

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

José Wellington Santos de Souza

**Estudo da fórmula de Cardano–Tartaglia para a resolução de
equações do terceiro grau**

Rio Tinto – PB

2021

José Wellington Santos de Souza

**Estudo da fórmula de Cardano–Tartaglia para a resolução de
equações do terceiro grau**

Trabalho Monográfico apresentado à
Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática como requisito parcial para a
obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Marcos André J. Valcácio

Rio Tinto – PB

2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S729e Souza, José Wellington Santos de.

Estudo da fórmula de Cardano-Tartaglia para a resolução
de equações do terceiro grau / José Wellington Santos
de Souza. – Rio Tinto, 2021.
47 f. : il.

Orientação: Marcos André José Valcácio.
Monografia (Graduação) – UFPB/CCAE.

1. Equações Polinomiais. 2. Fórmula de
Cardano-Tartaglia. 3. Método de Ferrari. I. Valcácio,
Marcos André José. II. Título.

UFPB/CCAE

CDU 51

José Wellington Santos de Souza

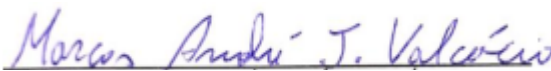
Estudo da fórmula de Cardano–Tartaglia para a resolução de equações do terceiro grau

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

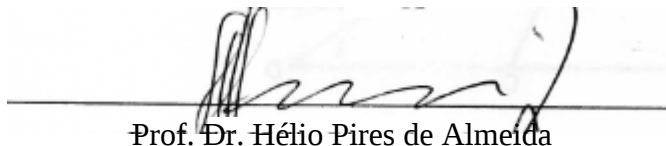
Orientador: Prof. Me. Marcos André José Valcácio

Aprovado em: 7 de julho de 2021

BANCA EXAMINADORA

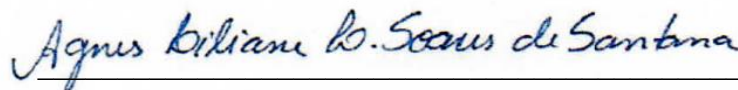


Prof. Me. Marcos André José Valcácio (Orientador)
UFPB / DCX



Prof. Dr. Hélio Pires de Almeida

UFPB / DCX



Profa. Me. Agnes Liliane Lima Soares de Santana
UFPB / DCX

AGRADECIMENTOS

Agradeço acima de tudo ao meu Deus, por diariamente derramar da sua misericórdia e graça sobre minha vida, por ter me conduzido a ingressar na universidade, mais especificamente, no Curso de Licenciatura em Matemática da UFPB, por ter me dado sabedoria e forças para ter sido aprovado em todas as disciplinas que cursei, e para a escrita desse TCC.

Agradeço a toda a minha família, especialmente aos meus pais, Jorge e Cida, por sempre terem apoiado os meus estudos, me incentivando diariamente a dar o melhor de mim, e sempre correr atrás dos meus objetivos.

Agradeço a minha namorada Marcela Lisboa, por sua companhia em muitos momentos de estudo, me motivando e estando sempre pronta para me ajudar no que eu precisasse.

Agradeço ao meu orientador Marcos André José Valcácio, por todo conhecimento compartilhado, pela paciência, confiança e colaboração, não apenas na escrita desse trabalho, mas em toda minha formação acadêmica.

Agradeço a todos os professores do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba / Campus IV que me ensinaram, e contribuíram através de todos os seus ensinamentos para meu desenvolvimento pessoal, como aluno e futuro docente.

E agradeço a todos os meus colegas de curso, por todos os bons momentos que compartilhamos juntos, pelas brincadeiras, gargalhadas e troca de conhecimentos.

“Matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda a capacidade que o ser humano conseguir expressar.”

(François Viète)

RESUMO

Nos dias atuais pouco se fala das equações polinomiais de grau maior que dois e, por conta disso, muitos alunos concluem o ensino médio sem saber resolver equações do terceiro grau em sua forma geral por algum método e, muito menos de quarto grau. Diante dessa situação, observamos a importância da realização de um estudo sobre a fórmula de Cardano–Tartaglia. Este estudo tem por objetivo analisar as contribuições da fórmula de Cardano–Tartaglia para a resolução das equações polinomiais de terceiro grau. Para tanto, utilizamos um referencial pertinente, como Boyer (1996), Garbi (2010), Lima (1987) dentre outros. Destacamos as principais definições e alguns resultados correlacionados. Descrevemos a história da descoberta do método geral para a resolução de equações do terceiro grau, citando os matemáticos que se destacaram no processo de obtenção e divulgação da fórmula de Cardano–Tartaglia e as influências dessa fórmula na evolução histórica da Matemática. Apresentamos a demonstração da fórmula de Cardano–Tartaglia e sua aplicação, além do estudo sobre a relação entre o discriminante e as raízes da equação do terceiro grau. Mostramos a relevância dessa fórmula na resolução de equações polinomiais de terceiro grau, na descoberta dos números complexos e na busca por métodos algébricos para a resolução de equações de grau quatro ou maior. Concluímos esse estudo com o método de Ferrari para resolução de equações polinomiais de quarto grau, sua demonstração e aplicação.

Palavras-chave: Equações Polinomiais; Fórmula de Cardano–Tartaglia; Método de Ferrari.

ABSTRACT

Nowadays, little is said about polynomial equations of degree greater than two and, because of that, many students finish high school without knowing how to solve third-degree equations in its general form by some method, and let alone the fourth degree. In light of this situation, we note the importance of conducting a study on the Cardano–Tartaglia formula. This study aims to analyze the contributions of the Cardano-Tartaglia formula to the solving third-degree polynomial equations. To do so, we use a framework pertinent, such as Boyer (1996), Garbi (2010), Lima (1987) among others. We highlight the main definitions and some correlated results. We describe the history of discovery of the general method for solving third degree equations, citing the mathematicians who stood out in the process of obtaining and disseminating the formula of Cardano–Tartaglia and the influences of this formula on the historical evolution of Mathematics. We present the demonstration of the Cardano-Tartaglia formula and its application, in addition to the study on the relationship between the discriminant and the roots of the third degree equation. We show the relevance of this formula in solving third-degree polynomial equations, in the discovery of complex numbers and in the search for algebraic methods for solving equations of degree four or greater. We conclude this study with the Ferrari method for solving polynomial equations of the fourth degree, their demonstration and application.

Key words: Polynomial Equations; Cardano-Tartaglia formula; Ferrari method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Pedaco do papiro de Rhind	23
Figura 2: Pedaco do papiro de Moscou	23
Figura 3: Frei Luca Pacioli (1455-1514)	24
Figura 4: Nicoló Fontana (1499-1557)	25
Figura 5: Gerônimo Cardano (1501-1576)	26
Figura 6: Capa do livro “Ars Magna” (1545)	28
Figura 7: Capa do livro Quesiti et Inventioni Diverse (1546)	28
Figura 8: Ludovico Ferrari (1522-1565)	40
Figura 9: Évariste Galois (1811–1832)	45

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	DEFINIÇÕES E TEOREMAS PRELIMINARES.....	13
2.1	Polinômios	13
2.2	Teorema do Resto	16
2.3	Teorema das Raízes Complexas	16
2.4	Relações de Girard.....	18
2.5	Teorema das Raízes Racionais	20
3	HISTÓRIA DA FÓRMULA DE CARDANO–TARTAGLIA	23
3.1	A disputa.....	24
4	UM MÉTODO PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 3º GRAU.....	30
4.1	Método de Cardano–Tartaglia	30
4.2	Aplicação da fórmula de Cardano–Tartaglia.....	34
5	UM ESTUDO SOBRE AS EQUAÇÕES DO 4º GRAU	40
5.1	Método de Ferrari	41
5.2	Aplicação do método de Ferrari	43
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	46
	REFERÊNCIAS.....	47

1 INTRODUÇÃO

Nos dias atuais pouco se fala das equações polinomiais de grau maior que dois nas salas de aulas e quando são abordadas é de forma muito superficial, sendo apresentados apenas alguns métodos para equações específicas. Por conta disso muitos alunos concluem o ensino médio sem saber resolver equações polinomiais do terceiro grau em sua forma geral e muito menos de quarto grau. Diante dessa situação, observamos a importância da realização de um estudo mais amplo sobre equações do terceiro grau a partir da fórmula de Cardano–Tartaglia, pois a mesma pode ser utilizada para resolver equações polinomiais do terceiro grau na forma $x^3 + px + q = 0$. Porém, todas as equações polinomiais do terceiro grau na sua forma geral podem ser reduzidas a uma equação deste tipo, através de uma mudança de variável, que torna possível eliminar o termo x^2 , como relata Lima (1987).

A escolha dessa temática surgiu após a observação dos fatos relatados acima, e esperamos através desse trabalho contribuir para um estudo mais amplo sobre as equações polinomiais de terceiro e quarto grau.

Diante do exposto, esse estudo tem por objetivo analisar as contribuições da fórmula de Cardano–Tartaglia no estudo das equações polinomiais.

Estruturamos em seis capítulos. Iniciamos com esse capítulo 1. No capítulo 2 mostramos a importância do estudo das equações polinomiais de terceiro e quarto grau e algumas definições de conteúdos relevantes para a realização desses estudos. Esses conteúdos consistem na definição de polinômio, algumas definições relacionadas aos polinômios, que incluem a definição de grau, de valor numérico, de equação polinomial, de raiz de uma equação polinomial, e das operações com polinômios. A seguir, abordamos os teoremas que serão utilizados nesse estudo: o Teorema do Resto, o Teorema das Raízes Complexas, um Teorema relacionado a polinômios de grau ímpar, o Teorema das Raízes Racionais e as Relações de Girard.

No capítulo 3, apresentamos um levantamento histórico da evolução da Matemática a partir, dos primeiros estudos sobre equações polinomiais pelos babilônicos e egípcios, até o período do Renascimento na Itália, onde mostramos breves biografias sobre os principais pensadores dessa época. Por fim, o desenvolvimento da fórmula de Cardano–Tartaglia, relatando como surgiu, sua transcrição em forma de poema e todos os duelos e debates envolvidos por conta dela.

No capítulo 4, abordamos a fórmula de Cardano–Tartaglia para resolução de equações polinomiais do terceiro grau, utilizando uma linguagem matemática de acordo com nossa

atualidade, mais fácil de ser compreendida e, o detalhadamente do processo que envolve sua demonstração, finalizando com a aplicação dessa fórmula por meio de alguns exemplos. Discutimos, ainda, sobre o discriminante desta fórmula para o conhecimento dos tipos de raízes que a equação polinomial do terceiro grau venha a ter.

No capítulo 5, realizamos um estudo sobre a resolução das equações polinomiais do quarto grau, onde apresentamos o método de Ferrari para a resolução dessas equações, assim como, o passo-a-passo da demonstração e aplicação desse método através de um exemplo. Concluindo, no capítulo 6, que a descoberta das fórmulas para equações polinomiais do terceiro e quarto grau foi muito importante para o desenvolvimento de toda a Álgebra e a Matemática que conhecemos atualmente.

2 DEFINIÇÕES E TEOREMAS PRELIMINARES

Ao longo da história da Matemática observamos que houveram muitas dificuldades para se encontrar métodos algébricos para a resolução das equações polinomiais do terceiro grau e quarto grau, e que os estudos realizados por muitos matemáticos para a resolução dessas equações contribuíram de maneira expressiva para o avanço da matemática, principalmente em relação as teorias das equações e ao desenvolvimento de teorias relacionadas aos números complexos, pois instigou a curiosidade dos matemáticos e pensadores da época a trabalharem com valores negativos em raízes quadradas.

Por meio dessas observações percebemos a importância da descoberta de uma fórmula para a resolução de equações polinomiais do terceiro grau, mais notadamente da fórmula de Cardano–Tartaglia, pois até hoje muitas pessoas têm dificuldades de resolver equações de grau maior que 2, por isso se faz necessário conhecer mais sobre essa fórmula e os impactos que sua descoberta causou em toda história da matemática.

Para compreendermos melhor as equações polinomiais de terceiro e quarto grau, precisamos conhecer algumas definições e teoremas que nos auxiliarão em todo o desenvolvimento do nosso estudo.

O presente capítulo está baseado nas obras de Gonçalves (1979), Domingues (2003). Guimarães (2008) e Iezzi (2005).

2.1 Polinômios

O estudo sobre polinômios é muito antigo, tem-se conhecimento que por volta de 1850 a.C, os egípcios já resolviam problemas que continham equações do primeiro grau, como é observado nos papiros de Rhind e Moscou. Já os babilônios, por volta de 1700 a.C, já conheciam alguns métodos para resolver equações polinomiais de primeiro e segundo grau. Ou seja, o estudo relacionado a polinômios já acontece há muitos séculos. Mas a notação algébrica que utilizamos nos dias atuais, como por exemplo, os coeficientes a, b e c para os números coeficientes e x, y e z para as incógnitas, só começou a ser desenvolvida por François Viète (1540-1603) e aperfeiçoada por René Descartes (1596-1650).

Sabemos que as equações polinomiais fazem parte do conteúdo de polinômios, então antes de analisarmos as equações polinomiais do terceiro grau e quarto grau, observaremos algumas definições relacionadas aos polinômios.

Definição 2.1.1: Seja K um corpo qualquer. Definimos um polinômio sobre K em uma indeterminada x a uma expressão da forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m + \cdots$ onde a sequência $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ está em K e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_j = 0$ para todo $j > n$.

A sequência $\{a_n\}$ é dita os coeficientes do polinômio $p(x)$ e a_0 é o termo independente ou constante.

Dessa forma, uma função $f: K \rightarrow K$ denomina-se uma função polinomial sobre K se para todo $x \in K$ temos $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ onde $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_m\}$ está em K . Neste estudo, faremos nossas considerações sempre sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

Definição 2.1.2: Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ um polinômio. Chama-se grau de $p(x)$, representado por ∂p ou $\deg(p)$, o número natural n tal que $a_n \neq 0$ e $a_j = 0$ para todo $j > n$. Assim, grau de um polinômio $p(x)$ é o índice do “último” termo não nulo de $p(x)$.

Sabemos por meio dessa definição que o grau de um polinômio é o número natural igual ao maior expoente de x , cujo termo apresenta coeficiente não nulo.

Outra definição importante no estudo dos polinômios é a definição de valores numéricos de uma função polinomial.

Definição 2.1.3: Como a função $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ assume valores em quaisquer pontos do seu domínio, definimos $p(\beta) = a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \cdots + a_n\beta^n$ para todo $\beta \in K$.

Essa definição nos mostra que $p(\beta)$ é o valor numérico do polinômio para $x = \beta$. Sobre essa definição podemos fazer três observações importantes:

- Para $x = 0$, temos $p(0) = a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + \cdots + a_n(0)^n = a_0$. Ou seja, $p(0)$ é igual ao termo independente de x .
- Para $x = 1$, temos $p(1) = a_0 + a_1(1) + \cdots + a_n(1)^n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Assim, $p(1)$ é igual a soma dos coeficientes do polinômio.
- Quando $p(\beta) = 0$, dizemos que β é raiz do polinômio $p(x)$, como veremos nas próximas definições.

Definição 2.1.4: Equação polinomial é toda equação redutível à forma $p(x) = 0$, em que $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, com $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$, um polinômio de grau n com coeficientes em $\mathbb{C}$, e cuja variável x assume um valor qualquer em $\mathbb{C}$.

Com base nessa definição, uma equação polinomial do terceiro grau é toda equação do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e do quarto grau é do tipo $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

Esse valor qualquer em $\mathbb{C}$ que a variável x pode assumir, quando $p(x) = 0$, nada mais é do que a raiz dessa equação, como veremos na próxima definição.

Definição 2.1.5: Seja o polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ sobre $\mathbb{C}$. Um número complexo α é dito uma raiz de $p(x)$ se

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n = 0.$$

Ao buscarmos encontrar as raízes de um determinado polinômio, em muitas situações, precisaremos realizar operações com polinômios, por isso mostraremos como são realizadas essas operações, estudando mais detalhadamente a operação de divisão de polinômios, pois é a que mais utilizaremos em nosso estudo.

Definição 2.1.6: Sejam $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ e $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ dois polinômios sobre um corpo K com $n \leq m$. Então:

a) Definimos a soma e subtração entre eles como os polinômios obtidos da forma

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots + b_mx^m$$

$$f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 - \dots - (a_n - b_n)x^n - \dots - b_mx^m$$

b) Definimos a multiplicação entre eles como o polinômio obtido da forma

$$f(x) \cdot g(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \dots + (a_nb_m)x^{m+n}$$

Exemplo 2.1.1: Sejam os polinômios $p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 10$ e $g(x) = 3x^2 - 3x - 9$. Então:

$$p(x) + g(x) = (x^3 - 5x^2 + 3x - 10) + (3x^2 - 3x - 9) = x^3 - 2x^2 - 19$$

$$p(x) - g(x) = (x^3 - 5x^2 + 3x - 10) - (3x^2 - 3x - 9) = x^3 - 8x^2 + 6x - 1$$

Exemplo 2.1.2: Sejam os polinômios $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3$ e $g(x) = x^2 + x + 1$. Então:

$$p(x) \cdot g(x) = (x^3 + 2x^2 - 3)(x^2 + x + 1) = 3x^4 + 3x^3 - 3x - 3$$

Tendo visto as operações de adição e multiplicação de polinômios, vejamos agora o algoritmo euclidiano para a divisão de polinômios.

Teorema 2.1.1: Dados dois polinômios $p(x)$ e $g(x)$, com $g(x)$ não nulo e o coeficiente dominante de $g(x)$ inversível, então podemos encontrar dois polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que $p(x) = g(x)q(x) + r(x)$, onde $\partial r < \partial g$ ou $r(x) = 0$. Além disso, $q(x)$ e $r(x)$ são únicos.

Demonstração: Ver em Domingues, p. 293

■

OBS.: Se em uma divisão de $p(x)$ por $g(x)$ obtivermos $r(x) = 0$, dizemos que $p(x)$ é divisível por $g(x)$ ou que $g(x)$ divide $p(x)$.

Um caso particular importante na divisão de polinômios é aquele em que o divisor é um polinômio do primeiro grau com o coeficiente dominante unitário, isto é, um polinômio do tipo $(x - a)$ ou $(x + a)$, com $a \in \mathbb{C}$. Como o grau do resto deve ser menor que o grau do divisor, temos que: $\partial r < 1$ ou $r(x) = 0$, ou seja, $r(x)$ é um polinômio constante.

Esse caso de divisão será frequentemente usado no desenvolvimento do nosso estudo. Nesse caso particular de divisão, poderemos utilizar o Teorema do Resto.

2.2 Teorema do Resto

Teorema 2.2.1: O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - a$ é igual ao valor numérico de $p(a)$.

Demonstração: Considerando que a divisão de $p(x)$ por $x - a$ resulta um quociente $q(x)$ e um resto r , temos:

$$p(x) = (x - a)q(x) + r$$

Calculando os valores desses polinômios para $x = a$, temos:

$$p(a) = (a - a)q(a) + r = (0)q(a) + r = r \Rightarrow r = p(a)$$

Logo, se $p(a) = 0 \Rightarrow r = 0$, portanto $p(x)$ é divisível por $x - a$.

■

Outro Teorema muito importante é Teorema das Raízes Complexas, o qual será utilizado em algumas situações do nosso estudo.

2.3 Teorema das Raízes Complexas

Enunciaremos e demonstraremos um teorema que afirma que as raízes complexas não reais de um polinômio, se existirem, sempre ocorrem aos pares. Mas antes, precisamos da seguinte definição:

Definição 2.3.1: Dado o número complexo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ definimos o conjugado de z como sendo o número complexo da forma $\bar{z} = a - bi$.

Temos as propriedades do conjugado de um número complexo:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
2. $z_1 = \bar{z}_1 \Leftrightarrow z_1$ é um número real
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
4. $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

Teorema 2.3.1 (Teorema das Raízes Complexas): Se um número complexo $z = a + bi$ com $b \neq 0$, é raiz de um polinômio com coeficientes reais, então seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ também será raiz desse polinômio.

Demonstração: Seja o polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ com $a_0, a_1, \dots, a_n$ coeficientes reais. Se z é raiz de $p(x)$, então

$$\begin{aligned} p(z) &= a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n = 0 \\ \Rightarrow \overline{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n} &= \bar{0} \end{aligned}$$

Usando a propriedade 1:

$$\overline{a_0} + \overline{a_1z} + \overline{a_2z^2} + \dots + \overline{a_nz^n} = \bar{0}$$

Das propriedades 2 e 3, segue que:

$$a_0 + a_1\bar{z} + a_2\bar{z}^2 + \dots + a_n\bar{z}^n = 0$$

E pela propriedade 4:

$$a_0 + a_1\bar{z} + a_2\bar{z}^2 + \dots + a_n(\bar{z})^n = 0$$

Isso nos mostra que $p(\bar{z}) = 0$, ou seja, o conjugado $\bar{z}$ é raiz do polinômio $p(x) = 0$. ■

Segundo Gonçalves (1979, p.67 – 68), todo o polinômio não constante, de grau n com coeficientes complexos, tem n raízes complexas (Teorema Fundamental da Álgebra). Portanto, a quantidade de raízes de um polinômio está relacionada ao seu grau, logo uma equação do 2º grau apresenta duas raízes, uma equação do 3º grau terá três raízes e, assim por diante.

Antes de enunciarmos e demonstrarmos o próximo teorema, precisamos de um teorema que é bastante útil para a localização de raízes de funções contínuas, em particular polinômios.

Teorema 2.3.2 (Teorema do Valor Intermediário): Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ ou $f(a) > d > f(b)$ então existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $a < \alpha < b$ tal que $f(\alpha) = d$.

Demonstração: Ver em Lima, p. 76 ■

Note que se tomarmos $d = 0$ neste teorema, então $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos, logo existirá um número real α entre a e b tal que $f(\alpha) = 0$.

Teorema 2.3.3: Todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais possui pelo menos uma raiz em $\mathbb{R}$.

Demonstração: Considere o polinômio de grau ímpar $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{2n+1}x^{2n+1}$ sobre $\mathbb{R}$ com $a_{2n+1} \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Podemos reescrever este polinômio da seguinte forma:

$$p(x) = x^{2n+1} \left(\frac{a_0}{x^{2n+1}} + \frac{a_1}{x^{2n}} + \cdots + \frac{a_{2n}}{x} + a_{2n+1} \right)$$

Temos dois casos possíveis:

i) Se $a_{2n+1} > 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} \left(\frac{a_0}{x^{2n+1}} + \frac{a_1}{x^{2n}} + \cdots + a_{2n+1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} x^{2n+1} \left(\frac{a_0}{x^{2n+1}} + \frac{a_1}{x^{2n}} + \cdots + a_{2n+1} \right) = -\infty$$

ii) Analogamente, se $a_{2n+1} < 0$, temos que $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty$

Como toda função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$, então pelo Teorema do Valor Intermediário existe pelo menos um número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p(\alpha) = 0$. Isto é, α é uma raiz real de $p(x)$. ■

Com esse teorema e o Teorema das Raízes Complexas, podemos concluir que o gráfico de uma função polinomial de grau ímpar sempre cortará o eixo das abscissas. O mesmo não ocorre para a função polinomial de grau par. Entretanto, quando isto ocorre o número de vezes é par.

2.4 Relações de Girard

Albert Girard (1595 – 1632) foi um matemático francês que percebeu a importância da aceitação dos números negativos e complexos, o que era ignorado por muitos matemáticos da época. Ele também percebeu que o número de raízes de um polinômio com coeficientes numéricos é igual ao seu grau. Fato este que só seria demonstrado um século e meio depois.

As relações de Girard relacionam as raízes de uma equação algébrica através de igualdades, e essas relações podem ser desenvolvidas para quaisquer equações algébricas. Mostraremos a definição dessas relações para as equações de terceiro e quarto grau, considerando que iremos trabalhar mais diretamente com essas equações e posteriormente expandiremos essas relações para as equações de grau n .

Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$. Temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Dividindo ambos os membros por a , então:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Realizando as multiplicações, segue que:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2](x - x_3)$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3$$

Por meio da igualdade de polinômios, temos que:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Essas são as relações de Girard para uma equação do terceiro grau.

Vamos analisar agora as relações de Girard para as equações do quarto grau. Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 as raízes da equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, com $a \neq 0$. Temos:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

Dividindo ambos os membros por a e realizando as multiplicações, então:

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \\ &= [x^2 - x(x_1 + x_2)x_1x_2][x^2 - x(x_3 + x_4)x_3x_4] \\ &= [x^4 - x^3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + x^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \\ &\quad - x(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) + x_1x_2x_3x_4] \end{aligned}$$

Por meio da igualdade de polinômios, temos que:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a} \\ x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a} \end{cases}$$

Essas são as relações de Girard para uma equação do quarto grau.

Para expandir essas relações para equações de grau n , o procedimento é análogo ao que foi feito nas equações de terceiro e quarto grau, respectivamente.

Seja a equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$ e $x_1, x_2, \dots, x_n$ suas raízes. Então segue que:

- $x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_nx_{n-1} = \frac{a_{n-2}}{a_n}$

- $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$
- $\vdots$
- $x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

Segue abaixo um exemplo onde usaremos essas relações para determinar as raízes de uma equação.

Exemplo 2.4.1: Determine as três raízes da equação $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, sabendo que a soma de duas das suas raízes é 5.

Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes dessa equação e os coeficientes $a = 1, b = -10, c = 31$ e $d = -30$, temos pelas relações de Girard as seguintes equações:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = \frac{10}{1} = 10$$

Pelo enunciado, temos que $x_1 + x_2 = 5$, então:

$$5 + x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$$

Conhecendo uma das raízes, podemos agora realizar uma divisão do polinômio $x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ pelo polinômio $(x - 5)$ onde obteremos uma equação do segundo grau que, ao ser resolvida nos dará as outras duas raízes da equação $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$.

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = (x - 5)(x^2 - 5x + 6)$$

Resolvendo a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ por Bhaskara, temos:

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 3$$

Portanto, as três raízes da equação são 2, 3 e 5.

■

Por meio dessas relações podemos encontrar as raízes de algumas equações, desde que seja informada alguma relação entre suas raízes.

2.5 Teorema das Raízes Racionais

Nessa seção apresentaremos a definição, demonstração e aplicação do Teorema das raízes racionais. Através desse teorema poderemos conhecer todas as possibilidades de raízes racionais para determinada equação algébrica com coeficientes inteiros, caso essas raízes existam.

Teorema 2.5.1 (Teorema das Raízes Racionais): Seja $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, com $a_n \neq 0$ um polinômio com coeficientes inteiros. Se o número racional $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com p e q primos entre si, é raiz desse polinômio, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .

Demonstração: Como $\frac{p}{q}$ é raiz dessa equação, então:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

Multiplicando ambos os membros por q^n , temos:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

Isolando a_np^n e colocando q em evidência e, isolando a_0q^n e colocando p em evidência, segue, respectivamente, que:

$$\begin{cases} a_np^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}) \\ a_0q^n = p(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \dots + a_1q^{n-1}) \end{cases}$$

Como todos os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ são inteiros e p e q também são inteiros, temos que α e β nas substituições abaixo também são inteiros.

$$\alpha = a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}$$

$$\beta = a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \dots + a_1q^{n-1}$$

Portanto,

$$a_np^n = -q\alpha \quad \text{e} \quad a_0q^n = p\beta$$

Essas igualdades mostram que:

- q divide a_np^n . Como p e q são primos entre si, então q é um divisor de a_n .
- p divide a_0q^n . Como q e p são primos entre si, então p é um divisor de a_0 .

■

Corolário: Seja o polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ com coeficientes inteiros. Se o número $\alpha \in \mathbb{Q}$ é raiz desse polinômio, então α é um número inteiro.

Demonstração: De fato, pois se $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é raiz desta equação polinomial, então q divide 1, o que implica $\alpha = \pm p \in \mathbb{Z}$.

■

Segue abaixo um exemplo onde usaremos esse Teorema para determinar as raízes de uma equação.

Exemplo 2.5.1: Determine as três raízes da equação $x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0$.

Observamos que todos os coeficientes dessa equação são números inteiros, o que nos permite utilizar o teorema das raízes racionais. Sendo $a_0 = 3$ e $a_n = 1$, então se existir uma raiz racional ela será inteira. Como p divide 3, temos que $p \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Então os

valores $-3, -1, 1$ e 3 são as possíveis raízes da equação $x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0$. Chamando $p(x)$ o polinômio oriundo da equação, deve-se fazer as seguintes verificações:

$$p(-3) = (-3)^3 - 4(-3)^2 + 2(-3) + 3 = -66 \neq 0$$

$$p(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 2(-1) + 3 = -4 \neq 0$$

$$p(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 2(1) + 3 = 2 \neq 0$$

$$p(3) = (3)^3 - 4(3)^2 + 2(3) + 3 = 0$$

Logo $x = 3$ é raiz da equação $x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0$. Para encontrarmos as outras duas raízes realizamos a divisão do polinômio $x^3 - 4x^2 + 2x + 3$ pelo polinômio $(x - 3)$. Assim, temos que

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = (x - 3)(x^2 - x - 1)$$

Resolvendo a equação $x^2 - x - 1 = 0$ por Bhaskara, temos:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Portanto, as três raízes da equação $x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0$ são:

$$x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ e } x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

■

Por meio desse Teorema podemos resolver algumas equações, mas temos como limitação o fato de ser necessário que todos os coeficientes das equações que buscamos resolver sejam inteiros e suas raízes sejam racionais.

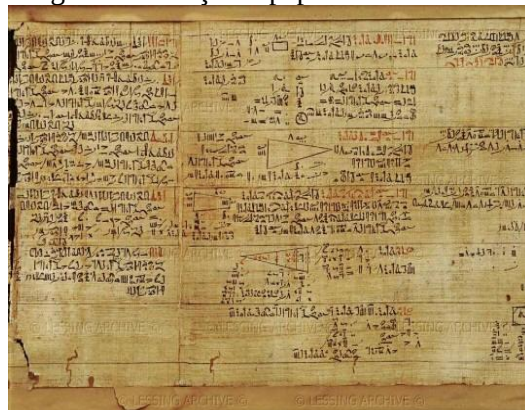
Observamos que as Relações de Girard e o Teorema das Raízes Racionais apresentam limitações na resolução das equações polinomiais. Para usarmos as Relações de Girard, é preciso que seja conhecida alguma relação entre as raízes e, para usar o Teorema das Raízes Racionais é necessário que todos os coeficientes da equação sejam inteiros. Assim, observamos as limitações presentes nesses métodos.

Dessa forma, a fórmula de Cardano–Tartaglia se destaca na resolução de equações polinomiais do terceiro grau, pois não se limita a algumas particularidades de outros métodos algébricos. Sabendo disso conheceremos mais detalhadamente a fórmula de Cardano–Tartaglia, assim como toda história que a envolveu.

3 HISTÓRIA DA FÓRMULA DE CARDANO–TARTAGLIA

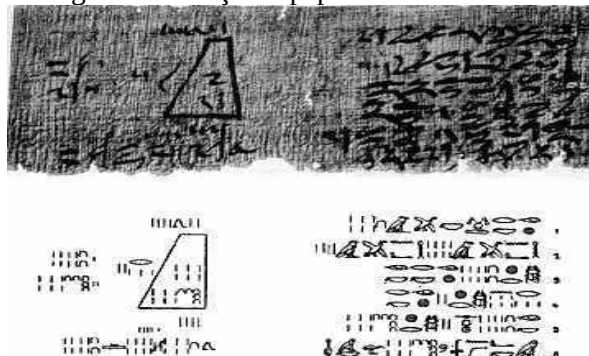
Ao analisar o contexto histórico do estudo das equações polinomiais, observamos que essas equações já eram estudadas por babilônicos e egípcios por volta de 2000 a.C. Os babilônios em cerca de 1700 a.C, já resolviam equações polinomiais do primeiro e segundo grau, como também iniciaram estudos na tentativa de resolver equações polinomiais do terceiro grau. Os egípcios por sua vez resolviam equações polinomiais simples com apenas uma variável, e suas equações eram escritas em papiros na forma de problemas. No papiro de Rhind, escrito pelos egípcios por volta de 1650 a.C, nota-se referências de resoluções de equações polinomiais. Mas existe outro papiro egípcio mais antigo, o papiro de Moscou, que é de cerca de 1850 a.C. Em alguns dos problemas presentes nesses dois papiros, já se percebe resoluções de equações polinomiais do primeiro grau. De acordo com Eves (2011, p.70) os papiros de Rhind e Moscou são as principais fontes de informações sobre a matemática egípcia.

Figura 1: Pedaco do papiro de Rhind



Fonte: <http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm>

Figura 2: Pedaco do papiro de Moscou



Fonte: <http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm>

Com o estudo de egípcios, babilônicos e de muitos matemáticos espalhados pelo mundo, obteve-se diversos avanços no estudo das equações polinomiais do terceiro grau ao longo da história, mas até o fim do século XV não eram conhecidos métodos algébricos para a resolução de equações polinomiais do terceiro grau da forma geral.

3.1 A disputa

No século XV teve início a fase de abertura do renascimento na Itália. Nesse período surgiram personagens de destaque na evolução histórica da Matemática, dentre eles destacamos Scipione Del Ferro (1465-1526), Gerônimo Cardano (1501-1576) e Nicoló Fontana (1499-1557).

Em 1494 Frei Luca Pacioli (1455-1514), renomado professor de Matemática e amigo de Leonardo da Vinci, chegou a afirmar em seu livro “Suma de Arithmética”, que não podia haver regra geral para a solução de equações do terceiro grau da forma $x^3 + px = q$. Muitos matemáticos acreditaram nessa afirmação, mas outros não e tiveram aquela afirmação como um desafio, um deles foi Scipione Ferro.

Figura 3: Frei Luca Pacioli (1455-1514)



Fonte: <http://facil-contabilidade.blogspot.com/2014/05/entreterimento-as-mulheres-e.html>

Scipione Del Ferro foi professor da Universidade de Bolonha e sua biografia é pouco conhecida, pois o mesmo não publicava as suas descobertas. Por volta de 1515, Del Ferro encontrou uma forma geral de resolução de equações cúbicas do tipo $x^3 + px = q$. Mas Del Ferro nunca publicou sua solução, apenas pouco antes de falecer contou seu segredo para seus discípulos Antônio Maria Fiore e Annibale Della Nave.

Nessa época eram muito frequentes disputas matemáticas, onde os envolvidos no duelo entregavam listas ao seu adversário contendo problemas que acreditavam que ele não

seria capaz de resolver. Muitas vezes o desempenho do professor nesse duelo determinava sua permanência em seu cargo acadêmico.

Fiore tendo em mãos o segredo deixado por Scipione Del Ferro sobre a resolução de equações cúbicas, teve a ideia de desafiar Nicoló Fontana, mais conhecido como “Tartaglia” para uma disputa matemática, onde cada adversário dispunha de 30 problemas e foi combinado que o perdedor deveria pagar trinta banquetes ao ganhador. Fiore elaborou todos seus problemas envolvendo equações do terceiro grau. “Tartaglia” por sua vez elaborou seus problemas de forma mais variada. Oito dias antes do encontro, “Tartaglia” determinou um método de resolução das equações cúbicas do tipo $x^3 + px = q$ e também determinou um método de resolução das equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. Este segundo método foi seu grande triunfo, pois Fiore não tinha o conhecimento da resolução das equações cúbicas com o termo ao quadrado. Com isso, “Tartaglia” resolveu todos os trinta problemas propostos por Fiore e ganhou a disputa, mas renunciou aos trinta banquetes.

Nicoló Fontana nasceu em Brescia na Itália e teve uma vida muito sofrida. Aos seis anos de idade perdeu seu pai e aos catorze anos foi gravemente ferido pelos franceses quando saquearam sua cidade natal. Por contas dos golpes sofridos no rosto, ele ficou com muitas dificuldades na fala, por isso recebeu o apelido de “Tartaglia”, que significa gago em italiano. Apesar das dificuldades ele sempre se dedicou aos estudos, mesmo não indo à escola, pois sua mãe o tinha tirado por não ter condições de arcar com as despesas. Superando todas as dificuldades se tornou um professor de prestígio com grande conhecimento em Matemática e também em outras áreas.

Figura 4: Nicoló Fontana (1499-1557)



Fonte: https://www.wikiwand.com/pt/Equa%C3%A7%C3%A3o_c%C3%ABica

A notícia da vitória de “Tartaglia” se espalhou rapidamente chegando aos ouvidos de Gerônimo Cardano, um matemático nascido em Pávia, que também era médico, astrônomo, astrólogo, filósofo, físico e professor.

Figura 5: Gerônimo Cardano (1501-1576)



Fonte: <https://clube.spm.pt/news/o-matematico-italiano-girolamo-cardano-nasceu-a-24-de-setembro-de-1501>

Cardano pretendia escrever um livro de Álgebra e aproveitou a oportunidade para pedir a “Tartaglia” que revelasse a ele o método de resolução das equações cúbicas. “Tartaglia” não aceitou esse pedido, pois o mesmo iria publicar esse método em um livro com sua autoria. Mesmo com a resposta negativa de “Tartaglia”, Cardano não desistiu do pedido feito, e fez vários juramentos de segredo a “Tartaglia”, até que ele revelou o método usado para a resolução das equações cúbicas. Essa revelação ocorreu por meio de um poema que “Tartaglia” enviou para ele. Cardano não conseguiu compreender o poema e por isso fez mais juramentos a “Tartaglia” para que ele revelasse de maneira menos misteriosa a demonstração da fórmula e assim “Tartaglia” o revelou.

1. Quando che'l cubo con le cose appreso se aggaglia a qualche número discreto trovati due altri differenti in esso.
2. Depoi terrai questo por consueto che'l lor prodotto sempre sia eguale al terzo cubo delle cose neto.
3. El resíduo poi suo generale delli lor lati cubi ben sostratti verra la tua cosa principale.
4. In el secondo de coiesti aiti quando che'l cubo restasse lui solo tu osserverai quesfaltri contratti.
5. Del número farai due, tal parfa volo cha l'uno e l'altro si produca schietto el terzo delle cose in stelo.
6. Delle qual poi, per commun precetto torrai li lati cubi incieme gionti et cotai somma será il tuo concetto.
7. El terzo poi de questi nostri conti se solve con secondo, se ben guardi che ser natura son quasi congiontri
8. Questi trovai, et non con passi tardi nel mille cinquecento quatro et trinta nella città dal maré intorno centa.

(MILIES, 1994, p.18)

MILIES (1994, p.18-19) revela uma tradução para o português:

1. Quando o cubo com a coisa em apreço se igualam a qualquer número discreto, acha dois outros diferentes nisso.
2. Depois terás isto por consenso que seu produto seja sempre igual ao cubo do terço da coisa certo.
3. Depois, o resíduo geral das raízes cúbicas subtraídas será tua coisa principal.
4. Na segunda destas operações, quando o cubo estiver sozinho observarás estas outras reduções.
5. Do número farás dois, de tal forma que um e outro produzam exatamente o cubo da terça parte da coisa.
6. Depois, por um preceito comum toma o lado dos cubos juntos e tal soma será teu conceito.
7. Depois, a terceira destas nossas contas se resolve como a segunda, se observas bem que suas naturezas são quase idênticas.
8. Isto eu achei, e não com passo tardo no mil quinhentos e trinta e quatro com fundamentos bem firmes e rigorosos na cidade cingida pelo mar.

De acordo com Lima (1987, p.14) os estudos feitos por Cardano e um de seus discípulos chamado Ludovico Ferrari (1522-1565) conduziram a grandes avanços na teoria das equações, assuntos esses suficientes para a publicação de um novo livro, mas isso não era possível por conta dos juramentos de segredo que Cardano fez a “Tartaglia”. Em 1542 Cardano junto com seu discípulo Ferrari descobriram os manuscritos deixados por Scipione Del Ferro contendo a solução da equação cúbica. Ao saber disso Cardano se sentiu livre dos juramentos feitos a “Tartaglia” e se preparou para publicar seu grande livro “Ars Magna” contendo as demonstrações das equações do terceiro grau. Em 1545, De acordo com Boyer (1974, p. 193):

[...] a resolução não só da cúbica como também da quártica tornaram-se conhecimento comum pela publicação da Ars magna de Gerônimo Cardano (1501–1576). Um progresso tão notável e imprevisto causou tal impacto sobre os algebristas que o ano de 1545 frequentemente é tomado como marco do início do período moderno na matemática. (BOYER, 1974, p. 193).

Até esse momento, imaginava-se que na resolução de uma equação do segundo grau, usando a fórmula de Bhaskara, quando eram obtidas raízes quadradas de números negativos, isso queria dizer, que a equação não tinha solução. Logo, a fórmula de Cardano-Tartaglia caía nesse mesmo impasse, pois em muitos casos seria necessário extrair as raízes quadradas de números negativos, portanto, de acordo com aqueles matemáticos imaginavam naquele momento, a fórmula só nos daria uma solução, o que fez muitos questionarem o porquê de uma equação do terceiro grau apresentar menos raízes do que uma equação do segundo grau.

Por conta desses questionamentos, muitos estudos foram realizados, proporcionando posteriormente a descoberta dos números complexos e a demonstração do número de raízes de uma equação. E através dos estudos realizados por Ludovico Ferrari, também foi possível a descoberta de um método para a resolução de equações do quarto grau, o qual é conhecido como Método de Ferrari. Observamos que a fórmula de Cardano-Tartaglia foi uma importante motivação para a descoberta dos números complexos, para o estudo sobre a quantidade de raízes que uma equação podia ter, para a obtenção de um método para a resolução de equações polinomiais do quarto grau e, para estudos sobre as equações de grau maior do que quatro. Tudo isso nos mostra a relevância do estudo dessa fórmula e o valor histórico que a envolve para a Matemática.

4 UM MÉTODO PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 3º GRAU

Nesse capítulo apresentaremos a demonstração da fórmula de Cardano–Tartaglia para resolução de equações polinomiais do terceiro grau, tendo como base para essa demonstração as obras de Knudsen (1985), Lima (1985) e Milies (1994).

4.1 Método de Cardano–Tartaglia

Seja uma equação polinomial do 3º grau da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ em que a, b, c e d são constantes reais, iremos reduzir essa equação para a forma $y^3 + py + q = 0$, pois a demonstração de “Tartaglia” se baseava em uma equação polinomial sem o termo do segundo grau.

Iniciando a redução, deixaremos a variável do 3º grau sem a constante dominante. Para isso dividiremos toda a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ por a . Então obtemos

$$\frac{ax^3}{a} + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Considerando $A = \frac{b}{a}$, $B = \frac{c}{a}$ e $C = \frac{d}{a}$, temos

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (4.1)$$

Em seguida vamos realizar uma mudança de variável de modo que o termo do segundo grau seja eliminado da equação. Considere

$$x = y + k. \quad (4.2)$$

Então,

$$\begin{aligned} & (y + k)^3 + A(y + k)^2 + B(y + k) + C = 0 \\ \Rightarrow & y^3 + 3y^2k + 3yk^2 + k^3 + A(y^2 + 2yk + k^2) + B(y + k) + C = 0 \\ \Rightarrow & y^3 + 3y^2k + 3yk^2 + k^3 + Ay^2 + 2Ayk + Ak^2 + By + Bk + C = 0 \\ \Rightarrow & y^3 + (A + 3k)y^2 + (3k^2 + 2Ak + B)y + (k^3 + Ak^2 + Bk + C) = 0 \end{aligned}$$

Para anularmos o termo y^2 , devemos considerar que $A + 3k = 0$, portanto,

$$k = -\frac{A}{3} \quad (4.3)$$

Logo,

$$\begin{aligned} & y^3 + \left[A + 3\left(-\frac{A}{3}\right) \right] y^2 + \left[3\left(-\frac{A}{3}\right)^2 + 2A\left(-\frac{A}{3}\right) + B \right] \\ & + \left[\left(-\frac{A}{3}\right)^3 + A\left(-\frac{A}{3}\right)^2 + B\left(-\frac{A}{3}\right) + C \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y^3 + \left(\frac{A^2}{3} - \frac{2A^2}{3} + B\right)y + \left(-\frac{A^3}{27} + \frac{A^3}{9} - \frac{AB}{3} + C\right) &= 0 \\ \Rightarrow y^3 + \left(B - \frac{A^2}{3}\right)y + \left(\frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C\right) &= 0 \end{aligned}$$

Considerando

$$p = B - \frac{A^2}{3} \text{ e } q = \frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C, \quad (4.4)$$

temos que

$$y^3 + py + q = 0 \quad (4.5)$$

Concluindo assim a redução da equação polinomial do 3º grau na sua forma geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ para a forma $y^3 + py + q = 0$.

Para encontrar as raízes da equação $y^3 + py + q = 0$, pelo Teorema 2.3.3, vamos supor uma solução real como sendo a soma de duas parcelas, isto é: $y_0 = u + v$. Assim,

$$\begin{aligned} (u + v)^3 + p(u + v) + q &= 0 \\ \Rightarrow u^3 + 3v^2u + 3vu^2 + v^3 + p(u + v) + q &= 0 \\ \Rightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q &= 0 \\ \Rightarrow (u^3 + v^3 + q) + (p + 3uv)(u + v) &= 0 \end{aligned}$$

Para que essa igualdade seja verdadeira, vamos considerar $u^3 + v^3 + q = 0$ e $p + 3uv = 0$.

$$u^3 + v^3 + q = 0 \quad \Rightarrow \quad u^3 + v^3 = -q$$

Mas pela consideração $p + 3uv = 0$, temos que

$$uv = -\frac{p}{3}$$

Elevando ambos os lados ao cubo desta igualdade, ficamos com

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Portanto, se conseguirmos achar números u e v de forma que,

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases},$$

então $y_0 = u + v$ será raiz da equação $y^3 + py + q = 0$.

Sabemos, pelas relações de Girard, que podemos achar as raízes de uma equação do segundo grau utilizando a soma e produto delas. Então, considerarmos uma equação do segundo grau da forma $at^2 + bt + c = 0$, pelo método da soma e produto temos

$$S = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad P = \frac{c}{a}$$

onde S e P são a soma e o produto das raízes desta equação, respectivamente.

Mas conhecemos a soma e o produto de u^3 e v^3 , então consideraremos u^3 e v^3 como sendo as raízes de uma equação do segundo grau. Assim,

$$-\frac{b}{a} = -q \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = -\frac{p^3}{27}$$

Considerando $a = 1$, temos que $b = q$ e $c = -\frac{p^3}{27}$. Dessa forma, u^3 e v^3 são as raízes da equação do segundo grau na forma

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

Portanto achar os números u e v equivale a resolver esta equação do segundo grau. Aplicando a Fórmula de Bhaskara nesta equação, temos que

$$\begin{aligned} t &= \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4(1)(-\frac{p^3}{27})}}{2(1)} \\ \Rightarrow t &= \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \\ \Rightarrow t &= -\frac{q}{2} \pm \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{\sqrt{4}} \\ \therefore t &= -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \end{aligned}$$

onde,

$$t_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{e} \quad t_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Como estamos considerando $t_1 = u^3$ e $t_2 = v^3$, então

$$\begin{aligned} u^3 &= -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \\ v^3 &= -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos os seguintes valores para u e v :

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Mas como consideramos $y_0 = u + v$ sendo uma raiz da equação $y^3 + py + q = 0$, portanto temos que

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Por outro lado, realizamos uma redução da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ para a equação na forma $y^3 + py + q = 0$ através de uma mudança de variável, onde

$$x = y + k, \text{ com } k = -\frac{A}{3},$$

então uma das raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ será $x_0 = y_0 + k$, ou seja,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + k \quad (4.6)$$

Sendo os seguintes valores em função dos coeficientes:

$$p = B - \frac{A^2}{3}, \quad q = \frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C, \text{ onde } A = \frac{b}{a}, \quad B = \frac{c}{a}, \quad C = \frac{d}{a}.$$

Por meio dessa fórmula podemos encontrar apenas uma raiz de uma equação do terceiro grau, mas a equação do terceiro grau possui três raízes. Sendo assim, podemos realizar uma divisão do polinômio $y^3 + py + q$ pelo polinômio $(y - y_0)$ que nos proporcionará uma equação do segundo grau e, resolvendo essa equação do segundo grau, sua solução nos dará as outras duas raízes que desejamos.

Note que, segundo o Teorema 2.3.3, toda equação do 3º grau possui uma raiz real e as raízes complexas não reais acontecem aos pares (isto é, se existir uma raiz complexa a outra será o seu conjugado), mas em nossas considerações y_0 é uma solução real. Assim, podemos achar as outras duas usando o algoritmo da divisão de polinômios.

4.2 Aplicação da fórmula de Cardano–Tartaglia

Depois de feita a demonstração da fórmula de Cardano–Tartaglia, iremos resolver alguns exemplos utilizando essa fórmula.

Exemplo 4.2.1: Determine as raízes da equação $x^3 + 2x - 3 = 0$.

Temos a nossa equação na forma $x^3 + px + q = 0$, com os seguintes valores para os coeficientes: $p = 2$ e $q = -3$. Aplicando os valores de p e q na fórmula de Cardano–Tartaglia:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{(-3)}{2} + \sqrt{\frac{(-3)^2}{4} + \frac{(2)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-3)}{2} - \sqrt{\frac{(-3)^2}{4} + \frac{(2)^3}{27}}} \\ \Rightarrow x &= \sqrt[3]{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{8}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{8}{27}}} \\ \Rightarrow x &= \sqrt[3]{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{275}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{275}{108}}} \\ \therefore x &= 1 \end{aligned}$$

Fazendo a divisão do polinômio $x^3 + 2x - 3$ por $(x - 1)$, obtemos

$$x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x^2 + x + 3)$$

Resolvendo a equação $x^2 + x + 3 = 0$ por Bhaskara, temos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2} \\ \Rightarrow x &= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}i \end{aligned}$$

Portanto, as três raízes da equação $x^3 + 2x - 3 = 0$ são:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i \\ x_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i \end{aligned}$$

■

Exemplo 4.2.2: Determine as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$.

Essa é uma equação do tipo $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ com os seguintes valores dos coeficientes: $A = -6, B = 6$ e $C = -5$.

De acordo com (4.3),

$$k = \frac{-(-6)}{3} = 2$$

E por (4.4), temos que:

$$p = 6 - \frac{(-6)^2}{3} = -6$$

e

$$q = \frac{2(-6)^3}{27} - \frac{(-6)(6)}{3} + (-5) = -9$$

Aplicando os valores de k, p e q em (4.6):

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} + \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} - \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + 2 \\ &\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}} + 2 \\ &\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} + 2 \\ &\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} + 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} + 2 \quad \therefore x = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

Fazendo a divisão do polinômio $x^3 - 6x^2 + 6x - 5$ por $(x - 5)$, obtemos

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = (x - 5)(x^2 - x + 1)$$

Resolvendo a equação $x^2 - x + 1 = 0$ por Bhaskara, temos:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Logo, as raízes de $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$ são:

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

■

Exemplo 4.2.3: Determine as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Essa é uma equação do tipo $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ com os seguintes valores dos coeficientes: $A = -6, B = 11$ e $C = -6$.

De acordo com (4.3),

$$k = \frac{-(-6)}{3} = 2$$

E por (4.4), temos que:

$$p = 11 - \frac{(-6)^2}{3} = -1$$

e

$$q = \frac{2(-6)^3}{27} - \frac{(-6)(11)}{3} + (-6) = 0$$

Aplicando os valores de k, p e q em (4.6):

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(0)}{2} + \sqrt{\frac{(0)^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(0)}{2} - \sqrt{\frac{(0)^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} + 2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}} + 2$$

Nesse momento chegamos a um impasse, pois

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{1}{27}$$

Para sairmos desse impasse, precisaríamos utilizar de conceitos dos números complexos e de funções trigonométricas inversas, para podermos chegar a aproximações decimais de cada raiz. Logo, não nos aprofundaremos na continuação de questões onde temos $\Delta < 0$.

Nesse caso podemos perceber que o método de Cardano–Tartaglia mesmo sendo útil em muitas situações, em algumas outras será mais fácil encontrar as raízes de uma equação do terceiro grau por meio de outros métodos. No caso do exemplo 3, poderíamos testar os

divisores de (-6) , termo independente da equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, e veremos que 1, 2 e 3 serão as três raízes dessa equação.

■

É importante destacar que, por meio do discriminante $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, poderemos saber mais informações sobre as três raízes da equação do terceiro grau que estivermos analisando. Para isto, analisaremos três casos: $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ e $\Delta = 0$.

I) Se x_1 , x_2 e x_3 são raízes de uma equação do terceiro grau, pela decomposição do polinômio $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, em fatores lineares, temos:

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) &= 0 \\ \Rightarrow x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3 &= 0\end{aligned}$$

Para que o termo do segundo grau inexista é necessário que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Mas sabemos que uma equação do tipo $x^3 + px + q = 0$ possui obrigatoriamente uma raiz real. Como uma equação do terceiro grau possui três raízes, vamos supor que uma outra raiz seja complexa do tipo $a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$ não nulos. Pelo Teorema das Raízes Complexas, temos que $a - bi$ também será raiz. Sejam $x_1 = a + bi$ e $x_2 = a - bi$ e $x_3 \in \mathbb{R}$. Temos

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (4.7)$$

$$\Rightarrow a + bi + a - bi + x_3 = 0 \Rightarrow 2a + x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_3 = -2a \quad (4.8)$$

Logo, a equação $x^3 + px + q = 0$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}[x - (a + bi)][x - (a - bi)](x + 2a) &= 0 \\ \Rightarrow [(x - a)^2 - (bi)^2](x + 2a) &= 0 \\ \Rightarrow (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)(x + 2a) &= 0 \\ \Rightarrow x^3 + (b^2 - 3a^2)x + 2a(a^2 + b^2) &= 0\end{aligned}$$

Assim temos,

$$P = b^2 - 3a^2 \text{ e } Q = 2a(a^2 + b^2)$$

Então,

$$\Delta = \frac{[2a(a^2 + b^2)]^2}{4} + \frac{(b^2 - 3a^2)^3}{27}$$

Expandindo e simplificando a expressão acima, obtemos

$$\Delta = \frac{81a^4b^2 + 18a^2b^4 + b^6}{27}$$

Logo, $\Delta > 0$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ não nulos. Portanto, a equação possui uma raiz real e duas raízes complexas.

II) Agora vamos supor que $x^3 + px + q = 0$ não possui raiz complexa do tipo $a + bi$. Digamos que $x_1 = a$ e $x_2 = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Por (4.7),

$$\begin{aligned} a + b + x_3 &= 0 \\ \Rightarrow x_3 &= -a - b. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Então a equação $x^3 + px + q = 0$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (x - a)(x - b)(x + a + b) &= 0 \\ \Rightarrow x^3 - (a^2 + ab + b^2)x + a^2b + ab^2 &= 0 \end{aligned}$$

Assim temos,

$$p = -(a^2 + ab + b^2) \quad \text{e} \quad q = a^2b + ab^2$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{[a^2b + ab^2]^2}{4} + \frac{[-(a^2 + ab + b^2)]^3}{27} \\ &= \frac{-(4a^6 + 12a^5b - 3a^4b^2 - 26a^3b^3 - 3a^4b^2 + 12ab^5 + 4b^6)}{108} \end{aligned}$$

Simplificando esta expressão, obtemos

$$\Delta = -\frac{(a - b)^2(a + 2b)^2(b + 2a)^2}{108} \quad (4.10)$$

Logo, $\Delta < 0$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ não nulos e distintos. Portanto, a equação possui três raízes reais e distintas.

III) Analisemos agora nas duas situações acima, a possibilidade de $\Delta = 0$. Na primeira situação, se $a = b = 0$ temos que $\Delta = 0$ e, por (4.8), $x_3 = 0$. Assim, teremos três raízes iguais e nulas ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$). Na segunda situação, por (4.10), para que Δ seja nulo é necessário que aconteça uma das três situações:

$$a - b = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow x_1 = x_2$$

ou

$$a + 2b = 0 \Rightarrow a = -2b,$$

ou

$$b + 2a = 0 \Rightarrow b = -2a,$$

Mas por (4.9), obtemos que

$$x_3 = -(-2b) - b = 2b - b = b \Rightarrow x_3 = x_2$$

ou

$$x_3 = -a - (-2a) = -a + 2a = a \Rightarrow x_3 = x_1$$

Logo, observamos que na segunda situação, equação possuirá três raízes reais, sendo duas iguais.

Analisando tudo que foi visto neste capítulo, podemos observar a relevância da fórmula de Cardano–Tartaglia para a resolução das equações polinomiais do terceiro grau, pois a mesma pode resolver equações que outros métodos expostos no capítulo 2 do nosso estudo, como as Relações de Girard e o Teorema das Raízes Racionais não são capazes de resolver. E essa fórmula também se faz relevante, pois a mesma contribuiu para os estudos relacionados as equações de quarto grau, como veremos com mais detalhes no próximo capítulo.

5 UM ESTUDO SOBRE AS EQUAÇÕES DO 4º GRAU

Os avanços sobre o estudo das equações polinomiais, ocorreu após avanços relacionados ao estudo das equações de quarto grau, a qual foi descoberta sua solução por Ludovico Ferrari. Como sabemos, os matemáticos daquela época tinham o costume de promover desafios e de acordo com Eves (2011, p. 326) o matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi propôs a Cardano uma questão que envolvia a solução da equação $b^4 + 6b^2 + 36 = 60b$.

Cardano tentou de diversas formas resolver essa equação, mas não conseguiu, então transferiu essa questão para seu discípulo Ludovico Ferrari, que tentando resolvê-la encontrou um método geral para as soluções das equações de quarto grau. Este método encontrado por Ferrari também foi publicado por Cardano em seu livro *Ars Magna*, em continuidade à solução das equações do terceiro grau.

Figura 8: Ludovico Ferrari (1522-1565)



Fonte: <http://www.neconundunyasi.com/14/05/2017/kultur-sanat-ve-yasam/lodovico-ferrari-kimdir-62215.html>

Apresentamos neste capítulo, o método desenvolvido por Ferrari para a resolução de uma equação do quarto grau, da forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Para apresentar a demonstração dessa fórmula teremos como base Garbi (2010).

5.1 Método de Ferrari

A ideia deste método é reduzir a resolução de uma equação do 4º grau à resolução de equações de terceiro e segundo graus. Iniciaremos escrevendo a equação geral do quarto grau

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (5.1)$$

na qual transformaremos em outra do tipo

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

fazendo a substituição $x = y + t$ e calculando t de forma que o termo do terceiro grau seja anulado. Para isso, deixaremos a variável do quarto grau sem a constante dominante.

Dividindo toda a equação (5.1) por a , obtemos:

$$\frac{ax^4}{a} + \frac{bx^3}{a} + \frac{cx^2}{a} + \frac{dx}{a} + \frac{e}{a} = x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0$$

Considerando $A = \frac{b}{a}$, $B = \frac{c}{a}$, $C = \frac{d}{a}$ e $D = \frac{e}{a}$ temos que

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

Realizando a substituição $x = y + t$,

$$(y + t)^4 + A(y + t)^3 + B(y + t)^2 + C(y + t) + D = 0$$

$$y^4 + 4ty^3 + 6t^2y^2 + 4t^3y + t^4 + A(y^3 + 3ty^2 + 3t^2y + t^3) + B(y^2 + 2ty + t^2) + Cy + Ct + D = 0$$

$$y^4 + 4ty^3 + 6t^2y^2 + 4t^3y + t^4 + Ay^3 + 3Aty^2 + 3At^2y + At^3 + By^2 + 2Bty + Bt^2 + Cy + Ct + D = 0$$

$$y^4 + (A + 4t)y^3 + (B + 6t^2 + 3At)y^2 + (C + 4t^3 + 3At^2 + 2Bt)y + (t^4 + At^3 + Bt^2 + Ct + D) = 0$$

Para anularmos o termo y^3 , iremos considerar que

$$A + 4t = 0 \Rightarrow t = -\frac{A}{4}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y^4 + \left[A + 4\left(-\frac{A}{4}\right) \right] y^3 + \left[B + 6\left(-\frac{A}{4}\right)^2 + 3A\left(-\frac{A}{4}\right) \right] y^2 \\ + \left[C + 4\left(-\frac{A}{4}\right)^3 + 3A\left(-\frac{A}{4}\right)^2 + 2B\left(-\frac{A}{4}\right) \right] y \\ + \left[\left(-\frac{A}{4}\right)^4 + A\left(-\frac{A}{4}\right)^3 + B\left(-\frac{A}{4}\right)^2 + C\left(-\frac{A}{4}\right) + D \right] = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$y^4 + \left(B + \frac{3A^2}{8} - \frac{3A^2}{4}\right)y^2 + \left(C - \frac{A^3}{16} + \frac{3A^3}{4} - \frac{AB}{2}\right)y + \left(\frac{A^4}{256} - \frac{A^4}{4} + \frac{A^2B}{16} - \frac{AC}{4} + D\right) = 0$$

Substituindo por p , q e r , onde

$$p = B + \frac{3A^2}{8} - \frac{3A^2}{4}, \quad q = C - \frac{A^3}{16} + \frac{3A^3}{16} - \frac{AB}{2} \quad \text{e} \quad r = \frac{A^4}{256} - \frac{A^4}{64} + \frac{A^2B}{16} - \frac{AC}{4} + D.$$

Segue que:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \quad (5.2)$$

Assim, analogamente como nas equações do terceiro grau, quem consegue resolver a equação incompleta (5.2), consegue resolver qualquer equação do quarto grau.

O método de Ferrari para resolver a equação (5.2), consiste em completá-la de modo que ambos os membros da igualdade se tornem num quadrado perfeito que, para isso, basta somar ambos os membros por $\alpha y^2 + \beta$. Assim, temos:

$$y^4 + (p + \alpha)y^2 + (r + \beta) = \alpha y^2 - qy + \beta \quad (5.3)$$

Se considerarmos $x = y^2$ no primeiro lado da igualdade, teremos duas equações do segundo grau nos dois lados da igualdade, logo, para que os dois lados sejam quadrados perfeitos, é preciso que os seus discriminantes sejam iguais à zero simultaneamente, Dessa forma:

$$(p + \alpha)^2 - 4(r + \beta) = 0 \quad (5.4)$$

$$q^2 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{q^2}{4\alpha} \quad (5.5)$$

Substituindo o valor de β na equação (5.4), segue que:

$$\begin{aligned} (p + \alpha)^2 - 4\left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) &= 0 \\ \Rightarrow (p + \alpha)^2 - 4r - \frac{q^2}{\alpha} &= 0 \\ \Rightarrow \alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, chegamos a uma equação do terceiro grau em α . Como as equações de 3º grau podem ser resolvidas usando a fórmula de Cardano-Tartaglia, acharemos α , em seguida β , e substituiremos na equação (5.3), extraíndo suas raízes quadradas:

$$\sqrt{y^4 + (p + \alpha)y^2 + (r + \beta)} = \pm \sqrt{\alpha y^2 - qy + \beta} \quad (5.6)$$

Sendo assim, o método irá fornecer quatro raízes, sendo duas correspondentes a equação do 2º grau positiva e as outras duas correspondentes a equação do 2º grau negativa. Como a equação do terceiro grau em α nos dará três raízes, então teremos α_1, α_2 e α_3 . Mas cada valor de α corresponde apenas a quatro raízes, e seja qual for o α escolhido ele sempre

nos dará as mesmas quatro raízes. Ou seja, o que temos são três formas diferentes de se fazer o agrupamento das raízes duas a duas.

5.2 Aplicação do método de Ferrari

Depois de feita a demonstração do método de Ferrari, iremos mostrar sua aplicação por meio de um exemplo.

Exemplo 5.2.1: Determine as raízes da equação $x^4 - 12x^2 - 16x - 4 = 0$.

A nossa equação já se encontra na forma $x^4 + px^2 + qx + r = 0$. Aplicando o método de Ferrari, ou seja, encontraremos α e β tais que

$$x^4 + (-12 + \alpha)x^2 - 4 + \beta = \alpha x^2 + 16x + \beta$$

Para que ambos os lados sejam quadrados perfeitos, de acordo com as equações (5.4) e (5.5), segue que:

$$(-12 + \alpha)^2 - 4(-4 + \beta) = 0$$

e

$$16^2 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{16^2}{4\alpha} = \frac{64}{\alpha}$$

Substituindo β na primeira equação:

$$\begin{aligned} (\alpha - 12)^2 + 16 - 4\left(\frac{64}{\alpha}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \alpha^3 - 24\alpha^2 + 144\alpha + 16\alpha - 256 &= 0 \\ \Rightarrow \alpha^3 - 24\alpha^2 + 160\alpha - 256 &= 0 \end{aligned}$$

Temos assim, uma equação do terceiro grau. Aplicando a fórmula de Cardano-Tartaglia, concluiremos que as raízes da equação $\alpha^3 - 24\alpha^2 + 160\alpha - 256 = 0$, são:

$$\alpha_1 = 8$$

$$\alpha_2 = 4\sqrt{2} + 8$$

$$\alpha_3 = -4\sqrt{2} + 8$$

Nesse momento escolheremos uma dessas raízes para encontrarmos o valor de β . Usaremos o valor de α_1 . Como $\beta = \frac{64}{\alpha}$, então:

$$\alpha_1 = 8 \Rightarrow \beta_1 = \frac{64}{8} = 8$$

Substituindo α_1 e β_1 na equação $x^4 + (-12 + \alpha)x^2 - 4 + \beta = \alpha x^2 + 16x + \beta$, temos:

$$x^4 + (-12 + 8)x^2 - 4 + 8 = 8x^2 + 16x + 8$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 &= 8x^2 + 16x + 8 \\ \Rightarrow (x^2 - 2)^2 &= 8(x + 1)^2\end{aligned}$$

Tirando as raízes quadradas de ambos os lados, segue que:

$$x^2 - 2 = \pm 2\sqrt{2}(x + 1)$$

Assim, temos duas situações:

- $x^2 - 2 = 2\sqrt{2}(x + 1) \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2} - 2 = 0$, cuja solução será:

$$x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

$$x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

Ou

- $x^2 - 2 = -2\sqrt{2}(x + 1) \Rightarrow x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 2 = 0$, cuja solução será:

$$x_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

$$x_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

Caso fizermos de forma análoga ao que foi feito para α_1 , iremos encontrar para α_2 e α_3 as mesmas quatro raízes. Ou seja, as raízes da equação $x^4 - 12x^2 - 16x - 4$ serão sempre $\sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2} - \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$, $-\sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ e $-\sqrt{2} - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$. Pois sabemos pelo Teorema Fundamental da Álgebra, que uma equação do quarto grau só admite quatro raízes. Note que α_1, α_2 e α_3 proporciona três maneiras diferentes de reagruparmos a equação de modo a termos quadrados perfeitos em ambos os lados.

■

Após a descoberta que as equações de terceiro e quarto grau podiam ser resolvidas por meio de uma fórmula ou método algébrico, muitos matemáticos buscaram soluções similares para as equações de quinto grau, uns afirmando terem encontrado, mas nenhum deles conseguiu. Paolo Ruffini (1765-1822), matemático italiano, demonstrou um teorema que dizia não existir fórmulas resolutivas gerais que determinem corretamente as soluções de uma equação algébrica de grau superior a cinco. Mas sua demonstração era incompleta. Foi o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802- 1829) que demonstrou corretamente esse teorema, que ficou conhecido como Teorema de Abel-Ruffini, por conta da participação desses dois matemáticos. Nessa demonstração, Abel usou o máximo dos recursos da “Álgebra Clássica”.

Figura 9: Évariste Galois (1811–1832)



Fonte: <https://tribunasaocarlense.com.br/evariste-galois-um-matematico-revolucionario/>

Entretanto foi o francês Évariste Galois (1811–1832) que após ter desenvolvido uma nova teoria, conhecida hoje como Teoria dos Grupos, demonstrou que o Teorema de Abel-Ruffini era um caso particular dentro dessa nova teoria e, estabelecendo uma forma definitiva que era impossível resolver, por meios algébricos, equações polinomiais de grau igual ou superior a cinco. Garbi (2010) enfatiza que “Galois superou Abel e pode-se dizer que o norueguês representa o ápice da Álgebra Clássica enquanto o francês marca o início da Álgebra Moderna” (p. 166).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento das equações algébricas envolveu a descoberta das soluções das equações polinomiais de terceiro e quarto grau. Alguns métodos de resolução de equações de 3º e 4º grau desenvolvidas ao longo dos tempos, mostrando suas devidas demonstrações e aplicações.

Verificamos que a fórmula de Cardano–Tartaglia se destaca em relação a alguns outros métodos, pois não se limita a necessidade de sabermos alguma relação entre as raízes da equação ou a necessidade de que a equação possua coeficientes inteiros e raízes racionais. Mas isso não quer dizer que seja tão simples de aplicar a fórmula de Cardano–Tartaglia em todas as equações, mas se a fórmula existe, é importante para docentes e discentes conhecê-la.

Considerando que desde o século XVI a fórmula para se determinar pelo menos uma raiz de uma equação do terceiro grau já havia sido encontrada e posteriormente já foi encontrado um método para se encontrar as raízes de uma equação do quarto grau, isso nos faz pensar se os estudos sobre as equações polinomiais de grau maior do que dois não deveria ser bem mais amplo e profundo do que é atualmente, ou seja, não deveríamos nos restringir apenas ao estudo de equações de 1º e 2º graus, mesmo que as fórmulas das equações de primeiro e segundo grau sejam mais fáceis de serem usadas.

Concluimos que os estudos das equações polinomiais de 3º e 4º grau foram e ainda são fundamentais para todo docente e discente de matemática, pois foram os estudos sobre essas equações que motivaram o desenvolvimento de descobertas essenciais para o desenvolvimento de toda a Álgebra e Matemática que conhecemos.

Esperamos que esse estudo contribua para novas pesquisas sobre a Fórmula de Cardano–Tartaglia, assim como para as descobertas que o desenvolvimento dessa fórmula proporcionou, como o Método de Ferrari para a resolução das equações de 4º grau, o estudo dos números complexos e, um aprofundamento no estudo das equações polinomiais como um todo.

REFERÊNCIAS

BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática: aula por aula**, volume único: ensino médio. São Paulo: FTD, 2005.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. São Paulo: Atual, 2003.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2011.

GARBI, Gilberto G. **O romance das equações algébricas**. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

GUIMARÃES, Caio dos Santos. **Matemática em nível IME/ITA: Números complexos e polinômios**, vol. 1. 1. ed. São José dos Campos, SP: Vestseller, 2008.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar**. vol. 6. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

KNUDSEN, Carlos Alberto. A teoria das equações algébricas. **Revista do Professor de Matemática**. SBM, São Paulo, nº 7, p. 26-31, 1985.

LIMA, Elon. L. A equação de terceiro grau. **Revista Matemática Universitária**. SBM, ano 5, p. 9-23, jun. 1987.

_____. **Análise Real, volume 1: funções de uma variável**. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2006.

MILIES, César Polcino. A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau. **Revista do Professor de Matemática**. SBM, São Paulo, nº 25, p. 16-22, 1994.