

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Francisco Jerfferson de Lima Virgino

Aplicações da integral definida na Geometria Espacial: volume de
sólidos de revolução

Rio Tinto – PB
2020

Francisco Jerfferson de Lima Virgino

Aplicações da integral definida na Geometria Espacial: volume de sólidos de revolução

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Givaldo de Lima

Rio Tinto – PB
2020

**Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação**

V818a Virgino, Francisco Jerfferson de Lima.

Aplicações da integral definida na Geometria Espacial:
Volume de sólidos de revolução / Francisco Jerfferson
de Lima Virgino. - Rio Tinto, 2020.
65 f. : il.

Orientação: Givaldo de Lima.

Monografia (Graduação) - UFPB/CCAE.

1. História da Matemática. 2. Técnicas de integração.
3. Integral de Riemann. 4. Aplicações. 5. Volume. I. de
Lima, Givaldo. II. Título.

UFPB/BC

Francisco Jerfferson de Lima Virgino

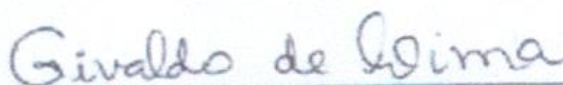
Aplicações da integral definida na Geometria Espacial: volume de sólidos de revolução

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

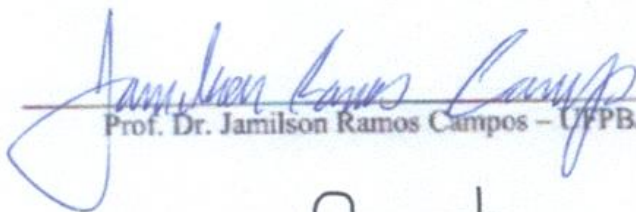
Orientador: Prof. Me. Givaldo de Lima

Aprovado em: 25/03/2020

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Me. Givaldo de Lima – UFPB/DCX
Orientador



Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos – UFPB/DCX



Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes da Almeida – UFPB/DCX

Dedico este trabalho a Deus primeiramente, que sempre me deu forças para alcançar meus objetivos, sempre foi e vai ser o meu professor. Dedico também a minha tia Maria Mártires de Lima Oliveira e esposa Isabel Cristina Pereira da Silva, que sempre acreditou e confiou em mim e na minha formação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a **Deus**, por todas as vitórias na minha vida! Por me conceder coragem, inteligência, capacidade e perseverança para conquistar meus sonhos.

Agradeço também aos meus pais, Geilma de Lima e Francisco Virgino, que sempre estão ao meu lado, me dando apoio e incentivo. Pela preocupação que tiveram durante a graduação.

Também quero agradecer a minha querida esposa, Isabel Cristina Pereira da Silva, que tanto amo e que no início do curso ainda era minha namorada. Independente do título que receba você sempre será sempre minha amiga, namorada, esposa e companheira. Você sem dúvidas foi o melhor presente que Deus poderia ter me dado. Sou muito grato por todo incentivo desde o início do nosso namoro até o término da graduação. Isa, obrigado por ter ficado ao meu lado em todas as dificuldades que passei, obrigado pela compreensão de tantos dias que fiquei ausente, mesmo de corpo presente. Essa foi mais uma jornada que enfrentamos juntos! Agradeço por todo amor, carinho, apoio, incentivo e por ser uma esposa que sempre me deu forças para chegar até onde estou hoje! Obrigado meu amor por tudo que você fez e faz por mim!

A minha Irmã Maria Gerciane, que sempre me incentivou e torceu por mim. Agradeço pelas suas orações que se fizeram sempre fortes, especialmente em favor das idas e vindas a Rio tinto nesses cinco anos.

Não poderia jamais esquecer da minha sogra que foi a protagonista desse feito, pois foi quem me obrigou a sair do meu emprego para fazer o curso e sempre se preocupou com meus estudos.

Um obrigado muito em especial aos meus amigos Mario Alves, Eduardo Andrade, Rafael Lima, Tiago Varelo, Ramon Soares, dentre muitos outros que me ajudaram em algum momento do curso e pela amizade, companhia e apoio que me deram.

Agradeço ao meu orientador, Givaldo Lima, pelo auxílio e correções das idéias utilizadas, assim como suas palavras que me ajudaram incentivando durante a elaboração desse trabalho.

Agradeço aos professores Jamilson Campos e Carlos Alberto, por terem aceitado fazer parte da banca examinadora desse trabalho e suas contribuições para melhorar a minha proposta.

Quero agradecer também a professora Cristiane Fernandes pelos ensinamentos na

disciplina de Pesquisa Aplicada, que tiveram um papel fundamental na elaboração deste trabalho, assim como, no programa de Residência Pedagógica, que proporcionou uma experiência significativa na minha formação docente.

Muito Obrigado a TODOS!!!

Estudar a Matemática é multiplicar a sabedoria,
dividir o pensamento, adicionar o raciocínio e
subtrair egoísmo. Porque o saber Matemático é um
saber sistemático.

Daniel Perato Furucuto

RESUMO

A pesquisa realizada tem como objetivo principal aplicar os conceitos da integral definida na Geometria Espacial, com intuito de obter o volume de sólidos de revolução. A metodologia utilizada nesta pesquisa caracteriza-se como um estudo bibliográfico, de abordagem qualitativa e natureza exploratória, na qual utilizaremos livros, dissertações e artigos científicos dentre outros, como instrumentos de pesquisa. Para fundamentar nossa pesquisa, nos apoiamos nos estudos de 18 autores, entre eles: Boyer (2010), Eves (2011), Mol (2013) com relação a história da Matemática; entre os principais da fundamentação se destacam Thomas Jr. (2002), Anton, Bivens e Davis (2007), Stewart (2008 e 2013), dentre outros. Apresentamos ao longo da pesquisa que as aplicações da integral definida vão muito além de problemas de áreas sob curvas. Inicialmente, foi realizada uma apresentação dos aspectos históricos, destacando algumas personalidades científicas da Grécia antiga que foram de grande relevância e que contribuíram de forma significativa para o desenvolvimento do Cálculo. Em seguida, realizamos uma abordagem de técnicas de integração, especificamente as integrais por substituição e por partes. Apresentamos o conceito das integrais indefinidas, definidas e o Teorema Fundamental do Cálculo. Por fim, fizemos uma aplicação da integral definida na Geometria Espacial, com o intuito de calcular o volume de sólidos de revolução a partir do conceito da integral definida.

Palavras-chave: História da Matemática. Técnicas de integração. Integral de Riemann. Aplicações. Volume.

ABSTRACT

The main purpose of the research is to apply the concepts of the integral defined in Spatial Geometry, in order to obtain the volume of solids of revolution. The methodology used in this research is characterized as a bibliographic study, with a qualitative approach and exploratory nature, in which we will use books, dissertations and scientific articles, among others, as research instruments. To support our research, we rely on the studies of 18 authors, among them: Boyer (2010), Eves (2011), Mol (2013) regarding the history of Mathematics; Among the main foundations, Thomas Jr. (2002), Anton, Bivens and Davis (2007), Stewart (2008 and 2013), among others, stand out. We presented throughout the research that the applications of the definite integral go far beyond problems of areas under curves. Initially, a presentation of the historical aspects was made, highlighting some scientific personalities from ancient Greece that were of great relevance and that contributed significantly to the development of the Calculus. Then, we carry out an approach of integration techniques, specifically substitution integrals and parts. We present the concept of indefinite, defined integrals and the Fundamental Theorem of Calculus. Finally, we made an application of the integral defined in Spatial Geometry, in order to calculate the volume of solids of revolution from the concept of the defined integral.

Keywords: History of Mathematics. Integration techniques. Riemann integral. Applications. Volume.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Paradoxo da Dicotomia	19
Figura 2.2 – Paradoxo da Flecha	20
Figura 2.3 – Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.)	21
Figura 2.4 – Representação geométrica da proposição 1.1	22
Figura 2.5 – Arquimedes de Siracusa (c. 287-212 a. C.).....	23
Figura 2.6 – Quadratura da Parábola	25
Figura 2.7 – Isaac Newton (1642-1727).....	26
Figura 2.8 – Gottfried Leibniz (1646-1716).....	28
Figura 3.1 – Gráfico da família de antiderivadas da função $f(x) = 3x^2$	32
Figura 3.2 – Tabela de integrais imediatas	33
Figura 3.3 – Área A sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$	39
Figura 3.4 – Aproximação por retângulos da área A sob uma curva.....	40
Figura 3.5 – Aproximação da área A por soma de retângulos.....	41
Figura 3.6 – Esboço da curva $y = x^3$	49
Figura 4.1 – Sólidos de revolução	50
Figura 4.2 – A região S	51
Figura 4.3 – Sólido gerado pela rotação de S	51
Figura 4.4 – Cilindros	52
Figura 4.5 – Interceptação de S com o plano P_x	53
Figura 4.6 – Fatiamentos do sólido	53
Figura 4.7 – Aproximação da i -ésima fatia	54
Figura 4.8 – Secção transversal da pirâmide	55
Figura 4.9 – Gráfico da curva $x = y^2$ e o limite superior $x = 2$	56
Figura 4.10 – Seções transversais.....	56
Figura 4.11 – A região e o sólido, respectivamente	58
Figura 4.12 – A região e o sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo x	59
Figura 4.13 – Região e sólido de revolução	60
Figura 4.14 – Região de f e g e o sólido gerado pela rotação em torno do eixo x	61
Figura 4.15 – A região e o sólido gerado pela rotação em torno de x	63

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 Delimitação do tema	13
1.2 Problemática e justificativa	14
1.3.1 Objetivos.....	15
1.3.1 Objetivo geral	15
1.3.2 Objetivos específicos	15
1.4 Considerações metodológicas.....	16
1.5 Estrutura do trabalho	16
2 CONTRIBUIÇÕES PARA O DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL	18
2.1 Grécia Antiga: Paradoxos de Zenão	18
2.2 Eudoxo de Cnido e o método da exaustão	20
2.3 Arquimedes de Siracusa e seus métodos	23
2.4 Isaac Newton	26
2.5 Gottfried Leibniz	27
3 INTEGRAIS INDEFINIDAS E DEFINIDAS	29
3.1 Antiderivadas	29
3.2 Integral indefinida.....	31
3.3 Método de integração por substituição	35
3.4 Método de integração por partes	36
3.5 Integral definida.....	38
3.6 O Teorema Fundamental do Cálculo	43
4 APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA NA OBTENÇÃO DE VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO	50
4.1 Sólidos de revolução	50
4.2 Volume por fatiamento	51
4.3 Volume pelo método dos discos	57
4.4 Volume pelo método das arruelas	60
5 CONCLUSÃO	64
REFERÊNCIAS.....	65

1 INTRODUÇÃO

1.1 Delimitação do tema

O Cálculo Diferencial e Integral surgiu entre os séculos XVII e XVIII e foi considerado um período de grande desenvolvimento para a Matemática. Nessa época, vários matemáticos colaboraram para a formalização do Cálculo e entre as principais personalidades científicas da época se destacam Isaac Newton e Gottfried Leibniz. Com a integração do cálculo infinitesimal, Newton desenvolveu o conceito de derivada e Leibniz o conceito de integral. Embora os dois tenham feito trabalhos em anos diferentes, ambos conseguiram chegar ao mesmo resultado. Outros matemáticos também já trabalhavam algo sobre o assunto, como Arquimedes e Eudoxo, também já apresentavam o conceito de cálculo de áreas e volumes.

Nos cursos que contemplam o Cálculo Diferencial e Integral, o ensino do Cálculo é realizado de forma cronologicamente invertida, ou seja, primeiro é ensinado Cálculo Diferencial e logo após, o Cálculo Integral, quando na verdade o cálculo integral surgiu primeiro. Segundo Eves (2011),

A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra (EVES, 2011, p. 417).

O Cálculo Diferencial e Integral II é umas das disciplinas que está presente nos Cursos de Ciências Exatas, mas que vem sendo implantado em outras áreas do conhecimento. Isto nos diz que o Cálculo Diferencial e Integral se descreve como uma área essencial dentro do contexto da Matemática e suas aplicações, tornando-se indispensável para o desenvolvimento de cursos como Engenharia, Física e Economia.

A nossa pesquisa elaborada é de um estudo mais abrangente do Cálculo Integral, onde utilizaremos os conceitos da integral definida aplicada à Geometria Espacial. Essa proposta tem intuito de proporcionar uma contribuição na produção de um material de apoio para os alunos e professores, para que os mesmos possam verificar/compreender que a integral vai além das técnicas de integração e do cálculo de área.

1.2 Problemática e justificativa

Especificamente no curso de Licenciatura em Matemática, o estudo de integrais apresenta-se concentrado relativamente ao Cálculo, para subsidiar a formação Matemática do discente. No curso, o estudo da integral normalmente se limita apenas as técnicas de integração. São elas: por substituição, por partes. Assim como o estudo das integrais indefinidas e definidas. Nos curso de Licenciatura em Matemática do campus IV, é visto apenas aplicações da integral definida para o cálculo de áreas sob curvas.

Por esse motivo, estamos interessados em realizar uma investigação dentro da área pesquisa da Matemática Pura, especificamente na subárea de Cálculo Diferencial e Integral. Verificamos ao longo da pesquisa que as aplicações da integral definida vão muito além de problemas de áreas entre duas curvas. Dessa forma, a problemática da nossa pesquisa consiste em investigar como o conceito da integral definida pode auxiliar no cálculo de volume de sólidos de revolução (rotação), utilizando os mesmos procedimentos/conceitos que foram utilizados para encontrar áreas.

A escolha do tema desse estudo teve início durante o curso da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, no Curso de Licenciatura em Matemática do Campus IV e se tornou definitiva logo após a participação no projeto de ensino denominado “Monitoria Integrada: Proposta interdisciplinar para o Ensino de Matemática”, realizado no ano de 2017. Esse projeto possibilitou uma afinidade com o assunto como também alguns questionamentos quanto às aplicações das integrais. Questionamentos do tipo: onde e como vou aplicar/utilizar esses conceitos matemáticos? Quais as relevâncias desse estudo na minha formação docente?

Devido ao fato de que a ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II é muito extensa, não conseguimos aplicar os métodos de integração supracitados. Nessa perspectiva, com esse tema temos a oportunidade de nos aprofundarmos nos métodos que foram vistos na disciplina e aplicarmos, com a finalidade de auxiliar nos cálculos de integrais mais complexas.

O Cálculo Diferencial e Integral está presente em muitas áreas de conhecimento. Stewart (2013) destaca que a integral definida tem várias aplicações em diversas áreas, como a Física (a força exercida pela pressão da água em uma barragem), na Engenharia (área, volume e comprimento), na Economia (excedente do consumidor), na Biologia (circulação sanguínea, capacidade cardíaca) e no seu próprio contexto matemático. Tais aplicações mostram a importância de se trabalhar com um tema como este, visto que possibilita ao leitor o conhecimento das aplicações, tomando como exemplo as aplicações explícitadas acima, como também o interesse pelas técnicas de integração.

No trabalho realizado por Dias (2016) a autora apresenta uma revisão sistemática da história do Cálculo com foco nas pessoas de Isaac Newton e Leibniz e suas contribuições. Logo após, apresentam o Cálculo Diferencial e Integral, demonstrando os tipos de integração e suas aplicações. O resultado dessa pesquisa possibilitou ao pesquisador e aos leitores uma oportunidade de conhecer a Matemática com outro olhar, mediante o seu contexto histórico e suas aplicações.

Destacamos também o trabalho de Araújo Junior e Oliveira (2016), que buscou determinar o volume de sólidos por meio da modelagem matemática utilizando o conceito da integral definida e, o trabalho de Kurokawa (2015), que realizou um estudo com objetivo de apresentar as contribuições dos matemáticos ao longo da história para a formalização do conceito de cálculo de área e volume. O autor ainda apresentou uma análise dos trabalhos de Cavalieri (a ideia de indivisíveis), Arquimedes (método da exaustão) e Pappus (utilizando a ideia de centro de gravidade).

Diante dos argumentos mencionados, pode-se concluir que a inspiração/justificativa para escolha desse tema surgiu primeiramente da experiência vivida na graduação, segundo na participação do projeto de monitoria integrada, pelo desejo de fazer um estudo sobre aplicações da integral, especificamente para obter o volume de sólidos a partir de revolução, e por último, deixar o conceito de Cálculo Diferencial e Integral mais acessível ao olhar do leitor.

1.3.1 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral

Aplicar os conceitos da Integral Definida na Geometria Espacial, especificamente para obter o volume de sólidos de revolução.

1.3.2 Objetivos específicos

- Apresentar as contribuições dos matemáticos para o desenvolvimento histórico do Cálculo Diferencial e Integral.
- Classificar e definir o conceito de integral, e alguns métodos de integração, para auxiliar nas aplicações da integral definida.
- Utilizar os métodos de fatiamentos, discos e arruelas para encontrar o volume de um

sólido de revolução.

1.4 Considerações metodológicas

A proposta que se apresenta foi desenvolvida por meio de uma abordagem qualitativa, que tem a finalidade de se aprofundar no conceito do Cálculo Diferencial e Integral e depois aplicar esse conceito na Geometria Espacial para obter o volume de sólidos de revolução. Prodanov e Freitas afirmam que “na abordagem qualitativa, a pesquisa tem o ambiente como fonte direta dos dados. O pesquisador mantém contato direto com o ambiente e o objeto de estudo em questão [...]” (PRODANOV; FREITAS, 2013, p. 70). Nosso estudo é de caráter puro, uma vez que “seu desenvolvimento tende a ser bastante formalizado e objetiva a generalização, com vista na construção de teorias e leis” (GIL, 2008, p. 26).

Quanto aos objetivos, a investigação se classifica como uma pesquisa exploratória por ter o intuito de apresentar um estudo do Cálculo Diferencial e Integral aplicado a Geometria Espacial. Gil (2002, p. 41) destaca que este tipo de pesquisa “tem como objetivo proporcionar familiaridade com o problema, com vista torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses”. Gil ainda enfatiza que “estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições” (GIL, 2002, p. 41).

Com relação aos procedimentos, a classificação de nossa pesquisa quanto ao tipo de abordagem adotada, será bibliográfica, na qual será “desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos” (GIL, 2002, p. 44). Para a realização desse estudo, é feito um levantamento bibliográfico com a finalidade de obter informações que forneçam suporte à pesquisa, utilizando citações que sustentem as afirmações.

Os livros, dissertações e artigos científicos, serão nossos instrumentos de pesquisa. Segundo Gil (2002, p. 44) “os livros constituem as fontes bibliográficas por excelência”. Esse autor ainda destaca que “os livros de referência, também denominados livros de consulta, são aqueles que têm por objetivo possibilitar a rápida obtenção das informações requeridas, ou então, a localização das obras que as contêm” (GIL, 2002, p. 44). Portanto, faremos uma leitura exploratória com a finalidade de obter informações que possam auxiliar a atingirmos nossos objetivos.

1.5 Estrutura do trabalho

O presente trabalho consiste por essa introdução e mais quatro capítulos.

No Capítulo 2, iremos apresentar os aspectos históricos, destacando algumas personalidades científicas da Grécia antiga que foram de grande relevância e que contribuíram de forma significativa para o desenvolvimento do Cálculo. Vamos explicitar alguns trabalhos que os matemáticos desenvolveram que enfatizam sobre o tema de estudo.

No terceiro capítulo, realizaremos uma abordagem das técnicas de integrações, especificamente as integrais por substituição e por partes. Mostraremos o conceito de integrais indefinidas e definidas e o Teorema Fundamental do Cálculo. Nesse sentido, exploraremos algumas técnicas de integração que serão utilizadas no capítulo quatro, que tem por intuito facilitar os cálculos de integrais não imediatas.

No quarto capítulo, faremos uma aplicação da integral definida na Geometria Espacial. Vamos calcular o volume de sólidos de revolução a partir do conceito da integral definida, tendo como auxílio as técnicas de integração vistas no capítulo anterior.

Para finalizarmos, no quinto e último capítulo, faremos as conclusões a respeito das contribuições do nosso trabalho para o meio acadêmico, assim como apresentaremos sugestões para trabalhos futuros com essa temática.

2 CONTRIBUIÇÕES PARA O DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

2.1 Grécia Antiga: Paradoxos de Zenão

O Cálculo Diferencial e Integral se formalizou no século XVII, como já foi dito, que foi um período de grandes realizações para o conhecimento matemático, em grande parte graças a duas grandes personalidades desta época: Newton e Leibniz. Mas, na realidade, esse progresso na Matemática não foi iniciado e nem concluída por esses grandes matemáticos, e sim foi um resultado de uma longa evolução (COURANT, 2000, p. 481). O conceito de cálculo já estava sendo aos pouco formalizado desde o período da Grécia Antiga, por volta do século V a. C.

Nesta época, se destaca um dos grandes gregos da antiguidade, o filósofo Zenão de Eléia (c. 450 a. C.). Zenão nasceu na cidade de Eléia, hoje conhecida como Vélia, na Itália, por volta de 490 a. C.. O filósofo Zenão foi um seguidor de Parmênides, um dos principais filósofos gregos da antiguidade, na qual era respeitado pelos seus estudos especificamente apoiados em assuntos sobre a ontologia do ser, da razão e da lógica. Parmênides, na sua época, foi um dos primeiros filósofos gregos a tratar de uma forma aprofundada a diferença entre o sensível e o inteligível, induzindo o confronto entre a experiência e a razão. Os eleatas¹ Apresentaram argumentos contrários aos do ponto de vista dos pitagóricos com relação à concepção numérica do universo, para a qual eles associavam números inteiros aos objetos físicos, tornando o universo discreto com unidades e elementos distintos e não contínuos.

No trabalho de Mol (2013) é dito que

A descoberta das grandezas incomensuráveis revelou a existência de grandezas contínuas, de natureza geométrica, como comprimentos, áreas e volumes, que não podiam ser concebidos como coleções discretas de unidades. Mol ainda enfatiza que os eleatas tentaram incorporar tais grandezas ao universo matemático ao considerá-las como compostas por uma coleção infinita de objetos muito pequenos (MOL, 2013, p. 35).

Neste sentido, criou-se nessa época a primeira ideia de infinito na Matemática grega que séculos depois teria papel importante na formalização de conceitos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral.

Zenão, como discípulo de Parmênides, se aprofundou nas idéias de multiplicidade, pluralidade e movimento. Ficou conhecido por ter escrito em seu livro alguns paradoxos, que

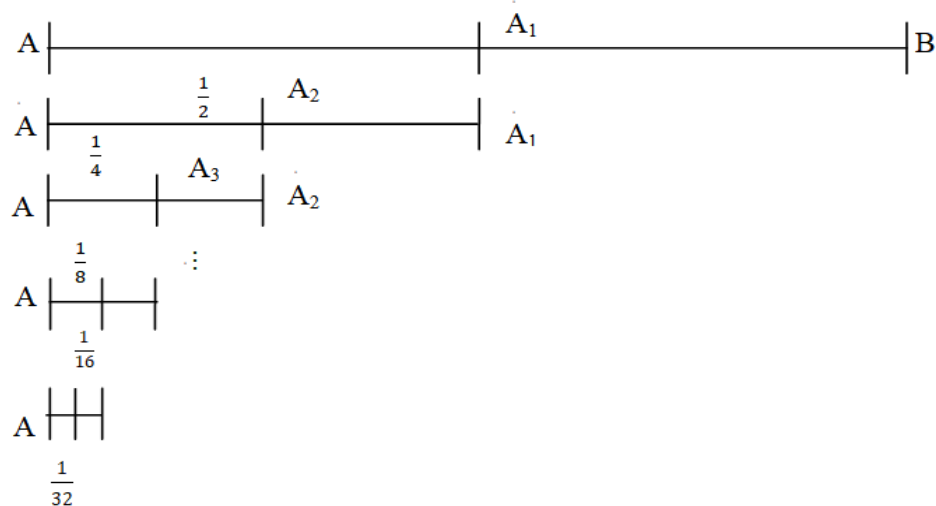
¹Se refere aos adeptos da escola de pensamento eleática da Grécia antiga. Disponível em: <https://www.dicionarioinformal.com.br/diferenca-entre/eleatas/escola/> Acesso em: 09 de Jan. 2020.

deixavam os filósofos inquietos e provocaram perturbações quanto à noção de infinito e contínuo. Porém, com o tempo, alguns desses paradoxos se perderam.

Em seus estudos, Boyer (2010) enfatiza quatro desses paradoxos: (1) Dicotomia, (2) o paradoxo de Aquiles, (3) o paradoxo da Flecha e (4) o paradoxo do Estádio. “O primeiro diz que antes que um objeto possa percorrer a primeira uma distância dada, deve percorrer a primeira metade dessa distância; mas antes disto, deve percorrer o primeiro quarto; e antes disso, o primeiro oitavo e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões” (BOYER, 2010, p. 51).

Vamos compreender geometricamente o que esse primeiro paradoxo diz. Considere que um objeto se desloca do ponto A para o objeto B, porém antes que chegue ao ponto B ele passara pela metade do caminho entre A e B, que chamaremos de A_1 . Mas observe que para o objeto se deslocar para o ponto A_1 , terá que passa pelo ponto A_2 . E assim sucessivamente, pois sempre haverá uma distância entre dois pontos quaisquer A e B. Baseado nessa teoria, Zenão acreditava que o que achamos ser movimento espacial na verdade era fantasia, ou seja, apenas uma imaginação. Para Zenão, o mundo era estático, assim como Parmênides igualmente acreditava. A figura 2.1, a seguir, demonstra como ocorre esse movimento.

Figura 2.1 – Paradoxo da Dicotomia.



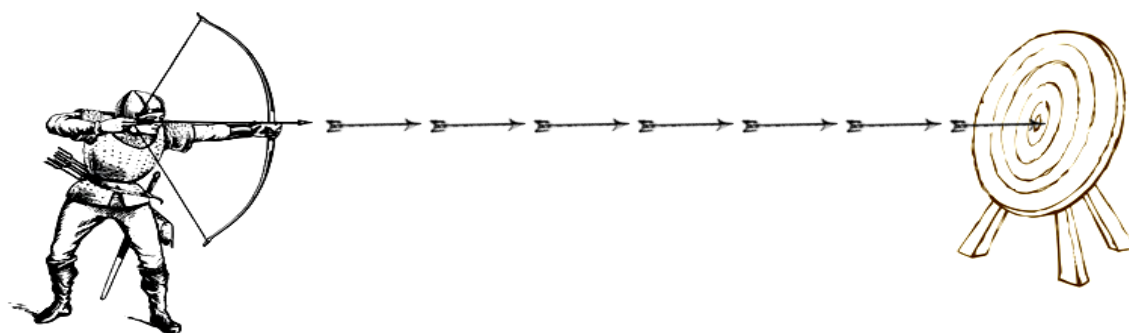
Fonte: Elaboração própria, 2020.

O paradoxo de Aquiles é análogo ao da Dicotomia, uma vez que está associada à intuição de que o objeto que está em movimento demora um determinado intervalo de tempo finito mínimo para se deslocar cada intervalo/distância sucessivo. Boyer (2010, p. 52) afirma que “o movimento é impossível sob a hipótese da subdivisibilidade indefinida do espaço e tempo”.

O paradoxo da Flecha (3) argumenta “que um objeto em vôo sempre ocupa um espaço igual a si mesmo; mas aquilo que sempre ocupa um espaço igual a si mesmo não está em movimento. Logo a flecha que voa está sempre parada, logo seu movimento é uma ilusão” (BOYER, 2010, p. 52).

Com esse paradoxo, Zenão presumia que o tempo seria formado por movimentos, de forma que estes sejam suas mais pequenas dimensões indivisíveis. Explicando melhor, suponhamos que um arqueiro lance um flecha em direção ao alvo (ver figura 2.2). Para Zenão, a flecha ocupa um espaço que é igual ao seu volume e, conseqüentemente, está parada naquele instante. Nesse sentido, a flecha a todo o momento ocupara um espaço que é igual o seu volume, e isso se empregam em todos os instantes. Esse fato só ocorre, pois todos os instantes em que o tempo de vôo é divisível, a flecha ocupou um espaço que é igual as suas próprias dimensões. Mas, isso não é possível, pois implicaria que o movimento fosse divisível.

Figura 2.2 – Paradoxo da Flecha



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Essa teoria, tempos mais tarde, teve papel fundamental na evolução do Cálculo, através das ideias de Isaac Newton de séries infinitas e o Cálculo Diferencial e Integral.

2.2 Eudoxo de Cnido e o método da exaustão

Na Matemática antiga, as civilizações desenvolveram grandes habilidades para determinar áreas e volumes. Um dos métodos utilizados para determinar áreas foi com uso de comparações de áreas que eram conhecidas, como por exemplo, a área do quadrado, ou de triângulos. Um dos problemas desta época era calcular a área do círculo. No trabalho de Eves (2011, p. 418) observa-se que “uma das contribuições importantes mais antigas ao problema de quadratura do círculo foi dada por Antífon, o Sofista (c. 430 a. C), um contemporâneo de Sócrates”. Antífon teve a ideia de que ao fazer a inserção de sucessivos polígonos regulares

dentro do círculo, e tornar suas áreas como aproximação do círculo, esse processo levariam a culminar na área do círculo. Porém, esse método gerou críticas de imediato, na qual o argumento citado sustentava o princípio de que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente e que, assim, o processo de Antífon jamais esgotaria a área do círculo (EVES, 2011, p. 418). Os pitagóricos não vendo uma saída matemática conveniente para o problema de aproximação de números irracionais, limitavam-se a todo o momento, no caso de razões, a grandezas comensuráveis.

Para muitos estudiosos da época, a concepção de Antífon para solucionar problemas de quadraturas do círculo foi vista como fracassada, porém esse argumento é considerado, pelos historiadores contemporâneos, o fragmento da idéia moderna do Cálculo Integral, assim como se a semelhava muito ao método da exaustão.

O método da exaustão, segundo Kistemann Jr.

É também conhecido por Princípio de Eudoxo-Arquimedes, por ter na sua base a teoria das proporções apresentada por Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.) e por Arquimedes de Siracusa (287-212 a. C.) ter sido o matemático que maior visibilidade lhe deu (KISTEMANN JR, 2008, p. 54).

Eudoxo de Cnido foi um grande astrônomo, matemático e filósofo grego que desenvolveu o método da exaustão e a teoria das proporções, que utilizam o conceito de infinitésimo.

Figura 2.3 – Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.)



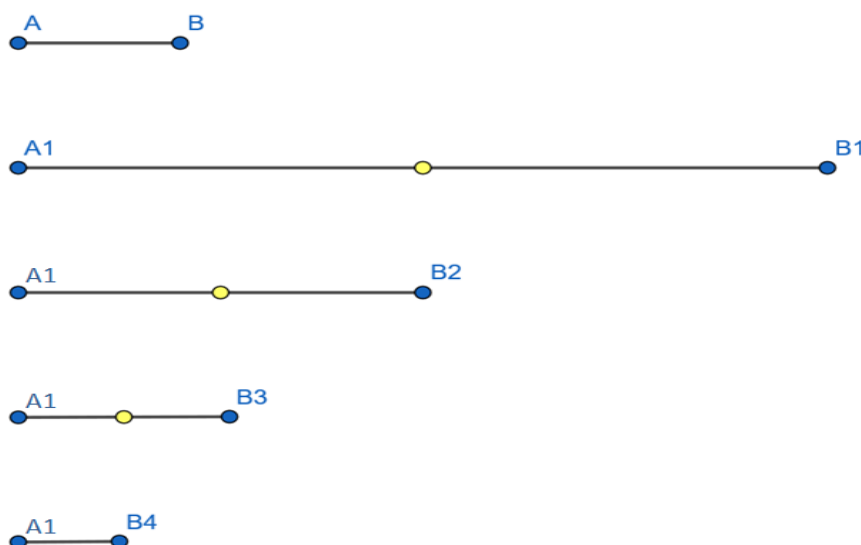
Fonte: <https://blogs.futura-sciences.com/e-luminet/2018/02/28/geometry-cosmos-2-pre-socratic-universe-aristotles-two-worlds/>

A noção de infinitésimo está ligada a grandeza que possa ser subdividida indefinidamente. Sua base é a proposição:

Proposição² 1.1: *Se de uma grandeza qualquer subtrair-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrair-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.*

Vamos entender o que acontece geometricamente com essa proposição, observando segmentos AB e A1B1 (ver Figura 2.4). Note que, se do seguimento maior A1B1 subtrair-se uma parte não menor que sua metade, iremos obter A1B2. Se continuarmos esse processo subtraindo do maior uma parte não menor que sua metade obtém A1B3. Se subtrairmos de A1B3 uma parte não menor que sua a metade chegaremos a uma grandeza A1B4 que é menor que as duas grandezas consideradas, ou seja, AB e A1B1.

Figura 2.4 – Representação geométrica da Proposição 1.1



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Seu método era tão eficiente que era capaz de solucionar problemas de proporções envolvendo grandezas comensuráveis e incommensuráveis e, de tal maneira, que foi uma das respostas as crises provocadas pelo invecção dessas grandezas pelo pitagóricos. Esses conceitos encontram-se no Livro V de Euclides. O método de exaustão pode ser visto como o primeiro passo que conduziria a teoria do Cálculo Diferencial e Integral, ou seja, ele mostra ser possível trabalhar de forma precisa o cálculo de áreas e volumes e comprimentos de figuras.

²EVES, H. **Introdução a História da Matemática**. 5. ed. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2011.

2.3 Arquimedes de Siracusa e seus métodos

Arquimedes (c. 287-212 a. C.) (Figura 2.5) foi um grande matemático que nasceu na cidade de Siracusa, na Sicília, mas que segundo historiadores, viveu boa parte da sua vida em Alexandria, cidade do Egito. Arquimedes é considerado por muitos pesquisadores como o maior matemático da antiguidade, visto que é reconhecido pelos seus diversos trabalhos com várias contribuições em Geometria. Arquimedes ficou um período na Universidade de Alexandria, na qual manteve contatos com alguns amigos (segundo historiadores) que ali estavam. Foi por meio destes amigos que Arquimedes comentou sobre seus diversos trabalhos. Ele também se mostrou muito astuto ao construir máquinas de guerra para defender Siracusa de ataques de navios romanos, como catapultas móveis que arremessavam pedras nos navios inimigos. Há relatos de que uma dessas invenções usava espelhos em formatos de parabólicos, de forma que os raios solares queimassem os barris de pólvora nos navios dos adversários, ainda em alto mar.

Figura 2.5 – Arquimedes de Siracusa (c. 287-212 a. C.)



Fonte: <http://historia7alfandega.blogspot.com/2010/08/biografias-protagonistas-gregos.html>

Segundo Eves (2011, p. 194),

Os trabalhos de Arquimedes são obras-primas de exposição matemática e lembram, consideravelmente, artigos de revistas especializadas modernas. Além de exibirem grande originalidade, habilidade computacional e rigor nas demonstrações, são escritos numa linguagem altamente acabada e objetiva. Cerca de dez tratados de Arquimedes se preservaram até nossos dias e há vestígios de outros extraviados.

Talvez a mais notável das contribuições feitas à matemática por esses tratados se traduzam no desenvolvimento inicial de alguns dos métodos do cálculo integral (EVES, 2011, p. 194).

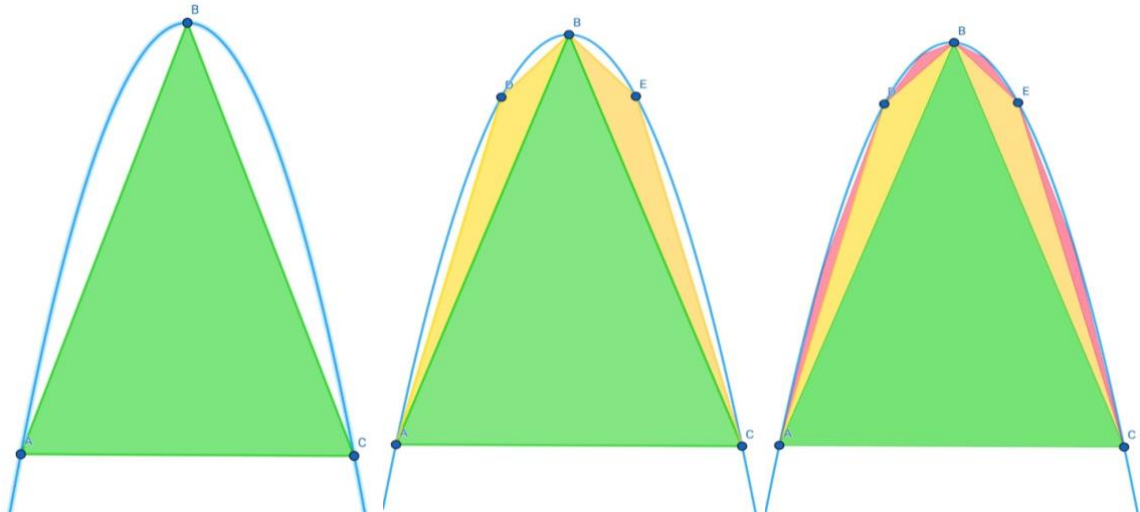
Arquimedes apresentou grandes contribuições em Geometria Plana, Espacial e Matemática Aplicada, assim como utilizou os princípios estáticos, por meio da mecânica. Esse método mecânico originou teoremas relacionados às áreas, volumes e centro de gravidade, que Arquimedes demonstrou rigorosamente pelo método da exaustão de Eudoxo. Graças a seu pai, Arquimedes igualmente tinha conhecimento do campo da Astronomia.

Nessa perspectiva, no trabalho de Eves (2011) destaca as principais obras de Arquimedes na Geometria Plana, tais como: *A medida de um Círculo*; *A Quadratura da Parábola e sobre as Espirais*. Dos trabalhos na Geometria Espacial, se destacam: *sobre a Esfera e o Cilindro*; e *sobre Cones e Esferóides*. Na Matemática Aplicada, destacam-se: *sobre o Equilíbrio de Figuras Planas e sobre os corpos Flutuantes*.

Diante de tantos trabalhos que Arquimedes tenha realizado, possivelmente a mais famosa e importante contribuição feita à Matemática tenha sido a obra *A Quadratura da parábola*, na qual desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento dos conceitos do Cálculo Integral, conhecido como “O Método”. Arquimedes apresentou duas grandes demonstrações com alto rigor matemático a respeito da quadratura da parábola. Em uma, utilizou o método da Alavanca, chegando à resolução da quadratura de um segmento de parábola, equilibrando retas como fazia com pesos em mecânica. Em outra, demonstrava a propriedade por meio do método da Exaustão de Eudoxo.

Para encontrar a área de um segmento parabólico, Arquimedes não podia utilizar polígonos regulares como fez com a aproximação da área do círculo. Ele utilizou o método da exaustão, que tinha a mesma ideia do Cálculo Integral, consistindo na inserção de polígonos, especificamente triângulos no interior do segmento parabólico. Aumentando a quantidade de triângulos ele obteve o mesmo resultado obtido pelo Método da Alavanca. Arquimedes provou que a área de um segmento parabólico é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo $\triangle ABC$ cuja base é o segmento AB, dispondo da mesma base e mesma altura do segmento parabólico (ver Figura 2.6).

Figura 2.6 – Quadratura da Parábola



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Tomando como exemplo a Figura 2.6, Arquimedes provou que dado um segmento parabólico, a área do triângulo inscrito $\triangle ABC$ no segmento é um quarto da área da soma dos triângulos $\triangle BAD$ e $\triangle BCE$ determinado pelo primeiro triângulo, ou seja,

$$\triangle BAD + \triangle BCE = \frac{1}{4}\triangle ABC \quad (\text{I})$$

Sucessivamente, haverá outros dois triângulos, $\triangle_1$ e $\triangle_2$, na qual as somas das áreas será um quarto do $\triangle BAD$ e mais dois triângulos, $\triangle_3$ e $\triangle_4$, cuja a soma das áreas será um quarto da área do triângulo $\triangle BCE$.

Dessa forma, fazendo a relação com o $\triangle ABC$, temos a seguinte área:

$$\begin{cases} \triangle_1 + \triangle_2 = \frac{1}{4}\triangle BAD \Rightarrow \frac{1}{4}\triangle BAD + \frac{1}{4}\triangle BCE = \frac{1}{4}(\triangle BAD + \triangle BCE) \\ \triangle_3 + \triangle_4 = \frac{1}{4}\triangle BCE \Rightarrow \frac{1}{4}(\triangle BAD + \triangle BCE) = \frac{1}{4}(\frac{1}{4}\triangle ABC) = \frac{1}{4^2}\triangle ABC \end{cases} \quad (\text{II})$$

De (I) e (II), temos a soma de todos os triângulos inseridos:

$$\triangle ABC + \frac{1}{4}\triangle ABC + \frac{1}{4^2}\triangle ABC.$$

Repetindo esse processo para um número finito n de etapas, obtemos a soma de todos os triângulos inseridos de modo que se aproxima da área do segmento parabólico. Assim, Arquimedes provou que essa soma é dada por:

$$\Delta ABC + \frac{1}{4}\Delta ABC + \frac{1}{4^2}\Delta ABC + \dots + \frac{1}{4^n}\Delta ABC + \dots = \frac{\Delta ABC}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\Delta ABC.$$

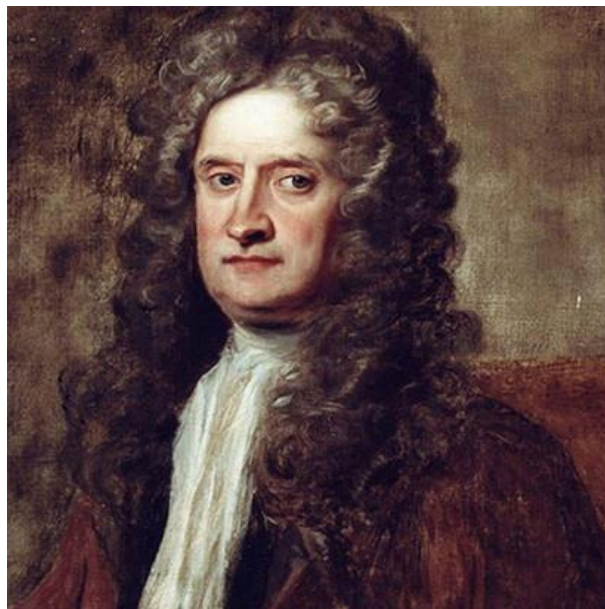
■

Através da demonstração da quadratura da parábola, podemos observar que esse processo de obter área da parábola se assemelha com o conceito do Cálculo Integral dos tempos modernos.

2.4 Isaac Newton

Isaac Newton (1642-1727) (Figura 2.7) foi um grande matemático de sua época, com várias contribuições para o conhecimento matemático nos séculos XVII e XVIII. Nascido prematuro, Isaac foi criado em Woolsthorpt na Inglaterra. Seus pais trabalhavam como fazendeiros num povoado e Newton não teve a oportunidade de conhecer o seu pai, em razão do falecimento dele três meses antes do seu nascimento. Por esse motivo passou a ser criado pela sua mãe e avó.

Figura 2.7 – Isaac Newton (1642-1727).



Fonte: <https://wsimag.com/pt/ciencia-e-tecnologia/129-newton-einstein-e-a-viagem-no-tempo>

Newton quando criança já demonstrava grades habilidades. Segundo Eves (2011, p. 436), ele “[...] construiu um moinho de brinquedo que triturava o trigo, transformando-o em farinha, usando como força motriz um rato e construiu também um relógio de madeira movido

a água”. O jovem de 18 anos se mostrou muito astuto, desenvolvendo várias criações e isto fez com que o tio do lado materno, que já frequentava a Universidade de Cambridge, notasse uma vocação matemática incomum na criança, decidindo colocar Isaac na Universidade de Cambridge.

No período entre o final de 1664 e início de 1665, “não demorou muito para que ele passasse a criar sua própria Matemática, primeiro descobrindo o teorema do binômio generalizado, depois inventado o método dos fluxos, como ele chamava o atual *Cálculo Diferencial*” (EVES, 2011, p. 436). Newton, nesse período, ligou-se a dois problemas: o binômio que se refere às series infinitas e métodos dos fluxos que está ligado à taxa de variação.

No decorrer dos anos de 1665-1666, no mesmo período que Isaac obteve o seu grau no colégio, houve uma peste bubônica que ocasionou o fechamento da Universidade de Cambridge. Com isso Isaac acabou voltando para casa. Esse intervalo de tempo foi bastante proveitoso para Newton, visto que ele fez várias pesquisas. Entre elas podemos ressaltar: Estudos sobre óptica, a teoria da gravitação, o cálculo e a teoria das cores.

Após esses estudos, muitos trabalhos de Newton foram publicados na Royal Society, até ocorrer uma discussão a respeito de seus trabalhos na teoria das cores e algumas deduções que fez a partir de suas experiências em óptica, isso o deixou irritado com os comentários de alguns cientistas. Nesse momento de fúria Newton jurou que não iria mais publicar nenhum trabalho em ciência.

Boyer (2010, p. 272), enfatiza que “Newton nunca publicou o teorema binomial, nem o provou, mas redigiu e finalmente publicou várias exposições de sua análise infinita”. A ideia desse teorema surgiu no período de 1665-1666 quando houve a paralisação da universidade e foi composta em 1669 sendo publicada em 1711.

Uma das grandes contribuições de Isaac Newton foi o método dos fluxos, introduzindo por volta de 1669. Ele trabalhava o cálculo utilizando os métodos infinitesimais. Segundo Boyer (2010, p. 273) “Newton tornou-se o efetivo inventor do Cálculo porque foi capaz de explorar a relação inversa entre inclinação e área através de sua nova análise infinita”.

2.5 Gottfried Leibniz

Um grande matemático surge no século XVII, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) (Figura 2.8), nascido em Leipzig. Quando jovem, aos 15 anos, entrou na Universidade e aos 17 anos obteve um grau de Bacharel. Três anos depois, Leibniz estava se preparando para o título

de doutor em Direito, mas como ele tinha apenas 20 anos, lhe foi negado esse título. Mais tarde, ele conseguiu o grau de doutor em Filosofia pela Universidade de Altdorf na Alemanha e após recebeu uma indicação para trabalhar como professor, porém recusou. Preferiu ficar trabalhando como diplomático, primeiramente a serviço do eleitor de Mainz e depois como tão esperado ficou a serviços da corte de Hanover, na Alemanha.

Figura 2.8 – Gottfried Leibniz (1646-1716)



Fonte: <http://biographyworldweb.blogspot.com/2013/05/gottfried-wilhelm-leibniz-biography.html>

Leibniz, como um diplomata, fez sua primeira viagem a Paris. Estando lá pode conhecer Isaac Barrow, que foi o professor de Newton. Ele incentivou Leibniz a dar aula de Matemática e Gottfried passou cerca de um ano ministrando aulas. Eves (2011, p. 442-443) aponta que “Leibniz já havia descoberto o Teorema Fundamental do Cálculo, desenvolvido grande parte de sua notação para o assunto e estabelecido muitas das fórmulas elementares de diferenciação”.

A ideia de Newton era centralizada no método dos fluxos, ou seja, tinha mais a ver com taxas de variações. Já para Leibniz era o inverso, se tratava da diferencial. Uma das grandes contribuições de Leibniz foi o Cálculo Integral. Eves (2011, p. 443) afirma que “Leibniz inventou o seu Cálculo entre 1673 e 1676. Usou pela primeira vez o símbolo de integral, um S alongado, derivado da primeira letra latina *summa* (soma) em 29 de outubro de 1675”. Mas, Leibniz não se restringiu apenas a isso, ele criou uma notação que representava uma soma infinitesimal, tomou y como sendo a curva gerada pela função e dx a distância infinitesimal de um intervalo. Então descreveu o cálculo da área sob a curva como sendo $\int y \, dx$.

3 INTEGRAIS INDEFINIDAS E DEFINIDAS

3.1 Antiderivadas

Na Matemática, quando estamos trabalhando com o Cálculo Integral, facilmente encontramos casos nos quais conhecemos as derivadas das funções e queremos obter a função que a originou, ou seja, sua antiderivada. Essas situações aparecem muitas das vezes nos Cursos de Engenharia ou Física.

Considere o seguinte exemplo: Um ponto material tem o movimento descrito pela função horária $F(x) = -5x + 3x^2$, relativamente é um exemplo clássico que trabalhamos na Física, na qual procuramos determinar a função velocidade como também a função horária do movimento. Na física a função horária para esse movimento é da forma, $F = F_0 + V_0x + \frac{ax^2}{2}$, onde F representa a posição em metros e x o tempo em segundos. Para solucionarmos esse problema é fundamental fazer a antiderivação da função dada, ou seja, desfazer a operação de diferenciação.

Sejam $f(x)$ e $F(x)$ funções, tais que $F'(x) = f(x)$. Então dizemos que F é uma antiderivada de f . Utilizando o exemplo acima temos: $F(x) = -5x + 3x^2$ esta é uma antiderivada de $f(x) = -5 + 6x$, pois $f(x) = F'(x)$ conforme a definição a seguinte.

Definição 3.1.1: Dizemos que uma função F é uma antiderivada de uma função f em um dado intervalo se $F'(x) = f(x)$ para cada x do intervalo I .

De acordo com a definição acima, segue que as antiderivadas de uma dada função devem estar sempre definidas em um intervalo I e, que a função $F(x)$ é definida por meio de uma derivada, isto é, a função $F(x)$ será uma antederivada de $f(x)$ se sua derivada $F'(x)$ for igual à função $f(x)$.

Neste sentido, encontrar uma antederivada de uma função $f(x)$ conhecida consiste em encontrar uma função desconhecida $F(x)$, tal que a derivada é exatamente igual função conhecida $f(x)$.

Considerando o exemplo acima, $F(x)$ é de fato uma antiderivada de $f(x)$, pois estão sempre definidas sobre um intervalo I . Se somarmos qualquer constante C a $-5x + 3x^2$, então a função $G(x) = -5x + 3x^2 + C$ também é uma antiderivada de f em $(-\infty, +\infty)$, pois

$$G'(x) = [-5x + 3x^2 + C]' = -5 + 6x + 0 = f(x).$$

Logo, podemos concluir que, uma vez que conhecemos uma antiderivada, podemos obter outras adicionando uma constante C .

Nesse sentido, vamos ver um teorema que será importante para o que nós iremos estudar.

Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em I . Assim, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.1.2: Se $f'(x) = 0$ para todo valor de x em I , então f é uma constante em I .

Teorema 3.1.3: (Teorema da Diferença Constante) Se $f(x) = g(x)$ são funções diferenciáveis em um intervalo I e se $f'(x) = g'(x)$ para cada x de I , então $f - g$ é constante em I , ou seja, existe uma constante k tal que $f(x) - g(x) = k$ ou, equivalentemente, $f(x) = g(x) + k, \forall x$ em I .

Demonstração: Note que, como as funções f e g são diferenciáveis em I , elas são contínuas em I , e o mesmo vale para a função definida em I por $H(x) = f(x) - g(x)$. Assim, segue que, $H'(x) = f'(x) - g'(x) \forall x$ em I . Porém, temos por hipótese que, $f'(x) = g'(x)$, para cada x de I . Logo, segue que $H'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Do Teorema 3.1.2, segue que a função $H(x) = f(x) - g(x)$ é constante no intervalo I , isto é, $H(x) = k, \forall x$ em I , onde k é uma constante.. Fazendo a substituição de $H(x)$ por $f(x) - g(x)$, tem-se

$$f(x) = g(x) + k, \forall x \text{ em } I.$$

■

Teorema 3.1.4: Se $F(x)$ for uma antiderivada particular de $f(x)$ em um intervalo I , então toda antiderivada de $f(x)$ em I será dada por $F(x) + C$, onde C é uma constante arbitrária e todas as antiderivadas de $f(x)$ em I poderão ser obtidas, atribuindo-se certos valores a C .

Demonstração: Considere que a função $G(x)$ represente qualquer antiderivada de $f(x)$ em I . Então

$$G'(x) = f(x), \forall x \text{ em } I. \quad (\text{i})$$

Como $F(x)$ é uma antiderivada particular de $f(x)$ em I , segue que

$$F'(x) = f(x), \forall x \text{ em } I. \quad (\text{ii})$$

De (i) e (ii), temos

$$G'(x) = F'(x), \forall x \text{ em } I$$

e, pelo Teorema 3.1.1, existe uma constante k , tal que

$$G(x) = F(x) + k, \forall x \text{ em } I.$$

Portanto, como $G(x)$ pode representar qualquer antiderivada de $f(x)$ em I , segue que todas as antiderivadas de f podem ser obtidas a partir de F pondo-se $G(x) = F(x) + C$, onde C é uma constante arbitrária.

■

3.2 Integral indefinida

Na seção anterior, quando queríamos determinar a antederivada da função f , buscamos solucionar a equação $F'(x) = f(x)$.

Dessa forma, vamos reescrever essa equação pela definição a seguir, como consequência do Teorema 3.1.4.

Definição 3.2.1: Se $F(x)$ é uma antiderivação da função $f(x)$, a expressão $F(x) + C$ é chamada **integral indefinida** da função $f(x)$, sendo representada por

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

onde:

- $\int$ é o símbolo da integração;
- $f(x)$ é a função integrando;
- dx representa a variável que estamos integrando;
- $F(x)$ é a função antederivada;
- C é uma constante de integração.

Exemplo 3.2.2: Considere a função $f(x) = 3x^2$.

Note que, a sua antederivada é dada por $F(x) = x^3$, pois:

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

logo,

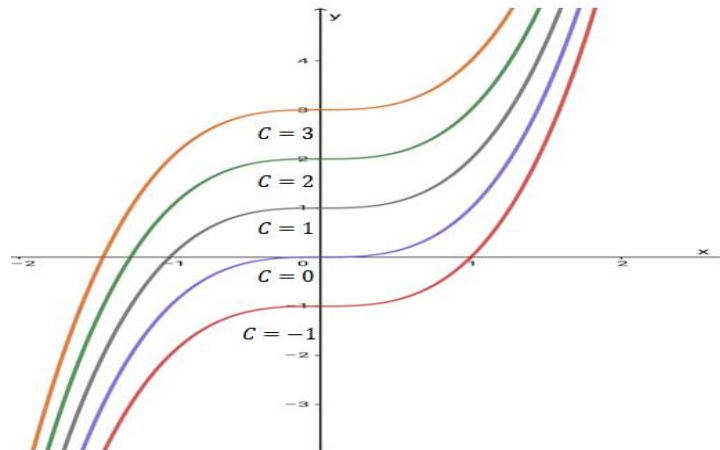
$$F(x) = x^3 + C$$

Derivando $F(x)$, obtemos:

$$F'(x) = x^3 + C = 3x^2.$$

Através do exemplo 3.2.2, podemos observar que uma integral indefinida pode ser representada como sendo toda uma **família de funções** da forma $y = F(x) + C$, ou seja, uma antederivada para cada valor da constante C . Geometricamente, pode-se considerar uma integral indefinida de uma função, quando existe, como sendo um conjunto (uma família) de curvas planas que se passa de uma para a outra transladando no sentido positivo ou negativo do eixo y . Na figura a seguir, podemos observar como os valores da constante C variaram no exemplo anterior:

Figura 3.1 – Gráfico da família de antiderivadas da função $f(x) = 3x^2$



Fonte: Elaboração própria, 2020 (Adaptado de STEWART, 2013, p. 353)

Sejam as funções $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ e c uma constante, então segue o Teorema:

Teorema 3.2.3: *Sejam $F(x)$ e $G(x)$ antiderivadas de $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, e c uma constante, então:*

(i). *Uma constante pode ser movida através do sinal de integração; isto é,*

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$$

Demonstração: (i) Seja $F(x)$ uma antederivada de $f(x)$. Então $c F(x)$ é uma antederivada de $c f(x)$, pois $(c F(x))' = c F'(x) = c f(x)$. Desta forma, temos que:

$$\int c f(x)dx = c F(x) + C = c (F(x) + C) = c \int f(x)dx$$

■

(ii). *Uma Integral de uma soma é a soma das integrais; isto é,*

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

ii) Vamos mostrar para a soma.

Se $F(x)$ e $G(x)$ são antiderivadas de $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, então $F(x) + G(x)$ é antiderivada de $f(x) + g(x)$, pois $[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$. Logo,

$$\int [f(x) + g(x)] dx = F(x) + G(x) + C$$

Tomando o $C = C_1 + C_2$, obtemos:

$$\begin{aligned} &= [F(x) + G(x)] + c_1 + c_2 \\ &= [F(x) + c_1] + [G(x) + c_2] \end{aligned}$$

$$= \int f(x)dx + \int g(x)dx \quad \blacksquare$$

O Teorema 3.2.3, no item (ii), afirma que para encontrar uma antederivada da soma de duas funções, é necessário reconhecer primeiro a antiderivada de cada uma das funções separadamente e então, somamos os resultados, ficando implícito que as duas funções estão definidas no mesmo intervalo.

Observemos nos Exemplo 3.2.5 a seguir, que o processo de integração exige muita intuição, pois apenas conhecemos a derivada de uma dada função.

Em seguida, apresentaremos uma tabela de integrais indefinidas imediatas, por meio das derivadas das funções.

Exemplo 3.2.4:

- (i) Como $(-\cos x)' = \sin x$, então $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.
- (ii) Como $(\sin x)' = \cos x$, então $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.
- (iii) $\int x^{\frac{1}{2}} \, dx = x^{\frac{3}{2}} + C$, pois $\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' = x^{\frac{1}{2}}$.
- (iv) $\int e^y \, dy = e^y + C$, pois $(e^y)' = e^y$.
- (v) Sabemos que $(\tan t)' = \sec^2 t$, então $\int \sec^2 t \, dt = \tan t + C$.

Figura 3.2 – Tabela de integrais imediatas

$\int cf(x) \, dx = c \int f(x) \, dx$	$\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$
$\int k \, dx = kx + C$	
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$	$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$

$\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C$	$\int \operatorname{cosec} x \operatorname{tg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$
$\int \frac{1}{x^2 + 1} \, dx = \operatorname{tg}^{-1} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$
$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$

Fonte: (STEWART, 2008, p. 404)

Exemplo 3.2.5: Vamos determinar a integral indefinida

$$\int (2 - \sqrt{x})^2 \, dx.$$

Aplicando o quadrado da diferença de dois termos e aplicando o Teorema 3.2.3 e a Tabela 3.2,

$$\begin{aligned} \int (4 - 4\sqrt{x} + x) \, dx &= 4 \int dx - 4 \int x^{\frac{1}{2}} \, dx + \int x \, dx \\ &= 4x - 4 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C \\ &= 4x - \frac{8}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Exemplo 3.2.6: Vamos calcular

$$\int 4e^x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \frac{3}{x^3} \, dx.$$

Temos:

$$\int 4e^x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \frac{3}{x^3} \, dx = \int 4e^x \, dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \int \frac{3}{x^3} \, dx$$

No segundo termo do integrando, há um quociente de duas funções trigonométricas, não há uma propriedade ou uma integral imediata para ser aplicada, nesse sentido é necessário recorrer as identidades trigonométricas, então temos:

$$\begin{aligned} &= 4 \int e^x \, dx - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} \, dx + 3 \int x^{-3} \, dx \\ &= 4 \int e^x \, dx - \int \sec x \cdot \operatorname{tg} x \, dx + 3 \int x^{-3} \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4e^x - \sec x + 3 \frac{x^{-2}}{-2} + C \\
&= 4e^x - \sec x - \frac{3}{2x^2} + C.
\end{aligned}$$

3.3 Método de integração por substituição

A integração por substituição, ou mudança de variável, é um método (ou técnica) que possibilita determinar uma grande quantidade de integrais não imediatas, visto que permite substituir uma integral relativamente difícil por uma mais simples. O conceito utilizado nesse procedimento é o mesmo que utilizamos na regra da cadeia para derivadas. Antes de definir o método da substituição, vamos relembrar a regra da cadeia.

Sejam f e F funções tais que $F' = f$, isto é, F é uma antiderivada de f . Então pela regra da cadeia temos

$$\begin{aligned}
[F(g(x))]' &= F'(g(x)) \cdot g'(x) \\
&= f(g(x)) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

Neste sentido, usando a Definição 3.2.1, obtemos a fórmula de integração pelo método da substituição

$$\int F'(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Fazendo $F' = f$, a substituição da variável $u = g(x)$ e $\frac{du}{dx} = g'(x)$, temos

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(u) + C = F'(u) + C = \int f(u) du.$$

Definição 3.3.1: Se $u = g(x)$ for uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I , então

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du.$$

Observem que, para chegar a definição da integração pelo método da substituição, utilizamos o conceito da regra da cadeia para a derivada.

Exemplo 3.3.2: Vamos calcule a integral usando a substituição, indicada

$$\int 2x(x^2 + 1)^{23} dx; \quad u = x^2 + 1.$$

Fazendo a substituição $u = x^2 + 1$, temos $\frac{du}{dx} = 2x$. Assim, usando $du = 2x \, dx$ e o método da substituição, temos

$$\begin{aligned}\int 2x (x^2 + 1)^{23} \, dx &= \int u^{23} \, du = \frac{u^{24}}{24} + C \\ &= \frac{(x^2 + 1)^{24}}{24} + C\end{aligned}$$

Exemplo 3.3.3: Calcule a integral indefinida

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx.$$

Se fizermos $u = x^3 + 1$, então $du = 3x^2$ e portanto $dx = \frac{1}{3} du$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{u} \frac{du}{3} &= \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{1}{3} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{9} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}}}{9} + C \\ &\quad \text{ou} \\ &= \frac{2}{9} \sqrt{(x^3 + 1)^3} + C.\end{aligned}$$

3.4 Método de integração por partes

Assim como o método da substituição parte do conceito da regra da cadeia, o método de integração por partes é uma consequência direta da regra do produto de derivadas.

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis num mesmo intervalo I . Pela regra do produto para derivadas, temos:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

Utilizando uma notação para as integrais indefinidas, podemos expressar essa equação da seguinte forma

$$\int [f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)] \, dx = f(x) \cdot g(x)$$

e pelo Teorema 3.2.3, temos

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x),$$

ou equivalentemente,

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Fazendo $u = f(x)$ e $dv = g'(x)dx$, temos $du = f'(x)dx$ e $v = g(x)$. Logo, a fórmula da integração por partes pode ser escrita como

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

Neste método, é importante saber escolher a substituição u e dv na integral de início, uma vez que devesse-se escolher v' de tal maneira que possibilite determinar v . Assim, os termos u' e v devem ser de integração mais fácil que as de u e v' , na devida ordem.

Mostraremos dois exemplos: um utiliza a integração por partes e o outro usando os dois métodos vistos, ou seja, tanto o método da substituição como a integração por partes.

Exemplo 3.4.1: Vamos calcular a integral a seguir usando a integração por partes

$$\int x^2 \sen x dx.$$

Seja $u = x^2$ e $dv = \sen x dx$. Então, $du = 2x dx$ e $v = -\cos x$. Logo,

$$\begin{aligned} \int x^2 \sen x dx &= \int u dv = u \cdot v - \int v du = -x^2 \cos x - \int (-\cos x) 2x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx \end{aligned}$$

Observe que, apareceu novamente uma integral que não é de fácil resolução. Vamos aplicar novamente a integração por partes em

$$\int x \cos x dx.$$

Fazendo $u = x$ e $dv = \cos x dx$. Temos $du = dx$ e $v = \sen x$. Assim,

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \int u dv = u \cdot v - \int v du = x \sen x - \int \sen x dx \\ &= x \sen x - \cos x \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int x^2 \sen x dx = -x^2 \cos x + 2(x \sen x - \cos x) + C.$$

Exemplo 3.4.2: Calculemos a integral

$$\int x^3 e^{x^2} dx.$$

Primeiramente, vamos deixar a integral mais simples para aplicar a integração por partes, utilizando o método da substituição. Vamos mudar a variável, isto é, seja $t = x^2$. Então $dt = 2x dx$ ou $\frac{dt}{2} = x dx$. Logo,

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \int t e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t e^t dt.$$

Aplicando a integração por partes, fazendo $u = t$ e $dv = e^t dt$. Então, $du = dt$ e $v = e^t$. Assim,

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int t e^t dt = \frac{1}{2} \int u dv = \frac{1}{2} (uv - \int v du) \\ &= \frac{1}{2} (te^t - \int e^t dt) = \frac{1}{2} (te^t - e^t) = \frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) \\ &= \frac{e^{x^2}}{2} (x^2 - 1). \end{aligned}$$

3.5 Integral definida

Como foi visto nas Seções 2.2. e 2.3, os matemáticos da antiguidades se preocupavam com os problemas de determinar áreas de figuras planas. Um dos métodos utilizados foi por meio de comparação de figuras e um dos mais famosos da antiguidade foi o método da exaustão de Eudoxo, que consiste em aproximar a área de uma determinada figura com outra área já conhecida.

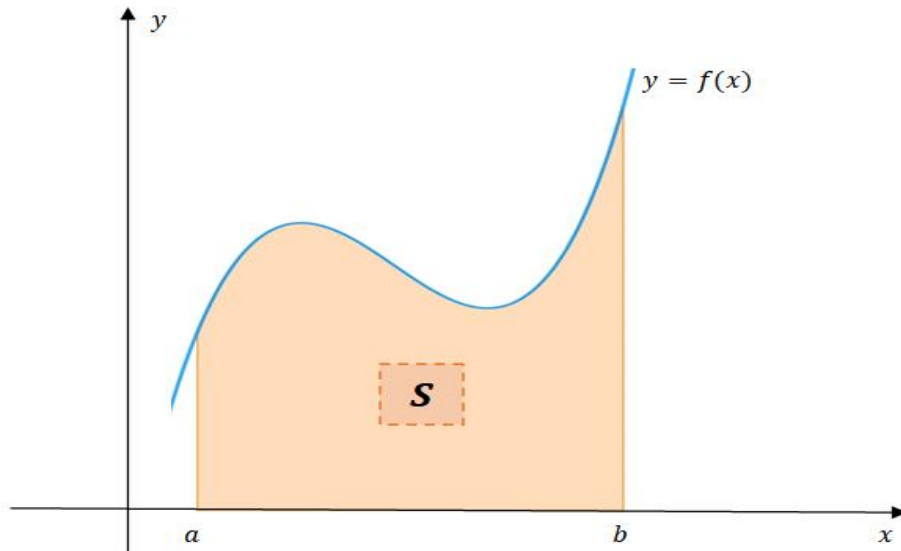
Para definir a área de uma região (figura) plana qualquer, sucedemos de forma análoga, uma vez que a integral definida também conhecida como soma de Riemann, é uma técnica que possibilita calcular áreas de regiões planas.

Vamos considerar agora um problema de definir a área A de uma região plana S , delimitada pela curva $y = f(x)$, num intervalo $[a, b]$, pelo eixo dos x e por dois extremos, o “limite inferior” e “limite superior” de integração, denotada pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, como mostra a Figura 3.3. Os matemáticos do século XVII imaginaram essa área como a soma das áreas de uma infinidade de retângulos de base infinitamente pequena dx e altura

equivalente a $f(x)$. Por causa dessa interpretação, a área A da referida figura, costuma ser escrita assim:

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Figura 3.3 – Área A sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$.



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Esse ponto de vista, da integral como uma soma de uma infinidade de áreas infinitamente pequenas, pode ser compreendido como um limite de uma soma finita. Tomando uma partição do intervalo $[a, b]$, isto é, decompondo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos,

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\},$$

tal que

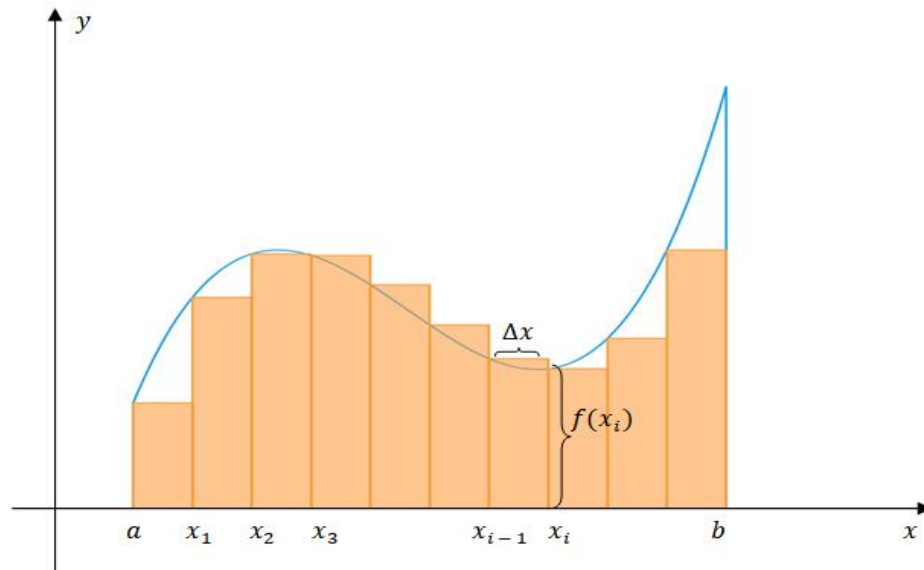
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

A largura de cada retângulo será dada por $\Delta x_i = \Delta x = \frac{(b-a)}{n}$. Logo temos os seguintes comprimentos $\Delta x_1 = (x_1 - x_0)$, $\Delta x_2 = (x_2 - x_1)$, $\Delta x_3 = (x_3 - x_2)$, e assim por diante, de forma que o comprimento do i -ésimo subintervalo seja Δx_i , e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Formemos as somas dos retângulos com largura Δx e altura $f(x)$, que é o valor dos seus respectivos subintervalos, portanto a área do i -ésimo retângulo é $f(x_i) \Delta x$ (ver Figura 3.4). Logo, a soma das áreas dos retângulos é

$$S_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

que é aproximadamente à área total A sob a curva.

Figura 3.4 – Aproximação por retângulos da área A sob uma curva



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Note que, quanto maior for o número de subintervalo, mais a soma de S_n , se aproximará da área da curva dada, ou seja, quando $n \rightarrow \infty$ S_n se aproxima de S (ver Figura 3.4). Assim, segue a definição:

Definição 3.5.1: A área A da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x],$$

desde que o limite exista.

Sem usar os extremos direito ou esquerdo, vamos escolher um ponto em cada subintervalo da partição cuja altura é o valor de f , então temos: x_1^* o ponto escolhido em $[x_0, x_1]$, x_2^* o ponto escolhido em $[x_1, x_2]$, e assim por diante. “Estes [...] pontos podem ser escolhidos arbitrariamente (podendo ser um dos extremos do subintervalo)” (ÁVILA, 2011, p. 257). Nesse sentido, denotaremos as alturas por $f(x_1^*)$, $f(x_2^*)$, $f(x_3^*)$, ..., $f(x_n^*)$, e as áreas por

$$f(x_1^*)\Delta x, f(x_2^*)\Delta x, f(x_3^*)\Delta x, \dots, f(x_n^*)\Delta x.$$

Logo, uma expressão mais geral para uma aproximação da área será

$$A \approx \text{área } S_n = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

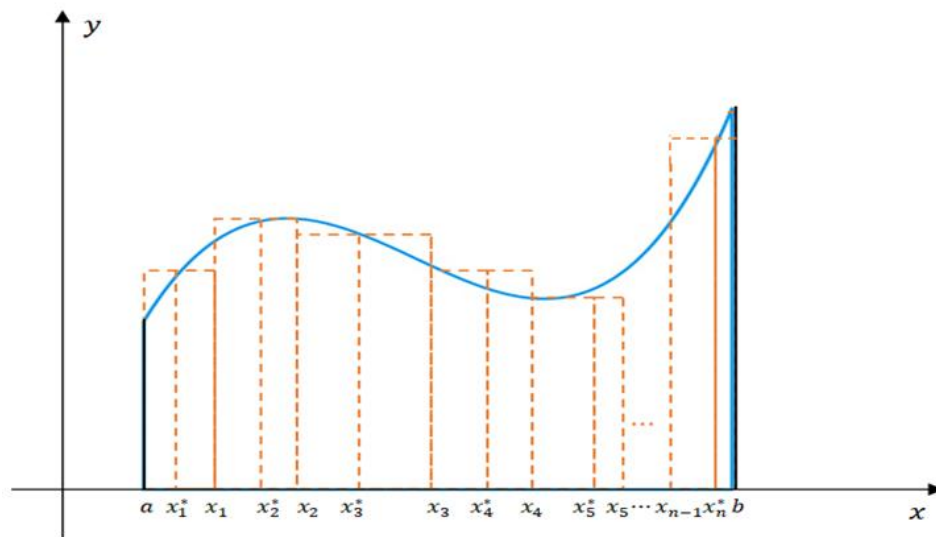
Podemos observar nessa expressão que à medida que n se expande muito e cada Δx_i , $i = 1, 2, \dots, n$, melhor se aproxima da área S . A integral definida está relacionada com o limite da Definição 3.5.1, visto que ela está restrita a um intervalo definido $[a, b]$. Depois de ter obtido a formula geral da soma das áreas dos retângulos, vamos apresentar a integral definida como:

Definição 3.5.2: Se f é uma função contínua definida por $a \leq x \leq b$. Dizemos que f é integrável em $[a, b]$ se o limite

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

existir e não depender dos números x_i^* pertencentes a $[x_{i-1}, x_i]$.

Figura 3.5 – Aproximação da área S por soma de retângulos



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Neste caso, quando o limite existir, dizemos que a integral definida de f de a até b é definida por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i.$$

Como o cálculo da integral definida é realizado/obtido por meio de limite de somas, se torna muito trabalhoso e cansativo, e muitas das vezes chega ser impossível. Nesse sentido, vejamos algumas propriedades da integral definida.

Teorema 3.5.3: Se f for integrável em $[a, b]$ e se c for uma constante, então cf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

Demonstração: Como f é integrável em $[a, b]$, então existe o

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

e podemos fazer

$$\begin{aligned} \int_a^b cf(x)dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n cf(x_i^*)\Delta x_i \\ &= c \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i \\ &= c \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

■

Um fato curioso nesse teorema, é que ele é similar ao resultado do Teorema 3.2.3, porém há uma principal diferença entre esses dois: o resultado para integral indefinida resulta em uma **função** multiplicada por escalar e o Teorema acima, resulta em um **número** multiplicado por um escalar. Perceba também que a integral de uma função $f(x) = c$ é a constante vezes o comprimento do intervalo.

Teorema 3.5.4: Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$, então $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Demonstração: De fato, se f e g são integráveis em $[a, b]$, então existem os limites de

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i \text{ e } \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(x_i^*)\Delta x_i.$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) + g(x_i^*)]\Delta x_i \\ &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(x_i^*)\Delta x_i \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(x_i^*) \Delta x_i \\
&= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.
\end{aligned}$$

■

O mesmo Teorema 3.5.4 vale para a diferença de funções, ou seja,

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

O teorema a seguir, de fácil demonstração será apenas enunciado.

Teorema 3.5.5: *Se f for integrável em um intervalo fechado contendo os três pontos a , b e c , então*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

não importando como os pontos estejam ordenados.

3.6 O Teorema Fundamental do Cálculo

Quando trabalhamos com a integral definida, usamos as somas de Riemann para determinar a área, tal qual vimos no Item 3. Porém muitos dos casos eram impossíveis a obtenção da área da região. Só era possível nos poucos casos onde a região delimitada pela curva é uma **figura geométrica** conhecida. A partir de dois grandes resultados, pode-se calcular facilmente, com o uso de Antiderivação, o valor numérico da integral. Esses importantes resultados são denominados Teoremas Fundamentais do Cálculo e é a base de dois ramos centrais do **Cálculo**, fazendo a **relação/associação** entre o cálculo diferencial e cálculo integral. Como foi destacado na Seção 1.1, o cálculo diferencial surgiu de problema de determinar tangentes a uma curva, enquanto o cálculo integral teve origem em processos somatórios para o cálculo de certas áreas, volumes e comprimentos.

Nesse sentido, apresentaremos o Teorema Fundamental do Cálculo, o qual está dividido em duas partes. Uma parte associa os métodos dos retângulos e da antiderivadas como o cálculo de áreas, e a segunda parte facilita o cálculo de integral definida usando antiderivadas.

A primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo trabalha com funções definidas por uma integral da forma

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

onde $f(t)$ é uma função contínua em $[a, b]$ e x varia no intervalo $[a, b]$. Usamos a notação t para variável de integração para não se confundir com o x que representa o extremo superior da integral.

Antes de mostrar o Teorema Fundamental do Cálculo, vamos destacar, sem demonstrar, dois Teorema que são essenciais. O primeiro é o **Teorema do Valor Médio** e o outro o **Teorema do Valor Médio para Integrais**. A demonstração de ambas pode ser encontrada no livro de Anton, Bivens e Davis (2007, p. 331 e p. 402).

Teorema 3.6.1: *(Teorema do Valor Médio) Seja f contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Então existe pelo menos um ponto c em (a, b) , tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 3.6.2: *(Teorema do Valor Médio para Integrais) Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então existe pelo menos um ponto x^* em $[a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x) dx = f(x^*)(b - a).$$

Vamos agora enunciar e demonstrar o *primeiro Teorema Fundamental do Cálculo*.

Teorema 3.6.3: *(Teorema Fundamental do Cálculo Parte 1) Se f for contínua em um intervalo $[a, b]$, então f tem uma antederivada em $[a, b]$. Em particular, se a for um ponto qualquer em $[a, b]$, então a função F definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é uma antiderivada de f em $[a, b]$, isto é, $F'(x) = f(x)$, para cada x em $[a, b]$, ou seja,

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x).$$

Demonstração: Vamos determinar a derivada $F'(x)$ usando a definição. Considere dois números x_1 e $x_1 + \Delta x$ em $[a, b]$. Então temos

$$F'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x},$$

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t) dt \quad e$$

$$F(x_1 + \Delta x) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) dt$$

Daí

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_1} f(t) dt \quad (i)$$

e pelo o Teorema 3.5.6, temos

$$\int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) dt = \int_a^{x_1} f(t) dt + \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt. \quad (ii)$$

Substituindo (ii) em (i), obtemos:

$$\begin{aligned} F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) &= \int_a^{x_1} f(t) dt + \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_1} f(t) dt \\ F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) &= \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt \end{aligned} \quad (iii)$$

Pelo o Teorema do Valor Médio para Integrais, existe um x^* no intervalo $[x_1, x_1 + \Delta x]$, tal que

$$\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt = f(x^*)\Delta x \quad (iv)$$

e de (iii) e (iv), obtemos

$$\begin{aligned} F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) &= f(x^*)\Delta x \\ \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} &= f(x^*). \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x^*) \quad (v)$$

Como f é contínua e x^* é um ponto que está entre x_1 e $x_1 + \Delta x$, segue que $x^* \rightarrow x_1$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Logo,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x^*) = \lim_{x^* \rightarrow x_1} f(x^*) = f(x_1)$$

e de (v), segue que $F'(x_1) = f(x_1)$.

■

Exemplo 3.6.4: Vamos calcular

$$\frac{d}{dx} \left[\int_1^x (3 \operatorname{sen} t - t^2) dt \right].$$

Usando o Teorema 3.6.3, temos

$$\frac{d}{dx} \left[\int_1^x (3 \operatorname{sen} t - t^2) dt \right] = 3 \operatorname{sen} x - x^2.$$

Exemplo 3.6.5: Vamos usar a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para calcular a derivada

$$\frac{d}{dx} \left[\int_1^x \operatorname{sen}(t^2) dt \right]$$

Como $f(t) = \operatorname{sen} t^2$ é contínua, então, aplicando o Teorema 3.6.3, temos que

$$\frac{d}{dx} \left[\int_1^x \operatorname{sen}(t^2) dt \right] = \operatorname{sen}(x^2).$$

Teorema 3.6.6: (Teorema Fundamental do Cálculo Parte 2) Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

onde $F(x)$ é qualquer antiderivada de $f(x)$, isto é, uma função tal que $F'(x) = f(x)$.

Demonstração: Seja $P: \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$, com

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Temos que F é derivável no intervalo $[a, b]$ e, portanto F é contínua em $[a, b]$. Observe que

$$F(b) - F(a) = [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \dots + F(x_1) - F(x_0),$$

ou seja,

$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]$. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, podemos aplicar o Teorema do valor Médio para obter $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Como $F'(c_i) = f(c_i)$, temos que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

.

e podemos escrever

$$\begin{aligned}
S_n(f) &= \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\
&= F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

Como f é contínua e c_i é um ponto que está entre x_i e x_{i-1} , passando o limite quando $\max \Delta x_i \rightarrow 0$. Logo,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = F(b) - F(a).$$

■

É comum expressar a diferença $F(b) - F(a)$ por $F(x) \Big|_a^b$.

Exemplo 3.6.7: Vamos usar a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo para calcular a integral

$$\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx.$$

Não temos como calcular a integral de imediato, por isso, vamos separar a função em dois integrandos e aplicar o Teorema 3.5.4. Então temos

$$\int_1^9 \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^9 \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^9 \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} dx - \int_1^9 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx;$$

Perceba que há uma divisão de potência de mesma base, daí, temos que repetir a base e subtrair os expoentes, logo segue que

$$= \int_1^9 x^{\frac{3}{2}} dx - \int_1^9 x^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Aplicando o Teorema 3.6.6, obtemos

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^9 - \left[2\sqrt{x} \right]_1^9 = \frac{2}{3} \left[9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right] - 2 \left[\sqrt{9} - 1 \right] \\
&= \frac{2}{3} [26] - 4 = \frac{40}{3} = 13,33
\end{aligned}$$

Exemplo 3.6.8: Calculemos a integral abaixo usando a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 3\sqrt{t} \right) dt.$$

Aplicando o Teorema 3.5.3 e o Teorema 3.5.4, obtemos:

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 3\sqrt{t} \right) dt = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}} dt - 3 \int_1^4 \sqrt{t} dt = \int_1^4 t^{-\frac{1}{2}} dt - 3 \int_1^4 t^{\frac{1}{2}} dt$$

e aplicando a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\begin{aligned} &= \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 3 \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 2t^{\frac{1}{2}} \Big|_1^4 - 2t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 \\ &= 2 \left[4^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}} \right] - 2 \left[4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right] = 2[2 - 1] - 2[7] = 2 - 14 = -12. \end{aligned}$$

Exemplo 3.6.9: Usemos a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo para calcular a integral

$$\int_0^2 f(x) dx, \text{ onde } f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x^5 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Substituindo a função na integral, temos

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 x^4 dx + \int_1^2 x^5 dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 + \left[\frac{x^6}{6} \right]_1^2 = \left[\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5} \right] + \left[\frac{2^6}{6} - \frac{1^6}{6} \right] \\ &= \frac{1}{5} + \frac{63}{6} = \frac{6 + 315}{30} = 10,7 \end{aligned}$$

Exemplo 3.6.10: Vamos calcular a integral abaixo e interpretá-la como uma diferença das áreas, ilustrando a situação com um esboço.

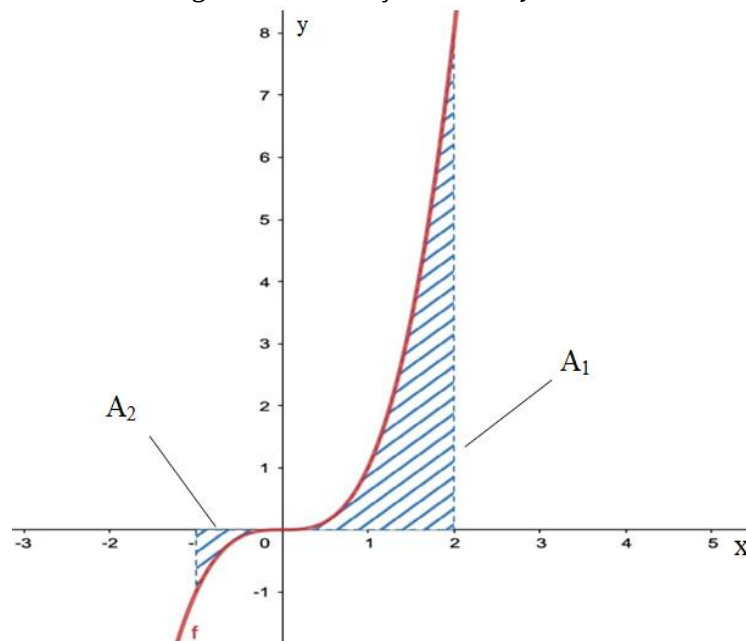
$$\int_{-1}^2 x^3 dx.$$

Note que, f é uma função contínua e a antederivada de $f(x)$ é dada por $F(x) = \frac{x^4}{4}$.

Usando a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^2 x^3 dx &= \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^2 \\
 &= \left[\frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} \right] = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \\
 \therefore \int_{-1}^2 x^3 dx &= 3,75
 \end{aligned}$$

Figura 3.6 – Esboço da curva $y = x^3$



Fonte: Elaboração própria, 2020.

A curva da função $f(x) = x^3$ dentro do intervalo $[-1, 2]$ inclui duas áreas, como podemos observar na Figura 3.6, onde a área A_1 está acima do eixo x e a área A_2 está abaixo do eixo x . Dessa forma, podemos representar as áreas como sendo

$$\int_{-1}^2 x^3 dx = A_1 - A_2.$$

4 APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA NA OBTENÇÃO DE VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

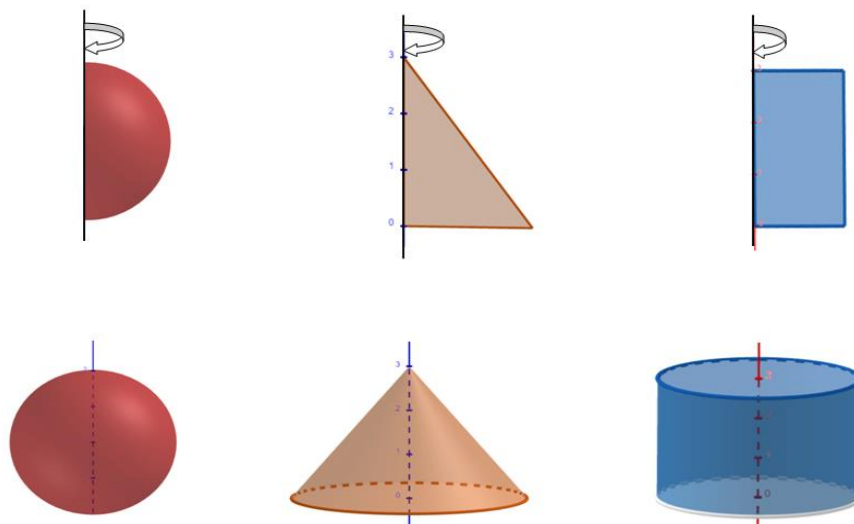
Na Seção 3.5, quando introduzimos o conceito de integral definida, vimos que era possível calcular áreas de regiões sob curvas utilizando o conceito do cálculo integral. Mas como aplicamos esse mesmo conceito/procedimento para determinar o volume de sólidos? Veremos nesse capítulo que a integral definida não se restringe apenas a calcular áreas, mas sim que existem outras aplicações. Faremos neste capítulo uma aplicação da integral, com o objetivo de obter volumes de sólidos de revolução.

Partindo desse objetivo, apresentaremos o conceito de sólido de revolução e, em seguida, serão desenvolvidos três métodos que nos permitem calcular o volume desses sólidos.

4.1 Sólidos de revolução

Quando estudamos Geometria Espacial, conhecemos vários tipos de sólidos geométricos, sendo alguns desses sólidos de revolução. Dentre eles, os mais conhecidos são: o cone, a esfera e os cilindros. O cone é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um dos seus catetos; a esfera é obtida por meio da rotação de um semicírculo em volta do seu diâmetro e o cilindro é gerado pela rotação de um retângulo em torno da reta que passa por um dos seus lados (ver Figura 4.1).

Figura 4.1 – Sólidos de revolução



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Podemos definir um **sólido de revolução** como sendo um sólido gerado por meio da rotação de uma região plana em torno de um determinado eixo, que iremos chamar de eixo de revolução/rotação.

Considere a região da Figura 3.3, onde sabemos que f é contínua no intervalo $[a, b]$, delimitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo do x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ (ver Figura 4.2).

Girando o gráfico de f em torno do eixo x , obtemos o seguinte sólido de revolução (Figura 4.3).

Figura 4.2 – A região S

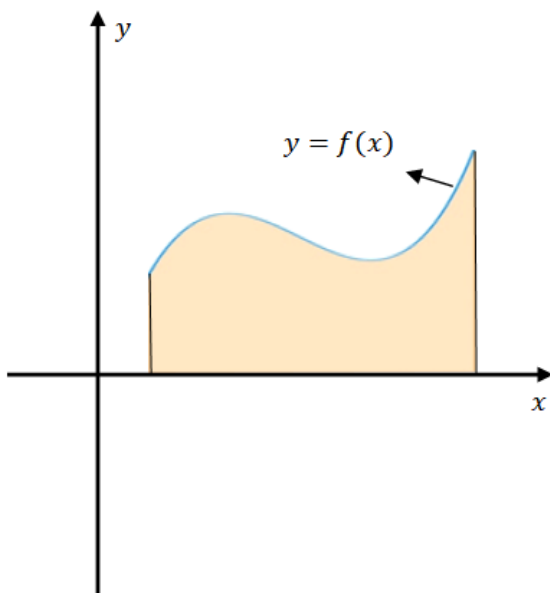
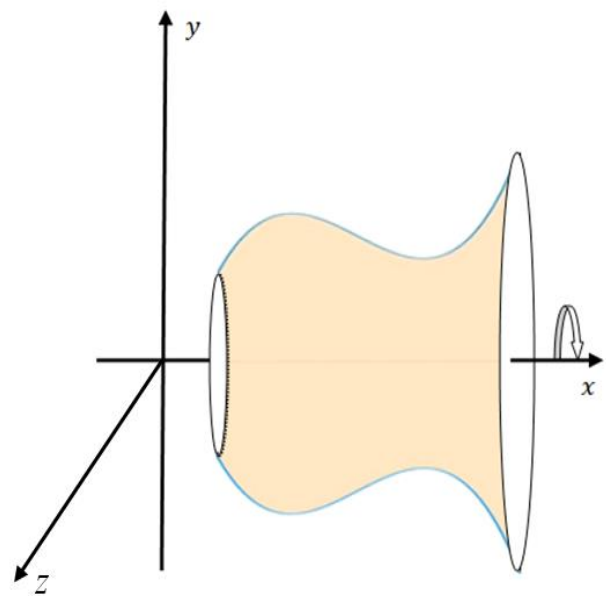


Figura 4.3 – Sólido gerado pela rotação de S



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Podemos perceber que, dada uma região plana qualquer, conseguimos obter uma infinidade de sólidos de revolução, sendo cada um deles obtido em função de um eixo de rotação.

4.2 Volume por fatiamento

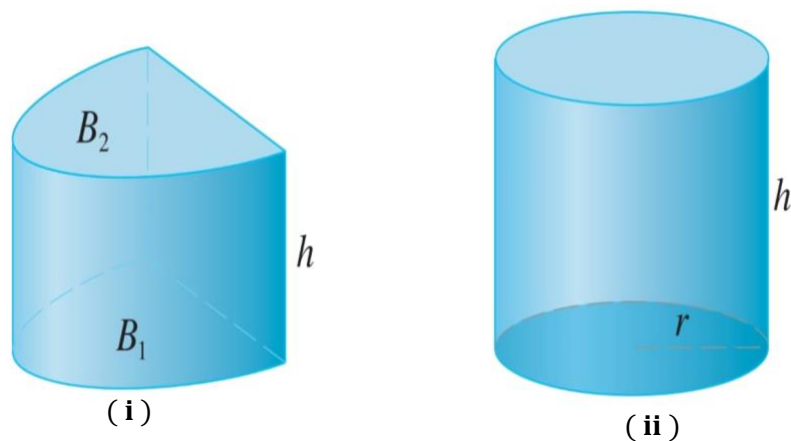
Na integral definida, vimos de forma minuciosa o processo para determinar a área de uma região, de modo que, utilizamos aproximação da área por retângulos. O cálculo de volume de sólidos pode ser feito de forma semelhante, uma vez que, ao invés de retângulos, podemos utilizar fatias finas para aproximar o volume de cada fatia, somar as aproximações, tomar o limite das somas das fatias para fornecer uma integral para o volume. Segundo Anton, Bivens e Davis

(2007, p. 450), “o que faz funcionar esse método é o fato de que uma fatia *fin*a tem seções transversais que não variam muito nem em tamanho nem em forma, o que, [...] faz com que fique fácil aproximar seus volumes”.

Utilizaremos um sólido bem conhecido e simples para ilustrar o método, o cilindro, popularmente chamado de cilindro reto.

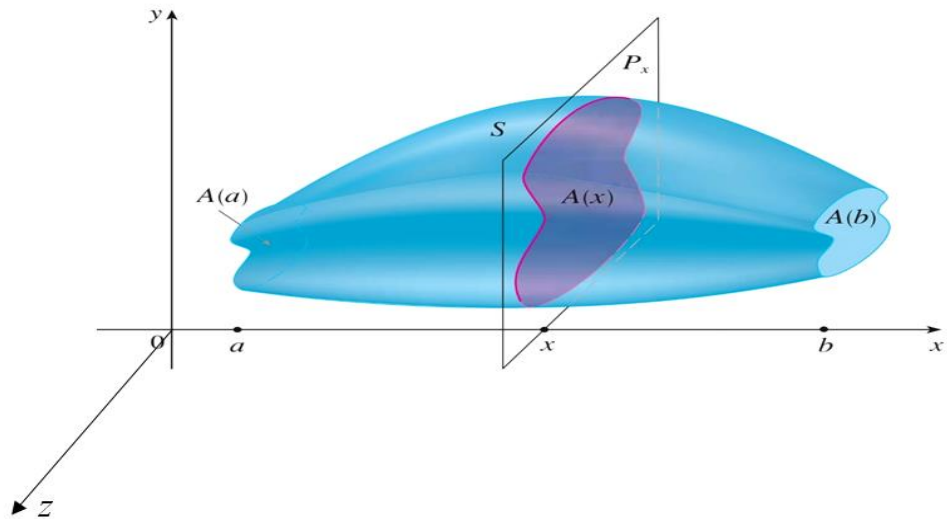
Um cilindro é um sólido delimitado por duas regiões planas B_1 e B_2 , onde B_1 é denominado base, e B_2 uma segunda região congruente em planos paralelos e uma superfície lateral gerada por um segmento de reta. Desta forma, o cilindro constitui-se de todos os pontos nos segmentos de reta perpendiculares à base que ligam B_1 e B_2 . Se o cilindro tem uma área de base A e altura h , sendo ambas conhecidas, então o volume do cilindro é dado por $V = \text{área} \cdot \text{altura} = A \cdot h$ (ver Figura 4.4 (i)). Existem outros tipos de sólidos cilíndricos, um deles é o cilindro circular reto de raio r , onde todas as seções transversais são perpendiculares ao eixo central da região circular de raio r (ver Figura 4.4 (ii)). Deste modo, o volume V de um cilindro circular reto de raio r e altura h pode ser dado pela área da seção transversal e a altura do sólido, ou seja, o volume será $V = \pi r^2 h$.

Figura 4.4 – Cilindros



Fonte: (STEWART, 2013, p. 389).

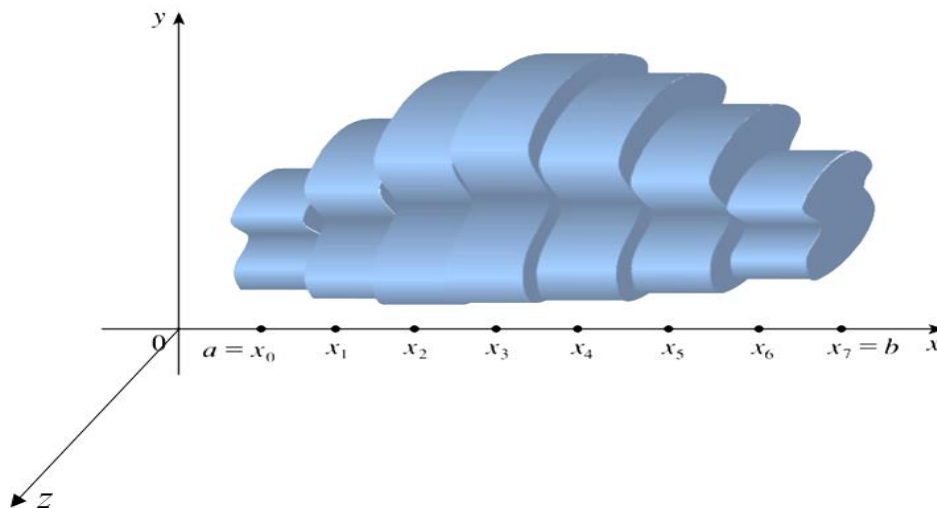
Suponhamos que desejamos determinar o volume de um sólido qualquer S (ver Figura 4.5). Seja $A(x)$ a área da secção transversal de S no plano P_x , o qual é perpendicular ao eixo de revolução e interceptando-o no ponto de coordenada x , com $a \leq x \leq b$. Ao fatiar o sólido S passando por x e calculando a área de cada fatia, obtemos a área da secção transversal $A(x)$ que irá variar quando x aumenta de a até b .

Figura 4.5 – Interceptação de S com o plano P_x 

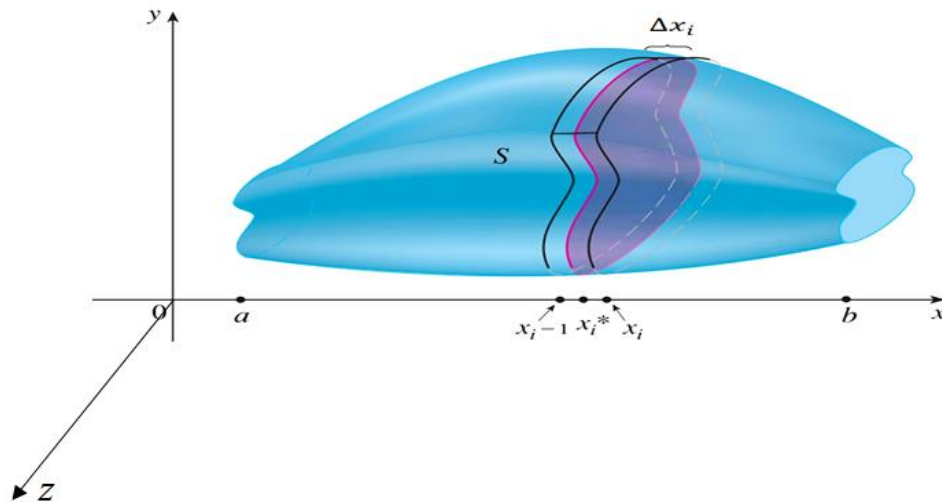
Fonte: (STEWART, 2008, p. 442)

Considere a seguinte partição do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, ou melhor, dividir o sólido em n fatias, com comprimentos iguais e fatiando o sólido por planos perpendiculares ao eixo x nos pontos de partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ (ver Figura 4.6). Como antes, seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, escolha x_i^* como pontos de amostragem, com i variando de 1 até n , de modo que, podemos aproximar a i -ésima fatia de S_i por um cilindro cuja a área da base é $A(x_i^*)$ e altura Δx_i (ver Figura 4.7).

Figura 4.6 – Fatiamentos do sólido



Fonte: (STEWART, 2008, p. 443)

Figura 4.7 – Aproximação da i -ésima fatia

Fonte: Adaptado de (STEWART, 2008, p.443)

Somando essas aproximações das fatias, obtemos a seguinte soma de Riemann que se aproxima do volume V :

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x_i$$

Como fizemos para área, tomamos o limite quando n cresce e as partições dos subintervalos tende a zero. Obtemos a integral definida

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x_i = \int_a^b A(x) dx.$$

Como consequência desse resultado, temos a seguinte definição.

Definição 4.2.1: (*Fórmula para o volume*) Seja S um sólido delimitado por dois planos perpendiculares ao eixo x em $x = a$ e $x = b$. Se, para cada x em $[a, b]$, a área da seção transversal de S perpendicular ao eixo x for $A(x)$, então o volume do sólido é

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

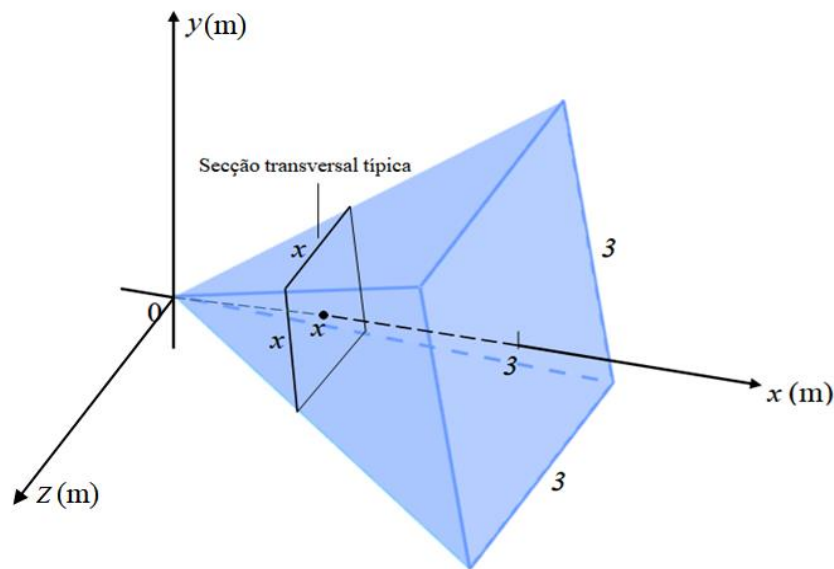
desde que $A(x)$ seja integrável.

Essa definição afirma que o volume de um sólido pode ser obtido integrando-se a área da seção transversal de um extremo ao outro do sólido. Vamos fazer algumas aplicações da Definição 4.2.1, com o intuito de obter o volume de alguns sólidos.

Exemplo 4.2.2: Vamos determinar o volume de uma pirâmide de base quadrada com 3 metros de lado e 3 metros de altura. A seção transversal da pirâmide, perpendicular à altura x metros abaixo do vértice, é um quadrado com x metros de lado.

1º passo: Vamos fazer um esboço e uma seção típica com área $A(x)$, de forma que a pirâmide tem altura ao longo do eixo x e seu vértice na origem (ver Figura 4.8).

Figura 4.8 – Seção transversal da pirâmide



Fonte: Elaboração própria, adaptado de (THOMAS [et al], 2002, p. 398).

2º passo: Encontrar uma expressão para $A(x)$. Note que, a seção transversal em x é composta por um quadrado com x metros de lado, e que sua área será denotado por $A(x) = x^2$.

3º passo: Encontrar os limites de integração, isto é, os quadrados vão de $x = 0$ a $x = 3$.

4º passo: integrar $A(x)$ para determinar o volume. Logo, temos

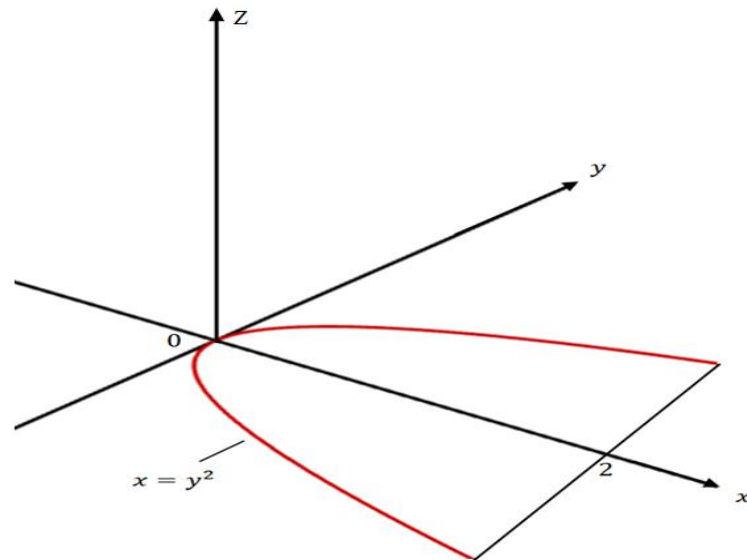
$$V = \int_0^3 A(x) dx = \int_0^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^3 = \frac{27}{3} = 9 \text{ m}^3.$$

Exemplo 4.2.3: Vamos determinar o volume do sólido cuja base é a região delimitada pela curva $y = x^2$ e o eixo x de $x = 0$ até $x = 2$ e cujas seções transversais, tomadas perpendicularmente ao eixo x , são quadrados.

1º passo: Vamos identificar a representação geométrica da seção transversal e encontrar a sua área.

Observe que, o exemplo nos dá uma informação inicial da região da base, que é delimitada pela curva $x = y^2$ e por $x = 2$. Logo, temos condições de fazer o seguinte esboço (Figura 4.9).

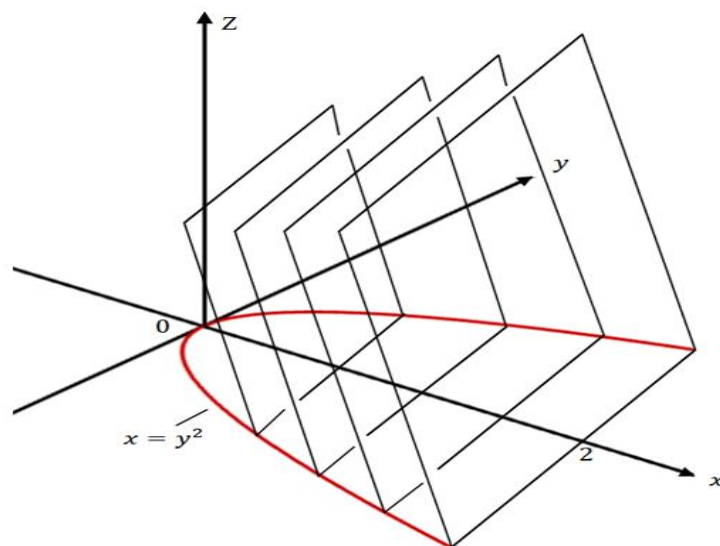
Figura 4.9 – Gráfico da curva $x = y^2$ e o limite superior $x = 2$.



Fonte: Elaboração própria, 2020.

2º passo: Vamos encontrar uma expressão para $A(x)$. Mas antes, note que as seções transversais ao eixo x são quadrados. Logo, temos a seguinte interpretação (Figura 4.10).

Figura 4.10 – Seções transversais.



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Para cada x_0 pertencente ao intervalo $[0, 2]$, o comprimento do lado do quadrado tem medida igual a $2\sqrt{x}$. Portanto, a área da seção transversal vai ser

$$A = A(x) = (2\sqrt{x})^2 = 4x$$

3º passo: Sabemos os limites de integração, pois são os valores dos extremos que limitam a região, isto é, as seções vão de $x = 0$ a $x = 2$.

4º passo: Integrar para determinar o volume. Pela Definição 4.2.1 obtemos

$$V = \int_0^2 A(x) dx$$

$$V = \int_0^2 4x dx = [2x^2]_0^2 = 2[2^2 - 0]$$

$$V = 8 \text{ unidades cúbicas.}$$

4.3 Volume pelo método dos discos

O método dos discos é uma maneira eficaz na obtenção de volumes, muito semelhante ao método do fatiamento, uma vez que, utilizam-se seções transversais nos sólidos de revolução. Como foi visto na Seção 4.1, **sólido de revolução** é um sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de um eixo. Há uma única diferença do método do disco para o cálculo do volume por fatiamento: o fato que as seções transversais são discos circulares, perpendicular ao eixo de revolução, tendo como área $A(x)$ uma circunferência. Assim a área é dada por $A(x) = \pi [R(x)]^2$, onde $R(x)$ é o raio do disco. O volume total V do sólido de revolução deve ser obtido pela **soma**, ou seja, pela integração de todos os volumes de tais discos, a medida que x varia de a até b . Portanto, o volume será dado por

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \pi [R(x)]^2 dx.$$

Como as seções transversais têm a forma de discos, o cálculo do volume pela fórmula acima é denominado de método dos discos.

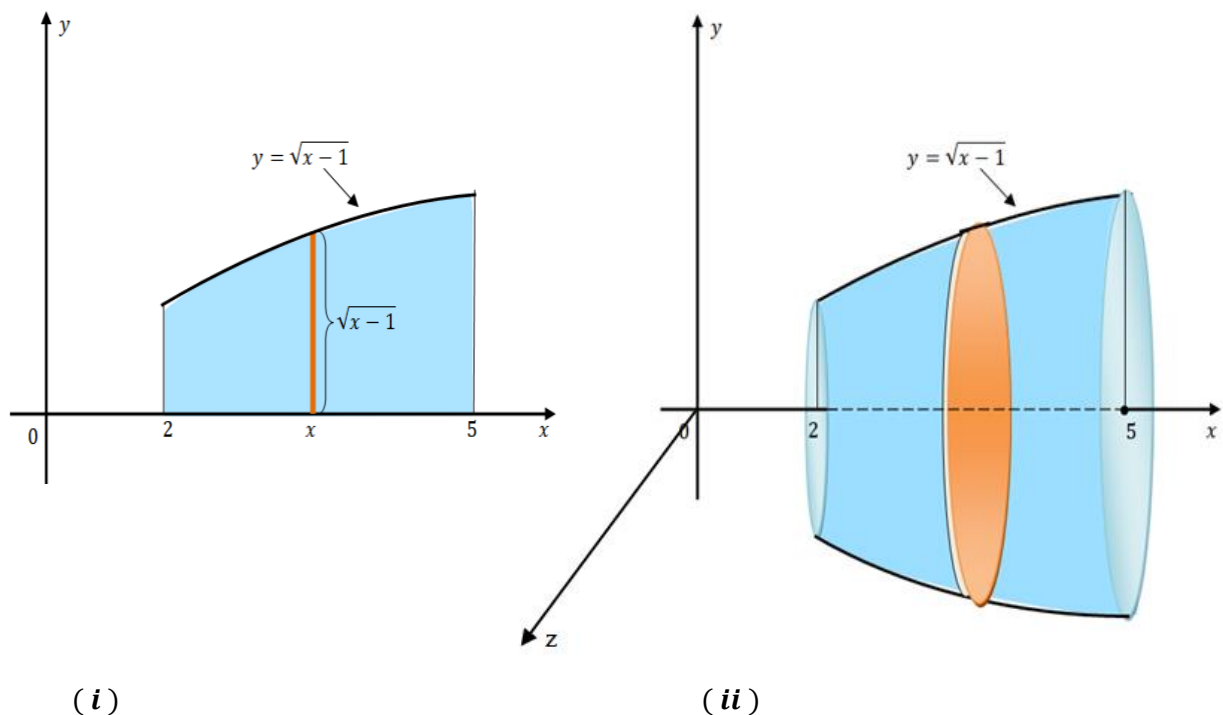
Vamos exemplificar esse método fazendo um uso de um roteiro para facilitar a compreensão.

Exemplo 4.3.1: Vamos determinar o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pela curvas $y = \sqrt{x-1}$ e retas $x = 2$, $x = 5$ e $y = 0$, em torno do eixo x . Também vamos esboçar a região, o sólido e um disco típico.

1º passo: Desenhar a região e identificar a função $R(x)$.

A região é exposta na Figura 4.11(i). Se realizarmos a rotação em torno do eixo x , obtemos o sólido mostrado na Figura 4.11(ii).

Figura 4.11 – A região e o sólido, respectivamente.



Fonte: Elaboração própria, 2020.

2º passo: Perceba que, quando fatiamos através do ponto x , obtemos um disco de raio $\sqrt{x-1}$.

Assim, a área será $A(x) = \pi (\sqrt{x-1})^2 = \pi(x-1)$.

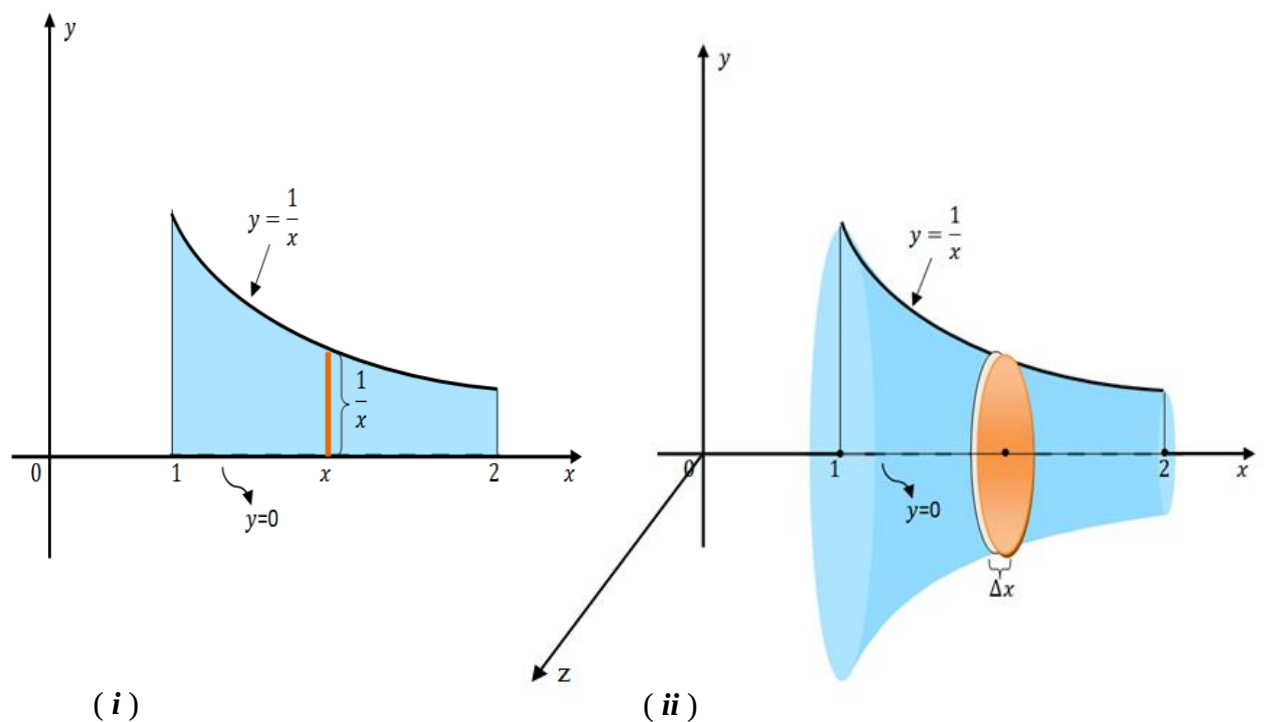
3º passo: Integrar para obter o volume. Assim, o volume é dado por

$$\begin{aligned}
 V &= \int_2^5 \pi (x-1) dx = \pi \left[\int_2^5 x dx - \int_2^5 dx \right] = \pi \left[\frac{x^2}{2} \Big|_2^5 - x \Big|_2^5 \right] \\
 &= \pi \left[\left[\frac{5^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right] - [5 - 2] \right] = \pi \left[\frac{25}{2} - 2 - 3 \right] = \pi \left[\frac{25 - 10}{2} \right] \\
 &= \frac{15\pi}{2} \text{ unidades cúbicas.}
 \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.2: Vamos calcular o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pela curvas $y = \frac{1}{x}$ e as retas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$, em torno do eixo x . Vamos esboçar a região, o sólido e um disco típico.

Vamos esboçar a região para facilitar a resolução do problema. A região ficará assim como mostra a Figura 4.12 (i). Ao rotacionar a região em torno do eixo x , iremos obter um sólido de raio $y = \frac{1}{x}$ (ver Figura 4.12 (ii)).

Figura 4.12 – A região e o sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo x .



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Ao fatiar o sólido iremos obter discos de áreas $A(x)$ e de largura Δx . Logo, podemos expressar a área dos discos da seguinte forma,

$$A(x) = \pi \left(\frac{1}{x} \right)^2.$$

Integrando para obter a soma de todas as áreas dos discos, temos o volume

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 \pi \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx = \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \pi \int_1^2 x^{-2} dx \\ &= \pi \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^2 = -\pi \left[\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\pi \left[\frac{1}{2} - 1 \right] \end{aligned}$$

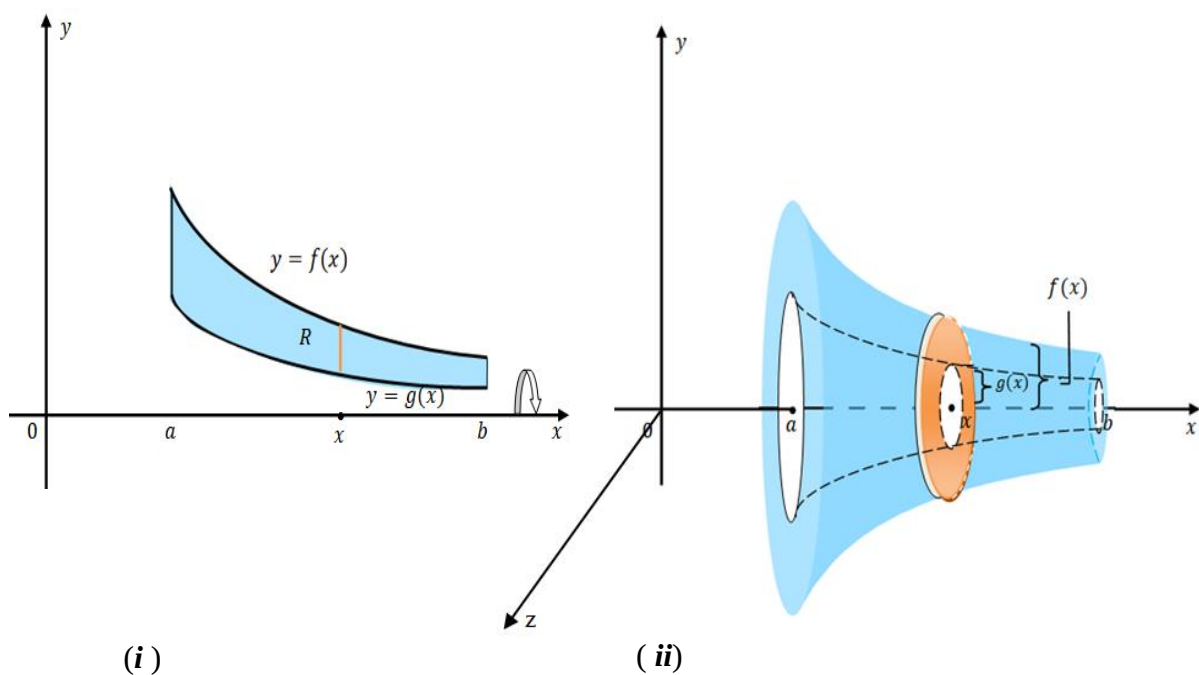
$$= \frac{\pi}{2} \text{ unidades cúbicas.}$$

4.4 Volume pelo método das arruelas

Na sessão anterior, obtemos sólidos de revolução em torno do eixo x , na qual os sólidos gerados por regiões planas. O método das arruelas pode ser usado em casos em que o sólido de revolução é gerado pela rotação de uma região em volta de um eixo externo a ela, ou seja, se a região que giramos um sólido não tocar ou cruzar o eixo de revolução, o respectivo sólido terá um buraco ou canais no seu interior (Figura 4.13).

Esse método funciona da seguinte forma: considere uma região plana limitada acima pela curva $y = f(x)$ e abaixo pela curva $y = g(x)$ e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são duas funções contínuas, positivas, e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$ (ver Figura 4.13 (i)). Vamos determinar o volume do sólido gerado pela revolução de R em torno do eixo x (ver Figura 4.13 (ii)).

Figura 4.13 – Região e sólido de revolução



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Para determinar o volume, vamos fazer o mesmo procedimento que fizemos para os discos, onde usamos o método do fatiamento e a fórmula para volume da Definição 4.2.1. Mas primeiro, observe que a seção transversal do sólido perpendicular ao eixo x é a região em forma de arruela, com raio externo $f(x)$ e raio interno $g(x)$ (ver Figura 4.13 (**ii**)). Logo, a área da seção transversal do círculo maior menos o círculo menor, será dada por

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2 = \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)$$

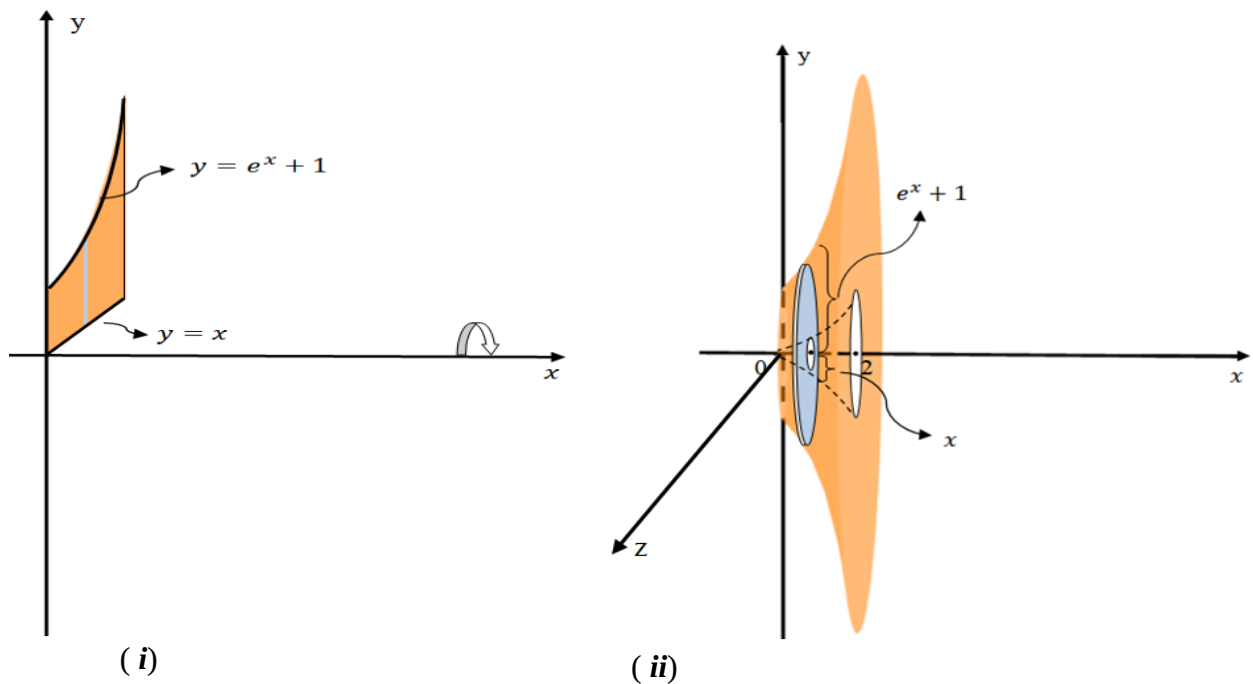
e, pela Definição 4.2.1, o volume agora será dado por

$$V = \int_a^b \pi ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx.$$

Exemplo 4.4.1: Calculemos o volume do sólido de revolução obtido girando-se em torno do eixo x a região entre os gráficos das equações $y = f(x) = e^x + 1$ e $y = g(x) = x$, onde $0 \leq x \leq 2$.

A região das curvas f e g estão ilustradas na Figura 4.14 (**i**). O sólido de revolução e a secção transversal perpendicular ao eixo x estão ilustrado na Figura 4.14 (**ii**).

Figura 4.14 – Região de f e g e o sólido gerado pela rotação em torno do eixo x .



Note que a secção transversal em (**ii**), tem um formato de uma arruela com raio interno x e raio externo $e^x + 1$. Logo, calculando a área dessa secção transversal obtemos

$$A(x) = \pi (e^x + 1)^2 - \pi (x)^2 = \pi (e^{2x} + 2e^x + 1) - \pi (x^2) = \pi (e^{2x} + 2e^x - x^2 + 1).$$

Assim, temos o seguinte volume

$$V = \int_0^2 \pi (e^{2x} + 2e^x - x^2 + 1) dx = \pi \left[\int_0^2 e^{2x} dx + 2 \int_0^2 e^x dx - \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 dx \right] \quad (\text{i})$$

Perceba que há uma integral que não é imediata. Logo, vamos resolver primeiramente a integral $\int_0^2 e^{2x} dx$, utilizando o método da substituição visto na Seção 3.3. Assim, seja $u = 2x$, então $du = 2dx$ e, portanto, $\frac{du}{2} = dx$.

Dessa forma,

$$\int_0^2 e^{2x} dx = \int_0^2 e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int_0^2 e^u du = \frac{1}{2} e^u = \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^2. \quad (\text{ii})$$

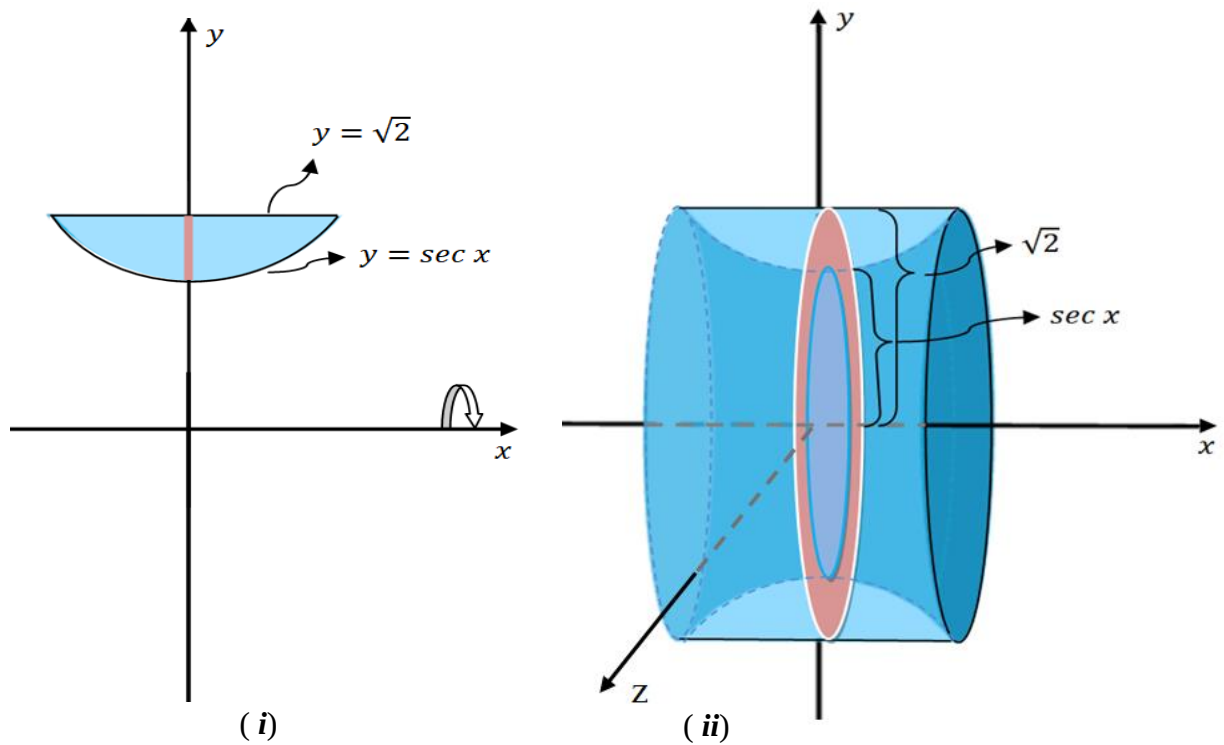
Substituindo o resultado de (**ii**) em (**i**) e calculando as integrais imediatas, obtemos o volume

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^2 + 2e^x \Big|_0^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 + x \Big|_0^2 \right] = \pi \left[\left[\frac{e^4}{2} - \frac{e^0}{2} \right] + \left[e^2 - e^0 \right] - \left[\frac{2^3}{3} \right] + 2 \right] \\ &= \pi \left[\frac{e^4 - 1}{2} + 2 \left[e^2 - 1 \right] - \frac{8}{3} + 2 \right] = \pi \left[\frac{e^4 - 1}{2} + 2e^2 - 2 - \frac{8}{3} + 2 \right] \\ &= \pi \left[\frac{e^4 - 1}{2} + 2e^2 - \frac{8}{3} \right] = \pi \left[\frac{3e^4 - 3 + 12e^2 - 16}{6} \right] \\ &= \pi \left[\frac{3e^4 - 12e^2 - 19}{6} \right] \text{ unidades cúbicas.} \end{aligned}$$

Exemplo 4.4.2: Vamos determinar o volume dos sólidos com a rotação, em torno do eixo x , da região limitada pelas curvas $y = \sec x$ e $y = \sqrt{2}$, com $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

Perceba que, ao girarmos a região Figura 4.15 (**i**), obtemos o sólido da Figura 4.15 (**ii**). As secções transversais possuem um formato de arruelas (Figura 4.15 (**ii**)).

Figura 4.15 – A região e o sólido gerado pela rotação em torno de x .



Fonte: Elaboração própria, 2020.

Assim, as secções transversais terão como raio interno $y = \sec x$ e raio externo $y = \sqrt{2}$. Logo, calculando a área da secção transversal obtemos

$$A(x) = \pi(\sqrt{2})^2 - \pi(\sec x)^2 = \pi(2 - \sec^2 x)$$

e assim o volume do sólido será

$$V = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \pi(2 - \sec^2 x) dx = \pi \left[\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2 dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx \right]$$

Dado que a derivada de $\tan(x)$ é $\sec^2 x$, então

$$\begin{aligned} V &= \pi \left[2x \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \pi \left[\tan x \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \pi \left[2 \left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] - \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} \right) - \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] \right] \\ &= \pi[\pi - 2] = \pi^2 - 2\pi \text{ unidades cúbicas.} \end{aligned}$$

5 CONCLUSÃO

A pesquisa realizada possibilitou uma abordagem sobre o Cálculo Integral, trazendo como foco a integral definida, assim como apresentou uma aplicação na Geometria Espacial. Além disso, também permitiu uma elaboração de um material de apoio para os alunos e professores, para que os mesmos possam compreender que a integral vai além das técnicas de integração e do cálculo de área. Na aplicação da integral definida, podemos conhecer uma forma de calcular o volume de um sólido de revolução.

Cremos que atingimos nosso objetivo, uma vez que aplicamos os conceitos da Integral Definida na Geometria Espacial, especificamente para obter o volume de sólidos de revolução. Para tanto, apresentamos o conceito de sólido de revolução e apresentamos três métodos, passo a passo, para obtenção do volume, cada um com suas particularidades.

Nosso objetivo específico inicial foi apresentar as contribuições dos matemáticos para o desenvolvimento histórico do Cálculo Diferencial e Integral, onde destacamos as ideias dos matemáticos da antiguidade, como Zenão e seus Paradoxos, Eudoxo, com sua teoria da Exaustão e Arquimedes, que fez muitos trabalhos significativos nessa área. Depois, discutimos a respeito das contribuições de Newton e Leibniz, que juntos formalizaram o Cálculo.

O segundo objetivo específico foi classificar e definir o conceito de integral, e os métodos de integração, para auxiliar nas aplicações da integral definida. No Capítulo 3 classificamos e definimos os tipos de integração e os métodos de integração. Apresentamos alguns teoremas fundamentais para a base aos nossos resultados.

Num estudo posterior, o estudante pode se aprofundar mais nesse tema aplicando a integral definida em outro método que não foi contemplado, que foi o **método das cascas cilíndricas**. Assim como, fazer aplicações para obter volume de sólidos de revolução em relação aos eixos x e y .

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO JÚNIOR, P. B.; OLIVEIRA, E. G. **Modelo Matemático da Curva de Revolução de uma Taça**. XII Encontro Nacional de Educação Matemática- XII ENEM, São Paulo - SP, 2016.
- ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. V. 1. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.
- ÁVILA, G. **Cálculo das funções de uma variável**. 7. ed. [Reimpr.]. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010. Tradução de Elza Furtado Gomide.
- COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2000.
- DIAS, G. A. **Cálculo Diferencial e suas Aplicações**. 2016. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista - BA, 2016.
- EVES, H. **Introdução a História da Matemática**. 5. ed. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2011. Tradução: Hygino H. |Domingues
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008. Disponível em: <https://ayanrafael.files.wordpress.com/2011/08/gil-a-c-mc3a9todos-e-tc3a9cnicas-de-pesquisa-social.pdf> Acesso em: 02 set. 2019
- KUROKAWA, C. Y. **Áreas e Volumes: de Eudoxo e Arquimedes a Cavalieri e o Cálculo Diferencial e Integral**. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas-SP, [s/n], 2015.
- KISTEMANN JR, M. A. **Sobre a teoria das proporções, o método da exaustão e os incommensuráveis**. V. 11. Nº 13. São Paulo: Revista de Educação Matemática, 2008. Disponível em: <https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/51> Acesso em: 19 de Jan. 2020
- MOL, R. S. **Introdução a história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.
- PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do trabalho científico: Métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.
- STEWART, J. **Cálculo**. V. 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- _____. **Cálculo**. V. 1. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2008.
- THOMAS JR, G. B.; et al. **Cálculo**. V. 1. 10. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2002.