

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Alessandro Pereira Marcelino da Silva

**O uso do *software* GeoGebra como recurso metodológico no
processo de ensino e aprendizagem de Retas e Planos**

Rio Tinto – PB
2020

Alessandro Pereira Marcelino da Silva

**O uso do *software* GeoGebra como recurso metodológico no
processo de ensino e aprendizagem de Retas e Planos**

Trabalho Monográfico apresentado à
Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática como requisito parcial para obtenção
do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Claudilene Gomes da
Costa

Rio Tinto – PB
2020

S586u Silva, Alessandro Pereira Marcelino da.

O uso do software GeoGebra como recurso metodológico no processo de ensino e aprendizagem de Retas e Planos / Alessandro Pereira Marcelino da Silva. - João Pessoa, 2020.
79 f. : il.

Orientação: Claudilene Gomes da Costa.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCAE.

1. Software. 2. GeoGebra. 3. Geometria Analítica. 4. Retas. 5. Planos. 6. Ensino da Matemática. I. Costa, Claudilene Gomes da. II. Título.

UFPB/BC

Alessandro Pereira Marcelino da Silva

**O uso do *software* GeoGebra como recurso metodológico no
processo de ensino e aprendizagem de Retas e Planos**

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática
como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

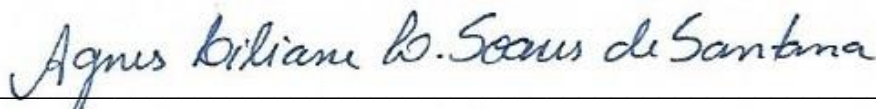
Orientadora: Profa. Dra. Claudilene Gomes da Costa

Aprovado em: 03 / 04 / 2020

BANCA EXAMINADORA



Profa. Dra. Claudilene Gomes da Costa (Orientadora) – UFPB/DCX



Prof. Ma. Agnes Liliane Lima Soares de Santana – UFPB/DCX



Prof. Ma. Surama Santos Ismael da Costa – UFPB/DCX

Dedico este trabalho aos meus pais, Rizoneide Pereira da Silva e Ivanildo Marcelino da Silva, e à minha querida tia Rizalva Pereira da Silva, os quais, em toda a minha vida, são um exemplo de base, sabedoria e carinho. Dedico também a Marlene Maria Pereira da Silva e José Valdecir da Silva, meus avós maternos, os quais são responsáveis por edificar boa parte do meu senso moral e de civismo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus; por me dar a dádiva da vida, da sabedoria, do livre arbítrio e, ainda, por me conceder um bom discernimento e uma boa saúde para encarar este mundo repleto de incertezas.

Agradeço aos meus pais, Rizoneide Pereira da Silva e Ivanildo Marcelino da Silva, por serem a minha base, por terem me guiado em todas as fases da minha vida e, acima de tudo, por sempre estarem dispostos a fazerem o que for possível para garantir o meu bem estar.

A minha tia Rizalva Pereira da Silva, que sempre esteve presente nos momentos mais importantes da minha vida e que, de certa forma, me influenciou a optar pela carreira da docência.

Aos meus amigos, que tive a sorte de conhecer no decorrer da caminhada da licenciatura, Nathalia Batista, Douglas Régis, Felipe Coutinho e Wendson César, os quais compartilharam de muitos momentos de angústias e, também, várias ocasiões de alegria. Sou muito grato a Deus por ter colocado vocês na minha vida.

Aos meus amigos da minha querida cidade de Curral de Cima, Francinaldo Soares, Francicleide Taysa do Nascimento e Vinícius Lisboa, pessoas que tiveram uma fundamental importância na minha jornada na universidade.

Agradeço, a Prof.^a Dr.^a Cristiane Fernandes de Souza, a qual tive a honra e privilégio de trabalhar junto ao Programa Residência Pedagógica, e em várias disciplinas do curso, tornando-se um referencial de conduta. Sou grato por ter acreditado na minha capacidade, mesmo nos momentos em que mais duvidei de mim mesmo.

Agradeço aos professores Hélio Pires de Almeida, Agnes Soares de Santana, Graciana Dias, Jamilson Campos, Fabrício Lima, Ivonaldo Leite, Shirley Targino e Lusival Barcellos, que contribuíram de maneira decisiva na minha formação como matemático, profissional da docência, e como um ser humano.

Agradeço imensamente a Prof.^a Dr.^a Claudilene Gomes da Costa, a qual tive a honra de ser orientando, não apenas deste trabalho de conclusão de curso, mas também de alguns projetos de monitoria, por ter confiado em mim e na proposta apresentada, por toda paciência, palavras e atos de apoio e por me incentivado desde as épocas da disciplina de Argumentação Matemática. Sou muito grato por ter conhecido pessoas como você nessa caminhada, e por ter sido você a pessoa que me ajudou a construir o epílogo desta parte da minha vida.

“Ninguém pode pisar em tua liberdade
Grite forte se quiserem te calar
Nada pode te deter se você tem fé [...]

Dulce Maria

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo geral elaborar, aplicar e avaliar uma proposta de estudo que viesse a facilitar a aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica, empregando o GeoGebra como recurso didático. Para tal, o estudo foi desenvolvido com discentes da disciplina Introdução à Álgebra Linear, do curso de Licenciatura em Matemática do Campus IV da Universidade Federal da Paraíba, na cidade de Rio Tinto – Paraíba, surgindo como um elemento apoiador perante as dificuldades de aprendizagem enfrentadas pelos discentes no estudo de retas e planos, na disciplina Cálculo Vetorial e Geometria Analítica. A metodologia empregada no desenvolvimento dessa pesquisa caracteriza-se, no tocante aos objetivos, como exploratória e descritiva. Optamos por utilizar o procedimento técnico de estudo de caso, e uma abordagem qualitativa. Atividades realizadas com o auxílio do GeoGebra e um questionário diagnóstico contendo quinze questões fechadas e uma questão aberta, foram os instrumentos utilizados na coleta de dados da pesquisa. Em relação aos resultados, observou-se que os discentes, mesmo em um curso de Licenciatura em Matemática, apresentam dificuldades sensíveis na aprendizagem de conceitos da Geometria Analítica, principalmente no que se refere à conexão das manipulações algébricas no estudo de posições relativas de retas e planos com o comportamento do gráfico desses objetos geométricos. Contudo, o uso de *software*, em específico o GeoGebra, se caracterizam como uma ferramenta que contribui positivamente para que tais dificuldades sejam superadas. Observou-se, concomitantemente, que o GeoGebra facilitou a visualização gráfica de retas e planos, assim permitindo o estudo de propriedades das equações desses objetos e associar tais propriedades aos gráficos de tais objetos. Além disso, os discentes puderam emitir sua opinião quanto ao uso de *softwares* em outros conceitos da Geometria Analítica, quanto em outras disciplinas partícipes do currículo do curso.

Palavras-chave: *Software*. GeoGebra. Geometria Analítica. Retas. Planos. Ensino da Matemática.

ABSTRACT

The present work had as general objective to elaborate, apply and evaluate a study proposal that would facilitate the learning of Analytical Geometry concepts, using GeoGebra as a didactic resource. To this end, the study was developed with students of the discipline Introduction to Linear Algebra, from the Mathematics Degree course at Campus IV of the Federal University of Paraíba, in the city of Rio Tinto - Paraíba, emerging as a supporting element in the face of the learning difficulties faced by students in the study of lines and planes, in the discipline Vector Calculation and Analytical Geometry. The methodology used in the development of this research is characterized, with regard to the objectives, as exploratory and descriptive. We chose to use the technical case study procedure, and a qualitative approach. Activities carried out with the help of GeoGebra and a diagnostic questionnaire containing fifteen closed questions and one open question, were the instruments used in the collection of research data. Regarding the results, it was observed that the students, even in a Mathematics Degree course, present sensitive difficulties in the learning of Analytical Geometry concepts, mainly with regard to the connection of algebraic manipulations in the study of relative positions of lines and planes with the behavior of the graph of these geometric objects. However, the use of *software*, specifically GeoGebra, is characterized as a tool that contributes positively so that these difficulties are overcome. It was observed, at the same time, that GeoGebra facilitated the graphical visualization of lines and planes, thus allowing the study of properties of the equations of these objects and associating such properties to the graphics of such objects. In addition, the students were able to express their opinion regarding the use of *software* in other concepts of Analytical Geometry, as well as in other disciplines participating in the course curriculum.

Keywords: *Software*. GeoGebra. Analytical Geometry. Lines. Plans. Mathematics teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tela Inicial do GeoGebra	27
Figura 2 – Barra de Menus e Barra de Ferramentas do GeoGebra.....	27
Figura 3 – Representação gráfica da reta $X = (1,2, -3) + t(1,1, -1)$	32
Figura 4 – Representação gráfica da reta que passa pelo ponto $A(2,2, -3)$ e que tem a direção do vetor $d = (2,1, -3)$	33
Figura 5 – Representação gráfica das retas $r: X = (2,1,2) + t(2,2, -3)$ e $s: X = (-3, -1,4) + t(-4, -4,6)$	34
Figura 6 – Representação gráfica das retas $r: X = (1,3,0) + t(-1,2,1)$ e $s: X = (0,5,1) + t(3, -6, -3)$	35
Figura 7 – Representação gráfica das retas $r: X = (2, -1,1) + t(1,2, -1)$ e $s: X = (1,11, -8) + t(-2,3, -3)$	36
Figura 8 – Representação gráfica das retas $r: X = (-1,2,1) + t(1,4,2)$ e $s: X = (7,4, -3) + t(3,2,4)$	37
Figura 9 – Representação gráfica do plano $4x + y - 3z + 2 = 0$	38
Figura 10 – Representação gráfica do plano que contém P e é paralelo a $v = (1,1, -1)$ e $u = (3,2, -1)$	39
Figura 11 – Representação gráfica dos planos $x + 2y + 3z + 2 = 0$ e $-3x - 6y - 9z + 15 = 0$	40
Figura 12 – Representação gráfica dos planos $2x + y - 3z + 2 = 0$ e $-4x - 2y + 6z - 4 = 0$	41
Figura 13 – Representação gráfica dos planos $x + 2y + 3z + 2 = 0$ e $3x - 6y + 4z + 2 = 0$	42
Figura 14 – Representação gráfica da reta de equação vetorial $X = (1,2,3) + t(0,0, -6)$	44
Figura 15 – Representação gráfica das retas r_1 e s_1	44
Figura 16 – Representação gráfica das retas r_2 e s_2	45
Figura 17 – Representação gráfica do plano π e do plano XY	46
Figura 18 – Captura da tela do aluno A, na resolução da atividade 4	47
Figura 19 – Representação gráfica dos planos π_2 e β_2	48
Figura 20 – Representação gráfica dos planos π_3 e β_3	49

LISTA DE TABELAS E GRÁFICOS

Tabela 1 – Questionamentos acerca da informatização do ambiente de ensino.....	50
Tabela 2 – Questionamentos acerca dos <i>softwares</i> conhecidos pelos discentes	50
Tabela 3 – Benefícios do <i>software</i> GeoGebra	51
Tabela 4 – Contribuições do <i>software</i> GeoGebra no estudo de retas e planos.....	53
Gráfico 1 – Opinião dos discentes acerca do uso do GeoGebra no estudo das retas	52
Gráfico 2 – Opinião dos discentes acerca do uso do GeoGebra no estudo dos planos	52
Gráfico 3 – Opinião dos discentes acerca do estudo de retas e planos.....	54

LISTA DE ABREVIATURAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CCAIE	Centro de Ciências Aplicadas e Educação
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PPP	Projeto Político Pedagógico
RCEM-PB	Referenciais Curriculares para o Ensino Médio da Paraíba
UFPB	Universidade Federal da Paraíba

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.2 Problemática e Justificativa	14
1.3 Objetivos.....	17
1.3.1 Objetivo Geral	17
1.3.2 Objetivos Específicos	17
2 REVISÃO DE LITERATURA.....	17
2.1 Contexto histórico	17
2.2 O que dizem os documentos oficiais sobre o Cálculo Vetorial e Geometria Analítica.....	19
2.3 Uso de <i>softwares</i> na disciplina Cálculo Vetorial e Geometria Analítica	22
2.4 Uso do GeoGebra no estudo de Retas e Planos.....	23
2.5 O <i>software</i> GeoGebra	26
3 CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS.....	28
3.1 Tipologias da pesquisa.....	28
3.1.1 Quanto aos Objetivos	28
3.1.2 Quanto aos Procedimentos Técnicos.....	28
3.1.3 Quanto à Abordagem do Problema	29
3.1.4 Quanto ao Método	29
3.2 População e Amostra da Pesquisa	29
3.3 Construção do instrumento de Coleta de Dados.....	30
4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	30
4.1 Análise dos resultados da Oficina Pedagógica	31
4.2 Análise e discussão dos Dados do Questionário	49
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	54
REFERÊNCIAS	57
APÊNDICES	59

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do Tema

Estamos numa época onde a tecnologia se faz presente em diversas atividades cotidianas; produção de alimentos, modais de transporte, modais de comunicação, e até o recolhimento de impostos pelo Estado são exemplos das atividades impactadas por essa mudança. A imersão tecnológica pela qual a sociedade foi recentemente sujeita proporcionou, de maneira significativa, uma mudança na formação das ideias e comportamentos de cada pessoa. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), “As tecnologias, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas.” (BRASIL, 1998, p. 43). Desta maneira, as instituições de ensino, tanto básico como superior, constataam a necessidade de rever e aprimorar as metodologias empregadas no processo de ensino, evidenciando-se a utilidade inerente ao uso dos recursos tecnológicos disponíveis.

Nesse ponto de vista, as inovações na didática que é empregada nas práticas metodológicas vêm alcançando cada vez mais relevância, já que possuem a capacidade de conceber um melhor aprendizado e fazer do ambiente de ensino um local mais dinâmico e, assim, atraente ao aluno.

Ao tratar do uso das tecnologias como recurso no processo de aprendizagem da Matemática, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) dizem que:

Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática. (BRASIL, 2006, p. 87).

Neste sentido, entendem-se que o uso de *softwares* no ensino da Matemática pode aprimorar a capacidade do aluno de representar, visualizar, interpretar, comprovar e demonstrar conceitos matemáticos.

Corroboramos também com o pensamento de Ghiggi, Schmidt e Koch (2013) quando discursam sobre o uso de *softwares* como ferramenta de apoio ao processo de ensino da Matemática:

A incorporação de *softwares* educacionais como ferramenta de apoio ao ensino de matemática favorece a compreensão de conceitos, a exploração e relação de diversas representações, a exploração e propriedades e relações matemáticas, favorecendo os processos de natureza indutiva e experimental, generalização e os processos argumentativos, a modelagem, entre outros. (GHIGGI, SCHMIDT, KOCH, 2013, p. 4).

Consequentemente, uma metodologia de ensino da Matemática que empregue, efetivamente, o uso de *softwares* possui capacidade de ofertar ao aluno uma oportunidade eficiente de aprendizagem.

Ainda que conte com o receio de docentes mais ortodoxos, seja pela ausência de uma base no currículo em sua formação, seja pela falta de reciclagem através de formações continuadas ou até mesmo pela rotina propiciada pelo comodismo, o uso de *softwares* no processo de ensino vem adquirindo um espaço significativo em sala de aula. Especialmente na Licenciatura em Matemática, na sua disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, há dificuldades presentes na aprendizagem dos conteúdos referentes as retas e aos planos, proporcionado pela precária, ou até inexistente, abordagem desses conteúdos no percorrer da educação básica, ou, ainda, por uma desmotivação do discente diante da metodologia adotada, por considera-la obsoleta ou por não conseguir associar o comportamento das manipulações algébricas com o comportamento geométrico visto.

Dessa forma, este trabalho apresenta o tema “O uso do *software* GeoGebra como recurso metodológico no processo de ensino e aprendizagem de retas e planos”. Temos a intenção de apresentar uma proposta de ensino que contribua para o processo de aprendizagem dos conteúdos de retas e planos, numa abordagem contextualizada na disciplina de Cálculo Vetorial, empregando o *software* GeoGebra, agindo como apoio perante as dificuldades observadas pelos alunos de Licenciatura em Matemática na compreensão e domínio desses conceitos.

1.2 Problemática e Justificativa

Ao considerarmos os números de retenção de alunos da disciplina Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, componente curricular obrigatório do Curso de Licenciatura em Matemática do Campus IV da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), começamos a refletir sobre os prováveis fatores que permeiam esse problema. O estilo de apresentação do conteúdo de Geometria Analítica, segundo Furlani e Grossi (2016), é geralmente fechado e com roteiro definido para a realização de exercícios, dessa forma dificultando a aprendizagem, limitando o desempenho acadêmico dos licenciandos.

A Geometria Analítica, por exemplo, é um conteúdo da Matemática em que os alunos possuem muitas dificuldades, pois geralmente é apresentado de forma abstrata, fechada e com roteiro definido para resolução de exercícios, sendo assim, os alunos não encontram relação com o seu cotidiano e nem com o espaço em que vivem. (FURLANI; GROSSI, 2016, p.1, apud OLIVEIRA DA SILVA, 2017).

De fato, foi possível verificar que o exposto por Furlani e Grossi (2016) também ocorria no Curso de Licenciatura em Matemática da Campus IV da UFPB, uma vez que, dada a procura da Monitoria de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, na qual tive a oportunidade de ser monitor. Os alunos que buscavam a monitoria se queixavam, geralmente, da dificuldade dos conteúdos abordados, o que poderia ser um fator que causava desmotivação ao aprendizado, sendo uma influência negativa nos índices de aprovação dessa disciplina.

De modo a atenuar tal dificuldade, é necessário propor, planejar e aplicar alternativas metodológicas para o ensino dos conteúdos elencados na ementa da disciplina Cálculo Vetorial e Geometria Analítica. Segundo Nascimento (2012, p. 03 apud SILVA, 2017), “a proposta do uso de *softwares* de geometria dinâmica, no processo de ensino-aprendizagem em geometria pode contribuir em muitos fatores, especificamente no que tange à visualização geométrica”. Dessa forma, o uso de *softwares* de geometria dinâmica no processo de ensino e aprendizagem de retas e planos pode ser um recurso metodológico significativo, contribuindo para a compreensão dos conceitos abordados. Portanto, foi escolhido o GeoGebra como *software* de geometria dinâmica a ser utilizado nessa alternativa metodológica, dada a sua facilidade de uso e disponibilidade em multiplataforma.

Diante dessa realidade, esta pesquisa, que se situa na área da Educação Matemática, atuará na linha de investigação de Emprego das Tecnologias no Ensino da Matemática para esclarecer a seguinte pergunta: Quais as contribuições do uso do *software* GeoGebra, como recurso metodológico, no processo de ensino e aprendizagem de retas e planos?

Verificou-se que, nos semestres letivos 2010.1 a 2019.1, a disciplina Cálculo Vetorial e Geometria Analítica apresentou um índice de reprovação de 52,4%, segundo dados informados pela Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Aplicadas e Educação (CCAEE)/UFPB, um percentual sensivelmente alto. Concomitantemente, percebi *in loco*, enquanto monitor dessa disciplina por quatro semestres (períodos 2016.2 a 2018.1), a dificuldade dos alunos quanto a compreensão dos algoritmos e dos próprios cálculos, e uma falta de interpretação geométrica no caso específico das posições relativas de retas e planos, que se verificava em uma alta frequência nos atendimentos ofertados pelo Programa de Monitoria. Esta situação desperta interesse, tanto ao ex-monitor, quanto ao professor em formação.

Relacionando-se ao nível do rigor simbólico-formal requerido, comumente, nas disciplinas de cálculo, Pavanelo e Lima (2017) citam duas consequências do excesso desse rigor:

[...] podem ocorrer dois casos que merecem destaque: os estudantes, em geral, podem manifestar dificuldades em acompanhar [...] uma disciplina ministrada com alto nível de rigor simbólico-formal; ou, de acordo com a metodologia de ensino, a impossibilidade de explorar todo o potencial do aluno em relação ao conteúdo proposto. (PAVANELO; LIMA, 2017, p. 744).

As disciplinas de cálculo, mesmo em um curso voltado a formação de professores, podem apresentar as dificuldades percorridas por Pavanelo e Lima (2017). Vivemos um momento de revolução, quanto às transformações proporcionadas pela facilitação de acesso às tecnologias de informação e comunicação, tais como computadores (desktops e notebooks), smartphones, tablets, smartwatches e outros gadgets. Contudo, essas inovações são, de forma estrita, muito lentamente absorvidas às metodologias de ensino.

O Projeto Político Pedagógico do Curso (PPP) de Licenciatura em Matemática do CCAE/UFPB, referindo-se às competências e habilidades pedagógicas do educador matemático, elenca como uma das capacidades do profissional formado por este curso “desenvolver estratégias de ensino que favoreçam à criatividade, à autonomia e à flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos.” (UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA, 2007, p.07). Nesse aspecto, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) traz na sua quinta competência geral da educação básica o seguinte:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p. 9).

Nessa perspectiva, Rodrigues (2015) afirma que “a utilização dos *softwares* de geometria dinâmica permite criar um elo entre o abstrato e o concreto, direcionando o usuário no sentido de realizar provas dos resultados geométricos para formalização desses conceitos”. Ao tomarmos em consideração o exposto por Rodrigues, pela BNCC e pelo PPP do Curso de Matemática do CCAE/UFPB, surgiu como ideia de abordagem diferenciada o uso do *software* gráfico GeoGebra, visando auxiliar a aprendizagem do conteúdo de retas e planos, que é partícipe da ementa da disciplina Cálculo Vetorial e Geometria Analítica.

Sobre o uso do GeoGebra, Guerra e Costa (2014) afirmam que “[...]o aluno demonstra um maior interesse na disciplina, por se tratar de um modo de ensino diferente do que eles estão habituados[...]”. Esse *software* permite manipulação de pontos, retas, plano, e outros lugares geométricos, assim sendo uma alternativa válida, e significativa, para auxiliar a aprendizagem das retas e planos.

Assim, acreditamos que essa pesquisa possa contribuir com a introdução das tecnologias de informação no ensino de geometria analítica, particularmente no estudo de retas e planos, tornando o processo de ensino e aprendizagem mais eficiente, e ofertando aos futuros professores mais uma alternativa metodológica para emprego em sala de aula.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Elaborar, aplicar e avaliar uma proposta de estudo das retas e planos com o uso do *software* GeoGebra como recurso didático.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Identificar as possíveis dificuldades no estudo das retas e planos, por parte dos licenciandos do Curso de Licenciatura em Matemática do Campus IV da Universidade Federal da Paraíba, que estejam cursando ou já tenham cursado a disciplina Cálculo Vetorial e Geometria Analítica.
- Elaborar uma abordagem, empregando o *software* GeoGebra como recurso didático, para o estudo das retas e planos, com enfoque nos conceitos geométricos e posições relativas.
- Analisar os resultados da abordagem de retas e planos, na qual elencamos como recurso didático o uso do GeoGebra.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Contexto histórico

A geometria analítica surgiu no século XVII, quando a Álgebra passou a ser combinada com a Geometria. Atribui-se aos franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) o pioneirismo no desenvolvimento da Geometria Analítica.

Fermat ofereceu a sua contribuição à Geometria Analítica, segundo Boyer (2010) num curto tratado intitulado *Ad locus planos et sólidos isagoge* (Introdução aos lugares planos e sólidos), datada de 1636, no máximo. Nesse trabalho, o uso de coordenadas feito por Fermat não veio de considerações pragmáticas e nem da representação gráfica de funções. Veio da aplicação da álgebra de Renascença a problemas geométricos da antiguidade, dando ênfase ao esboço de soluções de equações indeterminadas. Como a publicação da obra de Fermat se deu de maneira póstuma, em 1679, a invenção da Geometria Analítica é atribuída unicamente a Descartes.

Já a Geometria Analítica por Descartes surgiu em 1637 em *La géométrie*, um dos três apêndices de *Discours de la méthode*, onde anunciava o seu programa de pesquisa filosófica. Em La

géométrie, Descartes pensou dar ilustrações de seu método filosófico geral. Nesse apêndice, ele defende o emprego do método matemático como o modelo para a obtenção de conhecimento em qualquer que seja o campo.

Descartes é atribuído como o criador do sistema de coordenadas cartesianas, relacionando a Álgebra com a Geometria, propondo princípios matemáticos versando a análise das propriedades de ponto, reta e circunferência, determinando distância entre esses objetos, suas respectivas localizações e coordenadas. Ao contrário de Fermat, Descartes priorizava a construção das soluções algébricas determinadas.

De acordo com Boyer (2010), Fermat e Descartes enxergavam a existência de uma Geometria Analítica além da bidimensional. Todavia, a Geometria Analítica tridimensional só daria seus primeiros passos no século XVII quando, em 1679, o também francês Philippe de Lahire (1640-1718), na obra *Nouveaux éléments des sections coniques*, deu um dos primeiros exemplos de uma superfície dada analiticamente por uma equação com três incógnitas.

Os vetores geométricos, os quais são base do estudo de espaços vetoriais, são objetos matemáticos caracterizados por características de comprimento, direção e sentido. Sua aplicação se dá na Física, como ferramenta empregada no auxílio dos cálculos que envolvem cinemática vetorial, dinâmica, campo elétrico, e outros conteúdos relacionados.

Venturi (2009) expõe como se deu o surgimento do conceito de vetor:

O conceito de vetor surgiu na Mecânica com o engenheiro flamengo Simon Stevin - o "Arquimedes holandês". Em 1586 apresentou em sua *Estática e Hidrostática*, o problema da composição de forças e enunciou uma regra empírica para se achar a soma de 2 forças aplicadas num mesmo ponto. Tal regra, a conhecemos hoje como regra do paralelogramo. Os vetores aparecem considerados como "linhas dirigidas" na obra *Ensaio Sobre a Representação da Direção* publicada em 1797 por Gaspar Wessel, matemático dinamarquês. (VENTURI, 2009, p. 64).

Todavia, a teoria vetorial, propriamente dita, emergiu-se apenas no decorrer do século XIX, com os trabalhos realizados pelo irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865), pelo alemão Hermann Grasmann (1809-1877) e pelo estadunidense Josiah Gibbs (1839-1903).

Lemke (2011) afirma que Ubiratan D'Ambrósio, em uma palestra ministrada no VII Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia, em 2008, confirma que a noção de grandezas vetoriais pode ser traçada à antiguidade, como uma composição de forças, o que seria a regra do paralelogramo atualmente.

O conceito de vetor mostra-se de maneira não formal quando introduzem os números complexos. Em particular, são precursoras as obras de Cardan, Leibniz, Wessel, Newton, Warrem, Argand, Mourey, principalmente o conceito de número complexo como um par ordenado de números reais, em duas referências: a real e a imaginária (LEMKE, 2011).

Lemke (2011) ressalta ainda que o surgimento do Cálculo Vetorial no Brasil, traz a seguinte exposição:

No Brasil, o Cálculo Vetorial no espaço educacional surgiu, possivelmente, em 1926, como uma disciplina criada por Theodoro Augusto Ramos (1895-1935). Ele havia cursado a Escola Politécnica do Rio de Janeiro, doutorou-se em 1918 e, em 1919, ingressou, mediante concurso, na Escola Politécnica de São Paulo. Em 1930, publicou, pela editora francesa Librairie Scientifique Albert Blanchard, o livro *Leçons sur le Calcul Vectoriel*. (LEMKE, 2011, p. 60).

Ou seja, nos dias atuais, o Cálculo Vetorial e a Geometria Analítica estão presentes na grade curricular da maioria dos cursos de graduação de ciências exatas, como os cursos de Física, Engenharia e Licenciaturas em Matemática.

2.2 O que dizem os documentos oficiais sobre o Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Documentos oficiais como os Referenciais Curriculares para o Ensino Médio da Paraíba (RCEM-PB) abordam os estudos da Geometria Analítica como parte do esforço necessário para atingir-se objetivos, competências e habilidades. De maneira específica, podemos associar o objetivo de “reconhecer as diferentes representações de um mesmo conceito e identificar os procedimentos associados às diversas representações” (PARAÍBA, 2006, p. 67) como intrinsecamente ligado ao estudo da Geometria Analítica, bem como a sua ligação a Geometria Euclidiana.

Nesta esteira, podemos, também, fazer essa associação quanto a habilidade de “ler, interpretar e utilizar as diferentes representações matemáticas, identificar os problemas associados a essas representações e perceber as vantagens e limites de cada uma delas” (PARAÍBA, 2006, p. 70), quanto a representação por meio de equações ou a representação gráfica de pontos, retas e planos, que são alvo do estudo presente na Geometria Analítica.

Esses mesmos documentos ainda ressaltam que a Geometria Analítica é alocada, com relação a organização de Eixos estruturadores de conteúdos/objetos de ensino da Matemática, no eixo de Geometria e Medidas, sendo subdividida em Geometria Espacial de Posição, e Geometria Analítica, propriamente dita. Nesta organização, há a seguinte ponderação a respeito das diferenças e semelhanças entre a Geometria Analítica e a Geometria Euclidiana:

A abordagem utilizada na Geometria Analítica por meio do método analítico, é completamente diferente da realizada nas outras, as geometrias sintéticas nas quais se usa o método sintético com base no método axiomático euclidiano. O educando precisa compreender que a Geometria Analítica não é outra coisa senão a incorporação da noção de coordenadas e dos métodos algébricos à geometria euclidiana, em que os pontos de um plano foram substituídos por pares de números e as curvas por equações, e com isso o estudo das propriedades das curvas mudou para o estudo das propriedades das equações

correspondentes. (PARAÍBA, 2006, p. 79-80).

Com isso, os RCEM-PB fazem uma proposta de alocação de conteúdos e habilidades por série. Contudo, a Geometria Analítica somente é abordada na terceira série.

Já os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) trazem, primeiramente, um breve comentário acerca da relação entre geometria e aritmética que se faz presente na Geometria Analítica: “As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes” (BRASIL, 2000, p. 43).

Adiante, os PCNEM elencam as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática. É mencionada na seção Representação e comunicação a habilidade/competência “Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.)” (BRASIL, 2000, p. 46), a qual é extremamente usual no âmbito do estudo da Geometria Analítica, corroborando com o que os PCNEM expõem anteriormente.

Nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) para o Ensino Médio, a organização dos conteúdos matemáticos é disposta em três grandes temas: 1. Álgebra: números e funções; 2. Geometria e medidas; 3. Análise de dados. O segundo grande tema apresenta quatro unidades temáticas: geometrias plana, espacial, métrica e analítica. Há a ponderação de que as propriedades que a Geometria trata tipificam-se na dualidade ora associada a posição relativa das formas ora associada as medidas.

Consequente, expressa como função da Geometria Analítica “tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos” (BRASIL, 2002, p. 124). De fato, essa relação também se encontra no seguinte trecho:

O aluno deve perceber que um mesmo problema pode então ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos de acordo com suas características. Por exemplo, a construção de uma reta que passe por um ponto dado e seja paralela a uma reta dada pode ser obtida de diferentes maneiras. Se o ponto e a reta estão desenhados em papel, a solução pode ser feita por meio de uma construção geométrica, usando-se instrumentos. No entanto, se o ponto e a reta são dados por suas coordenadas e equações, o mesmo problema possui uma solução algébrica, mas que pode ser representada graficamente. (BRASIL, 2002, p. 124).

Esse documento também especifica conteúdos e habilidades para as unidades temáticas. Na Geometria Analítica, traz como conteúdo “representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras” (BRASIL, 2002, p. 125). Já como habilidades, expõe o seguinte:

- Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos.
- Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características.
- Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.
- Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da

Matemática, estabelecendo conexões entre eles. (BRASIL, 2002, p. 125).

De maneira análoga ao observado nos RCEM-PB, as PCN+ para o Ensino Médio trazem uma organização de temas a serem distribuídos em cada série. E, como visto nos RCEM-PB, o conteúdo referente a Geometria Analítica está concentrado na terceira série. Porém, pondera a respeito da variação dos temas: “Essa distribuição dos temas pode variar em função do número de aulas e do projeto da escola para aprofundamento de temas ou inclusão de outros” (BRASIL, 2002, p. 128). Contudo, traz uma recomendação, caso o número de aula seja inferior a quatro por semana, acerca do planejamento do professor: “[...]deve elaborar seu planejamento tendo como foco as ideias centrais de cada tema. [...] No segundo tema, deve-se garantir a compreensão da Matemática como ciência, com sua forma específica de validar fatos e evitar o excesso de cálculos de áreas e volumes” (BRASIL, 2002, p. 129). Percebe-se nessa passagem a preocupação elencada em não se focar exclusivamente na geometria euclidiana, em detrimento da geometria analítica.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) elencam ainda que o estudo da Geometria, de uma maneira geral, deve possibilitar aos alunos a capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano (BRASIL, 2006, p. 75). Mais à frente, traz uma breve contextualização histórica sobre a Geometria Analítica, a qual vale mencionar: “A geometria analítica tem origem em uma ideia muito simples, introduzida por Descartes no século XVII, mas extremamente original: a criação de um sistema de coordenadas que identifica um ponto P do plano com um par de números reais (x, y) ” (BRASIL, 2006, p. 76).

Ainda, caracteriza a Geometria Analítica como sendo:

[...] o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação (nesse caso, são as figuras geométricas que estão sob o olhar da álgebra); [...] o estudo dos pares ordenados de números (x, y) que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica (nesse caso, é a álgebra que está sob o olhar da geometria). (BRASIL, 2006, p. 76-77).

A respeito dessa reflexão, as OCEM propõem ao professor um modo de trabalho, para a Geometria Analítica, com enfoque na compreensão das equações por meio de suas respectivas representações geométricas e vice-versa, alertando a apresentação de equações sem um propósito especificado e também sobre o problema da memorização excessiva. Atenta, ainda, para a importância do significado das equações em relação aos gráficos as quais elas representam.

É importante ressaltar que as OCEM trazem uma orientação acerca da abordagem do conceito de vetor, propondo o uso do ponto de vista geométrico aliado ao ponto de vista algébrico, assim vindo a corrigir a “distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física” (BRASIL, 2006, p. 77). Em seguida, orienta

sobre a associação da resolução de sistemas de equações ao estudo da posição relativas de um par de retas no plano.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por sua vez, elenca como uma das competências específicas para a Matemática no Ensino Médio “Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas”. (BRASIL, 2018, p. 531).

Ou seja, podemos associar essa competência ao estudo da Geometria Analítica, pois esse tema trata disso enquanto aborda a representação de curvas no plano ou no espaço concomitantemente com sua representação algébrica, além de abordar outras características dessas curvas. Apesar da BNCC elencar as habilidades pertinentes a unidades temáticas, não há uma menção concreta a algo que poderia ser interpretado como uma parte do estudo da Geometria Analítica.

2.3 Uso de *softwares* na disciplina Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Lemke (2011) conduziu um estudo referente ao processo de ensino e aprendizagem de retas e planos numa abordagem vetorial, desenvolvido no âmbito da disciplina Geometria Analítica da maioria dos cursos de ciências exatas. Esse estudo foi aplicado a seis alunos do curso de engenharia de uma instituição particular de ensino de São José dos Campos, estado de São Paulo. A abordagem é consistida por três fases. Na primeira, fez-se a revisão de conceitos elencados como pré-requisitos para o desenvolvimento do experimento, tais como vetores e operações e uma introdução ao estudo de retas e plano. A segunda fase constituiu-se em atividades de familiarização com o *software* Cabri 3D. Por fim, a última fase consistiu na aplicação do experimento de ensino de retas e planos nos ambientes papel & lápis e Cabri 3D. A respeito dos resultados obtidos com essa abordagem, Lemke faz o seguinte relato:

O caráter dinâmico do *software* foi fundamental para a realização deste experimento, pois favoreceu a independência e autonomia dos estudantes na construção do conhecimento. Todas as duplas buscaram constantemente elos entre aspectos visuais e algébricos. Cândido (2010) também observou que, com a utilização deste *software*, os estudantes demonstraram independência em suas construções. Tais evidências coincidem com a afirmação de Ramal (2002), relativa ao fato de que a utilização da tecnologia pode incentivar o entusiasmo e a autonomia nos estudantes. (LEMKE, 2011, p. 199).

Quanto ao *software* Cabri 3D, Lemke (2011, p. 202) afirma que ele representou “[...] um instrumento facilitador de novas construções e permitiu um trabalho diferenciado do usualmente realizado no ensino[...]”.

Por sua vez, Azevedo, Vasconcelos e Brito (2017) trazem uma proposta de utilização dos *softwares* matemáticos Calc 3D e Winplot como instrumentos auxiliares no ensino dos conceitos iniciais de vetores, no contexto dos currículos contidos na maioria dos cursos da área das ciências exatas. A proposta baseia-se no uso do *software* Calc 3D para efetuar-se as operações de produto escalar, produto vetorial e produto misto, considerando as limitações imposta pelo *software*, que acabam por explorar o conceito de que o produto misto de três vetores é o produto escalar de um desses vetores pelo vetor resultante do produto vetorial dos outros dois vetores, e também as propriedades do produto misto. Já o *software* Winplot é empregado como método de plotagem de gráficos, permitindo a visualização de propriedades sobre ângulos entre vetores. Azevedo, Vasconcelos e Brito fazem o seguinte comentário:

A atividade apresentada nessa proposta pode ser desenvolvida não só em GAV [- Geometria Analítica Vetorial], mas em outras áreas da Matemática como Cálculo e Álgebra. Analogamente, outros *softwares*, específico para outros conteúdos, podem também contribuir no processo de aprendizagem, já que, as tecnologias fazem parte do cotidiano nas demais áreas de conhecimento. (AZEVEDO; VASCONCELOS; BRITO, 2017, p. 26).

Ricardo e Santos (2018) relatam um trabalho que traz atividades e conjecturas iniciais de um projeto de pesquisa com estudantes do curso de Engenharia, onde objetivou-se investigar como a inserção tecnológica pode vir a ser um instrumento facilitador da aprendizagem na disciplina Cálculo Vetorial com Geometria Analítica. As atividades observadas consistem na resolução de problemas sobre origem e extremidade de vetores, ortogonalidade de um par de vetores, sendo o *software* GeoGebra empregado como recurso gráfico para a visualização das propriedades matemáticas observadas nos cálculos efetuados pelos alunos. Sobre os resultados obtidos através dessa abordagem, Ricardo e Santos (2018, p. 38) afirmam que “[...] pode-se perceber que a introdução do recurso tecnológico facilitou o entendimento do conteúdo abordado, assim como por meio das atividades propostas pode-se perceber que os estudantes apresentam um olhar ainda vago para a matemática empregada em seu curso[...]”.

2.4 Uso do GeoGebra no estudo de Retas e Planos

Neckel (2019) apresenta um estudo de retas contextualizado numa turma de do curso de Engenharia do Centro Universitário Sociesc, de Curitiba. Esse estudo faz parte da disciplina Álgebra Linear e Geometria Analítica.

Segundo o exposto por Neckel, o uso de *softwares* pode transformar a realidade de uma sala de aula tradicionalista em um ambiente de ensino e aprendizagem contínuos e investigativos. Assim, Neckel optou por associar o estudo tradicional, baseado no livro Vetores e Geometria Analítica, de

autoria de Paulo Winterle, a um modo de representação gráfica das propriedades matemática que teve o *software* GeoGebra como seu método. Contudo, os conteúdos estudados eram abordados a partir de uma abordagem diferenciada, ao empregar situações-problema, propostas inicialmente como características geométricas e algébricas, efetuando uma análise crítica com o auxílio do *software*, ainda que o quadro fosse usado com frequência.

A abordagem empregada por Neckel (2019) contempla a noção inicial de vetores no plano e espaço cartesianos, aborda a representação vetorial da reta e, por fim, trata das secções cônicas. A explanação sobre retas faz uma comparação sobre as definições de reta, como a definição da equação vetorial por meio da ciência de dois pontos dessa reta, além da definição através da ciência um único ponto e de sua inclinação. Primeiramente, propõe a análise da reta no plano cartesiano através do ponto de vista euclidiano, onde é considerado o seu coeficiente angular. Em seguida, aborda a construção da equação vetorial, realizando uma descrição sobre suas propriedades. Ao descrever essas propriedades, relaciona-se as coordenadas com o GeoGebra de forma dinâmica, ao discutir de uma maneira colaborativa com os acadêmicos (NECKEL, 2019).

Por sua vez, Guedes (2015) conduziu um estudo sobre Retas em duas turmas da terceira série do Ensino Médio, do Colégio Salestiano Jardim Camburi, de Vitória – ES.

Guedes empregou uma abordagem exploratória, na qual procurou elaborar atividades que viessem a explorar conceitos básicos afim de promover uma análise crítica, enquanto exigia dos alunos uma descrição sobre os conceitos vistos. Sua abordagem consiste em quatro atividades, a saber:

- Atividade 1: Objetiva-se apresentar o *software* GeoGebra, trabalhando as principais ferramentas na construção de pontos e retas no plano cartesiano, polígonos convexos, retas paralelas e perpendiculares, intersecções de objetos, ponto médio e mediatriz de um segmento e ângulo.
- Atividade 2: Tem como alvo calcular a distância entre um par de pontos e resolver problemas envolvendo distância, ponto médio e baricentro.
- Atividade 3: Tem como objetivo plotar retas no plano cartesiano e estudar a posição relativa de um par de retas.
- Atividade 4: Seu objeto é a verificação da posição relativa entre reta e circunferência e entre um par de circunferência, através dos gráficos e equações.

As atividades sobre retas propostas por Guedes tratam da construção e manipulação dos objetos geométricos por meio das ferramentas presentes na interface do *software* GeoGebra, onde na primeira atividade há a descrição da construção de retas paralelas e perpendiculares. Já na terceira

atividade há a plotagem de retas no plano cartesiano, através das suas equações gerais. Depois de plotado o gráfico, induz a análise da posição relativa das retas, e a transformação da equação geral em equação explícita. Ao analisar a posição da reta e as equações explícitas, questiona sobre a condição de paralelismo de duas retas no plano cartesiano. Ainda trata sobre a construção e identificação das equações gerais de determinadas retas presentes no feixe de retas paralelas. Trata sobre a identificação da intersecção de retas, e sobre a condição de concorrência de retas no plano cartesiano. Também mostra o procedimento de análise gráfica de um par de retas perpendiculares, e como obter um feixe de retas perpendiculares. Ao final da atividade, propõe a generalização do feixe de retas perpendiculares a uma reta, por meio da equação geral da reta.

Sobre os resultados de sua abordagem, Guedes relata:

As atividades provocaram nos alunos o interesse em buscar outras propriedades, bem como a disputa sadia por conseguir enxergar mais propriedades nas atividades desenvolvidas. Foram muitos os alunos que tentaram usar o *software* para relembrar algumas propriedades da geometria plana, anteriormente estudadas. (GUEDES, 2015, p. 374).

Loterio (2013) faz um relato sobre um conjunto de atividades realizadas em sala de aula com três turmas da segunda e terceira fases do curso de Engenharia Civil da Unifebe, entre 2012 e 2013, em aulas de Geometria Analítica e Álgebra Linear. As atividades propostas por Loterio envolvem os conceitos de vetores, dependência linear, origem e extremidade de vetores, estudo de retas e planos e cônicas.

O estudo de retas e planos proposto por Loterio consiste na construção da equação vetorial de uma reta seguindo a definição proposta por Winterle (2014) com o auxílio do *software* GeoGebra, tanto no plano cartesiano, como no espaço, assim obtendo, também, a visualização do gráfico da reta. Já a construção do plano envolve a definição vetorial observada em Winterle (2014), construindo por meio do *software* GeoGebra a equação geral do plano por meio do produto vetorial de dois vetores contidos nesse plano.

A respeito do uso do *software* GeoGebra como ferramenta usual no processo de ensino, Loterio faz a seguinte consideração:

Há um longo caminho a percorrer para que o GeoGebra possa ser incorporado definitivamente pelo professor e aluno, como uma ferramenta diária de sala de aula, mas os primeiros passos foram dados o que nos faz concluir, que com essa atitude, as aulas de Geometria Analítica e Álgebra Linear, podem ser exploradas de maneira mais lúdica e ampla, pelos alunos e professor, deixando de ser, apenas uma série de equações e formulas, para ser aplicável, interessante e desafiadora. (LOTÉRIO, 2013, p. 121-122).

Sobre os resultados obtidos com essa abordagem, Loterio (2013, p. 121) reconhece que “[...]foram muito positivos e abriram caminho para novas investigações no futuro, pois quando os

exercícios se transformaram em explorações, novas possibilidades de investigações surgiram”.

2.5 O *software* GeoGebra

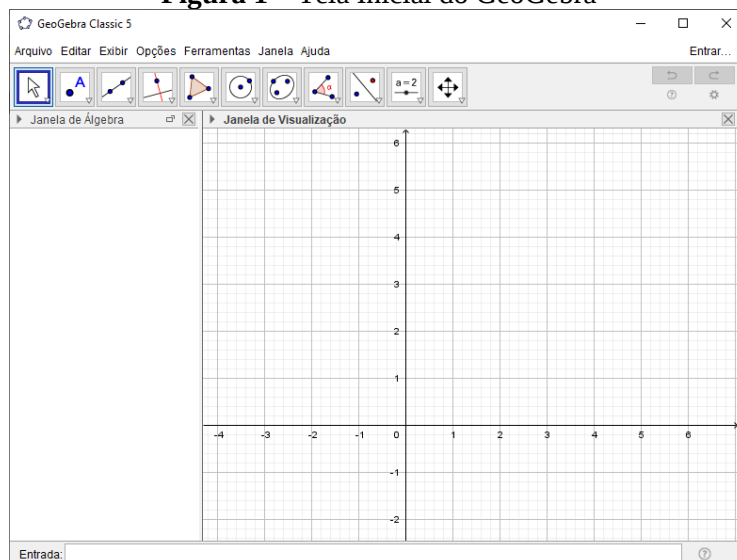
O GeoGebra é um *software* de geometria dinâmica de acesso livre e gratuito, licenciado sob a licença GPL (GNU General Public License). Foi criado por Markus Hohenwarter, no ano de 2001, com foco para uso no ambiente em sala de aula. Como é um *software* idealizado com enfoque para o ensino, apresenta condições para o estudo de diversas áreas da Matemática, podendo ser empregado tanto na educação básica quanto no ensino superior. Logo, o GeoGebra possui instrumentos que auxiliam e permitem, de forma intuitiva, estudos sobre Probabilidade, Análise de Gráficos e Tabelas, Álgebra, Geometria plana e espacial, tudo numa única interface de usuário. Este *software* propicia ao usuário um ambiente que o permite construir, estudar e analisar as diferentes representações de um objeto, constituindo-se uma relevante ferramenta no ensino e aprendizagem dos conteúdos citados anteriormente. O GeoGebra, por ter sido escrito totalmente em Java (linguagem de programação multiplataforma), pode ser baixado¹ e utilizado em diversos dispositivos eletrônicos, como *smartphones*, *tablets*, *desktops*, *notebooks*, etc, além de possuir compatibilidade com os sistemas operacionais *Android*, *Windows*, *MacOS*, *iOS*, e todas as distribuições *Linux*. Sendo um *software* livre, possui tradução para, aproximadamente, sessenta idiomas distintos, incluindo o Português.

Ghiggi, Schmidt e Koch definem o *software* GeoGebra como:

[...] um *software* livre, que possibilita que as construções geométricas sejam realizadas de maneira dinâmica e interativa, permitindo que as mesmas sejam exploradas com mais riqueza de detalhes do que as construções tradicionais. Além disso, ele também tem a vantagem de apresentar, simultaneamente, duas representações diferentes de um mesmo objeto: a representação geométrica e a representação algébrica. (GHIGGI; SCHMIDT; KOCH, 2013, p. 1).

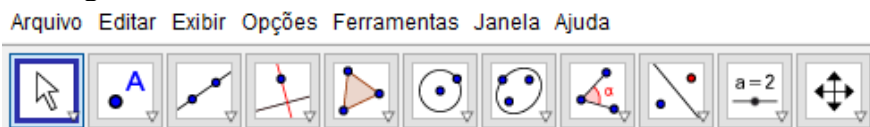
O GeoGebra possui uma interface de usuário que conta com várias funcionalidades. A interface da sua tela inicial é composta por duas janelas: a janela de álgebra e a janela de visualização. Também é mostrado o campo de entrada, onde são inseridas equações, funções, coordenadas de pontos, comandos de teclado, que ao pressionar-se a tecla “enter” são exibidos na janela de visualização.

¹ O download pode ser feito em <https://www.GeoGebra.org>.

Figura 1 – Tela Inicial do GeoGebra

Fonte: Autoria própria, 2020.

A barra de menus mostra sete itens: Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela e Ajuda. Logo abaixo, vê-se a barra de ferramentas, que apresenta as ferramentas em onze divisões, ferramentas essas que possuem relação com os ícones representativos de cada divisão.

Figura 2 – Barra de Menus e Barra de Ferramentas do GeoGebra

Fonte: Autoria própria, 2020.

A janela de visualização apresentada na interface inicial do GeoGebra possibilita uma visão bidimensional, assim possibilitando a construção e estudo dos gráficos das retas e planos, de modo a permitir a análise visual das características desses lugares geométricos.

Dessa forma, o emprego do GeoGebra como recurso metodológico no ensino da Matemática pode contribuir para o aperfeiçoamento da análise geométrica e confirmar teorias e definições matemáticas. Nascimento (2012, apud SILVA, 2017, p. 30), fala que “a habilidade de visualizar pode ser desenvolvida, à medida que se forneça ao aluno materiais de apoio didático baseados em elementos concretos representativos do objeto geométrico em estudo”.

Logo, ao utilizar o GeoGebra como uma ferramenta no processo de ensino e aprendizagem, podemos propiciar aos licenciandos a oportunidade de construírem os seus próprios saberes, devido ao ambiente de geometria dinâmica disponibilizar uma experiência construtiva nesse processo, ao construir as retas e planos através de suas equações e observarem como as características das equações mostram-se nos gráficos.

Portanto, o uso do GeoGebra vem a facilitar a generalização dos conteúdos matemáticos por meio das construções feitas, direcionando os licenciandos a uma maior abstração do conteúdo.

3 CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Essa pesquisa, do ponto de vista de sua natureza, caracteriza-se como uma pesquisa aplicada. A esse respeito, Prodanov e Freitas (2013, p. 51) afirmam que a pesquisa aplicada “objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática dirigidos à solução de problemas específicos. Envolve verdades e interesses locais”. Dessa forma, objetivamos apresentar um estudo que venha a contribuir com o processo de ensino e aprendizagem de retas e planos.

Gil (2008, p. 08) define o método científico como “[...] o conjunto de procedimentos intelectuais e técnicos adotados para se atingir o conhecimento”. Nesse sentido, detalharemos nesse item os procedimentos metodológicos a serem empregados nessa pesquisa.

3.1 Tipologias da pesquisa

3.1.1 Quanto aos Objetivos

No tocante aos objetivos, a pesquisa caracteriza-se como exploratória e descritiva. É uma pesquisa exploratória, pois tem como propósito “[...] proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses” (GIL, 2010, p. 27). Esta pesquisa visa buscar informações que contribuam com a compreensão do conteúdo do estudo de retas e planos nas aulas da disciplina Cálculo Vetorial e Geometria Analítica. Sobre a pesquisa descritiva, Prodanov e Freitas (2013, p. 52) dizem que esse tipo de pesquisa “[...] observa, registra, analisa e ordena dados, sem manipulá-los, isto é, sem interferência do pesquisador. [A pesquisa descritiva] Procura descobrir a frequência com que um fato ocorre, sua natureza, suas características, causas, relações com outros fatos”. Nesse sentido, objetivamos identificar as dificuldades presentes no estudo de retas e planos, contextualizada no processo de ensino e aprendizagem no qual estão inseridos os licenciandos que cursam a disciplina Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, assim vindo a proporcionar a elaboração de uma metodologia de estudo que possa ofertar aos licenciandos uma aprendizagem mais eficiente.

3.1.2 Quanto aos Procedimentos Técnicos

Devido ao motivo de que investigaremos uma amostra composta por licenciandos que cursam

ou já cursaram a disciplina Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, o estudo de caso se mostra mais adequado, possibilitando coleta e análise de dados oriundos de um estudo de retas e planos, com o GeoGebra como auxílio metodológico. Esse método de pesquisa caracteriza-se por “[...] coletar e analisar informações sobre determinado indivíduo, uma família, um grupo ou uma comunidade, a fim de estudar aspectos variados de sua vida, de acordo com o assunto de pesquisa” (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 60). Assim, buscamos descrever a situação contextual dessa investigação (GIL, 2010), bem como verificar a eficiência da abordagem empregada.

3.1.3 Quanto à Abordagem do Problema

Abordaremos essa pesquisa de forma qualitativa. Prodanov e Freitas (2013, p. 70) afirmam que essa abordagem “considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números”. Tal abordagem consegue pôr em consideração as subjetividades presentes no processo de aprendizagem dos licenciandos, almejando a identificação das dificuldades dos mesmos no processo de aprendizagem.

3.1.4 Quanto ao Método

Adotamos o método indutivo neste trabalho, já que considerarmos que esse método proporciona investigações de um modo geral por meio do estudo de casos particulares. Sobre o método indutivo, Gil (2008) afirma que:

parte do particular e coloca a generalização como um produto posterior do trabalho de coleta de dados particulares. De acordo com o raciocínio indutivo, a generalização não deve ser buscada aprioristicamente, mas constatada a partir da observação de casos concretos suficientemente confirmadores dessa realidade. (GIL, 2008, p. 10).

Nesse sentido, a preferência por tal método fundamenta-se pelo fato da pesquisa analisar um estudo realizado em uma turma do Curso de Licenciatura em Matemática para se chegar a uma conclusão geral no tocante ao desempenho dos discentes do curso, a partir do emprego de *softwares* para subsidiar o processo de ensino de conteúdos matemáticos.

3.2 População e Amostra da Pesquisa

O universo da pesquisa é a totalidade dos indivíduos que detém as mesmas características definidas para um determinado estudo (PRODANOV; FREITAS, 2013). Assim, o Campus IV –

Litoral Norte da Universidade Federal da Paraíba mostra-se um ambiente propício para a realização desta pesquisa, dispondo de uma população que mostra características importantes para o desenvolvimento da mesma, assim fornecendo a amostra necessária.

A amostra, conforme Gil (2008, p. 90), define-se como o “subconjunto do universo ou da população, por meio do qual se estabelecem ou se estimam as características desse universo ou população”. Dessa forma, a amostra utilizada nesta pesquisa constitui-se em alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Campus IV da Universidade Federal da Paraíba, que estejam a partir do segundo semestre letivo no curso, de modo a estarem cursando ou já terem cursado a disciplina Cálculo Vetorial e Geometria Analítica.

Como a amostra escolhida está no processo de ensino e aprendizagem contextualizado na disciplina, ou já passou por ele, consideramos que essa amostra consegue reproduzir a realidade do universo alvo desta pesquisa, assim fornecendo dados que contribuam para a análise deste estudo.

3.3 Construção do instrumento de Coleta de Dados

O instrumento de coleta de dados, nesta pesquisa, constitui-se da seguinte maneira: procederemos a elaboração de uma oficina pedagógica, na qual apresentaremos, e proporemos, aos licenciandos um estudo sobre as retas e planos empregando o *software* GeoGebra, como recurso metodológico; realizar-se-á essa oficina pedagógica, e, em seguida, proporemos um questionário que conterá questões acerca do ambiente de ensino e o desempenho pessoal com o uso do *software* proposto. De acordo com Gil,

Pode-se definir questionário como a técnica de investigação composta por um conjunto de questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamento presente ou passado etc. (GIL, 2008, p. 121).

Assim, o questionário visa identificar a percepção dos licenciandos sobre o uso de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem da matemática, mais especificamente sobre o uso do GeoGebra no conteúdo de retas e planos. Composto com questões fechadas, de única e múltipla escolha, a fim de fornecer dados de modo a favorecer a investigação sobre a aprendizagem dos licenciandos com a proposta empregada na oficina.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Apresentaremos, neste capítulo, a análise e discussão dos resultados obtidos por intermédio da pesquisa desenvolvida. Observando que procedemos a aplicação de uma oficina pedagógica e, em

seguida, a aplicação de um questionário, organizamos este capítulo em duas seções: a primeira contendo a análise dos resultados obtidos pelos discentes na oficina e a segunda contendo a análise dos dados coletados pelo questionário.

4.1 Análise dos resultados da Oficina Pedagógica

A oficina pedagógica foi aplicada para discentes da disciplina Introdução à Álgebra Linear, do semestre letivo 2019.2, do curso de Licenciatura em Matemática do CCAE/UFPB. Sendo realizada no Laboratório de Informática I do CCAE/UFPB, a oficina teve duração de 180 minutos.

Inicialmente, procedemos a apresentação do tema da oficina – o estudo de retas e planos com o auxílio do *software* GeoGebra. Nesse ensino, expomos como apresenta-se a interface do *software*, como as informações sobre os objetos matemáticos e suas respectivas representações gráficas são exibidos no *software* e, também, os modos de visualização desses objetos, por meio de gráfico do plano cartesiano ou do espaço cartesiano. Após essa breve introdução ao *software*, procedemos uma revisão acerca da definição vetorial da reta, bem como suas equações – vetorial, paramétrica e simétrica. Em seguida, mostramos aos discentes partícipes da oficina os procedimentos pertinentes a inserção da equação da reta no *software* GeoGebra, por meio de sua equação vetorial, de maneira direta com apenas um comando, e como a composição de um ponto e um vetor diretor já previamente inseridos na Janela de Álgebra do *software*. Nesse ensino, empregamos dois exemplos para que os participantes pudessem visualizar como dá-se a construção dos gráficos nos dois casos, como podemos observar nas figuras 3 e 4.

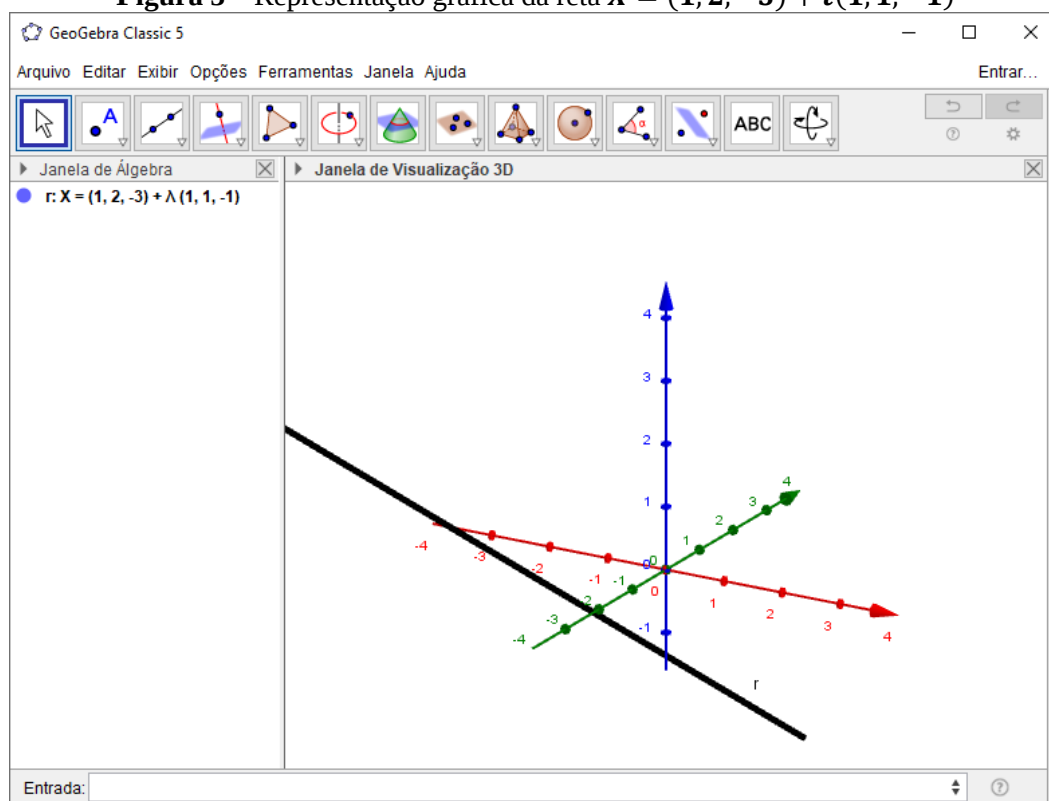
- Equação vetorial $(x, y, z) = (1, 2, -3) + t(1, 1, -1)$
- Reta que contém o ponto A $(2, 2, -3)$ e possui a direção do vetor $d = (2, 1, -3)$

Para que a reta $(x, y, z) = (1, 2, -3) + t(1, 1, -1)$ seja exibida na Janela de Visualização 3D do *software* GeoGebra, basta clicar duas vezes no ícone do *software* na área de trabalho do computador, clicar no item Exibir, presente na barra de menus, e em seguida no item Janela de Visualização 3D. No campo Entrada, a equação da reta deve ser inserida usando o comando exposto a seguir.

$$r: X = (1, 2, -3) + t * (1, 1, -1)$$

Assim, após digitar o comando acima, pressiona-se a tecla ENTER para que o objeto geométrico seja exibido, conforme podemos observar na figura 3.

Figura 3 – Representação gráfica da reta $X = (1, 2, -3) + t(1, 1, -1)$



Fonte: Autoria própria, 2020.

Já para o segundo exemplo, procedemos a inserção dos seguintes comandos, pressionando a tecla ENTER após o término de cada comando.

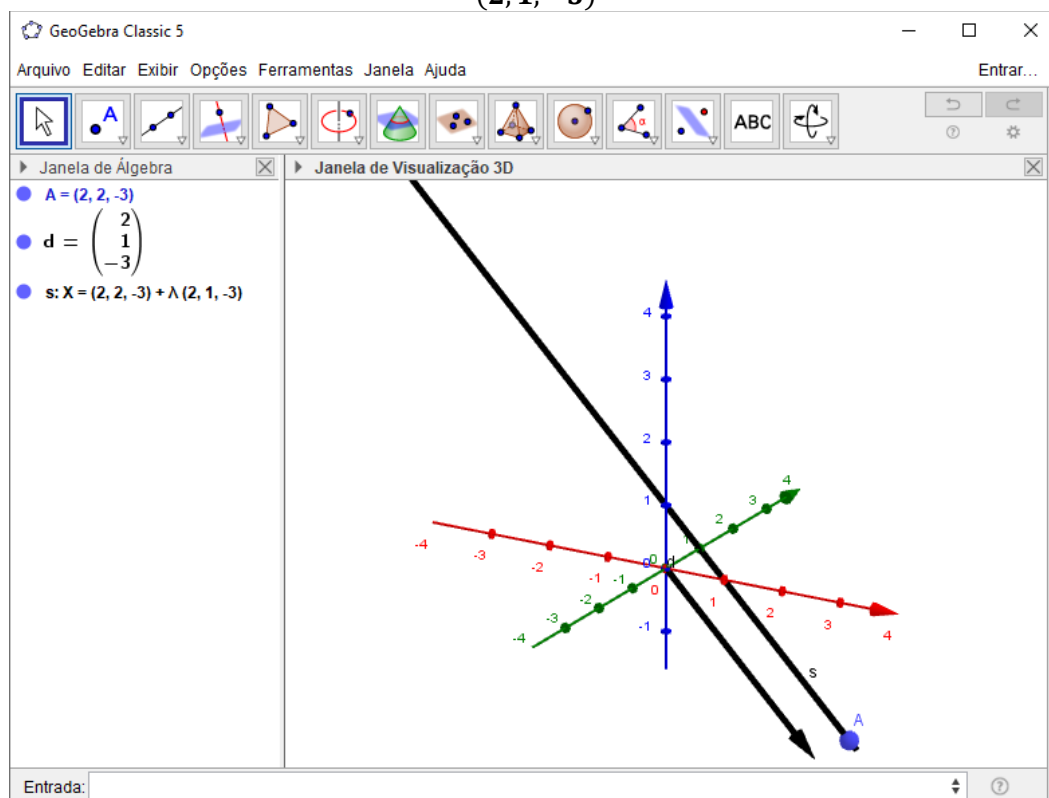
$$A=(2,2,-3)$$

$$d=(2,1,-3)$$

$$s:X=A=t*d$$

Após a inserção dessa série de comandos, o resultado é mostrado na representação gráfica observada na visualização 3D do *software*, bem como na representação algébrica da construção da equação dessa reta, presente na Janela de Álgebra, como podemos observar na figura 4.

Figura 4 – Representação gráfica da reta que passa pelo ponto $A(2, 2, -3)$ e que tem a direção do vetor $d = (2, 1, -3)$



Fonte: Autoria própria, 2020.

Por questão de conveniência, o método empregado posteriormente no estudo das posições relativas foi o primeiro, visando um melhor aproveitamento do tempo destinado a aplicação da oficina. Em seguida, solicitamos aos discentes que fizessem a inserção de algumas retas no GeoGebra, de modo a fixar o método a ser adotado para o estudo.

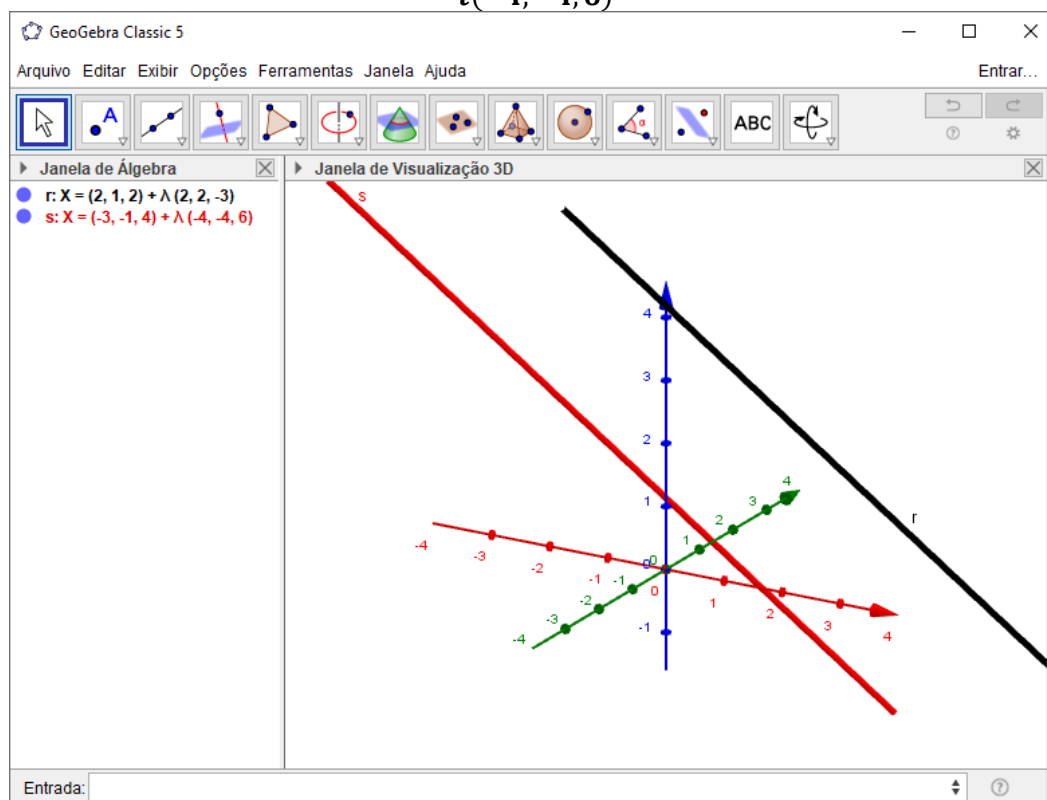
Posteriormente, revisamos as definições das posições relativas de um par de retas, explicando o comportamento algébrico que observado quando as retas são paralelas, coincidentes, concorrentes ou reversas. Após essa explanação, mostramos os passos necessários a identificação da posição relativa de um par de reta, por meio da análise do gráfico plotado no *software* GeoGebra. Para tal, fizemos o uso dos exemplos descritos a seguir.

- Retas paralelas: $r: X = (2, 1, 2) + t(2, 2, -3)$ e $s: X = (-3, -1, 4) + t(-4, -4, 6)$
- Retas coincidentes: $r: X = (1, 3, 0) + t(-1, 2, 1)$ e $s: X = (0, 5, 1) + t(3, -6, -3)$
- Retas concorrentes: $r: X = (2, -1, 1) + t(1, 2, -1)$ e $s: X = (1, 11, -8) + t(-2, 3, -3)$
- Retas reversas: $r: X = (-1, 2, 1) + t(1, 4, 2)$ e $s: X = (7, 4, -3) + t(3, 2, 4)$

Após procedermos a inserção das equações das retas $r: X = (2, 1, 2) + t(2, 2, -3)$ e $s: X = (-3, -1, 4) + t(-4, -4, 6)$, conforme o método descrito anteriormente, obtemos o gráfico que pode

ser observado na figura 5.

Figura 5 – Representação gráfica das retas $r: X = (2, 1, 2) + t(2, 2, -3)$ e $s: X = (-3, -1, 4) + t(-4, -4, 6)$



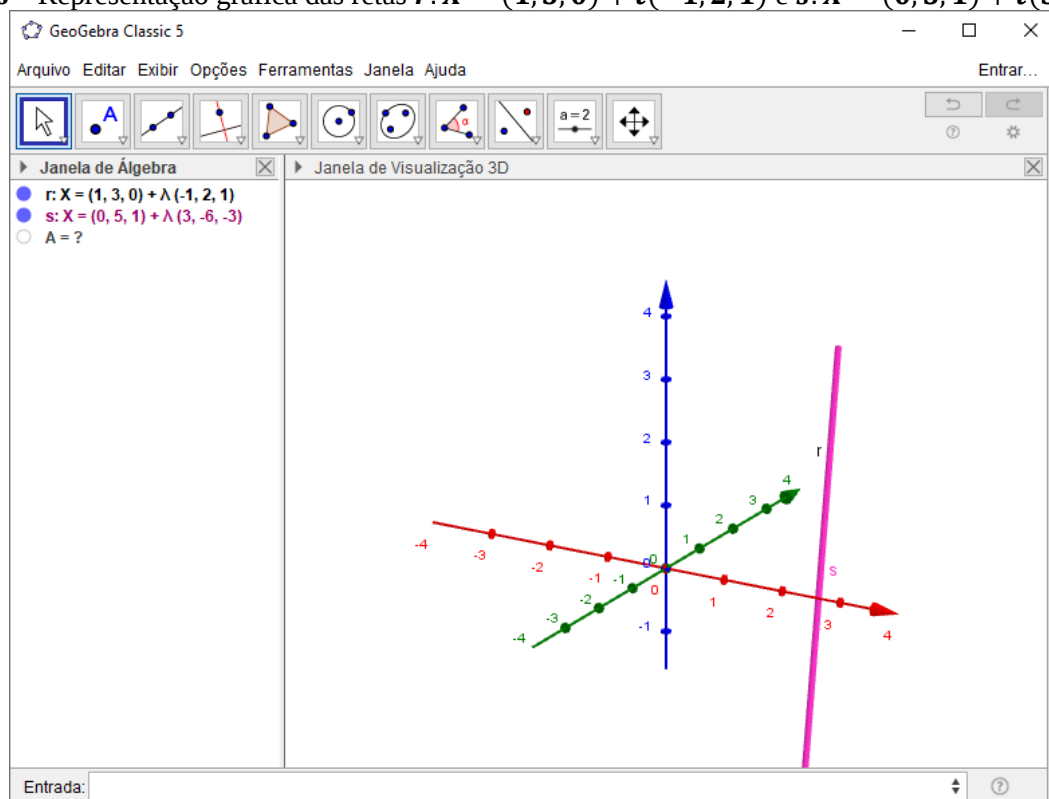
Fonte: Autoria própria, 2020.

Nesse caso, é fácil notar que essas retas são paralelas, já que o gráfico deixa isso claro, não havendo intersecção dessas retas. Além disso, podemos observar, por meio da Janela de Álgebra, que os vetores diretores dessas retas são linearmente dependentes, pelo fato de serem múltiplos mutuamente. Assim, podemos concluir que a posição relativa desse par de retas segue o exposto pela definição vetorial de retas paralelas.

Já o par de retas composto por $r: X = (1, 3, 0) + t(-1, 2, 1)$ e $s: X = (0, 5, 1) + t(3, -6, -3)$ gera o gráfico observado na figura 6, após a inserção das suas respectivas equações no *software* GeoGebra.

Neste caso, não é possível distinguir uma reta da outra, o que pode causar confusão ao estudar a posição relativa desse par de retas. Porém, conforme a exibição da Janela de Álgebra, podemos confirmar que as duas retas foram plotadas no gráfico, e também pode notar-se que os vetores diretores dessas retas são linearmente dependentes, podendo haver a conclusão errônea de que se trata de um par de retas paralelas.

Figura 6 – Representação gráfica das retas $r: X = (1, 3, 0) + t(-1, 2, 1)$ e $s: X = (0, 5, 1) + t(3, -6, -3)$



Fonte: Autoria própria, 2020.

Para que não haja essa conclusão, podemos fazer o uso do comando a seguir, inserindo-o no campo Entrada:

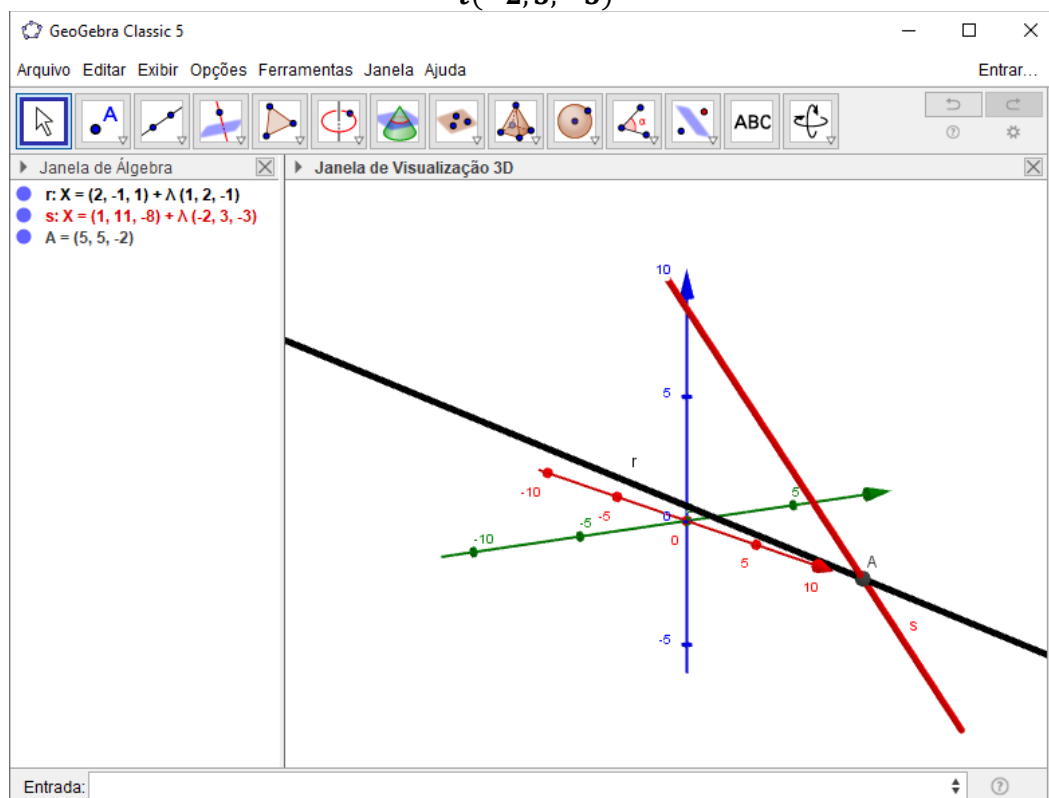
Interseção(r,s)

Após pressionar-se a tecla ENTER, podemos notar o surgimento de um ponto A igual uma interrogação (?), isso é devido ao fato de que não há apenas um ponto em comum entre essas retas, mas sim todos. Assim, podemos concluir que se trata de um par de retas coincidentes, conforme a definição vetorial.

Ao procedermos a inserção das equações das retas $r: X = (2, -1, 1) + t(1, 2, -1)$ e $s: X = (1, 11, -8) + t(-2, 3, -3)$ no *software* GeoGebra, obtemos a representação gráfica observada na figura 7.

Ao analisarmos o gráfico composto por essas duas retas, não podemos afirmar que se tratam de retas paralelas ou coincidentes. Isso também é evidenciado ao analisarmos a Janela de Álgebra, já que podemos constatar que as direções dessas retas são linearmente independentes.

Figura 7 – Representação gráfica das retas $r: X = (2, -1, 1) + t(1, 2, -1)$ e $s: X = (1, 11, -8) + t(-2, 3, -3)$



Fonte: Autoria própria, 2020.

Dessa forma, para que possamos distinguir de que se trata de um par de retas concorrentes ou reversas, faremos a inserção do seguinte comando no campo Entrada:

Interseção(r,s)

Após pressionarmos a tecla ENTER, podemos ver que há um ponto A na Janela de Álgebra. Se trata do ponto de intersecção das retas r e s, ou seja, podemos afirmar, com base na definição vetorial da posição relativa, que se trata de um par de retas concorrentes.

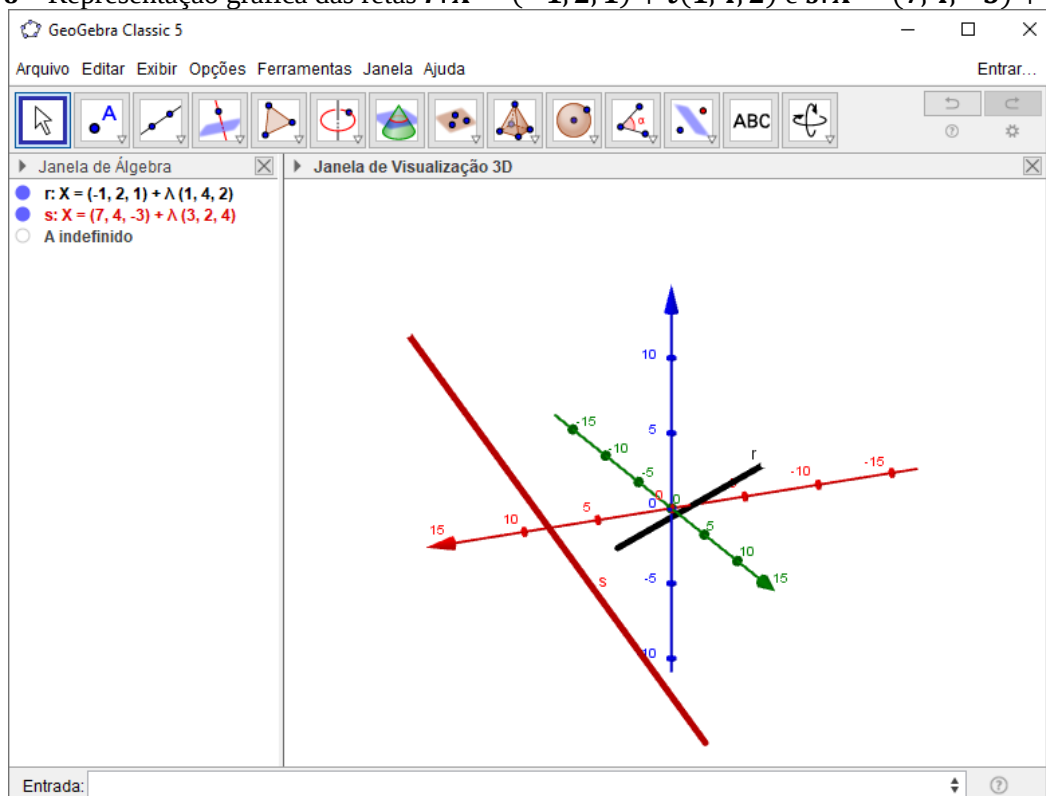
Na inserção das equações das retas $r: X = (-1, 2, 1) + t(1, 4, 2)$ e $s: X = (7, 4, -3) + t(3, 2, 4)$ no *software* GeoGebra, obtemos a visualização observada na figura 8.

Ao analisarmos a Janela de Álgebra, podemos verificar que as direções dessas retas são linearmente independentes, assim podendo ser essas retas concorrentes e reversas. Para que possamos fazer uma análise conclusiva acerca da posição relativa desse par de retas, já que restringimos as possibilidades aos dois casos mencionados, podemos fazer o uso seguinte comando, inserindo no campo Entrada:

Interseção(r,s)

Pressionando ENTER, após digitar o comando, nota-se o surgimento de “A indefinido” na Janela de Álgebra do GeoGebra. Isso acontece devido ao fato que essas retas não possuem um ponto de intersecção.

Figura 8 – Representação gráfica das retas $r: X = (-1, 2, 1) + t(1, 4, 2)$ e $s: X = (7, 4, -3) + t(3, 2, 4)$



Fonte: Autoria própria, 2020.

Logo, podemos concluir que se trata de um par de retas reversas, já que se observa as condições expressas na definição vetorial dessa posição relativa.

Em seguida, revisamos a definição de plano, bem como as formas das equações – vetorial, paramétrica e cartesiana/geral - que representam algebricamente esse objeto geométrico. Após essa revisão, mostramos os procedimentos necessários a inserção de um plano no *software* GeoGebra. Para tal, fizemos uso de dois exemplos, mostrando dois métodos, usando a equação cartesiana/geral, de maneira direta com um único comando, e através da composição de um ponto contido nesse plano e dois vetores paralelos ao plano, cuja visualização está nas figuras 9 e 10.

- Equação cartesiana/geral $4x + y - 3z + 2 = 0$
- Plano que contém $P(2, 1, -3)$ e que é paralelo a $v = (1, 1, -1)$ e $u = (3, 2, -1)$

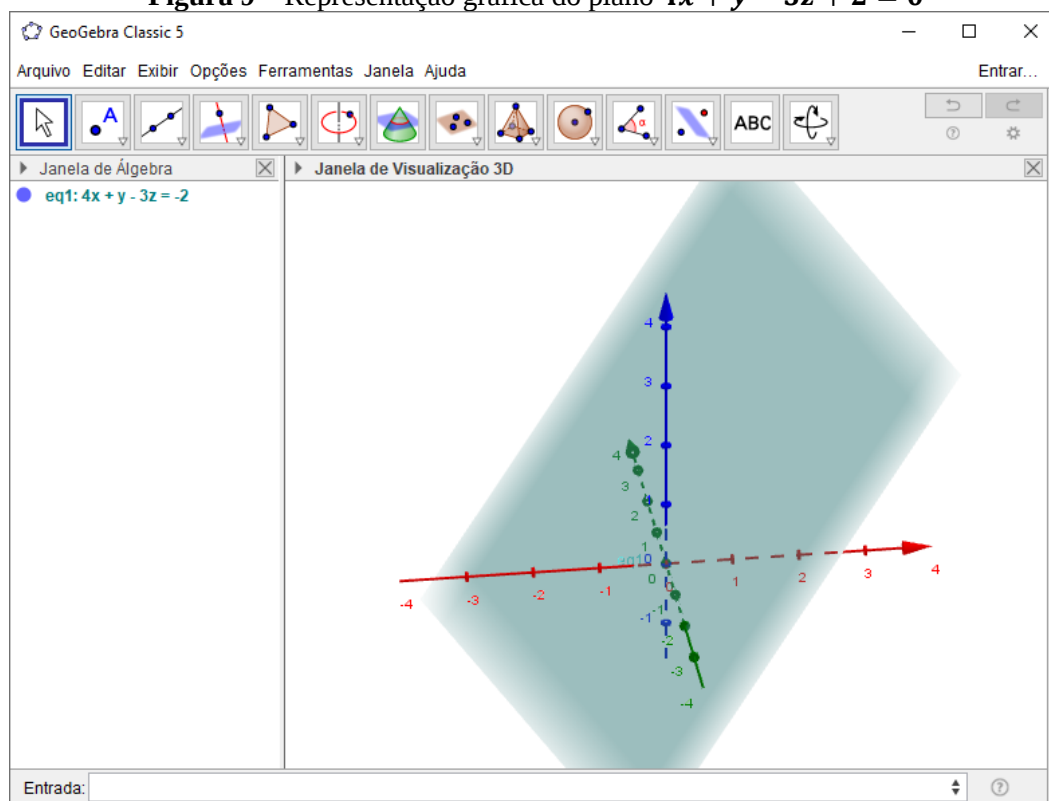
Para que o plano $4x + y - 3z + 2 = 0$ seja exibida na Janela de Visualização 3D do *software* GeoGebra, basta clicar duas vezes no ícone do *software* na área de trabalho do computador, clicar no

item Exibir, presente na barra de menus, e em seguida no item Janela de Visualização 3D, analogamente ao procedimento observado no caso das retas. No campo Entrada, a equação da reta deve ser inserida usando o comando exposto a seguir.

$$4x + y - 3z + 2 = 0$$

Após inserir o comando, basta pressionar a tecla ENTER, e o gráfico estará plotado na visualização 3D do *software* GeoGebra, conforme a figura 9.

Figura 9 – Representação gráfica do plano $4x + y - 3z + 2 = 0$



Fonte: Autoria própria, 2020.

No segundo exemplo, fizemos a inserção dos seguintes comandos, pressionando a tecla ENTER após o término de cada comando.

$$P=(2,1,-3)$$

$$v=(1,1,-1)$$

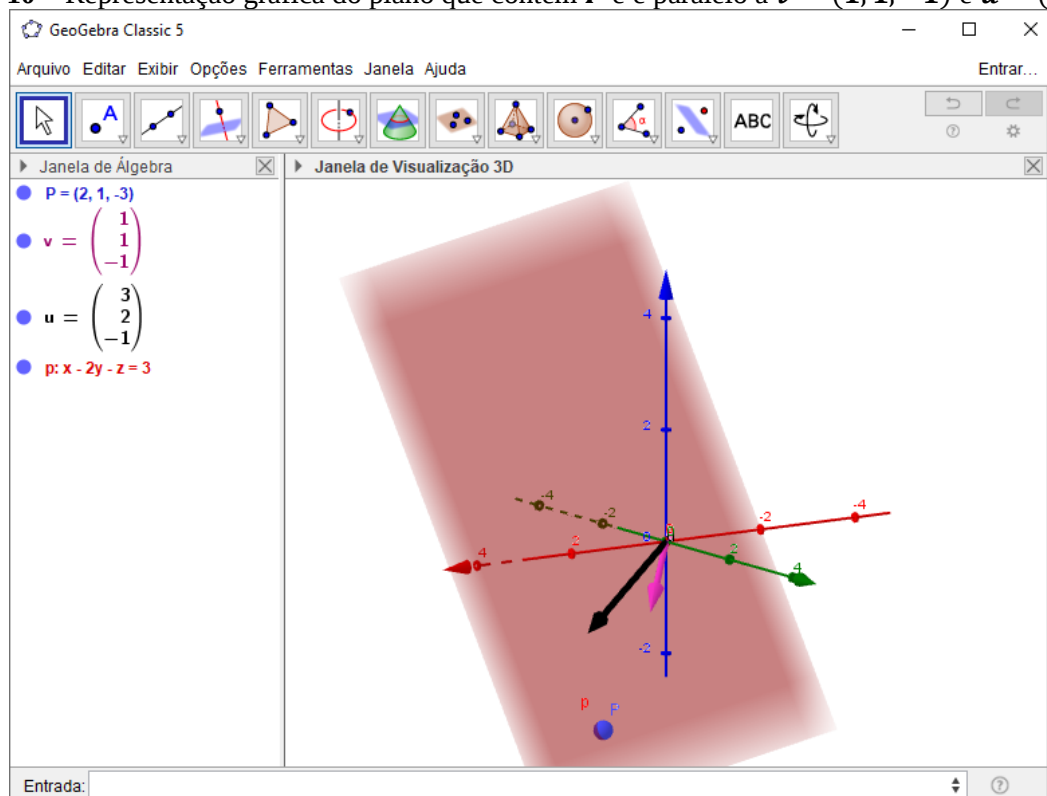
$$u=(3,2,-1)$$

$$\text{Plano}(P,v,u)$$

Após a inserção, observamos o resultado desses comandos na representação gráfica observada

na visualização 3D do *software* e na representação algébrica da equação dessa reta, presente na Janela de Álgebra, como podemos observar na figura 10. Note que o *software* GeoGebra calculou automaticamente a equação cartesiana/geral desse plano.

Figura 10 – Representação gráfica do plano que contém P e é paralelo a $v = (1, 1, -1)$ e $u = (3, 2, -1)$



Fonte: Autoria própria, 2020.

Por questão de conveniência, o método adotado, posteriormente, no estudo das posições relativas dos planos foi o primeiro, almejando-se um melhor aproveitamento do tempo destinado a aplicação da oficina. Ressaltamos um comportamento observado no *software* GeoGebra, que simplifica de maneira automática a equação do plano. Em seguida, solicitamos aos discentes que fizessem a inserção de alguns planos no GeoGebra, de modo a fixar o método empregado no estudo.

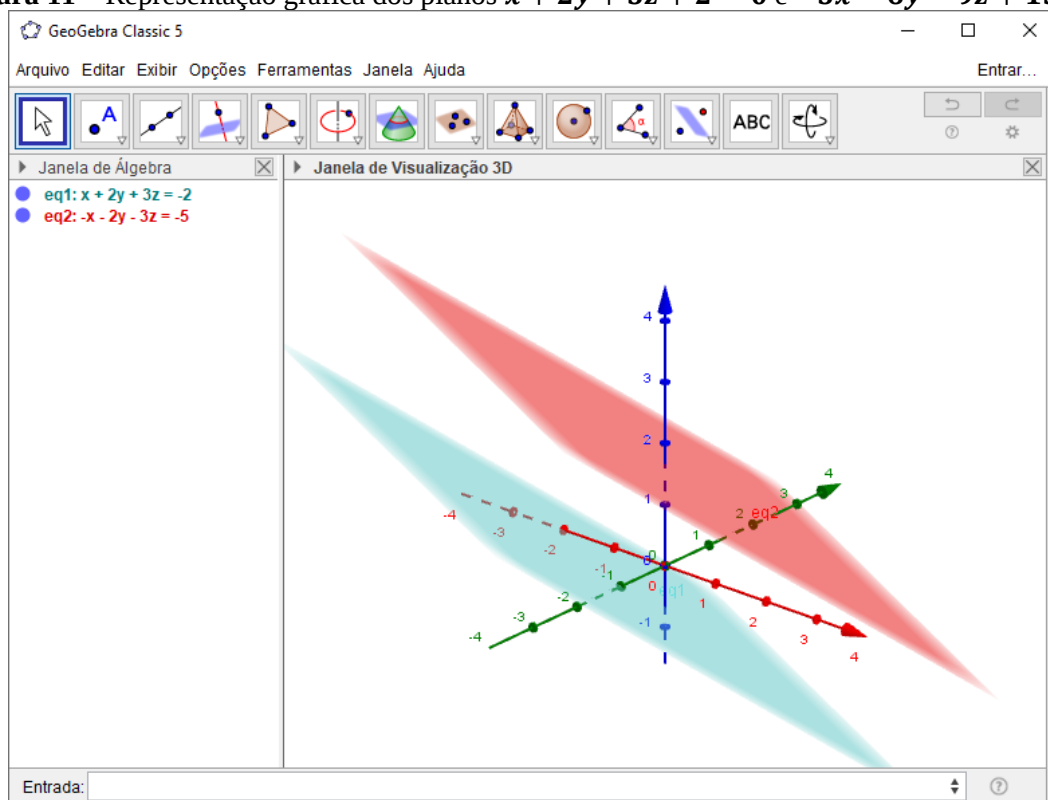
Em seguida, procedemos uma breve revisão sobre as definições das posições relativas de um par de planos, explicando o comportamento algébrico que observado quando os planos são paralelos, coincidentes, secantes/concorrentes ou perpendiculares. Depois dessa revisão, expomos o procedimento pertinente ao estudo da posição relativa de um par de planos por meio do GeoGebra, através da análise do gráfico plátano no *software* e uso dos comandos descritos. Usamos os seguintes exemplos para explicar esse procedimento:

- Planos paralelos: $x + 2y + 3z + 2 = 0$ e $-3x - 6y - 9z + 15 = 0$
- Planos coincidentes: $2x + y - 3z + 2 = 0$ e $-4x - 2y + 6z - 4 = 0$

- Planos secantes/concorrentes e Planos perpendiculares: $x + 2y + 3z + 2 = 0$ e $3x - 6y + 4z + 2 = 0$

Ao inserirmos os planos representados pelas equações $x + 2y + 3z + 2 = 0$ e $-3x - 6y - 9z + 15 = 0$, obtemos a visualização observada na figura 11.

Figura 11 – Representação gráfica dos planos $x + 2y + 3z + 2 = 0$ e $-3x - 6y - 9z + 15 = 0$



Fonte: Autoria própria, 2020.

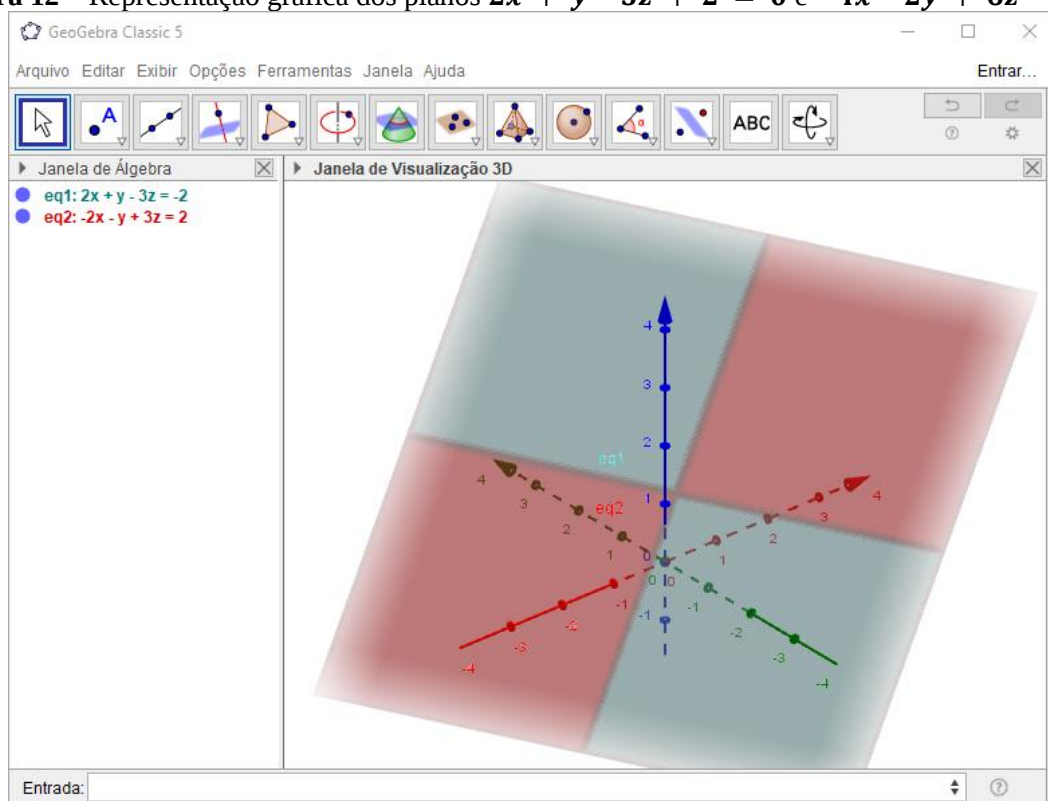
Através da análise do gráfico, podemos concluir facilmente que são planos paralelos. Podemos também verificar ao analisarmos a Janela de Álgebra, já que podemos ver que os vetores normais desses planos são linearmente dependentes.

Logo, verifica-se que se trata de um par de planos paralelos, atendendo os requisitos expressos na definição da posição relativa.

Quando inserimos os planos representados pelas equações $2x + y - 3z + 2 = 0$ e $-4x - 2y + 6z - 4 = 0$, vemos a representação que pode ser vista na figura 12.

Podemos ver esses dois planos estão no mesmo lugar, o que pode ser visualizado de uma melhor forma alterando-se a cor de um desses planos. Além disso, podemos ver na Janela de Álgebra que os vetores normais desses planos são linearmente dependentes e que todos os coeficientes das equações desses planos são proporcionais, isto é, a segunda equação, hipoteticamente, foi obtida ao multiplicar todos os coeficientes da primeira equação, nesse caso em particular, por -1.

Figura 12 – Representação gráfica dos planos $2x + y - 3z + 2 = 0$ e $-4x - 2y + 6z - 4 = 0$



Fonte: Autoria própria, 2020.

Dessa forma, com base na definição da posição relativa, podemos afirmar que se tratam de planos coincidentes.

Ao inserirmos as equações $x + 2y + 3z + 2 = 0$ e $3x - 6y + 4z + 2 = 0$, obtemos os planos plotados no gráfico observado na figura 13.

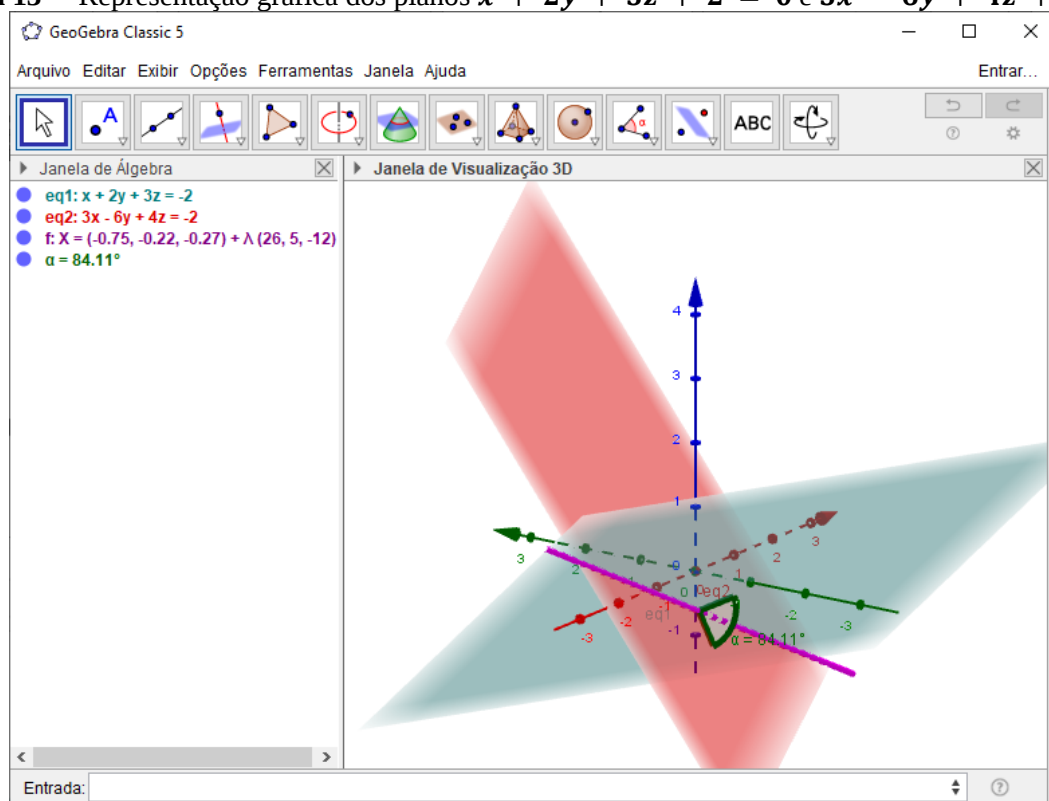
Podemos ver, ao analisar o gráfico, que esses planos se interceptam. Isso pode ser constatado ao analisarmos a Janela de Álgebra, onde se nota que os vetores normais desses planos são linearmente independentes. Isso nos dá duas possibilidades: esses planos são concorrentes/secantes ou perpendiculares.

Para se chegar a uma conclusão a respeito da posição relativa desse par de planos, digitamos o comando a seguir no campo Entrada:

$\hat{\text{Angulo}}(\text{eq1}, \text{eq2})$

Após pressionarmos a tecla ENTER, podemos ver que na Janela de Álgebra surgiu um ângulo alfa, e que vemos de forma clara a abertura desse ângulo na janela de visualização 3D. Nesse caso em particular, vemos que alfa é um ângulo obtuso. Assim, caracteriza-se que esses dois planos são planos concorrentes/secantes. Porém, caso alfa fosse reto, esses planos seriam perpendiculares.

Figura 13 – Representação gráfica dos planos $x + 2y + 3z + 2 = 0$ e $3x - 6y + 4z + 2 = 0$



Fonte: Acervo pessoal, 2020.

Em ambos os casos, a intersecção desse par de planos será uma reta. Digitaremos o seguinte comando no campo Entrada:

`Interseção(eq1,eq2)`

Após pressionar ENTER, surge na Janela de Álgebra a equação vetorial dessa reta, e na visualização 3D vemos o gráfico dessa reta.

Diante do tempo consumido pela explanação realizada até esse ponto, decidimos por não abordar o estudo de posições relativas de uma reta e um plano, que foi inicialmente planejado para também ser aplicado nessa oficina.

Dessa forma, os discentes que participaram da oficina puderam ver que o GeoGebra apresenta ferramentas relevantes para o estudo de retas e planos, proporcionando uma visualização gráfica com múltiplas perspectivas de visão, alterações de cores para uma melhor compreensão, possibilidade de análise das características desses objetos.

Consideramos que esses discentes nunca haviam feito um estudo dos conteúdos da disciplina Cálculo Vetorial e Geometria Analítica com o auxílio de *softwares* de representação gráfica, porém o *software* GeoGebra já era familiar a alguns participantes. Aliado ao fato de que as ferramentas

disponibilizadas pelo GeoGebra que empregamos nesse estudo são pouco utilizadas, já que não são acessíveis pelos ícones da interface gráfica do *software*, julgamos necessária a apresentação dos métodos de uso do *software* de maneira geral, e também de forma específica ao estudo de retas e planos.

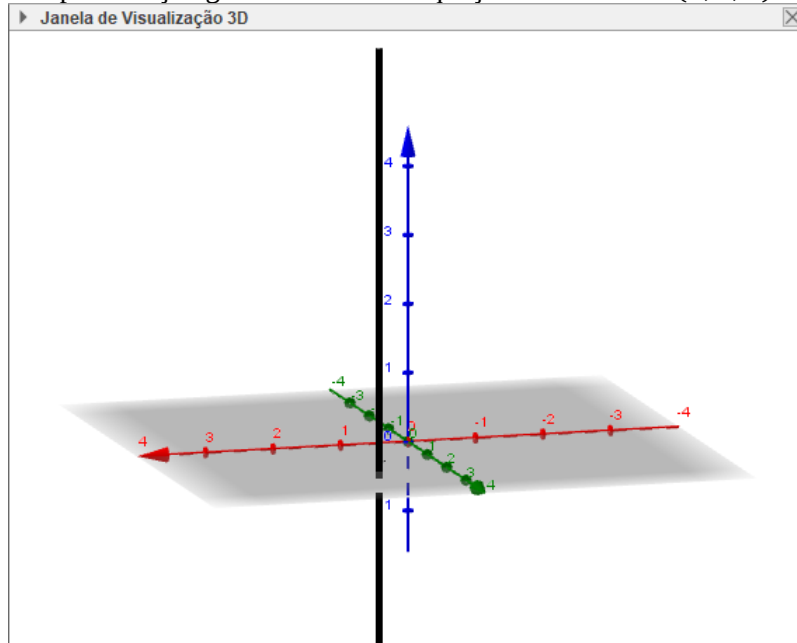
Em seguida, propomos algumas atividades com a utilização do *software* GeoGebra, para que os discentes partícipes da oficina pudessem pôr em prática as teorias estudadas, de forma a construírem o seu conhecimento através do uso das ferramentas disponíveis no GeoGebra.

Na primeira atividade proposta, solicitamos aos discentes que estudassem a posição relativa da reta r de equação vetorial $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(0, 0, -6)$ em relação ao eixo das cotas. Em seguida, solicitamos que, também, estudassem a posição relativa de r em relação aos eixos das abcissas e das ordenadas, por meio da análise do gráfico e da janela de álgebra, mostrados no GeoGebra.

Dos 20 discentes que participaram do estudo, 12 conseguiram identificar que a reta r é paralela ao eixo das cotas, 6 não conseguiram e 2 não chegaram a nenhuma conclusão. Isso significa que 60% dos participantes conseguiram identificar corretamente, por meio da análise do gráfico, a posição relativa desses dois objetos. Os participantes que chegaram a conclusões errôneas podem ter o feito dada uma manipulação insuficiente da visualização 3D, já que a análise estática sem manipulação da perspectiva da visão tridimensional pode gerar conclusões erradas, devido a uma ilusão de ótica, que pode ser observada na figura 14.

Ainda na primeira atividade, solicitamos que os discentes estudassem a posição relativa da reta r com relação aos eixos das abcissas e das ordenadas. Essa reta é reversa a ambos os eixos; 15% chegaram à conclusão que a reta r e o eixo das abcissas são reversos e 5% concluíram que r e o eixo das ordenadas são reversos.

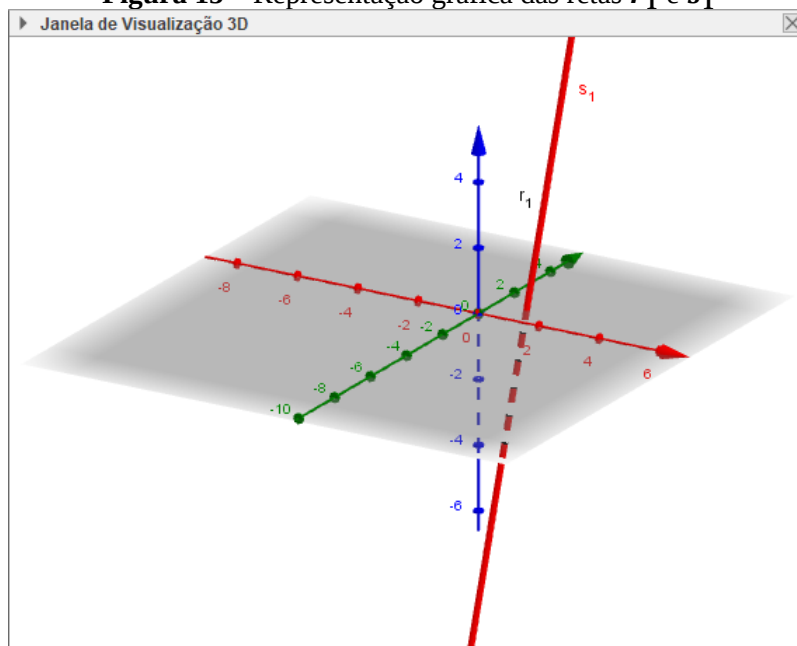
Figura 14 – Representação gráfica da reta de equação vetorial $X = (1, 2, 3) + t(0, 0, -6)$



Fonte: Oficina Pedagógica, 2020.

Na segunda atividade, solicitamos que os discentes estudassem as posições relativas dos pares de retas dados, e mostrassem a intersecção dessas retas quando houvesse. O primeiro caso foi o das retas $r_1: (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(0, 1, 3)$ e $s_1: x = 1; y = 3 + 2t; z = 6 + 6t$, vistas no gráfico observado na figura 15.

Figura 15 – Representação gráfica das retas r_1 e s_1

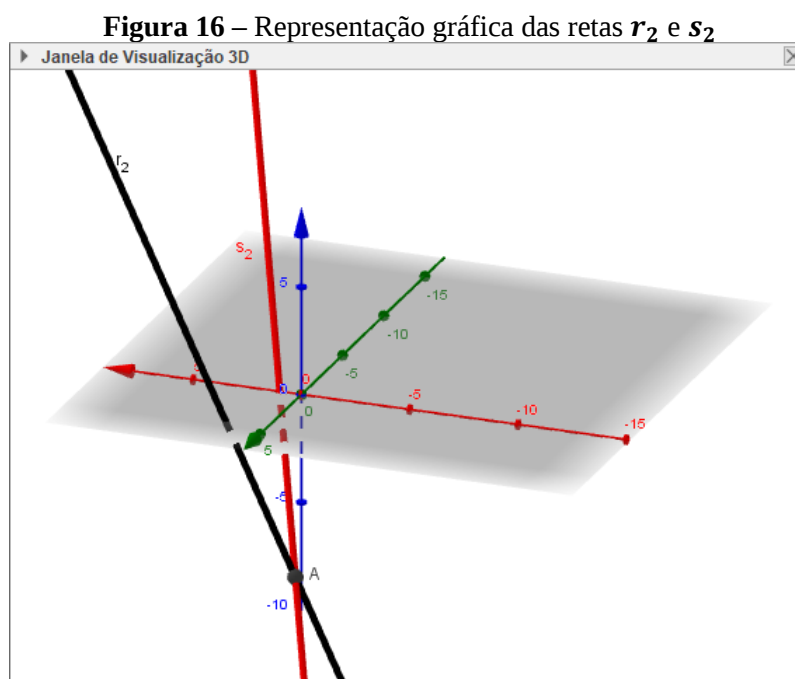


Fonte: Oficina Pedagógica, 2020.

Nesse caso, sete discentes concluíram que essas retas são coincidentes, 4 concluíram que são concorrentes e nove não chegaram à conclusão alguma. Dessa forma, 35% dos participantes conseguiram identificar a posição relativa correta.

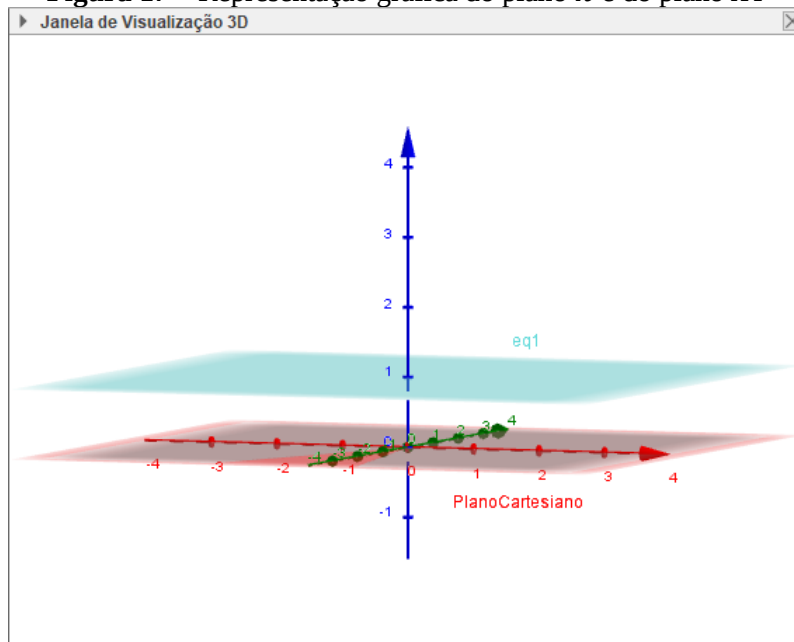
Já no segundo caso da segunda atividade, solicitamos que os discentes estudassem a posição relativa das retas $r_2: (x, y, z) = (8, 1, 9) + t(2, -1, 3)$ e $s_2: x - 3 = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-4}{2}$, representadas no gráfico da figura 16.

Apenas um participante concluiu que essas retas são concorrentes, oito afirmaram que são reversas, e onze não concluíram nada. Assim, 5% identificaram corretamente a posição relativa desse par de retas. Porém, nenhum dos participantes mostrou o ponto de intersecção dessas retas, que está no ponto $(-2, 6, -6)$.



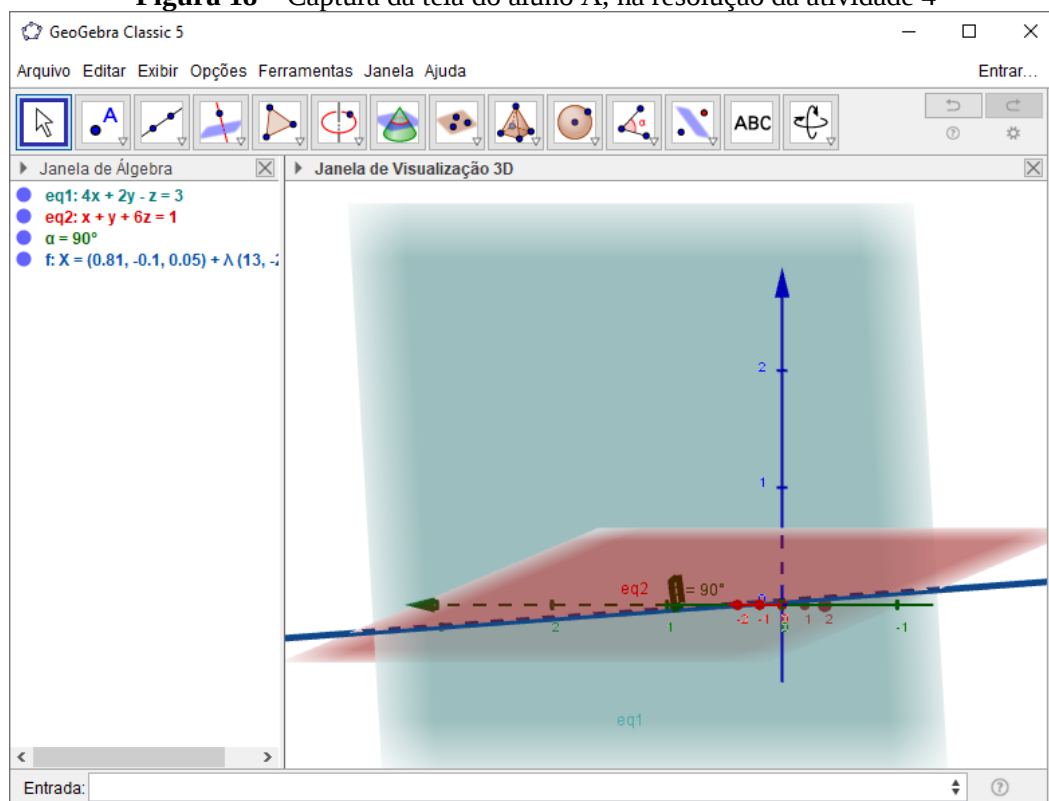
Fonte: Oficina Pedagógica, 2020.

Na terceira atividade, foi solicitado que os discentes verificassem a posição relativa do plano $\pi: z - 1 = 0$ e o plano XY, o plano cartesiano, os quais podemos visualizar na figura 17. Cinco participantes afirmaram que esses planos são paralelos, um afirmou que são coincidentes e um que são perpendiculares. Treze discentes não responderam. Logo, 25% dos participantes conseguiram concluir que esses planos são paralelos, assim chegando à posição relativa correta para este caso.

Figura 17 – Representação gráfica do plano π e do plano XY 

Fonte: Oficina Pedagógica, 2020.

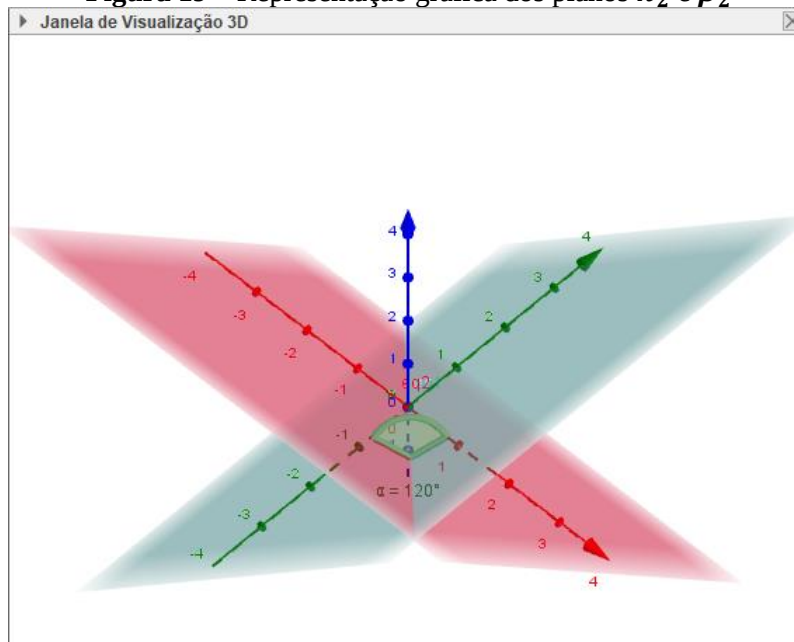
Na atividade quatro, questionamos se os planos $\pi_1: 4x + 2y - z - 3 = 0$ e $\beta_1: x + y + 6z - 1 = 0$ são perpendiculares ou secantes. Cinco discentes afirmaram que esses planos são perpendiculares e um afirmou que são secantes; quatorze não chegaram a tecer alguma conclusão. Dessa forma, 25% chegaram a identificar que esses planos são perpendiculares, sendo essa a posição relativa pertinente a esse par de planos. Na figura 18 podemos ver a construção realizada pelo aluno A para responder essa atividade.

Figura 18 – Captura da tela do aluno A, na resolução da atividade 4

Fonte: Oficina Pedagógica, 2020.

Ainda na atividade quatro, questionamos se a reta intersecção desses planos era concorrente ao eixo das ordenadas. Um participante respondeu não, cinco responderam que sim e quatorze não teceram conclusão alguma. Assim, 5% conseguiram identificar corretamente a não existência dessa intersecção.

Na quinta atividade proposta, questionamos os participantes acerca da posição relativa dos planos $\pi_2: x - z = 0$ e $\beta_2: y + z = 0$. Nesse caso, dois discentes afirmaram que os planos concorrem de alguma forma, dois fizeram a afirmação de que esses planos são reversos e dezessete não chegaram a conclusão alguma. Assim, nenhum participante afirmou, precisamente, a posição relativa desse par de planos, que são secantes, conforme a figura X. Porém, há de se considerar o fato de que 10% dos participantes reconheceram que esses planos possuem intersecção.

Figura 19 – Representação gráfica dos planos π_2 e β_2 

Fonte: Oficina Pedagógica, 2020.

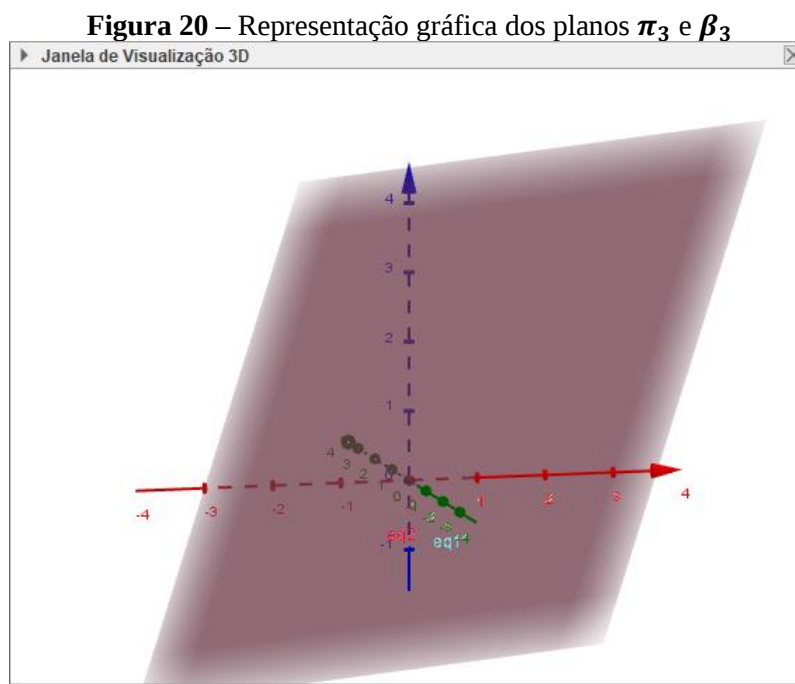
Ainda questionamos na atividade cinco se a reta intersecção de π_2 e β_2 interceptava a origem o espaço cartesiano. Respondendo a essa pergunta, dois participantes afirmaram que não, um afirmou que sim e dezessete não responderam. Assim, 5% conseguiram visualizar corretamente o gráfico, e assim afirmarem que essa intersecção existia.

Devido ao fato de que não houve tempo para que mencionássemos o estudo das posições relativas de reta e plano, aplicamos a atividade seis como a última solicitada, de um total de dez planejadas. Assim, solicitamos que os participantes mostrassem a posição relativa dos planos $\pi_3: -x + 2y + z + 1 = 0$ e $\beta_3: -2x + 4y + 2z + 2 = 0$. Um discente concluiu que esses planos eram paralelos, e dezenove não teceram conclusões. Dessa forma, nenhum discente identificou que se tratavam de planos coincidentes, posição relativa que pode ser vista no gráfico observado na figura 20.

De fato, o tempo destinado a resolução das atividades foi sensivelmente curto, com aproximadamente 50 minutos, de forma que esse fato pode ter influenciado de maneira negativa as repostas das atividades. No entanto, há de ressaltar-se que boa parte das técnicas e comandos empregados no estudo abordado nessa oficina não eram de pleno conhecimento de todos os partícipes, o que pode, concomitantemente, ter influenciado a qualidade da aprendizagem pretendida.

Podemos afirmar que o estudo das posições relativas de um par de retas conseguiu um bom aproveitamento, ao considerarmos que parcela notável dos participantes da oficina conseguiu identificar as propriedades presentes nas equações vetoriais das retas e verificar seus reflexos na aparência dos gráficos observados por meio do *software* GeoGebra, além de formular técnicas para que houvesse uma manipulação mais otimizada da ferramenta empregada. Já o aproveitamento

observado no estudo das posições relativas dos planos pode ser considerado regular, tendo os discentes conseguido identificar corretamente parte das situações propostas nas atividades, e também reconhecendo parcialmente a posição relativas dos planos nos casos em que não souberam determinar exatamente qual tipo ocorria exatamente.



Fonte: Oficina Pedagógica, 2020.

Assim, chegamos a constatar que o *software* GeoGebra proporcionou aos alunos tanto a observação das características dos gráficos dessas retas e planos, quanto as propriedades observadas em suas equações, podendo assim tecer uma associação entre o objeto algébrico e o objeto geométrico, dessa forma fortalecendo a aprendizagem de conceitos vistos anteriormente com recursos tradicionais, assim concebendo novos conhecimentos.

4.2 Análise e discussão dos Dados do Questionário

Foi aplicado um questionário aos discentes da disciplina Introdução à Álgebra Linear, imediatamente após a realização da oficina pedagógica. Esse questionário dispunha de 16 questões, sendo 15 fechadas e uma aberta, versando sobre o estudo de retas e planos por meio do *software* GeoGebra e das concepções dos discentes acerca das contribuições que os *softwares* ofertam para a aprendizagem de outros conteúdos da Matemática.

A análise dos dados coletados por meio do questionário é mostrada por meio de tabelas, referindo-se ao ambiente de ensino dotado de recursos de informática, ao uso de *softwares* no processo de ensino, desempenho do *software* GeoGebra no estudo de retas e planos, metodologia que

mostra facilidade de uso, desenvolvimento de visualização e compreensão dos conceitos, avaliação do *software* GeoGebra no estudo de retas e planos, recurso facilitado que vem a contribuir com a aprendizagem e o estudo das retas e planos por meio do uso de *software*. O percentual mostrado nas tabelas a seguir referencia-se a um total de 17 respostas obtidas dos discentes envolvidos nesta pesquisa.

A seguinte tabela mostra as respostas referentes as duas primeiras perguntas presentes no questionário. De um total de 17 alunos, todos afirmaram que o ambiente de ensino que conta com recursos de informática é capaz de tornar as aulas mais atrativas. Também houve unanimidade quanto a afirmação de que os conteúdos matemáticos são mais compreensíveis quando são aprendidos com o uso de *softwares*.

Tabela 1 – Questionamentos acerca da informatização do ambiente de ensino

Questionamento	Sim	Não	Total	%
Você acha que o ambiente de ensino que conta com recursos de informática é capaz de tornar as aulas mais atrativas?	17	0	17	100%
Na sua opinião, os conteúdos matemáticos são mais compreensíveis quando são aprendidos com o auxílio de <i>softwares</i> ?	17	0	17	100%

Fonte: Estudo de Caso, 2020.

Assim, se ressalta que o uso de ambientes dotados com recursos de informática configura-se um bom auxílio para as aulas de Matemática, o que pode vir a influenciar positivamente o processo de aprendizagem.

Na tabela 2, mostra-se as repostas das terceira e quarta questões, que versavam acerca do conhecimento, por parte dos discentes, do GeoGebra e de outros *softwares* de representação gráfica. Observamos que 14 discentes já conheciam o *software* em questão, enquanto 3 ainda não o conheciam. Quanto a outros *softwares*, 13 afirmaram que não conheciam e 4 afirmaram que conheciam. Os outros *softwares* citados foram o Autocad, Cabri geométrico, Winplot e Derivate Calculator.

Tabela 2 – Questionamentos acerca dos *softwares* conhecidos pelos discentes

Questionamentos	Sim	%	Não	%	Total	Total %
Já conhecia o <i>software</i> GeoGebra?	14	82,4%	3	17,6%	17	100%
Você conhece outros <i>softwares</i> /aplicativos de representação gráfica?	4	23,5%	13	76,5%	17	100%

Fonte: Estudo de Caso, 2020.

Na tabela 3, apresenta-se as respostas das questões 5, 6 e 7, que versam sobre os benefícios da utilização do *software* GeoGebra no estudo de retas e planos. Observa-se na tabela que 94,1% dos discentes afirmaram que o GeoGebra permite visualizar e compreender melhor as propriedades das posições relativas de retas e planos, no estudo proposto pela oficina pedagógica. Dezesesseis discentes

concordaram que o uso do *software* GeoGebra é um método que pode ser considerado de fácil compreensão para o estudo de retas e planos, correspondendo a 94,1% das respostas obtidas. Verifica-se, também, que 94,1% apontaram que o uso do GeoGebra lhes permitiu investigar conceitos e comprovar teorias formuladas acerca do conteúdo abordado.

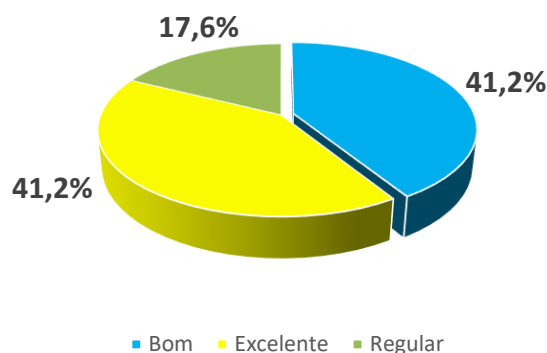
Tabela 3 – Benefícios do *software* GeoGebra

Questionamentos	Sim	%	Não	%	Total	Total %
O <i>software</i> GeoGebra lhe permitiu visualizar e compreender melhor as propriedades das posições relativas de retas e planos observadas no estudo proposto pela oficina?	16	94,1%	1	5,9%	17	100%
Na sua opinião, o uso do <i>software</i> GeoGebra é um método que pode ser considerado de fácil compreensão para o estudo de retas e planos?	16	94,1%	1	5,9%	17	100%
O uso do GeoGebra lhe permitiu investigar conceitos sobre o conteúdo abordado e comprovar teorias que você fez sobre esse conteúdo?	16	94,1%	1	5,9%	17	100%

Fonte: Estudo de Caso, 2020.

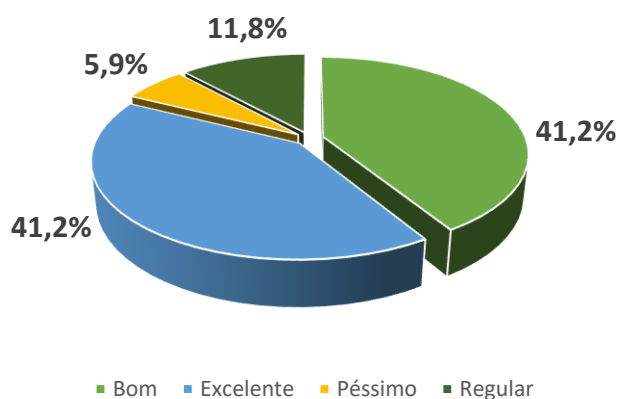
Dessa forma, podemos concluir que o GeoGebra oferece benefícios ao processo de ensino e aprendizagem do estudo de retas e planos, ao considerarmos que a maioria dos discentes afirmou que, a partir do estudo proposto com o *software*, que visualizaram e compreenderam melhor as propriedades das posições relativas, que o uso do *software* é um método de fácil compreensão para o estudo de retas e planos e que o uso do GeoGebra os permitiu investigar conceitos e comprovar teorias sobre o conteúdo abordado.

Os gráficos 1 e 2 mostram a avaliação dos discentes acerca da utilização do *software* GeoGebra no estudo das retas e no estudo dos planos, respectivamente oitava e nona perguntas. Com relação aos 17 discentes que responderam a oitava questão, 41,2% consideraram que o uso do *software* no estudo das retas foi excelente, 41,2% afirmaram que foi bom e 17,6% afirmaram que o uso do GeoGebra foi regular. Nenhum dos discentes considerou o uso do GeoGebra no estudo das retas ruim ou péssimo.

Gráfico 1 – Opinião dos discentes acerca do uso do GeoGebra no estudo das retas

Fonte: Estudo de Caso, 2020.

Na nona pergunta, que questionava os discentes acerca da avaliação do uso do *software* GeoGebra no estudo dos planos, 41,2% dos discentes consideraram que o uso foi excelente, 41,2% afirmaram que foi bom, 11,8% afirmaram que foi regular e 5,9% afirmaram que foi péssimo. Nenhum dos discentes chegou a afirmar que o uso do GeoGebra foi ruim.

Gráfico 2 – Opinião dos discentes acerca do uso do GeoGebra no estudo dos planos

Fonte: Estudo de Caso, 2020.

Assim, concluímos que os discentes tiveram uma boa experiência quanto ao uso do *software* GeoGebra no estudo de retas e planos, sendo a maioria absoluta das avaliações positivas.

Nas questões 10, 11, 12, 13 e 14, questionamos os discentes acerca das contribuições do *software* GeoGebra no estudo de retas e planos, cujas respostas observamos na tabela 4. Na décima questão, de maneira unânime, os discentes afirmaram que o *software* GeoGebra é um recurso facilitados na aprendizagem do conteúdo abordado no estudo de retas e planos. Na décima primeira questão, 94,1% dos discentes concluíram que o *software* GeoGebra contribui efetivamente para a aprendizagem do conteúdo abordado no estudo de retas e planos. Na décima segunda questão, 94,1% dos discentes afirmaram que o *software* GeoGebra pode ser utilizado no processo de aprendizagem de outros conteúdos da Geometria Analítica. Já na décima terceira e décima quarta questões, os

discentes, de forma unânime, afirmaram que o uso de representações gráficas no GeoGebra é benéfico em relação ao uso de representações em papel ou no quadro no estudo de retas e planos e que o auxílio de *softwares* pode facilitar a aprendizagem de conteúdos observados nas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática.

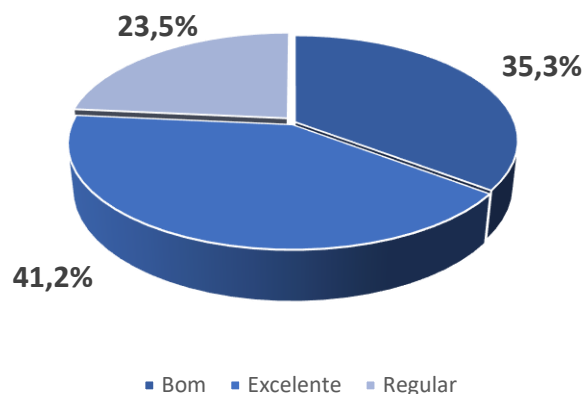
Tabela 4 – Contribuições do *software* GeoGebra no estudo de retas e planos

Questionamentos	Sim	%	Não	%	Total	Total %
Você considera que o <i>software</i> GeoGebra é um recurso facilitador na aprendizagem do conteúdo abordado no estudo de retas e planos?	17	100%	0	0%	17	100%
O <i>software</i> GeoGebra contribui efetivamente para a aprendizagem do conteúdo abordado no estudo de retas e planos?	16	94,1%	1	5,9%	17	100%
O <i>software</i> GeoGebra, na sua opinião, pode ser utilizado no processo de aprendizagem de outros conteúdos da Geometria Analítica?	16	94,1%	1	5,9%	17	100%
O uso de representações gráficas no <i>software</i> GeoGebra oferece benefícios em relação ao uso de representações em papel ou no quadro no estudo de retas e planos?	17	100%	0	0%	17	100%
O auxílio proporcionado pela utilização de <i>softwares</i> pode facilitar a aprendizagem de conteúdos observados nas disciplinas do curso de licenciatura em Matemática?	17	100%	0	0%	17	100%

Fonte: Estudo de Caso, 2020.

Como é possível verificar na tabela, a maioria dos discentes afirmam que o *software* GeoGebra é um recurso facilitador na aprendizagem do conteúdo de retas e planos, e que esse *software* contribui para a aprendizagem desse conteúdo. Concomitantemente, indicaram que o GeoGebra pode vir a contribuir com a aprendizagem de outros conteúdos da Geometria Analítica e que o GeoGebra oferece benefícios se comparado ao trabalho tradicional em papel e no quadro. E por fim, afirmaram unanimemente que os *softwares* podem facilitar a aprendizagem dos conteúdos de outras disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática.

Na décima quinta, e última, pergunta do questionário, solicitamos aos discentes que fizessem a avaliação do estudo de retas e planos com o auxílio do *software* GeoGebra, cujas respostas podemos visualizar no gráfico 3. De toda a amostra da pesquisa, 41,2% consideraram que o estudo foi excelente, 35,3% afirmaram que foi bom e 23,5% concluíram que esse estudo foi regular. Nenhum discente chegou a considerar que o estudo foi ruim ou péssimo.

Gráfico 3 – Opinião dos discentes acerca do estudo de retas e planos

Fonte: Estudo de Caso, 2020.

Assim, constatamos que a oficina pedagógica desenvolvida com os alunos da disciplina Introdução à Álgebra Linear nos trouxe resultados relevantes no tocante ao estudo das retas e planos, considerando que os discentes envolvidos foram partícipes ativos do estudo proposto, e ainda demonstraram interesse perceptível pelo objeto e meio do estudo, e desenvolvimento junto as atividades.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo apresentar uma proposta de estudo que pudesse contribuir e facilitar o processo de aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica, vistos na disciplina Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, e, também, o desenvolvimento das técnicas de manipulação e visualização de objetos tridimensionais, fomentados pelo uso do *software* GeoGebra.

Visando atingir tal objetivos, realizamos uma revisão de literatura, onde buscamos saber o contexto histórico que originou a Geometria Analítica, observamos as recomendações expressas nos documentos oficiais os conteúdos abordados por esse estudo, além de buscar outras experiências com o uso de *softwares* no ensino do conteúdo da Geometria Analítica, bem como o próprio emprego do GeoGebra no estudo das retas e planos. Tal estudo nos conduziu a oferecer uma resposta a questão do nosso trabalho: Quais as contribuições do uso do *software* GeoGebra, como recurso metodológico, no processo de ensino e aprendizagem de retas e planos?

Após o desenvolvimento desse estudo, observamos que os discentes, mesmo encontrando-se em pleno curso de Licenciatura em Matemática, mostram várias dificuldades na aprendizagem dos conteúdos de Geometria Analítica, especialmente no tocante a relacionar as manipulações algébricas às mudanças de aparência das representações gráficas a quais estão relacionadas. Contudo, vale salientar que os dados coletados no ensejo da realização da oficina nos permitem afirmar que o *software* GeoGebra se caracteriza como uma importante ferramenta, contribuindo de maneira

sensivelmente positiva para que essas dificuldades sejam sanadas de modo que haja uma construção eficiente e eficaz dos saberes e conhecimentos dos discentes. Por isso, foi possível oferecer uma resposta a questão da pesquisa, de maneira positiva.

Partindo dessa constatação, e ao considerar que o estudo das retas e planos desenvolvido apenas com o emprego das técnicas tradicionais, isto é, por meio de apenas cálculos algébricos, em sua boa maioria, com raras exceções de representações deficientes em papel ou no quadro, se torna mais difícil, já que tratam-se de objetos com três dimensões, fica evidenciada a urgente necessidade da aplicação de novas e eficientes metodologias, as quais podem fazer o emprego de *softwares* nesse estudo.

Relacionando-se ao estudo de retas e planos com o auxílio do *software* GeoGebra, verificamos que de todos os discentes envolvidos na pesquisa, apenas quatro concluíram que esse estudo é regular, quando trezes afirmaram que o estudo é bom ou excelente. Diante desse fato, fica bem claro que os *softwares* aliados ao estudo de retas e planos favorecem positivamente a aprendizagem dos discentes.

Concomitantemente, constatamos que o GeoGebra facilitou, principalmente, a visualização gráfica das posições relativas dos objetos estudados, além de proporcionar uma melhor visualização das intersecções entre esses próprios objetos, além das intersecções com os eixos e planos coordenados. Também se verificou que houve uma melhor observação do comportamento algébrico pertinente a caracterização das posições relativas tanto de retas, quanto de planos, permitindo que os discentes pudessem comprovar as propriedades observadas no estudo tradicional realizado na disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica.

Os alunos da disciplina Introdução à Álgebra Linear apresentaram uma excelente aceitação do estudo desenvolvido, mesmo ao considerarmos que os mesmos já se encontravam, no mínimo, a quase um semestre da conclusão do curso da disciplina de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica. Todos os discentes afirmaram que o suporte do GeoGebra pode vir a contribuir e facilitar o processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos da própria Geometria Analítica, como de conteúdos de outras disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática.

De modo geral, o *software* GeoGebra facilitou a compreensão dos conceitos observados e a visualização das representações gráficas e características algébricas e geométricas dos objetos analisados, assim instigando os discentes a buscar a comprovação de conjecturas formuladas no decorrer do processo de aprendizagem, a construir objetos e buscar as devidas soluções.

É importante salientar que o professor deve ter a plena consciência de que o uso de recursos tecnológicos no processo de ensino não resolve por si só as deficiências que sempre se observa na aprendizagem dos alunos. Para obter-se aprendizagem eficiente, eficaz e significativa, é dever desse profissional realizar uma boa pesquisa acerca das potencialidades e prejuízos associados ao emprego de cada metodologia a ser utilizada, e nisto também se situa o uso de *softwares*. Acreditamos que os

aspectos vantajosos desses tipos de ferramentas didáticas decorrerão da maneira que sejam empregados em sala de aula.

Recomendamos a produção de pesquisas futuras uma investigação mais profunda sobre o tema abordada, com uma maior amostra de alunos. Também sugerimos que sejam investigadas as conexões das propriedades das operações de produto vetorial e produto misto com as posições relativas abordadas. Ainda propomos a inserção de docentes de cursos de licenciatura em Matemática, de forma que possam ser averiguadas as concepções desses profissionais acerca do emprego de tecnologias no ensino.

REFERÊNCIAS

- AZEVEDO, I. M.; VASCONCELOS, A. P. L. F.; BRITO, A. J. **Um olhar sobre os softwares Calc 3D e Winplot como ferramentas subsidiadoras no ensino de vetores**. 2017. XI Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisas em Educação Matemática. UFMS – Cuiabá, MS. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/3594>. Acesso em: 06 fev. 2020.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: SEB/MEC, 2006.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2000.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática /Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. **PCN + Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.
- do Paraná. Curitiba, 2009.
- GHIGGI, I. M. F.; SCHMIDT, C. E.; KOCH, B. C. **Estudo das cônicas em um ambiente de Geometria Dinâmica**. 2013. IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática. ULBRA – Canoas, RS. Disponível em: www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/view/1150/. Acesso em: 05 fev. 2020.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.
- GUEDES, P. C. C. Aplicação do *software* GeoGebra ao ensino da geometria Analítica. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37, n. 3, p. 365-375, 2015.
- GUERRA, E. D. M.; COSTA, M. L. C. O ensino de secções cônicas: Uma abordagem utilizando investigações matemáticas mediadas pelo *software* GeoGebra. In: **Encontro Paraibano de Educação Matemática**, 7. Campina Grande: Editora Realize: 2014.
- LEMKE, M. F. S. M. **Retas e Planos na Geometria Analítica Espacial: Uma abordagem envolvendo conversões de registros semióticos com o auxílio de *software* de Geometria Dinâmica**. Dissertação (Mestrado). 2011. 302f. Universidade Bandeirante, São Paulo, 2011.
- LOTÉRIO, J. GeoGebra no curso de Engenharia Civil. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, [S.l.], v. 2, n. 2, p. 102-122, fev. 2014. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/IGISP/article/view/17801>. Acesso em: 20 fev. 2020.

NECKEL, F. A. S. Geometria Analítica e álgebra linear: a utilização do GeoGebra como ferramenta de ensino. **Revista Educação Online**, Rio de Janeiro, v. 14, n. 30, p. 153-174, jan.-abr. 2019. Disponível em: <http://educacaoonline.edu.puc-rio.br/index.php/eduonline/article/view/418>. Acesso em: 16 fev. 2020.

OLIVEIRA DA SILVA, J. **O uso do GeoGebra em dispositivos móveis**: Uma ferramenta prática para o estudo dos vetores. 57 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, 2017.

PARAÍBA. Secretaria de Estado da Educação e Cultura. **Referenciais Curriculares para o Ensino Médio da Paraíba**: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. João Pessoa: [s/n], 2006.

PAVANELO, E.; LIMA, R. Sala de Aula Invertida: a análise de uma experiência de Cálculo I. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 739-759, ago. 2017.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico]**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RICARDO, J. C.; SANTOS, R. M. Cálculo Vetorial e a Inserção Tecnológica: Um estudo introdutório com estudantes da graduação em Engenharia. **Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco**, Vitória, v. 7, n. 1, p. 29-40, jun. 2018. Disponível em: <https://ojs2.ifes.edu.br/index.php/saladeaula/article/view/920>. Acesso em: 15 fev. 2020.

RODRIGUES, G. F. **As curvas cônicas com o uso do GeoGebra**. Maceió: UFAL, 2015. 78 f. Dissertação (mestrado profissional em Matemática) – Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2015.

SILVA, D. A. **A utilização dos Softwares GeoGebra, Winplot e K3dsurf no estudo das Superfícies Quádricas**: Uma experiência com alunos do Curso de Licenciatura em Matemática. 83 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, 2017.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA. **Projeto Político-Pedagógico do Curso de Graduação em Matemática** – Modalidade: Licenciatura – Campus IV – Litoral Norte. Centro de Ciências Aplicadas e Educação. Resolução do CONSEPE N° 33/2007. Disponível em: <http://www.ufpb.br/sods/07consepe.html>.

VENTURI, J. J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. 9. ed. Curitiba, 2009.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. 2. Ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

APÊNDICES

APÊNDICE A – PROPOSTA DE ESTUDO DE RETAS E PLANOS COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA MINISTRADA NA OFICINA PEDAGÓGICA

Proposta de Estudo de Retas e Planos em Cálculo Vetorial e Geometria Analítica com o uso do GeoGebra

- DEFINIÇÃO DE RETA E SUAS EQUAÇÕES

Uma reta r é definida por um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ contido por esta, e por um vetor diretor $v = (a, b, c)$. Assim, podemos representar qualquer ponto dessa reta através da seguinte equação:

$$r: X = P + tv$$

Ou, mais usualmente:

$$r: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

Essa é a **equação geral ou cartesiana** da reta r , onde $X(x, y, z)$ é um ponto qualquer dessa reta, que é obtido através da soma de P a um múltiplo do vetor v , múltiplo esse determinado através do parâmetro t .

Isolando cada coordenada na equação anterior, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Esse sistema é nomeado **Sistema de equações paramétricas da reta r** , ou apenas **equações paramétricas de r** .

Ao isolarmos o parâmetro t , obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} t &= \frac{x - x_0}{a} \\ t &= \frac{y - y_0}{b} \\ t &= \frac{z - z_0}{c} \end{aligned}$$

Diante disso, podemos considerar que a igualdade a seguir é verdadeira

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Chamamos essa equação de **Equação simétrica de r** .

- CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DE RETAS NO GEOGEBRA

O *software* GeoGebra é capaz de construir retas utilizando as equações geral e simétrica. Porém, utilizaremos apenas a **equação geral** neste estudo.

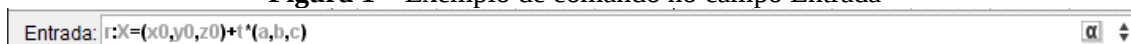
Há duas maneiras de construir essa reta:

1) Inserção da equação geral na forma $\mathbf{X} = \mathbf{P} + t\mathbf{v}$

No campo “Entrada”, insira uma equação geral, na seguinte forma:

$$r: X = (x_0, y_0, z_0) + t * (a, b, c)$$

Figura 1 – Exemplo de comando no campo Entrada



Fonte: Autoria própria, 2020.

Por exemplo, $r: X = (1, 2, -3) + t * (1, 1, -1)$ é uma equação geral que é corretamente construída para ser interpretada pelo *software* GeoGebra.

OBSERVAÇÕES:

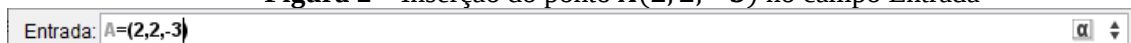
- Apesar de lidarmos com a multiplicação apenas pela justaposição da incógnita com o fator a ser multiplicado, o GeoGebra necessita da inserção explícita do operador de multiplicação (*) para compreender corretamente a equação de uma reta.
- No comando acima, a letra r identifica o objeto da reta. Você poderá especificar qualquer letra ou palavra para identificar não apenas as retas, mas como os planos, que serão tratados mais adiante.

2) Inserção da reta como a composição de ponto e vetor diretor já presentes na janela de álgebra
Podemos também construir uma equação de reta da seguinte forma:

Seja $A(2, 2, -3)$ o ponto por qual passa a reta s, tendo o vetor $d = (2, 1, -3)$ como direção. Procedemos a inserção, separadamente, desse ponto e desse vetor, para prosseguir com a construção da reta.

Primeiro passo: Insira o ponto A no GeoGebra digitando no campo entrada o texto $A=(2, 2, -3)$ e pressionando ENTER.

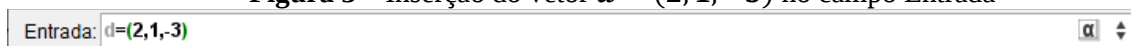
Figura 2 – Inserção do ponto $A(2, 2, -3)$ no campo Entrada



Fonte: Autoria própria, 2020.

Segundo passo: Insira o vetor d digitando no campo entrada o texto $d=(2,1,-3)$ e pressionando ENTER.

Figura 3 – Inserção do vetor $d = (2, 1, -3)$ no campo Entrada



Fonte: Autoria Própria, 2020.

OBSERVAÇÃO: O GeoGebra interpreta $a=(2,2,-3)$ como um vetor e $D=(2,1,-3)$ como sendo um ponto. Atente-se a notação para vetores e pontos, usando letra minúscula e letra maiúscula para representá-los, respectivamente.

Terceiro passo: Insira a reta s digitando no campo Entrada o texto $s:X=A+t*d$ e pressionando ENTER.

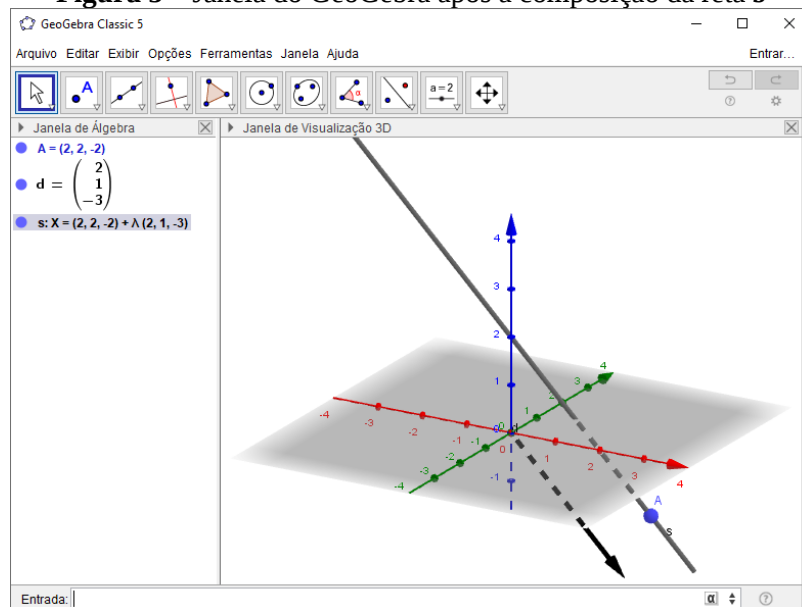
Figura 4 – Comando de inserção da reta s através do ponto A e vetor d já inseridos



Fonte: Autoria própria, 2020.

Ao fim, a sua janela do GeoGebra terá a seguinte aparência:

Figura 5 – Janela do GeoGebra após a composição da reta s



Fonte: Autoria Própria, 2020.

Por questão de conveniência, utilizaremos nesse estudo o primeiro método de inserção da equação da reta.

PRATICANDO

Insira as retas descritas a seguir:

- a) Passa por $(1,2,1)$ e tem a direção do vetor $(0,1,0)$.
- b) Equação: $(x, y, z) = (1,1,2\sqrt{2}) + t(2,3,2)$
- c) Equação: $\frac{x+1}{2} = y = \frac{z}{2}$
- d) Passa pela origem do espaço cartesiano e é perpendicular ao plano XZ .

- POSIÇÕES RELATIVAS DE UM PAR DE RETAS

As posições relativas que um par de retas podem assumir são descritas a seguir.

- **Retas Paralelas:** seus vetores diretores são paralelos, mas não possuem pontos em comum;
- **Retas Coincidentes:** seus vetores diretores são paralelos e possuem pontos em comum;
- **Retas Concorrentes:** seus vetores diretores não são paralelos, mas possuem ao menos um ponto em comum, onde se dá a intersecção entre essas retas;
- **Retas reversas:** não possuem direções paralelas e nem ponto de intersecção.

- IDENTIFICANDO A POSIÇÃO RELATIVA DE UM PAR DE RETAS POR MEIO DO GEOGEBRA

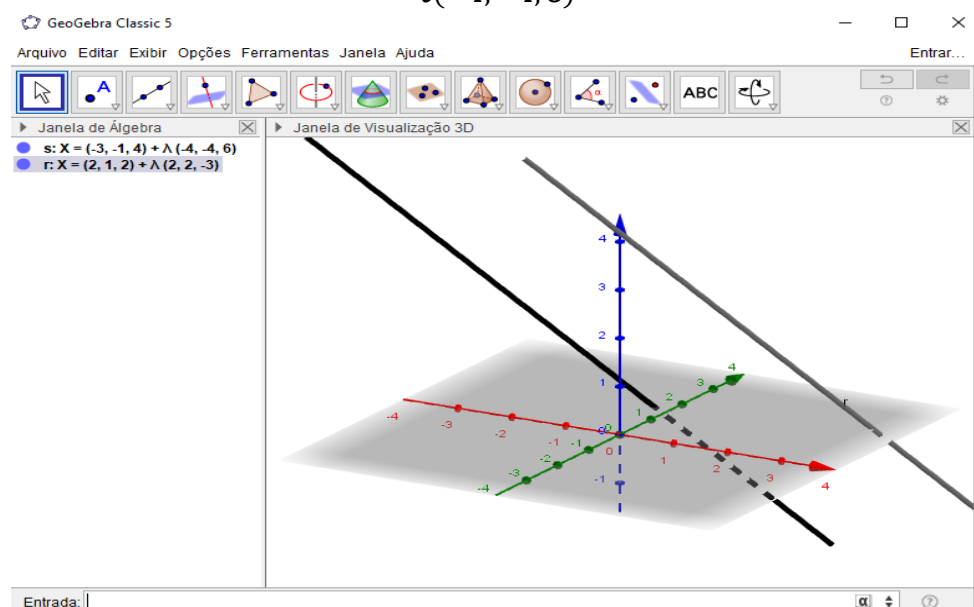
- Retas paralelas

Considere as retas

$$r: X = (2,1,2) + t(2,2,-3) \text{ e } s: X = (-3,-1,4) + t(-4,-4,6)$$

Após inserirmos as equações dessas retas, conforme descrito no método 2, temos o seguinte gráfico.

Figura 6 – Janela do GeoGebra, com as retas $r: X = (2, 1, 2) + t(2, 2, -3)$ e $s: X = (-3, -1, 4) + t(-4, -4, 6)$



Fonte: Autoria própria, 2020.

Visualmente, podemos concluir que essas retas são paralelas? Sim. Podemos notar que as direções são linearmente dependentes, na janela de álgebra. Mas podemos oferecer uma prova por meio do GeoGebra.

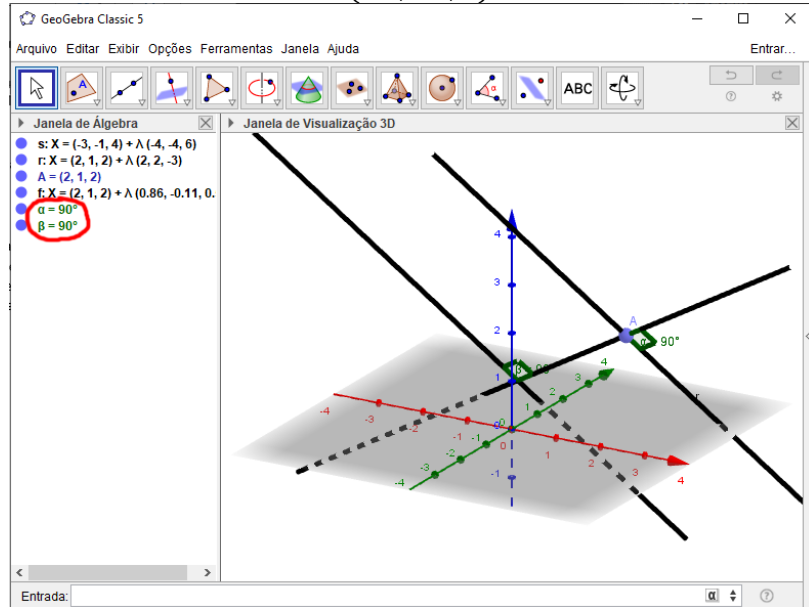
Marque um ponto na reta r , inserindo o comando $\text{Ponto}(r)$, no campo Entrada e pressione ENTER em seguida. Após isso, clique em Reta Perpendicular na barra de comandos, e em seguida clique na reta s e no ponto que você acabou de criar. Supondo que a reta recém criada seja identificada pela letra “f” na Janela de Álgebra do GeoGebra, insira os comandos a seguir, e pressione ENTER após terminar de digitar cada um no campo Entrada:

$\hat{\text{Ângulo}}(r,f)$

$\hat{\text{Ângulo}}(s,f)$

Se, após esses comandos, surgirem dois ângulos retos, significa que r e s são retas paralelas.

Figura 7 – Janela do GeoGebra, com as retas $r: X = (2, 1, 2) + t(2, 2, -3)$ e $s: X = (-3, -1, 4) + t(-4, -4, 6)$



Fonte: Autoria própria, 2020.

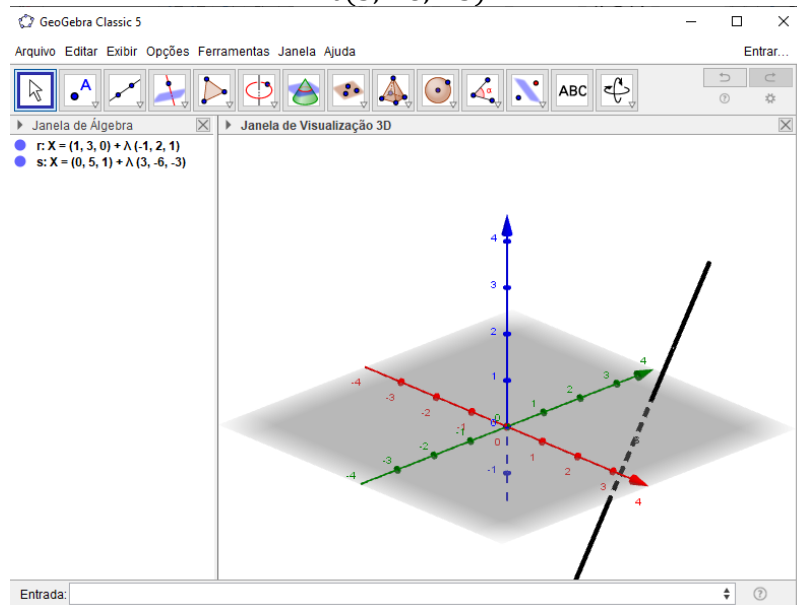
➤ Retas coincidentes

Ao tomarmos em consideração as retas

$$r: X = (1, 3, 0) + t(-1, 2, 1) \text{ e } s: X = (0, 5, 1) + t(3, -6, -3)$$

Obtemos o seguinte gráfico no GeoGebra

Figura 8 – Janela do GeoGebra com as retas $r: X = (1, 3, 0) + t(-1, 2, 1)$ e $s: X = (0, 5, 1) + t(3, -6, -3)$



Fonte: Autoria própria, 2020.

Num primeiro momento, pode ser difícil compreender que essas retas são coincidentes, mas alterando-se a cor de uma delas pode concluir-se que são coincidentes de uma maneira mais fácil. Note que as direções dessas retas, nesse caso, são linearmente dependentes.

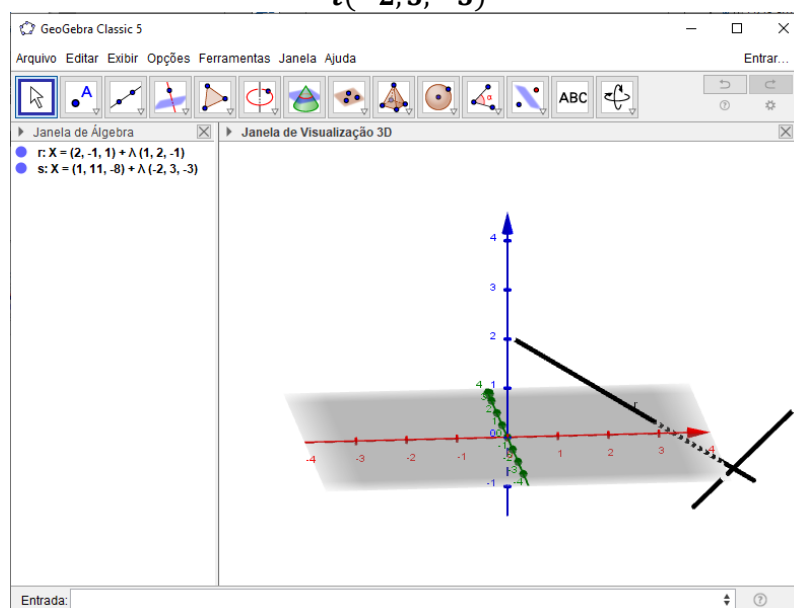
➤ Retas concorrentes

Dessa vez, consideremos as retas

$$r: X = (2, -1, 1) + t(1, 2, -1) \text{ e } s: X = (1, 11, -8) + t(-2, 3, -3)$$

Após inserirmos essas retas no GeoGebra, temos o seguinte gráfico.

Figura 9 – Janela do GeoGebra com as retas $r: X = (2, -1, 1) + t(1, 2, -1)$ e $s: X = (1, 11, -8) + t(-2, 3, -3)$



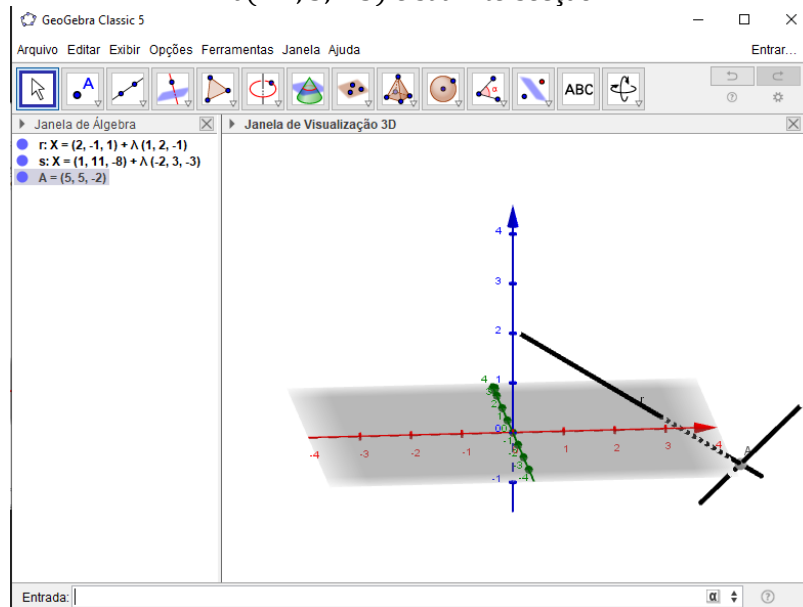
Fonte: Autoria própria, 2020.

Interpretando esse gráfico, podemos concluir que essas retas não são paralelas e nem coincidentes. Resta saber se são concorrentes ou reversas. Para tal, inserimos o seguinte comando no campo Entrada:

Interseção(r,s)

Após inserirmos esse comando, se surgir um ponto na Janela de Álgebra significa que r e s são concorrentes.

Figura 10 – Janela do GeoGebra com as retas $r: X = (2, -1, 1) + t(1, 2, -1)$ e $s: X = (1, 11, -8) + t(-2, 3, -3)$ e sua intersecção

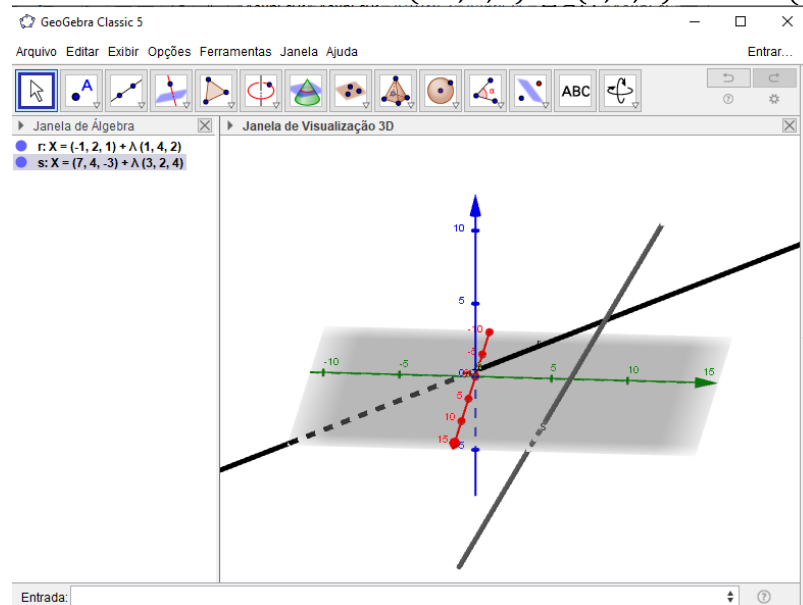


Fonte: Autoria própria, 2020.

➤ Retas reversas

Tomemos o par de retas composto por $r: X = (-1, 2, 1) + t(1, 4, 2)$ e $s: X = (7, 4, -3) + t(3, 2, 4)$

Figura 11 – Janela do GeoGebra com as retas $r: X = (-1, 2, 1) + t(1, 4, 2)$ e $s: X = (7, 4, -3) + t(3, 2, 4)$



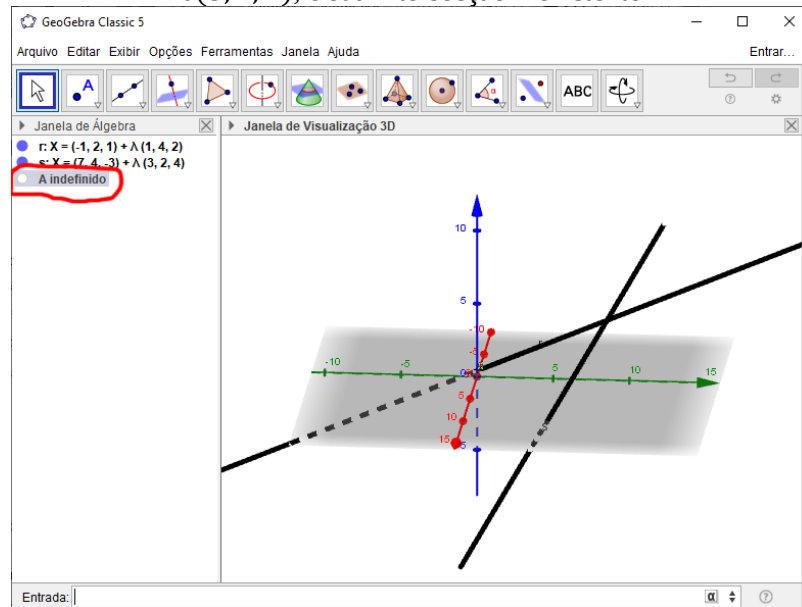
Fonte: Autoria própria, 2020.

Através do gráfico de r e s podemos concluir que essas retas não são paralelas e nem coincidentes.

Para sabermos se são concorrentes e reversas, insira o comando a seguir e pressione ENTER:

Interseção(r,s)

Figura 11 – Janela do GeoGebra com as retas $r: X = (-1, 2, 1) + t(1, 4, 2)$ e $s: X = (7, 4, -3) + t(3, 2, 4)$, e sua intersecção inexistente



Fonte: Autoria própria, 2020.

Se surgir “A indefinido” na Janela de Álgebra, significa que não há intersecção entre as retas r e s. Logo, r e s são retas reversas.

- DEFINIÇÃO DE PLANO E SUAS EQUAÇÕES

Dado um plano α , que contém o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$, e que tem os vetores diretores $d_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $d_2 = (a_2, b_2, c_2)$, chamamos de **equação vetorial** do plano α equação:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$$

Chamamos de **Equações paramétricas** de α o seguinte sistema

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1s + a_2t \\ y = y_0 + b_1s + b_2t \\ z = z_0 + c_1s + c_2t \end{cases}$$

Ao tomarmos em consideração o produto vetorial dos vetores d_1 e d_2 , isto é, tomarmos $n = (a_3, b_3, c_3) = d_1 \times d_2$, podemos obter a seguinte equação:

$$a_3x + b_3y + c_3z + d = 0$$

Onde

$$d = -a_3x_0 - b_3y_0 - c_3z_0$$

Essa equação é denominada **equação geral ou cartesiana** de α .

- CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DE PLANOS NO GEOGEBRA

O GeoGebra consegue interpretar apenas a equação geral de um determinado plano. Porém, é possível a inserção de um plano através da definição de ponto e vetores diretores. Seguem os métodos.

1) Equação geral

Insira uma equação geral na forma $ax + by + cz + d = 0$ no campo Entrada, e pressione ENTER.

Exemplo: $4x + y - 3z + 2 = 0$ é uma equação geral capaz de ser interpretada de maneira correta.

2) Plano através da definição de ponto e vetores diretores

Primeiramente, insira um ponto o qual está contido nesse plano no campo Entrada, e pressione ENTER.

Exemplo: $P = (2, 1, -3)$ é um ponto válido capaz de ser interpretado corretamente pelo GeoGebra.

Em seguida, insira o primeiro vetor diretor no campo Entrada, pressione ENTER, digite o segundo vetor diretor no mesmo campo, e pressione ENTER novamente.

Exemplo: $v = (1, 1, -1)$ e $u = (3, 2, -1)$ são vetores interpretáveis pelo GeoGebra.

Por fim, digite o seguinte comando no campo Entrada, e pressione ENTER:

$\text{Plano}(P, v, u)$

OBSERVAÇÃO: Por questões práticas, usaremos apenas o primeiro método para a inserção de planos no GeoGebra.

PRATICANDO

Insira os planos descritos a seguir:

- Contém o ponto $A(2, 2, -1)$ e é paralelo ao plano XY
- Equação: $4x + y - 3z - 5 = 0$
- Contém o ponto $B(2, 0, 0)$ e tem como vetores diretores $v = (1, 1, -3)$ e $u = (4, 3, -7)$
- Contém a origem do espaço cartesiano e é perpendicular ao vetor $w = (3, -3, 7)$

• POSIÇÕES RELATIVAS DE UM PAR DE PLANOS

Um par de planos pode assumir as seguintes posições relativas:

- **Planos Paralelos:** seus vetores normais (perpendiculares) são paralelos, e não há intersecção entre eles;

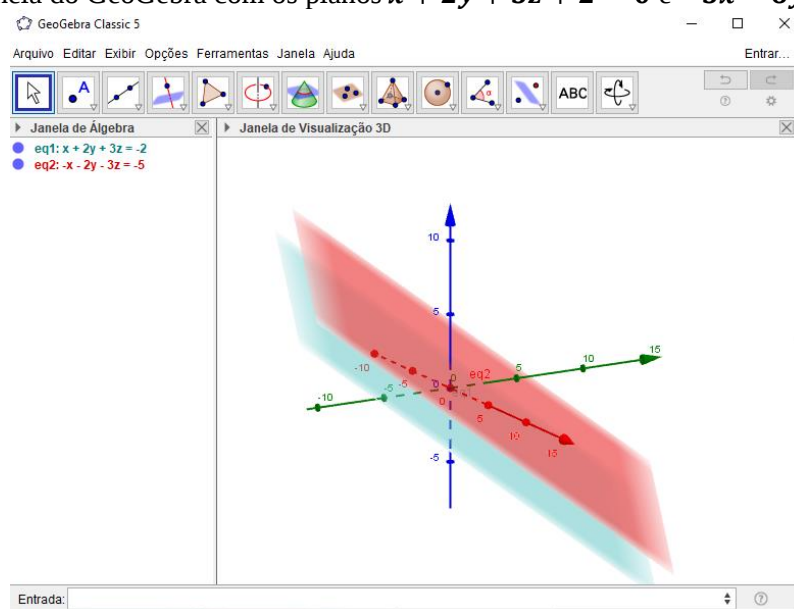
- **Planos Coincidentes:** seus vetores normais são paralelos, e possuem ao menos um ponto em comum (na verdade, todos);
- **Planos secantes ou concorrentes:** seus vetores normais não são paralelos, e sua intersecção é uma reta;
- **Planos perpendiculares:** seus vetores normais são ortogonais entre si, sendo uma reta a intersecção entre eles.
- IDENTIFICANDO AS POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE UM PAR DE PLANOS NO GEOGEBRA

➤ Planos Paralelos

Considere os planos

$$x + 2y + 3z + 2 = 0 \text{ e } -3x - 6y - 9z + 15 = 0$$

Figura 12 – Janela do GeoGebra com os planos $x + 2y + 3z + 2 = 0$ e $-3x - 6y - 9z + 15 = 0$



Fonte: Autoria própria, 2020.

Podemos ver que esses planos são paralelos, nitidamente.

Em casos em que não possa haver essa distinção nítida, insira o comando Interseção. Caso o comando não obtenha resposta, esses planos são paralelos.

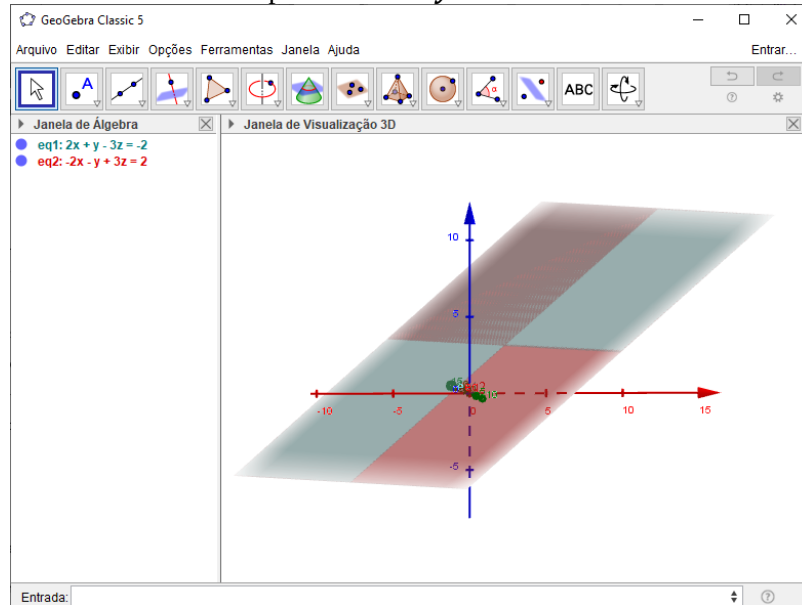
➤ Planos coincidentes

Ao considerarmos os planos

$$2x + y - 3z + 2 = 0 \text{ e } -4x - 2y + 6z - 4 = 0$$

Obtemos o seguinte gráfico

Figura 13 – Janela do GeoGebra com os planos $2x + y - 3z + 2 = 0$ e $-4x - 2y + 6z - 4 = 0$



Fonte: Autoria própria, 2020.

Num primeiro momento, não podemos distinguir um plano do outro, devido ao fato de serem coincidentes, eles são iguais. Alterando a cor de um dos planos, podemos ver melhor que são planos coincidentes. Podemos, também, observar que as equações desses planos são proporcionais, isto é, a primeira equação foi multiplicada por -2, assim resultando na segunda equação.

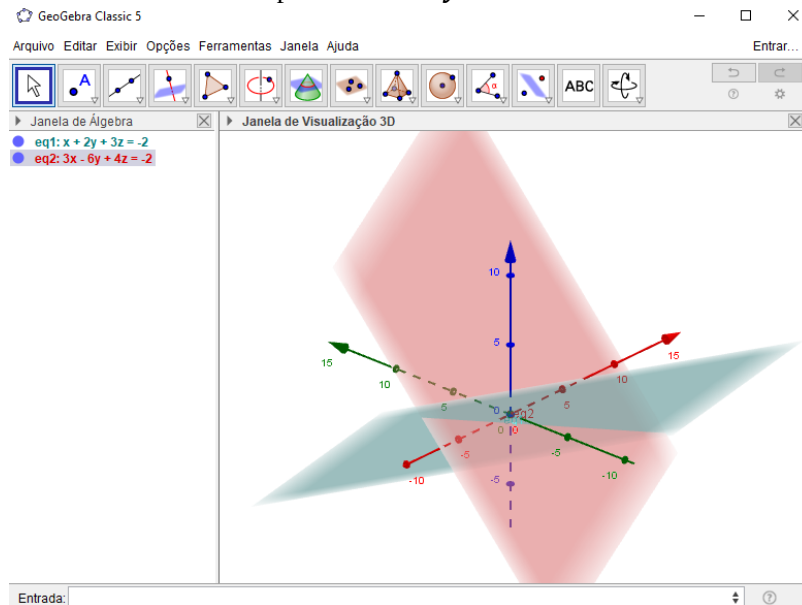
- Planos secantes ou concorrentes e Planos Perpendiculares

Consideremos os planos

$$x + 2y + 3z + 2 = 0 \text{ e } 3x - 6y + 4z + 2 = 0$$

Temos o seguinte gráfico:

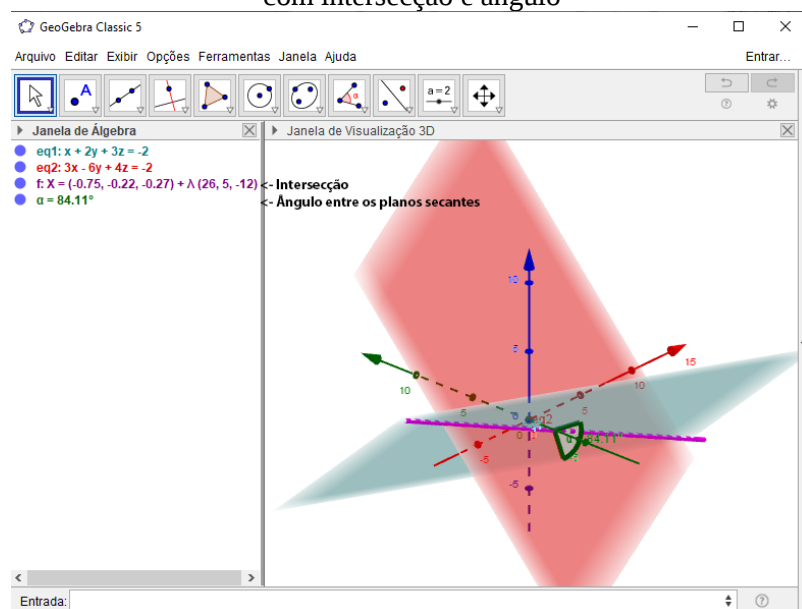
Figura 14 – Janela do GeoGebra com os planos $x + 2y + 3z + 2 = 0$ e $3x - 6y + 4z + 2 = 0$



Fonte: Autoria própria, 2020.

Se utilizarmos o comando Interseção obtermos a reta intersecção entre esses dois planos, e ao usarmos o comando Ângulo, poderemos concluir que esses são planos secantes entre si.

Figura 14 – Janela do GeoGebra com os planos $x + 2y + 3z + 2 = 0$ e $3x - 6y + 4z + 2 = 0$, com intersecção e ângulo



Fonte: Autoria própria, 2020.

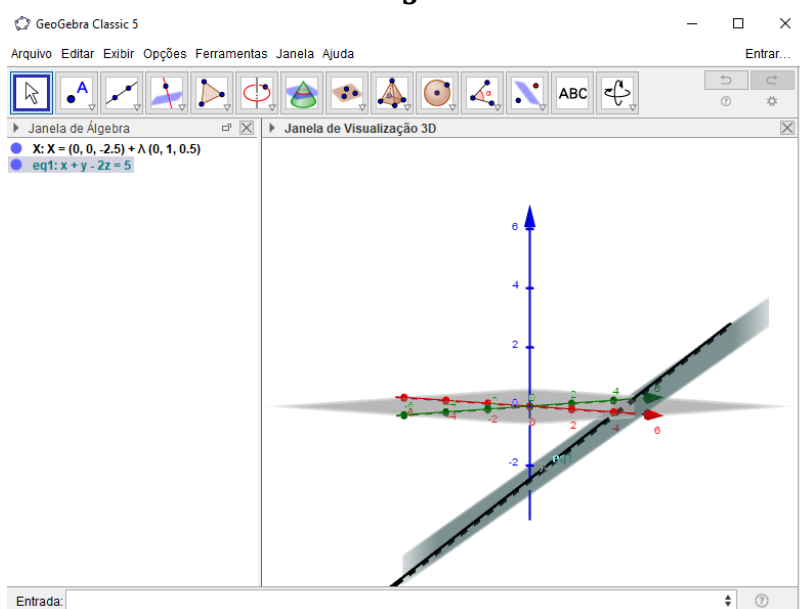
OBSERVAÇÃO: Se o ângulo for igual a 90° esses planos serão perpendiculares.

- POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE UMA RETA E UM PLANO
- **Reta contida em um plano:** o vetor diretor da reta e o vetor normal ao plano são ortogonais, e ao menos um ponto da reta está contido no plano (na verdade, todos);

- **Reta paralela a um plano:** o vetor diretor da reta e o vetor normal ao plano são ortogonais, mas não possuem pontos em comum;
- **Reta secante ou concorrente a um plano:** o vetor diretor da reta e o vetor normal ao plano não são ortogonais e nem paralelos, mas possuem um ponto em comum;
- **Reta perpendicular a um plano:** o vetor diretor da reta e o vetor normal ao plano são paralelos, e possuem um ponto de intersecção.
- IDENTIFICANDO AS POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE UMA RETA E UM PLANO NO GEOGEBRA
- Reta contida em um plano

Consideremos o gráfico, composto pela reta $(x, y, z) = \left(0, 0, -\frac{5}{2}\right) + t \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$ e pelo plano $x + y - 2z = 5$:

Figura 15 – Janela do GeoGebra com a reta $(x, y, z) = \left(0, 0, -\frac{5}{2}\right) + t \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$ e o plano $x + y - 2z = 5$



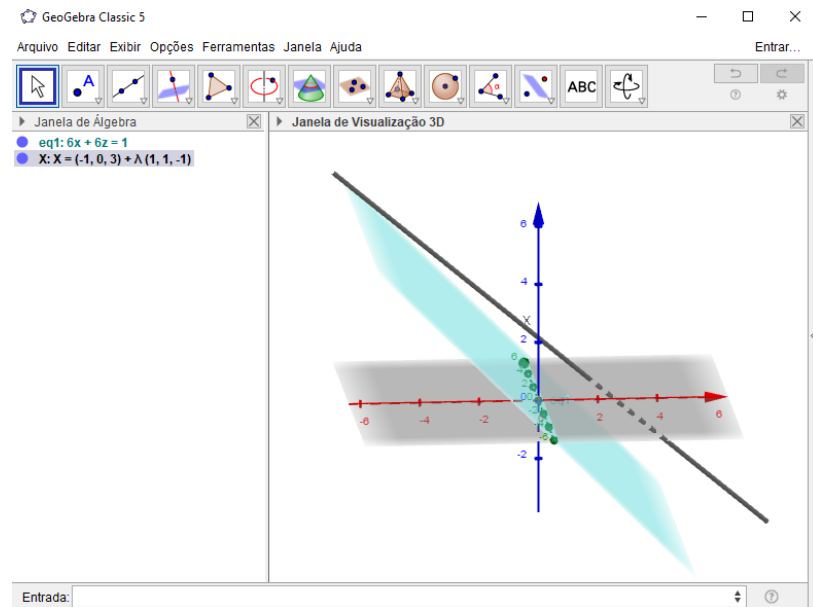
Fonte: Autoria própria, 2020.

Observe que essa reta está contida nesse plano. Tal comportamento implica que o comando Interseção gera um ponto vazio.

- Reta paralela ao plano

Ao considerarmos o gráfico composto pela reta $(x, y, z) = (-1, 0, 3) + t(1, 1, -1)$ e pelo plano $3x + 3x + 6z - 1 = 0$, temos a seguinte tela:

Figura 16 – Janela do GeoGebra com a reta $(x, y, z) = (-1, 0, 3) + t(1, 1, -1)$ e o plano $3x + 3x + 6z - 1 = 0$



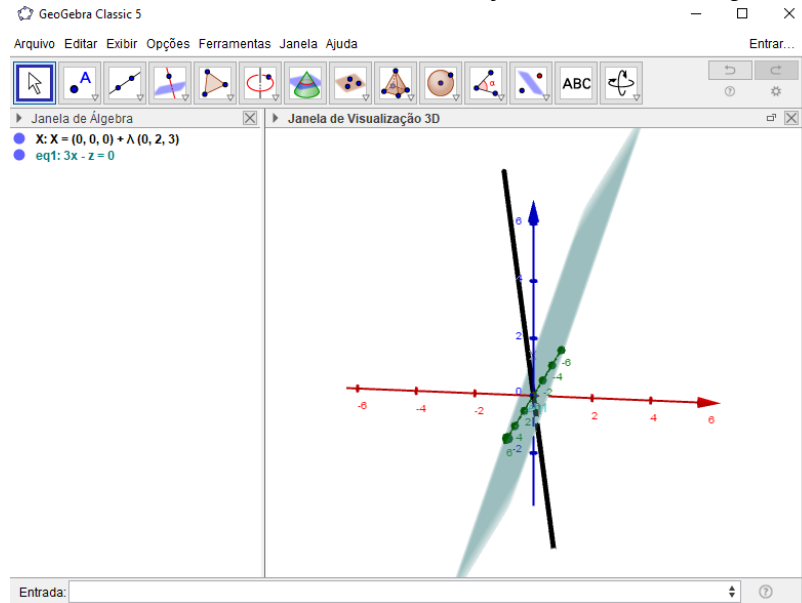
Fonte: Autoria própria, 2020.

Podemos ver que o plano, aparentemente, não possui intersecção com a reta. Isso pode ser confirmado pelo comando Interseção, que não responderá, assim confirmando que essa reta e esse plano são paralelos.

➤ Reta secante ou concorrente a um plano

Tomando a reta $x = 0; y = 2t; z = 3t$; e o plano $3x - z = 0$, tem-se o gráfico a seguir:

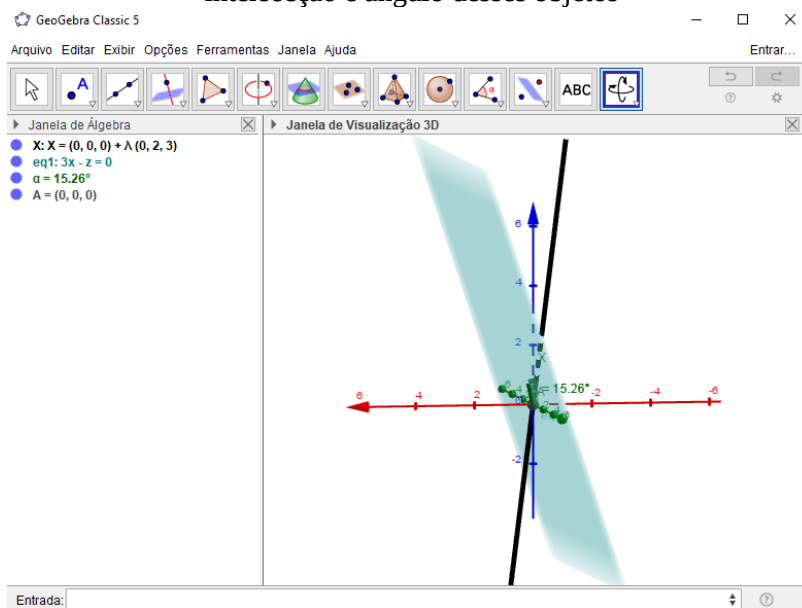
Figura 17 – Janela do GeoGebra com a reta $x = 0; y = 2t; z = 3t$; e o plano $3x - z = 0$



Fonte: Autoria própria, 2020.

Ao analisar esse gráfico, concluímos que se trata de uma reta secante ou concorrente a um plano, mas não será possível essa dedução imediata em todos os casos. A confirmação pode ser obtida através do comando Ângulo, que, sendo um caso positivo, retornará um ângulo menor que 90° . Através do comando Interseção poderá encontrar-se o ponto de intersecção entre essa reta e esse plano, como observa-se abaixo.

Figura 17 – Janela do GeoGebra com a reta $x = 0; y = 2t; z = 3t$; e o plano $3x - z = 0$, com a intersecção e ângulo desses objetos

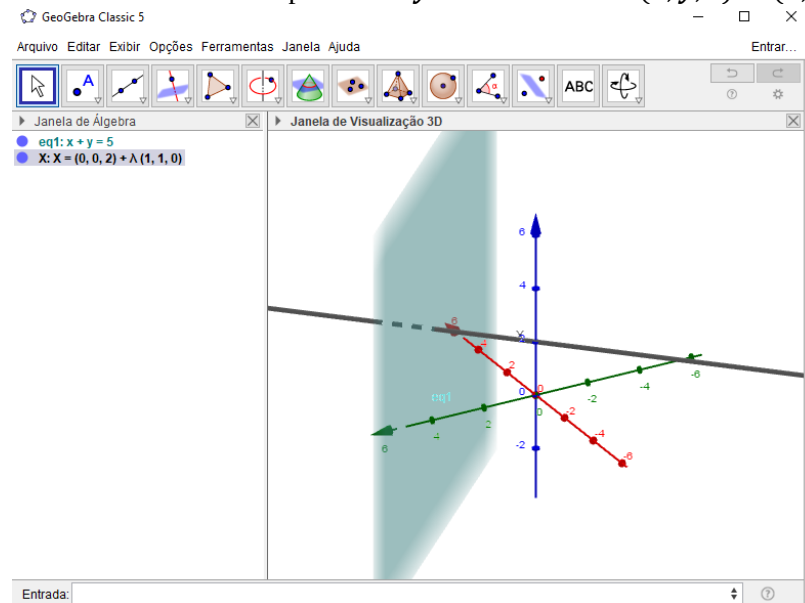


Fonte: Autoria própria, 2020.

➤ Reta perpendicular a um plano

Tomemos em consideração o plano $x + y - 5 = 0$ e a reta $(x, y, z) = (0, 0, 2) + t(1, 1, 0)$.

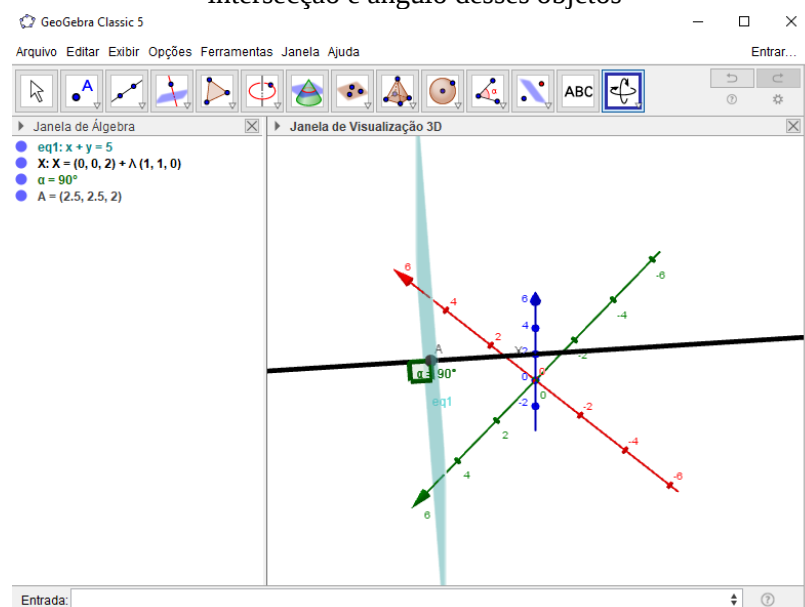
Figura 18 – Janela do GeoGebra com o plano $x + y - 5 = 0$ e a reta $(x, y, z) = (0, 0, 2) + t(1, 1, 0)$



Fonte: Autoria própria, 2020.

Este gráfico mostra uma reta perpendicular a um plano. Para confirmarmos se tal perpendicularidade é verídica, podemos usar o comando Ângulo, que, caso positivo, retornará um ângulo reto. Através do comando Interseção podemos conhecer o ponto onde essa reta e esse plano se interceptam.

Figura 19 - Janela do GeoGebra com o plano $x + y - 5 = 0$ e a reta $(x, y, z) = (0, 0, 2) + t(1, 1, 0)$, com a intersecção e ângulo desses objetos



Fonte: Autoria própria, 2020.

APÊNDICE B – ATIVIDADES PROPOSTAS NA OFICINA PEDAGÓGICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ORIENTADORA: Claudilene Gomes da Costa
ORIENTANDO: Alessandro Pereira Marcelino da Silva

ATIVIDADES PROPOSTAS COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Atividade 1: Considere a reta $r: (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(0, 0, -6)$.

- i) Qual a posição relativa de r em relação ao eixo das cotas?
- ii) Qual a posição relativa de r em relação ao eixo das abcissas e ao eixo das ordenadas?

Atividade 2: Estude a posição relativa dos seguintes pares de retas, e mostre a sua intersecção, quando houver.

i) $r_1: (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(0, 1, 3)$ e $s_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + 2t \\ z = 6 + 6t \end{cases}$

ii) $r_2: (x, y, z) = (8, 1, 9) + t(2, -1, 3)$ e $s_2: x - 3 = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-4}{2}$

Atividade 3: Verifique a posição relativa de $\pi: z - 1 = 0$ e o plano XY.

Atividade 4: Os planos $\pi_1: 4x + 2y - z - 3 = 0$ e $\beta_1: x + y + 6z - 1 = 0$ são perpendiculares ou secantes? A reta intersecção de π_1 e β_1 é concorrente ao eixo das ordenadas?

Atividade 5: Qual a posição relativa entre $\pi_2: x - z = 0$ e $\beta_2: y + z = 0$? Caso exista, a reta intersecção de π_2 e β_2 intercepta a origem do espaço cartesiano?

Atividade 6: Mostre a posição relativa de $\pi_3: -x + 2y + z + 1 = 0$ e $\beta_2: -2x + 4y + 2z + 2 = 0$.

Atividade 7: Considere o plano $\pi_4: x + 3y - z - 7 = 0$.

- i) Qual a posição relativa do plano π_4 e da reta $r_3: x - 2 = \frac{y-2}{3} = z + 1$?

ii) Dada a reta $s_3: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+6}{2}$, qual a posição relativa de π_4 e s_3 ?

iii) Mostre os pontos de intersecção de π_4 e r_3 e de π_4 e s_3 .

Atividade 8: Considere o plano $\beta_4: 2x + y - 3z + 5 = 0$.

i) Qual a posição relativa de β_4 e $r_4: (x, y, z) = (-5, 2, -1) + t(5, 2, 4)$?

ii) Qual a posição relativa de β_4 e $s_4: \frac{x-3}{6} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z+1}{2}$?

Atividade 9: Apresente a equação vetorial da reta que possui a mesma direção da reta intersecção dos planos π_1 e β_1 e que passa pelo ponto de intersecção de r_2 e s_2 .

Atividade 10: Mostre a equação simétrica da reta paralela a intersecção dos planos π_4 e β_4 e que passa pelo ponto de intersecção das retas r_3 e s_3 .

**APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS DA TURMA DE
INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR**

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ORIENTADORA: Claudilene Gomes da Costa
ORIENTANDO: Alessandro Pereira Marcelino da Silva

QUESTIONÁRIO

1 – Você acha que o ambiente de ensino com recursos de informática torna as aulas mais atrativas?

()Sim ()Não

2 – Na sua opinião, os conteúdos matemáticos são mais compreensíveis quando são aprendidos com o auxílio de *softwares*?

()Sim ()Não

3 – Já conhecia o *software* GeoGebra?

()Sim ()Não

4 – Você conhece outros *softwares*/aplicativos de representação gráfica?

()Sim ()Não (Pule para a questão 6)

5 – Quais os outros *softwares*/aplicativos de representação gráfica que você conhece?

6 – O *software* GeoGebra lhe permitiu visualizar e compreender melhor as propriedades das posições relativas de retas e planos observadas no estudo proposto pela oficina?

()Sim ()Não

7 – Na sua opinião, o uso do *software* GeoGebra é um método que pode ser considerado de fácil compreensão para o estudo de retas e planos?

()Sim ()Não

8 – O uso do GeoGebra lhe permitiu investigar conceitos sobre o conteúdo abordado e comprovar teorias que você fez sobre esse conteúdo anteriormente?

☐ Sim ☐ Não

9 – Como você avalia a utilização do *software* GeoGebra no estudo das retas?

☐ Péssimo ☐ Ruim ☐ Regular ☐ Bom ☐ Excelente

10 – Como você avalia a utilização do *Software* GeoGebra no estudo dos planos?

☐ Péssimo ☐ Ruim ☐ Regular ☐ Bom ☐ Excelente

11 – Você considera que o *software* GeoGebra é recurso facilitador na aprendizagem do conteúdo de retas e planos?

☐ Sim ☐ Não

12 – O *software* GeoGebra contribui efetivamente para a aprendizagem do conteúdo de retas e planos?

☐ Sim ☐ Não

13 – O *software* GeoGebra, na sua opinião, pode ser utilizado para a aprendizagem de outros conteúdos da Geometria Analítica?

☐ Sim ☐ Não

14 – O uso de representações no *software* GeoGebra oferece benefícios em relação ao uso de representações em papel ou no quadro no estudo de retas e planos?

☐ Sim ☐ Não

15 – O auxílio proporcionado pelo uso de *softwares* pode contribuir e/ou facilitar a aprendizagem de conteúdos observados nas disciplinas do curso de licenciatura em Matemática?

☐ Sim ☐ Não

16 – O que se pode concluir sobre o estudo de retas e planos a partir da utilização do *software* GeoGebra?

☐ Péssimo ☐ Ruim ☐ Regular ☐ Bom ☐ Excelente