso. Quando nos conhecemos, você foi peça importantíssima e fundamental para que eu não desistisse na caminhada acadêmica. Agradeço também pelo carrinho e pela paciência nesses últimos meses.

Ao meu professor de Matemática, Márcio, que foi um dos primeiros professores que me motivaram na educação. Excelente professor de Matemática, uma das minhas primeiras referências na área de educação Matemática, e que motivou a minha paixão pela área de Ciências Exatas.

Ao meu orientador, Prof. Jamilson R. Campos. Além da grande admiração e carinho, não há palavras suficientes para agradecer pelo oportunidade de ter trabalhado ao seu lado. Ao longo de um ano de pesquisa em que tive o privilégio de participar, pude desenvolver diversas habilidades que já mais pude imaginar. Com certeza és uma das melhores referências da pesquisa cientifica na área da Matemática Pura, área essa que pretendo alcançar.

Gostaria de agradecer a banca, composta pelos professores Hélio Pires de Almeida e José Laudelino de Menezes Neto, pela presença e pelas grandes contribuições nesse trabalho.

Não poderia de deixar de agradecer a todos os professores que fizeram parte da minha formação acadêmica, quer seja de forma direta ou indiretamente. Às professoras Agnes, Claudilene, Renata, Alissá, Janaína, Cristiane Souza, Jussara e as demais professoras do Campus. Aos professores Hélio Pires, Laudelino, Marcos André e Givaldo. Com certeza esses professores e professoras são os pilares da minha formação acadêmica em Matemática.

Aos meus amigos que ganhei durante a graduação e que me ajudaram, quer seja de forma direta ou indiretamente. Antônio, que esteve comigo nos momentos bons e ruins, Cleberson, Jeferson e aos colegas do programa Residência Pedagógica. Meus agradecimentos a todos.

Á UFPB e a Capes pelo apoio financeiro durante esse período de graduação, através do incentivo das bolsas de iniciação à docência nos projetos que tive oportunidade de participar, com o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e Residência Pedagógica.

"Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo o propósito debaixo do céu."

Eclesiastes 3:1

Resumo

O objetivo do nosso trabalho, caracterizado como um estudo bibliográfico, é apresentar algumas construções das funções logarítmica e exponencial. Essas construções exigem certas noções históricas e de calculo infinitesimal e portanto, inicialmente, buscamos fazer algumas considerações acerca do contexto histórico de criação do logaritmo e exponencial, mostrando a importância, sua aplicação e o papel que despenhava na época. Em seguida, apresentamos os conceitos de Análise na Reta necessários para o nosso trabalho. Estabelecemos um pequeno estudo acerca do Número de Euler e então apresentamos a construção da função exponencial seguida da função logarítmica, como sendo a sua inversa. Por fim, faremos o caminho reverso, construindo a função logarítmica por meio da integral e definindo a função exponencial como sendo a sua inversa.

Palavras-chave: Função logarítmica, função exponencial, número de Euler.

Abstract

The aim of our work, characterized as a bibliographic study, is to present some constructions of the logarithmic and exponential functions. These constructions require certain historical notions and some results on infinitesimal calculus. Therefore, we make some considerations about the historical context of the creation of the logarithm and exponential functions and also present the necessary concepts of Real Analysis for our work. So, we establish a small study about the Euler Number and then present the construction of the exponential function followed by the logarithmic function, as its inverse. Finally, we will go the other way around, building the logarithmic function through the integral and defining the exponential function as its inverse.

Keywords: Logarithm function, exponential function, Euler number.

Sumário

Introdução

Ao longo da história da matemática é possível perceber a sua importância no auxilio e desenvolvimento da sociedade e das demais ciências. As diversas aplicações da matemática que existem dentro de todas as áreas do conhecimento, de forma direta e indiretamente, se estabeleceu devido aos grandes avanços dessa ciência, principalmente entre os séculos XVIII e XX. A busca e descoberta por ferramentas matemáticas que otimizassem o tempo de trabalho e que desse conta de cálculos cada vez mais complexos e maiores, foram um dos pontos mais importantes em aplicações como as que aparecem na Física e na Química, por exemplo.

Neste contexto, a definição das funções logarítmica e exponencial nos números reais, desempenharam um papel fundamental no avanço da ciência da época. Com essas definições, conseguiu-se realizar cálculos penosos ou mesmo impossíveis (por conta do tempo que demandava) de modo rápido e seguro. Além disso, mostrou-se que vários fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos são estreitamente relacionados com os logaritmos e exponenciais. De fato esses conceitos permanecem no centro de quase todos os ramos da matemática, pura ou aplicada.

O principal objetivo desse trabalhado é fazer um breve estudo acerca das construções do logaritmo e da exponencial, ou seja, mostrar como eles são definidos. A escolha desse tema surgiu quando o autor estudava a disciplina introdução à Análise Real, no ano de 2019/2020, e percebeu que no livro texto [6], utilizado na disciplina, existe um subtópico no estudo da Integral que fala acerca de uma das construções: A construção da função logarítmica via integral. Acontece que não é comum que os alunos tenham contato com construções do logaritmo e da exponencial num curso de graduação. Muitas vezes sequer se tem contato com essas construções numa pós-graduação.

Além disso, a definição das funções logarítmicas e exponencial envolvem conceitos delicados e sua boa definição está longe de ser algo trivial. Nesse sentido, o trabalho que apresentaremos visa mostrar como são construídas, em detalhes, essas funções.

O trabalho está divido em três capítulos. No primeiro apresentamos o contexto histórico da construção do logaritmo e exponencial, baseado em textos de [2, 3, 10] e [11], com notas importantes e detalhes acerca desses fatos. Falamos um pouco também sobre os principais personagens que influenciaram de alguma forma o desenvolvimentos desses conceitos.

No segundo capitulo, usaremos as obras de [1, 6, 7] e [9] e , dessa forma apresentaremos as preliminares teóricas necessárias ao estudo e à compreensão e fluidez na leitura desse trabalho. Começaremos falando sobre números reais e avançaremos até o estudo da integral. Observamos que, mesmo com a presença desse capítulo de base, usaremos indistintamente diversos resultados bem conhecidos de análise e de matemática elementar.

O último capitulo é dedicado de fato às construções já comentadas acima. Começamos com um pequeno estudo acerca do Número de Euler e então apresentamos a construção da função exponencial seguida da função logarítmica, como sendo a sua inversa. Por fim, apresentamos o caminho reverso, construindo a função logarítmica por meio da integral e definindo a função exponencial como sendo a sua inversa. As principais referências utilizadas aqui foram os trabalhos [1, 4, 5, 6, 7, 8, 9] e [12].

Capítulo 1

Uma breve nota histórica

Nesse capítulo falaremos acerca do contexto histórico da definição do conceito do logaritmo e exponencial, e nesse sentido nos dedicaremos apenas as ideias mais importantes ao longo dessa história. Logo após, falaremos um pouco da importância da chegada desse novo objeto matemático para os estudiosos da época e como eles receberam esse avanço.

Para finalizar, apresentamos alguns detalhes biográficos de figuras importantes da história da Matemática e que contribuíram no desenvolvimento dos logaritmos e da exponencial.

1.1 Contexto histórico

Ao final dos últimos dois séculos e com o grande crescimento da formalização matemática, ou seja, da busca pelo rigor matemático, surgiram estudos de novos campos da Matemática. Esses novos estudos impactaram sobremaneira o desenvolvimento da ciência da época e da atualidade também. Além das várias aplicações diretas na própria Matemática, esses novos conhecimentos são largamente usados também em diversas áreas do conhecimento.

Esse rápido desenvolvimento da matemática tem no século XIX um ponto de partida. Historicamente,

> O século XIX foi descrito frequentemente - e ainda é - como a "idade do rigor". Em uma obra muito utilizada na história da análise matemática, o respeitado historiador I. Grattan-Guinness detalha a contribuição de pensadores dessa época, como Dirichlet, Riemann, Weierstrass, reunindo-os em um capítulo intitulado com essa expressão (Roque [11], 2012, p. 380).

Além do século XIX, descrito como a idade do rigor, os séculos anteriores a este ajudaram a impulsionar o avanço da matemática e também tiveram grande importância histórica.

O século XVII, por exemplo, é considerado um marco para a história matemática e para as demais ciências, devido aos modelos e objetos matemáticos que foram desenvolvidos e que otimizaram vários trabalhos e estudos. Nessa época os matemáticos buscavam ter esses objetos matemáticos bem definidos, provados e com aplicações práticas aos problemas da época, como na física, por exemplo. Neste contexto, o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, obtido de forma independente por Isaac Newton e por Gottfried Leibniz, teve um papel de destaque. Segundo Eves [3], "O grande ímpeto dado à matemática no século XVII foi partilhado por todas as atividades intelectuais e se deveu, em grande parte, sem dúvida, aos avanços políticos, econômicos e sociais da época".

Nesse período, existia uma grande dificuldade para se fazer cálculos com grandes números ou com números com muitas casas decimais, através das quatro operações básicas. Principalmente na física, os avanços dependiam em demasia de cálculos dessa natureza fossem realizados em grande quantidade.

Muitas áreas do conhecimento como a astronomia, a navegação, o comercio, a engenharia e a guerra dependiam muito dos cálculos numéricos. Para facilitar essas grandes demandas de trabalhos surgiram algumas ferramentas que facilitaria esses cálculos, entre elas estão: a notação indo-arábica, as frações decimais e os logaritmos. Nesse trabalho iremos nos ater apenas ao logaritmos, desenvolvidos por John Napier.

O próprio John Napier, que leva a fama de ter definido os logaritmos, dizia em sua obra, *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (1614), que não havia nada mais trabalhoso, e que prejudicasse e atrapalhasse mais os calculadores, do que as multiplicações, divisões, as extrações de quadrados e do cubo de números muito grandes. Isso o motivou a pensar em uma ferramente que pudesse remover essa dificuldade.

É importante dizer que muitos matemáticos da época, de uma forma ou de outra, trabalhavam com o conceito do logaritmo, isto é, com a ideia de como o logaritmo era aplicado, através das substituições multiplicações e divisões por adições e subtrações, como forma de remover essa dificuldade. Isto é, Napier não foi o único a pensar nisso.

Segundo Lima [8], "Jost Bürgi (1552 – 1632), suíço, fabricante de instrumentos astronômicos, matemático e inventor, e John Napier (1550 – 1617), um nobre escocês, teólogo e matemático, cada um deles desconhecendo inteiramente o outro, publicaram as primeiras tábuas de logaritmos". Vale lembrar que isso é muito comum na ciência: ter duas pessoas trabalhando na mesma coisa simultaneamente, mesmo sem se conhecer. O que sabemos é que a influência de Napier foi muito maior do que a de Burgi, provocada pelas suas publicações e pelo seu relacionamento com a universidade. Outro fato é que a definição de Napier era geométrica, enquanto a de Burgi era algébrica.

Nesse sentido,

> Os dois partiram das propriedades das sequencias aritméticas e geométricas, estimulados, provavelmente pelo método de prostaférese. As diferenças entre as obras dos dois homens estão principalmente na terminologia e nos valores numéricos usavam; os princípios fundamentais eram os mesmos.(Boyer [2], 2010, p. 230).

Já a alguns anos antes dos logaritmos de Napier, e por que não dizer de Burgi, muitos matemáticos da época já trabalhavam com certas simplificações de operações através de relações trigonométricas. O próprio John Napier já conhecia fórmulas do tipo

$$\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)].$$

Esses tipos de fórmulas, de certa maneira, facilitavam o cálculo para muitos astrônomos, pelo fato de substituir as operações de multiplicação e divisão por adições e subtrações. Além dessas fórmulas, existiam outras conhecidas como regras prostaferéticas, que significam “adição” e “subtração” do grego.

Nas regras prostaferéticas eram utilizadas para transformar produtos em somas ou diferenças, utilizando as tabelas de funções trigonométricas. Isso tem grande importância para que possamos entender que a ideia de transformar multiplicações e divisões em adições e subtrações, de certa forma, já existia antes dos logaritmos.

No entanto, as regras prostaferéticas tinham algumas desvantagens computacionais e levava-se um bom tempo para resolver certos problemas com elas. Por esse motivo,

> Raramente na história da ciência uma ideia matemática abstrata foi recebida de modo mais entusiástico por toda a comunidade científica do que a invenção dos logaritmos. E dificilmente podemos imaginar uma pessoa com menos probabilidade de realizar essa invenção. Seu nome era John Napier (Maor [10], 2012, p. 1).

Essa nova forma de calcular, via logaritmos, chamou a atenção de todos os pensadores e matemáticos da época, pois a aplicação dessa ferramenta iria facilitar muitos trabalhos de astrônomos, navegadores, comerciantes e entre outros. Isso por que esse instrumento desenvolve um papel maravilho que é o simplificar o calculo aritmético

Nesse sentido a chegada dos logaritmos foi muito comemorada e rapidamente incorporada aos trabalhos de muitos pesquisadores de diversas áreas, oferecendo resultados rápidos e precisos aos mais complexos cálculos.

Dessa forma o sistema de logaritmos usado era simplesmente uma tabela com duas colunas. (Ver tabela 1.1).

n	Logaritmo
2	0.69315
3	1.09861
4	1.38629
6	1.79176
7	1.94591

Tabela 1.1: Tabela simplificada dos logaritmos naturais na base e.

Segundo Lima [7], a cada numero real x na coluna à esquerda corresponde, no mesmo nível a direita, um numero real $L(x)$ chamado de logaritmo de x (naquele sistema). No entanto essa tabela deve satisfazer duas condições:

A) Se os números x da coluna à esquerda estiverem dispostos em ordem crescente, o mesmo deve ocorrer com seus logaritmos $L(x)$ à direita;

B) Se multiplicarmos dois números positivos x e y, o logaritmo $L(x.y)$ do produto deve ser a soma dos logaritmos $L(x)$ e $L(y)$.

Em relação como se operava com os logaritmos,

> Para multiplicar dois números, basta somar seus logaritmos; o resultado é o logaritmo do produto. Para achar o produto, basta ler na tábua, da direita para a esquerda, qual o número que tem aquele logaritmo. Semelhantemente, para dividir dois números basta subtrair os logaritmos. Para elevar um número a uma potência basta multiplicar o logaritmo do número pelo expoente. Finalmente, para extrair a raiz n -ésima de um número, basta dividir o logaritmo do número pelo índice da raiz. (Lima [8], 1996, p. 2).

A tábua de valores de uma função logarítmica podia ser lida tanto da esquerda para a direita, o que é normal, como da direita para a esquerda. Logo, a "tabela inversa" dos logaritmos, lida da direita para a esquerda é, na realidade, a tábua dos valores da função exponencial.

Na terminologia Matemática de hoje uma correspondência como essa, estabelecida por meio de uma tábua de logaritmos, é o que se chama de função. No entanto, é importante salientar que a definição dos logaritmos foi anterior à introdução do conceito de função Matemática. Segundo Boyer [2], o conceito de função logarítmica está implícito na definição de Napier e em toda a sua obra, porém essa ideia não preponderava em seu espirito.

Hoje em dia, os logaritmos podem ser interpretados como expoentes, da seguinte forma: se $n = b^x$, dizemos que x é logaritmo de n na base b. Dessa maneira, as leis dos logaritmos decorrem imediatamente das leis dos expoentes. Trata-se então de mais uma inversão história na matemática já que os logaritmos foram definidos antes de se usarem expoentes. Claro que essa inversão tem a finalidade de tornar, didaticamente, o conceito de logaritmo mais fácil de se compreender. Pelo menos no mundo contemporâneo isso tem sido adotado com frequência.

Embora o logaritmo e seu inverso, a exponencial, tenham desempenhado um papel fundamental no avanço da ciência, como comentamos, com a chegada das calculadoras e dos computadores modernos as tábuas foram aos poucos sendo deixadas de serem utilizadas como instrumento de cálculo. Mesmo assim, o desenvolvimento da matemática e das demais ciências veio mostrar que diversas leis e modelos matemáticos de vários fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos são estreitamente relacionados com os logaritmos e exponenciais. De fato esses conceitos permanecem no centro de quase todos os ramos da matemática, pura ou aplicada.

Para conhecermos um pouco mais sobre essa história e seus personagens, na seção seguinte, vamos apresentar alguns dados biográficos de personagens notáveis já citados no texto acima.

1.2 Biografia de alguns personagens

Nesse ponto, vamos apresentar alguns detalhes biográficos acerca de algumas figuras importantes que contribuíram tanto para a historia da Matemática quanto também para o estudo dos logaritmos.

John Napier

Com o grande crescimento técnico do século XVII, o que acarretou em grande desenvolvimento da economia, astronomia, engenharia, da guerra e da navegação, houve uma demanda muito grande para que a maioria dos trabalhos matemáticos realizados nessas áreas estabelecessem uma forma mais rápida e precisa de fazer cálculos. Nesta direção tivemos algumas invenções que sugiram: as frações decimais, a notação indo-arábica, os logaritmos e em seculos mais tardes vieram os modernos computadores. Um dos grandes expoentes que trabalharam para viabilizar esses cálculos em matemática foi John Napier.

Napier (veja a Figura 1.1) nasceu na Escócia, em um castelo Merchiston, perto de Edimburgo. Era filho do Sir Archibald Napier e de sua primeira esposa, Janet Bothwell. Nasceu do por volta de 1550, mas essa data não é exata, e há vários detalhes referentes a sua infância que são desconhecidos. No entanto, sabe-se que aos treze anos ele foi mandado para a Universidade de St. Andrews, onde estudou religião. No ano de 1571 acabou se casando com Elizabeth Stirling, na sua terra natal, e teve dois filhos.

Figura 1.1: John Napier.

Fonte: [3]

Após a morte da sua esposa, Napier casou-se com Agnes Chisholm, e teve dez filhos. Desses dez filhos, o que teve mais destaque foi o segundo filho, Robert, que tempos mais tarde cuidaria da obra de seu pai. Em 1608, após a morte de seu pai, Napier passou a morar no castelo da família, em Merchiston, e assim passou o resto da sua vida.

Apesar de ser reconhecido na Matemática, as atividades de Napier não indicavam que ele seria promissor nesse ramo, pois o seu interesse estava voltado para a religião, ou seja, no ativismo religioso. Seu interesse era tão grande nisso que ele foi capaz que escrever e publicar seus pontos vista. Nesse sentido,

> [...] Em 1593 publicou um libelo amargo e amplamente lido contra a Igreja de Roma intitulado Plaine Discouvery of the Whole Revelation of Saint John, no qual se propunha a provar que o papa era o Anticristo e que o Criador tencionava pôr fim ao mundo nos anos entre 1688 e 1700. O livro atingiu 21 edições, pelo menos dez ainda em vida do autor, e Napier acreditava piamente que sua reputação com a posteridade repousaria sobre esse livro. (Eves [3], 2011, p. 342).

Essa obra atacava veementemente a igreja católica da época, com acusações de que o papa era o anticristo. Napier era um grande defensor do rei escocês Jaime VI - que em tempos mais tarde se tornaria o rei James I da Inglaterra - para expulsar todos os papas, ateus e hereges. Isso só confirma que ele era violentamente anticatólico e defensor das causas de John Knox e Jaime I.

Por conta dos grandes empasses e discussões na politica e religião da época, Napier buscava distrair a mente em outros áreas do conhecimento e entre essa áreas temos a própria matemática e a ciência. Como fruto dessa dedicação e empenho, quatro dos seus trabalhos entraram para a história da Matemática. Dentre esses,

> [...] São: (1) a invenção dos logaritmos; (2) um engenhoso dispositivo mnemônico, conhecido como regra das partes circulares, para reproduzir fórmulas usadas na resolução de triângulos esféricos; (3) pelo menos duas fórmulas trigonométricas de um grupo de quatro conhecidas como analogias de Napier, úteis na resolução de triângulos esféricos obliquângulos; (4) a invenção de um instrumento, conhecido como barras de Napier ou ossos de Napier, usado para efetuar mecanicamente multiplicações, divisões e extrair raízes quadradas de números (Maor [10], 2012, p. 342).

Segundo consta em Boyer [2], Napier não era matemático profissional, mas apenas se interessava por certos aspectos da matemática, em especial com os que se relacionava com a computação e a trigonometria.

John Napier morreu em sua propriedade no dia 3 de abril de 1617 com a idade 67 anos. Foi enterrado na igreja de St. Cuthbert, em Edimburgo.

Edward Wright

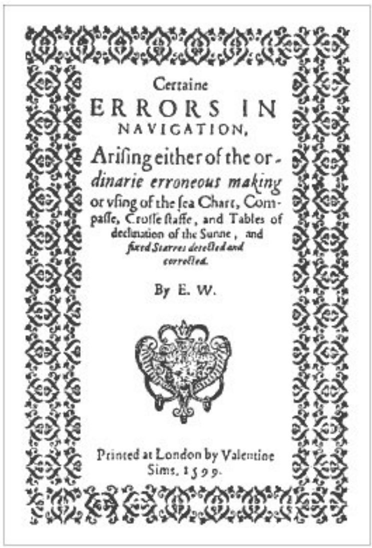
Edward Wright foi um matemático nascido em outubro de 1561 na vila de Garveston, em Norfolk, Reino Unido. Foi educado no Gonville and Caius College, Cambridge, onde se tornou bolsista, de 1587 à 1596, realizando estudos sobre navegações com a licença de Elizabeth I. Ainda em Cambridge, ele conheceu figuras importantes como Robert Devereux, segundo Conde de Essex, e também o matemático Henry Briggs.

Wright foi professor de Matemática para marinheiros mercantes e também foi tutor de matemática do filho de Jaime I, o herdeiro aparente de Henry Frederick, Príncipe de Gales. Ele também foi grande cartografo. Segundo Boyer [2], "em 1599 desenvolveu a base teórica da projeção de Mercator, calculando a relação funcional $D = a \ln \mathrm{tg}(\phi/2 + 45°)$ entre a distância D no mapa a partir do equador e a latitude ϕ."Este trabalho encontra-se no livro "Certaine Errors in Navigation", publicado por Wright em 1599 (ver Figura 1.2).

O trabalho de Napier sobre logaritmos foi escrito em latim, sendo Wright tradutor desses escritos para o inglês. Ele acreditava que assim muitas pessoas teriam acesso a essa literatura sobre os logaritmos de Napier, sendo assim grande divulgador do conhecimento dessa importante ferramenta matemática.

Wright apresenta em seu trabalho as primeiras aparições do número e na Matemática, onde conseguimos observar a importância desse número no estudo dos logaritmos. No entanto, segundo Maor [10]

Figura 1.2: Livro “Certaine Errors in Navigation”, publicado por Wright em 1599.



Certaine
ERRORS IN
NAVIGATION,
Ariſing either of the ordinarie erroneous making
or vſing of the ſea Chart, Compaſſe, Croſſe ſtaffe, and Tables of
declination of the Sunne, and
fixed Starres detected and
corrected.

By E. W.

Printed at London by Valentine
Sims. 1599.

Fonte: [15]

> O papel bem mais familiar do e como uma base “natural” dos logaritmos teve que esperar até o trabalho de Leonhard Euler, na primeira metade do século XVIII, que deu à função exponencial o papel central que ela desempenha no cálculo.” ([10], 2008, p. 10).

Para alguns autores, como Percorari [12], ainda não existia uma base como conhecemos hoje e também não conhecíamos a importância do número e. Este só teve o seu reconhecimento um seculo mais tarde com o desenvolvimento do calculo infinitesimal.

Edward Wright morreu no final de novembro de 1615 e foi enterrado em 2 de dezembro de 1615 em St. Dionis Backchurch (agora demolido) na cidade de Londres. A tradução de Napier por Wright, que incorporava tabelas que Wright havia suplementado e informações adicionais de Henry Briggs, foi concluída pelo filho de Wright, Samuel, e organizada para ser impressa por Briggs.

Henry Briggs

Henry Briggs (ver Figura 1.3) nasceu no ano de 1561 em Yorkshire, Inglaterra. Foi um importante matemático, cujos escritos tiveram grande aceitação em sua época e dentre estes estudos está a obra sobre os logaritmos. A sua obra foi importante, pois aliviou o fardo de cálculos longos e tediosos que muitos matemáticos, astrônomos e outros cientistas que deviam fazer cotidianamente.

Briggs ingressou na St. John’s College, em Cambridge, onde se graduou como bacharel em 1581 e fez mestrado em 1585. Iniciou as suas pesquisas nas áreas de astronomia e

Figura 1.3: Henry Briggs.

Fonte: [14]

navegação com o matemático Edward Wright. Ele também participou ativamente da busca pela redução da lacuna entre a matemática teórica e prática.

Uma de suas publicações inclui uma tabela para encontrar a altura do pólo, a declinação magnética sendo fornecida (1602), e tabelas para o melhoramento da navegação (1610).

A historia conta como a notícia da introdução dos logaritmos enfim chegou até o conhecimento de Henry Briggs. Segundo Maor [10]

> Henry Briggs (1561-1631) era professor de geometria do Colégio Gresham em Londres quando a notícia das tabelas de Napier chegou ao seu conhecimento. Ele ficou tão impressionado com a nova invenção que resolveu ir até a Escócia e se encontrar com o grande inventor em pessoa. ([10], 2012, p. 8).

Entusiasmado com esse trabalho, Brigss foi até o encontro de Napier para conversar sobre essa invenção. Segundo Maor [10], um astrólogo chamado William Lilly (1602-1681) conta um encontro pitoresco entre eles. Primeiro, Napier se negou a acreditar que Brigss viria até a sua casa. Até que certo dia ele chegou e, passando quase um quarto de uma hora sem falar nada,

> Finalmente Briggs diz: "Meu senhor, eu realizei esta longa jornada com o propósito de vê-lo em pessoa, e para saber por que artifício de inteligência e engenhosidade o senhor concebeu esta excelente ajuda para a astronomia, os logaritmos, e, tendo-os descoberto, eu me pergunto por que ninguém mais pensou nisso antes, agora que sabemos que é tão fácil." ([10], 2008, p. 10).

Briggs devotou suas energias para elaborar uma nova tábua de logaritmos contendo os chamados logaritmos decimais, ou simplesmente ordinários, publicando o trabalho em 1617. Isto facilitou muito a utilização desses logaritmos nas aplicações práticas.

Em 1624 ele publicou uma obra chamada “Arithmetica Logarithmica”, que era simplesmente uma tabua ou tabela contendo logaritmos decimais dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, com quatorze casas decimais. Porém ainda existiam algumas lacunas, que foram preenchidas em 1628, tanto pelo próprio Briggs em sua obra “Trigonometrica Britannica”, como também pelos trabalhos do holandês Henry Vlacq.

No ano de 1619 Briggs tomou posse como primeiro professor saviliano de geometria da Universidade de Oxford, sendo o primeiro de uma linhagem de distintos cientistas britânicos, como John Wallis, Edmond Halley e Christopher Wren. Além desse cargo, ele continuou no cargo anterior no Gresham College e assim os manteve até sua morte em 1631.

Capítulo 2

Preliminares

Esse capitulo será dedicado exclusivamente para fundamentar tudo que será usado nos próximos capítulos. Os resultados apresentados podem ser encontrados em [6, 7, 1] e [8] e, por esse motivo, os apresentamos de forma sucinta e objetiva.

Apesar disso, muitos dos conhecimentos mais simples de análise, de cálculo e de matemática elementar serão usados de forma indistinta, isto é, levando em consideração muitos dos conhecimentos prévios do leitor.

2.1 Números Reais

Começamos apresentando, de forma sucinta e objetiva, os principais conceitos sobre os números reais. Nesse sentido a nossa atitude será a de listar todos os aspectos necessários que serão importantes para o entendimento do trabalho. Boa parte das demonstrações serão omitidas e o leitor pode encontrá-las nas referencias bibliográficas citadas acima.

O conjunto dos Números Reais é indicado por $\mathbb{R}$ e será apresentado como sendo um corpo ordenado completo. Logo, surgirão algumas perguntas: por que os reais é um corpo? Por que é ordenado? Por que é completo?

O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo, por que nele estão definidas duas operações, chamada adição e multiplicação, que cumprem certas condições. A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$, sua soma $x + y \in \mathbb{R}$, e multiplicação associa esses elementos ao seu produto $x \cdot y \in \mathbb{R}$. Essas operações obedecem alguns axiomas:

C1. Associatividade: para quisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$ tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

C2. Comutatividade: para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se $x + y = y + x$ e $x \cdot y = y \cdot x$.

C3. Elementos neutros: existem em $\mathbb{R}$ dois elementos neutros distintos 0 e 1 tais que $x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

C4. Oposto e inverso: todo $x \in \mathbb{R}$ possui um oposto aditivo $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$; se $x \neq 0$, existe também um inverso multiplicativo $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

C5. Distributividade: para $x, y, z \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se $x \cdot (x + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

É importe observar que desses axiomas resultam muitas outras propriedades bem familiares de manipulação com os números reais, como as leis do cancelamento, por exemplo:

a) lei do cancelamento para soma: $n + p = m + p \Rightarrow n = m$;

b) lei do cancelamento para o produto: $n \cdot p = m \cdot p \Rightarrow n = m$, se $p \neq 0$.

Com essas propriedades e axiomas, poderemos definir e estabelecer as propriedades de potências, que são importantes no contexto de nosso estudo. As demonstrações dos fatos que enunciaremos poderão ser vistas em [12].

Definição 2.1.1 Dados um número real positivo a e um número natural $n \neq 0$, chama-se potência de base a e expoente n o número a^n dado por

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad (\text{produto de } n \text{ fatores iguais a } a)$$

como não há produtos com um único fator, definimos que para $n = 1$, $a^1 = a$

Vejamos agora, as principais propriedades das potências. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$, então valem as seguintes propriedades:

1. **Multiplicação de potências de mesma base**: $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$

2. **Divisão de potências de mesma base:** para $a \neq 0$ e $m \geq n$, temos $\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$

3. **Potência de potência**: $(a^m)^n$

4. **Potência de um produto**:$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

5. **Potência do quociente**:$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Definição 2.1.2 Sendo a um número real positivo e $\frac{p}{q}$ um número racional, com p e q inteiros e q positivo, definimos

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Para $p = 1$ é claro que $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$.

O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, pois existe um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, chamado conjunto dos números reais positivos, que cumpre as seguintes condições:

P1. A soma e o produto de números reais positivos são positivos, ou seja, $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.

P2. Dado $x \in \mathbb{R}$, exatamente um das três alternativas seguintes ocorre: tem-se $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

Um fato importante: se indicarmos com $\mathbb{R}^-$ o conjuntos dos números $-x$ onde $x \in \mathbb{R}^+$, condição P2 nos diz que $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ e os conjuntos $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$ e $\{0\}$ são dois a dois disjuntos. Os elementos $y \in \mathbb{R}^-$ chamam-se números reais negativos.

Exemplo 2.1.3 Todo número real $x \neq 0$ tem quadrado positivo. Com efeito, se $x \in \mathbb{R}^+$, então $x^2 = x \cdot x \in \mathbb{R}^+$ por P1. Se $x \notin \mathbb{R}^+$, então (como $x \neq 0$) $-x \in \mathbb{R}^+$ logo, ainda por causa de P1., temos $x^2 = (-x) \cdot (-x) \in \mathbb{R}^+$. Em particular 1 é um número positivo por que $1 = 1^2$.

Sendo $\mathbb{R}$ um corpo ordenado é possível definir nele uma relação de ordem: quando escrevemos $x < y$ isso significa que $y - x \in \mathbb{R}^+$. Nesse caso, escreve-se também $y > x$ e diz-se que y é maior do que x. Em um caso particular, $x > 0$ significa que $x \in \mathbb{R}^+$, isto é, x é positivo, do contrário $x < 0$ que dizer que x é negativo, ou seja, que $-x \in \mathbb{R}^+$.

A relação de ordem $<$ em $\mathbb{R}$ satisfaz as propriedades:

i Transitividade: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$.

ii Tricotomia: dados $x, y \in \mathbb{R}$, ocorre exatamente umas das alternativas $x = y$, $x < y$ ou $y < x$.

iii Monoticidade da adição: se $x < y$ então, para todo $z \in \mathbb{R}$, tem-se $x + z < y + z$.

iv Monotocidade da multiplicação: se $x < y$ então, para todo $z > 0$ tem-se que $xz < yz$. Se $z < 0$, então $x < y$ implica em $yz < xz$.

Um dos fatos importantes sobre a relação de ordem em $\mathbb{R}$ é que ela permite definir o que chamamos de valor absoluto (ou modulo) de um numero real $x \in \mathbb{R}$. A noção de valor absoluto é da maior importância em Análise e para o nosso trabalho.

Vejamos também agora um importante proposição, que usaremos em nosso trabalho.

Proposição 2.1.4 (Desigualdade de Bernoulli) . *Para todo número real $x \geq -1$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem - se $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.*

Demonstração. Ver em [6, pág. 15]. ■

Usaremos a símbolo de $|x|$ para indicar o valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$, valor definido por: $|x| = x$ se $x > 0$, $|0| = 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$.

Não é difícil mostrar que $|x| = \max\{x, -x\}$, o maior dos números reais x e $-x$. Portanto, segue que $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$ sempre ocorre.

O valor absoluto satisfaz, para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$, as propriedades:

i) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdade triangular);

ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

iii) $||x| - |y|| \leq |x - y|$;

iv) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$

Pensando o conjuntos do números reais como uma reta, que chamaremos de "reta real", onde os números serão chamados de pontos, é fato que quando representamos geometricamente elementos x e y de $\mathbb{R}$ como pontos de uma reta, o valor absoluto $|x - y|$ tem o exato significado da distância do ponto x ao ponto y.

O seguinte resultado, muito útil em análise, relacionado a noção de distância é dado pela seguinte proposição, cuja demonstração será omitida:

Proposição 2.1.5 *Sejam $a, x, \delta \in \mathbb{R}$. Tem-se $|x - a| < \delta$ se, e somente se, $a - \delta < x < a + \delta$.*

Esse resultado pode ser posto em notação de subconjuntos especiais dos reais, os chamados intervalos, que têm grande importância quando se estuda o conjunto $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado. Os intervalos são definidos como conjuntos de uma das formas abaixo:

$$
\begin{array}{cc}
[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} & (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\} \\
(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} & (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\} \\
[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} & [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\} \\
(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} & (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\} \\
\multicolumn{2}{c}{(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}}
\end{array}
$$

Com isso, entende-se que o significado da Proposição 2.1.5 da seguinte forma: o intervalo (a - δ, a + δ) é formado pelos pontos que distam menos de δ do ponto a. Ou seja, a proposição nos diz que $|x - a| < \varepsilon$ se, e somente se, x pertence ao intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. De modo semelhante, tem-se $|x - a| \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Para finalizar a caracterização de $\mathbb{R}$, iremos descrevê-lo como um corpo ordenado completo. Esse conceito é um importante fator usado para distinguir $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$, fato esse que o leitor poderá encontrar, com mais detalhes, em [6]. Para isso é necessário definir alguns conceitos importantes.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito limitado superiormente (respectivamente, inferiormente) quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ (respectivamente, $a \in \mathbb{R}$) tal que $x \leq b$ (respectivamente, $a \leq x$) para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso dizemos que b é conta superior de X e a é cota inferior de X. Quando X é limitado superiormente e inferiormente dizemos que X é limitado. Esse fato implica que o conjunto X está contido em algum intervalo $[a, b]$ ou, equivalentemente, que existe um $k > 0$ tal que $x \in X \Rightarrow |x| \leq k$.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado e não-vazio. Chama-se supremo do conjunto X a menor de suas cotas superiores. Explicitamente, dizemos que b é o supremo de X, denotado por $b = \sup X$, quando satisfaz duas condições:

S1) para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;

S2) se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$.

A condição S2) acima pode ser reformulada da seguinte forma: se $c < b$ então existe $x \in X$ com $c < x$. Isso significa que nenhum número real menor do que b pode de ser cota superior de X.

A noção de ínfimo será introduzida de maneira análoga à de supremo. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio e limitado inferiormente. Chama-se de ínfimo de X a maior de suas cotas inferiores. Então, um número real a é ínfimo do conjunto X, escreve-se $a = \inf X$, quando satisfizer as condições seguintes:

I1) para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $a \leq x$;

I2) se $c \leq x$ para todo $x \in X$ então $c \leq a$.

A segunda condição acima pode ser reformulada da seguinte forma: se $a < c$ então existe $x \in X$ com $x < c$. Isso significa que nenhum número real maior do que a pode de ser cota inferior de X.

A noção de supremo serve precisamente para substituir a ideia de maior elemento de um conjunto quando esse maior elemento não existe. Um exemplo básico é o conjunto $[a, b)$: tem-se b como supremo do conjunto, que não possui maior elemento. Essas considerações são análogas para o ínfimo.

A afirmação de que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo significa que todo conjunto não-vazio, limitado superiormente $X \subset \mathbb{R}$ possui supremo $\sup X = b \in \mathbb{R}$. Essa afirmação tem seu análogo para o ínfimo: o conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo pois todo conjunto não-vazio, limitado inferiormente $X \subset \mathbb{R}$ possui ínfimo $\inf X = a \in \mathbb{R}$.

2.2 Sequências e Séries

Uma sequência ou sucessão de números reais é um função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número x_n (lê-se "x índice n"), chamado o n-ésimo termo da sequência.

Existe algumas formas de descrever uma sequência. Podemos escrever $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n), para que possamos indicar que o n-ésimo termo é x_n. Outro fato importante é que não podemos confundir a sequência (x_n) com o conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ dos seus termos. Por exemplo, a sequência $(1, 1, ..., 1, ...)$ não é o mesmo que o o conjunto $\{1\}$.

Uma das características das sequências é que elas podem ser limitadas tanto superiormente como inferiormente. Uma sequência (x_n) é dita limitada superiormente (respectivamente, inferiormente) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$) para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência (x_n) é limitada quando é limitada inferiormente e superiormente. De forma equivalente podemos dizer que a sequência é limitada se existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Diz-se que o número real a é limite da sequência (x_n) de números reais quando, para todo número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ vale a condição $|x_n - a| < \varepsilon$. Escrevemos então $a = \lim x_n$.

Em linguagem simbólica escrevemos:

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

É importante ressaltar que a desigualdade $|x_n - a| < \varepsilon$ pode ser escrita da forma $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, ou seja, x_n pertence ao intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Por esse motivo quando dizemos que $\lim x_n = a$ significa dizer que qualquer intervalo aberto de centro a contem todos os elementos de x_n da sequência, exceto para um número finito de índices n (os índices $n \leq n_0$ tal que n_0 é escolhido em função do raio ε do intervalo aberto).

Portante, podemos dizer que quando $\lim x_n = a$, significa que a sequência (x_n) converge para a, ou tende para a e escreve-se $x_n \to a$. Vejamos agora alguns importantes Teoremas que envolvem limites de sequência . Para começar mostraremos que uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.

Teorema 2.2.1 (unicidade do limite) *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim x_n = b$*, então* $a = b$

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$. Supondo $b \neq a$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que os intervalos abertos $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $J = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ sejam disjuntos. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in I$. Portanto, para todo $n > 0$, temos $x_n \notin J$. Logo não é $\lim x_n = b$. Absurdo. Logo $a = b$. ∎

Teorema 2.2.2 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $a = \lim x_n$. Quando tomamos $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Seja b o menor e c o maior elemento do conjunto finito $\{x_1, ..., x_{n_0}, a-1, a+1\}$. Todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[b, c]$. Portanto, a sequência é limitada. ■

Pelo Teorema 2.2.2, toda sequência convergente é limitada, porém a reciproca não é verdadeira. Um exemplo simples é a sequência $a_n = (-1)^n$ que assume alternadamente os valores $+1$ e -1, portanto, não converge para nenhum desses valores. Entretanto, há uma classe importante de sequências limitadas, as chamadas sequências "monótonas", que são convergentes.

Definição 2.2.3 Diz-se que uma sequência (x_n) é crescente se $x_n < x_{n+1}$ e decrescente $x_n > x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que a sequência é não decrescente se $x_n \leq x_{n+1}$ e não crescente se $x_n \geq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que uma sequência é monótona se ela satisfaz qualquer uma dessas condições.

O Teorema a seguir dá uma condição suficiente para que uma sequência convirja.

Teorema 2.2.4 *Todo sequência monótona limitada é convergente*

Demonstração. Seja (x_n) monótona, digamos não-decrescente, limitada. Escrevemos $X = \{x_1, ..., x_n, ...\}$ e $a = \sup X$. Temos que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$ e daí $\lim x_n = a$. ■

Para uso posterior observemos que, consequência direta da definição do limite, temos

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow \lim(x_n - a) = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n - a| = 0$$

e também são válidas as propriedades: Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, então

1. $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$.
2. $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.
3. $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ se $b \neq 0$.

Após tudo o que vimos de sequências, vejamos agora o caso das series numéricas. No entanto mostraremos apenas as definições características mais importantes das séries para o nosso trabalho. O leitor poderá buscar mais detalhes nas referências mencionadas no começo do capitulo. Portanto, começaremos definindo o que é uma série numérica.

Dizemos que uma série é um soma $s = a_1 + a_2 + ...a_n + ...$ com um número infinito de parcelas. Para que isso tenha sentido vamos explorar o que se chama de somas parciais.

Dada uma sequência (x_n) de números reais, a partir dela formaremos uma sequência (S_n) onde

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad ..., \quad S_n = a_1 + a_2 +, ... + a_n, \quad \text{etc.}$$

Em geral, dizemos que S_n é a soma dos n primeiros termos da sequência (a_n), que é chamada a soma parcial ou reduzida de ondem n associada a essa sequência:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

Logo, formamos um nova sequência infinita (S_n) e se ela converge para um certo número S, iremos definir a soma infinita como sendo esse limite:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = S = \lim S_n = \lim \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

Diremos qual a série converge, caso o limite exista e se a sequência das reduzidas não convergir, diremos que a série $\sum a_n$ é divergente.

Vejamos agora um importante resultado, que caracteriza o termo geral de séries convergentes.

Teorema 2.2.5 *Se $\sum a_n$ é uma série convergente então $\lim a_n = 0$.*

Demonstração. Seja $s_n = a_1 + ... + a_n$. Como a série é convergente, existe $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ e, é claro, tem-se também $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1}$. Logo, temos $a_n = s_n - s_{n-1}$ e assim

$$\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

■

Vejamos agora um exemplo de série, que será importante para o nosso trabalho.

Exemplo 2.2.6 (série geométrica) A série geométrica de razão q é definida por

$$1 + q + q^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

A sua reduzida s_n é soma dos termos de uma progressão geométrica:

$$s_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Sendo $|q| < 1$, o termo geral q^n tende a zero e a expressão acima converge para $\dfrac{1}{1-q}$, que é o limite de s_n ou soma da série geométrica:

$$1 + q + q^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

A série geométrica é divergente se $|q| \geq 1$, pois nesse caso o seu termo geral não tende para 0. O leitor poderá ver mais detalhes em [1].

2.3 Limites de funções e funções contínuas

Nessa seção iremos trazer alguns conceitos básicos sobre limite e continuidade de funções. Os resultados que mostraremos serão necessários para o entendimento acerca de alguns procedimentos que usaremos nas construções alvo de nosso trabalho.

Vejamos, primeiro, alguns conceitos topológicos que serão usados na seção e ao longo do texto.

Diz-se que o ponto a é interior ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando existe um número $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ está contido em X. O conjunto dos pontos interiores de a X chama-se o interior do conjunto X e tem por notação $\text{int}X$. Quando $a \in \text{int}X$ diz-se que o conjunto X é um vizinhança do ponto a. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se aberto quando $A = \text{int}A$, ou sejam quando todos os pontos de A são interiores a A

O fato importante é que o limite de uma sequência pode ser reformulado em termos de conjuntos abertos: Tem-se $a = \lim x_n$ se, e somente se, para todo aberto A contendo a existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in A$.

Dizemos que um ponto a é aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando esse ponto a é limite de alguma sequência de pontos $x_n \in X$. É evidente que todo ponto $a \in X$ é aderente a X, basta tomar $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas pode se ter a como ponto aderente a X sem que a pertença a X. Por exemplo, se $X = (0, +\infty)$, então $0 \notin X$, mas 0 é aderente a X, pois $0 = \lim \frac{1}{n}$, onde $\frac{1}{n} \in X$ para todo n.

Denominamos o fecho de um conjunto X ao conjunto $\overline{X}$ formado por todos os pontos aderentes a X. Um conjunto X diz-se fechado quando $X = \overline{X}$, ou seja, quando todo ponto aderente a X pertencente a X.

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de X quando todo intervalo aberto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, de centro a, contém algum ponto $x \in X$ diferente de a. O conjunto dos pontos de acumulação será representado pela notação X'. Quando a não é ponto de acumulação de X, diz-se que a é um ponto isolado de X. Quando todos os pontos de X são isolados, X chama-se de um conjunto discreto.

Vejamos agora um importante resultado que caracteriza pontos de acumulação. A demostração poderá ser vista em [7] ou [6].

Teorema 2.3.1 *Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *a é um ponto de acumulação de X;*

(b) *a é limite de uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$;*

(c) *Todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade de pontos de X.*

Veremos a partir de agora a noção do limite, sob uma forma mais geral. Novamente, iremos manter a atenção apenas nas ideias mais importantes e necessárias para o nosso trabalho. Caso o leitor queira mais detalhes basta buscar em nossas referências.

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto de número reais, $f : X \to \mathbb{R}$ um função real cujo domínio é X e $a \in X'$ um ponto de acumulação do conjunto X. Dizemos que que o número L é limite de $f(x)$ quando x tende a, escreve-se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

Essa definição pode ser reformulada de forma simbólica:

$$\lim_{\mathrm{x}\to \mathrm{a}} \mathrm{f(x)} = \mathrm{L} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0; \mathrm{x} \in \mathrm{X}, 0 < |\mathrm{x} - \mathrm{a}| < \delta \Rightarrow |\mathrm{f(x)} - \mathrm{L}| < \varepsilon.$$

Podemos dizer de forma informal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ quer dizer que $f(x)$ pode se tornar tão próximo de L quanto se queira desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo, porém diferente de a.

Vale frisar que na definição de limite é essencial que a seja um ponto de acumulação, porém sabemos que um ponto de acumulação pode ou não pertencer ao conjunto X, ou seja, para se calcular limites mesmo que f esteja ou não definida no ponto a. Isto também quer dizer que o limite depende apenas do comportamento de f numa vizinhança de a.

Vejamos agora uma coleção de resultados, cujas demonstrações serão omitidas, que serão úteis em nosso trabalho.

Teorema 2.3.2 (Teorema do sanduíche) *Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$ então $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.*

Teorema 2.3.3 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. A fim de que seja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos (x_n) em $X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, tenha-se $\lim f(x_n) = L$.*

Teorema 2.3.4 ***(Unicidade do limite)****. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.*

Das definições dos limites, valem as operações: Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, com $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Então

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$;

b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$;

c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad se \quad M \neq 0.$

Um caso especial de limite de funções ocorre quando se tem f definida no ponto e o limite igual ao valor de f neste ponto. Vejamos isso com mais detalhes.

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se contínua no ponto $a \in X \cap X'$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Simbolicamente escrevemos:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Quando uma função não é continua num ponto a dizemos que ela é descontinua nesse ponto. Nesse caso podemos dizer que $a \in X$ é um ponto de descontinuidade de $f : X \to \mathbb{R}$ e isso equivale a afirmar a existência de um número $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, se pode encontrar um $x_\delta \in X$ com $|x_\delta - a| < \delta$, mas $|f(x_\delta) - f(a)$.

O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [7], estabelece uma propriedade bastante razoável de que um função continua num intervalo não pode passar de um valor para o outro sem passar por todos os valores intermediários.

Teorema 2.3.5 (Teorema do valor intermediário) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Como consequência do teorema acima, apresentamos o corolário a seguir, que será oportunamente útil para o nosso trabalho.

Corolário 2.3.6 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua num intervalo I. Então $f(I)$ é um intervalo.*

Demonstração. Quando f é constante, isso é fato obvio pois um ponto é um intervalo degenerado. Do contrário, sejam $\alpha = \inf\{f(x); x \in I\}$ e $\beta = \sup\{f(x); x \in I\}$. Para mostrarmos que $f(I)$ é um intervalo (quer seja aberto, fechado ou simplesmente semi-aberto), de forma que os extremos sejam α e β, basta tomar um número d de forma que $d \in (\alpha, \beta)$. Pela definição de ínfimo e de supremo, existem $a, b \in I$ tal que $\alpha \leq f(a) < d < f(b) \leq \beta$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um $c \in [a, b]$, logo $c \in I$, tal que $f(c) = d$ e assim $d \in f(I)$. Isso mostra que o intervalo aberto $(\alpha, \beta) \subset f(I)$ e assim não existe nenhuma número real menor que α ou maior que β que pode estar em $f(I)$. Portanto, $f(I)$ é um intervalo cujos extremos são α e β. ■

Um último resultado interessante. Ele estabelece que se uma bijeção $f : I \to J$, entre intervalos, é contínua, então sua inversa $f^{-1} : J \to I$ também é contínua.

Teorema 2.3.7 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Toda função contínua injetiva $f : I \to \mathbb{R}$ é monótona e sua inversa $g : J \to I$, definida no intervalo $J = f(I)$, é contínua.*

2.4 Derivada e integral

Vejamos a noção da derivada definida em um ponto. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A derivada da função f no ponto a é dada pelo limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Vale lembrar ao leitor que o limite acima pode ou não existir. Em caso de existência dizemos que f é derivável no ponto a. Quando a função f é derivável em todos os pontos $x \in X \cap X'$ dizemos que a função $f' : X \cap X' \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ é chamada a função derivada de f. Se f' é contínua, diz-se que f é de classe C^1.

Existem algumas formas de descrever a derivada, que são:

$$Df(a), \frac{df}{dx}(a) \quad e \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

Apresentamos um teorema que caracteriza funções deriváveis.

Teorema 2.4.1 *A fim de que $f : X \to \mathbb{R}$ seja derivável no ponto $a \in X \cap X'$ é necessário e suficiente que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in X \Rightarrow f(a+h) = f(a) + c \cdot h + r(h)$, onde $\lim\limits_{x \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. No caso afirmativo. tem-se $c = f'(a)$.*

Como consequência do teorema acima, temos o corolário:

Corolário 2.4.2 *Uma função é contínua nos pontos em que é derivável.*

Demonstração. Com efeito, se a função f é derivável no ponto a, então temos que $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + [\frac{r(h)}{h}]h$, com $\lim_{h \to 0}[\frac{r(h)}{h}] = 0$. Daí, segue que $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$, isto é, f é contínua em a. ■

As seguintes regras operacionais, cujas demonstrações encontram-se em qualquer livro de cálculo, valem para as derivadas:

Teorema 2.4.3 *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$. As funções $f \pm g, f \cdot g$ e f/g(caso $g(a) \neq 0$) são também deriváveis no ponto a, e*

$$\begin{aligned} (f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a), \\ (f \cdot g)'(a) &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \qquad e \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2} \end{aligned}$$

Vejamos um Teorema, e depois um corolário, acerca da derivada e o crescimento local.

Teorema 2.4.4 *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'$, com $f'_+(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a + \delta$ implicam $f(a) < f(x)$.*

Corolário 2.4.5 *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é monótona não-crescente então suas derivadas laterais, onde existem, são ≥ 0.*

A integral, que surgiu historicamente da necessidade de calcular áreas, desempenha um papel importante em nosso trabalho. Por isso, apresentamos agora definições e resultados bem conhecidos sobre a teoria.

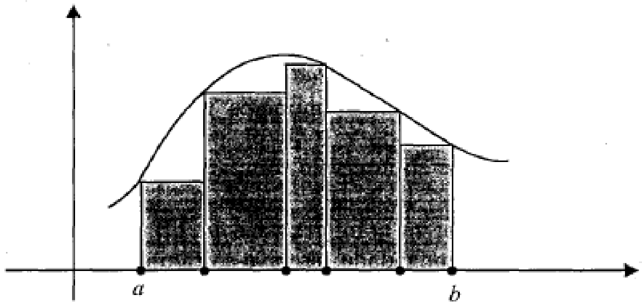
Nesse trabalho iremos usar em demasia o conceito de área abaixo de um gráfico. Dessa forma, o conceito de área consiste no seguinte problema:

Problema 2.4.6 Vamos supor que dada um função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitada no intervalo $[a, b]$. Admitindo que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Considerando o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, formado pelo pontos do plano compreendido entre o eixo das abscissas, o gráfico de f, e as retas verticais $x = a$ e $x = b$. Como calcular área definida por este conjunto?

Uma resposta seria calcular a área da região formada por polígonos contidos no conjunto, admitindo que sabemos calcular a área do polígonos, com aproximações por falta desse número as áreas contidas no conjunto.

Como conhecemos, a integral resolve o problema tomando somas de polígonos retangulares tais que as bases inferiores estão sobre o eixo das abscissas e cujas bases superiores tocam o gráfico da função. Para melhor visualização desse processo ver a Figura 2.1.

Figura 2.1: Aproximação por polígonos retangulares.



Fonte: [7]

O conjunto de pontos na base desses polígonos retangulares é chamado de partição do intervalo $[a, b]$. Dessa forma definimos uma partição da seguinte forma:

Definição 2.4.7 Uma partição do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ que satisfaz

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Dessa forma, com a partição P, e desde que a função f seja limitada, faz sentido considerar os números m_i e M_i, definidos da seguinte forma:

$$m_i = \inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

e

$$M_i = \sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

onde é possível ver que $m_i \leq M_i$, para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Definição 2.4.8 Define-se a soma inferior da função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, em relação a partição P, por:

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Definição 2.4.9 Define-se a soma superior da função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, em relação a partição P, por:

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Pela Definição 2.4.8, quando $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, a soma inferior de Riemann é uma aproximação por falta da área sob o gráfico de f. Enquanto na Definição 2.4.9, de forma análoga, a aproximação ocorre por excesso da área acima do gráfico de f.

Sejam P e Q partições do intervalo $[a,b]$. Diz-se que Q é um refinamento de P se $P \subset Q$. Isso significa que a partição Q, no caso de $P \neq Q$, além dos pontos de P, possui pelo menos um ponto adicional. Então, dada a partição P definida por

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b\}$$

a partição

$$Q = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{j-1} < x'_j < x_j < x_{n-1} < x_n = b\},$$

na qual acrescentamos o ponto x'_j, é um refinamento de P.

Um importante resultado em relação ao refinamento de uma partição é dado pelo

Teorema 2.4.10 *Quando se refina uma partição, a soma inferior não diminuí e a soma superior não aumenta, isto é, com* $P \subset Q \Rightarrow s(f : P) \leq s(f;Q)$ *e* $S(f;Q) \leq S(f;P)$.

Com esse resultado, estão bem definidas as integrais inferior e superior de uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ como sendo, respectivamente,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P s(f;P)$$

e

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P S(f;P).$$

Uma função limitada, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diz-se integrável quando a sua integral superior e sua integral superior são iguais. A esse valor comum, chamamos de integral de Riemann de f e este será indicado por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Vejamos agora um teorema que mostra algumas propriedades da integral.

Teorema 2.4.11 *Sejam* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *integráveis. Então:*

(1) A soma $f + g$ *é integrável e*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(2) O produto de $f \cdot g$ *é integrável. Se* $c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$;

(3) Se $0 < k \leq |g(x)|$ *para todo* $x \in [a,b]$ *então o quociente* $\frac{f}{g}$ *é integrável;*

(4) Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$$

(5) $|f|$ é integrável e $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Para finalizar mostraremos um teorema muito importante em Análise e também para o nosso trabalho. O teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [6, Capítulo 11], estabelece a conexão entre a derivada e a integral.

Teorema 2.4.12 (Teorema Fundamental do Cálculo.) *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo I. As seguintes afirmações para uma função $F : I \to \mathbb{R}$ são equivalentes:*

(a) *F é uma integral indefinida de f, isto é, existe $a \in I$ tal que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$, para todo $x \in I$.*

(b) *F é uma primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$*

Capítulo 3

Construções do logaritmo e da exponencial

Em cursos regulares do ensino fundamental e médio os alunos começam a ter contato com a definição de potências e logaritmos. Esse contato geralmente é difícil para os mesmos por conta da carência de um amadurecimento sobre as definições e um entendimento de seu propósito, principalmente quando se fala em logaritmo.

Esse problema se intensifica quando inicia-se o estudo de funções exponencial e logarítmica. A própria boa definição dessas funções, que carecem de uma explicação fundamental, não é sequer comentada. Mesmo em um curso de matemática (licenciatura ou bacharelado) no ensino superior, embora se encontre material acessível sobre o tema, não se demonstra a boa definição dessas funções.

Nesse capitulo apresentamos construções do logaritmo e da exponencial. Para isso, procedemos nas duas vias possíveis: definiremos a exponencial, de forma rigorosa, e logo após o logaritmo como sua inversa e definiremos o logaritmo, de forma também rigorosa, e a exponencial como sua inversa.

Nas nossas construções usaremos muitas definições, objetos, ideias e resultados do cálculo infinitesimal que, por isso, estão presentes no Capítulo 2.

As construções que iremos apresentar podem ser encontradas em [1, 6, 7, 8, 10] e [13]. Caso o leitor queira mais detalhes, também pode buscar nas referências contidas dentro dessas obras citadas.

Antes de apresentarmos as construções, iremos mostrar um importante elemento, o número e, que "aparece" em vários contextos e problemas em matemática. O leitor que queira saber mais detalhes acerca do número e, pode consultar a referência [10].

3.1 O número e

Segundo historiadores, o número e teria aparecido em problemas ligados a matemática financeira, a saber, em fórmulas de juros compostos. Segundo Maor [10], esse número já era conhecido há muito tempo por vários matemáticos. Ele também aparece na tradução da obra de John Napier(1550 - 1617) sobre logaritmos, intitulada Mirifici logarithmorum canonis. Assim, as origens do número e e também da função exponencial, que falaremos mais a frente, estão ligados a diversos contextos.

Em [5], temos o seguinte exemplo em que o número e surge de modo bem natural. Os valores e a taxa foram escolhidas por conveniência:

Se aplicarmos R\$ $1,00$ com uma taxa de juros anual de 100%, sendo capitalizada anualmente, ao final desse período o montante, valor futuro, acumulado ou obtido será de $M_1 = (1+1)^1 = 2$.

É importante lembrar que essa capitalização pode ocorrer em diversos períodos. Vamos supor que ocorresse semestralmente, e nesse caso o valor acumulado seria de $M_2 = (1 + \frac{1}{2})^2 = 2,25$. Também Poderia ocorrer trimestralmente e nesse caso o montante seria o valor de $M_4 = (1 + \frac{1}{4})^4 \approx 2,44$. Caso queiramos capitalizar várias vezes ao ano, isto é, n vezes, a expressão do montante seria dada por $M_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ e, mesmo sem o conceito de limite, podemos analisar o comportamento da expressão $M_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. (ver Tabela 3.1). Quando o valor de n aumenta perceba que o montante se aproxima de um número bem definido, que é o que se definiu como o número e, que chamamos de Número de Euler.

n	$M_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
10	2,59374
100	2,70481
10000	2,71815
10000000	2,71828

Tabela 3.1: Montante em função de n

O número de Euler também aparece, por exemplo, no problema do envelope errado de Jacob Bernoulli (1654–1705). A pergunta do problema de Bernoulli é a seguinte: se n cartas forem colocadas em n envelopes com endereços diferentes, qual é a probabilidade de cada carta seja colocada em um envelope errado? Quando "n tende ao ∞", foi demonstrado que essa probabilidade se aproxima de $\frac{1}{e}$. O próprio Bernoulli quando estudava o problema de capitalização contínua, mostrou que o limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, quando n tende ao infinito, está entre 2 e 3.

Pelo exposto, a definição do número e pode ser estabelecida pelo limite:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

A rigor matemático, a demonstração de que o número e está bem definido, isto é, que o limite acima existe, de certa forma será apresentada na seção seguinte.

Afirmamos que não é nosso objetivo esgotar a teoria envolvida na definição do número de Euler nem demonstrar todos os interessantes fatos relacionados a ele. Nosso foco, como afirmamos desde o início do trabalho, está nas construções das funções logarítmica e exponencial. Entretanto, isso não nos impede de apresentar algumas características desse número que achamos interessantes.

Por exemplo, vamos mostrar que e é irracional. Para isso vamos apresentar alguns resultados necessários, com demonstrações devidamente referenciadas, que são interessantes por si mesmos.

O primeiro diz que o número e pode ser expresso como uma série numérica e sua demonstração pode ser vista em [5, pág. 8]:

Proposição 3.1.1 *O número e é o limite da sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cujo o termo geral é dado por*

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!},$$

isto é,

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Como consequência da proposição acima, temos:

Corolário 3.1.2 *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*, existe* $0 < \theta_n < 1$ *tal que*

$$e = s_n + \frac{\theta_n}{n\cdot n!}.$$

Demonstração. Pela caraterização da Proposição 3.1.1, dado $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \\ &= s_n + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \end{aligned}$$

Disso, segue que

$$\begin{aligned}
e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right] \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} \\
&= \frac{n+2}{(n+1)^2 \cdot n!} \\
&= \frac{n+2}{(n^2 + 2n + 1) \cdot n!} \\
&= \frac{n+2}{[n(n+2) + 1] \cdot n!} \\
&= \frac{n+2}{\left[(n+2)(n + \frac{1}{n+2})\right] \cdot n!} \\
&= \frac{1}{(n+2)(n + \frac{1}{n+2}) \cdot n!} \\
&< \frac{1}{n \cdot n!}
\end{aligned}$$

e, portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\theta_n \in \mathbb{R}$, com $0 < \theta_n < 1$, tal que

$$e = s_n + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}.$$

■

Agora estamos em condições de mostrar que o número e é irracional.

Proposição 3.1.3 *O número e é irracional*

Demonstração. Vamos supor que o número e é racional, isto é, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, tais que $e = \dfrac{p}{q}$. Sem perder a generalidade, podemos supor ainda $q > 0$. Dessas suposições, segue que $q! \cdot e$ é um número inteiro. Então, pela Proposição 3.1.2, quando fazemos $n = q$, tem-se

$$\begin{aligned}
q! \cdot e &= q! \cdot \left(s_q + \frac{\theta_q}{q \cdot q!}\right) \\
&= q! \cdot \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!} + \frac{\theta_q}{q \cdot q!}\right) \\
&= q! + q! + \frac{q!}{2} + \cdots + \frac{q!}{q!} + \frac{\theta_q}{q}.
\end{aligned}$$

Como $q! + q! + \dfrac{q!}{2!} + \cdots + \dfrac{q!}{q!} \in \mathbb{Z}$, temos

$$\frac{\theta_q}{q} = q! \cdot e - \left(q! + q! + \frac{q!}{2!} + \cdots + \frac{q!}{q!}\right) \in \mathbb{Z},$$

o que é uma contradição, já que $0 < \frac{\theta_q}{q} < 1$. Portanto, e é irracional. ■

Antes de concluirmos essa seção, vejamos apenas mais um detalhe histórico pertinente. Segundo Maor [10], Euler (Leonhard Euler (1707-1783)) já usava a letra e em seus primeiros trabalhos, como o "Meditação sobre Experimentos feitos recentemente sobre o disparo do Canhão", de 1727, e em "Mechanica de Euler", de 1736. Há algumas teorias acerca da origem do símbolo e para essa constante. Há quem diga que Euler escolheu e por ser a primeira letra da palavra exponencial e alguns dizem que Euler tenha escolhido a letra e por ser a inicial de seu próprio nome. Especulações a parte, o símbolo foi amplamente aceito pela comunidade matemática e é usado até hoje.

3.2 Uma construção da exponencial

Com já foi mencionado na seção anterior, o Número de Euler pode ser definido por meio do problema do montante de capital. Definiremos a função exponencial de base e usando o mesmo argumento.

Relembre da seção anterior que, em termos de uma sequência com notação mais usual, o montante acumulado quando capitalizado n vezes ao ano, agora à taxa de valor x, seria dado por

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \tag{3.1}$$

o que representa juros compostos à uma taxa x em n subperíodos.

Se levarmos em conta agora, abstraindo x como taxa de juros e considerando agora x um número real qualquer, essa formulação da sequência (x_n) nos levará exatamente ao que definiremos como a função exponencial de base e.

Para entendermos o processo, analisaremos o comportamento da sequência (x_n) em (3.1) buscando provar sua convergência.

Mas antes disso, um fato. Vale a seguinte desigualdade relacionando as médias aritmética e geométrica: se $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, temos

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdot + a_n}{n}.$$

Mais ainda, a igualdade acima é obtida se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

O lema técnico abaixo será usado na proposição seguinte, que nos mostrará a monotonia da nossa sequência, isto é, que para $x > 0$, a sequência (x_n) é monótona.

Lema 3.2.1 *Para todos $n, m \in \mathbb{N}$ e $x > 0$ vale a expressão*

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{m+1}.$$

Demonstração. Por simplicidade, faremos a demonstração apenas do caso $x = 1$. O caso geral pode ser demonstrado com as devidas adaptações da técnica.

Como $\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) < 1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, para todos $n, m \in \mathbb{N}$, usando a desigualdade das médias aritmética e geométrica obtemos

$$\sqrt[m+n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}} < \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + (m+1)\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)}{m+n+1} = 1$$

e segue disso que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} < 1.$$

Portanto,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

para todos $n, m \in \mathbb{N}$. ■

Proposição 3.2.2 *Para todo $x > 0$, a sequência (x_n), cujo o termo geral é dado por $x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, é monótona crescente.*

Demonstração. Por conveniência e simplicidade, como no lema anterior, faremos apenas o caso $x = 1$. O caso geral também vale com as devidas adaptações na demonstração.

Usando o Lema 3.2.1, temos

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n(n+2)} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

e assim

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right). \tag{3.2}$$

Como

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^n = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n = \frac{(n+1)^{2n}}{n^n(n+2)^n},$$

substituindo esse cálculo na expressão (3.2), obtemos

$$\frac{(n+1)^{2n}}{n^n(n+2)^n} < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+2}{n+1}.$$

Agora, multiplicando os membros da expressão acima por $(n+2)^n$ e dividindo por $(n+1)^n$ concluímos que

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1},$$

o que precisamente significa $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Como consequência do lema e da proposição anteriores, segue o seguinte corolário:

Corolário 3.2.3 *Para cada $x > 0$ fixo, a sequência (x_n), cujo o termo geral é dado por $x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, é convergente.*

Demonstração. Tomando $m = 1$ no Lema 3.2.1, por exemplo, temos

$$0 < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < (1 + x)^2,$$

e isso vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto (x_n) é limitada. Como a Proposição 3.2.2 nos diz que (x_n) é monótona, segue então do Teorema 2.2.4 que (x_n) é convergente, para todo $x > 0$. ■

Observe que os resultados anteriores, tomando $x = 1$, são a demonstração de que o número de Euler e está bem definido como o limite

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Com tudo isso que expomos, estamos agora em condições de construir o que se denomina a exponencial de base e de um número real x e, consequentemente, a função exponencial de base e:

Definição 3.2.4 Seja $x \in \mathbb{R}$ um número. Definimos a exponencial de base e de x, denotada e^x, por:

- $e^0 = 1$;
- $e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, se $x > 0$, e
- $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$, se $x < 0$.

Com isso está bem definida a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = e^x$, chamada função exponencial de base e.

Observação 3.2.5 a) Vale ressaltar que a função exponencial nunca atinge o valor zero, ou seja, para valores menores que zero $(x < 0)$ no domínio ela irá corresponder, somente, a valores positivos no contradomínio. Isso ocorre por que, nesse caso, a função será dada

por $\dfrac{1}{e^x}$, que é estritamente maior que zero.
b) Repare que, para todo $x > 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{2^n}\right)^{2^n}.$$

Com isso, tudo que fizemos anteriormente, incluindo a definição da função exponencial, poderia ter sido feita levando-se em conta a sequência (x_n) dada por

$$x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{2^n}\right)^{2^n},$$

e utilizaremos, por conveniência, qualquer uma dessas expressões de (x_n) daqui em diante.

Vamos agora apresentar as principais propriedades que caracterizam a função exponencial. Antes disso, vejamos um lema que será útil para esse fim.

Tendo em mente a Observação 3.2.5, usaremos a expressão $x_n = \left(1+\frac{x}{2^n}\right)^{2^n}$ para a sequência (x_n), e temos o seguinte lema:

Lema 3.2.6 *Para todos $x, y \geq 0$, tem-se*

$$(x+y)_n \leq x_n y_n \leq (x+y)_{n+1}.$$

Demonstração. Sendo $x, y \geq 0$, segue que

$$(x+y)_n = \left(1+\frac{x+y}{2^n}\right)^{2^n} \leq \left(1+\frac{x+y}{2^n}+\frac{xy}{2^{2n}}\right)^{2^n} = x_n y_n$$

e mostramos a primeira desigualdade. Em relação a segunda, temos

$$0 \leq (x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy \Rightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$$

e portanto

$$\begin{aligned} x_n y_n = \left(1+\frac{x+y}{2^n}+\frac{xy}{2^{2n}}\right)^{2^n} &\leq \left(1+\frac{x+y}{2^n}+\frac{\frac{(x+y)^2}{4}}{2^{2n}}\right)^{2^n} \\ &= \left(1+2\frac{x+y}{2^{n+1}}+\left(\frac{x+y}{2^{n+1}}\right)^2\right)^{2^n} \\ &= \left(\left(1+\frac{x+y}{2^{n+1}}\right)^2\right)^{2^n} = (x+y)_{n+1}. \end{aligned}$$

■

Proposição 3.2.7 *Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se:*

(a) $e^{x+y} = e^x e^y$;

(b) $e^n = e \cdot e \cdot \ldots \cdot e$ *(produto de n fatores iguais a e.*

(c) $x < y \Rightarrow e^x < e^y$, *isto é, a função exponencial é crescente e, portanto, injetiva.*

Demonstração. (a) Tomando (x_n), (y_n) e $((x+y)_n)$ as sequências da definição de e^x, e^y e $e^{(x+y)}$, respectivamente, pelo Lema 3.2.6 e das propriedades dos limites segue que

$$e^{x+y} = \lim_{n\to\infty}(x+y)_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \leq \lim_{n\to\infty}(x+y)_{n+1} = e^{x+y}$$

e como $e^x e^y = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$, concluímos que vale o resultado.
(b) É consequência imediata no item (a).
(c) Da monotonicidade de (x_n), segue que $1 + x = x_0 \leq x_n \leq e^x$, para todo n e todo x. Isto implica em $e^x > 1$ quando $x > 0$ e assim, pelo item (a), como $y - x > 0$, segue que $e^y = e^{y-x}e^x > e^x$. ■

Vejamos agora uma coleção de resultados que expressam mais algumas propriedades muito importantes da função exponencial de base e.

Proposição 3.2.8 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^x$, é ilimitada superiormente.*

Demonstração. Tomamos $d \in \mathbb{R}$ tal que $e = 1 + d$. Assim, pela Desigualdade de Bernoulli (Proposição 2.1.4), temos $e^n = (1+d)^n > 1 + nd$. Logo, dado qualquer $L > 0$, se escolhemos x como o menor natural n maior que $\dfrac{L-1}{d}$, temos

$$f(x) = e^x = (1+d)^n > 1 + nd > L,$$

isto é, $f(x)$ é ilimitada superiormente. ■

Proposição 3.2.9 *A função exponencial de base e é contínua.*

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que $|e^h - 1| \to 0$, sempre que $h \to 0$. Já sabemos, pela demonstração do item c) da Proposição 3.2.7 que $e^h > 1$, logo $e^h - 1 > 0$. Daí, de modo equivalente, basta mostrarmos que para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $e^{1/n} - 1 < \varepsilon$.

Da Desigualdade de Bernoulli, temos $(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon$ e tomando $n > \dfrac{e-1}{\varepsilon}$ segue que

$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon > e \;\Rightarrow\; 1 + \varepsilon > e^{1/n} \;\Rightarrow\; e^{1/n} - 1 < \varepsilon.$$

Disso, para todo $a \in \mathbb{R}$, temos

$$|f(a+h) - f(a)| = |e^{a+h} - e^a| = |e^a||e^h - 1| \to 0$$

quando $h \to 0$. Assim, segue que

$$\lim_{h \to 0} e^{(a+h)} = e^a \;\Rightarrow\; e^x \text{ é contínua em } a$$

e como a é arbitrário, segue que e^x é contínua. ∎

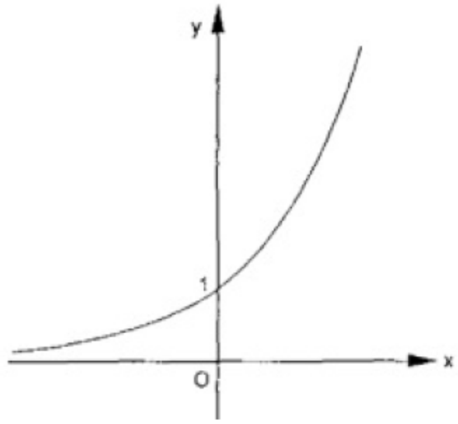
Para a próxima proposição precisamos do seguinte lema:

Lema 3.2.10 *Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe um único $y \in \mathbb{R}$ tal que $e^r \leq y \leq e^s$, para quaisquer racionais r e s com $r \leq x \leq s$.*

Demonstração. Vamos provar apenas a existência, pois a unicidade segue o argumento padrão.

Como a exponencial é crescente, o conjunto $\{a^r : r \text{ é racional e } r < x\}$ é (obviamente) não vazio e limitado superiormente por todos os números a^s, s racional e $s > x$. Este conjunto admite, então, um supremo que chamaremos de y. Assim, temos $e^r \leq y \leq e^s$, para quaisquer racionais r e s com $r \leq x \leq s$. ∎

Figura 3.1: O gráfico da função exponencial $f(x) = e^x$.



Fonte: [10]

Proposição 3.2.11 *A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = e^x$, é sobrejetiva.*

Demonstração. Queremos mostrar que para todo $y > 0$, existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $e^x = y$. Do lema anterior, sempre se pode tomar s racional e uma sequência (r_n) de racionais, com $e^{r_n} < y < e^s$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tais que $e^{r_n} \to y$. Com isso e a sequência (r_n) é limitada superiormente por s e monótona, pois a exponencial é crescente. Por $\mathbb{R}$ ser um corpo ordenado completo, existe um x real tal que $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. Como a exponencial é contínua (ver Proposição 3.2.9), temos

$$e^x = e^{\lim_{n\to\infty} r_n} = \lim_{n\to\infty} e^{r_n} = b.$$

■

O gráfico que ilustra o comportamento do função exponencial e^x é mostrado na Figura 3.2 e com ele podemos observar melhor as principais caraterísticas da função, como o fato de ela ser crescente, de ser ilimitada superiormente, sobrejetiva e contínua.

3.2.1 O logaritmo como inversa da exponencial

A partir da exponencial de base e definiremos, agora, a chamada função logarítmica natural.

A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = e^x$, como vimos na seção anterior, é uma função bijetiva. Portanto a exponencial possui uma inversa com a imagem igual a $\mathbb{R}$, que é denominada de função logarítmica natural e é denotada por ln.

Vejamos então a definição formal do logaritmo natural de um número real $x > 0$ e, consequentemente, a função logarítmica natural.

Definição 3.2.12 Seja $x > 0$ um número real. Definimos o logaritmo natural de x, denotado $\ln(x)$, como o número real y tal que $e^y = x$, isto é

$$\ln(x) = y \iff e^y = x.$$

Fica então bem definida a função $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $\ln(x) = y$.

Como consequência imediata da definição acima e das propriedades da exponencial, obtemos as seguintes propriedades para o logaritmo natural:

Proposição 3.2.13 *Para todo $x, y > 0$, tem-se:*

(a) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$;

(b) $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$;

(c) $\ln(x^n) = n\ln(x)$

Demonstração. Como todas as demonstrações podem ser encontradas em qualquer livro de cálculo, vamos mostrar apenas o item (a), como ilustração. Chamando $u = \ln(x)$ e $v = \ln(y)$, temos $x = e^u$ e $y = e^v$. Pela Proposição 3.2.7, tem-se $xy = e^u e^v = e^{u+v}$ e assim

$$\ln(xy) = u + v = \ln(x) + \ln(y).$$

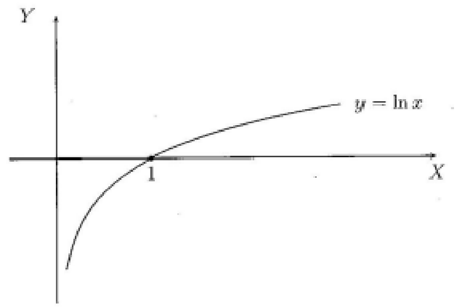
■

A partir de todas as propriedades da função exponencial mostradas na seção anterior, é possível mostrar também que a função logaritmo natural:

- É crescente e não limitada;
- $\ln(1) = 0$, $\ln(x) < 0$ se $x < 1$ e $\ln(x) > 0$ se $x > 1$.

Para uma visualização melhor, mostraremos a seguir o gráfico da função $f(x) = \ln(x)$. A partir do gráfico, na Figura 3.2, podemos ter uma visão mais global do seu comportamento, assim, como as suas principais caraterísticas.

Figura 3.2: Gráfico da função $f(x) = \ln(x)$.



Fonte: [12]

3.2.2 A exponencial de base a

Por fim, mostraremos agora que é possível definir a função exponencial $f(x) = a^x$, de base $a > 0$, e com $a \neq 1$, a partir de tudo o que já sabemos sobre a função exponencial de base e e de sua inversa, a função logarítmica natural.

A motivação vem do seguinte fato, consequência das definições e propriedades mostradas anteriormente: para todo $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, vale

$$a^n = e^{\ln(a^n)} = e^{n\ln(a)}.$$

Disso, é consistente a definição:

Definição 3.2.14 Seja $x \in \mathbb{R}$ um número. Definimos a exponencial de base a de x, denotada a^x, por

$$a^x = e^{x\ln(a)}$$

e com isso está bem definida a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = a^x$, chamada função exponencial de base a.

A boa definição e as propriedades da exponencial de base e garantem que todas as propriedades acima demonstradas para essa função também sejam válidas para a função exponencial de base a. Assim, como os enunciados são essencialmente os mesmos (trocando apenas e por a), não vamos repetir essa propriedades.

3.3 Uma construção do logaritmo

Nesta seção, vamos apresentar a construção da função logarítmica e a partir dela iremos definir a função exponencial como sendo a função inversa da anterior. Esse processo será feito por meio da integral, como uma área, e traz com ele, automaticamente, uma ideia geométrica. Essa construção está baseada na obra de [7, 6] e [8].

A justificativa para construir o logaritmo dessa forma, isto é, por área, segue de alguns fatos. Um deles até já foi dito acima; a motivação geométrica de área abaixo do gráfico de uma hipérbole. Isso implica em uma maior facilidade na inferência, compreensão e demonstração de muitas propriedades da função. Outro fato que justifica essa construção é que, diferente de outros tipos, ela faz surgir o número de Euler e de modo um tanto natural, como também aconteceu na definição da exponencial que apresentamos anteriormente.

A construção do logaritmo que apresentaremos está baseada no cálculo da área abaixo do gráfico da hipérbole $\frac{1}{x}$, $x > 0$, em uma faixa delimitada por retas verticais, uma delas em $x = 1$.

Vejamos a definição formal.

Definição 3.3.1 Seja $x > 0$ um número real. Definimos o logaritmo natural de x, denotado $\ln(x)$, pelo número

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Lembrando que, do conceito de integral como área e considerações sobre os extremos do intervalo de integração, tem-se

$$\int_a^a f(t)dt = 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

e segue de imediato que

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(x) < 0 \quad \text{quando} \quad 0 < x < 1 \quad \text{e} \quad \ln(x) > 0 \quad \text{quando} \quad x > 1.$$

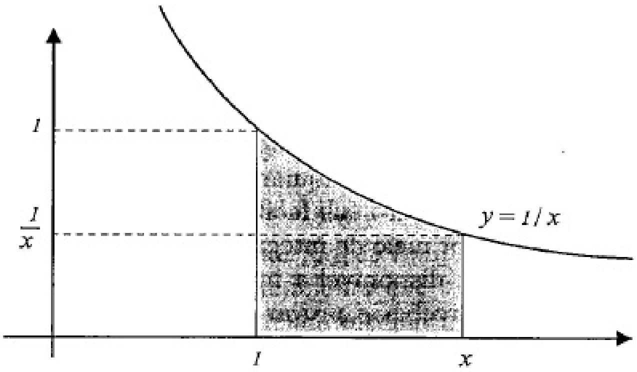
Assim, fica bem definida a função logarítmica natural:

Definição 3.3.2 Está bem definida a função real $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ que, para cada $x > 0$, associa o número

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Geometricamente, a definição nos dá a área da faixa da hipérbole $\int_1^x \dfrac{1}{t} dt$ formada pelos pontos (t, y) cujas as coordenadas cumprem simultaneamente as seguintes condições: $1 \leq t \leq x$, $0 \leq y \leq \frac{1}{t}$. A Figura 3.3 ilustra essa interpretação.

Figura 3.3: $\ln x$ é área da região hachurada.



Fonte: [7]

Uma vez bem definida a construção da função logarítmica natural, passamos ao estudo de suas propriedades.

Começaremos primeiro com propriedades que envolvem operações com os (números) logaritmos naturais.

Proposição 3.3.3 *Sejam x e y números reais positivos. Tem-se* $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Demonstração. Da definição de logaritmo e das propriedades da integral, segue que

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt = \ln(x) + \int_x^{xy} \frac{1}{t} dt.$$

Falta mostrar que $\int_x^{xy} \frac{1}{t} dt = \ln(y)$. Note que, quando s varia de 1 à y, o produto xs varia de x à xy. Logo, a mudança de variável $t = xs$, $dt = xds$ nos dá

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^y \frac{x}{sx} ds = \int_1^y \frac{1}{s} ds = \ln(y),$$

o que prova a proposição. ■

A próxima propriedade pode ser vista como consequência resultado da anterior, entretanto estamos destacando-a como uma proposição.

Proposição 3.3.4 *Seja $x > 0$ um número real. Para todo número racional r, tem-se $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$.*

Demonstração. Consideremos primeiro um número natural n. Aplicando-se repetidas vezes a Proposição 3.3.3, tem-se $\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$. Sabemos que $x^n \cdot x^{-n} = 1$ e daí

$$0 = \ln 1 = \ln(x^n \cdot x^{-n}) = \ln(x^n) + \ln(x^{-n}) = n \cdot \ln x + \ln(x^{-n})$$

donde $\log(x^{-n}) = -n \cdot \ln x$. Logo, o resultado vale para todo $r \in \mathbb{Z}$.

Veremos o caso geral, isto é, para $r = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Já sabemos que $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q = x^p$. Usando os fatos já demonstrados, temos

$$p \cdot \ln(x) = \ln(x^p) = \ln\left[\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q\right] = q \cdot \ln\left(x^{\frac{p}{q}}\right)$$

e assim $\ln\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}\ln(x)$, como queríamos demonstrar. ■

Agora, veremos as propriedades que de fato caracterizam a função logarítmica natural.

Teorema 3.3.5 *A função $f(x) = \ln(x)$ é derivável, no seu domínio, com $(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$.*

Demonstração. O Teorema Fundamental do Cálculo já demonstra imediatamente esse resultado. Mas mesmo assim vamos apresentar uma demonstração. Sendo $x_0 > 0$ fixado arbitrariamente, temos

$$q(x) = \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} (\frac{1}{t})dt \tag{3.3}$$

Se $x > x_0$, usando a interpretação de área abaixo da hipérbole, temos a relação

$$\frac{1}{x}(x - x_0) \leq \int_{x_0}^{x} (\frac{1}{t})dt \leq \frac{1}{x_0}(x - x_0)$$

que aplicada em 3.3 resulta em $\dfrac{1}{x} \leq q(x) \leq \dfrac{1}{x_0}$. Isso implica que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} q(x) = \frac{1}{x_0}.$$

De maneira análoga, se mostra o caso $x_0 > x$ e assim f é derivável em x_0. A arbitrariedade de x_0 garante o resultado. ■

Segue imediatamente do teorema anterior os corolários:

Corolário 3.3.6 *A função $f(x) = \ln(x)$ é contínua e crescente (logo, injetiva).*

Demonstração. O resultado decorre do fatos: toda função derivável é contínua e a derivada ser positiva implica que a função é crescente. Todas válidas para a função $f(x) = \ln(x)$. ■

Corolário 3.3.7 *A função $f(x) = \ln(x)$ é sobrejetiva, com domínio $\mathbb{R}_+^*$.*

Demonstração. Como f é continua, sua imagem é um intervalo. Assim, mostrando que f é ilimitada superiormente e inferiormente, segue o resultado. De fato, como

$$\ln(2^n) = n \cdot \ln(2) \text{ e } \ln(2^{-n}) = -n \cdot \ln(2)$$

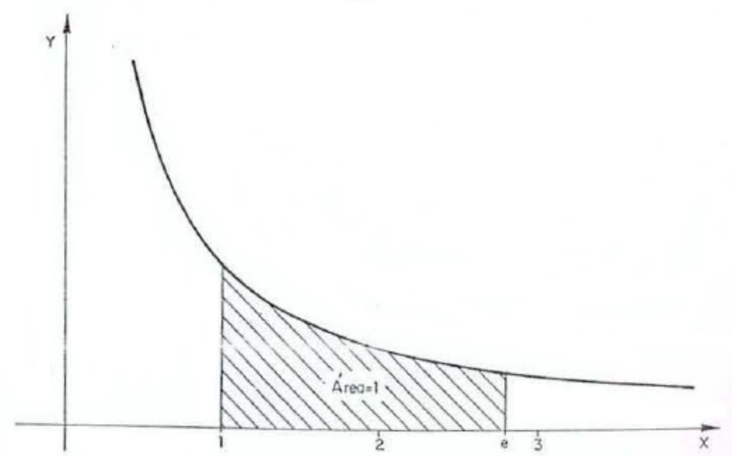
segue que f é ilimitada. ■

A continuidade da função $f(x) = \ln(x)$ implica que a Proposição 3.3.4 vale para qualquer numero real r, isto é, se $x > 0$ e $r \in \mathbb{R}$, tem-se $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$. De fato, basta tomar sequencias de racionais que convergem para r e usar a passagem do limite "'para dentro" da função.

Por outro lado, a sobrejetividade da função $f(x) = \ln(x)$ implica que existe um número real positivo x tal que $\ln(x)$ é igual a 1. Esse número será indicado pela letra e, que é considerado a base dos logaritmos naturais. Portanto, a afirmação de que $\ln(x) = 1$ e $x = e$ são equivalentes.

O gráfico abaixo mostra exatamente essa situação, isto é, para o caso de $x = e$. (Ver Figura 3.3)

Figura 3.4: Interpretação geométrica do número e



Fonte: [8]

Não é surpresa para nós que o número e obtido acima é exatamente o número de Euler obtido na construção da exponencial que vimos anteriormente.

O gráfico da função logarítmica natural, na Figura 3.5, permitirá que se tenha uma ideia geral sobre o comportamento desta função.

Figura 3.5: Gráfico da função logarítmica natural

Fonte: [8]

3.3.1 A exponencial como inversa do logaritmo

De forma semelhante ao que fizemos anteriormente para a função logarítmica como inversa da exponencial, aqui, a partir da função logarítmica natural, definiremos a chamada função exponencial de base e.

A função logarítmica natural $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(x)$, como vimos na seção anterior, é uma função bijetiva. Portanto possui uma inversa com a imagem igual a $\mathbb{R}_+^*$, que é denominada de função exponencial de base e e é denotada por e^x.

De modo semelhante, vejamos a definição formal da exponencial de um número real x e, consequentemente, a função exponencial.

Definição 3.3.8 Seja x um número real. Definimos a exponencial de x, denotado e^x, como o número real y tal que $\ln(y) = x$, isto é

$$e^x = y \ \Leftrightarrow\ \ln(y) = x.$$

Fica então bem definida a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = e^x$.

Para que não fique repetitivo, não vamos apresentar novamente as propriedades satisfeitas pela exponencial acima definida, que são as mesmas apresentadas na Seção 3.2. Mas, é claro, todas poderiam ser demonstradas como consequência imediata da definição acima e das propriedades do logaritmo.

3.3.2 O logaritmo de base a

Mostraremos agora, como fizemos para a exponencial, que é possível definir a função logarítmica $f(x) = \log_a(x)$, de base $a > 0$, e com $a \neq 1$, a partir de tudo o que já sabemos sobre a função logarítmica natural e de sua inversa, a função exponencial. Isso será feito como consequência das definições e propriedades mostradas.

Desejamos definir a função $f(x) = \log_a(x)$ de modo que

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x.$$

Disso e usando o que sabemos da exponencial, deve ocorrer

$$e^{\ln(x)} = x = a^{\log_a(x)} = e^{\log_a x \cdot \ln(a)}.$$

Portanto, a construção que esse cálculo acima sugere para a função $f(x) = \log_a(x)$ é dada pela definição:

Definição 3.3.9 Seja $x > 0$ um número. Definimos logaritmo de base a de x, denotado $\log_a(x)$, por

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

e com isso está bem definida a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a(x)$, chamada função logarítmica de base a.

A boa definição e as propriedades da função logarítmica natural garantem que as mesmas propriedades também sejam válidas para a função logarítmica de base a e as demonstrações usam exatamente esses argumentos. Não vamos então repetir todas essas propriedades, contudo vamos apenas enumerar alguns exemplos.

São válidas as seguintes propriedades, para a função $f(x) = \log_a(x)$: para todo $x, y > 0$, tem-se

(a) f é crescente e não limitada;

(b) $\log_a(1) = 0$, $\log_a(x) < 0$ se $x < 1$ e $\log_a(x) > 0$ se $x > 1$.

(c) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$;

(d) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$;

(e) $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$

Para finalizar, mostraremos a propriedade de mudança de base do logaritmo. Vale salientar que a mudança de base é uma propriedade de grande importância, pois ela amplia a nossa capacidade de calcular os logaritmos.

Proposição 3.3.10 *Para todo $x > 0$ tem-se $\log_a(x) = \log_b(x) \cdot \log_a(b)$, isto é,*

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)},$$

o que chamamos de mudança de base do logaritmo (da base a para a base b).

Demonstração. Vamos denotar

$$\log_a(x) = \beta, \quad \log_b(x) = \alpha \text{ e } \quad \log_a(b) = \gamma.$$

Daí, da terceira expressão acima temos $a^\gamma = b$ e das outras, usando a injetividade da exponencial, temos $a^\beta = b^\alpha$. Disso segue que

$$(a^\gamma)^\alpha = b^\alpha = a^\beta \;\Rightarrow\; \beta = \alpha\gamma,$$

ou seja,

$$\log_a(x) = \log_b(x) \cdot \log_a(b).$$

■

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo. **Introdução à Análise Matemática**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1999.

[2] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010. 496 p. Tradução de Hygino Hugeuros Domingues.

[3] EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Campinas. Unicamp, 2011. 844 p. Tradução de Hygino Hugeuros Domingues.

[4] FIGUEREDO, Djairo Guedes. **Análise 1**: funções de uma variável. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[5] FIGUEIRA, Ramon Formiga. **O número Euler**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - UFPB. Paraíba, p. 67, 2017.

[6] LIMA, Elon Lages. **Análise Real volume 1**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1996.

[7] LIMA, E. L. **Curso de análise vol. 1**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

[8] LIMA, E. L. **Logaritmos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996. Coleção do Professor de Matemática

[9] MATOS, Marivaldo Pereira. **Série e Equações diferenciais**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2016.

[10] MAOR, E. **E: A história de um número**. 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

[11] ROQUE, T. **Historia da Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

[12] PERCORARI, Mariana. **Logaritmos e Aplicação**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. São Paulo, 2013. Disponivel em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/92409. acesso em: 12 de abr. de 2021

[13] PATRÃO, Mauro. **Cálculo 1: derivada e integral em uma variável**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2011.

[14] VIRTUOUS Tecnologia Educacional. Site **Só Matemática - Biografia de Henry Briggs**. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/biograf/briggs.php>. Acesso em 02 de Mai. de 2021.

[15] WRIGHT, Edward. **Certaine Errors in Navigation**. Londres, 1599.