

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Aleff Hermínio da Silva

Investigação Matemática: contribuições dessa metodologia para o ensino-aprendizagem da Divisibilidade dos números naturais

Rio Tinto – PB
2020

Aleff Hermínio da Silva

Investigação Matemática: contribuições dessa metodologia para o ensino-aprendizagem da Divisibilidade dos números naturais

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Claudilene Gomes da Costa

Rio Tinto – PB
2020

Catálogo na publicação
Seção de Catálogo e Classificação

S586i Silva, Aleff Herminio da.

Investigação Matemática: contribuições dessa metodologia para o ensino-aprendizagem da Divisibilidade dos números naturais / Aleff Herminio da Silva. - Rio Tinto, 2020.
75 f.

Orientação: Claudilene Gomes da Costa.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCAE.

1. Investigação Matemática. 2. Divisibilidade. 3. Ensino de Matemática. I. Costa, Claudilene Gomes da. II. Título.

UFPB/BC

Aleff Hermínio da Silva

Investigação Matemática: contribuições dessa metodologia para o ensino-aprendizagem da Divisibilidade dos números naturais

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Claudilene Gomes da Costa

Aprovado em: 27 de Março de 2020.

BANCA EXAMINADORA



Profa. Dra. Claudilene Gomes da Costa (Orientadora) – UFPB/DCX



Profa. Ma. Agnes Liliane Lima Soares de Santana – UFPB/DCX



Prof. Dr. Joseilme Fernandes Gouveia – UFPB/DCX

Dedico este trabalho à minha mãe Lenilda Santana Hermínio da Silva e ao meu pai Arnaldo Hermínio da Silva, por estarem ao meu lado em todos os momentos da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, antes de tudo, à Jeová Deus, por ter sido o meu melhor amigo durante essa caminhada, por ter me dado humildade, coragem, sabedoria, paciência e forças para superar todos os desafios que surgiram de forma positiva, buscando sempre enxergar neles um motivo para me tornar alguém mais forte.

Minha eterna gratidão aos meus pais, Arnaldo Hermínio da Silva e Lenilda Santana Hermínio da Silva, por terem sido meu porto seguro em todos os momentos, por não ter faltado amor, carinho, atenção, apoio e incentivo de suas partes, por terem me incentivado a manter a modéstia e a humildade, qualidades que consideramos essenciais, por sempre acreditarem no meu potencial e por me ajudarem a tirar proveito até mesmo das fases difíceis, me fazendo entender que na vida nem sempre teremos momentos felizes e que saber lidar com isso é de suma importância para nos tornarmos cada vez melhores. Amo vocês meus pais!

Estendo os meus agradecimentos aos meus irmãos, Letícia Hermínio e Alisson Herminio, por terem me apoiado em vários momentos sendo um ombro amigo no qual pude e posso confiar minhas alegrias e angustias. Aqui também menciono a minha tia Maria Adriana, por ter acompanhado a minha trajetória e contribuído com o seu apoio e votos de sucesso.

Agradeço também aos meus avós maternos, Lourival Inácio e Maria Salete, assim como aos meus avós paternos, Antônio Hermínio e Ivonete Nunes, por todo o apoio que me deram, por sempre terem me ajudado de forma prática e por meio dos seus sábios conselhos.

Agradeço de forma extremamente carinhosa à minha querida Suely Napy Rolim Barreto por ter sido uma das primeiras pessoas a acreditar no meu potencial dando-me oportunidades que jamais esquecerei, por ter financiado parte da minha educação básica o que me garantiu uma educação de qualidade, por sempre ter torcido pelo meu sucesso, por ter me ensinado a escutar mais e por até hoje poder contar com a sua amizade e companheirismo.

De forma bastante especial agradeço à Ivaneide Pinto de Menezes, a qual chamo carinhosamente de Tia Neide, por ter contribuído grandemente para a minha educação e formação cidadã, por ter aberto as portas da sua instituição para que lá eu pudesse exercer a minha profissão, o que me fez aprender na prática o que é ser um professor, por ter me ajudado a ver a educação com um olhar mais humano e por poder contar com os seus conselhos que sempre foram e são essenciais para minha vida pessoal e profissional.

Agradeço com imenso carinho à minha orientadora, professora Claudilene Gomes da Costa, por ter acompanhado toda a minha trajetória no curso de forma muito próxima e carinhosa, por ter me apoiado em todos os momentos quer estes fossem fáceis ou difíceis, por ter sido uma das minhas maiores incentivadoras, por ter me dado oportunidades que foram essenciais para a minha formação

profissional, por todos os conselhos, orientações, advertências e elogios, por sempre ter apostado no meu potencial, me fazendo enxergá-lo quando as dificuldades surgiram e por pouco me fizeram desistir e, por fim, por ser uma verdadeira amiga deixando claro em vários momentos que poderei sempre contar com o seu apoio.

Quero expressar minha gratidão à professora Agnes Liliane por toda a contribuição que deu a minha formação por meio do seu exemplo de competência e responsabilidade e por todo o incentivo dado.

Meus agradecimentos aos professores Graciana Dias, Cristiane Ângelo, Cristiane Fernandes, Jussara Patrícia, Penha Caetano, Marcos André, Givaldo de Lima, Joseilme Fernandes, Fabricio Souza, Jamilson Ramos, Jânio Elpídio, Hélio Pires, Emmanuel Falcão, e a todos os outros que contribuíram por meio do seu ensino e exemplo para a minha formação docente.

Quero agradecer a todos os amigos e colegas que adquiri ao longo do curso como Eduarda Souza, Geovana Raquel, Bárbara Lindolfo, Rayane Aquino, Mariana Vidal, Edilane Costa, Fernanda Keli, Eduardo Andrade, Tiago Valero, Franciclaudio Meireles, Thales Pessoa, Alcides Lima, Hugo Silva, entre tantos outros companheiros dessa jornada.

De forma especial, agradeço a uma grande amiga que o curso me deu, Luana Cardoso, por ter compartilhado comigo as alegrias, conquistas e angústias que tivemos ao longo dessa caminhada, por ter me escutado em tantos momentos e por ter me ajudado a perseverar mesmo diante das dificuldades.

Por fim e com a mesma importância, agradeço, em nome de Maria Goreti Lelis, à todos os amigos e amigas que me apoiaram de alguma forma durante o curso e, nos nomes de Nathalia Regina e de Milenia Santos, à todos os que me apoiaram durante o desenvolvimento deste trabalho, por terem me escutado, aconselhado e ajudado a ter a força e resiliências necessárias para concluí-lo.

Não tenha medo, pois estou com você. Não fique ansioso, pois eu sou o seu Deus. Vou fortalece-lo, sim, vou ajudá-lo. Vou segurar firmemente com a minha mão direita de justiça.

(Isaias 41:10)

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo principal pesquisar as contribuições que o uso da Investigação Matemática como metodologia pode dar ao processo de ensino-aprendizagem dos conceitos da divisibilidade dos números naturais. Para tanto, com base no que propõe essa metodologia, aplicamos sete atividades em uma turma de 30 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola do município de Mamanguape/PB. A metodologia utilizada para o desenvolvimento da pesquisa caracteriza-se, no que se refere a abordagem do problema, como qualitativa. Quanto aos seus objetivos classifica-se como exploratória e, com relação aos procedimentos técnicos, como um estudo de caso. Os dados foram obtidos a partir das observações realizadas durante a intervenção, das respostas dadas às atividades e ao questionário avaliativo, contendo questões abertas e fechadas, aplicado na culminância da intervenção. A análise dos resultados denotou que, os alunos conseguiram compreender o sentido das atividades de cunho investigativo, o que ficou refletido no envolvimento de ambos durante a intervenção e nas suas respostas às atividades e ao questionário avaliativo. Diante disso, verificamos que, de fato, o uso dessa metodologia foi capaz de facilitar a aprendizagem dos alunos, pois proporcionou aos mesmos a chance de ser o principal agente desse processo. Nesse sentido, cabe salientar, a importância de que os professores em atuação e os futuros professores tomem conhecimento das propostas dessa metodologia e dos seus benefícios e que tenham condições de utilizá-la nas salas de aulas.

Palavras-chave: Investigação Matemática. Divisibilidade. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This work had as main objective to research the contributions that the use of Mathematical Research as a methodology can give to the teaching-learning process of the concepts of the divisibility of natural numbers. Therefore, based on what this methodology proposes, we applied seven activities to a class of 30 students from the 6th year of elementary school at a school in the municipality of Mamanguape / PB. The methodology used for the development of the research is characterized, with regard to the approach to the problem, as qualitative. As for its objectives, it is classified as exploratory and, in relation to technical procedures, as a case study. The data were obtained from the observations made during the intervention, the responses given to the activities and the evaluative questionnaire, containing open and closed questions, applied at the culmination of the intervention. The analysis of the results showed that, the students were able to understand the meaning of the investigative activities, which was reflected in the involvement of both during the intervention and in their responses to the activities and the evaluation questionnaire. Therefore, we found that, in fact, the use of this methodology was able to facilitate students' learning, as it provided them with the chance to be the main agent of this process. In this sense, it is worth emphasizing the importance that current teachers and future teachers are made aware of the proposals of this methodology and its benefits and that they are able to use it in classrooms.

Keywords: Mathematical Research. Divisibility. Mathematics Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diferenças entre três tipos de tarefas.....	23
Figura 2 – Atividade <i>Explorando</i>	30
Figura 3 – Apresentação dos critérios de divisibilidade por três e por seis.....	31
Figura 4 – Quadro comparativo entre os números primos e os números compostos.....	32
Figura 5 – Introdução do capítulo sobre divisibilidade do livro de Name.....	33
Figura 6 – Abordagem dos critérios de divisibilidade no livro de Name.....	34
Figura 7 – Abordagem dos números primos no livro de Name.....	35
Figura 8 – Abordagem do m.d.c. no livro de Name.....	36
Figura 9 – Introdução do capítulo sobre divisibilidade do livro de Gay e Silva.....	38
Figura 10 – Abordagem dos critérios de divisibilidade do livro de Gay e Silva.....	39
Figura 11 – Introdução do conceito de números primos do livro de Gay e Silva.....	40
Figura 12 – Abordagem do conceito de m.m.c. do livro de Gay e Silva.....	41
Figura 13 – Resposta do grupo D.....	45
Figura 14 – Resposta do grupo A.....	45
Figura 15 – Resposta do grupo D.....	46
Figura 16 – Resposta do grupo B.....	46
Figura 17 – Alunos fazendo uso da Calculadora.....	48
Figura 18 – Resposta do grupo C.....	48
Figura 19 – Resposta do grupo A.....	49
Figura 20 – Resposta do grupo A.....	49
Figura 21 – Resposta do grupo E.....	50
Figura 22 – Resposta do grupo E.....	50
Figura 23 – Resposta do grupo B.....	51
Figura 24 – Resposta do grupo B.....	52
Figura 25 – Resposta do grupo C.....	52
Figura 26 – Resposta do grupo E.....	53
Figura 27 – Resposta do grupo A.....	54
Figura 28 – Resposta do grupo D.....	54
Figura 29 – Resposta do grupo C.....	55
Figura 30 – Resposta do grupo A.....	56
Figura 31 – Resposta do grupo E.....	57
Figura 32 – Resposta do grupo B.....	57
Figura 33 – Resposta do grupo C.....	58

Figura 34 – Resposta do aluno 1 à quinta questão.....	62
Figura 35 – Resposta do aluno 2 à quinta questão.....	62
Figura 36 – Resposta do aluno 3 à quinta questão.....	62
Figura 37 – Resposta do aluno 4 à sexta questão.....	63
Figura 38 – Resposta do aluno 5 à sexta questão.....	63

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Respostas à primeira questão	59
Gráfico 2 - Respostas à segunda questão	60
Gráfico 3 - Respostas à terceira questão	61
Gráfico 4 - Respostas à quarta questão	61

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Momentos na realização de uma investigação.....	22
Quadro 2 – Fases de uma atividade investigativa.....	25

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	16
1.1 Apresentação do tema e justificativa.....	16
1.2 Objetivos.....	17
1.2.1 Objetivo Geral.....	17
1.2.2 Objetivos Específicos.....	17
1.3 Estrutura do trabalho.....	18
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	18
2.1 A busca por uma aprendizagem significativa e a Investigação Matemática.....	18
2.2 A Investigação Matemática como metodologia de ensino.....	20
2.2.1 As fases de uma atividade investigativa.....	24
2.2.2 A visão dos documentos oficiais.....	25
2.3 A Divisibilidade.....	27
2.3.1 Análise dos livros didáticos.....	28
3 CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS.....	42
3.1 Quanto à abordagem.....	42
3.2 Quanto aos objetivos.....	42
3.3 Quanto aos procedimentos técnicos.....	42
3.4 Sujeitos da pesquisa e coleta de dados.....	43
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	43
4.1 Desenvolvimento e análise da intervenção pedagógica.....	43
4.2 Análise do questionário avaliativo.....	59
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	63
REFERÊNCIAS.....	65
APÊNDICES.....	67

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do tema e justificativa

Não é de hoje que o ensino da Matemática carece de metodologias capazes de torna-lo mais atraente e acessível aos estudantes. Infelizmente ainda observamos que a maior parte dos alunos sentem dificuldades para aprender os conteúdos da Matemática. Esse fato é preocupante tendo em vista a importância desses conteúdos para a sociedade, estando presentes em praticamente todas as atividades humanas. Entre esses conteúdos estão aqueles que dizem respeito à divisibilidade dos números naturais, os quais são de grande valor para o desenvolvimento de competências e habilidades nos alunos. Para Campbell e Zazkis (1996) e Resende (2007) citados por Chaparin (2010) esses conceitos são pertinentes para o “[...] desenvolvimento do pensamento matemático, nas atividades investigativas em qualquer nível de ensino, na identificação e reconhecimento de padrões, na formulação de conjecturas e principalmente na resolução de problemas” (CHAPARIN, 2010, p. 6).

Apesar dessa relevância, de acordo com Dantas (2016), a Divisibilidade é um conteúdo fácil de ser abordado de forma mecânica, pois envolve conceitos como o de múltiplos, divisores, números primos, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, os quais envolvem processos que muitas vezes acabam sendo ensinados como uma receita a ser seguida, sem que seja feita nenhuma contextualização nem muitos menos dado exemplos que validem o seu uso. Essa maneira de ensinar é preocupante, pois contribui para que os alunos continuem encarando a Matemática como uma disciplina difícil de ser entendida e até mesmo que não tem sentido.

Além dessa ponderação, é fundamental salientar que os conceitos em questão estão presentes em todo o ensino básico e são pré-requisitos para outros conteúdos igualmente importantes para a formação dos alunos. Diante disso, fica clara a necessidade de se estabelecer práticas com o intuito de tornar tanto o ensino quanto a aprendizagem dos conceitos da Divisibilidade mais significativos. Nesse sentido, enxergamos a Investigação Matemática como um caminho para atingir tal objetivo e contribuir para uma aprendizagem mais compreensiva.

Numa investigação o aluno tem a chance de tornar-se o principal agente do seu aprendizado e o professor de torna-se um mediador desse processo. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 20) o uso dessa metodologia “[...] ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa”. Nesse sentido, fica claro a importância do uso de atividades investigativas no ensino de

matemática e que essa metodologia pode contribuir para tornar esse ensino mais compreensível e significativo para os estudantes.

Diante de tais considerações, o presente trabalho relata uma pesquisa, dentro da linha de Ensino e Aprendizagem de Matemática, na área de Educação Matemática com o objetivo de averiguar as contribuições que o uso da Investigação Matemática como metodologia de ensino pode proporcionar à aprendizagem dos conceitos da divisibilidade dos números naturais, especificamente: múltiplos, divisores, números primos, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum e dos critérios de divisibilidade. Tivemos como público-alvo os alunos de uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola particular do município de Mamanguape – PB. Nesse sentido, a pesquisa parte da seguinte inquietação: Quais as contribuições que o uso da Investigação Matemática no ensino da Divisibilidade dos números naturais pode proporcionar à aprendizagem dos alunos de uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Averiguar as contribuições do uso da Investigação Matemática como metodologia para o ensino-aprendizagem dos conceitos da Divisibilidade dos números naturais em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental.

1.2.2 Objetivos Específicos

Na busca por alcançar o objetivo geral dessa pesquisa, foi elaborado os seguintes objetivos específicos:

- Elaborar atividades que contemplem um processo de investigação para o ensino dos conceitos da divisibilidade dos números naturais;
- Desenvolver as atividades por meio de um intervenção pedagógica numa turma do sexto ano do Ensino Fundamental;
- Elaborar e aplicar um questionário avaliativo com os alunos participantes das atividades acerca do processo investigativo utilizado;

- Analisar as respostas ao questionário bem como as observações realizadas durante a realização das atividades.

1.3 Estrutura do trabalho

Este trabalho foi dividido em quatro capítulos. O primeiro capítulo relata a introdução da pesquisa, na qual é apresentado o tema da mesma e a sua justificativa, assim como os objetivos gerais e específicos pretendidos. No segundo capítulo é abordado o referencial teórico que deu base para esta pesquisa. Nesse sentido, discorre sobre as concepções de alguns autores e dos documentos oficiais a respeito da Investigação Matemática, assim como os pressupostos em torno da Divisibilidade a partir da visão de alguns pesquisadores e da análise de alguns livros didáticos.

No terceiro capítulo é apresentado os pressupostos metodológicos da pesquisa, desde os tipos de pesquisa escolhidos até os instrumentos utilizados para obtenção de dados. Já no capítulo quatro encontra-se os resultados adquiridos a partir das atividades realizadas bem como as discussões dos mesmos à luz dos que diz a teoria estudada. Apresenta também a análise e discussão dos dados obtidos com o questionário avaliativo respondido pelos alunos. Neste trabalho ainda são apresentadas as considerações realizadas ao final da pesquisa, as referências utilizadas e, nos apêndices, as atividades e o questionário aplicado.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A busca por uma aprendizagem significativa e a Investigação Matemática

Sem dúvidas, um dos maiores objetivos de qualquer professor é conseguir a atenção dos alunos para o que está sendo ensinado. É fato, que apenas o interesse dos alunos não garante que a aprendizagem esperada seja alcançada. No entanto, diante das dificuldades existentes sobretudo com o advento das novas tecnologias que apesar de trazer relevantes benefícios para a sociedade, tem sido também um dos grandes motivos para a distração das pessoas, em especial dos mais jovens, conseguir atrair os alunos para o ensino é uma grande conquista. Nesse aspecto a Matemática se destaca sobretudo por conta do histórico negativo em torno do seu processo de ensino-aprendizagem o que dificulta o engajamento dos alunos.

Na realidade, são inúmeras as dificuldades observadas no ensino da Matemática, entre as quais encontramos o fato de que parte considerável dos alunos a tratam como uma disciplina extremamente difícil de ser compreendida. Tachar a Matemática dessa maneira é um grande perigo para a aprendizagem, pois além de posicioná-la em um lugar quase inacessível à mente de grande parte dos alunos, esse julgamento acaba bloqueando o interesse dos mesmos com relação à disciplina. Diante disso, suscita-se um árduo desafio para os professores e para os futuros professores: como despertar o interesse dos alunos pela Matemática?

Em busca de respostas para essa indagação, ao longo dos anos, pesquisadores da área da educação verificaram que o uso de metodologias diversificadas são um caminho para a superação desse desafio. Nesse sentido, constatou-se que para atingirmos o objetivo de despertar o interesse dos alunos pela Matemática, é preciso irmos além das aulas tradicionais, nas quais em primeiro plano encontramos o professor como a figura central do ensino-aprendizagem, e em segundo, os alunos que de forma passiva apenas seguem as orientações do professor. Concordando com esse pensamento, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) afirmam que “essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz” (BRASIL, 1998, p. 37) e justifica esse posicionamento por considerar que a mera reprodução por parte dos alunos das informações passadas pelo professor não é garantia de aprendizado.

Não queremos afirmar com isso, que as aulas tradicionais devam ser abolidas, afinal elas também podem exercer um papel importante no ensino e na aprendizagem de qualquer disciplina, especialmente da Matemática. Contudo, é fundamental que a enxerguemos como uma das metodologias de ensino e não como a única. Esse pensamento está de acordo com as orientações encontradas nos PCN, segundo o qual não há um caminho único e melhor para o ensino da Matemática e defende que “conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática” (BRASIL, 1998, p. 42). Dessa forma, fica clara a importância de saber articular variadas metodologias de ensino nas aulas de Matemática como o uso da tecnologia, dos jogos e materiais didáticos, da resolução de problemas, da modelagem matemática, da história da matemática, entre outras, com vistas a tornar o seu aprendizado mais atraente e significativo.

Dado isso, compreendemos que a nossa busca não deve concentrar-se, unicamente, em despertar o interesse dos alunos para a Matemática. Certamente esse é apenas o primeiro passo de uma busca maior, aquela que tem como objetivo tornar o ensino mais atraente e a aprendizagem mais significativa. Assim, é necessário fazer uso de metodologias que sejam capazes de abranger todas essas características e promover o seu uso nas aulas de Matemática.

Nesse interim, surge a Investigação Matemática como uma metodologia que pode tanto atrair os alunos como dar mais sentido àquilo que é ensinado pelos professores.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p.14) “Investigar é procurar conhecer o que não se sabe”. Para qualquer ser humano, esteja este em condição de aluno ou não, buscar novos conhecimentos é algo natural e por vezes prazeroso. De modo similar, a Investigação Matemática é uma proposta de ensino e aprendizagem que dá aos alunos a oportunidade de ser o principal responsável por essa busca que o levará à uma aprendizagem significativa. Ainda segundo os mesmos autores.

Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016, p. 20).

Assim, notamos que é fundamental envolver os alunos de forma ativa no processo de ensino-aprendizagem e que as atividades investigativas tem a capacidade de favorecer esse envolvimento. O trabalho nessa perspectiva, traz à tona o papel essencial que os alunos podem exercer nas aulas de Matemática. Talvez para alguns esse papel esteja condicionado apenas ao de reprodutor daquilo que lhe é apresentado como verdade, mas o uso dessa metodologia de ensino mostra que trazer os alunos para o centro do processo pode ser a chave para atingirmos a aprendizagem tão esperada.

Diante disso, ao apresentar uma discussão a respeito do aluno e o saber matemático, os PCN destacam que é fundamental considerar o potencial matemático dos alunos e que esses sejam “protagonistas da construção de sua aprendizagem” (BRASIL, 1998, p. 38). Nesse sentido, a Investigação Matemática pode exercer um papel fundamental, pois “[...] é uma forma de tornar o estudante um indivíduo capaz de construir o próprio conhecimento, tornando-o autônomo, já que esta atividade trabalha e desenvolve processos matemáticos” (LIMA; MIRANDA, 2014, p. 2).

Sendo assim, acreditamos que envolver os alunos em um processo investigativo pode aproximá-los dos conteúdos matemáticos e contribuir para que construam a sua própria aprendizagem de forma mais significativa.

2.2 A Investigação Matemática como metodologia de ensino

De acordo com Fiorentini (2012) o surgimento da Investigação Matemática remonta à década de 80, tendo início nos Estados Unidos e no Reino Unido. Segundo esse autor as “investigações matemáticas” surgiram “[...] como mais uma alternativa didático-pedagógica para a realização de um ensino significativo de matemática” (FIORENTINI, 2012, p. 66). Com isso, fica claro que as pesquisas com o intuito de aprimorar o ensino e a aprendizagem da Matemática tem acontecido há anos e consideram a Investigação Matemática como um dos caminhos em direção ao alcance desses objetivos.

Essa metodologia destaca-se, principalmente, pela sua capacidade de colocar os alunos numa posição ativa com relação à aprendizagem, o que vai de encontro com a forma clássica de se ensinar, a qual faz a Matemática parecer ser apenas uma sequência de conteúdos prontos para serem repassados pelos professores e que a reprodução dos mesmos por parte dos alunos é o sinal de que houve a aprendizagem esperada. Para os pesquisadores esse tipo de abordagem é um dos fatores que têm levado parte considerável dos alunos à considerar a Matemática como uma disciplina extremamente difícil de ser compreendida. Em oposição à esse fato e de acordo com a fala de Fiorentini (2012), Braumman (2002, apud Ponte, Brocardo e Oliveira, 2016), reflete que:

Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão “detetivesca” indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016, p. 17).

Diante disso, somos levados a refletir que, de fato, ensinar Matemática considerando a sua faceta investigativa, pode proporcionar aos alunos uma aprendizagem mais significativa, pois como exemplifica o autor, aprendemos mais quando praticamos, erramos e concertamos os nossos erros. Em concordância com essa discussão, Lamonato (2007, p. 76) afirma que “a investigação matemática alcança destaque por possibilitar que o aprender e ensinar sejam diferentes de transmitir e adquirir conhecimento”. Dessa forma, é fundamental que intrínseco ao processo de aprender e ensinar, as atividades de cunho investigativo atuem na superação da mera transmissão e aquisição do conhecimento.

Contudo, para que isso possa acontecer é preciso dar aos alunos a chance de praticar, de errar e de aprender com os seus próprios erros e com os erros dos seus colegas. É justamente

isso o que acontece numa aula de investigação. Nessa mesma linha de pensamento, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p.15) destacam que “para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades”. Assim, o que se busca ao fazer uso da Investigação Matemática na sala de aula é fazer um paralelo com as atividades que são desenvolvidas pelos matemáticos profissionais.

De acordo com autores supracitados, a realização de uma Investigação Matemática pode ser dividida em quatro momentos principais. No primeiro ocorre o reconhecimento da situação, a exploração inicial da mesma e a formulação de questões; no segundo momento ocorre a formulação de conjecturas; no terceiro momento dá-se início a realização de testes e eventualmente as conjecturas são refinadas e o último momento refere-se à argumentação, à demonstração e a avaliação do trabalho que foi realizado. O Quadro 1 faz a indicação desses momentos e das diversas atividades que cada um deles pode incluir.

Quadro 1 – Momentos na realização de uma investigação

Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática Explorar a situação problemática Formular questões
Conjecturas	Organizar dados Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	Realizar testes Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 18).

Ainda na visão desses mesmos autores, os momentos mencionados ocorrem quando acontece uma investigação realizada por matemáticos e ressalta que durante esse processo pode haver interação entre eles. Nesse sentido, é possível observar como uma Investigação Matemática é realizada por profissionais em busca, por exemplo, de formular conjecturas, realizar demonstrações, validar afirmações ou negá-las, entre outros objetivos. Tornar esse processo uma atividade de ensino-aprendizagem, “[...] ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína [...]” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016, p. 20).

Nessa esteira, de acordo com Dombroski e Beline (2014), o trabalho com a Investigação Matemática precisa ser interativo, capaz de despertar a curiosidade dos alunos fazendo com que

se interessem pelos conteúdos e que, paulatinamente, possam se tornar agentes mais ativos da sua própria aprendizagem. O trabalho nessa perspectiva, segundo Lamonato (2007, p. 68), “[...] possibilita ao aluno pensar a partir de uma dinâmica que prevê observações, descobertas, erros, acertos e fundamentalmente decisões”, ou seja, ele tem todo um potencial para auxiliar os alunos a desenvolverem habilidades importantes como as que foram citadas pela autora.

Desse modo, as atividades investigativas se diferenciam consideravelmente das atividades que costumeiramente são realizadas. Apesar disso, são encontrados bastantes pontos em comum entre a resolução de problemas e a Investigação Matemática, principalmente por ambas as metodologias envolverem processos complexos de pensamento e, portanto, se relacionarem de maneira muito próxima. Por isso, cabe tratarmos das diferenças existentes entre esses recursos metodológicos sem, contudo, desconsiderar o valor individual e/ou mútuo de ambos.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) mencionam que diferentemente dos exercícios, para os quais os alunos utilizam um método já conhecido para resolver, os problemas são mais elaborados e para resolvê-los os alunos não contam com um método específico. Entretanto, os autores destacam que há algo em comum entre os exercícios e os problemas, o fato de que em ambos “o enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido. Não há margem para ambiguidades. A solução é sabida de antemão, pelo professor, e a resposta do aluno ou está certa ou está errada” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016, p. 20). Segundo os mesmos autores, numa investigação as coisas se diferenciam um pouco, pois

Trata-se de situações mais abertas – a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição. E uma vez que os pontos de partida podem não ser exatamente os mesmos, os pontos de chegada podem ser também diferentes (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016, p. 20).

Observem que essas diferenças ficam mais evidentes na Figura 1.

Figura 1 – Diferenças entre três tipos de tarefas

Exercício	Problema	Tarefa de investigação
Simplifica: a) $\frac{6}{12} =$ b) $\frac{3 \times (10 - 7)}{17 - 2} =$ 20 c) $\frac{18 - 9}{(15 - 10) \times 2} =$ 3	Qual o mais pequeno número inteiro que, dividido por 5, 6 e 7 dá sempre resto 3?	1. Escreve a tabuada dos 9, desde 1 até 12. Observa os algarismos das diversas colunas. Encontras alguma regularidade. 2. Vê se encontras regularidades nas tabuadas de outros números.

Fonte: Ponte (2003, apud MINATELLI, SANDER, MENEGUETTI., 2015).

Analisando os exemplos apresentados na Figura 1, observamos claramente as diferenças existentes entre os três tipos de tarefas mencionados, especificamente entre a resolução de problemas e a investigação. O fato de haver diferenças entre as abordagens, não significa que os professores devem limitar-se a usar apenas uma delas, na realidade o que se procura continuamente é fazer uma boa articulação entre as diversas metodologias existentes. Contudo, Ernest (1996 apud Fiorentini, 2012), assim como outros autores, destacam a potencialidade emancipatória da investigação matemática, por “[...] permitir ao aluno a formulação de problemas e questões para investigação de modo relativamente livre” (ERNEST apud FIORENTINI, 2012, p. 68).

2.2.1 As fases de uma atividade investigativa

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), de maneira geral, uma Investigação Matemática, numa aula ou em um conjunto de aulas, se desenvolve em três fases. Na primeira fase, classificada também, como o *‘arranque da aula’*, é necessário que fique claro para os alunos o sentido da atividade proposta e o que se espera deles durante a sua realização. Por isso, é importante que aja um momento introdutório no qual o professor possa explicar o que significa investigar, sobretudo se os alunos não forem habituados a realizar tarefas desse tipo, garantindo, assim, que assimilem o sentido dessa ação. Além disso, os alunos devem compreender que “[...] podem contar com o apoio do professor, mas que a atividade depende, essencialmente, da sua própria iniciativa” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016, p. 25).

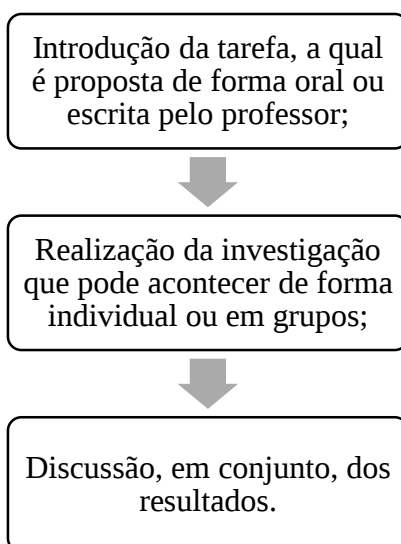
Já na segunda fase, conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), deve acontecer o desenvolvimento do trabalho, geralmente em grupos. Durante essa etapa os alunos precisam explorar a situação apresentada e levantar questões sobre ela, o que pode acontecer de diversas maneiras e demandar intervalos variados de tempo de acordo com os alunos. Em seguida, os alunos precisam formular as suas conjecturas a partir das observações e investigações realizadas partindo, então, para a justificação dessas conclusões.

Diante dessas características, a segunda fase exige muita atenção por parte do professor, pois ele, embora deva permitir que os alunos atuem ativamente na realização da tarefa, precisa dar total apoio aos mesmos para que a investigação aconteça de maneira significativa. Isso é muito importante, pois a medida em que os alunos realizam as tarefas em grupo, dúvidas e pensamentos equivocados podem prejudicar o alcance de objetivos fundamentais da proposta, como a justificação das hipóteses levantadas. Dessa maneira, o professor precisar estar atento,

principalmente, para incentivar aos alunos que façam testes afim de validar as conclusões a que estão chegando.

Por fim, na terceira fase ocorre a ‘*discussão da investigação*’. Ainda sob a ótica de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), esse é um momento bastante importante, pois é nele que ocorre a partilha de conhecimentos, onde “os alunos podem pôr em confronto as suas estratégias, conjecturas e justificações” (p. 34). Nessa fase o professor deve exercer o papel de moderador, incentivando os alunos a comunicarem entre si as principais investigações realizadas e a questionarem-se mutuamente. Além disso, é essencial que nessa fase aconteça “uma sistematização das principais ideias e uma reflexão sobre o trabalho realizado” (p. 34). Dessa maneira, segundo os autores, “podemos afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação” (p. 34). O Quadro 2 a seguir apresenta um resumo das três fases que compõe uma atividade investigativa.

Quadro 2 – Fases de uma atividade investigativa



Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2016).

2.2.2 A visão dos documentos oficiais

Diante das discussões acerca da aplicação da Investigação Matemática como uma metodologia que pode facilitar o ensino-aprendizagem da matemática, faz-se necessário buscarmos saber o que mencionam os documentos oficiais que regem a educação a respeito dessa metodologia e das suas potencialidades. Nesse sentido, fizemos uma investigação nos PCN (BRASIL, 1998), nos Referências Curriculares para o Ensino Fundamental do estado da

Paraíba – RCEF/PB (PARAIBA, 2010) e na Base Nacional Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), ambos referentes a fase final do Ensino Fundamental.

Os PCN (BRASIL, 1998), ao tratar da importância do recurso às tecnologias como um dos caminhos para ‘fazer Matemática’ na sala de aula, mencionam que este “possibilita o desenvolvimento nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação exploração como parte fundamental de sua aprendizagem” (BRASIL, 1998, p. 44). Dessa maneira, o documento apresenta a Investigação Matemática como uma alternativa que pode atrair os alunos para atividades matemáticas tornando-se, assim, uma facilitadora da aprendizagem.

De acordo com esse documento, uma das maneiras de se fazer investigações na sala de aula, é por fazer uso da calculadora, “[...] pois ela estimula a descoberta de estratégias e a investigação de hipóteses, uma vez que os alunos ganham tempo na execução dos cálculos” (BRASIL, 1998, p. 45). O documento ainda destaca o espírito investigativo dentro de um dos objetivos gerais para o ensino fundamental, a saber o de “Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual característico da Matemática, como aspecto que estimule o interesse, a curiosidade, *o espírito de investigação* [...]” (BRASIL, 1998, p. 47, grifo nosso).

Além disso, os PCN (BRASIL, 1998) também salientam a investigação como uma das atitudes a serem desenvolvidas pelos alunos do Ensino Fundamental, ao pontuar uma dessas atitudes como sendo o “desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados” (BRASIL, 1998, p. 75). Essa atitude em muito se assemelha com as fases desenvolvidas numa atividade investigativa, como já mencionado anteriormente.

Já os RCEF/PB, apresentam a Investigação Matemática como uma das tendências metodológicas mais importantes da atualidade. Na descrição do documento essa metodologia aparece ao lado, por exemplo, da Resolução de Problemas, dos Jogos Matemáticos, da Modelagem Matemática, entre outras tendências consideradas centrais. Para expressar a relevância de tal metodologia, os RCEF/PB (PARAIBA, 2010) discorrem que:

A Investigação Matemática, como proposta de ensino e aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, pois o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação dos resultados e na discussão dos argumentos com os seus colegas e o professor (PARAIBA, 2010, p. 76).

Após essa consideração importante, o documento destaca que “o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem, sendo necessária à mobilização de recursos cognitivos e afetivos com vistas a atingir um objetivo” (PARAIBA, p. 77), e afirma que essa assertiva é um dos aspectos fundamentais da Investigação Matemática.

Depois de analisarmos os documentos citados anteriormente, buscamos verificar o que reflete a BNCC (2018) a respeito da Investigação Matemática como metodologia de ensino. Apesar de não ser feito uma apresentação direta dessa proposta como uma metodologia assim como é feito pelos RCEF/PB, a BNCC destaca o uso de atividades investigativas e os processos que as envolvem. Isso ocorre, por exemplo, ao destacar o desenvolvimento do espírito investigativo como uma das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental, a saber a segunda, que diz: “Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo” (BRASIL, 2018, p. 267).

Além do destaque que dá ao ato de investigar, a BNCC (BRASIL, 2018) também menciona alguns aspectos que são desenvolvidos numa atividade desse tipo, como o trabalho em grupo. Segundo esse documento, a interação com os pares também é um das competências a serem alcançadas no Ensino Fundamental. Além disso, salienta que “nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação” (BRASIL, 2018, p. 298). Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), um dos grandes benefícios da Investigação Matemática, além de promover o trabalho em equipe, é estimular a comunicação escrita e oral dos alunos, especialmente quando precisam justificar as suas conclusões e na fase da discussão conjunta dos resultados alcançados.

2.3 A Divisibilidade

A Divisibilidade é um importante tópico da Teoria dos Números, o qual de acordo com os RCEF/PB, reúne os conceitos de: múltiplos, divisores, números primos, máximo divisor comum (m.d.c.) e mínimo múltiplo comum (m.m.c.). Segundo a BNCC, esses conteúdos estão vinculados à unidade temática Números voltados para o 6º ano do Ensino Fundamental. Esse documento, estabelece os conceitos alistados acima como objetos de conhecimento da unidade temática Números e apresenta como uma das habilidades a serem desenvolvidas nessa unidade a de

Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000 (BRASIL, 2018, p. 301).

Como podemos observar, a BNCC destaca na habilidade citada que deve acontecer o estabelecimento de alguns critérios de divisibilidade e que esses devem ocorrer a partir de atividades investigativas. Diante disso, podemos acrescentar esses critérios aos conceitos da Divisibilidade citados no parágrafo anterior. Isso está de acordo com o que sugere Chaparin (2010) ao destacar a relevância do estudo da divisibilidade nos números inteiros, onde segundo ele, “se encontram os conceitos de múltiplo, divisor, fator, ser divisível e critérios de divisibilidade, o máximo divisor comum, o mínimo múltiplo comum, números primos e compostos [...]” (CHAPARIN, 2010, p. 26).

Nos PCN (BRASIL, 1998) esses conteúdos estão inseridos no bloco Números e Operações. A respeito da abordagem deles, o documento salienta que:

Conceitos como os de “múltiplo” e “divisor” de um número natural ou o conceito de “número primo” podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, então como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver (BRASIL, 1998, p. 66).

Na nossa pesquisa levamos em consideração essa sugestão ao passo que buscamos verificar como a abordagem desses conteúdos à luz do que propõe a Investigação Matemática pode facilitar a aprendizagem dos alunos.

2.3.1 Análise dos livros didáticos

Apesar de termos tentado enveredar pelos caminhos apontados nos documentos oficiais como os citados acima, o que está em concordância com a metodologia que escolhemos, nos preocupamos em tomar conhecimento de como a abordagem desse ensino tem se dado de maneira geral nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental. Ter noção de como esse ensino tem acontecido é fundamental para a nossa pesquisa, pois pôde nos ajudar desde a elaboração das atividades até em paralelos com a nossa intervenção.

Com esse intuito e considerando a grande influência que os livros didáticos exercem na prática docente, resolvemos fazer uma breve análise de alguns livros didáticos de Matemática

do sexto ano do Ensino Fundamental. Para essa análise escolhemos os livros de Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr (2012), de Gay e Silva (2018) e de Name (2019). Essa escolha aconteceu, no caso do primeiro livro citado, pelo fato de este ter sido adotado pela escola onde realizamos a intervenção pedagógica nos dois últimos anos (2018 e 2019). O segundo livro foi escolhido por ser adotado por algumas escolas públicas do município de Mamanguape-PB, onde a escola citada se encontra. E com relação ao terceiro livro, o escolhemos por ele ser o livro adotado pela escola no ano vigente (2020). Nessa análise procuramos verificar como esses livros didáticos abordam os conceitos que compreendem a Divisibilidade bem como os recursos que por ventura utilizam.

Em seu livro, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr (2012), agruparam os conteúdos em questão no capítulo três intitulado de “Divisibilidade: divisores e múltiplos”. Os autores organizaram esse capítulo em seis tópicos, um para cada conceito, totalizando 32 páginas. No primeiro desses tópicos é dado uma noção de divisibilidade a partir de uma atividade chamada pelos autores de *Explorando*, conforme podemos observar na Figura 2.

Figura 2 – Atividade Explorando

Explorando

1. Considere o número **36**.

- Quantas vezes o 2 cabe em 36? 18
- E o 3, quantas vezes cabe em 36? 12
- Quantas vezes o 4 cabe em 36? 9
- E o 6, quantas vezes cabe em 36? 6
- Quantas vezes o doze cabe em 36? 3
- E o 18, quantas vezes cabe em 36? 2
- E o 36?
- E o 1, cabe quantas vezes em 36? 36

2. Considere, agora, o número **23**.

- Quantas vezes o 1 cabe nesse número? 23
- E quantas vezes o 23 cabe nesse número? 1
- Que outros números cabem um número exato de vezes em 23? Nenhum

3. De **1 a 12**, encontre todos os números que cabem um número exato de vezes em **12**.
1, 2, 3, 4, 6 e 12.

4. De **1 a 13**, encontre todos os números que cabem um número exato de vezes em **13**.
1 e 13.

5. Encontre todos os divisores de:

- 15 1, 3, 5 e 15
- 25 1, 5 e 25
- 19 1 e 19
- 30 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30

6. Observe.

2 forma 1 par. O 2 cabe exatamente uma vez em 2.

3 forma 1 par, e sobra 1. O 2 não cabe um número exato de vezes em 3.

4 forma 2 pares. O 2 cabe exatamente duas vezes em 4.

5 forma 2 pares, e sobra 1. O 2 não cabe um número exato de vezes em 5.

6 forma 3 pares. O 2 cabe exatamente três vezes em 6.

Agora, sem fazer contas, responda no caderno: Quais dos números a seguir são **divisíveis** por **2**, ou seja, em quais desses números o **2** cabe um número exato de vezes?
20, 15, 264 e 1.000.

- 20
- 15
- 21
- 18
- 264
- 1.000
- 2.001
- 375

Justifique as suas conclusões. Os números pares são divisíveis por 2.

7. Existe um único número natural que é divisor de todos os outros. Pense e responda: Você sabe que número é esse?

Fonte: Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr (2012, p. 100).

Analisando a atividade da Figura 2 acima, podemos notar que o seu principal objetivo é estimular os alunos a realizarem uma atividade exploratória-investigativa para que possam compreender, principalmente, como saber se um número natural é ou não divisível por outro. Ainda nesse tópico é proposta uma atividade com a calculadora objetivando aprender a encontrar o resto em uma divisão utilizando esse recurso tecnológico.

No segundo tópico, os autores abordam os critérios de divisibilidade por 2, por 3, por 6, por 4, por 8, por 9, por 5 e por 10, nessa ordem. Analisando esse tópico, notamos que para apresentar os critérios citados, os autores, primeiro, mostram um ou mais exemplos e logo em seguida definem o critério em questão. A Figura 3, aponta esse fato na apresentação dos critérios de divisibilidade por três. Esse mesmo padrão é repetido na apresentação dos próximos critérios.

Figura 3 – Apresentação dos critérios de divisibilidade por três e por seis

Divisibilidade por 3

Vamos verificar se 62 124 é divisível por 3.

Fazendo a divisão:

62 124	3	
02 1	20 708	→ é divisível por 3
024		
0		

Vamos conhecer uma outra forma de verificar se 62 124 é divisível por 3.

Primeiro adicionamos os algarismos de 62 124 e, em seguida, dividimos a soma por 3.

$6 + 2 + 1 + 2 + 4 = 15$	15	3
	0	5

Observe que as duas divisões são exatas.

Como esse fato se repete sempre que a divisão de um número natural por 3 for exata, dizemos que:

Um número será divisível por 3 quando a soma dos seus algarismos for um número divisível por 3.

Assim:

- 7 092 é divisível por 3, pois $7 + 0 + 9 + 2 = 18$, e 18 é divisível por 3.
- 6 413 não é divisível por 3, pois $6 + 4 + 1 + 3 = 14$, e 14 não é divisível por 3.

Fonte: Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr (2012, p. 100).

Já o terceiro tópico trata dos conceitos de divisores, fatores e múltiplos de um número natural. Os autores iniciam esse tópico com mais uma atividade de exploração nos moldes da apresentada na Figura 1 e em seguida destacam algumas situações para apresentar os conceitos citados acima. A partir dessas situações os autores definem o que vem a ser um divisor, um fator ou múltiplo de um número natural. Os conceitos de números primos e de números compostos são apresentados nos tópicos quatro e cinco. Para motivar a definição desses conceitos, os autores apresentam um quadro, conforme a Figura 4 ilustra, o qual faz uma distinção entre os números primos e os números compostos, deixando claro do que se trata cada um deles. Nessa abordagem os autores recorrem à História da Matemática quando apresentam o *crivo de Eratóstenes* bem como um breve relato sobre ele.

Figura 4 – Quadro comparativo entre os números primos e os números compostos

4 Números primos																																													
Observe os quadros a seguir:																																													
<table> <tr> <th>Número</th><th>Divisores</th></tr> <tr><td>0</td><td>1, 2, 3, 4, ...</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1, 2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1, 3</td></tr> <tr><td>4</td><td>1, 2, 4</td></tr> <tr><td>5</td><td>1, 5</td></tr> <tr><td>6</td><td>1, 2, 3, 6</td></tr> <tr><td>7</td><td>1, 7</td></tr> <tr><td>8</td><td>1, 2, 4, 8</td></tr> <tr><td>9</td><td>1, 3, 9</td></tr> </table>	Número	Divisores	0	1, 2, 3, 4, ...	1	1	2	1, 2	3	1, 3	4	1, 2, 4	5	1, 5	6	1, 2, 3, 6	7	1, 7	8	1, 2, 4, 8	9	1, 3, 9	<table> <tr> <th>Número</th><th>Divisores</th></tr> <tr><td>10</td><td>1, 2, 5, 10</td></tr> <tr><td>11</td><td>1, 11</td></tr> <tr><td>12</td><td>1, 2, 3, 4, 6, 12</td></tr> <tr><td>13</td><td>1, 13</td></tr> <tr><td>14</td><td>1, 2, 7, 14</td></tr> <tr><td>15</td><td>1, 3, 5, 15</td></tr> <tr><td>16</td><td>1, 2, 4, 8, 16</td></tr> <tr><td>17</td><td>1, 17</td></tr> <tr><td>18</td><td>1, 2, 3, 6, 9, 18</td></tr> <tr><td>19</td><td>1, 19</td></tr> </table>	Número	Divisores	10	1, 2, 5, 10	11	1, 11	12	1, 2, 3, 4, 6, 12	13	1, 13	14	1, 2, 7, 14	15	1, 3, 5, 15	16	1, 2, 4, 8, 16	17	1, 17	18	1, 2, 3, 6, 9, 18	19	1, 19
Número	Divisores																																												
0	1, 2, 3, 4, ...																																												
1	1																																												
2	1, 2																																												
3	1, 3																																												
4	1, 2, 4																																												
5	1, 5																																												
6	1, 2, 3, 6																																												
7	1, 7																																												
8	1, 2, 4, 8																																												
9	1, 3, 9																																												
Número	Divisores																																												
10	1, 2, 5, 10																																												
11	1, 11																																												
12	1, 2, 3, 4, 6, 12																																												
13	1, 13																																												
14	1, 2, 7, 14																																												
15	1, 3, 5, 15																																												
16	1, 2, 4, 8, 16																																												
17	1, 17																																												
18	1, 2, 3, 6, 9, 18																																												
19	1, 19																																												
Note que: ■ O 1 tem apenas um divisor: o próprio 1. ■ Todo número natural diferente de zero é divisível por 1 e por ele mesmo. ■ Há números que são divisíveis apenas por 1 e por eles mesmos, como: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19. ■ Há números que, além do 1 e deles mesmos, possuem outros divisores, como: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16 e 18. ■ O zero tem infinitos divisores.																																													
Um número que possui apenas dois divisores naturais distintos (o número 1 e ele mesmo) é denominado número primo.																																													

Fonte: Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr (2012, p. 116).

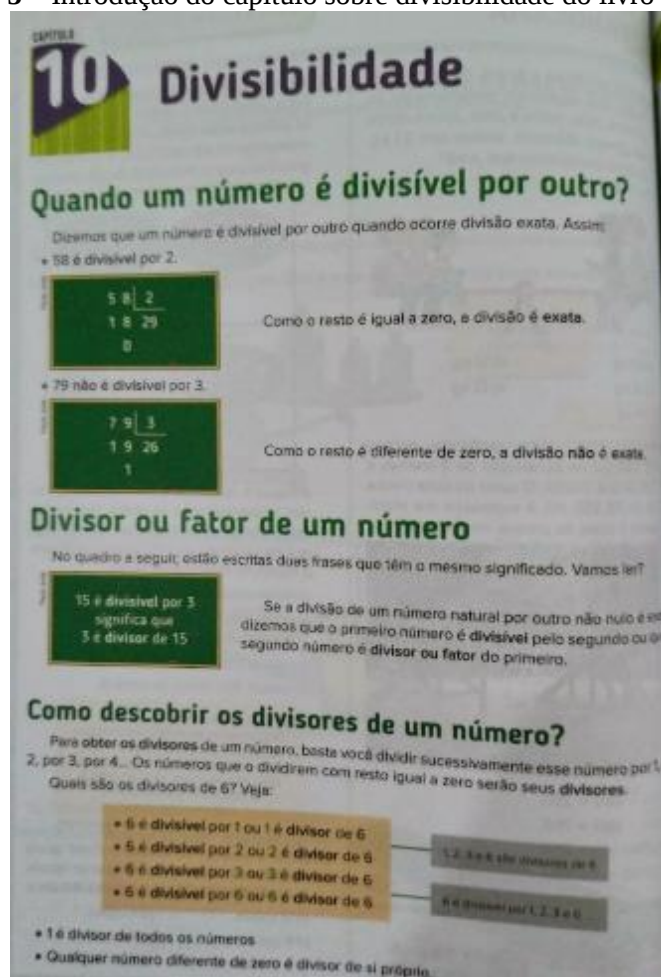
No tópico seis é discutido os conceitos de m.d.c. e de m.m.c. Em ambas as discussões, os autores apresentam duas questões. No caso do m.d.c., a primeira situação não traz nenhum contexto, e já apresenta de forma mecânica como se encontra o m.d.c. entre dois números naturais. Já a segunda questão traz uma situação-problema que para ser resolvida necessita do conceito de m.d.c. A abordagem do m.m.c. acontece exatamente da mesma maneira, primeiro uma questão que mostra como encontrar o m.m.c. entre dois números naturais e depois um situação-problema onde é preciso fazer uso desse conceito.

Ao final de cada tópico sempre há uma lista de exercícios sobre os conceitos apresentados assim como algumas atividades onde é feita a articulação da Matemática com a Ciências, com a Geografia, com o Meio Ambiente ou com o Esporte em situações-problema. Nesse livro, notamos que os conceitos de divisibilidade são apresentados sempre de forma direta, sem atividades que estimule a participação dos alunos na descoberta deles. Mesmo as atividades de exploração que aparecem em dois tópicos não dão muito espaço para a investigação. Apesar disso, notamos alguns aspectos que consideramos positivos como a articulação feita entre a Matemática e as outras Ciências e o recurso feito à História da Matemática. Essas abordagens são valiosas para o ensino-aprendizagem da Matemática.

Em seu livro, Name (2019), estrutura a abordagem dos conceitos da divisibilidade em quatro capítulos, do 10 ao 14, que juntos totalizam 23 páginas. O capítulo 10 inicia com duas indagações: “Quando um número é divisível por outro?” e “Como descobrir os divisores de um número?”. O livro apresenta a resposta para cada uma dessas perguntas como se fosse um diálogo e em seguida aponta exemplos para cada definição como podemos observar na Figura

5. Já na página seguinte é apresentada uma lista de exercícios de fixação sobre os conceitos estudados. Logo após, ainda no capítulo 10, aparecem o estudo de alguns dos critérios de divisibilidade. São trabalhados apenas os critérios de divisibilidade por dois, por três, por seis, por cinco e por quatro, nessa ordem.

Figura 5 – Introdução do capítulo sobre divisibilidade do livro de Name



Fonte: Name (2019, p. 80).

Todos os critérios, com exceção do da divisibilidade por quatro, são introduzidos a partir de quadros com os números naturais menores que 50. Esses quadros vão mudando de acordo com cada critério, por exemplo, ao tratar do critério de divisibilidade por dois todos os números menores que 50 que são divisíveis por dois aparecem coloridos no quadro apresentado (Figura 6).

Figura 6 – Abordagem dos critérios de divisibilidade no livro de Name

Crêterios de divisibilidade

Estudaremos alguns procedimentos que possibilitam verificar, **sem efetuar a divisão**, se um número   divisível por outro. Esses procedimentos são chamados **cr terios de divisibilidade**.

Divisibilidade por 2

Vamos fazer um quadro dos números naturais menores que 50 e colorir os que são divisíveis por 2.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49

O que você observou nos números divisíveis por 2?

Um número   divisível por 2 quando o algarismo das unidades é 0, 2, 4, 6 ou 8, isto é, quando é par.

Fonte: Name (2019, p. 82).

Como podemos observar, embaixo de cada quadro é feito uma observação do que acontece com os números coloridos para que sejam divisíveis pelo número estudado e em sequência é definido o critério para a divisibilidade por esse número. Já o critério da divisibilidade por quatro é introduzido a partir de duas imagens, uma representando 100 unidades com pontinhos e a outra um agrupamento dessas unidades feito de quatro em quatro. Em seguida é feito a definição desse critério. Após o estudo de cada critério, o livro propõe listas de exercícios de fixação.

No capítulo 11, Name (2019) trabalha os conceitos de números primos bem como de decomposição em fatores primos. Para tanto aponta os divisores de seis números primos e em seguida os divisores de seis números compostos fazendo assim um paralelo entre esses conceitos, formalizando-os (Figura 7). Em seguida, apresenta um quadro com o título “Como descobrir quais são os números primos?”, no qual apresenta o processo estabelecido por Eratóstenes para determinar os números primos de 1 a 50.

Figura 7 – Abordagem dos números primos no livro de Name

CAPÍTULO 11

Números primos e decomposição em fatores primos

Números primos e números compostos

Vamos determinar os divisores ou fatores de alguns números.

- Divisores de 2: 1, 2
- Divisores de 3: 1, 3
- Divisores de 5: 1, 5
- Divisores de 7: 1, 7
- Divisores de 11: 1, 11
- Divisores de 13: 1, 13

Esses números são exemplos de **números primos**, pois têm somente dois divisores: a unidade e o próprio número.

- Divisores de 4: 1, 2, 4
- Divisores de 6: 1, 2, 3, 6
- Divisores de 9: 1, 3, 9
- Divisores de 8: 1, 2, 4, 8
- Divisores de 10: 1, 2, 5, 10
- Divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12

Já esses números são exemplos de **números compostos**, pois têm mais de dois divisores.

Convém lembrar que o **número 1 não é primo nem composto**, pois ele tem apenas um divisor que é ele mesmo.

+ AQUI TEM MAIS

Como descobrir quais são os números primos?

Existe um processo muito prático para determinar números primos, chamado **crivo de Eratóstenes**. Veja como Eratóstenes fez para determinar os números primos de 1 a 50.

- 1º) Escreveu os números de 1 até 50.
- 2º) Riscou o número 1 porque não é primo.
- 3º) Circulou o número 2, que é primo, e riscou todos os números divisíveis por 2.
- 4º) Circulou o número 3, que é primo, e riscou todos os números divisíveis por 3.
- 5º) Circulou o número 5, que é primo, e riscou os demais números que são divisíveis por 5.
- 6º) Prosseguiu da mesma forma, até que não houvesse mais números a serem riscados.

Os números circulados são primos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Fonte: Name (2019, p. 90).

Analisando a imagem, podemos destacar que não é feito nenhum contexto histórico sobre Eratóstenes e seu processo. A página seguinte traz alguns exercícios de fixação. Partindo de exemplos, o autor mostra como fazer o reconhecimento de um número primo bem como se realiza a decomposição em fatores primos. Nos capítulos 12 e 13, são estudados os conceitos de m.m.c. e de m.d.c. Com relação ao estudo do primeiro conceito, este ocorre de forma bastante direta. Como retrata a Figura 8, o autor já inicia o capítulo 12 com a definição de m.d.c., explicando os processos práticos para a determinação do mesmo.

Figura 8 – Abordagem do m.d.c. no livro de Name

CAPÍTULO 12 Máximo divisor comum

O maior dos divisores comuns de dois ou mais números chama-se **máximo divisor comum (m.d.c.)** desses números.

Qual é o m.d.c. de 8 e 12? Temos:

- Divisores de 8: 1, 2, 4, 8.
- Divisores comuns de 8 e 12: 1, 2, 4.
- Então: m.d.c. (8, 12) = 4.

Divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

O maior desses divisores comuns é 4.

COMUM SIGNIFICA QUE PERTENCE TANTO A UM QUANTO A OUTRO.

Processos práticos para determinação do m.d.c.

Por decomposição em fatores primos (fatoração completa)

Qual é o m.d.c. de 84 e 90?

84	2	90	3	
42	2	45	3	Assim:
21	3	15	3	$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$
7	7	5	5	$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$
1		1		m.d.c. (84, 90) = $2 \cdot 3 = 6$

O m.d.c. é o produto dos fatores comuns com os menores expoentes.

Por divisões sucessivas

- Divide-se o número maior pelo menor. Se a divisão for exata, o m.d.c. será o menor deles.
- Se a divisão não for exata, divide-se o menor pelo resto, e assim sucessivamente até encontrar uma divisão exata. O último divisor será o m.d.c.

Exemplo:

Determine o m.d.c. de 382 e 120:

$$\begin{array}{r} 382 \div 120 = 3 \text{ resto } 22 \\ 120 \div 22 = 5 \text{ resto } 10 \\ 22 \div 10 = 2 \text{ resto } 2 \\ 10 \div 2 = 5 \text{ resto } 0 \end{array} \quad \text{m.d.c. (382, 120) = 2}$$

Na prática, esses cálculos são dispostos assim:

	3	5	2	5	quocientes
382	120	22	10	2	divisores
22	10	2	0		restos

Esse dispositivo é conhecido como **algoritmo de Euclides**.

Para o cálculo do m.d.c. de mais de dois números, calculamos o m.d.c. de dois dos números, depois calculamos o m.d.c. entre o terceiro número e o m.d.c. dos dois primeiros, e assim por diante.

Fonte: Name (2019, p. 96).

Como podemos notar, não é apresentada nenhuma situação-problema como exemplo da utilidade desse conceito. Em contrapartida algumas situações desse tipo aparecem logo na página seguinte, no exercício de fixação, que deve ser respondido pelos alunos. Já para explicar o m.m.c., no capítulo 13, o autor abre um parêntese para explicar o que são os múltiplos de um número natural, pois isso ainda não havia sido feito. Logo após essa explanação, acontece a apresentação do m.m.c., de maneira similar ao que havia sido feito com o m.d.c. Ambos os capítulos terminam com uma lista de exercícios de fixação.

Assim como no livro anterior, observamos que a abordagem dos conceitos da divisibilidade nesse livro também ocorre de maneira bastante direta, sem espaço para a

participação do aluno antes da formulação das definições. No caso deste livro, a abordagem de todos os conceitos ocorre de forma sucinta sem a apresentação de muitos exemplos. Contudo, observamos que alguns conceitos são explorados de forma mais interessante nos exercícios de fixação, talvez tenha sido esse o intuito do autor ao resolver abordar os conteúdos de forma rápida focando nos exercícios. Salientamos também, que não há nesses quatro capítulos a indicação de recursos metodológicos, nem mesmo quando apresenta uma atividade de cunho histórico.

Por fim, passamos a análise do livro de Gay e Silva (2018), a qual resolvemos relatar por último, tendo em vista as diferenças observadas em comparação com os outros dois livros, para que fosse possível fazer um paralelo mais significativo entre ambos. Esse livro aborda os conceitos de múltiplos, divisores e números primos na unidade quatro. Entretanto só trabalha o conceito de m.m.c. na unidade seis que tem por objetivo estudar as operações com frações. Sendo assim, o livro não aborda o conceito de m.d.c. O autor inicia a unidade quatro com um estudo a respeito da divisibilidade de um número natural, mostrando quando um número natural é divisível por outro e quando podemos considerar que um número é múltiplo de outro. Esse estudo acontece a partir de um situação-problema, como podemos observar na Figura 9. O próprio livro apresenta uma discussão sobre as possibilidades de solução da questão e com ela chega as definições dos conceitos mencionados.

Figura 9 – Introdução do capítulo sobre divisibilidade do livro de Gay e Silva



UNIDADE 4

DIVISIBILIDADE: MÚLTIPLOS E DIVISORES

Rota Didática
Unidade 4
<http://mod1k1.net/rev>

Habilidades da BNCC trabalhadas nesta Unidade:
EF06MA04
EF06MA05
EF06MA06
EF06MA31
EF06MA32

1 DIVISIBILIDADE

Acompanhe a situação a seguir.

Para um trabalho em equipe, o professor vai dividir os 28 alunos da classe em grupos de exatamente 5 ou exatamente 4 alunos, de modo que nenhum aluno fique sem grupo. Nessas condições, como o professor deve organizar a turma para que todos os grupos tenham o mesmo número de alunos?

Para responder a essa questão, vamos analisar as duas divisões.

- Se distribuirmos os 28 alunos da classe em grupos de 5, teremos:

$$\begin{array}{r} 28 \quad | \quad 5 \\ 3 \quad 5 \end{array}$$

← número de grupos

↑
número de alunos sem grupo

Com essa divisão, conseguimos formar 5 grupos de 5 alunos cada um, mas 3 alunos ficam sem grupo.

- Se distribuirmos os 28 alunos da classe em grupos de 4, a divisão será:

$$\begin{array}{r} 28 \quad | \quad 4 \\ 0 \quad 7 \end{array}$$

← número de grupos

↑
número de alunos sem grupo

Nesse caso, formando 7 grupos de 4 alunos cada um, conseguimos grupos com o mesmo número de integrantes sem que nenhum aluno fique sem grupo, como o professor desejava.

Comparando as duas divisões, verificamos que:

- na divisão de 28 por 5, o resto é diferente de zero; portanto, essa divisão é não exata;

$$\begin{array}{r} 28 \quad | \quad 5 \\ 3 \quad 5 \end{array}$$

↑
resto

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 122).

Após essa introdução, o autor passa a discutir os critérios de divisibilidade por 2, por 3, por 6, por 9, por 4, por 8, por 5, por 10, por 100 e por 1000, nessa ordem. Essa discussão acontece à luz de atividades investigativas, nas quais os próprios alunos são convidados a observar algumas regularidades e com isso concluírem os critérios de divisibilidade. Para todos os critérios há uma atividade que leva os alunos a realizarem uma verdadeira investigação. Como exemplo, temos a atividade sobre o critério de divisibilidade por três apresentado na Figura 10.

Figura 10 – Abordagem dos critérios de divisibilidade do livro de Gay e Silva

▪ **CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 3**
Observe alguns números divisíveis por 3 a partir do 81.

81	84	87	90	93	96	99
102	105	108	111	114	117	120
123	126	129	132	135	138	141
144	147	150	153	156	159	162

PARA ANALISAR

b) 245 não é divisível por 3 ($2 + 4 + 5 = 11$, e 11 não é divisível por 3)
e 780 é divisível por 3 ($7 + 8 + 0 = 15$, e 15 é divisível por 3).

a) A soma dos algarismos de 138 é $1 + 3 + 8 = 12$, e 12 é um número divisível por 3. Calcule a soma dos algarismos de cada um dos números divisíveis por 3 acima. Essas somas são divisíveis por 3? *sim*

b) Os números 245 e 780 são divisíveis por 3? Calcule a soma dos algarismos de cada um desses números e verifique se essa soma é divisível por 3.

c) Que padrão você observou nesses números? Esse padrão sugere qual critério para saber se um número natural é divisível por 3?
Espera-se que os alunos percebam que o padrão observado sugere que um número natural é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos é divisível por 3.

124

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 124).

Como podemos notar, ao realizar essa atividade, os alunos são induzidos a observar o padrão existente no último algarismo dos números divisíveis por dois. Além disso, são conduzidos a um teste para verificar se o padrão observado vale para os outros múltiplos de dois. Após esse processo, os alunos são desafiados, de certa forma, a chegarem sozinhos ao critério esperado. Atividades nesses mesmos moldes são apresentadas na discussão de todos os outros critérios. Somente no final de todas as atividades investigativas, o livro traz uma lista de exercícios sobre o conteúdo. Nos dois tópicos seguintes é trabalhado os conceitos de múltiplos e de divisores de um número natural, o qual acontece, mais uma vez, a partir de situações-problema e da análise das possíveis soluções das mesmas que são feitas, nesse caso, pelo próprio autor.

Figura 11 – Introdução do conceito de números primos do livro de Gay e Silva

4 NÚMEROS PRIMOS

Você já viu que alguns números têm vários divisores. Veja, por exemplo, os divisores naturais de 32: 1, 2, 4, 8, 16 e 32.

Mas será que todos os números têm vários divisores?

Há números naturais maiores que 1 que têm apenas dois divisores naturais distintos: o número 1 e o próprio número. Esses números são chamados de **números primos**.

EXEMPLOS

- a) 2 é um número primo, pois seus divisores naturais são apenas 1 e 2.
- b) 5 é um número primo, pois seus divisores naturais são apenas 1 e 5.
- c) 11 é um número primo, pois seus divisores naturais são apenas 1 e 11.

Essa característica de alguns números naturais já era conhecida na Antiguidade. O matemático grego Eratóstenes (276 a.C.-194 a.C.) elaborou um método para organizar os primeiros números primos da sequência dos números naturais. Esse método ficou conhecido como **Crivo de Eratóstenes**.

Vamos obter os números primos compreendidos entre 1 e 50 por esse método. Veja como funciona a seguir.

Escrevemos os números naturais de 1 a 50. Depois, eliminamos o 1.

Eliminamos os múltiplos de 2, exceto ele mesmo.

Retramos os múltiplos de 3, exceto ele mesmo.

Eliminamos os múltiplos de 5 e de 7, exceto eles mesmos.

Os números que sobraram no quadro não são múltiplos de outros (exceto de 1), ou seja, são números divisíveis apenas por 1 e por eles mesmos. São os números primos compreendidos entre 1 e 50.

Os números naturais maiores que 1 que não são primos, isto é, que têm mais de dois divisores, são chamados de **números compostos**.

Uma característica dos números compostos é que sempre podem ser escritos como um produto de números primos.

134

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 134).

Os dois últimos tópicos desse capítulo discorrem sobre os números primos. Como podemos observar na Figura 11, o autor introduz o conceito de números primos por meio de exemplos de uma forma dialogada com o leitor. Além disso, faz um pequeno recorte histórico sobre o Crivo de Eratóstenes e o apresenta por meio de um exemplo ilustrado. Em seguida discorre sobre o reconhecimento de outros números primos e sobre a decomposição em fatores primos, o que também acontece a partir de situações-problema, incluindo imagens para ilustrá-las. O capítulo encerra com atividades de fixação.

Já a abordagem do conceito de m.m.c., que acontece na unidade seis sobre operações com frações, se dá de forma breve e totalmente atrelado à adição e subtração de frações com denominadores diferentes.

Figura 12 – Abordagem do conceito de m.m.c. do livro de Gay e Silva

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (MMC)

Para adicionar ou subtrair frações com denominadores diferentes, podemos usar quaisquer frações equivalentes às iniciais, com mesmo denominador; porém, nem sempre percebe-se de imediato um denominador comum.

Podemos usar como denominador qualquer múltiplo comum dos denominadores iniciais.

Por exemplo, para calcular $\frac{3}{12} + \frac{4}{15}$, podemos verificar os múltiplos comuns de 12 e 15:

Múltiplos de 12 $\rightarrow$ 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, ...

Múltiplos de 15 $\rightarrow$ 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, ...

Múltiplos comuns de 12 e 15 $\rightarrow$ 60, 120, ...

Poderíamos, então, encontrar frações equivalentes às iniciais com denominadores 60, 120 ou qualquer outro múltiplo comum de 12 e 15. Para facilitar os cálculos, pode-se usar o menor desses múltiplos; nesse caso, o 60.

Usando o menor múltiplo comum, ou **mínimo múltiplo comum (mmc)** de 12 e 15, temos:

$$\frac{3}{12} = \frac{15}{60} \quad \text{e} \quad \frac{4}{15} = \frac{16}{60}$$

Então: $\frac{3}{12} + \frac{4}{15} = \frac{15}{60} + \frac{16}{60} = \frac{31}{60}$

168

Fonte: Gay e Silva (2018, p. 168).

Conforme mostra a Figura 12, o autor apresenta apenas uma maneira de encontrar o m.m.c. e também não traz, em seguida, nenhuma atividade para apresentar o uso do m.m.c. em outras situações.

Após concluirmos a análise dos três livros didáticos, podemos verificar que há muitos pontos em comum entre o livro de Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (2012) e o de Name (2019), apesar de este último ter sido publicado sete anos após o primeiro. Dentre os pontos em comum destacamos a maneira direta como apresentam os conceitos analisados, sempre a partir de exemplos já respondidos pelos próprios autores. Apesar disso, o primeiro desses livros trabalha parte dos conceitos de forma mais contextualizada, pois apresenta algumas situações-problemas como exemplos, além de fazer uso de alguns recursos importantes como a História da Matemática, a tecnologia e a interdisciplinaridade. Não observamos esses aspectos no livro de Name (2012).

Já no livro de Gay e Silva (2018) encontramos uma abordagem mais didática, pois faz bastante uso de situações-problemas ao introduzir os conteúdos ao invés de já ir direto para as definições. Além disso, esse livro faz uso de atividades investigadas ao discutir os critérios de divisibilidade como sugere a BNCC (BRASIL, 2018). Encontrar atividades nesse sentido foi de grande valor para nossa pesquisa, pois pudemos fazer uso de algumas delas e a adaptação de outras afim de enriquecer a nossa intervenção pedagógica.

3 CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

3.1 Quanto à abordagem

Quanto a abordagem, esta pesquisa classifica-se como qualitativa, pois de acordo com Gehardt e Silveira (2009, p. 31) “A pesquisa qualitativa não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc”. A nossa pesquisa se enquadra nesse tipo de abordagem, pelo fato que buscou verificar os resultados do trabalho com a Investigação Matemática visando observar aspectos qualitativos como as contribuições que essa metodologia pode proporcionar.

3.2 Quanto aos objetivos

Do ponto de vista de seus objetivos, a pesquisa pode ser configurada como exploratória, sobre o que Gerhadit e Silveira (2009, p. 35) dizem que “este tipo de pesquisa tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torna-lo mais explícito ou a construir hipótese”. Já para Prodanov e Freitas (2013, p. 51) a pesquisa exploratória “[...] tem como finalidade proporcionar mais informações sobre o assunto que vamos investigar, possibilitando sua definição e seu delineamento [...]”. A nossa pesquisa se enquadra nesses aspectos, pois nela buscamos conhecer as contribuições da Investigação Matemática com o objetivo de analisar os efeitos que um trabalho nesta perspectiva pode trazer para o ensino-aprendizagem da divisibilidade de números naturais.

3.3 Quanto aos procedimentos técnicos

Quanto aos procedimentos, esta pesquisa se caracteriza como um estudo de caso. Ela teve como principal objeto de estudo 30 alunos de uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental e a partir das atividades desenvolvidas com esse grupo foi realizado um estudo detalhado acerca dos resultados observados. Sendo assim, a pesquisa está de acordo com a definição de Gil (2008, p. 57) para o estudo de caso ao dizer que o mesmo “[...] é caracterizado pelo estudo profundo e exaustivo de um ou poucos objetos, de maneira a permitir o seu conhecimento amplo e detalhado [...]”.

3.4 Sujeitos da pesquisa e coleta de dados

A pesquisa foi desenvolvida com base na aplicação de algumas atividades com o intuito de utilizar a Investigação Matemática como recurso metodológico para o ensino-aprendizagem da divisibilidade dos números naturais. Essas atividades tiveram como público-alvo 30 alunos de uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola privada da cidade de Mamanguape – PB.

Para coletar os dados que subsidiaram a nossa pesquisa, utilizamos como instrumento um questionário porque ele deu aos alunos a oportunidade de se posicionarem a respeito da sua vivência durante as atividades, sem a interferência dos pesquisadores. Isso pôde trazer resultados importantes para a pesquisa. De acordo com Gerhardt e Silveira (2009, p. 69) esse instrumento “objetiva levantar opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas”.

Também optamos por usar a observação, sobre o que Gil (2008, p. 100) relata que “[...] apresenta como principal vantagem, em relação a outras técnicas, a de que os fatos são percebidos diretamente, sem qualquer intermediação. Desse modo, a subjetividade, que permeia todo o processo de investigação social, tende a ser reduzida”. Esse instrumento nos ajudou a verificar e analisar os resultados da aplicação das atividades por nos permitir perceber diretamente as atitudes, as dificuldades e as impressões dos alunos participantes.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Desenvolvimento e análise da intervenção pedagógica

Nesta seção serão apresentadas as atividades investigativas que foram desenvolvidas ao longo da nossa intervenção pedagógica. Essas atividades foram elaboradas a partir da leitura de livros e artigos científicos como Nicolle (2011), Bianchini (2011), Centurión e Jakubovic (2015), Gay e Silva (2018) e Name (2019). Utilizamos algumas questões já prontas, adaptamos outras e também elaboramos uma delas.

A intervenção pedagógica aconteceu num período de sete aulas divididas em dois dias, tendo cada aula uma duração de 50 minutos. Ao mesmo tempo em que discorreremos sobre a realização das atividades, procuraremos fazer, sempre que possível, um paralelo com os pressupostos teóricos sobre a Investigação Matemática, visando dessa maneira, analisar as contribuições ofertadas por elas à aprendizagem do nosso público-alvo. Para tanto, nesta seção, analisaremos uma questão por vez, focando nas resoluções das mesmas pelos alunos, e na seção seguinte as respostas deles à um questionário avaliativo entregue na culminância da intervenção.

No primeiro momento da intervenção, em consonância com Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), fizemos uma breve introdução na qual explicamos aos alunos o que vem a ser uma investigação, por meio de algumas comparações como com o trabalho de um detetive que primeiro se apossa das informações, em seguida investiga as possibilidades, as testa e depois realiza as suas conclusões. Partindo dessa premissa, informamos que os alunos fariam um trabalho semelhante em grupos e que apesar de poderem contar com o nosso apoio, o principal responsável pela resolução das atividades seria eles mesmos. Daí, organizamos a turma em cinco grupos de seis alunos cada, o que representa um total de 30 alunos participantes nos dois dias da intervenção. A divisão dos grupos aconteceu de acordo com a sequência estabelecida no diário de classe. Assim, de acordo com os autores supracitados, colocamos em prática a primeira fase de uma atividade investigativa.

Após esse momento, foi entregue a cada grupo as atividades investigativas que podem ser observadas no Apêndice A. Daí, como os alunos não tinham tido nenhum contato com atividades nesses moldes, colocamos em prática a sugestão de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) e fizemos uma leitura da primeira atividade dando algumas breves indicações do que deveriam fazer, mas sem muitos detalhes para que eles já comesçassem a sentir os efeitos do trabalho investigativo. Para facilitar a apresentação dos resultados, identificaremos os grupos da seguinte maneira: grupo A, grupo B, grupo C, grupo D e grupo E. Quando fizermos algum relato específico sobre os alunos, os identificaremos com a letra do grupo seguido de um número, por exemplo, os alunos do grupo A serão identificados como: A1, A2, ..., A6.

A primeira atividade teve como objetivo principal descobrir, por meio de uma investigação, quando um número natural é divisível por outro. Com esse intuito foi solicitado que os alunos observassem a seguinte situação:

A secretaria de ação social de certo município pretende realizar uma apresentação com o coral de idosos da instituição. Para tanto, a professora responsável pelo coral vai dividir os 28 participantes em equipes de exatamente 5 ou exatamente 4 alunos, de modo que nenhum aluno fique sem equipe.

Após lerem essa situação, o primeiro item da atividade solicitava aos alunos que realizassem uma investigação sobre como a professora em questão deveria organizar a sua turma de modo que todas as equipes tivessem a mesma quantidade de pessoas, ou seja, para chegar a essa conclusão, esperávamos que os alunos levantassem hipóteses por meio de divisões. Analisando as respostas de cada grupo à esse item, observamos que todos os grupos compreenderam o propósito do mesmo, pois fizeram a divisão de 28 por 5 e de 28 por 4 para verificar qual dessas possibilidades poderia ser posta em prática pela professora. As estratégias utilizadas variam entre o uso do algoritmo da divisão (Figura 13) e desenhos (Figura 14).

Figura 13 – Resposta do grupo D

a) Investigue como a professora deve organizar essa turma para que todas as equipes tenham a mesma quantidade de pessoas. *sete grupos de quatro pessoas.*

Cálculos:

$$\begin{array}{r} 28 \overline{) 135} \\ - 25 \\ \hline 03 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \overline{) 4} \\ - 28 \\ \hline 00 \end{array}$$

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 14 – Resposta do grupo A

a) Investigue como a professora deve organizar essa turma para que todas as equipes tenham a mesma quantidade de pessoas.

$28:4 = 7 \text{ alunos}$

$28:5 = X$

Visual representation of 28 items using tally marks (groups of 4 and 5).

Fonte: Elaboração própria, 2020.

No item “b” dessa atividade deveriam ser apresentadas as conclusões a que chegaram de acordo com a investigação realizada no item anterior. Todos os grupos responderam corretamente a esse item com textos apresentando os motivos de suas conclusões, como exemplo, apresentamos a resposta do grupo D na Figura 15. Já o item “c”, solicitava aos alunos

que fizessem divisões de 28 por seus divisores afim de investigar de que outras maneiras seriam possíveis organizar os participantes do coral. Os grupos B, C e D apresentaram os cálculos esperados em suas respostas, que podemos exemplificar com a resposta do grupo B (Figura 16). Já os grupos A e E apenas escrevem as possibilidades sem apresentar os cálculos realizados.

Figura 15 – Resposta do grupo D

b) A que conclusões você chegou com relação ao número de participantes do coral e as possíveis quantidades de participantes em cada equipe? *que não era possível fazer 5 grupos de 5 pessoas pois 3 ficariam de fora e que o certo seria dividir 7 grupos de 4 pessoas.*

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 16 – Resposta do grupo B

c) Caso a professora mude de ideia e resolva modificar a quantidade de pessoas em cada equipe, mas garantindo que essa quantidade seja a mesma para todos os grupos, investigue e represente de quantas formas diferentes a professora poderia organizar essa turma.

12 grupos de 2 alunos, 7 grupos de 4 alunos, 2 grupos de 14 alunos

$$\begin{array}{r} 28 \\ \div 2 \\ \hline 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \\ \div 4 \\ \hline 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \\ \div 14 \\ \hline 2 \end{array}$$

Chegamos a essa conclusão dividindo.

Fonte: Elaboração própria, 2020.

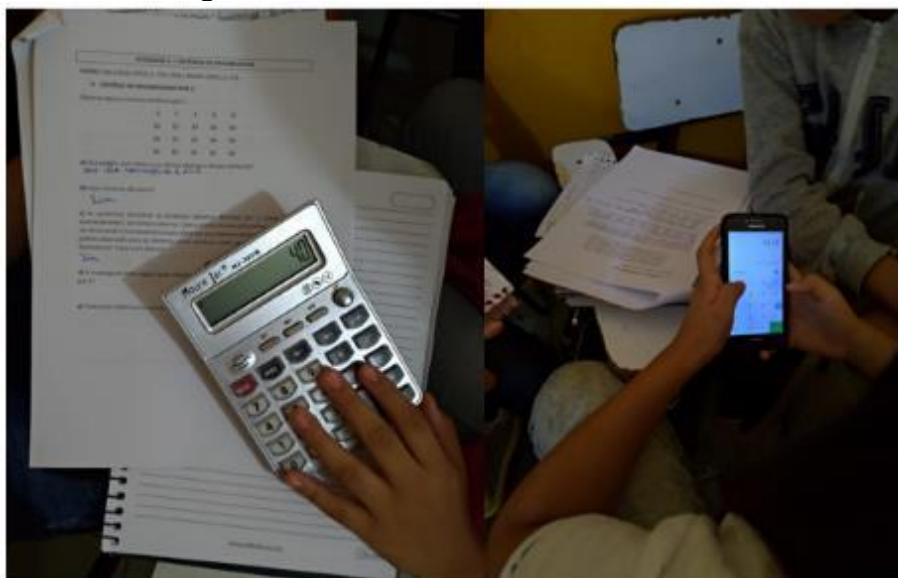
Dessa maneira, concluímos que a investigação realizada surtiu o efeito esperado para a primeira atividade. No decorrer dela foi de suma importância a nossa observação para dar suporte a alguns grupos que sentiram dificuldades de início. Por exemplo, observamos que dois grupos conseguiram chegar as conclusões solicitadas, mas não iriam registra-las na atividade. Com isso, sugerimos que eles fizessem esse registro, pois “é somente quando se dispõe a registrar as suas conjecturas que os alunos se confrontam com a necessidade de explicitarem as suas ideias [...]” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016, p. 28).

Para estimularmos essa atitude, fomos até o grupo B e pedimos ao aluno A1 que nos contasse a conclusão a que haviam chegado. O aluno A1 disse: “A gente vai tipo dividir por 2, por 4, por 6, pelos números pares, por que se for pelos ímpares não vai dar, foi essa conclusão que a gente chegou”. Fazer questionamentos desse tipo, é um dos papeis do professor de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), pois agindo dessa maneira ele não estará fazendo a investigação pelo aluno, mais poderá induzi-lo a fazê-la, mostrando que é possível. Em outro

grupo observamos que os alunos não estavam conseguindo fazer uma simples divisão, daí, sugerimos a eles que fizessem por outros meios, sem dizer qual. Eles resolveram fazer tracinhos e conseguiram dessa forma desenvolver a atividade. Nessa direção, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 30) salientam que, durante uma atividade investigativa, cabe ao professor “[...] colocar questões aos alunos que os estimulem a olhar em outras direções e os façam refletir sobre aquilo que estão a fazer”.

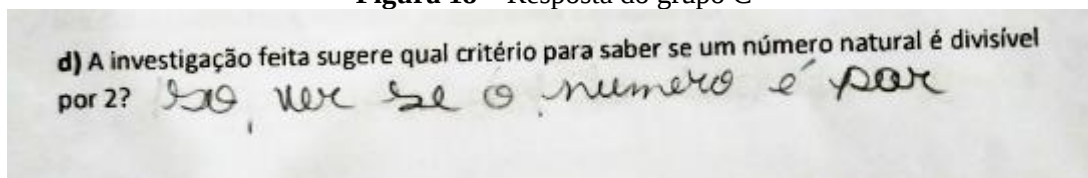
Após todos os grupos terem respondido aos itens dessa atividade, fizemos uma pausa na intervenção, para um momento de discussão onde os alunos puderam compartilhar as suas respostas partindo, assim, para a formalização dos conceitos de “divisível por”. Esse é um momento especial, pois estimula a oralidade nos alunos, além de ajuda-los a ver a validade da investigação que realizaram. De acordo com a BNCC (2018), “após resolverem os problemas matemáticos, os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com ele” (BRASIL, 2018, p. 519). Seguindo essa recomendação e em consonância com as fases mencionadas anteriormente para o desenvolvimento de uma atividade investigativa, reservamos tempo para discussão ao final de cada atividade.

Dado isso, passamos para a atividade dois, que teve como objetivo estabelecer por meio de investigações alguns critérios de divisibilidade. O primeiro critério estudado foi o da divisibilidade por dois. Para isso a questão solicitava aos alunos que observassem alguns números divisíveis por dois. O último algarismo de cada número foi destacando com a cor azul. O item “a” perguntava qual o padrão observado no último algarismo desses números e o item “b” se eles eram pares. Analisando as respostas, observamos que três grupos responderam de formas distintas, mas de acordo com o esperado, ou seja, observaram que sempre terminava em 0, 2, 4, 6 ou 8. Já os outros dois grupos não conseguiram chegar a conclusão correta, mas conseguiram responder no item “b” que todos eram pares. O item “c” induzia os alunos a investigarem se o padrão observado no primeiro item se repetia nos próximos números divisíveis por dois. Esse item indicava que os alunos poderiam utilizar a calculadora para chegar a conclusão esperada.

Figura 17 – Alunos fazendo uso da Calculadora

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Na Figura 17 acima observamos alunos fazendo uso da calculadora comum e da calculadora do smartphone para fazer a investigação solicitada. Segundo os PCN, quando usada da maneira correta, a calculadora pode ser uma forte aliada do trabalho investigativo “[...] por possibilitar a construção e análise de estratégias que auxiliam na consolidação dos significados [...]” (BRASIL, 1998, p. 115). Especificamente no caso desse item, o uso da calculadora pôde adiantar as conclusões dos alunos, apesar de não os distanciar do processo de investigação. No item seguinte os alunos deveriam descrever o critério de divisibilidade por dois de acordo com a investigação realizada. Analisando as respostas, observamos que apenas o grupo E não chegou a conclusão esperada. Já os outros grupos escreveram, cada um do seu jeito, o critério correto como exemplificado pela resposta do grupo C (Figura 18).

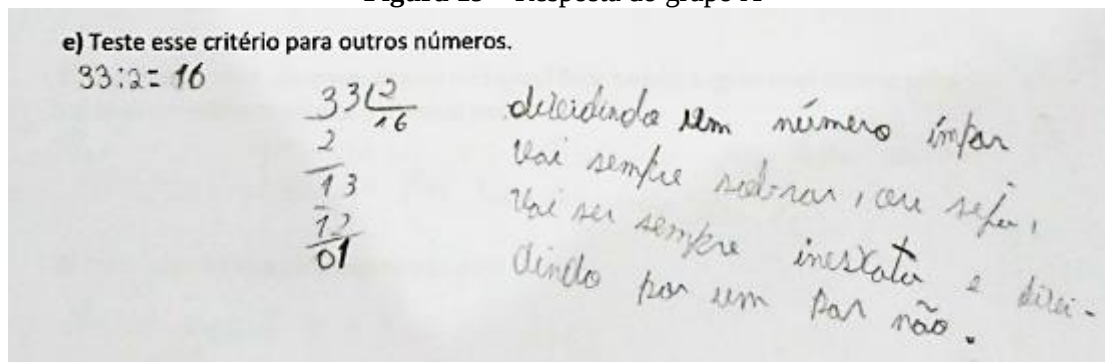
Figura 18 – Resposta do grupo C

Fonte: Elaboração própria, 2020.

O último item solicitava que fosse realizado testes desse critério com outros números. Nesse caso, observamos que dois grupos fizeram divisões de outros números pares por dois para testar o critério. Outros dois grupos apenas colocaram uma sequência de números pares diferentes dos apresentados na questão. E o grupo A, apresentou um contra exemplo, ou seja,

dividiu um número ímpar por dois e verificou que a divisão não foi exata. Além disso, eles ainda escreveram um texto explicando a conclusão a que chegaram (Figura 19).

Figura 19 – Resposta do grupo A

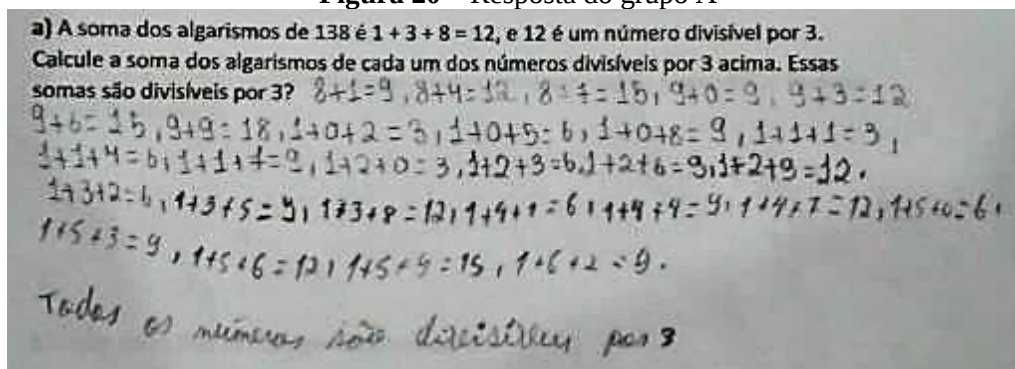


Fonte: Elaboração própria, 2020.

A resposta na imagem acima mostra mais uma vez a importância de se fazer testes com exemplos e contraexemplos, pois torna a investigação mais significativa. Tão importante quanto isso é justificar as conclusões como foi feito pelo grupo supracitado.

Passamos, então, para análise da segunda parte da atividade dois sobre o critério de divisibilidade por três. Assim como na questão anterior, essa apresentou 28 números divisíveis por três a partir do 81. No item “a” foi pedido que os alunos calculassem a soma dos algarismos de cada um desses números afim de verificar se essas somas eram divisíveis por três. Apenas o grupo A fez todas as somas (Figura 20), dois grupos fizeram apenas algumas somas e já chegaram à conclusão e os outros dois grupos apenas escreveram um texto com a conclusão correta.

Figura 20 – Resposta do grupo A



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Esse fato, já é esperado em atividades do tipo, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 29), “[...] existe alguma tendência dos alunos para aceitarem as conjecturas depois de as terem verificado apenas num número reduzido de casos”. Apesar disso, nós a todo tempo incentivamos os grupos a fazerem todas as somas. Como salientam os autores citados, cabe ao professor tentar combater essa tendência.

Para ajudar os alunos a confirmarem a hipótese levantada, o item “b” apresentou mais dois números para que os alunos somassem os seus algarismos e verificassem que sendo essa soma divisível por três o número também o era. Todos os grupos conseguiram responder corretamente, mas destacamos a resposta do grupo E (Figura 21) por terem apresentado de uma forma mais completa, mostrando que compreenderam a importância de além de fazer o teste, justificar as conclusões.

Figura 21 – Resposta do grupo E

b) Os números 245 e 780 são divisíveis por 3? Calcule a soma dos algarismos de cada um desses números e verifique se essa soma é divisível por 3.

$2 + 4 + 5 = 11 = 33 \text{ deu errado}$
 $4 + 8 + 0 = 12 = 36 \text{ deu certo}$

$$\begin{array}{r} 11 \overline{) 33} \\ \underline{9} \\ 24 \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) 45} \\ \underline{15} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$$

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 22 – Resposta do grupo E

c) Que padrão você observou nesses números? Esse padrão sugere qual critério para saber se um número natural é divisível por 3?

Para saber se um número natural é divisível por três a soma de seus algarismos tem que ser divisível por três.

d) Teste esse critério para outros números.

Porque $5 + 2 + 7 = 14$ não é divisível por 3.

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 140} \\ \underline{100} \\ 40 \\ \underline{30} \\ 10 \\ \underline{0} \end{array}$$

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Após terem feito todos esses testes, o item “c” perguntou qual o padrão observado nos números e com isso qual o critério ficou sugerido para a divisibilidade por três. Observamos que todos os grupos conseguiram chegar ao critério solicitado escrevendo-o, cada um da sua

maneira, como exemplificado na Figura 22, que mostra a resposta do grupo A ao item “c” e também ao item “d” que solicitava aos alunos que testassem o critério observado. Dessa maneira o objetivo da questão foi atingindo.

O próximo critério estudado foi o da divisibilidade por seis. Dessa vez a questão apresentou 28 números aleatórios. O item “a” solicitou aos alunos que organizassem esses números utilizando algum critério matemático. Nesse momento, o grupo B solicitou ajuda e descrevemos esse caso com o diálogo a seguir:

Aluno B1: “Professor estamos com dificuldade para entender esse item!”.

Professor: “Pense em algumas maneiras de organizar esses números”.

Aluna B2: “Ordem crescente?”.

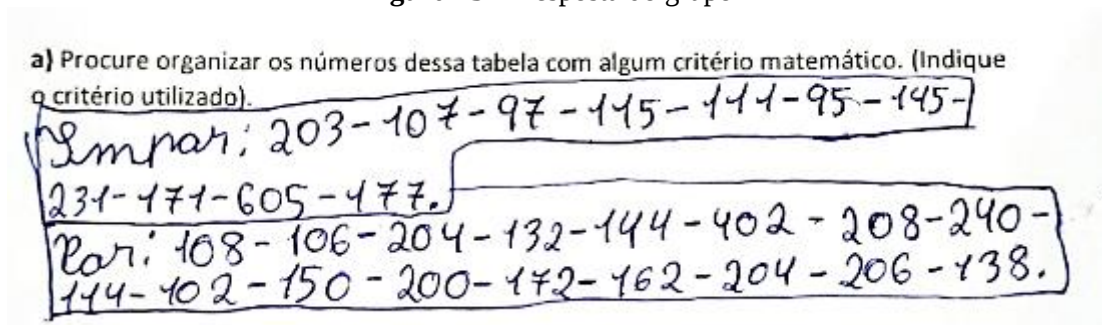
Professor: “Sim, é uma maneira, mas tem outras. Pense em um número, o que esse número pode ser?”

Aluno B1: “Ímpar ou par”.

Aluna B2: “Ah, é mesmo, então vamos fazer assim pessoal”.

Esse diálogo, reflete mais uma vez, o papel do professor numa atividade investigativa, ou seja, o de apoiar os alunos por fazer questionamentos como os que foram feitos nesse caso, mas sem dar a resposta, permitindo, assim, que os alunos exercitem a mente e consigam realizar a investigação. A Figura 23 apresenta a resposta do grupo B a esse item. No item “b” deveriam destacar os números desse quadro que eram divisíveis por dois, no item “c” os divisíveis por três e no item “d” os divisíveis por seis. Com relação aos itens “b” e “c”, todos os alunos conseguiram fazer, inclusive um dos alunos disse: “é só pegar os números pares”. Isso mostra que já conseguiam articular os critérios anteriores.

Figura 23 – Resposta do grupo B



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Já para responder o item “d” foi permitido mais uma vez que usassem a calculadora afim de otimizar a investigação. Após terem feito toda essa descoberta, o item “e” pedia que

eles olhassem para o resultado dos itens anteriores e escrevessem alguma conclusão. Nesse item destacamos as respostas de do grupo B (Figura 24) e do grupo C (Figura 25), pois conseguiram escrever os critérios da forma correta, mas escritos de maneiras diferentes.

Figura 24 – Resposta do grupo B

e) Olhando para o resultado das três questões anteriores, o que você conclui?
 Que cada uma tem seu jeito de achar os divisores e
 que todos os ~~de~~ números divisíveis por 6 também são
 divisíveis por 2 e por 3.

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 25 – Resposta do grupo C

e) Olhando para o resultado das três questões anteriores, o que você conclui?
 6 número é divisível por 6 quando ele é par
 e divisível por 3

Fonte: Elaboração própria, 2020.

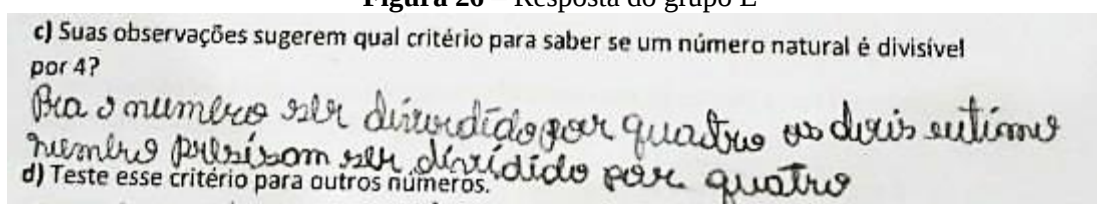
O último item solicitou aos alunos que testassem esse critério em outros números, o que foi feito por dois grupos. Após esse item foi dada uma pausa para mais um momento de discussão, onde os alunos puderam compartilhar com seus colegas as respostas que haviam dado e dessa maneira formalizar os conceitos apreendidos. Como já mencionado na primeira atividade, esse é um momento bastante especial da investigação assim como sugere Ponte, Brocardo e Oliveira (2016). Após esse momento encerramos o primeiro dia da intervenção.

No dia seguinte, iniciamos a segunda parte da intervenção relembrando aos alunos o que é uma investigação e os conceitos estudados no dia anterior. Aproveitamos para reafirmar a importância daquele trabalho e para sondar o que os alunos estavam achando do trabalho, o que para nossa surpresa, foi bastante positivo e encorajador. Preocupados com o tempo disponível, decidimos fazer diferente nesse dia para que pudessemos realizar todas as atividades preparadas. Nesse sentido, distribuímos as atividades restantes entre os grupos, para que enquanto um grupo respondia a determinada atividade, outro já respondia à outra. Isso não prejudicou o objetivo da intervenção, pois acreditamos que o sentido da investigação já havia sido apreendido pela turma e, além disso, no momento de discussão eles poderiam socializar os seus estudos.

O grupo E ficou responsável pela atividade sobre o critério de divisibilidade por quatro. Essa questão apresentava 32 números divisíveis por quatro a partir do 100. Os dois últimos

algarismos desses números foram destacados de azul. Nesse sentido, o item “a” perguntava se os números formados pelos dois últimos algarismos eram divisíveis por quatro. O grupo respondeu que sim. O item “b” perguntava se os números que terminavam em “00” também eram divisíveis por quatro, eles mais uma vez responderam positivamente. A partir dessas observações, no item “c” os alunos deveriam descrever o critério para saber se um número é divisível por quatro. A Figura 26 mostra a resposta correta dada pelo grupo. Já o item “d” sugeria aos alunos que testassem esse critério para outros números afim de reafirmar a sua conjectura.

Figura 26 – Resposta do grupo E



Fonte: Elaboração própria, 2020.

A questão seguinte foi sobre o critério de divisibilidade por cinco e ficou sob a responsabilidade do grupo A. Essa questão apresentava os 30 primeiros números divisíveis por cinco. Foi destacado de azul o último algarismo de cada um desses números. O item “a” perguntava o padrão observado nesses algarismos. O grupo respondeu corretamente, ou seja, que sempre terminavam em zero ou em cinco. No item “b” os alunos deveriam encontrar os próximos números divisíveis por cinco a partir do 85 e verificar se o padrão observado anteriormente era repetido. Eles fizeram isso e chegaram à conclusão de que o padrão, de fato, se repetia. Daí, no item “c”, deveriam escrever, de acordo com as observações realizadas, qual o critério para saber se um número natural é divisível por cinco. O último item pedia aos alunos que testassem esse teste para outros números o que foi feito, apesar de terem usado apenas uma divisão. A figura 27 mostra as respostas do grupo aos itens “c” e “d”.

Figura 27 – Resposta do grupo A

c) Suas observações sugerem qual critério para saber se um número natural é divisível por 5? *quando acaba em 0 e 5.*

d) Teste esse critério para outros números.

$$\begin{array}{r} 1.055 \overline{) 5} \\ \underline{10} \\ 055 \\ \underline{50} \\ 055 \\ \underline{50} \\ 055 \\ \underline{50} \\ 055 \end{array}$$

Fonte: Elaboração própria, 2020.

A última parte da segunda atividade da intervenção reunia a investigação sobre os critérios de divisibilidade por 10, por 100 e por 1000. Designamos para realizar essa atividade o grupo D. Inicialmente a questão apresentava uma sequência de números divisíveis por 10, outra de números divisíveis por 100 e outra de números divisíveis por 1000. O item “a” questionava o padrão observado nesses números. O grupo respondeu: “que eles são de 10 em 10, de 100 em 100 e de 1000 em 1000”. Já o item “b” solicitava que escrevessem, de acordo com as observações, o critério para a divisibilidade de cada um deles e o item “c” que testassem esse critério em outros números.

Figura 28 – Resposta do grupo D

b) O padrão observado sugere quais critérios para saber se um número natural é divisível por 10, se é divisível por 100 e se é divisível por 1.000? *fm 10: 0, fm 100: 00, fm 1.000: 000.*

c) Teste esses critérios para outros números.

10: 10, 20, 30, 40, 50, ...
100: 100, 200, 300, 400, 500, ...
1.000: 1.000, 2.000, 3.000, 4.000, 5.000, ...

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Observamos na Figura 28 as respostas dadas à esses itens. Em seguida, solicitamos aos grupos que apresentassem aos colegas as conclusões que haviam chegado, para que todos pudessem entender os critérios de divisibilidade estudados. Com isso concluímos a segunda e maior atividade da nossa intervenção de forma bastante positiva.

Dando seguimento, selecionamos o grupo C para desenvolver a terceira atividade que teve como objetivo compreender o conceito de múltiplos de um número natural. Essa questão apresentava, inicialmente, a seguinte situação: “Suponhamos que a cantina da sua escola venda apenas uma combinação de lanche e que este custe 5 reais”. A investigação deveria acontecer a partir dessa situação. Para tanto, no item “a” foi pedido que os alunos investigassem, de acordo

com o número de lanches vendidos, qual o valor arrecadado pela dona da cantina. O grupo resolveu usar uma tabela para representar essa situação conforme exemplificado na Figura 29.

Figura 29 – Resposta do grupo C

a) Investigue de acordo com o número de lanches vendidos qual o valor arrecadado pela dona da cantina. Represente essa situação por meio, por exemplo, de uma tabela.

Dica: comece por zero, ou seja, considere, inicialmente, que não foi vendido nenhum lanche.

0	0×5	0
1	1×5	5
2	2×5	10
3	3×5	15
4	4×5	20
5	5×5	25

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Nessa tabela fica bem claro o pensamento utilizado por eles para investigar essa situação. No item “b” escreveram esse pensamento: “pra saber o valor arrecadado eu tive que multiplicar a quantidade vendida pelo valor do lanche”. Isso garante a validade da investigação. O item seguinte perguntava a conclusão que a observação da sequência numérica formada pelos valores arrecadados com a venda do lanche sugeria. À esse item os alunos responderam: “esses números são multiplicados por 5”, ou seja, com essa resposta conseguiram compreender quais são os múltiplos de cinco e como fazer para encontrá-los.

Nessa atividade observamos que os alunos sentiram dificuldade para iniciar a investigação. Constatamos que isso se deu por não terem conseguido uma maneira de registrar aquela situação. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 30), os registros escritos pedidos em uma investigação “constitui um desafio adicional para alunos desse nível de escolaridade, porque exige um tipo de representação que nunca utilizaram”. Corroborando com esse pensamento, sugerimos aos alunos que fizessem o uso de uma tabela. Notamos que quando conseguiram confeccioná-la o desenvolvimento da investigação continuou de forma mais ágil.

Enquanto o grupo C desenvolvia a atividade três, o grupo A fazia a investigação a respeito do conceito de divisor de um número natural, objetivo da quarta atividade da intervenção. De modo similar à atividade anterior, esta atividade também partiu de uma situação-problema, a saber: “*Alexandre gosta bastante de ler, ele acabou de comprar 18 livros novos e precisa acomodá-los em uma estante. Essa estante tem várias prateleiras onde é possível acomodar os livros de maneiras diferentes*”. Após lerem essa situação e refletirem

sobre ela, os alunos deveriam investigar de quantas formas diferentes Alexandre poderia acomodar os seus 18 livros mantendo sempre a mesma quantidade de livros em cada prateleira.

Figura 30 – Resposta do grupo A

a) Supondo que Alexandre pode acomodar esses livros em apenas uma prateleira, ou em duas, ou em três e assim sucessivamente, investigue de quantas formas diferentes ele pode acomodar os seus 18 livros mantendo sempre a mesma quantidade de livros em cada prateleira.

$$\begin{array}{r} 18/1 \\ -1 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18/2 \\ -18 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18/3 \\ -18 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18/4 \\ -16 \\ \hline 02 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18/5 \\ -15 \\ \hline 03 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18/6 \\ -18 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18/7 \\ -14 \\ \hline 04 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18/8 \\ -18 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 18/9 \\ -18 \\ \hline 0 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{r} 18/18 \\ -18 \\ \hline 0 \end{array}$$

b) É possível distribuir os livros de forma igualitária em todas as quantidades de prateleiras consideradas?

Não, porque não dá 4, 5, 7, 8 etc. não dá exata

c) Observando as quantidades de prateleiras nas quais foi possível distribuir os livros de forma igualitária, o que você pode concluir sobre esses números?

Que eles são divisíveis por 18.

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Como podemos observar na Figura 30, para fazer essa investigação os alunos dividiram 18 por todos os números menores que ele. Dessa maneira puderam responder no item “b” que só seria possível dividir os livros de forma igualitária se fosse utilizada(s) uma, duas, três, seis, nove ou dezoito prateleiras, pois apenas com esses números a divisão dá exata. Notamos essa resposta na Figura 30, assim como a conclusão dos alunos expressa no item “c”, que refletem o conceito dos divisores de um número natural.

O grupo E ficou responsável pela atividade cinco sobre números primos. Essa atividade pedia aos alunos que escrevessem os números do 2 ao 12 e circulassem os números primos. Em seguida, dos itens “a” ao “d”, os alunos deveriam investigar a relação matemática existente entre os números quatro, seis, oito e dez com os números primos dois, três e cinco como notamos na Figura 31. Observar essa relação era importante para que os alunos compreendessem que os números compostos são formados pelo produto de números primos e que por isso recebem esse nome, o qual significa primeiro. Como notamos na Figura 31 os alunos conseguiram chegar à essa conclusão no item “e”.

Figura 31 – Resposta do grupo E

5.2. Escreva os números de 2 a 12 e circule os números primos.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

a) Que relação matemática existe entre o número 4 e o número 2?
 $4 = 2 \times 2 = 4$

b) Que relação matemática existe entre o número 6 e os números 2 e 3?
 $6 = 2 \times 3 = 6$

c) Que relação matemática existe entre o número 8 e o número 2?
 $2 \times 2 \times 2 = 8$

d) Que relação matemática existe entre o número 10 e os números 2 e 5?
 $10 = 2 \times 5 = 10$

e) Observando as respostas às questões anteriores, a que conclusão você pode chegar?
 Que esse número não multiplicação de números primos
 1

Fonte: Elaboração própria, 2020.

A atividade seis teve como objetivo ensinar uma das formas de se encontrar o m.m.c. de dois números naturais. Essa forma é interessante para a nossa pesquisa, pois permite aos alunos realizarem uma investigação que os leva a compreensão desse conceito.

Figura 32 – Resposta do grupo B

ATIVIDADE 6 – O MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Fonte: Adaptado de Blanchini (2011, p. 102).

Responda:

a) Quais são os múltiplos de 6?
 0 - 6 - 12 - 18 - 24 - 30 - 36 - 42 - 48 - 54 - 60

b) Quais são os múltiplos de 9?
 0 - 9 - 18 - 27 - 36 - 45 - 54 - 63 - 72 - 81 - 90

c) Quais são os múltiplos de 6 também de 9?
 0 - 18 - 36 - 54.

d) Qual é o menor (mínimo) múltiplo comum de 6 e 9, diferente de zero?
 18

e) Investigue essa situação com outros números.

2 → 0 - 2 - 4 - 6 - 8 - 10 - 12 - 14 - 16 - 18 - 20
 5 → 0 - 5 - 10 - 15 - 20 - 25 - 30 - 35 - 40 - 45 - 50

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Conforme observamos na Figura 32, os alunos do grupo B tiveram que escrever alguns múltiplos do número seis, em seguida alguns múltiplos do número nove e por fim destacar os números que tanto são múltiplos seis como de nove. Com isso, deveriam observar qual era o menor desses múltiplos comuns. No último item da atividade os alunos poderiam investigar essa situação para outros números. E eles fizeram isso com os números dois e cinco, concluindo assim, que o m.m.c. entre eles é o número 10.

A última atividade da intervenção pedagógica teve a intenção de investigar uma das maneiras de se encontrar o m.d.c. entre dois números naturais (Figura 32). O grupo C ficou responsável por essa atividade. Nos moldes da atividade seis a atividade solicitava aos alunos que escrevessem os divisores do número 12 e os divisores do número 18. Em seguida, no item “c”, deveriam dizer quais os divisores de 12 que também são divisores de 18 e no item seguinte qual é o maior desses divisores comuns. No item “e” eles poderiam investigar essa situação para outros números. Como observamos na Figura 33, eles fizeram isso para os números 14 e 15 e conseguiram concluir que o m.d.c. entre esses números é o número um.

Figura 33 – Resposta do grupo C

ATIVIDADE 7 – O MAXIMO DIVISOR COMUM	
Fonte: Name (2019, p. 97)	
Responda:	
a) Quais são os divisores de 12?	1, 2, 3, 4, 6, 12
b) Quais são os divisores de 18?	1, 2, 3, 6, 9, 18
c) Quais são os divisores de 12 e também de 18?	1, 2, 3, 6,
d) Qual é o maior (máximo) divisor comum de 12 e 18?	6
e) Investigue essa situação com outros números.	14 → 1, 2, 7, 15 →

Fonte: Elaboração própria, 2020.

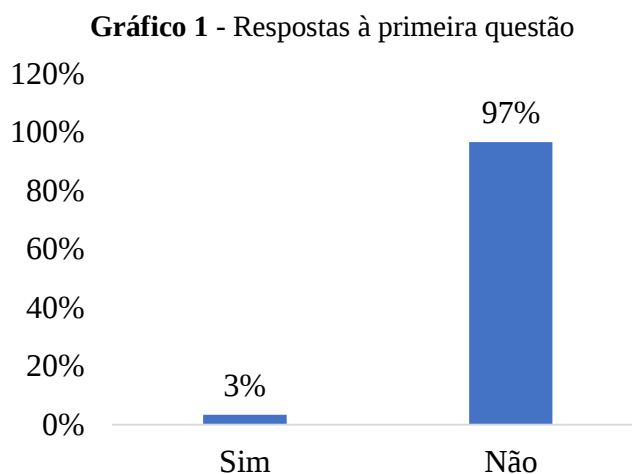
Como as atividades três, quatro, cinco, seis e sete foram realizadas praticamente ao mesmo tempo por termos divididos elas entre os grupos, foi possível estipular um tempo para que os grupos conseguissem desenvolvê-las. Quando observamos que todos haviam concluído abrimos espaço para mais um momento de discussão, no qual os alunos puderam compartilhar

as suas atividades e também as suas conclusões. Nesse momento também buscamos questioná-los sobre as atividades realizadas. Um dos alunos disse: “é bem diferente e legal”. Dessa maneira, acreditamos que foi possível consolidar os conceitos estudados, porém, mais que isso acreditamos ter conseguido colocar os alunos no centro do processo de ensino-aprendizagem, um dos maiores objetivos da Investigação Matemática e da nossa pesquisa.

4.2 Análise do questionário avaliativo

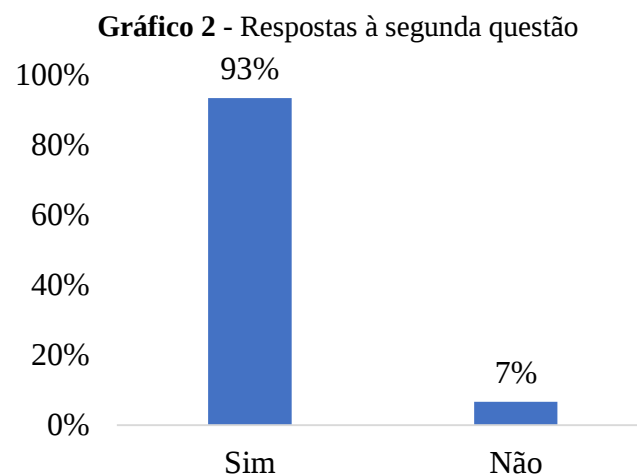
Após concluirmos todas as atividades, os alunos foram convidados a responder um questionário contendo quatro perguntas abertas e duas perguntas fechadas (Apêndice B). Esse questionário foi elaborado com o objetivo de investigar se as atividades contribuíram para aprendizagem dos alunos, se já haviam participado de atividades do tipo, a sensação sentida por eles ao realiza-las, entre outros aspectos. Consideramos esse instrumento como de grande valor para atingirmos o objetivo da nossa pesquisa, pois por meio dele os alunos puderam se posicionar de forma anônima, o que garantiu um resultado mais expressivo.

Diante disso, a primeira questão teve como objetivo verificar se os alunos já haviam participado de atividades investigativas. Como podemos observar no gráfico 1 abaixo, apenas três por cento dos alunos tinha tido contato com atividades desse tipo. Antes mesmo do questionário ser entregue havíamos feito essa pergunta e um dos alunos, de fato, respondeu que já tinha feito uma atividade semelhante na escola em que estudava anteriormente.



Fonte: Elaboração própria, 2020.

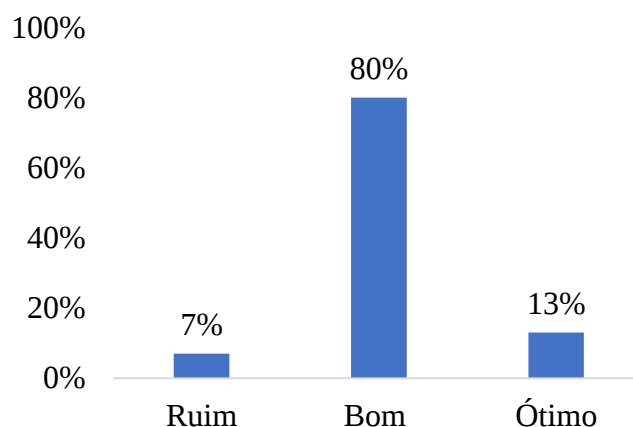
Esse dado reflete a carência existente de trabalhos nesta perspectiva apesar de este ser indicado por documentos como os PCN (1998) e a BNCC (2018), além de por diversos pesquisadores. A segunda questão buscava saber se os alunos acharam importante estudar os conteúdos abordados nas atividades. O gráfico 2 abaixo apresenta as respostas dos alunos à essa questão.



Fonte: Elaboração própria, 2020.

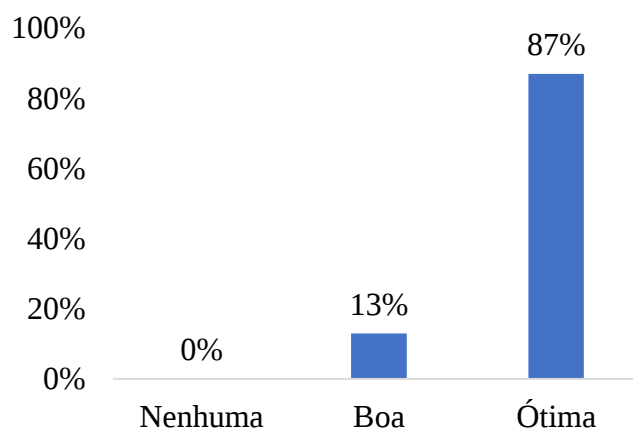
Como podemos observar apenas sete por cento dos alunos responderam não à esse questionamento o que significa que a maior parte da turma considerou importante o estudo dos conteúdos. Esses dados são interessantes, pois reafirmam a relevância dos conteúdos abordados durante a intervenção. Isso é confirmado por Chaparin (2010) que ao citar Campbell e Zazkis (1996) e Resende (2007) afirma a relevância que “[...] tem os conceitos pertinentes a divisibilidade no desenvolvimento do pensamento matemático, nas atividades investigativas em qualquer nível de ensino [...]” (CHAPARIN, 2010, p. 6).

A terceira questão perguntava sobre o desempenho dos alunos. Foi dado três opções: *ruim*, *bom* ou *ótimo*. Como observamos no gráfico 3, apenas sete por cento dos alunos consideraram ruim o seu desempenho, outros 80 por cento responderam ter tido um bom desempenho, enquanto os 13 por cento restantes afirmaram ter tido um ótimo desempenho durante as atividades. Analisando esses dados refletimos sobre a importância do trabalho em grupo, pois conseguiu ajudar a grande maioria da turma a ter tido um desempenho positivo.

Gráfico 3 - Respostas à terceira questão

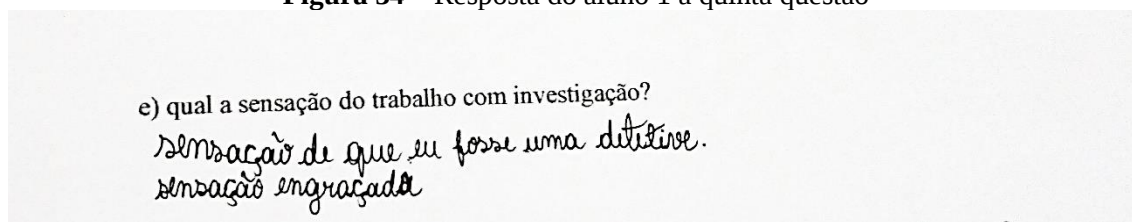
Fonte: Elaboração própria, 2020.

A quarta questão teve como objetivo verificar as contribuições da atividade para aprendizagem dos alunos. Para isso eles poderiam escolher entre três opções: *nenhuma*, *boa* ou *ótima*. De acordo com o gráfico 4, todos os alunos consideraram que as atividades contribuíram para sua aprendizagem e, portanto, as respostas variaram entre *boa* e *ótima*.

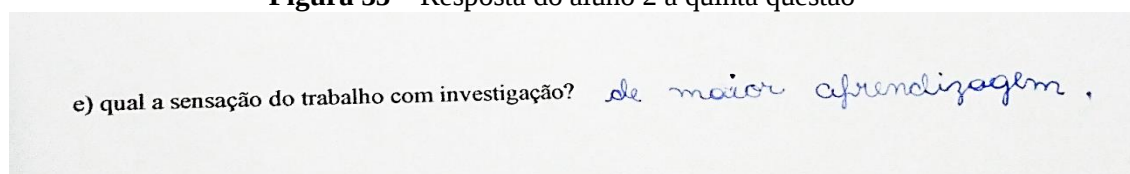
Gráfico 4 - Respostas à quarta questão

Fonte: Elaboração própria, 2020.

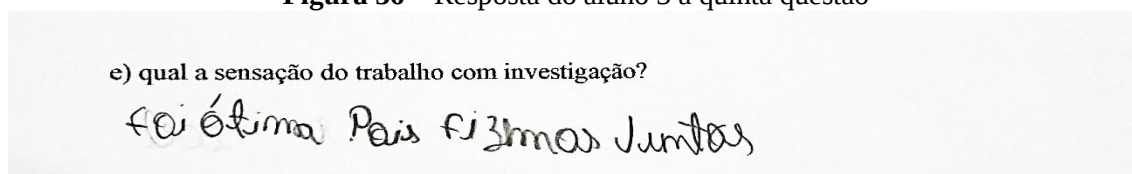
Ficamos bastante satisfeitos com esse resultado, pois ele responde de forma direta a pergunta que motivou a nossa pesquisa, ou seja, afirma que o uso da Investigação Matemática como metodologia de pesquisa pode contribuir para aprendizagem dos alunos. As respostas dos alunos às próximas questões reafirmam essa afirmativa. A quinta pergunta do questionário buscou saber qual foi a sensação dos alunos durante as atividades. As figuras a seguir mostram as respostas de três alunos à essa questão.

Figura 34 – Resposta do aluno 1 à quinta questão

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 35 – Resposta do aluno 2 à quinta questão

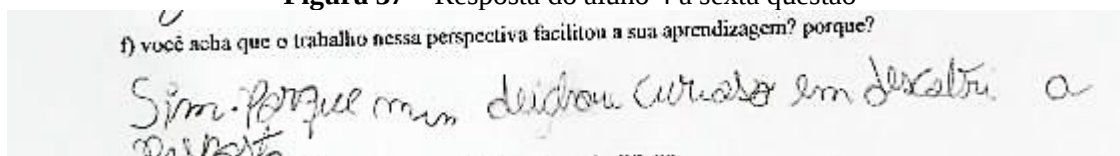
Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 36 – Resposta do aluno 3 à quinta questão

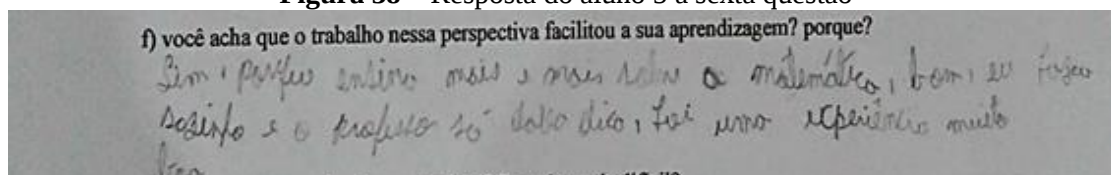
Fonte: Elaboração própria, 2020.

As respostas acima demonstram o entusiasmo dos alunos para com as atividades. Comparar a sua atuação com a atuação de um detetive mostra que o aluno 1 conseguiu encarar as atividades da maneira correta, afinal um detetive também faz um trabalho investigativo. Além disso, o aluno 2 reafirma em sua resposta as contribuições dessa metodologia para aprendizagem. Destacamos também a resposta do aluno 3, pois confirma a validade do trabalho em grupo, a qual é percebida pelos próprios alunos e está de acordo com as orientações dos PCN (1998).

A última pergunta do questionário quis revelar se os alunos achavam ou não que o trabalho com a Investigação Matemática facilitou a aprendizagem deles. Todas as respostas foram positivas, mais iremos destacar duas por apresentar aspectos interessantes para pesquisa. Na Figura 37 percebemos que as atividades deixou o aluno curioso para descobrir as respostas.

Figura 37 – Resposta do aluno 4 à sexta questão

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Figura 38 – Resposta do aluno 5 à sexta questão

Fonte: Elaboração própria, 2020.

Com essa afirmação nos perguntamos: será que limitar o ensino-aprendizagem da Matemática à maneira clássica, na qual os alunos apenas reproduzem o que o professor fala, consegue deixar os alunos curiosos? Não podemos afirmar nem que sim nem que não, mais independente disso, acreditamos que a resposta desse aluno revela para nós que ao menos utilizar metodologias diferentes como a que utilizamos, pode sim despertar o interesse dos alunos por deixá-los curiosos. Já na Figura 38 observamos o destaque do aluno para o fato de que ele fez a atividade sozinho e que o professor apenas deu dicas, sendo, assim, uma experiência muito boa para ele.

Dessa maneira, constatamos que as atividades desenvolvidas ao longo da intervenção pedagógica proporcionaram resultados positivos para os alunos, revelando, assim, que o trabalho numa perspectiva investigativa pode trazer contribuições relevantes para aprendizagem, objetivo maior de qualquer professor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa aqui relatada buscou verificar as contribuições que o uso da Investigação Matemática pode proporcionar ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática, especificamente dos conceitos em torno da divisibilidade dos números naturais. Para tanto elaboramos e aplicamos algumas atividades nesta perspectiva em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental. Ao analisar o desenvolvimento de toda a intervenção pedagógica, conseguimos observar diversos benefícios do trabalho nessa perspectiva. Como exemplo desses benefícios temos: um maior interesse dos alunos pelo conteúdo, estímulo ao trabalho em equipe e à comunicação oral e escrita.

Inicialmente, os alunos acharam estranho o tipo de atividade que havia sido proposto. Esse fato é normal, pois eles não estavam habituados àquela maneira de estudar. Entretanto, logo começamos a perceber que esse choque inicial foi sendo superado e que os alunos passaram a compreender o sentido do trabalho. Com isso, consideramos que as atividades se deram de maneira positiva. Além disso, também concluimos a importância de se ter tempo disponível para atividades desse tipo. O tempo é necessário para que os alunos possam observar, refletir, conjecturar e justificar as suas conclusões. Não podemos imaginar um trabalho investigativo sendo realizado às pressas, isso tiraria todo o seu sentido, fazendo os alunos se sentirem pressionados e, portanto, desmotivados para o trabalho.

Ainda com relação às atividades, constatamos que o trabalho investigativo propicia um ambiente de ensino bastante diferente do comum, pois o professor deixa de ser o agente principal do ensino e passa a ser um mediador da atuação dos alunos, os quais sempre devem estar no centro do processo de ensino-aprendizagem. Esse fato nos remete à necessidade de se estabelecer práticas inovadoras por parte dos professores que sejam capazes de despertar o interesse dos alunos. Contudo, não podemos deixar de salientar que para atingir tal objetivo, é preciso dar condições à esses profissionais, afinal fazer uso de metodologias diferentes como a Investigação Matemática requer, por exemplo, um ambiente apropriado e, principalmente, tempo tanto para planejar as atividades quanto para executá-las. Nesse sentido, concluimos que o desenvolvimento das atividades atingiu as nossas perspectivas.

A respeito dos resultados obtidos com o questionário avaliativo, inferimos que, de maneira geral, as respostas foram satisfatórias e deixaram nítidos o posicionamento dos alunos com relação ao que foi perguntando. Destacamos principalmente o fato de que todos os alunos consideraram que as atividades contribuíram para a sua aprendizagem e que proporcionaram sensações agradáveis, próprias de uma atividade investigativa. Além disso, todos concordaram que os estudos propostos facilitaram a aprendizagem. Essas respostas atreladas aos resultados obtidos com a aplicação das atividades, nos fazem concluir que, de fato, o uso da Investigação Matemática como metodologia facilitou o ensino-aprendizagem do nosso público-alvo. Com isso, também podemos considerar que esse tipo de abordagem pode ter resultados positivos no trabalho com outros conteúdos matemáticos e em outros níveis de ensino.

Uma vez constatada a validade e importância da metodologia estudada nesta pesquisa, fica evidente a necessidade de que, tanto os professores em atuação como os que no futuro desempenharão essa função, busquem se apropriar das propostas dela assim como de outras, afinal queremos ser capazes de articular variadas formas de ensinar para que, assim, alcancemos o nosso maior objetivo: a aprendizagem.

REFERÊNCIAS

- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: ensino fundamental. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: anos finais do Ensino Fundamental (3º e 4º série Matemática). Brasília: MEC/SEF, 1998.
- CHAPARIN, R. O. **Concepções de Divisibilidade de Alunos do 1º ano do Ensino Médio sob o ponto de vista da Teoria APÓS**. 2010. 148f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- DANTAS, F. P. S. **Congruência e divisibilidade**. 2016. 49f. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó.
- DOMBROSKI, M. C.; BELINE, W. Contribuições da investigação matemática no processo de ensino e aprendizagem de alunos do ensino médio. *In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2014, Campo Mourão. **atas...**
- FIORENTINI, D. Formação de professores a partir da vivência e da análise de práticas exploratório-investigativas e problematizadoras de ensinar e aprender matemática. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, Costa Rica, n. 10, p.63-78, 2012.
- GAY, M. R. G.; SILVA, W. R. **Araribá plus**: matemática. 6º ano. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2018.
- GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: editora da UFRGS, 2009.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6 ed. São Paulo: Atlas, 2008.
- GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI JR, J. R. **A conquista da matemática**. 6º ano. São Paulo: FTD, 2012.
- LAMONATO, M. **Investigando geometria**: aprendizagens de professores da educação infantil. São Carlos. 2007. 244p. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2007.
- LIMA, T. C. de; MIRANDA, D. F. de. **Investigações matemáticas na sala de aula**: relato de uma experiência. Ouro Preto, MG: Instituto Federal de Minas Gerais, 2014. Disponível em: http://edumat.ouropreto.ifmg.edu.br/wpcontent/uploads/sites/7/2014/10/investigacoes_matematicas_em_salas_de_aula_RE.pdf. Acesso em: 20 fev. 2020.
- MINATELI, M. Â. D. dos S.; SANDER, G. P.; MENEGHETTI, R. C. G. Investigação Matemática: uma proposta de atividades investigativas a partir de questões do SARESP. *In: CAPELLINI, V. L. M.; et al. (Orgs.). Ensino e Aprendizagem na Educação Básica: desafios curriculares*. v. 8, Bauru: FC/UNESP, 2015.

NAME, M. A. **Tempo de matemática**. 6º ano. 4. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

NICOLI, C. G. Tarefas de investigação para o ensino-aprendizagem das propriedades de divisibilidade dos números naturais. *In: Governo do estado do Paraná. O professor PDE e os desafios da escola paranaense*: produção didático-pedagógica. v. 11. Londrina: SEED/SUED/PDE, 2011.

PARAIBA. Secretaria de Educação e Cultura. Gerência Executiva de Educação Infantil e Ensino Fundamental. **Referenciais Curriculares do Ensino Fundamental**: Matemática. João Pessoa: SEC/Grafset, 2010.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2 ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A



**Universidade Federal da Paraíba
Campus IV – Litoral Norte
Centro de Ciências Aplicadas e Educação
Departamento de Ciências Exatas
Licenciatura em Matemática**

Pesquisador: Aleff Herminio da Silva

Orientadora: Prof.^a Dra. Claudilene Gomes da Costa

Estudando Divisibilidade a partir de atividades investigativas

Equipe: _____

ATIVIDADE 1 – DIVISIBILIDADE

Observe com atenção a situação a seguir.

A secretaria de ação social de certo município pretende realizar uma apresentação com o coral de idosos da instituição. Para tanto, a professora responsável pelo coral vai dividir os 28 participantes em equipes de exatamente 5 ou exatamente 4 alunos, de modo que nenhum aluno fique sem equipe.

a) Investigue como a professora deve organizar essa turma para que todas as equipes tenham a mesma quantidade de pessoas.

b) A que conclusões você chegou com relação ao número de participantes do coral e as possíveis quantidades de participantes em cada equipe?

c) Caso a professora mude de ideia e resolva modificar a quantidade de pessoas em cada equipe, mas garantindo que essa quantidade seja a mesma para todos os grupos, investigue e represente de quantas formas diferentes a professora poderia organizar essa turma.

ATIVIDADE 2 – CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Fontes: Gay e Silva (2018, p. 124-126) e Nicolle (2011, p. 10).

❖ CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 2

Observe alguns números divisíveis por 2.

0	2	4	6	8
10	12	14	16	18
20	22	24	26	28
30	32	34	36	38

- Que padrão você observa no último algarismo desses números?
- Esses números são pares?
- Se quisermos encontrar os próximos números divisíveis por 2, basta adicionar sucessivamente 2 ao número anterior. Com o auxílio de uma calculadora, a partir do 38 vá adicionando 2 sucessivamente para observar os próximos números divisíveis por 2. O padrão observado para os números acima continua válido para os próximos números divisíveis por 2 que você obteve?
- A investigação feita sugere qual critério para saber se um número natural é divisível por 2?
- Teste esse critério para outros números.

❖ CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 3

Observe alguns números divisíveis por 3 a partir do 81.

81	84	87	90	93	96	99
102	105	108	111	114	117	120
123	126	129	132	135	138	141
144	147	150	153	156	159	162

- A soma dos algarismos de 138 é $1 + 3 + 8 = 12$, e 12 é um número divisível por 3. Calcule a soma dos algarismos de cada um dos números divisíveis por 3 acima. Essas somas são divisíveis por 3?

b) Os números 245 e 780 são divisíveis por 3? Calcule a soma dos algarismos de cada um desses números e verifique se essa soma é divisível por 3.

c) Que padrão você observou nesses números? Esse padrão sugere qual critério para saber se um número natural é divisível por 3?

d) Teste esse critério para outros números.

❖ CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 6

Observe os numerais no quadro abaixo:

108	203	106	204	107	132	144
97	402	115	208	111	240	114
102	95	150	145	231	200	171
172	162	605	204	206	177	138

a) Procure organizar os números dessa tabela com algum critério matemático. (Indique o critério utilizado).

b) Copie desta lista os números divisíveis por 2.

c) Copie agora todos os números divisíveis por 3.

d) Retire agora da tabela todos os divisíveis por 6.

e) Olhando para o resultado das três questões anteriores, o que você conclui?

f) Investigue a sua conclusão em outros números.

❖ CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 9

Observe os números a seguir

.

81 108 126 306 450 567 2.259 2.358 4.104 4.932

a) Esses números são divisíveis por 9?

b) A soma dos algarismos de 4.932 é $4 + 9 + 3 + 2 = 18$, e 18 é um número divisível por 9. Isso acontece para todos os números acima?

c) A investigação feita sugere qual critério para saber se um número natural é divisível por 9?

d) Teste esse critério para outros números.

❖ CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 4

Observe alguns números divisíveis por 4 a partir do 100.

100	104	108	112	116	120	124	128
132	136	140	144	148	152	156	160
164	168	172	176	180	184	188	192
196	200	204	208	212	216	220	224

a) Os dois dígitos destacados em azul em cada número divisível por 4 acima formam um número. Esse número é divisível por 4?

b) Os números que terminam em 00 são divisíveis por 4?

c) Suas observações sugerem qual critério para saber se um número natural é divisível por 4?

d) Teste esse critério para outros números.

❖ CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 5

Observe alguns números divisíveis por 5.

0	5	10	15	20	25
30	35	40	45	50	55
60	65	70	75	80	85

a) Que padrão você observou no último algarismo desses números?

- b)** Encontre os próximos dez números divisíveis por 5 a partir do 85. O padrão observado para os números acima continua válido para os próximos números divisíveis por 5?
- c)** Suas observações sugerem qual critério para saber se um número natural é divisível por 5?
- d)** Teste esse critério para outros números.

❖ **CRITÉRIO DE DIVISIBILIDADE POR 10, por 100 e por 1.000.**

Observe alguns números divisíveis por 10, por 100 e por 1.000.

Números divisíveis por 10:

10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 ...

Números divisíveis por 100:

100 200 300 400 500 600 700 800 900 1.000 1.100 ...

Números divisíveis por 1.000:

1.000 2.000 3.000 4.000 5.000 6.000 7.000 8.000 9.000 10.000 11.000 ...

- a)** Que padrão você observou nos números divisíveis por 10 acima? E nos divisíveis por 100? E nos divisíveis por 1.000?
- b)** O padrão observado sugere quais critérios para saber se um número natural é divisível por 10, se é divisível por 100 e se é divisível por 1.000?
- c)** Teste esses critérios para outros números.

ATIVIDADE 3 – MÚLTIPLOS DE UM NÚMERO NATURAL

Fonte: Adaptado de Gay e Silva, 2018.

Observe a situação abaixo.

Suponhamos que a cantina da sua escola venda apenas uma combinação de lanche e que este custe 5 reais.

- a)** Investigue de acordo com o número de lanches vendidos qual o valor arrecado pela dona da cantina. Represente essa situação por meio, por exemplo, de uma tabela

Dica: comece por zero, ou seja, considere, inicialmente, que não foi vendido nenhum lanche.

- b) De acordo com a sua observação, existe alguma relação entre os valores arrecadados com a venda dos lanches, o número de lanches vendidos e o valor de cada lanche? Se sim, qual?
- c) Observando a sequência numérica formada pelos valores arrecadados com a venda dos lanches, a que conclusão você pode chegar?

ATIVIDADE 4 – DIVISORES DE UM NÚMERO NATURAL

Fonte: Adaptado de Gay e Silva, 2018.

Observe a situação a seguir.

Alexandre gosta bastante de ler, ele acabou de comprar 18 livros novos e precisa acomodá-los em uma estante. Essa estante tem várias prateleiras onde é possível acomodar os livros de maneiras diferentes.

- a) Supondo que Alexandre pode acomodar esses livros em apenas uma prateleira, ou em duas, ou em três e assim sucessivamente, investigue de quantas formas diferentes ele pode acomodar os seus 18 livros mantendo sempre a mesma quantidade de livros em cada prateleira.
- b) É possível distribuir os livros de forma igualitária em todas as quantidades de prateleiras consideradas?
- c) Observando as quantidades de prateleiras nas quais foi possível distribuir os livros de forma igualitária, o que você pode concluir sobre esses números?

ATIVIDADE 5 – NÚMEROS PRIMOS

Escreva os números do 2 ao 12 e circule os números primos.

- a) Que relação matemática existe entre o número 4 e o número 2?
- b) Que relação matemática existe entre o número 6 e os números 2 e 3?
- c) Que relação matemática existe entre o número 8 e o número 2?
- d) Que relação matemática existe entre o número 10 e os números 2 e 5?
- e) Observando as respostas às questões anteriores, a que conclusão você pode chegar?

Fonte: Adaptado de Centurión e Jakubovic (2015, p. 121).

ATIVIDADE 6 – O MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM
--

Fonte: Adaptado de Bianchini (2011, p. 102).

Responda:

- a) Quais são os múltiplos de 6?
- b) Quais são os múltiplos de 9?
- c) Quais são os múltiplos de 6 também de 9?
- d) Qual é o **menor** (mínimo) **múltiplo comum** de 6 e 9, diferente de zero?
- e) Investigue essa situação com outros números.

ATIVIDADE 7 – O MAXIMO DIVISOR COMUM

Fonte: Adaptado de Name (2019, p. 97)

Responda:

- a) Quais são os divisores de 12?
- b) Quais são os divisores de 18?
- c) Quais são os divisores de 12 e também de 18?
- d) Qual é o **maior** (máximo) **divisor comum** de 12 e 18?
- e) Investigue essa situação com outros números.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**. 6ºano. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.
GAY, M. R. G.; SILVA, W. R. **Araribá plus: matemática**. 6º ano. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, Benedicto; GIOVANNI JR, J. R. **A conquista da matemática**. 6º ano. São Paulo: FTD, 2012.

NAME, M. A. **Tempo de matemática**. 6º ano. 4. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

NICOLI, C. G. Tarefas de investigação para o ensino-aprendizagem das propriedades de divisibilidade dos números naturais. *In*: Governo do estado do Paraná. **O professor PDE e os desafios da escola paranaense**: produção didático-pedagógica. v. 11. Londrina: SEED/SUED/PDE, 2011.

APÊNDICE B

**Universidade Federal da Paraíba
Campus IV – Litoral Norte
Centro de Ciências Aplicadas e Educação
Departamento de Ciências Exatas
Licenciatura em Matemática**

Pesquisador: Aleff Herminio da Silva

Orientadora: Prof.^a Dra. Claudilene Gomes da Costa

ESTUDANDO DIVISIBILIDADE A PARTIR DE ATIVIDADES INVESTIGATIVAS**Questionário Avaliativo**

- a) Já haviam participado de atividades de investigação? (☐) Sim (☐) Não
- b) Você acha importante o estudo de conteúdos como os que foram abordas nessas atividades? (☐) Sim (☐) Não
- c) Como avalia o seu desempenho? (☐) Ruim (☐) Bom (☐) Ótimo
- d) Como foi a contribuição das atividades para a sua aprendizagem?
(☐) Nenhuma (☐) Boa (☐) Ótima
- e) Qual a sensação do trabalho com investigação?
- f) Você acha que o trabalho nessa perspectiva facilitou a sua aprendizagem? Porque?