UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Antonio Araújo do Nascimento

Sequências e séries de funções

Rio Tinto – PB
Julho de 2021

Antonio Araújo do Nascimento

Sequências e séries de funções

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

Rio Tinto – PB
Julho de 2021

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

N244s Nascimento, Antonio Araújo do.
Sequências e séries de funções / Antonio Araújo do Nascimento. – Rio Tinto, 2021.
56f. : il.

Orientação: Jamilson Ramos Campos.
Monografia (Graduação) – UFPB/CCAE.

1. Sequências de funções. 2. Séries de funções. 3. Convergência uniforme. 4. Convergência pontual. I. Campos, Jamilson Ramos. II. Título.

UFPB/CCAE CDU 517.5

Antonio Araújo do Nascimento

Sequências e séries de funções

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

Aprovado em 09 de julho de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Laudelino de Menezes Neto - UFPB

Prof. Dr. Carlos Alberto Almeida - UFPB

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos - UFPB
Orientador

Dedicatória

Ao meu avô Genival José do Nascimento (in memoriam).

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, ao Deus de Abraão, Isaac e Jacó. Ao leão da Tribo de Judá. Aquele que é onisciente, onipresente e onipotente. Ao rei dos reis. Ao único, que é digno de receber toda honra e glória. Ao Deus, que teve misericórdia da minha alma e doou seu filho unigênito em sacrifício por meus pecados. A ti, ó Deus meu, agradeço.

A minha esposa Milena Nascimento, que me proporciona momentos de companheirismo e amor, como também me levanta quando estou caído, colocando-me de volta nos trilhos da vida. Ao meu pai Erinaldo Nascimento e minha mãe Edilene Nascimento, que nunca deixaram de acreditar na minha capacidade, além dos cuidados e carinhos que sempre recebo. A minha sogra Maria das Dores Cruz e meu sogro José da Silva, que me acolheram como um filho. A minha irmã Erielem Nascimento e minha cunhada Mikaely Cruz, pelos carinhos que recebo. A família paterna, em nome de minha vó Dona Lia e meu avô Genival (in memoriam), que ensinaram a toda família que desistência não é um opção. A família materna, em nome do meu avô Edvaldo e minha avó Anita. Deixo à todos eles minha gratidão e meu amor.

Estendo essa gratidão ao professor e orientador Jamilson Ramos Campos, que foi um pai durante minha trajetória no curso. Mostrou-me que o caminho para o sucesso na matemática é a persistência e a paciência. Mas, acima de tudo, mostrou-me na prática a importância do papel do professor na carreira do aluno. Ao professor Jamilson, meus agradecimentos pelos dois anos de iniciação científica e aprendizados matemáticos recebidos durante esse período, além dos valores humanísticos transmitidos. Agradeço também a sua família, por ser uma base forte do exímio professor que é.

Aos professores de minha infância Reilson Dantas, Marleide Lima, Jairo Gualberto, Adaílson Melo e Cristina que por diversas vezes puxaram minhas orelhas, orientando-me para o meu futuro acadêmico. Aos professores Álvaro Neto, Rodrigo Ronelli, Edmílson Costa, Miguel Neto, Alex Barbosa, Alexandre Miná, Marcelo Ribeiro, Nivânia Pereira, Marcos Carrera, Amanda Marques, Sérgio Murilo, Ada Neuza, José Edílson, Rogério Paiva, Neide e Albertina Araújo por terem sido minha família no internato ao Colégio Agrícola Vidal de Negreiros. A todos eles, fica aqui registrado, meu muito obrigado.

Meus agradecimentos a UFPB e ao CNPq pelo apoio financeiro aos projetos de iniciação científica, como também pelas bolsas de assistência estudantil. Sem eles, não teria condições de concluir o curso.

Aos membros da banca, os professores José Laudelino de Menezes Neto e Carlos Alberto Almeida, por aceitarem o desafio de serem avaliadores do meu trabalho e pelas contribuições importantes que foram feitas, agradeço.

Quero agradecer as professoras Alissá Grymuza, Janaína Botelho, Claudilene Costa, Cristiane Ângelo, Cristiane Souza, Agnes Liliane, Surama Costa e Penha Caetano pelas contribuições na minha formação docente, como também aos professores Marcos André, Hélio Pires, Laudelino Neto, Fabrício Souza e Givaldo Lima pela formação matemática.

Por fim, quero agradecer aos irmãos, que conheci durante o curso, Rafael Lima, Adriana Moura, Verônica Alexandre, Rodrigo Klynsmann, Arthur dos Santos, Milena dos Santos e Ramon Felipe, pelos momentos de descontração, debates, diálogos e estudos.

"Mas tu, Senhor, és Deus compassivo e misericordioso, muito paciente, rico em amor e em fidelidade."

Salmos 86:15

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é realizar um estudo bibliográfico sobre sequências e séries de funções, dando foco aos dois tipos principais de convergência: pontual e uniforme. Como preliminares, apresentamos um sucinto relato histórico sobre o desenvolvimento da Análise e uma compilação de fundamentos necessários ao desenvolvimento do tema, como sequências e séries de números reais, topologia, limite e continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade de funções reais. Por fim, apresentamos o nosso tema, sequências e séries de funções, estabelecendo as convergências simples e uniforme, as condições de verificação de convergência e a derivação e integração termo-a-termo.

Palavras-chave: Sequências de funções, séries de funções, convergência uniforme, convergência pontual.

Abstract

The main objective of this work is to carry out a bibliographical study on sequences and series of functions, focusing on the two main types of convergence: pointwise and uniform. As a background, we present a brief history on the development of Analysis and a compilation of elements needed to discuss the theme, such as sequences and series of real numbers, topology, limit and continuity, differentiability and integrability of real functions. Finally, we present our theme, sequences and series of functions, establishing the pointwise and uniform convergences, its convergence conditions and the term-by-term derivation and integration.

Keywords: Function sequences, series of functions, uniform convergence, pointwise convergence.

Conteúdo

Introdução

Com o processo de formalização lógico do cálculo e o desenvolvimento da Análise clássica nos séculos XVIII e XIX, por matemáticos como Cauchy, Weierstrass e dentre tantos outros, as sequências e séries de funções passam a ter um papel de destaque em Análise, por modelarem e resolverem problemas com características, geralmente, voltadas para a continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade de funções. Além disso, devido ao progresso da Matemática, principalmente no século XX com o desenvolvimento da Análise Funcional, as sequências e séries de funções tiveram seu papel ampliado ao âmbito de espaços de dimensão infinita. Suas aplicações em processos físicos, na modelagem e solução de equações diferenciais, por exemplo, também mostram a importância deste tema.

Entretanto, a história das sequências e séries de números e de funções não se limita aos séculos citados. Desde a Grécia antiga com o método da exaustão (pensamento sequencial), por exemplo, já se trabalhava com esses tipos de ferramentas matemática. Segundo Ávila [1], no início do seculo XVII também trabalhava-se este assunto em séries de potências, no contexto de calcular áreas sob a hipérbole.

O objetivo principal deste trabalho é realizar um estudo bibliográfico sobre sequências e séries de funções, dando foco aos dois tipos principais de convergência: simples e uniforme.

O interesse neste tema surgiu da sua não-abordagem ao longo do curso introdutório de Análise Real, no curso licenciatura em Matemática do Campus IV da UFPB, e do pouco contato que tivemos com o tema durante a graduação. O interesse também se justifica pela importância do tema em suas aplicações à diversas áreas da matemática e do desejo do autor de aprofundar os conhecimentos na área de Análise Real, visando a continuidade de seus estudos numa pós-graduação em Matemática.

As referências principais para construção desse trabalho foram os livros [2, 4, 5], sobre história da matemática, e os livros [6, 8, 9], de Análise Real.

Dividimos o trabalho em três capítulos. No primeiro, fazemos uma abordagem histórica sobre o século XIX e o desenvolvimento da Análise Real, mostrando os aspectos conceituais e a conjuntura da época no que se refere à continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade de funções. Além disso, apresentamos personagens históricos desse período e suas contribuições à análise e ao nosso objeto de estudo.

No segundo capítulo, apresentamos os fundamentos necessários ao nosso objetivo, como fatos sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, as sequências e séries numéricas, topologia da reta, limite e continuidade de funções, como também sobre diferenciabilidade e integrabilidade.

O terceiro capítulo é de fato dedicado ao nosso tema. Abordamos as definições de sequências e séries de funções, propriedades e exemplos, como também as definições de convergência simples e uniforme de sequências e séries de funções. Também estudamos as propriedades da convergência uniforme.

Embora apresentemos, como preliminares, os fundamentos necessários à apresentação do tema, alguns fatos e resultados conhecidos de Análise, Cálculo e muitos elementos da matemática são usados indistintamente. O leitor pode consultar quaisquer livros desses fundamentos como referência, inclusive os já citados nessa introdução.

Capítulo 1

Apontamentos históricos

Neste capítulo, abordaremos de forma histórica um pouco sobre a construção da Análise Matemática, alguns de seus principais personagens e suas contribuições na formalização rigorosa do cálculo infinitesimal. Entretanto, chamamos à atenção do leitor de que não temos pretensão de esgotar o tema, mas de esboçar uma fundamentação histórica para os demais capítulos. Com esse objetivo em mente, baseamo-nos nas referências [1, 2, 4, 5, 7] e [12].

1.1 O século XIX e o rigor matemático

Com o advento do cálculo diferencial e integral no século XVII e o desenvolvimento de suas técnicas até meados do século XVIII, a matemática revolucionou diversas áreas do meio científico. Entretanto a falta de fundamentação rigorosa do cálculo levou, com o tempo, ao surgimento de diversos absurdos e incoerências matemáticas.

Diversos matemáticos, no final do século XVIII e durante o século XIX, debruçaram-se numa tentativa de examinar as bases teóricas do cálculo e fornecer uma formalização lógica e conceitual consistente.

A disciplina de Análise Real existente nos cursos atuais de matemática (licenciatura e bacharelado), conhecida por seu alto grau de abstração, teve suas bases forjadas, principalmente, durante os séculos XIX e início do século XX. Ela é, na verdade, um processo de fundamentação lógica e conceitual do cálculo infinitesimal. Todavia, esse estudo nem sempre foi tão abstrato e este status foi alcançado após o movimento (que os historiadores [2, 4] e [5] chamam) de "algebrização da análise", cujo objetivo era desvincular a teoria das ideias geométricas pré-estabelecidas.

Este movimento costuma ser dividido pelos historiadores em dois períodos: primeiro o Francês, com os trabalhos de Augustin-Louis Cauchy e segundo o Alemão, dominado pelos trabalhos de Karl Weierstrass; o primeiro personagem conhecido como "o precursor" e o segundo como "o pai" do rigor. É importante observar que não foram apenas estes que contribuíram para o desenvolvimento da Análise. Diversos outros matemáticos também tiveram seu papel nesse processo, como Bernard Riemann e Henri Lebesgue com a integração, George Cantor com a teoria dos conjuntos, Richard Dedekind com a construção dos números reais, e tantos outros.

Segundo relatos de Baroni [2], o processo de formalização dos fundamentos do cálculo é considerado por muitos historiadores iniciado já no final do século XVII. Já Eves [5] relata que o primeiro grande matemático a reconhecer a pobreza existente nos fundamentos do cálculo e contribuir para superar essa deficiência foi Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), no final do século XVIII. Lagrange, por sinal, influenciou, com o trabalho sobre equações diferenciais parciais e cálculo de variações, muitos matemáticos posteriores no desenvolvimento deste conhecimento, mesmo não tendo chegado a termo em muitos de seus resultados.

Para se ter uma ideia da "imaturidade" dos fundamentos conceituais e lógicos do cálculo, o conceito de função, até o início do século XIX, não possuía uma definição formal ou próxima do que temos hoje. Por exemplo, a ideia de função para Lagrange estava baseada numa expansão da série de Taylor. Considera-se que com o trabalho "Cours d'analyse", de Cauchy (do início do século XIX, um aprofundamento das obras de Lagrange e Gauss), iniciou-se o processo de consolidação da Análise que conhecemos hoje. Cauchy, neste trabalho (segundo Baroni [2]), definiu um novo estilo de rigor, formulou um novo conceito de função para esclarecer o conceito de limite, em substituição ao da ideia de grandezas infinitesimais. Isso tornou possível uma definição rigorosa de derivada, baseado em motivações físicas, como o movimento de corpos.

Segundo Boyer [4], Cauchy definiu funções como: quantidades variáveis interligadas que de certa forma, a partir de alguns valores, é possível determinar as quantidades que lhe faltam. Já Baroni [2] diz que, dado uma função qualquer $f : X \to Y$, Cauchy nomeou os valores $x \in X$ e $y = f(x) \in Y$ de, respectivamente, variáveis independentes e funções das variáveis independentes.

Em outro momento de sua obra, segundo Baroni [2], Cauchy conceitua assim o limite de uma função: o valor fixo, cujas funções das variáveis independentes se aproximam indefinidamente, que por ele possamos diferir tão pouco quanto queiramos, é chamado de *limite* de todos os outros.

Em linguagem mais próxima da atualmente usada, o que Cauchy queria dizer era que: conforme fazemos os valores x, do domínio de uma função f, se aproximar de um valor a, isto é, fazermos $x \to a$ (lê-se: x tendendo para a), e como consequência obtermos $f(x) \to L$, então esse valor fixo L é chamado de limite da função f no ponto $x = a$.

Todavia, diferentemente da atual definição de limites, que nos garante a unicidade de limites de funções, ele aceitava, segundo Baroni [2], a ideia de que era possível existir dois ou mais valores limites para uma mesma função tendendo a um mesmo ponto a. Isto quer dizer que Cauchy, transcrevendo para nossa notação atual, aceitava de forma natural que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ poderia ter limites L e M, com $L \neq M$, quando x tendesse a um ponto $a \in X$.

Também atribui-se à Cauchy, como supramencionado, a definição rigorosa da derivada. Segundo Eves [5], Cauchy definiu a derivada de $y = f(x)$ em relação a x como o limite da razão, quando $\Delta x \to 0$, de

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Apesar das inúmeras contribuições de Cauchy e dos avanços que seus trabalhos proporcionaram à Análise Matemática, haviam ainda inconsistências em seus trabalhos. Baroni [2] afirma que, "os infinitésimos de Cauchy" tinham problemas conceituais, pois ainda se baseavam em ideias e conceitos em vigor desde o século XVIII. Além disso, as definições de limites e continuidade dadas por Cauchy continham fortes ligações com a geometria (considerada pouco rigorosa). Foi, então, com os trabalhos de Karl Weierstrass na Alemanha, que estas definições foram aperfeiçoadas.

Segundo relata Eves [5], Weierstrass ficou marcado pelo uso característico de ε e δ e seu raciocínio cuidadoso. Sua definição de limites de funções fora bem próximo do que temos hoje. Segundo Garbi [7], Weierstrass diz que: "Uma função $f(x)$ tem por limite o valor L no ponto $x = x_0$ se, dado ε tão pequeno quanto se queira, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - L| < \varepsilon$".

No século XIX muitos matemáticos acreditavam que a continuidade de uma função estivesse ligada ao aspecto de diferenciação. Bem mais que isso, acreditava-se que toda função contínua era diferenciável. Mas, sabemos que isso não é verdade. Um exemplo, bem claro disso, é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$, que é contínua, mas não é diferenciável no ponto $x = 0$. Weierstrass exibe a função real

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x \pi),$$

onde a é ímpar, $b \in [0, 1)$ e $ab > 1 + 3/2\pi$, que é contínua e não possui derivada em nenhum ponto! Esta função ficou conhecida como "o monstro de Weierstrass".

Dessa e de outras formas, Weierstrass contribuiu demasiado para os fundamentos da Análise, mas esbarrou na falta de uma definição rigorosa de número. Mesmo assim, ele deixou um legado incalculável, principalmente pelo seguimento de suas ideias em trabalhos de Cantor, sobre a teoria dos conjuntos, e de Richard Dedekind, sobre a construção dos números reais.

Eves [5], deposita em Bernard Riemann a definição de integral utilizada até hoje. Baroni [2] afirma que, Riemann definiu integral como sendo a área da função encontrada pela soma das divisões de um intervalo, chamado de partição, em espaços menores. Essa integral ficou então conhecida como integral de Riemann.

Em 1870, um matemático Alemão chamado Hermann Hankel, com o trabalho intitulado "Condensação de Sigularidades", mostrou que a integral de Riemann, apesar de muito eficiente, tinha suas limitações: não era possível integrar certas funções importantes. Assim, em 1904, Lebesgue aprofundou e generalizou os conceitos de integrais, com características práticas e abrangência que faltavam à integral de Riemann.

Nesse movimento de reconceituação da Análise, os matemáticos estavam empenhados não só nas bases das derivadas e integrais, mas também nos conceitos de convergência de sequências e séries de funções. Eves [5] afirma que, alguns dos absurdos causados no cálculo estavam intimamente ligados a convergência de somas infinitas. Boyer [4] aponta que, havia um certo ceticismo ou falta de confiança de matemáticos na convergência de séries. E que, foi esse um dos motivos que deu início ao movimento. Importante observar, que Lagrange, em sua tentativa de formalizar o cálculo infinitesimal, trabalhou com séries de funções, em particular, séries de potências.

O desenvolvimento do rigor em análise foi essencial para o estudo de sequências e séries. Estes conceitos dependem da ideia de limite e também tiveram um papel importante no movimento da formalização dos infinitesimais. No estudo sobre continuidade de uma função, Weierstrass apresentou, como já mencionado, uma função, definida por uma série, para mostrar que a continuidade não implicava na diferenciabilidade. Na mesma direção, segundo Boyer [4], com o estudo de séries trigonométricas, Cantor desenvolveu sua teoria dos conjuntos. Além disso, Bolzano, em 1830, tentou desenvolver uma teoria de números reais como limites de sequências de números racionais.

A importância dessas ferramentas não se restringe, apenas, a história da Análise. Desde a matemática grega (com o pensamento sequencial em cálculos de aproximações numéricas e somas infinitas em aproximações de áreas), até a matemática pós-movimento de reconceituação da análise (como mostra Boyer [4], por exemplo, com a utilização de séries na definição de integrais, em trabalhos de Cauchy e Riemann) é perceptível que as sequências e séries foram, e são, peças fundamentais para a Análise e em diversas outras áreas da matemática.

Por fim, note-se que o curso da História da Análise, e até mesmo do Cálculo Infinitesimal, apresenta-se de forma não linear, tão pouco contínua, como a disciplina é apresentada nos cursos de graduação em matemática. Além disso, longe de ser uma área estanque, o desenvolvimento da Análise, no passado e nas pesquisas recentes, requer e demanda muita pesquisa, dedicação e persistência dos matemáticos.

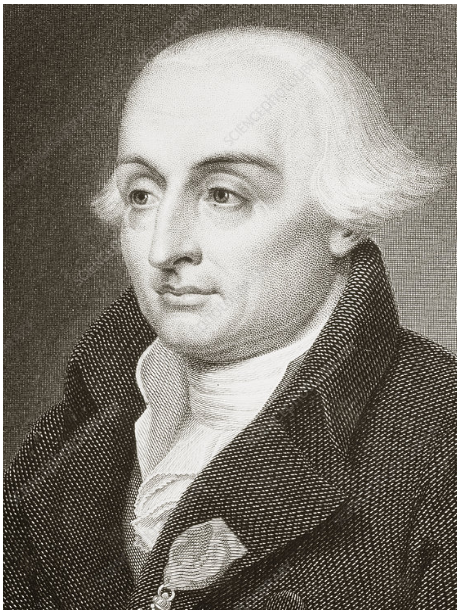
Na seção seguinte, apresentamos (pequenas) biografias de alguns dos nomes citados.

1.2 Alguns personagens importantes

1.2.1 Lagrange

Joseph Louis Lagrange foi um matemático italiano, nascido em Turim no ano de 1736. Eves [5] considera-o como um dos maiores matemáticos do século XVIII ao lado de Euler. Lagrange, estudou em Turim e, ainda muito jovem, tornou-se professor de matemática da Academia Militar.

Figura 1.1: Joseph Louis Lagrange



Fonte: Eves [5]

Em 1766 foi procurado por Frederico, o Grande, para ocupar o lugar de Euler na corte. Lagrange, aceitou o pedido do rei, ficando no cargo até 1786. Anos depois, tornou-se professor na recém-criada Escola Normal e, posteriormente, na Escola Politécnica de Paris, na França.

Joseph, foi o primeiro matemático, segundo Eves [5], a tentar resolver os problemas advindos do cálculo infinitesimal de Leibniz e Newton, através das séries de Taylor. Contribuiu também com diversas áreas da Matemática, com os trabalhos sobre cálculo de variações, teoria dos números e equações diferenciais. Além disso, o seu trabalho sobre mecânica analítica, contendo equações gerais de movimento de um sistema dinâmico, colocou-o como contribuinte na Física.

Morreu em 1813, aos 77 anos, em Paris, sendo sepultado no famoso Pantheon.

1.2.2 Cauchy

Augustin-Louis Cauchy foi um matemático francês, nascido na cidade de Paris em 21 de agosto de 1789.

Recebeu sua primeira educação pelo pai e posteriormente ingressou na École Centrale du Pantheón, onde se sobressaiu nos estudos clássicos. Em 1805, entrou para Escola Politécnica de Paris, recebendo admiração dos matemáticos Lagrange e Laplace. Em 1807, matriculou-se na École des Ponts e Chaussées, escola de engenharia civil. Sob influência de Lagrange e Laplace, decidiu abandonar a carreira de engenheiro civil para estudar a ciência pura, aceitando um cargo de professor na Escola Politécnica.

Figura 1.2: Augustin-Louis Cauchy

Fonte: Eves [5]

Em 1835, a Academia de Ciências publicou seus *Comptes Rendus* e rapidamente Cauchy passou a abastecer esse jornal de artigos, fruto de suas extensas e profundas escritas sobre a matemática pura quanto sobre a matemática aplicada. Segundo Eves [5], as inumerosas contribuições de Cauchy na matemática avançada vão desde a convergência e divergência de séries, passando pela teoria de funções reais e complexas, equações diferenciais, determinantes, probabilidade e física-matemática. Inclusive, nos livros de Análise Real, utilizados nas graduações em matemática, apresenta-se critérios importantes que levam seu nome, é o caso, por exemplo, das sequências de Cauchy, utilizadas para convergência de sequências e séries, e o teste de Cauchy, também conhecido como teste da raiz para séries.

Cauchy, muito ligado a política, foi forçado a abandonar o cargo de professor da Escola Politécnica após a revolução de 1830, retornando ao cargo 18 anos depois.

Em 23 de maio de 1857, aos 68 anos de idade, Cauchy sofreu uma morte súbita, após ter um ataque febril, quando ia ao campo descansar. Pouco antes de morrer, fez o seguinte comentário: "Os homens passam, mas as suas realizações perduram".

1.2.3 Weierstrass

Nascido em 31 de outubro de 1815, na cidade de Ostenfelde, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass foi um matemático considerado, por Eves [5], o maior professor de matemática avançada que o mundo já teve. Mal orientado quando jovem, estudou e dedicou-se em assuntos como leis e finanças, acabando por retardar sua iniciação na matemática.

Figura 1.3: Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

Fonte: Eves [5]

Diferentemente de muitos matemáticos, que iniciavam suas carreiras cedo, Weierstrass só aos 40 anos de idade conseguiu sair do ensino secundário para, então, tornar-se instrutor na Universidade de Berlim. Oito anos depois, conseguiu a condição de professor titular, passando a se dedicar integralmente ao ensino da matemática e as pesquisas na área. Eves [5] aponta que Weierstrass transferiu sua capacidade pedagógica para o trabalho universitário, o que lhe trouxe seguidores.

Enquanto professor, na Universidade de Berlim, contribuiu amplamente para a matemática. Algumas de suas notáveis contribuições foram na teoria de funções complexas, por meio de séries de potências, e nas integrais hiperelípticas. Além disso, trabalhou também com funções abelianas, determinantes, equações diferenciais algébricas e teorias das formas bilineares e quadráticas. Em um desses estudos, caracterizou a convergência uniforme. Um fato curioso: por mais que tenha feito tantas contribuições, seus estudos tornaram-se públicos através de notas de aulas e não por meio de publicações, como era de costume da época.

Segundo Eves [5], Weierstrass era meticuloso na preparação de suas aulas e isto estabeleceu, entre seus alunos, uma ideia conhecida por “rigor weierstrassiano”, sinônimo de “raciocínio extremamente cuidadoso”.

Em 1897, na cidade de Berlim capital da Alemanha, Weierstrass morreu vítima de uma pneumonia.

1.2.4 Riemann

Nascido em 1826, numa aldeia de Hanover, Alemanha, Georg Friedrich Bernhard Riemann foi um matemático notável do século XIX. Filho de um pastor luterano, Riemann teve uma infância de dificuldades financeiras e de saúde.

Figura 1.4: Georg Friedrich Bernhard Riemann

Fonte: Eves [5]

Riemann recebeu boa educação, primeiro na Universidade de Berlim e depois em Gottingen. Na última, obteve seu doutorado com uma brilhante tese no campo da teoria das funções complexas. Baroni [2] afirma que desde pequeno, Riemann já demonstrava grande interesse e talento pela matemática. Entretanto, por influência provavelmente do seu pai, iniciou seus estudos pela Teologia e Filosofia.

Em 1854, Riemann tornou-se professor não-remunerado de Gottingen, três anos depois foi indicado a professor assistente e em 1859 sucedeu a Dirichlet, como professor titular, em uma cadeira antes ocupada por Gauss.

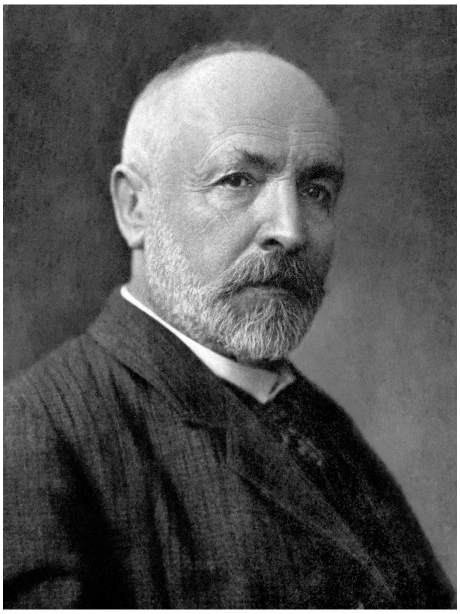
Algumas de suas contribuições se fizeram presentes na análise, na geometria não-euclidiana e na teoria dos números. Em particular, na análise, contribuiu com a teoria de funções e a integral (definida por um tipo de série). Também contribuiu para física, no tratamento matemático às ondas de choque. Além disso, a sua famosa função zeta, conhecida atualmente por "função zeta de Riemann", auxiliou na teoria quântica de campos e no estudo teórico de supercondutores, por exemplo.

Em 1866, na Itália, decorrente de complicações causados pela tuberculose, morre Riemann.

1.2.5 Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor foi um famoso filósofo, matemático e físico do século XX, nascido em São Petersburgo, Rússia, em 1845. Filho de dinamarqueses, cujo pai era judeu convertido ao protestantismo e sua mãe católica, era interessado, desde cedo, na teologia medieval, especialmente voltada para argumentos como o contínuo e o infinito.

Figura 1.5: Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor



Fonte: Eves [5]

Georg estudou em Zurique, Gottingen e Berlim. Na última, recebeu influência de Weierstrass em suas pesquisas e obteve seu grau de doutorado em 1867. Desenvolveu sua carreira na Universidade de Halle, entre 1869 e 1905, através do ensino. Faleceu, posteriormente, no hospital de doenças mentais de Halle, em 1918.

As primeiras pesquisas de Cantor foram nas teoria dos números, equações indeterminadas e séries trigonométricas. Foi um dos contribuintes nos fundamentos do cálculo, tendo feito um excelente trabalho sobre a abordagem dos números irracionais, por meio de sequências racionais. Em 1874, começou seu revolucionário trabalho em teoria dos conjuntos e teoria do infinito. Para se ter uma ideia da importância desses trabalhos e como eles influenciaram a matemática, bastam as palavras de Hilbert: "Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós".

Posteriormente a sua morte, na década de 1960, houve um movimento internacional do ensino da matemática, conhecido por "Movimento da Matemática Moderna", que estabeleceu as bases do ensino matemático no rigor da teoria dos conjuntos. Nesse contexto também os trabalhos de Cantor, sobre a teoria dos conjuntos, se revelaram de extrema importância.

Capítulo 2

Fundamentos

Nos estudos de sequências e séries de funções serão utilizados conceitos fundamentais como limites, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade, por exemplo. Tais conceitos serão abordados neste capítulo, de maneira informal, com eventuais demonstrações caso sejam ilustrativas. O capítulo está baseado nas referências [1, 6, 8, 9, 10, 11] e [13] que recomendamos para uma leitura mais profunda sobre o assunto aqui tratado.

2.1 Valor absoluto, supremo e ínfimo

Do curso de Análise Real, sabemos que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um corpo, isto é, estão definidas duas operações, adição e multiplicação, fechadas no conjunto, que cumprem as condições de associatividade, comutatividade, existência do elemento neutro de cada operação, do inverso de cada elemento e a propriedade da distributividade. Mais ainda, sabemos que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, o que possibilita estabelecer uma relação de ordem ($\leq$) que atende a transitividade, tricotomia e a monotonicidade da soma e da multiplicação. A relação de ordem em $\mathbb{R}$, por sua vez, permite estabelecer a definição de valor absoluto de um número real.

Dado $x \in \mathbb{R}$, o valor absoluto, ou módulo, de x é o número real, denotado por $|x|$, definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Essa definição é equivalente a dizer que $|x|$ é o maior valor entre os números x e $-x$, isto é, $|x| = \max\{x, -x\}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sob um ponto de vista geométrico, o número $|x|$ tem significado de distância do ponto x à origem da reta real. Isto porque, define-se em $\mathbb{R}$, a distância entre números reais x, y é dada pela expressão $d(x, y) = |x - y|$, em particular $d(x, 0) = |x|$.

Tendo em vista sua importância na Análise, já que define o conceito de distância em $\mathbb{R}$, elencamos alguns resultados importantes relativos ao valor absoluto provados em [9] e [8].

Para todo $x, y, a, \delta \in \mathbb{R}$, vale:

(i) $-|x| \leq x \leq |x|$;

(ii) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

(iii) $||x| - |y|| \leq |x - y|$;

(iv) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

(v) $|x - a| < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta \Leftrightarrow x \in (a - \delta, a + \delta)$.

O item (ii) é a famosa desigualdade triangular e o item (v) nos diz que o conjunto dos pontos que tem distância ao ponto a menor que δ é o mesmo que o conjunto dos pontos que pertencem ao intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito limitado superiormente se existe um número $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$, para todo $x \in X$. Analogamente, $X \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$, para todo $x \in X$. Os números b e a são chamados, respectivamente, cota superior e cota inferior de X. Pode ocorrer do conjunto ser apenas limitado inferiormente, ou apenas superiormente, nenhuma das duas coisas ou até mesmo as duas coisas, como veremos no exemplo 2.1.1.

Quando $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente e superiormente ao mesmo tempo dizemos, apenas, que ele é limitado. Isto significa dizer que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x \leq b$, para todo $x \in X$ ou, equivalentemente, que existe $c > 0$ tal que $|x| \leq c$, para qualquer que seja $x \in X$.

Evidentemente, existem infinitas cotas superiores para um conjunto não-vazio e limitado superiormente, todavia é de se esperar que a menor dessas cotas seja única. A próxima definição caracteriza a menor cota superior de um conjunto.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado superiormente. Um número $b \in \mathbb{R}$ é dito supremo do conjunto X, e denota-se $b = \sup X$, quando é a menor das cotas superiores de X, isto é, quando cumpre as condições:

(S1) $x \leq b$, para todo $x \in X$;

(S2) Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$.

A condição de unicidade da menor das cotas superiores é garantida pelo item (S2), pois se b e b_1 são ambos supremos de X, (como para todo $x \in X$, $x \leq b_1$ e $x \leq b$, temos que $b \leq b_1$ e $b_1 \leq b$) então $b = b_1$. O item (S2) pode ser equivalentemente escrito, além da sua contrapositiva (se $c < b$, então existe $x \in X$ tal que $c < x$), na forma:

(S2') Para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $b - \varepsilon < x$.

Analogamente, se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado inferiormente e não-vazio, um número $a \in \mathbb{R}$ será chamado de ínfimo de X, denotado $a = \inf X$, se for a maior das cotas inferiores de X. Em outras palavras, a é o ínfimo de X quando:

(I1) $a \leq x$, para todo $x \in X$;

(I2) Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $c \leq x$ para todo $x \in X$, então $c \leq a$.

As considerações feitas a condição (S2) se adaptam facilmente à (I2). Isto é, além da contrapositiva (se $a < c$, então existe $x \in X$ tal que $x < c$), podemos escrevê-la, equivalentemente, como:

(I2') Para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $x < a + \varepsilon$.

Se $b = \sup X$ e $b \in X$, dizemos que b é o maior elemento ou o elemento máximo de X. Analogamente, se $a \in X$ e $a = \inf X$, então a será chamado de elemento mínimo ou menor elemento de X.

Exemplo 2.1.1 Vejamos alguns exemplos do que foi exposto acima:

a) O conjunto $(-\infty, b)$ é apenas limitado superiormente, possui supremo b, mas não tem máximo. $(a, +\infty)$ é apenas limitado inferiormente, possui ínfimo a, mas não possui mínimo. Já, $[a, b]$ é limitado inferiormente e superiormente, possui máximo b e mínimo a.

b) $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. Com efeito, suponhamos por contradição que exista $c = \sup \mathbb{N}$. O número $c - 1$ não é cota superior de $\mathbb{N}$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c - 1 < n$, e portanto $c < n + 1 \in \mathbb{N}$. Contradição! Em consequência a ilimitação superior de $\mathbb{N}$, o conjunto $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ não é limitado superiormente e nem inferiormente.

c) O ínfimo do conjunto $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ é zero. Com efeito, sabemos que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $0 < 1/n$. Isto mostra que a condição (I1) é satisfeita. Por outro lado, se $0 < c$, pela ilimitação superior de $\mathbb{N}$, existe um número natural n tal que $n > 1/c$, ou seja, $1/n < c$. Isto prova que (I2) também é satisfeita. Logo, de fato, $0 = \inf X$. Todavia, 0 não é elemento máximo de X, pois não pertence a ele.

Um importante estudo na matemática é o da completude de espaços. Isto, por exemplo, é o que diferencia o conjunto $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$, tendo em vista que $\mathbb{Q}$ também é um corpo ordenado, mas não é completo. Num corpo não completo, não há garantia da existência dos supremos e ínfimos no espaço, mesmo que tenham algum tipo de limitação. Um exemplo interessante é o conjunto $X = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ é limitado, possui ínfimo, mas não possui supremo em $\mathbb{Q}$. Isto é uma consequência da incompletude do conjunto dos racionais.

A afirmação então, que vemos nos cursos de Análise Real, de que $\mathbb{R}$ é completo, significa que todo $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio, limitado superiormente, possui supremo $b = \sup X \in \mathbb{R}$. A partir disso, é possível provar que para todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente e não-vazio, existe $a = \inf X \in \mathbb{R}$.

Em outras palavras, a completude de $\mathbb{R}$ nos diz que esse conjunto possui o limite de todas as sequências convergentes de números reais. Trataremos sobre as sequências numéricas a seguir.

2.2 Sequências e séries numéricas

Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a cada natural n associa um número real $x(n) = x_n$, chamado de termo geral ou n-ésimo termo da sequência.

Usamos os símbolos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou ainda (x_n) para denotar a sequência cujo termo geral é x_n.

Dizemos que uma sequência (x_n) é limitada superiormente quando existir um número real b tal que $x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, esta será dita limitada inferiormente se existir $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que (x_n) é limitada quando existirem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x_n \leq b$, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ ou, equivalentemente, se existir $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Chamamos de subsequência de $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à qualquer restrição de x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots\}$ de $\mathbb{N}$, e denotamos por $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$.

Uma sequência (x_n) tem como limite um número real a quando dado qualquer $\varepsilon > 0$, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Isto significa que conforme os valores naturais n aumentam, as distâncias dos termos x_n diminuem em relação ao ponto a. A sequência (x_n) é dita convergente, e converge para o ponto a. Denotamos por $a = \lim x_n$, $a = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$ ou ainda $x_n \to a$ para indicar que a sequência convergente (x_n) tem limite a. Quando não existe este limite a sequência será dita divergente.

Vale a pena lembrar que a condição $|x_n - a| < \varepsilon$ equivale a $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ ou ainda $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Como consequência da própria definição de limites e do módulo de números reais, segue que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem limite zero, se e somente se, a sequência $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ também tem limite zero.

Uma sequência (x_n) será chamada de monótona se $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Na primeira diz-se que (x_n) é uma sequência monótona não-decrescente, a segunda condição monótona não-crescente. Para os casos $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, diz-se que (x_n) é, respectivamente, monótona crescente e monótona decrescente.

Agora, passaremos a enunciar alguns resultados importantes sobre sequências convergentes, principalmente pelo seu importante papel nas ideias de limites de funções e para as sequências e séries de funções.

Seja (x_n) uma sequência convergente qualquer. Vale que:

i) A sequência (x_n) tem apenas um único limite, isto é, não podem convergir para dois limites distintos;

ii) Toda subsequência de (x_n) converge para o mesmo limite;

iii) A sequência (x_n) é limitada.

Um critério muito importante para verificação de convergência de sequências é a necessidade de monotonia e de limitação. Em outras palavras, toda sequência monótona limitada é convergente.

Um fato curioso é a possibilidade de mostrar que se uma sequência (x_n) é monótona não-decrescente e limitada, tem-se que $\lim x_n = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ e, analogamente, $\lim x_n = \inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ caso a sequência (x_n) seja não-crescente e limitada.

Uma consequência imediata, do que comentamos acima, é o critério de Bolzano-Weierstrass, que estabelece que toda sequência de números reais limitada, possui uma subsequência convergente.

Vejamos agora algumas propriedades importantes dos limites das sequências convergentes, relativos as operações de soma, subtração, produto e quociente.

Sejam (x_n) e (y_n) sequências convergentes. Então:

1. $\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$;

2. $\lim (x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$;

3. $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim x_n}{\lim y_n}$, se $\lim y_n \neq 0$.

Exemplo 2.2.1 Vejamos alguns exemplos sobre as propriedades apresentadas de sequências de números reais:

a) Do critério da monotonia e da limitação de uma sequência, é possível mostrar que a sequência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $0 < a < 1$, converge para zero, pois é decrescente e limitada, logo converge para o ínfimo do conjunto $X = \{a^n; n \in \mathbb{N}\}$. Mais ainda, para o caso $-1 < a \leq 0$ prova-se, usando o fato de que $\lim |a^n| = 0 \Leftrightarrow \lim a^n = 0$, que a sequência ainda é convergente.

b) Do Exemplo 2.1.1 parte c) e do fato de que a sequência de termo geral $x_n = 1/n$ é limitada e monótona não-crescente (em particular, decrescente), tem-se que (x_n) converge para 0, isto é, $\lim x_n = \lim 1/n = \inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\} = 0$.

A partir de agora introduziremos o conceito de séries e apresentaremos alguns resultados sobre sua convergência.

Uma série é uma soma $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ com um número infinito de parcelas. Para que isto faça sentido, vejamos como se define precisamente esse conceito.

Considere uma sequência (a_n). Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Dizemos então que (s_n) é a sequência de somas parciais, s_n é a reduzida ou soma parcial e a_n o termo geral da série $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Observe que pela própria definição da reduzida, temos: $s_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

A série $\sum a_n$ será dita convergente quando a sequência (s_n) de suas somas parciais for convergente. E neste caso, o limite de (s_n) será a soma da série, isto é

$$\lim s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Quando uma série não for convergente, será dita divergente. As vezes considera-se séries cujo primeiro termo é a_0 ao invés de a_1.

Uma condição necessária, mas não suficiente, para uma série convergente é que o termo geral convirja para zero, isto é, se uma série $\sum a_n$ for convergente, então seu termo geral a_n tem limite zero. A contrapositiva desta sentença nos diz que a primeira coisa que se deve verificar quando queremos saber sobre a convergência ou não de uma série é se o limite do seu termo geral é diferente de zero ou não existe, pois se assim o for a série será divergente. Todavia, não se garante que o limite do termo geral zero implique que a série é convergente.

A chamada série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ é convergente quando $|a| < 1$ e divergente quando $|a| \geq 1$. A divergência é um consequência do termo geral a^n não convergir para zero quando $|a| \geq 1$. Já a convergência segue do fato de existir o limite $1/(1-a)$ da reduzida $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = (1 - a^{n+1})/(1-a)$ da série.

Outro fato importante que utilizaremos posteriormente nas séries de funções, conhecido como critério da cauda, é o seguinte: Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de termos $a_n \geq 0$ converge se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=n_0+1}^{\infty} a_j = \sum_{n>n_0} a_n < \varepsilon$. Isso significa dizer que o "resto", ou a "cauda", de uma série convergente tende a zero.

Em consequência as operações de limites de sequências, resulta que se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são duas séries numéricas convergentes, teremos que:

(i) $\sum(a_n + b_n)$ converge e vale $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$;

(ii) Para todo λ real, $\sum(\lambda \cdot a_n) = \lambda \sum a_n$ converge;

(iii) $\sum(a_n \cdot b_n)$ converge e vale $\sum(a_n \cdot b_n) \leq (\sum a_n) \cdot (\sum b_n)$.

Ds itens acima, podemos estender a série $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ para um tipo de série geométrica mais geral, de modo que a convergência seja preservada. A série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda \cdot a^n)$ ou, equivalentemente, $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda \cdot a^{n-1})$ é convergente quando $|a| \leq 1$. A convergência segue-se imediatamente do item (ii) acima.

Quando $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, teremos que $\sum a_n$ será uma série de termos não-negativos. Esse tipo de série será convergente se, e somente se, a sequência de somas parciais for limitada. Isto se explica no simples fato de que a sequência de somas parciais (s_n) é não-decrescente, pois $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$ $(a_{n+1} \geq 0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Basta, então, a limitação para que (s_n) seja convergente e, consequentemente, a convergência de $\sum a_n$. Denotamos por $\sum a_n < +\infty$ para significar que a série $\sum a_n$ de termos não-negativos é convergente, caso contrário $\sum a_n = +\infty$ para dizer que diverge.

A partir da equivalência que comentamos no parágrafo acima, prova-se o critério da comparação: se $\sum a_n$, $\sum b_n$ são séries de termos não-negativos e existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq cb_n$ para todo $n > n_0$ então a convergência de $\sum b_n$ implica a de $\sum a_n$ enquanto a divergência de $\sum a_n$ implica a de $\sum b_n$.

Exemplo 2.2.2 Alguns exemplos/fatos interessantes sobre séries de números reais:

a) A série harmônica $\sum 1/n$ é um exemplo bastante comum para mostrar que se o termo geral de uma série for zero não implica, necessariamente, que a série é convergente. Pois, tem-se $\lim 1/n = 0$, todavia a série $\sum 1/n$ diverge.

b) A série $\sum \ln(n)/n$ é divergente, basta utilizar o critério da comparação a partir da série harmônica.

c) A série $\sum 1/n^2$ converge. Utiliza-se o critério da comparação a partir da convergência da série $\sum 2/n(n+1)$.

Quando se tem $\sum |a_n| < +\infty$, diz-se que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Um resultado, possível de se provar, é que toda série absolutamente convergente é convergente, isto é, $\sum |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum a_n$ convergente.

Uma série especial para o nosso trabalho são as séries de potências. Faremos uma breve explanação sobre essas séries nesta seção e, posteriormente, apresentaremos mais detalhes sobre elas na Seção 3.2. A ideia principal por trás das séries de potências é a possibilidade de transformar funções "complicadas" em representações polinomiais de infinitas parcelas, que por sua vez são mais simples de serem estudadas.

Uma série de potências é uma série do tipo

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots ,$$

representadas simbolicamente por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

onde convencionamos $(x-a)^0 = 1$, quando tivermos $x = a$. O número $a \in \mathbb{R}$ é dito centro da série e os a_n são os coeficientes. Se fizermos, por exemplo, os a_n constantes, isto é, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, $a_n = \lambda$ para todo n, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(x-a)^n$ é, na verdade, a série geométrica. Pelo que já comentamos, a série será convergente quando $|x-a| < 1$, isto é, quando $x \in (a-1, a+1)$ chamado de intervalo de convergência da série. Neste caso, sua soma será $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(x-a)^n = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(x-a)^n = \lambda/[1-(x-a)]$.

Um caso particular das séries de potências ocorre quando se tem o centro da série $a = 0$. Neste caso, a série se escreve $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$, simbolicamente representada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,$$

e convencionamos $x^0 = 1$ quando $x = 0$.

Neste caso, a determinação dos pontos x para os quais esta série converge se faz por meio do teste de Cauchy, analisando o comportamento da sequência $(\sqrt[n]{|a_n|})$:

(i) Se a sequência $(\sqrt[n]{|a_n|})$ é ilimitada então a série $\sum a_nx^n$ converge apenas quando $x = 0$.

(ii) Se a sequência $(\sqrt[n]{|a_n|})$ é limitada então o conjunto

$$R = \{\rho > 0;\ \sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ suficientemente grande}\}$$

é não-vazio.

Na verdade, o conjunto R é um intervalo do tipo $(0, r)$, $(0, r]$ ou $(0, +\infty)$, onde $r = \sup R$. O número r é chamado de raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$.

O raio de convergência r da série de potências $\sum a_nx^n$ goza de algumas propriedades:

(1) A série $\sum a_nx^n$ converge absolutamente, para todo $x \in (-r, r)$.

(2) A série $\sum a_nx^n$ diverge, se $|x| > r$.

(3) Se $x = \pm r$, a série $\sum a_nx^n$ pode divergir ou convergir.

(4) Se existir $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, então $r = 1/L$

Na seção seguinte, apresentamos apenas alguns resultados sobre limite e continuidade de funções que serão úteis ao nosso objetivo, o qual, como sabemos, é o estudo das sequências e séries de funções.

2.3 Limite e continuidade de funções

Antes de falarmos sobre limite e continuidade de funções, faz-se necessário estabelecer algumas noções topológicas referentes a subconjuntos de $\mathbb{R}$. Adotaremos uma linguagem geométrica, falando "ponto" em vez de "número real" e "reta" no lugar de "o conjunto $\mathbb{R}$".

Diz-se que um ponto a é interior ao conjunto $A \subset \mathbb{R}$ quando existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$. O conjunto de todos os pontos interiores é dito o interior de A, denotado por $\text{int}A$. Diremos que $A \subset \mathbb{R}$ será aberto quando $A = \text{int}A$, isto é, todos os pontos de A são interiores a A. Em particular, temos sempre $\text{int}A \subset A$ para todo $A \subset \mathbb{R}$.

A propriedade de ser um conjunto aberto é de extrema importância para o conceito de limites, tendo em vista que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ ser aberto significa que dado qualquer ponto de $a \in X$ é possível encontrarmos infinitos pontos suficientemente próximos de a que ainda pertencem a X.

Enumeramos dois resultados sobre conjuntos abertos que não serão demonstrados, mas podem ser facilmente conferidas nas referências.

a) A interseção finita de conjuntos abertos ainda é um conjunto aberto;

b) A união arbitrária de conjuntos abertos é aberto.

Diz-se que a é um ponto aderente a X quando existe uma sequência de pontos $x_n \in X$ tal que $\lim x_n = a$. Todo ponto $a \in X$ é aderente a X, basta tomar $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O conjunto formado por todos os pontos aderentes a X é chamado de fecho de X e denotado por $\overline{X}$. É claro que $X \subset \overline{X}$ qualquer que seja o $X \subset \mathbb{R}$. Mas, a inclusão contrária nem sempre é verdade.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito fechado quando $X = \overline{X}$. Pelo que foi dito acima, para que X seja fechado basta que $\overline{X} \subset X$, isto é, que todo ponto aderente a X seja ponto de X.

Outra maneira de definir fechados é por meio de abertos. Diz que um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado quando seu complementar $A = \mathbb{R} - F$ é aberto. Vale a recíproca também, ou seja, se um conjunto é aberto seu complementar é fechado.

Assim como os abertos, vamos enumerar dois resultados sobre fechados.

a) A união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado;

b) A intersecção arbitrária de fechados é um fechado.

Dizemos que V é uma vizinhança de a, quando $a \in \text{int}V$. Em particular, todo conjunto aberto é uma vizinhança de seus pontos.

Seja $a \in \mathbb{R}$ e $X \subset \mathbb{R}$. Diz-se que a é um ponto de acumulação do conjunto X quando toda vizinhança V de a contém algum ponto de X diferente do próprio a, isto é, $V \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$ ou, equivalentemente, para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Denotamos por X' o conjunto de todos os pontos de acumulação de X e o chamamos de derivado de X. Caso a não seja ponto de acumulação de X, dizemos que a é um ponto isolado. Quando todos os pontos de X são isolados, diz-se que X é discreto.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se de compacto quando é limitado e fechado.

Nem sempre é possível, ou é difícil, provar que um conjunto X é compacto, mostrando que ele é fechado e limitado. Assim, uma caracterização conveniente, consequência do critério de Bolzano-Weierstrass, é estabelecida: o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X.

Um resultado importante sobre compactos, conhecido por Teorema de generalização do princípio dos intervalos encaixados, é o que segue abaixo.

Teorema 2.3.1 *Dada uma sequência decrescente $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ de conjuntos compactos não-vazios, existe (pelo menos) um número real que pertence a todos os X_n.*

Esse resultado será utilizado apenas uma vez em nosso trabalho, especificamente na demonstração do Teorema 3.2.5.

Exemplo 2.3.2 Vejamos alguns exemplos relacionados ao que expomos acima:

a) Exemplos bastante comuns de abertos são os intervalos abertos, do tipo (a, b). O conjunto $X = (a, b) \cup (c, d)$ é um aberto. Além disso, o conjunto vazio é também um aberto. Os conjuntos do tipo $A_n = (-1/n, 1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ são abertos, mas sua intersecção infinita $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ não é aberto.

b) Intervalos fechados do tipo $[a, b]$ são exemplos básicos de conjuntos fechados. O conjunto $A = \bigcup_{x \in (0,1)} \{x\} = (0, 1)$ é um exemplo que mostra que uma união infinita de conjuntos fechados, pode não ser um fechado. Os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são os únicos fechados e abertos ao mesmo tempo.

c) Os intervalos do tipo $[a, b]$ são conjuntos compactos. O conjunto $\mathbb{Z}$ não é compacto: é fechado, pois seu complementar $\mathbb{R} - \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n + 1)$ é um aberto, mas não é limitado.

Passaremos agora a fazer considerações a respeito de limite, continuidade e continuidade uniforme de funções.

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real e $a \in X'$ um ponto de acumulação de X. Dizemos que o número real L é limite de $f(x)$ quando x tende a a, e denotamos por $\lim_{x\to a} f(x) = L$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ pudermos encontrar $\delta > 0$ tal que se tomarmos $x \in X$, com $0 < |x-a| < \delta$, teremos $|f(x)-L| < \varepsilon$, isto é, conforme tomamos $x \in X$ com distância ao ponto a menor que δ, obteremos que $f(x)$ terá sua distância a L menor que ε. Isto significa que podemos fazer $f(x)$ tão próximo quanto queiramos de L, bastando tomarmos x suficientemente próximo de a. Em símbolos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0; x \in X, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon.$$

A restrição de $0 < |x-a|$ significa que $x \neq a$. Na verdade, o que importa é o comportamento da função quando o x se aproxima de a ($x \neq a$), não necessariamente estando f definida em $x = a$. Também é fato que o limite de uma função num determinado ponto a, quando existir, será único.

Semelhantemente ao limite de sequências, se tivermos duas funções reais $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$ tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então:

(i) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$;

(iii) $\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)] = L/M$, se $M \neq 0$.

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$, podemos caracterizar o limite de uma função da seguinte maneira: para que se tenha $\lim_{x\to a} f(x) = L$ é necessário e suficiente que para toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, tenha-se $\lim f(x_n) = L$.

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se contínua no ponto $a \in X$ quando para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x-a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Simbolicamente, f ser contínua no ponto a significa:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0; x \in X, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Quando a função não é contínua no ponto a, dizemos que ela é descontínua em a. Caso a função seja contínua em todos os pontos do domínio, dizemos apenas que a função é contínua.

Se $a \in X \cap X'$, isto é, a é também um ponto de acumulação de X então para que $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua no ponto a é necessário e suficiente que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Vamos adaptar a caracterização de limite estabelecida anteriormente para a ideia de continuidade de uma função, da seguinte maneira: afim de que a função $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua no ponto a é necessário e suficiente que, para todo sequência de pontos $x_n \in X$, com $\lim x_n = a$, tenha-se $\lim f(x_n) = f(a)$.

Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são contínuas, vale que:

(i) $f \pm g$ é contínua;

(ii) $f \cdot g$ é contínua;

(iii) f/g é contínua, caso $g(a) \neq 0$;

(iv) $f \circ g$ é contínua, caso a composta esteja bem definida.

Vamos comentar sobre algumas propriedades que as funções contínuas gozam, quando definidas em intervalos. A primeira, é que suas imagens são também intervalos. Mais ainda, se esse domínio for um intervalo compacto suas imagens também serão intervalos compactos. Uma outra propriedade é toda função contínua definida num intervalo compacto possui máximo e mínimo.

Uma condição mais restrita que a continuidade é a continuidade uniforme. Enquanto a primeira é um fenômeno local, a segunda é um fenômeno global. Vejamos a definição disto.

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ será uniformemente contínua em X quando, para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, com $|y - x| < \delta$ implicar na condição $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Uma distinção entre a continuidade e a continuidade uniforme é a seguinte: se para cada $x \in X$ existir uma vizinhança V desse ponto, de modo que a restrição de f a $X \cap V$ seja contínua, então a função $f : X \to \mathbb{R}$ será contínua. Todavia, se existir uma vizinhança V para cada $x \in X$ tal que a restrição de f a $X \cap V$ seja uniformemente contínua, não necessariamente teremos que f será uniformemente contínua. Por isso, dizemos que a continuidade é um fenômeno local, enquanto que a continuidade uniforme é um fenômeno global.

É claro que toda função uniformemente contínua é contínua, mas a recíproca é falsa (veja o Exemplo 2.3.3 c)). Entretanto, se uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ está definida num compacto X, então f também será uniformemente contínua.

É possível estabelecer uma caracterização, por sequências, de funções uniformemente contínuas: $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua se, e somente se para todo par de sequências (x_n) e (y_n) em X, com $\lim(y_n - x_n) = 0$, tenha-se $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$. Como aplicação dessa caracterização, mostra-se que toda função uniformemente contínua num conjunto limitado, é uma função limitada.

Exemplo 2.3.3 Vejamos exemplos importantes sobre a continuidade:

a) Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são funções contínuas definidas num conjunto fechado não-vazio $X \subset \mathbb{R}$, então o conjunto $F = \{x \in X; f(x) \leq g(x)\}$ é fechado. Caso X seja aberto, temos $A = \{x \in X; f(x) < g(x)\}$ aberto.

b) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas, então o conjunto $A = \{x \in X; f(x) \neq g(x)\}$ é aberto, enquanto que $F = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$ é fechado. Isto porque $\mathbb{R}$ é aberto e fechado ao mesmo tempo.

c) A função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$ é contínua, mas não é uniformemente contínua.

2.4 A derivada e a integral de Riemann

Uma função auxiliar importante para o estudo do comportamento de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é a função $q : X - \{a\} \to \mathbb{R}$, dada por $q(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a)$, com $a \in X$. Esta função determina o valor da inclinação da reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$. Quando $a \in X \cap X'$ faz sentido considerarmos o limite sobre $q(x)$ quando x tende a. Caso exista esse limite, encontraremos o valor de inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, o qual chamaremos de derivada de f no ponto a.

Daí, sendo $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$, a derivada da função f no ponto a é definida como o limite (quando existir) de $q(x)$ quando x tende para a, e é denotada por $f'(a)$. Simbolicamente, temos

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Fazendo uma mudança de variável, pondo $h = x - a$, obtemos, de forma equivalente,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Como todo limite pode existir ou não, a derivada, por ser um tipo especial de limite, pode existir ou não num determinando ponto. Quando existe a derivada $f'(x)$ de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ em todos os pontos $x \in X \cap X'$, diz-se que a função f é derivável no conjunto X. Isso determina uma nova função $f' : X \cap X' \to \mathbb{R}$ (chamada de derivada de f) que associa a cada $x \in X \cap X'$ a imagem $f'(x) \in \mathbb{R}$. Se f' é contínua, diz-se que f é de classe C^1.

Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ forem deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$, então $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (caso $g(a) \neq 0$) e $g \circ f$ (caso esteja bem definida) também serão deriváveis no ponto a. Mais que isso, valem as expressões:

(i) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;

(ii) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$;

(iii) $(f/g)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$;

(iv) $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

É possível provar que toda função derivável num ponto é contínua no mesmo ponto. Além disso, se a derivada de uma função for uma função limitada, então ela será uniformemente contínua.

Assim como na continuidade, os resultados mais interessantes sobre derivadas são sobre intervalos, em particular os compactos. O Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio de Lagrange são exemplos disso. Enquanto o primeiro estabelece que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$, derivável em (a, b), possui um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, o segundo afirma que nas condições de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ser contínua e derivável em (a, b), existirá um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$.

Exemplo 2.4.1 Vamos apresentar alguns resultados básicos e interessantes sobre a derivada:

a) A função constante é derivável e sua derivada é identicamente nula.

b) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ é derivável e se tem $f'(x) = a$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

c) Uma função, cuja derivada é identicamente nula em todos os pontos interiores do domínio, é constante.

d) Se duas funções tem derivadas iguais, então elas diferem por uma constante.

Enquanto a derivada corresponde a ideia geométrica de retas tangentes ao gráfico de uma função, a integral corresponde ao cálculo de área abaixo do gráfico de uma função, como veremos a seguir.

Uma partição do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito de pontos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \subset [a, b]$, de modo que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ ($a \in P$ e $b \in P$). O intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de comprimento $t_i - t_{i-1}$ é dito i-ésimo intervalo da partição P. Em particular, $\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = b - a$. Uma partição P é refinada por uma partição Q, quando $P \subset Q$.

Dada uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, as notações

$$m = \inf\{f(x); x \in [a, b]\}$$

e

$$M = \sup\{f(x); x \in [a, b]\}$$

indicarão o ínfimo e o supremo de f no intervalo $[a, b]$, enquanto que m_i, M_i e $\omega_i = M_i - m_i$ indicarão o ínfimo, o supremo e a oscilação, respectivamente, de f no i-ésimo intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de uma partição P de $[a, b]$.

A soma inferior de f relativamente a partição P é o número

$$s(f; P) = m_1(t_1 - t_0) + \cdots + m_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

e a soma superior de f relativamente a partição P é dada por

$$S(f;P) = M_1(t_1 - t_0) + \cdots + M_n(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Evidentemente, tem-se $m(b-a) \leq s(f;P) \leq S(f;P) \leq M(b-a)$ seja qual for a partição P e $S(f;P) - s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1})$.

Acontece que quando temos $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ as somas inferiores e as somas superiores são aproximações, respectivamente por falta e por excesso, da área que fica entre o eixo das abcissas e o gráfico da função, delimitados por duas linhas verticais que passam uma por a e outra em b.

Definimos a integral inferior e a integral superior de uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ como sendo, respectivamente, o supremo das somas inferiores e o ínfimo das somas superiores relativamente a todas as partições P de $[a,b]$. Simbolicamente, denotaremos a integral inferior por

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P s(f;P),$$

e a integral superior por

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P S(f;P).$$

Um fato importante: nem sempre a integral superior e a integral inferior, de uma mesma função, são iguais (veja o Exemplo 2.4.3 a)). Assim, quando ocorre a coincidência desses valores, diremos que a função f é integrável.

Em outras palavras, uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ será dita integrável quando tivermos

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Esse valor comum chama-se integral (de Riemann) de f e será denotado apenas por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Os seguintes critérios de integrabilidade são válidos para uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. São equivalentes:

(i) f é integrável.

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existem partições P, Q de $[a,b]$ tais que $S(f;Q) - s(f;P) < \varepsilon$.

(iii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que $S(f;P) - s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$.

Uma função que satisfaça certas propriedades também pode ser integrável. Por exemplo, uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ será integrável se satisfizer uma das seguintes condições:

(i) f for contínua;

(ii) f for monótona, isto é, $x, y \in [a, b]$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ ou $f(y) \leq f(x)$.

O comportamento da integral relativamente as operações soma, subtração, produto e divisão, é apresentado abaixo.

Sejam $f, g; : [a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis. Então:

(i) $f + g$ é integrável e vale $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

(ii) $f \cdot g$ é integrável. Se $c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$;

(iii) Se $0 < k \leq |g(x)|$ para todo $x \in [a, b]$ então f/g é integrável;

(iv) $|f|$ é integrável com $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

(v) Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

A derivada e a integral estão estreitamente relacionadas pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 2.4.2 (Teorema Fundamental do Cálculo - TFC.) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo $[a, b]$. As seguintes afirmações a respeito de uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ são equivalentes:*

(i) *F é uma primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.*

(ii) *$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$, para todo $x \in [a, b]$. Em particular, tem-se $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.*

Exemplo 2.4.3 Vejamos exemplos interessantes sobre integrais:

a) A função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 0$ se x é racional e $f(x) = 1$ se x é irracional, tem $\underline{\int_a^b} f(x)dx = 0$ e $\overline{\int_a^b} f(x)dx = b - a$. Logo, não é integrável.

b) A função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$ é integrável, com $\int_a^b f(x)dx = c(b - a)$.

c) A função contínua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x$ para todo $x \in [0, 1]$, tem primitiva $F(x) = x^2$ (uma de suas primitivas, na verdade). Logo, o Teorema Fundamental do Cálculo garante que $\int_0^1 f(t)dt = F(1) - F(0) = 1$.

Capítulo 3

Sequências e séries de funções

Diferentemente do que fizemos no capítulo anterior, apresentaremos as sequências e séries de funções de maneira mais formal. Isto significa que as afirmações e resultados deste capítulo serão todas demonstradas. Baseamo-nos nas referências [1, 3, 6, 8, 9] e [11] para construção do capítulo.

Alguns problemas em pesquisas na área da Matemática se resumem à busca de funções com determinadas propriedades especiais. É frequente então que o pesquisador se debruce em encontrar uma sequência de funções $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ que cumpram as condições exigidas apenas aproximadamente. A ideia central do processo é que a função-limite f dessa sequência de funções, caso exista esse limite, satisfaça as condições procuradas. Isto leva ao estudo de limites de sequências de funções. Também é comum que as aproximações sucessivas da função sejam estabelecida por um somatório $f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots$ das funções da sequência e, deste modo, teremos uma série de funções $\sum f_n$.

No que segue, vamos começar estudando modos de convergência de funções.

3.1 Convergência pontual e uniforme

Para as sequências e séries de números existe apenas uma noção de limite. Entretanto, existem muitos modos de se definir a convergência de sequências e séries funções e estudaremos neste capítulo as noções de convergência pontual (ou simples) e a convergência uniforme.

Definição 3.1.1 Diz-se que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge pontualmente (ou simplesmente) para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $x \in X$, a sequência de números reais $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ converge para $f(x)$. Em outras palavras, sendo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de X em $\mathbb{R}$, diremos que essa sequência converge pontualmente para $f : X \to \mathbb{R}$ se para cada $x \in X$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

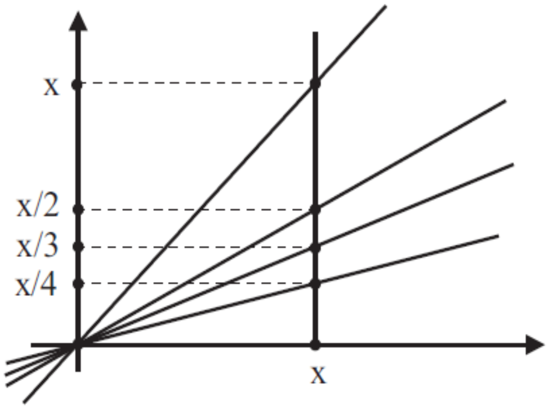
Assim, $f_n \to f$ (notação semelhante à usada para sequências numéricas) pontualmente em X quando para todo $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependente de ε e x) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Exemplo 3.1.2 A sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f_n = x/n$, converge pontualmente para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ identicamente nula. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $n_0 > |x|/\varepsilon$. Daí, $n > n_0 \Rightarrow n > |x|/\varepsilon \Rightarrow |x/n - 0| = |x|/n < \varepsilon$. Logo, $f_n \to f$ pontualmente em $\mathbb{R}$.

Observe no exemplo acima que conforme aumentamos o valor de x e/ou diminuímos o valor de ε, o valor de n_0 também aumentará. Isto mostra que o n_0 obtido está em função do ponto x do domínio e do ε tomado.

A Figura 3.1 mostra o gráfico das funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do Exemplo 3.1.2, interceptados por uma reta vertical que passa pelo ponto $(x, 0)$. Note que conforme aumentamos o valor de $n \in \mathbb{N}$, os pontos $(x, f_n(x))$, que pertencem a essa reta vertical, estão cada vez mais próximos do ponto $(x, 0)$. Essa interpretação (geométrica) também nos mostra que esse fato ocorre independente do ponto x que se tome.

Figura 3.1: Gráfico das funções $f_n(x) = x/n$ convergindo para função identicamente nula



Fonte: Lima [9]

Acontece que nem sempre os gráficos das funções se comportam de modo tão simples como na figura acima. O exemplo abaixo mostra uma situação bem diferente, como bem ilustra a Figura 3.2.

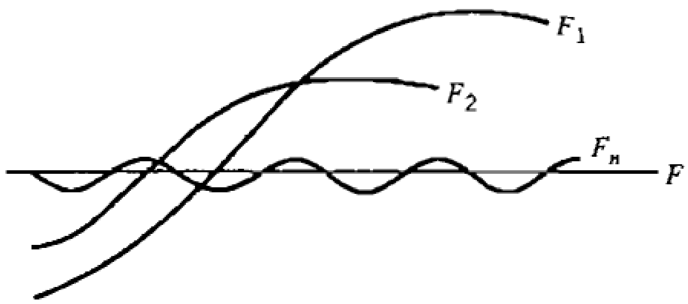
Exemplo 3.1.3 A sequência $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $F_n(x) = \operatorname{sen}(nx + n)/n$, converge pontualmente para a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ identicamente nula.

Com efeito, observemos que de $|\text{sen}\,(y)| \leq 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$, segue que

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\frac{1}{n} \cdot \text{sen}\,(nx+n)\right| < \frac{1}{n},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Consequentemente, de $\lim 1/n = 0$, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |F_n(x) - F(x)| < 1/n < \varepsilon$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $F_n \to F$ pontualmente.

Figura 3.2: Gráfico das funções $F_n(x) = \text{sen}\,(nx+n)/n$ convergindo para função identicamente nula



Fonte: Bartle [3]

Exemplo 3.1.4 A sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = x^n$, converge pontualmente para função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(1) = 1$ e $f(x) = 0$ se $x \in [0,1)$. É óbvio que $f_n(1) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e em particular $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$. Por outro lado, para cada $x \in [0,1)$, vimos nos exemplos da Seção 2.2 que $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, isto é, $\lim f_n(x) = 0$. Logo, $f_n \to f$ pontualmente.

O exemplo anterior nos mostra que o limite pontual de uma sequência de funções não é necessariamente uma função contínua. Veremos mais a frente que existem condições para a garantia da continuidade desse limite.

Um condição mais restrita que a convergência pontual é dada pelo conceito de convergência uniforme, que definiremos abaixo.

Definição 3.1.5 Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo apenas de ε) tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, seja qual for o ponto $x \in X$.

Exemplo 3.1.6 Dado o conjunto $X \subset \mathbb{R}$, sejam (a_n) um sequência de números reais com $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $g : X \to \mathbb{R}$ uma função limitada. A sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$, dada por $f_n(x) = a_n \cdot g(x)$, converge uniformemente para a função $f : X \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a \cdot g(x)$. Com efeito, existe $K > 0$ tal que $|g(x)| \leq K$, para todo $x \in X$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo apenas de ε) tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon/K$. Logo, $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = |a_n \cdot g(x) - a \cdot g(x)| = |a_n - a||g(x)| < \varepsilon/K \cdot K = \varepsilon$. Portanto $f_n \to f$ uniformemente.

Exemplo 3.1.7 A sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f_n(x) = \text{sen}(x) + \frac{\text{sen}(x)}{n},$$

converge uniformemente para função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \text{sen}(x)$. Com efeito, note que

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \text{sen}(x).$$

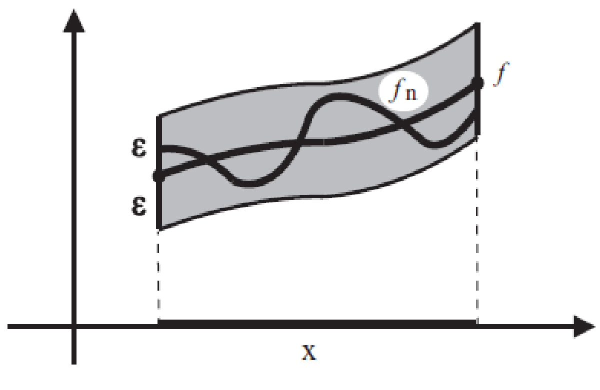
Daí, como

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

e $|\text{sen}(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue-se do Exemplo 3.1.6 que $f_n \to f$ uniformemente.

Geometricamente, dizer que $f_n \to f$ uniformemente em X, significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ o gráfico de f_n estará contido numa faixa de raio ε em torno do gráfico de f (veja Figura 3.3).

Figura 3.3: Faixa de raio ε em torno do gráfico de f



Fonte: Lima [9]

Comparando as definições de convergência pontual e convergência uniforme, percebe-se a diferença fundamental entre elas: a dependência apenas do ε para a escolha do n_0, sendo o fato independente do ponto $x \in X$ escolhido. Além disso, é imediato da definição que a convergência uniforme implica a convergência simples, sendo a recíproca falsa:

Exemplo 3.1.8 A sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f_n(x) = x/n$, converge pontualmente para a função identicamente nula, como vimos no Exemplo 3.1.2. Entretanto não converge uniformemente, pois nenhuma faixa em torno da função identicamente nula pode conter o gráfico de f_n, já que estas são ilimitadas para todo $n \in \mathbb{N}$. Todavia, se restringirmos o domínio das funções a um intervalo $[a, b]$, a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida em $[a, b]$ convergirá uniformemente para função identicamente nula. Com efeito, para todo $x \in [a, b]$, temos $|x| \leq c = \max\{|a|, |b|\}$ e, portanto, dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $n_0 > c/\varepsilon$. Daí, $n > n_0 \Rightarrow |x/n - 0| = |x|/n < c/n < c/n_0 < \varepsilon$.

As considerações feitas para sequências de funções, podem ser facilmente adaptadas para séries de funções, considerando suas somas parciais.

Definição 3.1.9 Considere uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n.$$

Dizemos então que (s_n) é a sequência de somas parciais da sequência (f_n), que s_n é a reduzida ou n-ésima soma parcial de (f_n) e f_n é o termo geral da série de funções $\sum f_n$.

A série de funções $\sum f_n$ será dita convergente quando a sequência (s_n) de suas somas parciais for convergente. Neste caso, o limite de (s_n) será a soma da série, isto é

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim s_n.$$

Assim, a convergência pontual e a convergência uniforme de séries de funções pode ser posta da seguinte forma:

- Uma série $\sum f_n$ de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge pontualmente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se a sequência de funções (s_n) converge pontualmente para f, isto é, quando tem-se $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.

- Uma série $\sum f_n$ de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$, quando a sequência de funções (s_n) converge uniformemente para f.

Apenas como uma observação, a convergência pontual e uniforme da série $\sum f_n$ para f, como definidas acima, são equivalentes à convergência pontual e uniforme, respectivamente, da sequência de funções restos, ou “cauda”, da série

$$r_n : X \to \mathbb{R}, \text{ dadas por } r_n = f - s_n,$$

para a função identicamente nula em $\mathbb{R}$. Este fato é consequência do critério do resto (ou da cauda) das séries numéricas convergentes (ver Seção 2.2).

Exemplo 3.1.10 A série $\sum f_n$ de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n},$$

converge pontualmente para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + x^2$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Com efeito, para $x = 0$,

$$\sum f_n(0) = \sum \frac{0^2}{(1+0^2)^n} = 0 = f(0).$$

Para $x \neq 0$, tem-se que

$$\sum f_n(x) = \sum \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \cdot \sum \frac{1}{(1+x^2)^n},$$

onde a série $\sum \frac{1}{(1+x^2)^n}$ é geométrica de razão $a = \frac{1}{1+x^2}$. Como neste caso $|a| < 1$, a série $\sum \frac{1}{(1+x^2)^n}$ converge e sua soma é dada por

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x^2}.$$

Assim,

$$\sum f_n(x) = x^2 \cdot \sum \frac{1}{(1+x^2)^n} = x^2 \cdot \frac{1+x^2}{x^2} = 1 + x^2 = f(x),$$

para todo $x \neq 0$. Logo, a série $\sum f_n$ converge pontualmente para f.

Exemplo 3.1.11 A série $\sum f_n$ de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f_n(x) = 1/(n^2 + x^2)$, converge uniformemente. Com efeito, para cada $x \in \mathbb{R}$, a série $\sum f_n(x)$ é convergente pelo critério da comparação, a partir da convergência da série $\sum 1/n^2$. Então, existe e está bem definida a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum f_n(x)$. Seja $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ uma reduzida da série $\sum f_n(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Consideremos a sequência de funções restos $r_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $r_n(x) = f(x) - s_n(x)$. Observe que

$$\begin{aligned} r_n(x) &= f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots \\ &= \frac{1}{(n+1)^2 + x^2} + \frac{1}{(n+2)^2 + x^2} + \ldots \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}. \end{aligned}$$

Da convergência de $\sum 1/j^2$, o critério da cauda (veja Seção 2.2) garante que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo só de ε) tal que $n > n_0 \Rightarrow |r_n(x)| = r_n(x) \leq \sum_{n>n_0} 1/n^2 < \varepsilon$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, a sequência de funções restos $r_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para função identicamente nula e, consequentemente, a série $\sum f_n$ converge uniformemente.

3.2 Propriedades da convergência uniforme

Como foi mostrado na seção anterior, convergência pontual não implica na continuidade da função limite (ver Exemplo 3.1.4). Entretanto, num contexto mais restritivo, o limite implicará a continuidade.

O teorema abaixo nos mostra em que condições isso ocorre.

Teorema 3.2.1 *Se uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \to \mathbb{R}$ e cada f_n é contínua no ponto $a \in X$ então f é contínua no ponto a.*

Demonstração. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, por $f_n \to f$ uniformemente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3, \forall x \in X, \forall n > n_0. \tag{3.1}$$

Em particular, como $a \in X$,

$$|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon/3, \forall n > n_0. \tag{3.2}$$

Por outro lado, a continuidade de cada f_n no ponto $a \in X$ garante que existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon/3, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

sempre que $x \in X$, com $|x - a| < \delta$. Daí, fixando $n > n_0$, de (3.1), (3.2) e (3.3) temos

$$\begin{aligned} x \in X, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| &= |[f(x) - f_n(x)] + [f_n(x) - f_n(a)] + [f_n(a) - f(a)]| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, a função f é contínua no ponto a. ■

O teorema acima se constitui como uma ferramenta importante para teste de convergência uniforme. De acordo com ele, se o limite de funções contínuas não é uma função contínua, certamente a convergência não é uniforme.

Exemplo 3.2.2 No Exemplo 3.1.4 a função-limite não é contínua, mesmo sendo $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, para todo $n \in \mathbb{N}$. A conclusão, pelo Teorema 3.2.1, é que a convergência neste caso não é uniforme.

Existem sequências de funções contínuas que convergem pontualmente para uma função contínua, mas que a convergência não é uniforme, como no caso mostrado pelo Exemplo 3.1.2. O próximo teorema, conhecido por Teorema de Dini, estabelece condições suficientes para que esse tipo de convergência seja uniforme. Mas antes de o apresentarmos, vejamos uma definição e um lema.

Definição 3.2.3 Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge monotonicamente para a função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para cada $x \in X$, a sequência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona e converge para $f(x)$.

É um fato que se uma sequência de funções contínuas (f_n) converge monotonicamente em X para uma função f, então $|f_{n+1}(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Não é difícil perceber esse fato quando pensamos em distâncias, mas a prova segue no resultado abaixo.

Lema 3.2.4 *Se a sequência de funções contínuas $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge monotonicamente para função $f : X \to \mathbb{R}$, então vale $|f_{n+1}(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Com efeito, suponhamos que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ seja monótona, digamos não-crescente. Por hipótese de monotonia e convergência, temos que $f(x) = \inf\{f_n(x); x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ e vale

$$\begin{aligned} f(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x) &\Rightarrow 0 \leq f_{n+1}(x) - f(x) \leq f_n(x) - f(x) \\ &\Rightarrow |f_{n+1}(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|, \end{aligned}$$

para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Vejamos então o teorema.

Teorema 3.2.5 (Dini.) *Se uma sequência de funções contínuas $f_n : X \to \mathbb{R}$, onde $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, converge monotonicamente para uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$, então (f_n) converge uniformemente para f.*

Demonstração. Digamos, sem perda de generalidade, que a monotonicidade é não-decrescente. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $K_n = \{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos que, para todo n suficientemente grande, K_n será vazio. Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$, K_n é limitado (pois $K_n \subset X$) e fechado (pois f_n e f são contínuas e X é fechado, veja Exemplo 2.3.3), logo compacto. Por outro lado, a monotonicidade da convergência implica (pelo Lema 3.2.4) que, para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f(x)| \geq |f_{n+1}(x) - f(x)|$ e, consequentemente, $K_n \supset K_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, temos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$, pois $x \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implicaria $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo, já que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Daí, pelo Teorema de generalização do princípio dos intervalos encaixados (veja Teorema 2.3.1), segue-se que algum K_{n_0} é vazio, em particular K_n é vazio, para todo $n > n_0$. Isto significa que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, seja qual for o $x \in X$. Logo, $f_n \to f$ uniformemente. ■

Exemplo 3.2.6 A sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_1(x) = \sqrt{x}$ e $f_{n+1}(x) = \sqrt{xf_n(x)}$ para $n > 1$, converge uniformemente para a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x$. Com efeito, observe que podemos reescrever

$$f_n(x) = x^{(2^n-1)/2^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, f_n é contínua em $[0,1]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois

$$\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} x^{(2^n-1)/2^n} = a^{(2^n-1)/2^n} = f_n(a),$$

para todo $a \in [0,1]$. Além disso, observe que

$$\begin{aligned} 2^n \leq 2^{n+1} &\Leftrightarrow \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \leq 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \\ &\Leftrightarrow \frac{2^n - 1}{2^n} \leq \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e assim a sequência $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente para cada $x \in (0,1)$ (veja Exemplo 2.2.1 parte a)) e constante quando $x = 0$ ou $x = 1$. Portanto, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona não-crescente, seja qual for $x \in [0,1]$. Por fim, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} x^{(2^n-1)/2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} x^{1-1/2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} x \cdot x^{-1/2^n} \\ &= x \cdot \lim_{n\to\infty} x^{-1/2^n} = x = f(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in [0,1]$. Logo, temos todas as hipóteses do Teorema 3.2.5, segue que $f_n \to f$ uniformemente.

A seguir, examinaremos as relações entre a convergência uniforme e as operações de integração e derivação. É importante relembrar que tanto a derivada quanto a integral são tipos especiais de limites de funções.

Teorema 3.2.7 (Passagem do limite sob o sinal de integral.) *Se a sequência de funções integráveis $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ então f é* *integrável e*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Isto quer dizer que, neste caso, vale $\displaystyle\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, por $f_n \to f$ uniformemente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/4(b-a) \tag{3.4}$$

para todo $x \in [a,b]$. Fixando $n > n_0$, como f_n é integrável, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que

$$\sum \omega_i'(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon/2, \tag{3.5}$$

onde ω_i' é a oscilação de f_n no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P. Mas, de (3.4), para $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ quaisquer, vale:

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\
&< \varepsilon/4(b-a) + \omega_i' + \varepsilon/4(b-a) \\
&= \omega_i' + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.
\end{aligned}$$

Tomando ω_i como a oscilação de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P, o cálculo acima nos dá

$$\omega_i = \sup\{|f(y) - f(x)|; x, y \in [t_{i-1}, t_i]\} \leq \omega_i' + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Daí,

$$\omega_i(t_i - t_{i-1}) \leq \omega_i'(t_i - t_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(t_i - t_{i-1}) \tag{3.6}$$

e de (3.6) e (3.5), temos

$$\begin{aligned}
\sum \omega_i(t_i - t_{i-1}) &\leq \sum \left[\omega_i'(t_i - t_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(t_i - t_{i-1})\right] \\
&= \sum \omega_i'(t_i - t_{i-1}) + \sum \left[\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(t_i - t_{i-1})\right] \\
&= \sum \omega_i'(t_i - t_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum (t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum \omega_i'(t_i - t_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, f é integrável. Além disso, usando (3.4), para todo $n > n_0$ tem-se

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| &= \left|\int_a^b [f(x)-f_n(x)]dx\right| \\
&\leq \int_a^b |f(x)-f_n(x)|dx \\
&< \int_a^b \frac{\varepsilon}{4(b-a)}dx \\
&= \frac{\varepsilon}{4(b-a)}\cdot(b-a) < \varepsilon
\end{aligned}$$

e isso significa que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$ ■

Teorema 3.2.8 (Passagem do limite sob o sinal de derivação.) *Considere as funções $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Se, para um certo $c \in [a,b]$, a sequência numérica $(f_n(c))$ converge e se as derivadas $f_n' : [a,b] \to \mathbb{R}$ convergem uniformemente para uma função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ então a sequência de funções (f_n) converge uniformemente para uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, de classe C^1 tal que $f' = g$. Isto quer dizer que, neste caso, vale $(\lim f_n)' = \lim f_n'$.*

Demonstração. Como, para cada n, a função f_n' é contínua e f_n é uma primitiva de f_n', pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 2.4.2), para cada $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [a,b]$ temos

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt \tag{3.7}$$

e assim

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt\right] = \lim_{n\to\infty} f_n(c) + \lim_{n\to\infty}\int_c^x f_n'(t)dt. \tag{3.8}$$

O Teorema 3.2.7, garante que

$$\lim_{n\to\infty}\int_c^x f_n'(t)dt = \int_c^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt = \int_c^x g(t)dt. \tag{3.9}$$

Com isso, a convergência da sequência $(f_n(c))$ e as relações (3.8) e (3.9) garantem que existe o limite de $f_n(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Em outras palavras, está bem definida a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt. \tag{3.10}$$

Como g é contínua, pois é o limite uniforme de funções contínuas (Teorema 3.2.1), e de (3.10), podemos usar a equivalência no Teorema Fundamental do Cálculo para concluir que $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Em particular, f' é contínua e, consequentemente, f é de classe C^1.

Resta mostrar que $f_n \to f$ uniformemente. Com efeito, de (3.7) e (3.10), segue que

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= f_n(c) - f(c) + \int_c^x f_n'(t)dt - \int_c^x g(t)dt \\ &= f_n(c) - f(c) + \int_c^x [f_n'(t) - g(t)]dt \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(c) - f(c) + \int_c^x [f_n'(t) - g(t)]dt \right| \\ &\leq |f_n(c) - f(c)| + \left| \int_c^x [f_n'(t) - g(t)]dt \right| \\ &\leq |f_n(c) - f(c)| + \int_c^x |f_n'(t) - g(t)|dt. \end{aligned}$$

Como $f_n' \to g$ uniformemente e $f(c) = \lim_{n\to\infty} f_n(c)$, segue que para todo $\varepsilon > 0$,

$$|f_n'(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{e} \quad |f_n(c) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $x \in [a, b]$ e todo n suficientemente grande. Consequentemente,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(c) - f(c)| + \int_c^x |f_n'(t) - g(t)|dt \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int_c^x \frac{\varepsilon}{2(b-a)}dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}dt \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

e $f_n \to f$ uniformemente. ■

Vamos adaptar os teoremas que apresentamos sobre sequências de funções para séries de funções. Com isso, os resultados dos Teoremas 3.2.1, 3.2.5, 3.2.7 e 3.2.8 se escrevem, respectivamente, nas formas:

1. Considere a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$. Se a série $\sum f_n$ converge uniformemente para $f : X \to \mathbb{R}$ e cada f_n é contínua em $a \in X$ então f é contínua no ponto a.

2. Seja $f_n : X \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções contínuas, com $f_n(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Se X é compacto e a série $\sum f_n$ converge para uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$

então a convergência é uniforme.

3. Seja $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções integráveis. Se $\sum f_n$ converge uniformemente para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ então f é integrável e $\int_a^b \sum f_n(x)dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx$.

4. Seja $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções de classe C^1. Se $\sum f_n'$ converge uniformemente em $[a,b]$ e se, para algum $c \in [a,b]$, a série $\sum f_n(c)$ converge, então $\sum f_n$ converge uniformemente para uma função de classe C^1 e $(\sum f_n)' = \sum f_n'$.

Apresentamos agora o teste de Weierstrass, que estabelece condições para que as séries sejam uniformemente convergentes. Observamos que não há análogo para as sequências de funções.

Teorema 3.2.9 (Teste de Weierstrass.) *Sejam $f_n : X \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções e $\sum a_n$ uma série convergente de número reais não-negativos tais que $|f_n(x)| \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$. Nestas condições, as séries $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ são uniformemente convergentes.*

Demonstração. Como $|f_n(x)| \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$, as reduzidas $s_n(x)$ e t_n das séries, respectivamente, $\sum |f_n(x)|$ e $\sum a_n$, cumprem a seguinte condição: $s_n(x) \leq t_n$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$. O critério da comparação, garante que a série $\sum |f_n(x)|$ converge para todo $x \in X$, isto é, a série $\sum f_n(x)$ é absolutamente convergente, logo a série $\sum f_n(x)$ converge, para todo $x \in X$ (ver Seção 2.2). Da convergência de $\sum a_n$, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo apenas de ε) tal que

$$\sum_{n>n_0} a_n < \varepsilon.$$

Consequentemente, considerando

$$R_n(x) = \sum_{k>n} |f_k(x)| \text{ e } r_n(x) = \sum_{k>n} f_k(x),$$

segue que

$$r_n(x) \leq R_n(x) \leq \sum_{k>n} a_k < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$ e todo $x \in X$. Isto significa que as sequências de funções restos das séries são uniformemente convergente para função identicamente nula. Logo, as séries $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ são uniformemente convergentes. ■

Exemplo 3.2.10 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\text{sen}(nx)}{n^2}$ de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = \dfrac{\text{sen}(nx)}{n^2}$, é uniformemente convergente. Com efeito, observemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$, tem-se

$$|f_n(x)| = |\text{sen}(nx)|/n^2 \leq 1/n^2.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge, o resultado segue do Teorema 3.2.9.

Um resultado de certa forma semelhante ao anterior será apresentado agora.

Proposição 3.2.11 *Seja $\sum f_n$ uma série composta de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$. Se a série $\sum |f_n(x)|$ converge uniformemente em X, então a série $\sum f_n(x)$ também converge uniformemente em X.*

Demonstração. Para todo $x \in X$, a convergência da série $\sum f_n(x)$, segue do fato de que toda série absolutamente convergente é convergente, isto é, $\sum |f_n(x)| < \infty \Rightarrow \sum f_n(x)$ convergente, como comentado na Seção 2.2. Precisamos mostrar que essa convergência é uniforme. Com efeito, considerando $r_n(x)$ e $R_n(x)$ as funções restos, respectivamente, das séries $\sum f_n(x)$ e $\sum |f_n(x)|$, temos

$$|r_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots| \leq R_n(x) = |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \ldots$$

para todo $x \in X$. Da convergência uniforme de $\sum |f_n(x)|$, para $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependente só de ε) tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |r_n(x)| \leq R_n(x) < \varepsilon.$$

Logo, a série $\sum f_n(x)$ converge uniformemente. ■

Para finalizar nosso estudo, voltemos a discutir sobre as séries de potências. Dessa vez, como uma aplicação especial das séries de funções.

Teorema 3.2.12 *Uma série de potências $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em todo intervalo compacto $[-\rho, \rho]$, sendo $0 < \rho < r$, com r o raio de convergência da série.*

Demonstração. Pelo que comentamos na Seção 2.2, a série $\sum a_n \rho^n$ é absolutamente convergente (em particular, convergente), pois $\rho \in (-r, r)$. Além disso, observe que $|a_n x^n| \leq |a_n|\rho^n$, para todo $x \in [-\rho, \rho]$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, o Teorema 3.2.9 garante que a série $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em $[-\rho, \rho]$. ■

Como consequência do resultado anterior, a série de potências pode de fato representar funções contínuas.

Corolário 3.2.13 *Se $r > 0$ é o raio de convergência de $\sum a_n x^n$, a função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é contínua.*

Demonstração. Suponha que f não seja contínua, digamos em algum ponto $a \in (-r, r)$. Tome $\rho = (|a| + r)/2$, temos que $0 < \rho < r$ e $a \in [-\rho, \rho]$. Denote por $f_n : (-r, r) \to \mathbb{R}$ a função tal que $f_n(x) = a_n x^n$. Observe que $[-\rho, \rho]$ é compacto e f_n é contínua em a, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $\lim_{x\to a} f_n(x) = f_n(a)$. Daí, pela adaptação do Teorema 3.2.1 para séries, concluímos que a série $\sum a_n x^n$ não converge uniformemente para f. Isto é absurdo, pois contradiz o Teorema 3.2.12. Logo, f é contínua. ■

Exemplo 3.2.14 A função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1/(1 - x)$ é contínua. Com efeito, basta notar que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

para todo $x \in (-1, 1)$ e o Corolário 3.2.13 se aplica.

Os dois últimos resultados que apresentaremos dão conta da integração e derivação de séries de potências. Isso obviamente é uma questão central quanto ao uso de ferramentas de cálculo aplicadas à funções modeladas por essas séries.

Vamos enunciar os dois últimos resultados e, para sermos mais breves, demonstrar apenas o segundo que diz respeito à integração. A demonstração do primeiro, sobre a derivação, pode ser encontrada em [8].

Teorema 3.2.15 (Derivação termo a termo.) *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. A função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, é derivável, com $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ e a série de potências $f'(x)$ ainda tem raio de convergência r.*

Teorema 3.2.16 (Integração termo a termo.) *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. Se $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$ então*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum a_n x^n\right) dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

Demonstração. Com efeito, pelo Corolário 3.2.13, a função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é contínua. Em particular, a restrição de f ao subconjunto $[\alpha, \beta]$ é contínua, logo integrável. Tome $\rho = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ e tem-se $0 < \rho < r$ e $[\alpha, \beta] \subset [-\rho, \rho]$. Pela Teorema 3.2.12, a série $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em $[-\rho, \rho]$, logo no intervalo compacto $[\alpha, \beta]$ também. A adaptação do Teorema 3.2.8 para séries e o Teorema Fundamental do Cálculo garantem que

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum a_n x^n\right) dx = \sum \left(\int_{\alpha}^{\beta} a_n x^n dx\right) = \sum \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

■

Vejamos ainda um último exemplo de como a derivação termo a termo trabalha.

Exemplo 3.2.17 Dos cursos de Cálculo e de Séries e EDO, sabe-se que a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, é de classe C^∞. Mais que isso, sabe-se que esta função é a expressão em termos de uma série de potências da função exponencial, isto é,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Derivando termo a termo, segue que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

provando/confirmando que a derivada de $f(x) = e^x$ é a própria função.

Bibliografia

[1] ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura**. São Paulo: Edgard Blücher, 2001.

[2] BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; OTERO-GARCIA, Sílvio César. **Aspectos da história da Análise matemática de Cauchy e Lebesgue**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.

[3] BARTLE, Roberto Gardner. **Elementos de Análise Real**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1983.

[4] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[5] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2011.

[6] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise I**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1996.

[7] GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

[8] LIMA, Elon Lages. **Análise real Vol. 1**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[9] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise Vol. 1**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

[10] MATOS, Marivaldo Pereira. **Séries e Equações Diferenciais**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2016.

[11] NERI, Cassio; CABRAL, Marco. **Curso de análise real**. 2. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2011.

[12] ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

[13] RUDIN, Walter. **Princípios de Análise Matemática**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico e Editora Universidade de Brasília, 1971.