UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Tatiane Silva Gonzaga

Potencialidades e limitações de propostas de ensino com uso da reta numérica como suporte para as operações básicas com números inteiros no 7º ano do Ensino Fundamental

Rio Tinto– PB

2021

Tatiane Silva Gonzaga

Potencialidades e limitações de propostas de ensino com uso da reta numérica como suporte para as operações básicas com números inteiros no 7º ano do Ensino Fundamental

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador (a): Prof.(a).Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis

Rio Tinto– PB

2021

Tatiane Silva Gonzaga

Potencialidades e limitações de propostas de ensino com uso da reta numérica como suporte para as operações básicas com números inteiros no 7º ano do Ensino Fundamental

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador (a): Prof.(a).Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis

Rio Tinto– PB

2021

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

G642p Gonzaga, Tatiane Silva.
Potencialidades e Limitações de propostas de ensino com
uso da reta numérica como Suporte para as operações básicas com números inteiros no 7° ano do Ensino Fundamental / Tatiane Silva Gonzaga. - Rio Tinto, 2021.
59 f. : il.

Orientação: Cibelle de Fátima Castro de Assis Assis.
TCC (Graduação) - UFPB/CCAE.

1. Números inteiros. 2. Livro Didático. 3. GeoGebra. I.
Assis, Cibelle de Fátima Castro de Assis. II. Título.

UFPB/CCAE CDU 51(043.2)

Elaborado por LUIZA PEREIRA NUNES - CRB-936/15

Tatiane Silva Gonzaga

Potencialidades e limitações de propostas de ensino com uso da reta numérica como suporte para as operações básicas com números inteiros no 7º ano do Ensino Fundamental

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador (a): Prof. Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis

Aprovado em: 10 /12 / 2021

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis (Orientadora) – UFPB/DCX

Profa. Dra. Jussara Patrícia Andrade Alves Paiva (Membro) – UFPB/DCX

Profa. Dra. Claudilene Gomes da Costa (Membro) – UFPB/DCX

Aos meus pais, pelo incentivo, carinho e apoio irrestrito, propiciando vitória nesta minha caminhada.

AGRADECIMENTOS

Á Deus, por tudo que faz por mim, por todas as vitórias e conquistas que tem me proporcionado. A nossa Senhora da Conceição que me acompanha todos os dias da minha vida me protegendo sempre e me livrando de todo mal.

A meu pai Luiz Gonzaga Francisco que sempre me incentivou a nunca desistir dos meus sonhos. Obrigada meu pai por ter se dedicado por vários anos em me levar para a universidade o senhor é meu orgulho, graça a sua dedicação estou aqui realizando meu sonho.

A minha mãe Deonete dos Santos Silva por me incentivar a não desanimar diante das dificuldades, e por estar sempre do meu lado me ajudando sempre.

A meu esposo Antonio Karlos Silva de Medeiros por toda paciência e compreensão, e por estar sempre do meu lado me incentivando a nunca desistir por mais difícil que fosse que eu continuasse, pois a vitória chegaria.

A minha orientadora Profa. Cibelle de Fátima Castro de Assis por todo empenho e dedicação em suas orientações, por toda colaboração e ensinamentos nessa trajetória. Sua orientação foi uma grande aprendizagem, obrigada por toda atenção e paciência, suas orientações foram essenciais para conclusão do meu trabalho.

A minha irmã Fabiana Silva Francisco e o meu cunhado Antonio dos Prazeres por todo incentivo e por estar sempre do meu lado.

A minha filha Maria Helena Silva de Medeiros que mesmo tão pequena sempre esteve do meu lado me apoiando e me incentivando a não desistir.

A todos os professores do curso de Matemática por dividir comigo seus conhecimentos e pela dedicação e paciência, cada professor foi fundamental nessa caminhada. Gratidão a todos.

Aos colegas que conheci na universidade, pelas trocas de experiências, pelo convívio, pelas alegrias e incertezas, por todos esses momentos vividos juntos e partilhados.

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou a sua construção”. Paulo Freire

RESUMO

Esta pesquisa se insere no campo da Educação Matemática cujo objetivo foi investigar as potencialidades e limitações de propostas de atividades com suporte da reta numérica sobre operações básicas com números inteiros no 7º ano do Ensino Fundamental. Nesta pesquisa identificou-se potencialidades e limitações de propostas de diferentes recursos didáticos: um livro didático, dois recursos produzidos para professores e o software GeoGebra. Essa pesquisa, quanto aos objetivos, é exploratória, quanto aos recursos técnicos para coleta de dados é bibliográfica e de abordagem qualitativa. Foram analisadas essas propostas a partir das seguintes categorias: 1) Contempla habilidades da BNCC; 2) Trata das quatro operações na reta; 3) Diferencia o sinal de menos da operação de subtração do sinal que indica uma quantidade negativa; 4) Facilidade do uso da reta para calcular o resultado; 5) Participação do aluno na representação do resultado da operação na reta. A análise nos possibilitou entender como se trabalhar as quatro operações na reta numérica em cada proposta analisada neste trabalho. A reta numérica também ajuda os alunos a entender melhor as regras de sinais. Essa pesquisa será uma forma de mostrar para os alunos e professores a importância de entender as potencialidades e limitações do uso da reta numérica em propostas de ensino em diferentes recursos para o caso especifico das operações com números inteiros. Essas potencialidades e limitações devem estimular os professores a buscar por recursos complementares que ampliam o repertorio de propostas do professor de acordo com seus objetivos de ensino e necessidades dos seus alunos.

Palavras-chave: Números inteiros. Livro didático. GeoGebra.

ABSTRACT

This research is part of the field of Mathematics Education whose objective is to investigate the potential and limitations of proposed activities with the support of the number line on basic operations with integer numbers in the 7th year of elementary school. In this research, we identified potentials and limitations of proposals for different teaching resources: a textbook, two resources produced for teachers and the Geogebra software. This research, in terms of objectives, is exploratory, in terms of technical resources for data collection; it is bibliographical and has a qualitative approach. We analyzed these proposals from the following categories: 1) It includes BNCC skills; 2) It deals with the 4 operations in the number line; 3) Differentiates the minus sign from the sign subtraction operation that indicates a negative quantity; 4) Ease of using the number line to calculate the result; 5) Student participation in representing the result of the operation on the number line. The analysis allowed us to understand how to work the four operations in the number line in each proposal analyzed in this work. The number line also helps students better understand the rules of signs. This research will be a way to show students and teachers the importance of understanding the potential and limitations of using the number line in teaching proposals in different resources for the specific case of operations with integers. These strengths and limitations should encourage teachers to look for complementary resources that expand the teacher's repertoire of proposals according to their teaching objectives and the needs of their students.

Keywords: Integer numbers. Textbook. GeoGebra.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do Tema

Esta pesquisa se insere no campo da Educação Matemática. O foco da investigação trata do uso da reta numérica como suporte para as operações básicas com os números inteiros. Buscaremos identificar potencialidades e limitações considerando propostas de ensino de diferentes recursos didáticos: um livro didático, um livro para professor, um material produzido para professores e o software GeoGebra.

A escolha desse tema foi bem pessoal. Durante toda minha vida estudei em escolas públicas municipais e estaduais. Conheci os números inteiros no sétimo ano do Ensino Fundamental. Aprendi a trabalhar com números inteiros através de exercícios que envolviam as quatro operações, mas nunca trabalhei com a reta numérica. Nesta trajetória, nas escolas por onde passei também nunca estudei com nenhum tipo de ferramenta para auxiliar os estudos, a não ser a calculadora. Essas escolas não tinham laboratório de matemática e quanto aos recursos utilizados pelos professores eram no quadro, e o giz, e o livro didático. O livro didático era uma ferramenta para os alunos acompanharem as aulas, ou seja, quando o professor ia ensinar um assunto os alunos já tinham as atividades prontas nos livros.

Hoje sou aluna universitária, continuo observando que muitas escolas municipais não têm laboratórios de informática para ministrar uma aula com auxilio de softwares ou mesmo não tem acesso a internet ou também não dispunham de laboratórios de ensino de matemática – LEM.

O meu interesse em fazer essa pesquisa teve início com o recurso GeoGebra. Ele surgiu no momento que ingressei na universidade, mais precisamente nas disciplinas de Básica III, Informática e Laboratório. Em Básica III trabalhei com o GeoGebra no assunto de funções para identificar as concavidades dos gráficos os pontos de máximos e de mínimos, e para construir o gráfico, foi muito diferente, pois nunca tinha trabalhado com software. Nas disciplinas do curso de matemática também estudei com o auxilio do GeoGebra e de outros softwares na disciplina de informática aplicada à matemática. Depois dessa disciplina pensava que nos períodos seguintes não estudaria mais com meios tecnológicos, porém no sétimo período, na disciplina de Laboratório tive a certeza quer o uso da tecnologia é uma ferramenta fundamental na construção do ensino e aprendizagem em matemática.

No entanto, ao iniciar as discussões sobre o TCC conheci a possibilidade de estudar as operações com números inteiros usando não só o recurso da reta numérica como também em diferentes versões através de propostas de ensino variadas. Essa pesquisa será uma forma de mostrar para os alunos e professores a importância de entendermos as potencialidades e limitações do uso da reta numérica em propostas de ensino em diferentes recursos para o caso especifico das operações com números inteiros.

1.2 Justificativa e Problemática da pesquisa

As operações dos números inteiros no sétimo ano do Ensino Fundamental é um conteúdo que possibilita uma associação com uma diversidade de contextos reais. Por exemplo, em situações que envolvem extratos bancários onde o crédito é positivo e o débito é negativo. Outro exemplo relaciona-se ao uso dos números inteiros positivos ou negativos em perdas e ganhos em um jogo. Ainda, considerando o elevador de uma loja, com andares acima e abaixo do térreo e para indicar o andar teremos os números inteiros dependendo do andar será positivo ou negativo. Para Meister (2009) contextualizar o assunto a ser ensinado é muito bom para o aluno dar significado e compreender o assunto: “[...] ensino dos números inteiros podem e devem ser relacionado com vivências, experiências cotidianas dos alunos, a fim de que o assunto em questão esteja presente no contexto dos estudantes.” (MEISTER, 2009, p.11).

No entanto, os alunos ainda encontram várias dificuldades na hora de operar com números inteiros envolvendo sinais diferentes como, por exemplo, na adição (+ 5) + (- 4) na subtração (-8) - (+3) na multiplicação (+6). (-5) ou na divisão (+8): (-4). Os alunos têm dificuldades com o jogo dos sinais nesses casos. Segundo a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) é esperado que alunos do 7º ano saibam EF07MA03- Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração. (BRASIL, 2018, p.307) e EF07MA04 - Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros (BRASIL, 2018, p.307).

Na nossa pesquisa, nos interessamos em discutir propostas de ensino para a abordagem das operações com números inteiros usando a reta numérica como modelo. A proposta deste TCC é de responder a seguinte pergunta: *Quais as potencialidades e as limitações do uso da reta numérica em propostas de ensino das operações dos números inteiros e voltadas para sétimo ano do Ensino Fundamental?*

Esperamos a partir das respostas encontradas nessa pesquisa que os professores se sintam motivados a usar cada proposta ou não, como recurso de ensino nas suas aulas, decidindo de modo crítico, e entendendo o seu limite com relação ao tratamento dos números inteiros e considerando as dificuldades dos alunos.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Investigar as potencialidades e limitações de propostas de atividades com suporte da reta numérica sobre operações básicas com números inteiros no 7º ano do Ensino Fundamental.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Compreender o funcionamento da reta numérica como suporte para as operações com números inteiros nos recursos livro didático, materiais para professores e no GeoGebra.
- Estabelecer categorias de análise para comparar as propostas do recurso livro didático, dos materiais para professores e do GeoGebra.
- Analisar potencialidades e limitações das propostas do livro didático, materiais para professores e do GeoGebra considerando as categorias de análise.

1.4 Considerações Metodológicas

Segundo Gil (2008), as pesquisas podem ser classificadas quanto aos objetivos e quanto aos procedimentos técnicos utilizados para coleta de dados. Essa pesquisa, quanto aos objetivos, é exploratória. De acordo com Gil (2008), uma pesquisa exploratória caracteriza-se por proporcionar maior familiaridade com o problema. A pesquisa exploratória de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006) “[...] tem a finalidade de realizar um estudo com intuito de obter informações ou dados mais esclarecedores e consistentes sobre o tema abordado. (FIORENTINI ; LORENZATO 2006, p.70).

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006) a modalidade de pesquisa exploratória também pode envolver o levantamento bibliográfico e até mesmo o estudo de caso. Assim, quanto aos recursos técnicos para coleta de dados utilizados nessa pesquisa, nos apoiaremos em um levantamento bibliográfico. De acordo com Gil (2010, p.29) "a pesquisa bibliográfica é elaborada com base em material já publicado. Tradicionalmente, esta modalidade de pesquisa inclui material impresso como livros, revistas, jornais, teses, dissertações e anais de eventos científicos." Também se trata de uma pesquisa qualitativa. De acordo com Sampieri, Collado e Lucio (2013, p.33), uma pesquisa qualitativa é um "tipo de abordagem que utiliza a coleta de dados sem medição numérica."

Para subsidiar este estudo utilizamos como referência o livro didático *Matemática Essencial* do 7º ano do Ensino Fundamental dos autores Patrícia Moreno Patoro e Rodrigo Balestri, edição do ano 2018; o livro de Van de Walle (2009), as competências e habilidades da BNCC referentes ao estudo dos números inteiros no Ensino Fundamental. (BRASIL, 2018)

1.5 Estrutura do TCC

Nesta seção apresentamos a estrutura do TCC. Na Introdução anunciamos a nossa motivação para a pesquisa, nossa problemática, nossos objetivos e as considerações metodológicas. No capítulo seguinte, o capítulo 2 apresentara os números inteiros e sua abordagem no livro *Matemática Essencial*, os contextos explorados, as dificuldades dos alunos com as operações e as expectativas de aprendizagem segundo a BNCC (BRASIL, 2018). No capítulo 3, apresentamos o modelo da reta numérica como suporte para trabalhar com as operações básicas nos recursos escolhidos. No capítulo 4, apresentamos nossas análises referentes às potencialidades e limitações das propostas do GeoGebra a partir do nosso referencial teórico e das categorias criadas.

2 OS NÚMEROS INTEIROS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Neste capítulo trazemos uma apresentação geral dos números inteiros. Utilizamos como referências principais o livro didático *Matemática Essencial* (PATORO E BALESTRI, 2018), pesquisas sobre as dificuldades dos alunos com as operações básicas (GARCÍA 2011; MEDIG, 2001) e as expectativas de aprendizagem segundo a BNCC (BRASIL) na forma de competências e habilidades.

2.1 Números inteiros: definição e aplicações em problemas

Para melhor entendemos sobre o surgimento dos números inteiros apresentaremos a visão de vários autores.

Consultando os sites Mundoeducação.uol.com.br e Todamatéria.com.br na internet, obtemos algumas informações gerais sobre o surgimento dos números inteiros na história da Humanidade. Segundo o site Mundoeducação.uol.com.br, a necessidade do homem de contar e relacionar quantidades fez com que ele desenvolvesse símbolos no intuito de expressar inúmeras situações. Diversos sistemas de numeração foram criados em todo o mundo no decorrer dos tempos, sendo as mais antigas originárias do Egito, Suméria e Babilônia. Podemos também citar outros sistemas de numeração bastante conhecidos, como o Chinês, os Maias, o Grego, o Romano, o Indiano e o Arábico. O homem criava situações interessantes na contagem de seus objetos, de seus animais e outros. Ao levar seu rebanho para a pastagem ele relacionava uma pedra a cada animal, no momento em que ele recolhia os animais fazia a relação inversa, no caso de sobrar alguma pedra poderia verificar a falta de algum animal.

O homem buscava algo mais concreto, que representasse de uma forma mais simples tais situações. O surgimento dos números naturais (0, 1, 2, 3, 4...) revolucionou o método de contagem, pois relacionava símbolos (números) a determinadas quantidades. Com o início do Renascimento surgiu a expansão comercial, que aumentou a circulação de dinheiro, obrigando os comerciantes a expressarem situações envolvendo lucros e prejuízos. A maneira que eles encontraram de resolver tais problemas consistia no uso dos símbolos + e –. Por exemplo, suponha que um comerciante tenha três sacas de arroz de 10 kg cada em seu armazém. Se ele vendesse 5 Kg de arroz, escreveria o número 5 acompanhado do sinal –. Se ele comprasse 7 Kg de arroz, escreveria o numeral 7 acompanhado do sinal +. Utilizando essa nova simbologia, os Matemáticos da época desenvolveram técnicas operatórias capazes de expressar qualquer situação envolvendo números positivos e negativos. Surgia um novo conjunto numérico representado pela letra Z (significa: Zahlen: número em alemão), sendo formado pelos números positivos (Naturais) e seus respectivos opostos, podendo ser escrito da seguinte forma: Z = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3,...}

Segundo o site Todamatéria.com. br, os números inteiros são os números positivos e negativos**,** que não apresentam parte decimal e, o zero. Estes números formam o conjunto dos números inteiros, indicado por $\mathbb{Z}$. Não pertencem aos números inteiros: as frações, números decimais, os números irracionais e os complexos. O conjunto dos números inteiros é infinito e pode ser representado da seguinte maneira $\mathbb{Z}$ = {..., - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3,...}.

No livro de Van de Walle (2009), o autor define um número negativo em termos de opostos de números inteiros. Então, a definição de “3 negativo” é a solução para a equação 3 + ? = 0. Em geral, o oposto aditivo de n é a solução para n +? = 0. Se n é um número positivo, o oposto de n é um número negativo. O conjunto de inteiros, então, consiste nos números inteiros positivos, os opostos dos números inteiros, ou números negativos, e o 0, que não é positivo nem negativo [Elemento neutro da adição]. Essa é a definição também encontrada nos livros didáticos.

Segundo Ifrah (1985), a invenção dos números deve ter correspondido à preocupação de ordem prática e utilitária, já que, nem sempre os números, estiveram presentes no cotidiano das civilizações. As civilizações muito antigas, como os egípcios, babilônios e sumérios, que criavam animais como carneiros e cabras, ao guardarem estes rebanhos necessitavam ter certeza de que quando retornassem do pasto seus animais estavam no curral. Estes povos criavam situações curiosas para realizar a contagem, como por exemplo, relacionar estes rebanhos com pedras, onde cada pedra representava um animal. Quando o rebanho era recolhido eles faziam a relação inversa, se sobrasse alguma pedra, estava faltando algum animal. De forma análoga, pessoas que estocavam ferramentas, armas ou reservas de alimentos precisavam saber se seus estoques não diminuíam quando não estavam presentes, ou seja, se não havia furtos. Outro exemplo é o de pessoas que praticavam uma economia de troca, os quais deviam estar aptos a “avaliar” para poder trocar uma mercadoria por outra. Estas necessidades deram origem à invenção dos números.

A fim de cooperar com a necessidade da humanidade, houve a evolução dos números, pois o homem buscava algo mais sólido para representar suas situações. Assim, surgiram os números naturais, os quais revolucionaram o método de contagem, relacionando símbolos a quantidades. Quando estes números não contemplavam todas as necessidades, os números inteiros negativos passaram a existir, complementando o que faltava no conjunto dos números naturais. Na época do Renascimento (fim do século XIII e meados do século XVII), período da história da Europa, os matemáticos sentiram cada vez mais necessidade de um tipo de número, que pudesse ser a solução de equações simples como: $x+4 = 0$, $2x+12 = 0$ ou $8y+8 = 0$.

No livro didático *Matemática Essencial* (Figura1), os autores Pantoro e Balestri dizem que há indícios de que os números negativos tenham sido citados pela primeira vez em um texto chinês chamado *Jiuzhang Suanshu* (Os nove capítulos sobre a Arte Matemática) e compilado por alguns autores entre o século 2 a.C. e o primeiro século d.C. Um manuscrito indiano chamado *Bakhshali*, antes do século7 d.C., também apresenta números negativos.Contudo, acredita-se que o sinal "menos" para indicar um número negativo foi utilizado pela primeira vez por Johannes Widmann, em 1489.

Figura 1 - Apresentação dos números negativos

Os números negativos

Em nosso dia a dia, nem sempre os números iguais ou maiores do que zero são suficientes para expressar algumas situações. Quando queremos indicar certas temperaturas, saldos bancários, altitudes, entre outros, pode ser necessária a utilização de números menores do que zero, chamados **números negativos**.

Há indícios de que os números negativos tenham sido citados pela primeira vez em um texto chinês chamado *Jiuzhang Suanshu* (Os nove capítulos sobre a Arte Matemática) e compilado por alguns autores entre o século 2 a.C. e o primeiro século d.C. Um manuscrito indiano chamado *Bakhshali*, antes do século 7 d.C., também apresenta números negativos. Contudo, acredita-se que o sinal "menos" para indicar um número negativo foi utilizado pela primeira vez por Johannes Widmann, em 1489.

Veja algumas situações em que os números negativos estão presentes.

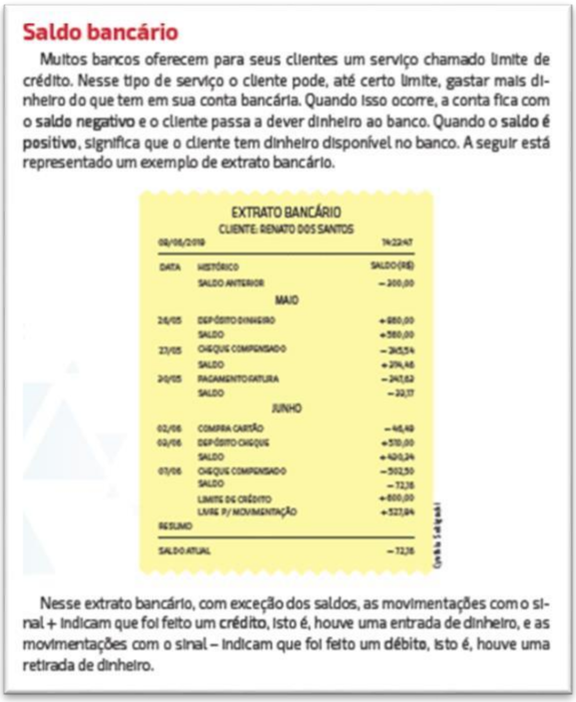
Fonte: PATORO e BALESTRI (2018, P.94)

As Ciências precisavam de símbolos para representar temperaturas acima e abaixo de 0º C, por exemplo. Além disso, os astrônomos e físicos procuravam uma linguagem matemática para expressar a atração entre dois corpos. Atualmente, temos diversas situações utilizando os números inteiros. Por exemplo, em situações que envolvem extratos bancários onde o crédito é positivo e o débito é negativo. Para Medig (2001), baseada nos resultados da sua pesquisa com alunos, esses contextos devem estar relacionados às situações do cotidiano dos alunos.

> Essa experiência, entretanto, mostrou-me que, além de materiais concretos, atividades envolvendo situações do cotidiano – recortes de jornais, interpretação de gráficos, construção de tabelas e painéis, são fundamentais para a construção do conhecimento matemático. (MEDIG, 2001 p.181).

No capitulo 5 do livro didático *Matemática Essencial*, os autores Pantoro e Balestri (2018) apresentam alguns contextos de aplicação desse conjunto numérico, a saber, no saldo no extrato bancário (Figura 2) e na indicação de temperaturas (Figura 3) e altitudes (Figura 4)

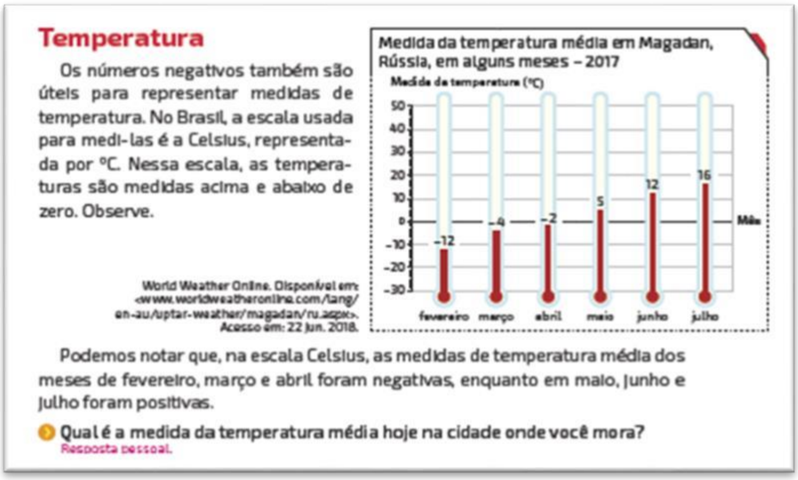
Figura 2 - Saldo bancário



Fonte: PATORO e BALESTRI (2018, p.94)

Contextos de aplicação e na indicação de temperaturas (Figura 3)

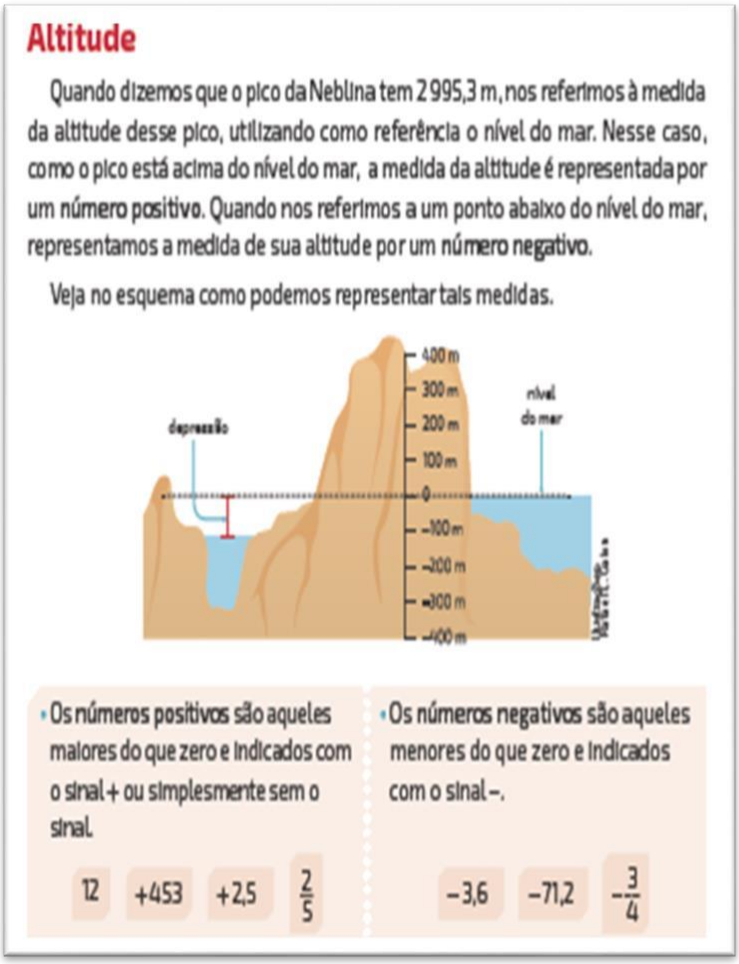
Figura 3 - Temperatura



Fonte: PATORO e BALESTRI (2018, P.95)

Contextos de aplicação desse conjunto numérico, a saber, Altitude.

Figura 4 - Altitude



Altitude

Quando dizemos que o pico da Neblina tem 2 995,3 m, nos referimos à medida da altitude desse pico, utilizando como referência o nível do mar. Nesse caso, como o pico está acima do nível do mar, a medida da altitude é representada por um **número positivo**. Quando nos referimos a um ponto abaixo do nível do mar, representamos a medida de sua altitude por um **número negativo**.

Veja no esquema como podemos representar tais medidas.

- Os números positivos são aqueles maiores do que zero e indicados com o sinal + ou simplesmente sem o sinal.

12 +453 +2,5 $\frac{2}{5}$

- Os números negativos são aqueles menores do que zero e indicados com o sinal –.

–3,6 –71,2 $-\frac{3}{4}$

Fonte: PATORO e BALESTRI (2018, P.95)

2.2 Números inteiros: dificuldades de aprendizagem com as operações básicas

As maiores dificuldades dos alunos do Ensino Fundamental estão no entendimento do que seja um número negativo, nas operações básicas e nas regras de sinais quando envolvem números inteiros. Os alunos escutam no momento da explicação do conteúdo, mas esquecem com muita facilidade, ou seja, os alunos não conseguem dar significado ao conceito de número negativo, nem às operações. Muitas vezes é difícil para o aluno entender as operações e suas regras. De acordo com García (2011, p. 143).

> Essas dificuldades vão incidir nas habilidades lingüísticas (compreensão e emprego da nomenclatura matemática, compreensão ou denominação de operações matemáticas e codificação de problemas com símbolos numéricos), nas habilidades perceptivas (reconhecimento ou leitura de símbolos numéricos ou sinais aritméticos, e agrupamento de objetos em conjuntos), nas habilidades de atenção (copiar figuras corretamente nas operações matemáticas básicas, observar os sinais das operações) e nas habilidades matemáticas (seguimento das seqüências de cada passo nas operações

> matemáticas, contar objetos e aprender a tabuada de multiplicar). (GARCÍA, 2011, p.143)

Medig (2001) discute as dificuldades de seus alunos quando operam pela primeira vez com os números inteiros e, através de algumas atividades, a autora conseguiu não só perceber as dúvidas presentes no raciocínio dos estudantes, mas também "construir'' com eles as principais propriedades sobre números inteiros. Os alunos mostraram muitas dúvidas a se trabalhar com números inteiros na reta numérica pela primeira vez.

Muitas das vezes as dificuldades dos alunos nas operações básicas surgem da falta de interesse do aluno na disciplina de Matemática, por achar uma disciplina difícil ou por não ter entusiasmo em aprendê-la, mas também das estratégias usadas pelos professores para incentivar a aprendizagem e o interesse dos alunos na disciplina.

As dificuldades que os alunos têm no uso das operações básicas em matemática é um problema que muitos alunos carregam desde os anos iniciais de sua formação, muitas das vezes essas deficiências surgem da forma que o professor explica as operações e os recursos utilizados para desenvolver o aprendizado dos alunos nas operações básicas. A partir do momento que o professor utiliza recursos e uma didática diferente os alunos conseguem minimizar suas dificuldades.

Estudos sobre a construção do conceito de números inteiros mostram que este conteúdo em si apresenta obstáculos epistemológicos à sua aprendizagem. De fato, os obstáculos epistemológicos estão presentes nas dificuldades dos alunos, pois esses obstáculos são verdadeiramente constitutivos do conhecimento como diz Machado (2010, p.132).

> Um obstáculo de origem epistemológica é verdadeiramente constitutivo do conhecimento, é aquele do qual não se pode escapar e que se pode, em princípio, encontrar na história do conceito. [...] pode-se pesquisar os obstáculos epistemológicos com base em uma análise histórica ou em dificuldades resistentes entre os alunos, procurando a confrontação com o desenvolvimento histórico. (MACHADO, 2010, p. 123)

Os obstáculos epistemológicos estão presentes no próprio conhecimento. Segundo Schubring (1998, p.18), "residem na natureza do conhecimento matemático, razão pela qual não podem ser evitados, já que são constitutivos conhecimentos e identificados na história dos conceitos". Nesse sentido, o processo de construção do conceito de número inteiro encontra inúmeras dificuldades.

> Obstáculos epistemológicos são hábitos incrustados no conhecimento não questionado, que invariavelmente bloqueiam o processo de construção do novo conhecimento. Cabe aos educadores estarem atentos a estes entraves na aprendizagem, para que não estejam presentes no seu modo de ensinar, tanto em sala de aula, quanto nos matérias didáticos utilizados. (BACHELARD, 1947, p.329).

Glaeser (2010) fez um levantamento histórico de obstáculos enfrentados por grandes matemáticos na busca de uma definição eficiente de número negativo, bem como, para dar significado às regras de sinais adotadas nas operações. O autor aponta seis obstáculos epistemológicos que descreve ao longo de sua obra, identificando quais matemáticos conseguiram ou não transpô-los.

> 1. Inaptidão para manipular quantidades isoladas;
> 2. Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas;
> 3. Dificuldade em unificar a reta numérica. Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semi-retas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números;
> 4. A ambigüidade dos dois zeros (v.fls.36)
> 5. Estagnação no estágio das operações concretas (em confronto com o estágio das operações formais). É a dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos.
> 6. Desejo de um modelo unificador. (GLAESER, 2010, p.69)

O terceiro obstáculo epistemológico destacado por Glaeser, (2010) está relacionado a reta numérica. Este obstáculo fala sobre a dificuldade em unificar a reta numérica. Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como uma justaposição de duas semi-retas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números.

Como diz Trindade (1996), os obstáculos se caracterizam por um conhecimento, não por uma dificuldade ou falta de conhecimento. Os obstáculos são manifestados por incompreensão de certos problemas, ou por muitas vezes não achar a possibilidade para resolver os problemas apresentados para serem resolvidos.

Os obstáculos aparecem por muitas das vezes por não temos um bom entendimento sobre determinados assuntos, assim não temos o conhecimento suficiente para resolver os problemas, com isso geramos dificuldades que nos levam a desistir de buscar maneiras para superar tais obstáculos.

2.3 Números inteiros: habilidades e expectativas de aprendizagem na BNCC

Segundo a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), para o 7º ano, na unidade temática Número e sobre os objetos de conhecimento Números inteiros, deve-se trabalhar os usos desse campo numérico na história, na ordenação, na associação com pontos da reta numérica e nas operações.

A BNCC traz algumas competências que tem relação com o estudo dos números inteiros, a saber:

- Competência específica 1 - Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p.267)

No que se refere a esse objeto de conhecimento, são duas habilidades que precisam ser desenvolvidas pelos alunos para a aprendizagem dos números inteiros no 7º ano:

- EF07MA03- Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração. (BRASIL, 2018, p.307)
- EF07MA04 - Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros. (BRASIL, 2018, p.307)

Na primeira habilidade os alunos devem desenvolver seu aprendizado com os números inteiros associado a diferentes contextos, com estudo da adição e subtração na reta numérica. Nesta habilidade não são evidenciadas as operações de multiplicação e divisão na reta numérica. Já na segunda habilidade, os alunos devem desenvolver aprendizagens em resolver e elaborar problemas com números inteiros envolvendo as operações básicas, na segunda habilidade os alunos também estudam as operações incluindo a potenciação e radiciação.

No 6º ano não se estuda os números inteiros, pois os números inteiros só aparecem nos livros a partir do 7º ano. No 8º ano os números inteiros são apresentados para os alunos na unidade temática Número, no objeto de conhecimento Notação científica. A habilidade do 8º ano é:

- EF08MA01 - Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica. (BRASIL, 2018, p.313)

No 9º ano os números inteiros são apresentados para os alunos na unidade temática Números, no objeto de conhecimento Números reais, o que envolve notação científica e problemas. As habilidades do 9º ano são:

- EF09MA03 Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários**.**
- EF09MA04 Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

Portanto apresentamos as expectativas e as habilidades que são trabalhadas na BNCC, envolvendo os números inteiros.

3 COLETA DE DADOS E ANÁLISE

Neste capítulo trazemos a apresentação das propostas dos recursos livro didático *Matemática Essencial* do 7º ano do Ensino Fundamental dos autores Patrícia Moreno Patoro e Rodrigo Balestri; de uma proposta para o uso do GeoGebra de Luciana Brito; do livro para professores *Matemática no ensino Fundamental* de Van de Walle de 2009 e de outro material para professores da professora Rogéria do Rego, sem ano de publicação.

Analisamos essas propostas a partir dos seguintes aspectos: 1) Contempla habilidades da BNCC; 2) Trata das 4 operações na reta ; 3)Diferencia o sinal de menos da operação de subtração do sinal que indica uma quantidade negativa; 4)Facilidade do uso da reta para calcular o resultado; 5) Participação do aluno na representação do resultado da operação na reta.

3.1 A reta numérica no livro Matemática Essencial

O livro didático que adotamos nessa pesquisa foi *Matemática Essencial* do7º ano do Ensino Fundamental dos autores Patrícia Moreno Patoro e Rodrigo Balestri, edição do ano 2018, adotamos esse livro por ser de fácil entendimento para entender os números inteiros e a reta numérica. O capítulo 5 tem como titulo *Números positivos e números negativos* (Figura 5).

Figura 5 - Sumário do capítulo 5 (Matemática Essencial)


capítulo 4 Estatística e probabilidade............. 76
Gráficos e tabelas.............78
Atividades.............80
Média aritmética.............83
Atividades.............84
Pesquisa.............86
Atividades.............86
Probabilidade.............89
Atividades.............90
Explorando o que estudei.............91

capítulo 5 Números positivos e números negativos....92
Os números negativos.............94
Saldo bancário.............94
Temperatura.............95
Altitude.............95
Atividades.............96
Reta numérica.............98
Distância de um ponto na reta numérica à origem.............99
Números opostos ou simétricos....99
Atividades.............100
Comparando números.............102
Atividades.............103
Adição.............106
Atividades.............108
Propriedades da adição.............110
Atividades.............111
Subtração.............112
Atividades.............113
Multiplicação.............115
Multiplicação de um número positivo por um número negativo.............115
Multiplicação de um número negativo por um número positivo.............116
Multiplicação de um número negativo por outro número negativo.............116
Atividades.............116
Propriedades da multiplicação....119
Atividades.............120
Divisão.............121
Atividades.............121
Potências com base negativa.....123
Potências com expoente negativo.............123
Atividades.............124
Propriedades das potências.......125
Atividades.............126
Explorando o que estudei..........127

Fonte: PATORO e BALESTRI (2018, p.9)

O capítulo 5 está estruturado em tópicos, sendo o primeiro os números negativos, que explica sobre saldo bancário, temperatura, e altitudes; o segundo tópico trata da reta numérica, depois as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação com base negativa, ao final de cada tópico têm uma seção com atividades referentes a cada assunto apresentado. Os objetivos do capitulo 5 do livro de Patoro e Balestri são apresentados na versão do professor. Os autores trazem:

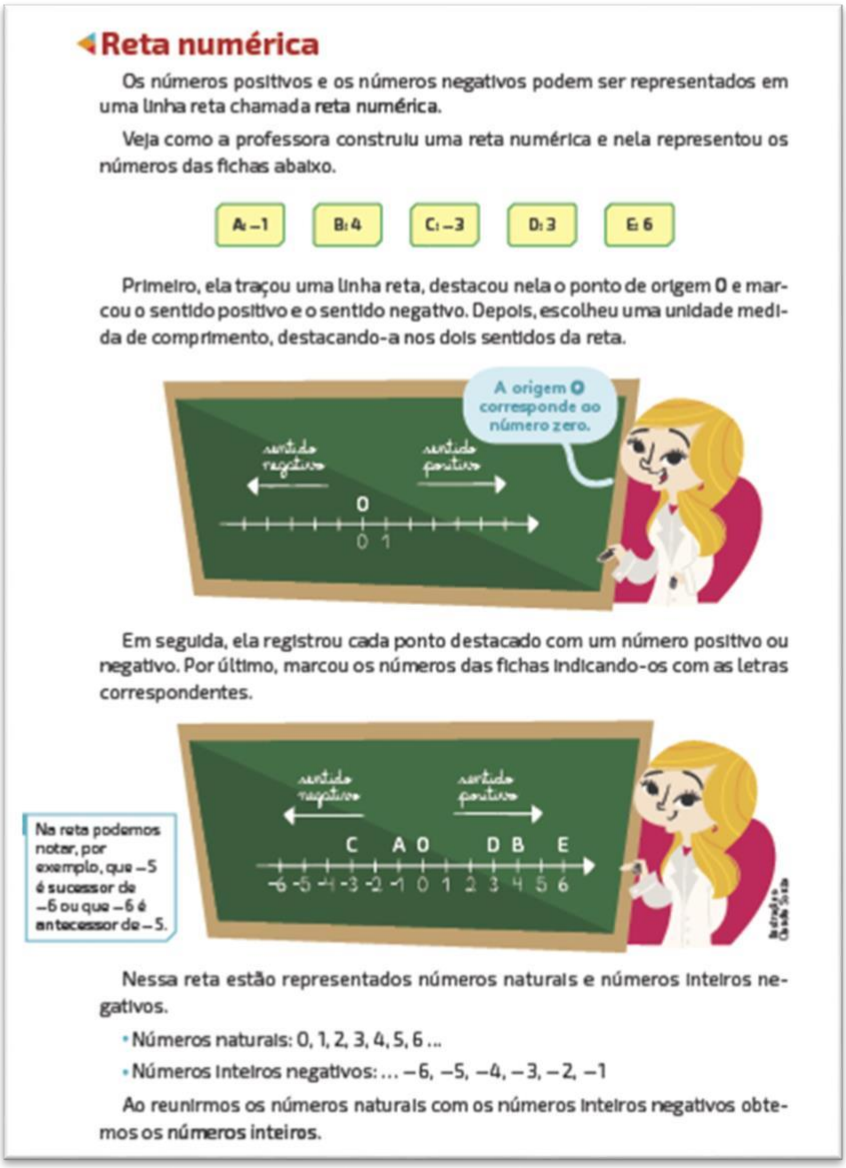
- Identificar situações do cotidiano que envolva números negativos.
- Utilizar os números positivos e negativos para representar saldo bancário, medidas de temperatura e medida de altitude.
- Representar os números positivos e os negativos na reta numérica.
- Determinar a medida da distância de um ponto à origem na reta numérica.
- Identificar números opostos ou simétricos.
- Comparar e ordenar números positivos e números negativos.
- Resolver e elaborar problemas que envolvam adição, subtração, multiplicação e divisão com números positivos e números negativos.
- Aplicar as propriedades da adição e da multiplicação.
- Calcular potências com base negativa ou expoente negativo.
- Aplicar as propriedades da potenciação.
- Explique aos alunos que o zero não é um número positivo nem negativo.

O que mais me chamou atenção nestes objetivos em relação a minha pesquisa foi a utilização da representação dos números positivos e negativos na reta numérica, e a elaboração de problemas envolvendo as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) com números positivos e negativos. Pois minha proposta trata exatamente de reta numérica e as quatro operações básicas com números inteiros.

Na página 98 do livro Matemática Essencial, a Reta Numérica é apresentada. Nesta página do livro os autores dizem que os números positivos e os números negativos podem ser representados em uma linha reta chamada reta numérica. Como exemplo a personagem de uma professora explica para o aluno que a origem na reta numérica corresponde ao número 0, e que a reta está utilizando pontos positivos e pontos negativos (Figura 6). Ela usa fichas para marcar certos números na reta.

Na representação da reta numérica os números positivos ficam do lado direito da reta, e os números negativos ficam do lado esquerdo. O lado positivo é organizado de forma crescente do menor termo para o maior. O lado negativo é organizado de forma decrescente do maior termo para o menor, partindo da origem.

Figura 6 - Reta numérica



Reta numérica

Os números positivos e os números negativos podem ser representados em uma linha reta chamada **reta numérica**.

Veja como a professora construiu uma reta numérica e nela representou os números das fichas abaixo.

A: −1 B: 4 C: −3 D: 3 E: 6

Primeiro, ela traçou uma linha reta, destacou nela o ponto de origem **0** e marcou o sentido positivo e o sentido negativo. Depois, escolheu uma unidade medida de comprimento, destacando-a nos dois sentidos da reta.

Em seguida, ela registrou cada ponto destacado com um número positivo ou negativo. Por último, marcou os números das fichas indicando-os com as letras correspondentes.

Nessa reta estão representados números naturais e números inteiros negativos.

- Números naturais: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ...
- Números inteiros negativos: ... −6, −5, −4, −3, −2, −1

Ao reunirmos os números naturais com os números inteiros negativos obtemos os **números inteiros**.

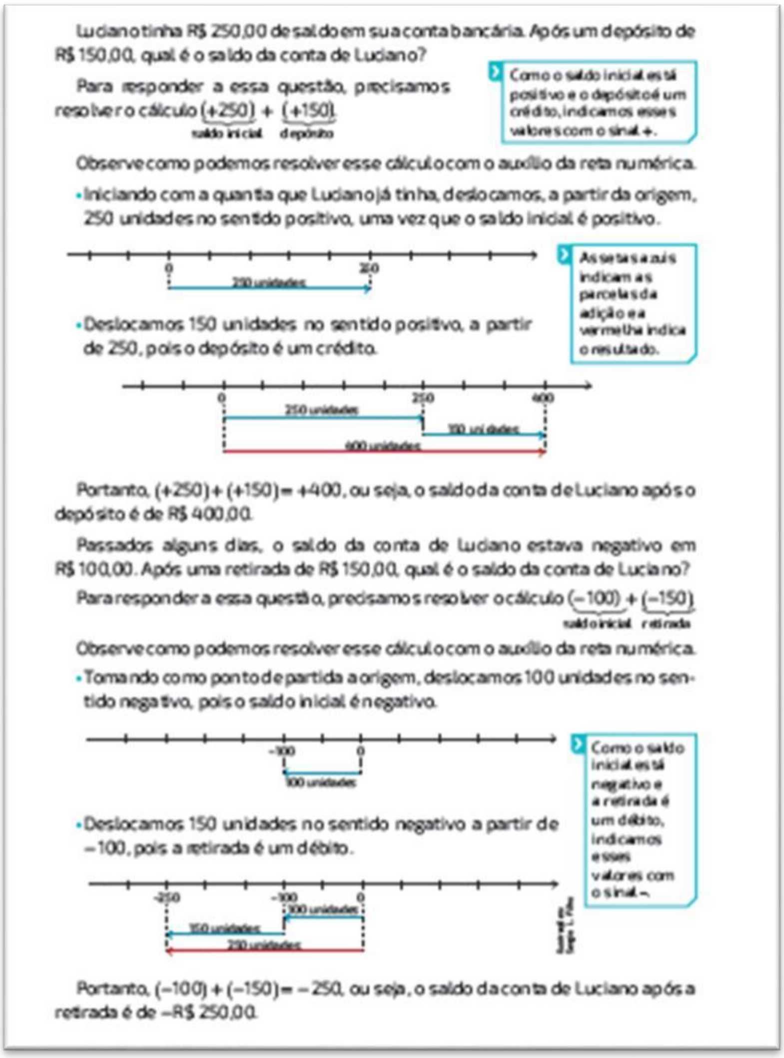
Fonte: PATORO e BALESTRI (2018, p.98)

Na página 106 do livro *Matemática Essencial* os autores trazem a operação de adição com números positivos (situação 1) e negativos (situação 2) com auxílio da reta numérica com exemplos contextualizados com os números inteiros. A situação 1, apresenta um registro de uma movimentação bancária do personagem Luciano que tem em sua conta bancária um saldo de + 250 reais, após um deposito de + 150 reais seu saldo ficou 400 reais, logo seu saldo ficou positivo, pois o deposito é um crédito. O resultado

400 é representado na reta da seguinte maneira: a seta sai da origem até o número 250 pelo lado positivo da reta. Em seguida a outra seta sai da extremidade da seta anterior até o número 400, logo uma seta única sai da origem até o resultado que é 400. A reta do exemplo traz uma marcação a cada 50 unidades.

Na situação 2, Luciano está com o saldo negativo em 100,00 reais após a retirada de 150,00 reais, ou seja, (-100) + (-150) = -250,00. Logo o saldo de Luciano é negativo, pois a retirada é um débito. No primeiro exemplo na reta numérica deslocamos da origem para o sentido positivo, já no segundo exemplo, a partir da origem para o sentido negativo da reta. (Figura 7). O resultado -250 são representados na reta da seguinte maneira: a seta sai da origem até o -150 pelo lado negativo da reta, em seguida outra reta sai da extremidade da seta anterior até o número -250, logo uma seta única sai da origem até o resultado -250 pelo lado negativo.

Figura 7 - Adição na reta numérica


Luciano tinha R$ 250,00 de saldo em sua conta bancária. Após um depósito de R$ 150,00, qual é o saldo da conta de Luciano?

Para responder a essa questão, precisamos resolver o cálculo $\underbrace{(+250)}_{\text{saldo inicial}} + \underbrace{(+150)}_{\text{depósito}}$

Como o saldo inicial está positivo e o depósito é um crédito, indicamos esses valores com o sinal +.

Observe como podemos resolver esse cálculo com o auxílio da reta numérica.

- Iniciando com a quantia que Luciano já tinha, deslocamos, a partir da origem, 250 unidades no sentido positivo, uma vez que o saldo inicial é positivo.

As setas azuis indicam as parcelas da adição e a vermelha indica o resultado.

- Deslocamos 150 unidades no sentido positivo, a partir de 250, pois o depósito é um crédito.

Portanto, (+250) + (+150) = +400, ou seja, o saldo da conta de Luciano após o depósito é de R$ 400,00.

Passados alguns dias, o saldo da conta de Luciano estava negativo em R$ 100,00. Após uma retirada de R$ 150,00, qual é o saldo da conta de Luciano?

Para responder a essa questão, precisamos resolver o cálculo $\underbrace{(-100)}_{\text{saldo inicial}} + \underbrace{(-150)}_{\text{retirada}}$

Observe como podemos resolver esse cálculo com o auxílio da reta numérica.

- Tomando como ponto de partida a origem, deslocamos 100 unidades no sentido negativo, pois o saldo inicial é negativo.

Como o saldo inicial está negativo e a retirada é um débito, indicamos esses valores com o sinal −.

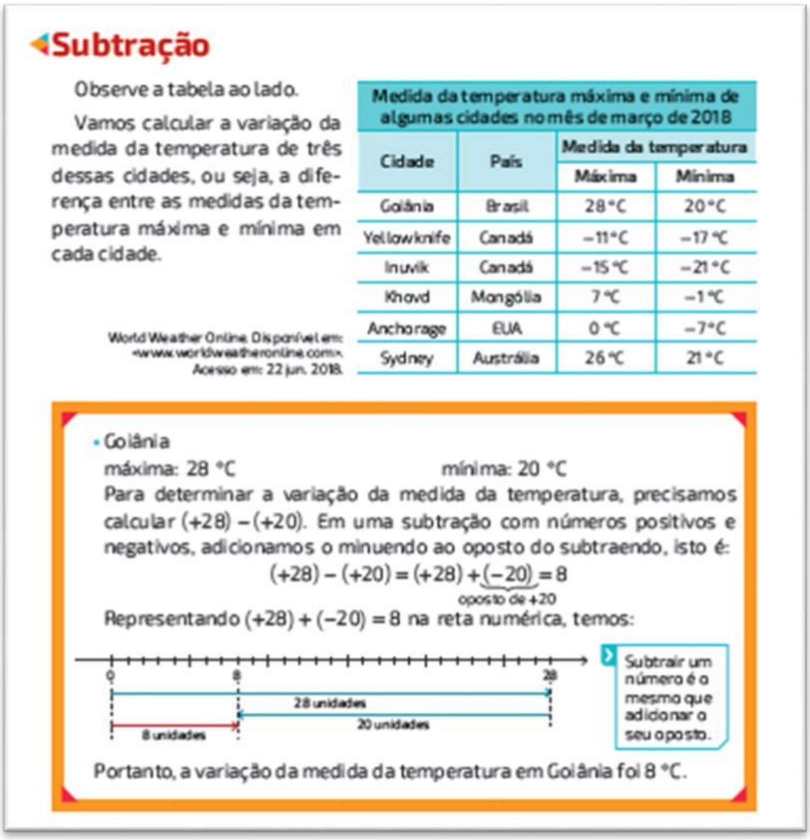
- Deslocamos 150 unidades no sentido negativo a partir de −100, pois a retirada é um débito.

Portanto, (−100) + (−150) = −250, ou seja, o saldo da conta de Luciano após a retirada é de −R$ 250,00.

Fonte: PATORO e BALESTRI (2018, p.106)

Na página 112 do livro *Matemática Essencial* os autores explicam como realizar a subtração (positivos e negativos) utilizando a reta numérica. Nesta página o autor faz referência ao contexto da variação de temperaturas máximas e mínimas com o auxílio da reta numérica (Figuras8 e 9).

Figura 8- Subtração na reta numérica



Subtração

Observe a tabela ao lado.

Vamos calcular a variação da medida da temperatura de três dessas cidades, ou seja, a diferença entre as medidas da temperatura máxima e mínima em cada cidade.

Medida da temperatura máxima e mínima de algumas cidades no mês de março de 2018

Cidade	País	Medida da temperatura	
		Máxima	Mínima
Goiânia	Brasil	28 °C	20 °C
Yellowknife	Canadá	−11 °C	−17 °C
Inuvik	Canadá	−15 °C	−21 °C
Khovd	Mongólia	7 °C	−1 °C
Anchorage	EUA	0 °C	−7 °C
Sydney	Austrália	26 °C	21 °C

World Weather Online. Disponível em: <www.worldweatheronline.com>. Acesso em: 22 jun. 2018.

- Goiânia

máxima: 28 °C mínima: 20 °C

Para determinar a variação da medida da temperatura, precisamos calcular (+28) − (+20). Em uma subtração com números positivos e negativos, adicionamos o minuendo ao oposto do subtraendo, isto é:

$$(+28) - (+20) = (+28) + \underbrace{(-20)}_{\text{oposto de }+20} = 8$$

Representando (+28) + (−20) = 8 na reta numérica, temos:

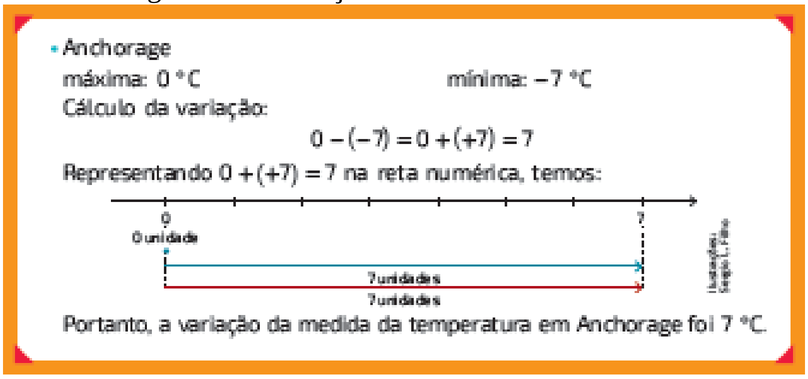
Portanto, a variação da medida da temperatura em Goiânia foi 8 °C.

Fonte: PATORO e BALESTRI (2018, p.112)

No exemplo os autores pediram para determinar a variação da medida da temperatura de Goiânia onde a máxima: 28º e a mínima: 20º. Logo os autores explicam que em uma subtração com números positivos e negativos adicionamos o minuendo ao oposto do subtraendo, isto é, (+28) - (+20) = (+20) + (-20) = 8. Na subtração quando o sinal é diferente tem que se manter o sinal do maior número, ou seja, neste exemplo foi mantido o sinal positivo. Neste exemplo para representar o resultado na reta numérica, iniciamos com a primeira parcela +28, como mostrar na figura a seta azul sai da origem, ou seja, do 0 até o número 28 pelo lado positivo da reta. Como a segunda parcela -20, uma seta sai dos 28 e vai voltar pelo lado positivo 20 casas, chegando assim ao resultado 8.

Neste exemplo os autores pediram para calcular a variação de medida da temperatura em Anchorage. Para calcular os autores explicam que a máxima é de 0ºC, e a mínima é de -7ºC, o cálculo deve ser feito pela subtração0- (-7) = 0 + (+7) = 7.

Figura 9 - Subtração na reta numérica



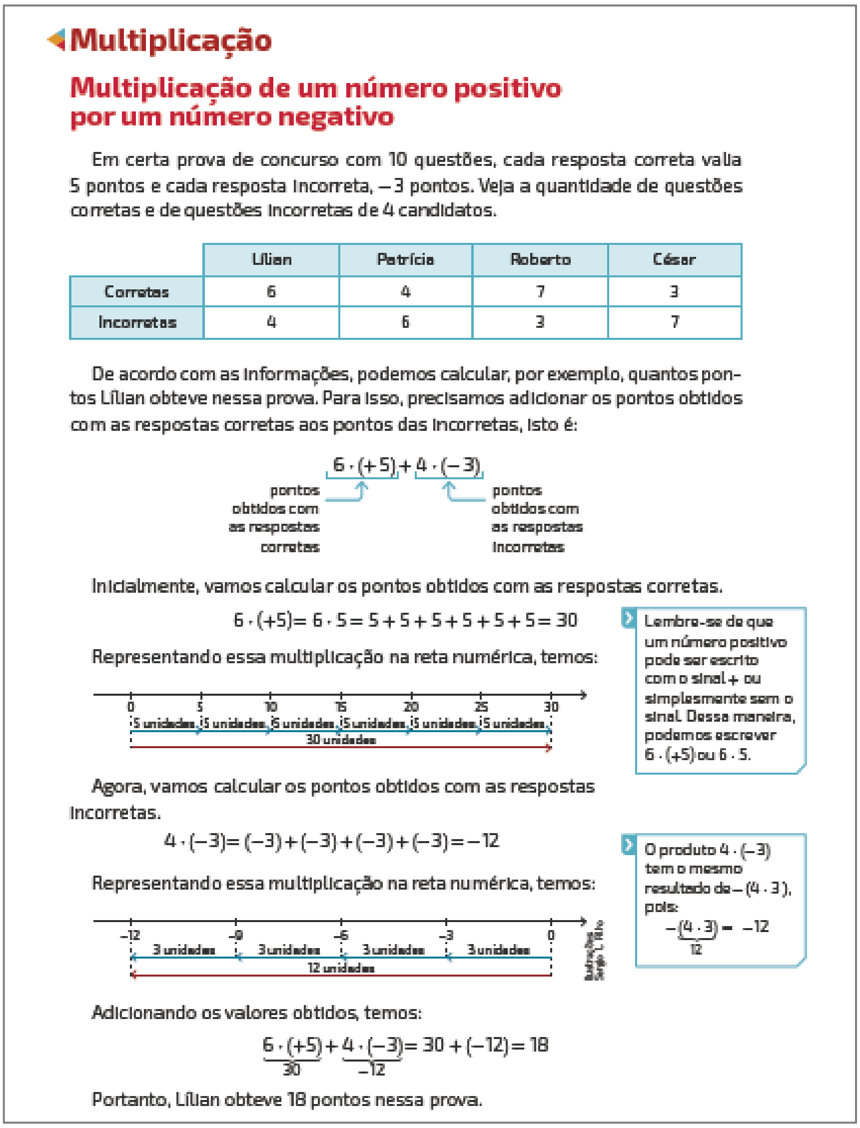
Fonte: PATORO e BALESTRI (2018, p.112)

Para representar o resultado na reta numérica, foi utilizado o seguinte raciocínio: a primeira parcela é o número 0, logo a seta sai da origem, até a segunda parcela que é o número 7 pelo lado positivo da reta. Em seguida outra seta sai da origem até o resultado da operação que é igual a 7, pelo lado positivo da reta.

Na página 115 do livro, consta operação de multiplicação de um número positivo por um número negativo (Figura 10). Na multiplicação de um número positivo por um número negativo, os autores apresentam dados de um concurso com 10 questões, onde cada resposta correta valia 5 pontos, e cada resposta incorreta valia -3 pontos. Onde foi utilizado uma tabela com nomes de 4 candidatos. No exemplo, os autores escolheram apenas a candidata Lílian para fazer a análise dos pontos obtidos na prova. Neste caso os autores usaram as seguintes estratégias, escolheram 6 respostas corretas e multiplicaram por 5 que é o número de pontos obtidos em cada resposta correta, em seguida escolheram 4 resposta incorreta e multiplicaram por -3 que o número de pontos para cada resposta incorreta. Primeiramente calcularam os pontos das respostas corretas, 6 x (+5)=30, em seguida representou o cálculo e o resultado na reta numérica.A multiplicação de um número positivo 4 por um negativo -3 foi entendido como a soma de quatro parcelas iguais a – 3: 4 x (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3).

Logo após calculou os pontos das respostas incorretas, ficou igual a 4 x (-3)= -12, e representou o calculo e o resultado na reta numérica, em seguida adicionou os dois valores para obter o resultado, ou seja, 6 x (+5) +4 x (-3) =30+ (-12) =18. Com esses cálculos os autores concluíram que Lílian obteve 18 pontos em sua prova.

Figura 10 - Multiplicação com inteiros



Multiplicação

Multiplicação de um número positivo por um número negativo

Em certa prova de concurso com 10 questões, cada resposta correta valia 5 pontos e cada resposta incorreta, −3 pontos. Veja a quantidade de questões corretas e de questões incorretas de 4 candidatos.

	Lílian	Patrícia	Roberto	César
Corretas	6	4	7	3
Incorretas	4	6	3	7

De acordo com as informações, podemos calcular, por exemplo, quantos pontos Lílian obteve nessa prova. Para isso, precisamos adicionar os pontos obtidos com as respostas corretas aos pontos das incorretas, isto é:

$$\underbrace{6 \cdot (+5)}_{\text{pontos obtidos com as respostas corretas}} + \underbrace{4 \cdot (-3)}_{\text{pontos obtidos com as respostas incorretas}}$$

Inicialmente, vamos calcular os pontos obtidos com as respostas corretas.

$$6 \cdot (+5) = 6 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30$$

Representando essa multiplicação na reta numérica, temos:

Lembre-se de que um número positivo pode ser escrito com o sinal + ou simplesmente sem o sinal. Dessa maneira, podemos escrever $6 \cdot (+5)$ ou $6 \cdot 5$.

Agora, vamos calcular os pontos obtidos com as respostas incorretas.

$$4 \cdot (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$$

Representando essa multiplicação na reta numérica, temos:

O produto $4 \cdot (-3)$ tem o mesmo resultado de $-(4 \cdot 3)$, pois: $-\underbrace{(4 \cdot 3)}_{12} = -12$

Adicionando os valores obtidos, temos:

$$\underbrace{6 \cdot (+5)}_{30} + \underbrace{4 \cdot (-3)}_{-12} = 30 + (-12) = 18$$

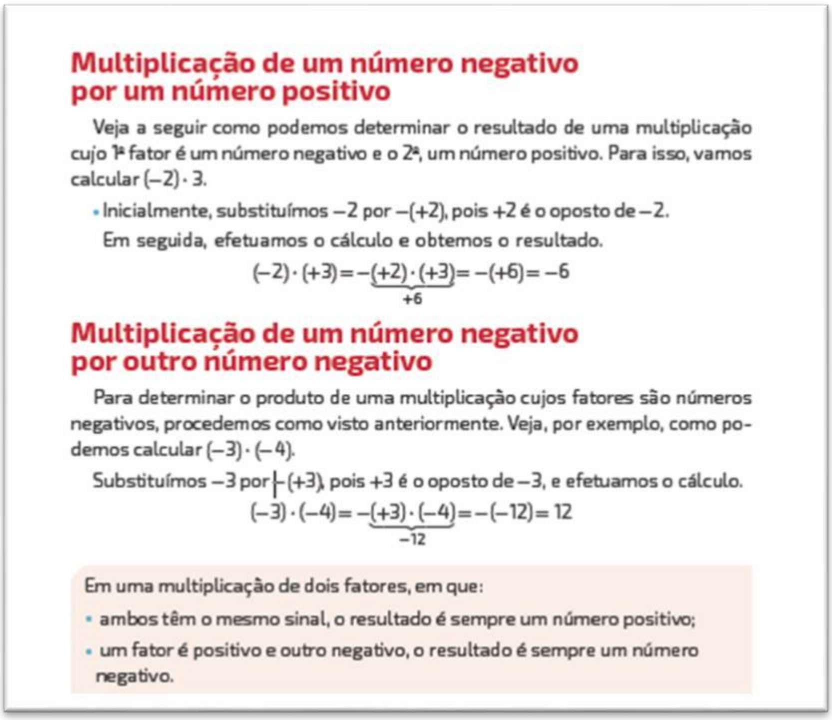
Portanto, Lílian obteve 18 pontos nessa prova.

Fonte: PATORO e BALESTRI (2018, p.115)

Para representar os resultados na reta numérica os autores representaram o número 30, partindo da origem pelo lado positivo da reta, ou seja, partiu do número 0 utilizando de 5 em 5 unidades , ou seja de 0,5,10,15,20,25,30, que foi o resultado obtido por Lilian com as respostas corretas. Quanto ao resultado -12 representaram na reta a partir da origem pelo lado negativo da reta, ou seja, a partir do 0 utilizando de 3 em 3 unidades, ou seja, 0,-3,-6,-9,-12, que foi o resultado obtido por Lilian com as repostas incorretas. O resultado final 18 não foi representado na reta numérica.

Na página 116 consta a multiplicação de um número negativo por um número positivo e a multiplicação de um número negativo por um número negativo (Figura 11).

Figura 11- Multiplicação com inteiros



Multiplicação de um número negativo por um número positivo

Veja a seguir como podemos determinar o resultado de uma multiplicação cujo 1º fator é um número negativo e o 2º, um número positivo. Para isso, vamos calcular $(-2) \cdot 3$.

- Inicialmente, substituímos -2 por $-(+2)$, pois $+2$ é o oposto de -2.

Em seguida, efetuamos o cálculo e obtemos o resultado.

$$(-2) \cdot (+3) = -\underbrace{(+2) \cdot (+3)}_{+6} = -(+6) = -6$$

Multiplicação de um número negativo por outro número negativo

Para determinar o produto de uma multiplicação cujos fatores são números negativos, procedemos como visto anteriormente. Veja, por exemplo, como podemos calcular $(-3) \cdot (-4)$.

Substituímos -3 por $-(+3)$, pois $+3$ é o oposto de -3, e efetuamos o cálculo.

$$(-3) \cdot (-4) = -\underbrace{(+3) \cdot (-4)}_{-12} = -(-12) = 12$$

Em uma multiplicação de dois fatores, em que:

- ambos têm o mesmo sinal, o resultado é sempre um número positivo;
- um fator é positivo e outro negativo, o resultado é sempre um número negativo.

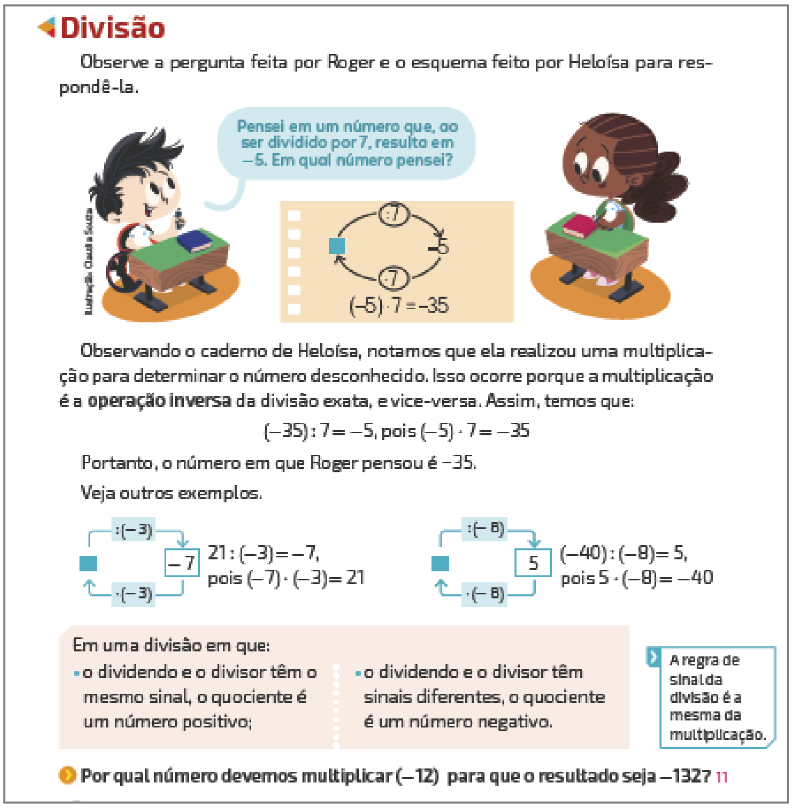
Fonte: PATORO e BALESTRI (2018, p.116)

Para resolver a multiplicação de um número negativo por um positivo exemplo: (-2). 3 os autores usam o seguinte procedimento: inicialmente substitui -2 por –(+2) pois +2 é oposto de -2. Em seguida efetua o cálculo $(-2) \cdot (+3) = -(+2) \cdot (+3) = -(+6) = -6$. Para resolver a multiplicação de um número negativo com outro número negativo exemplo: (-3). (-4) se usa o mesmo procedimento anterior, ou seja, substitui -3 por -(+3) pois + 3 é oposto de -3 , e em seguida efetua o cálculo $(-3) \cdot (-4) = -(+3) \cdot (-4) = -(-12) = 12$.

A partir desses exemplos, o livro propõe que uma explicação para as regras de sinais na multiplicação de dois fatores: se ambos têm o mesmo sinal, o resultado é sempre um número positivo; se um fator é positivo e outro negativo, o resultado é sempre um número negativo. Na adição e na subtração com números inteiros a regra de sinais é diferente da multiplicação e da divisão, pois na multiplicação e na divisão os sinais iguais sempre são positivos, e os sinais diferentes sempre são negativos, já na adição e na subtração muda de acordo com os sinais de cada situação. No estudo com números inteiros os alunos se confundem muito com as regras de sinais, por mais que o professor explique os alunos ainda se confundem com essas regras nas operações.

Na página 121 do livro *Matemática Essencial* está a parte de divisão com os números positivos e negativos (Figura 12).

Figura 12 – Divisão com números inteiros



Divisão

Observe a pergunta feita por Roger e o esquema feito por Heloísa para respondê-la.

Observando o caderno de Heloísa, notamos que ela realizou uma multiplicação para determinar o número desconhecido. Isso ocorre porque a multiplicação é a **operação inversa** da divisão exata, e vice-versa. Assim, temos que:

$(-35) : 7 = -5$, pois $(-5) \cdot 7 = -35$

Portanto, o número em que Roger pensou é −35.

Veja outros exemplos.

$21 : (-3) = -7$, pois $(-7) \cdot (-3) = 21$

$(-40) : (-8) = 5$, pois $5 \cdot (-8) = -40$

Em uma divisão em que:

- o dividendo e o divisor têm o mesmo sinal, o quociente é um número positivo;
- o dividendo e o divisor têm sinais diferentes, o quociente é um número negativo.

A regra de sinal da divisão é a mesma da multiplicação.

Por qual número devemos multiplicar (−12) para que o resultado seja −132? 11

Fonte: PATORO e BALESTRI (2018, p.121)

Roger fala para Heloísa, pense em um número que ao ser dividido por 7 resulta em 5. Para responder Heloísa realizou uma multiplicação para determinar o número desconhecido, isso ocorreu porque a multiplicação é a operação inversa da divisão exata. Ela fez dessa maneira: (-35) ÷7= -5, pois (-5). 7 = 35.

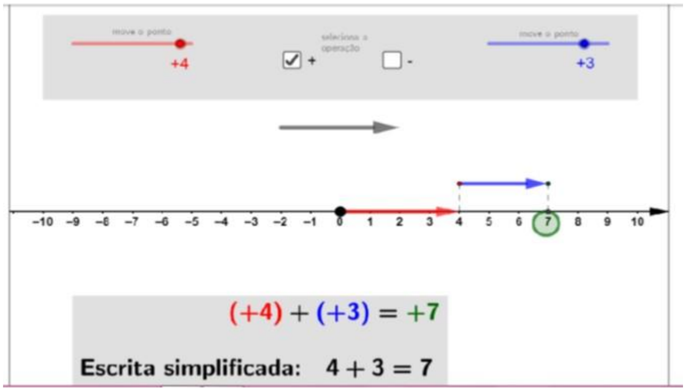
Tomando como referência o livro didático *Matemática Essencial*, observamos que apenas as operações de adição e subtração foram representadas na reta numérica. Na multiplicação, apenas os casos de um número positivo por um número negativo e de dois números positivos foram contemplados na representação numérica.

3.2 Números inteiros: propostas no Geogebra com uso da reta numérica

O GeoGebra foi criado por Markus Hoherwarter, o GeoGebra é um software para ser utilizado no ambiente escolar. O GeoGebra tem como diferencial a possibilidade de representação de objetos, como, por exemplo, pontos, retas, segmentos de retas, planos, polígonos e gráficos de funções possibilitando a fluência entre representações tanto algébricas quanto geométricas. Para Gladcheff, Zuffi& Silva (2001), a utilização em aulas de matemática no ensino pode consentir diversos objetivos: ser fonte de informação, auxiliar o processo de construção de conhecimentos, ampliarem a autonomia do raciocínio, da reflexão e da criação de soluções.

Na proposta escolhida da autora Luciana Brito analisamos o tratamento dado as operações de números inteiros com representação na reta numérica com o auxílio do GeoGebra. A Figura 13, a seguir é uma proposta apenas para o trabalho de adição e subtração de números inteiros no GeoGebra.

Figura13 - Adição de números inteiros positivos



Fonte: HTTPS://www.geogebra.org/m/fNeCB8Px

Na figura 13 podemos ver que no lado esquerdo, no alto da figura, tem um seletor “move o ponto” que tem a função de gerar automaticamente na reta numérica, números positivos e negativos, a seta cinza que fica no meio da figura indica a operação escolhida para se trabalhar na reta, ou seja, quando escolhermos a operação adição a seta fica para o lado positivo, e quando escolhermos a subtração a seta fica para o lado negativo. No lado direito tem outro seletor “mover pontos” que tem a função de gerar na reta numérica números positivos e negativos. Eles correspondem aos valores a serem operados.

Entre os seletores “move pontos” tem o local de selecionar as operações de adição ou subtração. A partir do momento que é escolhida a operação, seleciona-se com o seletor “mover pontos” os números para efetuar a operação. Os mesmos podem ser positivos ou negativos. Em seguida, o resultado da operação é representado na reta numérica dentro de um círculo verde. A representação da operação e do resultado aparece ao lado de “escrita simplificada” abaixo da reta numérica. Ela simplifica a escrita eliminando os parênteses. Cabe destacar que nessa proposta os valores do seletor estão entre -5 e 5.

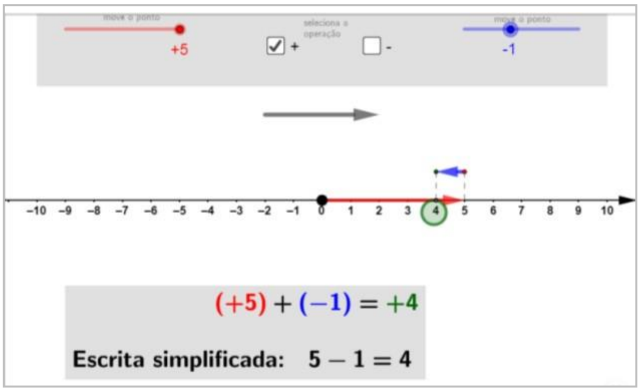
Tomemos o exemplo trazido na Figura 13, onde foi selecionada a operação de adição. No seletor “mover ponto” vermelho escolhermos o número +4 e no outro lado, no seletor de “mover ponto” azul, escolhemos o número + 3. Na reta numérica aparecerá como resposta o número 7 que está circulado. Desta maneira percebemos que o resultado da operação é positivo. Na escrita, o valor positivo é reforçado com os sinais de +.

Para demonstrar como trabalhar com a operação de adição no Geogebra, criamos alguns exemplos: 5 + (-1) = + 4; (-3) + (+1) = -2; (-4) - (-3) = -1; (+4) – (-2) = + 6 e
(- 5) – (+3) = -8.

- 5+ (-1) = + 4

Primeiramente selecionemos a operação de adição, em seguida selecionemos no seletor “mover o ponto” vermelho o número +5, e no seletor “mover o ponto” azul, o número -1. Iniciamos na reta com o número + 5 saímos com a seta da origem, ou seja, do 0 até o número 5 pelo lado positivo da reta , em seguida vamos representar a segunda parcela que é -1. (Figura 14).

Figura14 - Adição de um número positivo por um número negativo



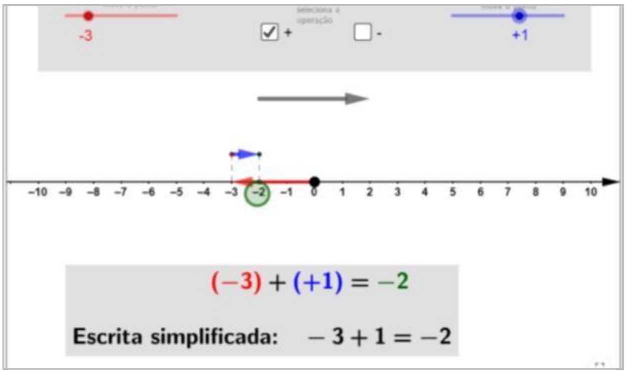
Fonte: https://www.geogebra.org/m/fNeCB8Px

Como a primeira parcela foi positiva, e o número 5 é maior que -1, o resultado da operação será 4 positivo, dessa forma volta-se uma casa na reta pelo lado positivo, obtendo assim o resultado igual a 4.

- (-3) + (+1) = -2

Nesse exemplo da adição somamos um número negativo por número positivo. Primeiramente selecionemos a operação de adição, em seguida selecionemos no seletor “mover o ponto” vermelho o número -3, e no seletor de “mover o ponto” azul o número +1. Iniciamos com a primeira parcela da operação que são -3, saímos com a seta da origem, ou seja, do 0, pelo lado negativo da reta até o número -3, em seguida observamos que o resultado será negativo, então anda +1 casa na reta que é o valor da segunda parcela , então saímos do número -3 e voltamos +1, pelo lado negativo , chegando ao -2, que é o resultado da operação. (Figura 15)

Figura15 - Adição de um número negativo por um número positivo.

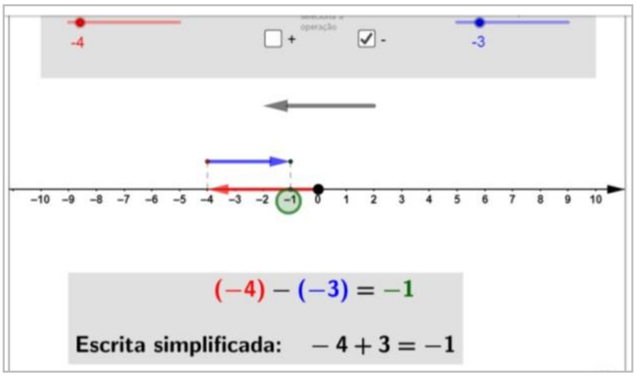


Fonte: https://www.geogebra.org/m/fNeCB8Px

- (-4) - (-3) = -1

Este exemplo será de subtração de um número negativo por outro número negativo. Após escolher a operação de subtração, em seguida escolhemos o número -4 no seletor mover o ponto ”vermelho e o número -3 no seletor “mover o ponto” azul, após a escolha dos números percebemos que o resultado da operação já aparece na reta numérica. Na reta primeiramente trabalharemos com a primeira parcela que é -4. A seta sai da origem, ou seja, do 0, indo até o -4 pelo lado esquerdo ou negativo da reta. Em seguida trabalharemos com a segunda parcela na reta que é – 3. Para chegar ao resultado teremos que a partir do -4 voltar 3 casas pelos lado negativo da reta , assim obtemos o resultado igual a -1. (Figura 16). Nesta imagem observamos que a escrita simplificada transforma a operação de subtração de um número negativo em um positivo. –(-3) = +3.

Figura16 - Subtração de um número negativo por outro número negativo.

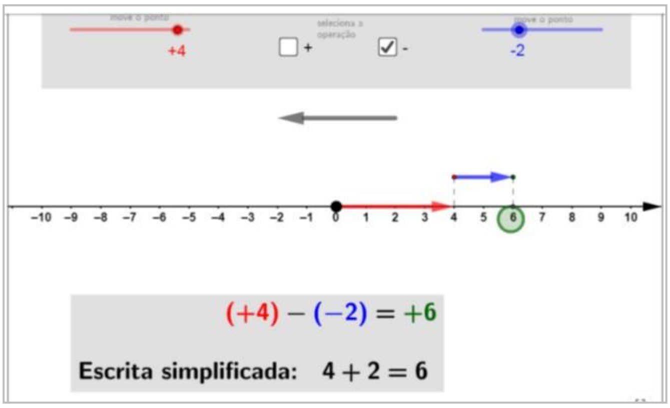


Fonte: https://www.geogebra.org/m/fNeCB8Px

- (+4) – (-2) = + 6

No segundo exemplo de subtração, vamos subtrair de um número positivo um número negativo. Para trabalhar a operação na reta numérica, primeiramente selecionamos a operação de subtração, em seguida escolhemos o número + 4 no seletor “mover o ponto” vermelho e o número -2 no seletor “mover o ponto”azul, logo observamos que o resultado já apareceu na reta numérica. Na reta trabalharemos primeiramente com a primeira parcela que é +4, sairemos da origem, ou seja, do 0 pelo lado positivo da reta até o número +4 , como a operação é de subtração é a segunda parcela também é um número negativo -2 na regra de sinais fica 2 positivo, logo para chegar ao resultado da operação andamos duas casas na reta a partir do número +4 que é o valor da primeira parcela pelo lado positivo da reta, chegamos assim ao número +6 que é o resultado da operação (Figura 17).

Figura 17 - Subtração de um número positivo por um número negativo.



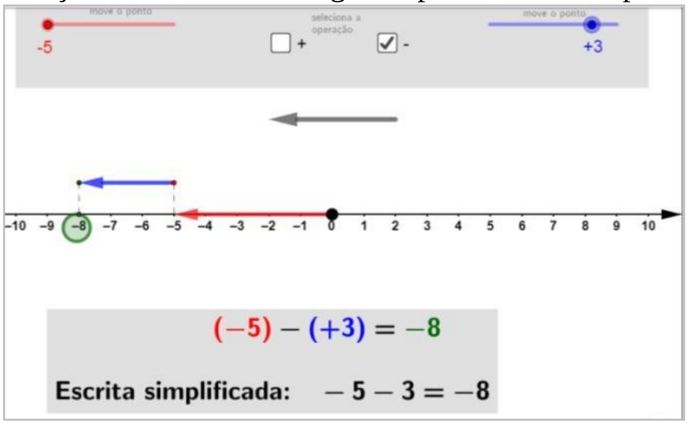
Fonte: https://www.geogebra.org/m/fNeCB8Px

Nesta imagem observamos que a escrita simplificada transforma a operação de subtração de um número negativo em um positivo – (-2) = +6.

- (- 5) – (+3) = -8

No terceiro exemplo da subtração, vamos subtrair de um número negativo um número positivo. Para trabalhar a operação na reta numérica, primeiramente selecionamos a operação de subtração, em seguida escolhemos o número -5 e o número + 3 nos seletores. Em seguida observamos que o resultado já aparece na reta numérica. Na reta numérica, trabalhamos primeiramente com a primeira parcela da operação -5, saímos da origem ou, seja, do 0 até o número – 5 pelo lado esquerdo ou negativo da reta , em seguida trabalhamos com a segunda parcela + 3 , percebemos que o resultado será uma soma , mais permanece o sinal do maior número no resultado o negativo, ou seja, saímos com a seta do -5 e deslocamos 3 casas na reta pelo lado negativo chegamos assim ao resultado igual a -8. (Figura 18).

Figura 18 - Subtração de um número negativo por um número positivo



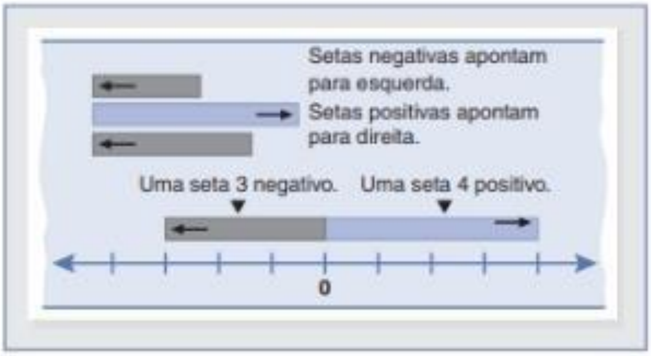
Fonte: https://www.geogebra.org/m/fNeCB8Px

3.3 A reta numérica em materiais para professores

No livro *Matemática no ensino Fundamental* do autor Van de Walle, edição 2009, no capitulo 24, na página 534, o autor apresenta uma proposta para o estudo dos números inteiros. Inicialmente o autor define números positivos e negativos como a distância medida à direita e à esquerda de 0. O autor enfatiza que valores com sinais são distâncias orientadas e não os pontos em uma reta. Os pontos de uma reta numérica não são modelos de inteiro, as distâncias são orientadas. Na proposta, o autor representa todos os inteiros como setas e lembra que não se pode referir-se às coordenadas na reta numérica como “números”.

A proposta apresentada pelo autor é de trabalhar com números inteiros usando setas de papel para apresentar números inteiros de diferentes comprimentos. Elas podem ser feitas em duas cores: azuis e apontando para a direita para quantidades positivas e cinzas, para quantidades negativas, como mostra na figura a seguir (Figura 19).

Figura 19 - Modelo de reta numérica para inteiros.

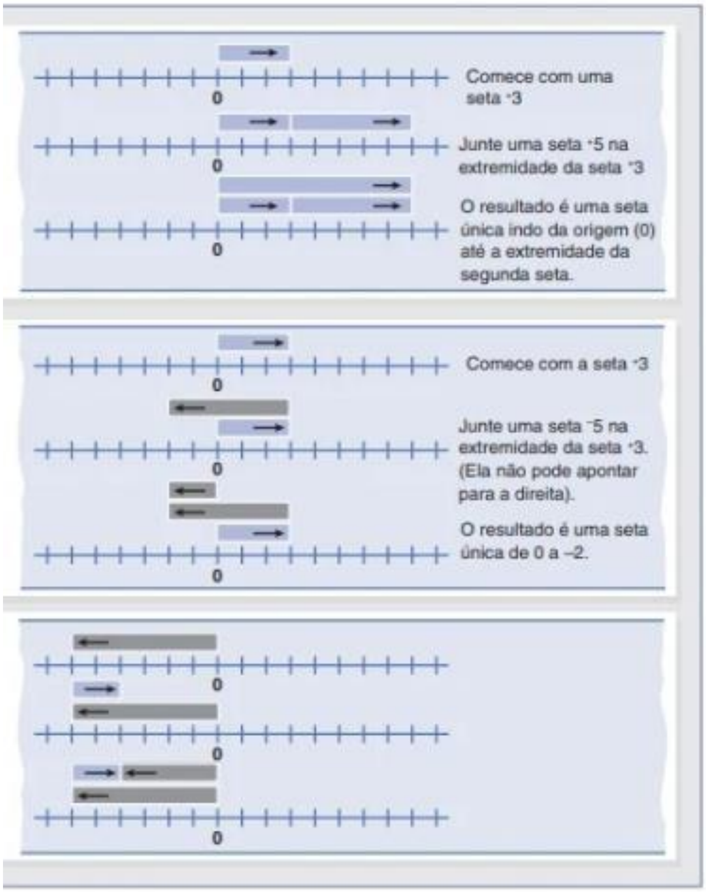


Fonte: VAN DE WALLE (2009, p.534)

As setas ajudam os alunos a pensar sobre quantidades inteiras como distância orientada. Uma seta positiva nunca aponta para esquerda e uma seta negativa nunca aponta para a direita.

Na página 534 do livro, Van de Walle inicia os exemplos das operações e os procedimentos para os cálculos. O autor diz que a ênfase deve estar no raciocínio e não na rapidez com que eles podem apresentar respostas corretas. Vários exemplos de adição são modelados na Figura 24.5 (Figura 20), cada um de dois modos: com contadores positivos e negativos e com a reta numérica e modelo de setas. Vamos tratar apenas do modelo com a reta numérica. Os autores usam os sinais de positivo e negativo na frente dos números, para distinguir o sinal da operação, por exemplo, $- 5 – 2 = {}^{-}5 - {}^{+}2$. Para somar usando o modelo de seta, deve seguir a seguinte regra: cada seta adicionada começa na extremidade da seta anterior. Os exemplos a seguir ilustram os casos $3 + 5$, $3 + {}^{-}5$ e $– 6 + 2$.

Figura 20 - Adição de inteiros e reta numérica



Fonte: VAN DE WALLE (2009, p.535)

No primeiro exemplo de adição 3+5, o livro mostra como se trabalha a operação na reta numérica com setas. Iniciamos com a primeira parcela que é o número 3, saindo com a seta da origem até o número 3 pelo lado positivo da reta. Em seguida a seta que representa o 5 que sai da extremidade da seta do número anterior, o resultado é uma seta única saindo da origem até a extremidade da segunda seta,ou, seja o resultado é o número 8, a seta que representa o resultado é de cor azul, pelo lado positivo da reta.

No segundo exemplo da adição $3+{}^{-}5$, o livro mostra que temos que iniciar com a primeira parcela que é 3. A seta sai da origem até o número3 pelo lado positivo. Em seguida junta a seta -5 na extremidade da seta 3 que aponta para a direita, o resultado é uma seta única do 0 até o -2 da seta de cor cinza que está no lado esquerdo da reta.

No terceiro exemplo de adição o livro mostra que temos que iniciar com a primeira parcela -6, saindo com a seta da origem pelo lado negativo até o número -6. Em seguida saímos da extremidade do número anterior até o número +2, o resultado é uma seta única que sai da extremidade do -6 até a extremidade dos 2, pelo lado negativo da reta onde a seta sai da origem até o número 4 que o resultado da operação.

A subtração é representada como “voltar” em termos do modelo de setas. Com a reta numérica e o modelo de setas, a subtração significa voltar ou se mover no sentido oposto. Os exemplos a seguir ilustram os casos 5-2, - 5 - $^{+}$2, - 4 - $^{-}$7 (Figura 21).

Figura 21- Subtração de inteiros com reta numérica

Fonte: VANDE WALLE (2009, p.536)

No primeiro exemplo de subtração 5-2 o livro mostra que temos que começar com a primeira parcela, ou seja, saímos com a seta da origem até o número 5. Em seguida volta uma casa saindo da extremidade da reta até o encontro da seta anterior uma seta do número 2 a partir da extremidade da seta 5, o resultado é uma seta única saindo do 0 até a extremidade do 2 pelo lado direito ou positivo da reta essa seta ela vale 3.

No segundo exemplo de - 5 - $^{+}$2, a primeira seta termina em – 5. Como uma quantidade positiva é subtraída, usamos uma seta positiva. Para subtraí-la, movimentamos no seu sentido oposto (esquerda), ou seja, dar meia volta. O movimento termina em 7. O resultado da operação é uma seta de 0 até a extremidade da parte de trás da seta + 2.

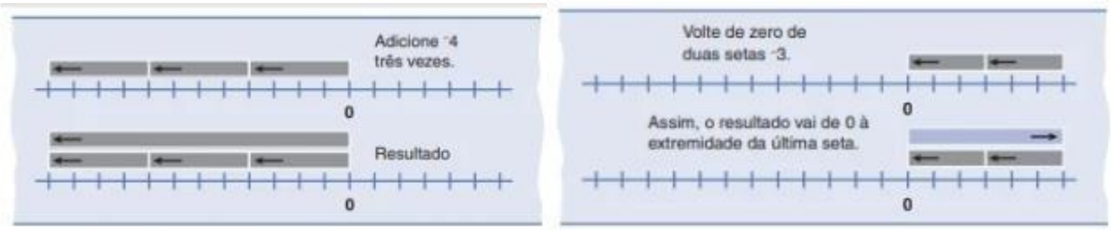
No terceiro exemplo de subtração - 4 - $^{-}7$ o livro mostra que a seta sai da origem pelo lado negativo até o número -4, em seguida a seta volta da extremidade do número anterior até o número 7 pelo lado negativo da reta , onde o resultado da operação é igual a 3.

O autor quando vai tratar sobre a multiplicação de inteiros deve ser uma extensão direta da multiplicação com números naturais, do mesmo modo que a adição e a subtração estão conectadas aos conceitos com números naturais. Geralmente nos referimos à multiplicação de números naturais como adição repetida. O primeiro fator nos diz quantos conjuntos existem ou quantos são adicionados ao todo, começando com 0. Isso se traduz para a multiplicação de inteiros prontamente quando o primeiro fator for positivo, não importando o sinal do segundo fator.

O primeiro exemplo na Figura 24.8 do livro (Figura 22) ilustra um primeiro fator positivo e um segundo fator negativo, caso 3 x (- 4). Mas qual seria o significado quando o primeiro fator for negativo, como em –2 × (–3)? Se um primeiro fator positivo significa adição repetida (quantas vezes adicionadas a 0), um primeiro fator negativo deveria significar subtração repetida (quantas vezes subtraído de 0).

O segundo exemplo na Figura 22 (Figura 24.8 do livro) ilustra como a multiplicação com o primeiro fator negativo pode ser modelada.

Figura 22- Multiplicação com reta numérica



Fonte: VAN DE WALLE (2009, p.537)

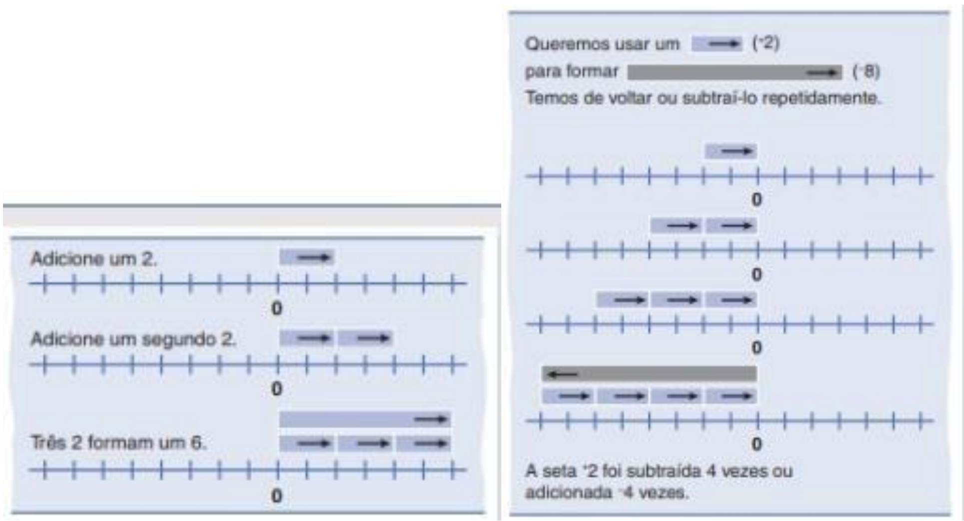
No primeiro exemplo da multiplicação 3 x (- 4), o livro mostra que iniciamos a trabalhar na reta adicionando -4 três vezes, saindo da origem pelo lado negativo da reta. O resultado é uma seta única saindo da origem até a extremidade da reta pelo lado negativo, ou seja, o resultado é -12. No segundo exemplo da multiplicação–2 × (–3), o livro mostra que iniciamos a trabalhar na reta voltando da origem duas setas de -3, assim o resultado vai de 0 até a extremidade da ultima seta pelo lado positivo, resultando no número 6.

Segundo Van de Walle (2009), as enganadoras regras simples de “sinais iguais, produtos positivos” e “sinais diferentes, produtos negativos” são rapidamente estabelecidos. Porém, o autor destaca que é igualmente importante que os alunos possam produzir respostas corretamente e que possam fornecer uma justificativa.

Com a divisão de inteiros, Van de Walle (2009) orienta que novamente se explore primeiro o caso de números naturais. Lembrando de que $8 \div 4$ com números naturais possui dois significados possíveis correspondendo às duas expressões com fatores desconhecidos: $4 \times ? = 8$, perguntando “Quatro conjuntos de quê produzem oito?”. E considerando? $\times 4 = 8$, perguntando, “Quantos quatros formam?”

Geralmente, a abordagem de medidas ($? \times 4$) é a usada com naturais, embora ambos os conceitos possam ser exibidos com ambos os modelos. É útil pensar em construir o dividendo com o divisor de 0, ou adição repetida para encontrar o fator desconhecido. O primeiro exemplo na Figura 24.9 ilustra como os dois modelos funcionam para números naturais. Após isso, temos um exemplo onde o divisor é positivo, mas o dividendo é negativo.

Figura 23 - Divisão de inteiros com reta numérica na abordagem de medidas



Fonte: VAN DE WALLE (2009, p.238)

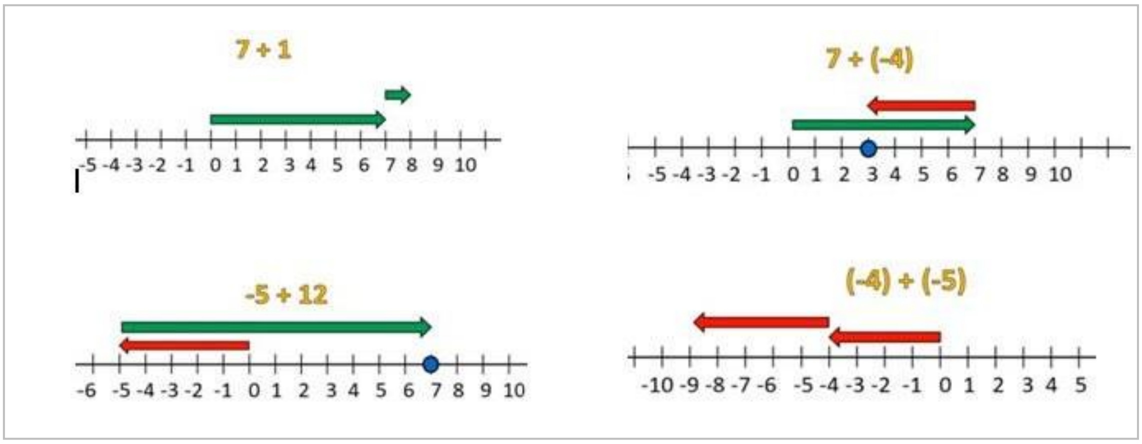
No primeiro exemplo da divisão $6 \div 2$, o livro mostra que iniciamos adicionando um 2 saindo da origem.Em seguida adicionamos outra seta saindo do final da seta anterior. Com essa seta andamos mais duas casas na reta, em seguida adicionamos a terceira seta saindo do final da seta anterior, andamos mais duas casas na reta, lodo as três setas formam assim o número 6. Ou seja, o número 6 ele é formado por três setas cada seta correspondem ao número 2, assim o resultado da divisão é o número 3 pelo lado positivo da reta.

No segundo exemplo da divisão - 8 ÷ 2 , o -8 ele é formado por quatro setas , cada seta correspondem ao número 2 pelo lado esquerdo da reta.Temos que usar uma seta + 2, para formar uma seta -8. A seta +2 foi subtraída 4 vezes ou adicionada -4 vezes , sendo assim o resultado é uma seta única que sai da origem até a extremidade da reta pelo lado negativo da reta chegando ao resultado -4.

Outra proposta analisada é o material de Rogéria Gaudêncio sem ano de publicação, operações com números inteiros. Nas páginas 11, 12, 13, e 14 a autora explica como trabalhar com as operações de adição, subtração e divisão na reta numérica através de exemplos para ilustrar as operações.

Iniciando com a adição, temos as representações para os casos 7+ 1, 7 + (-4), -5 + 12 e (-4) + (-5).

Figura 24 - Adição na reta



Fonte: REGO (s/d)

No primeiro exemplo de adição 7+1, a primeira parcela é o número 7 dessa forma a seta de cor verde sai da origem até o número 7 pelo lado positivo da reta. A segunda parcela é o número 1, logo outra seta de cor verde sai da extremidade da seta anterior se deslocando assim uma casa na reta pelo lado positivo, chegando assim ao resultado o número 8.

No segundo exemplo de adição 7+ (-4), a primeira parcela é 7, logo a seta verde sai da origem até o número 7 pelo lado positivo da reta. A segunda parcela é o número -

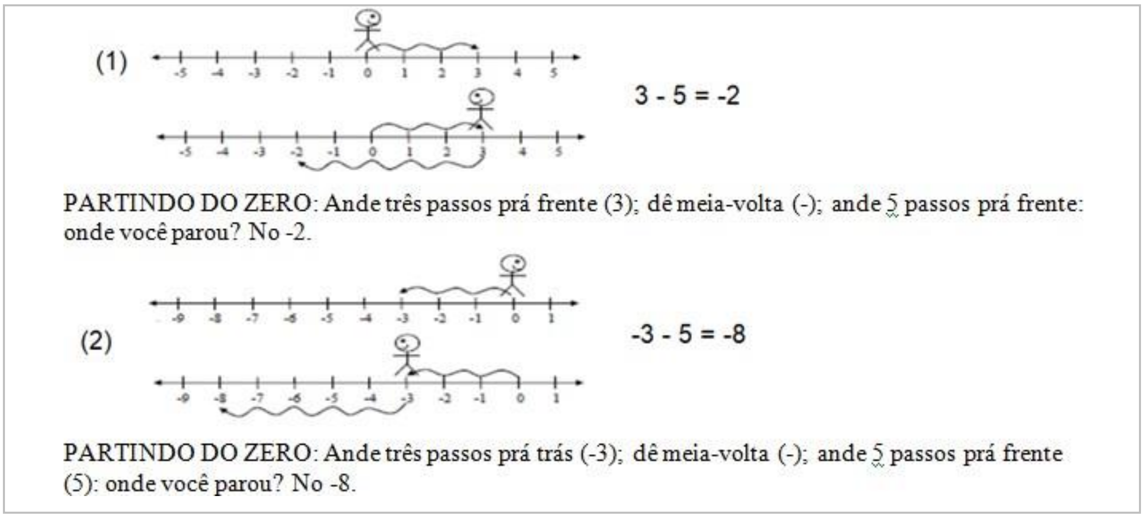
4, logo a seta vermelha sai da extremidade da seta anterior e volta 4 casas pelo lado positivo da reta chegando ao resultado igual a 3.

No terceiro exemplo de adição -5+12, a primeira parcela é -5 logo a seta vermelha sai da origem até o número -5 pelo lado negativo da reta. A segunda parcela é o número 12, onde a seta verde sai da extremidade da seta anterior é anda 12 casas na reta pelo lado positivo chegando assim ao resultado igual a 7.

No último exemplo de adição (-4) + (-5), a primeira parcela é o número -4 , logo a seta sai da origem pelo lado negativo da reta. A segunda parcela é o número -5 onde a outra seta sai da extremidade da seta anterior e anda 5 casas na reta pelo lado negativo da reta , chegando assim ao resultado igual a -9.

Os exemplos a seguir são de subtração na reta numérica. A autora utiliza um personagem para ilustrar quando se dá meia-volta (giro sem sair do lugar) indicada pelo sinal de menos (-) da operação. O sinal de menos (-) do número indica o sentido da caminhada, para trás, tomando a origem como referência.

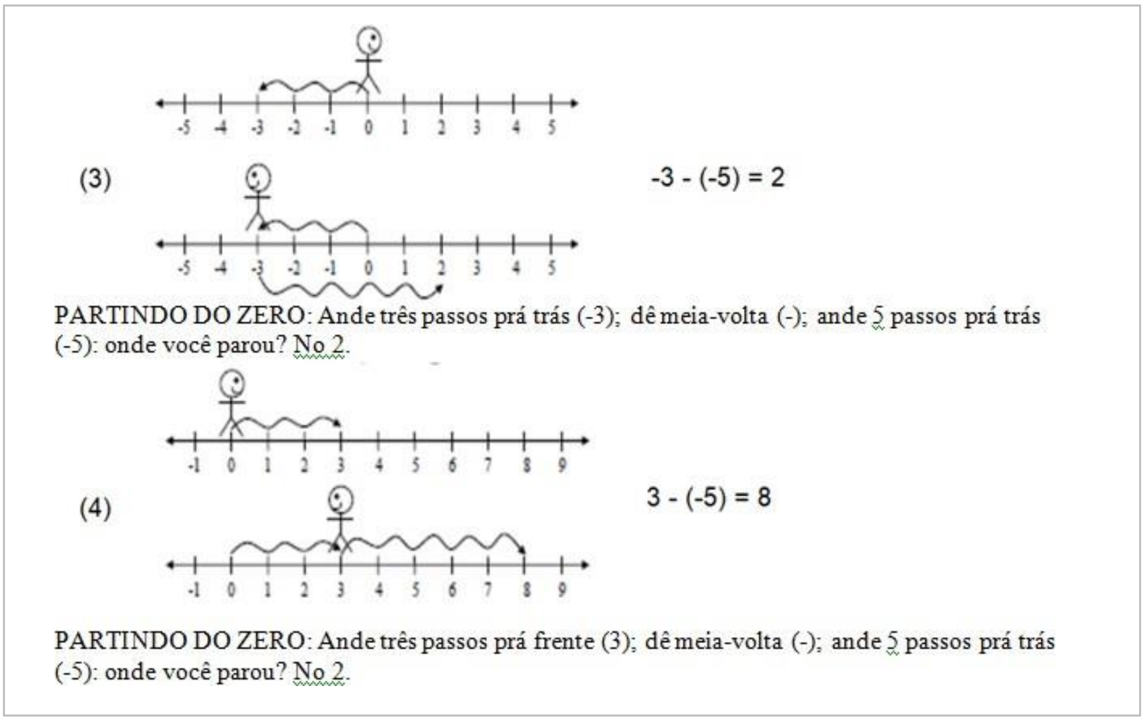
Figura 25 - Subtração na reta com personagem



Fonte: REGO (s/d)

No primeiro exemplo de subtração 3-5 = -2, o boneco sai da origem até o número 3 que é a primeira parcela da operação pelo lado positivo da reta. Em seguida o boneco dá meia-volta e anda 5 passos para frente pelo lado negativo da reta chegando assim ao resultado -2.No segundo exemplo de subtração -3-5 = -8, o boneco sai da origem e anda 3 passos para trás pelo lado negativo da reta chegando ao número -3. Em seguida o boneco dá meia-volta e anda 5 passos para frente pelo lado positivo da reta chegando ao resultado igual a -8.

Figura 26 - Subtração na reta com personagem (continuação)

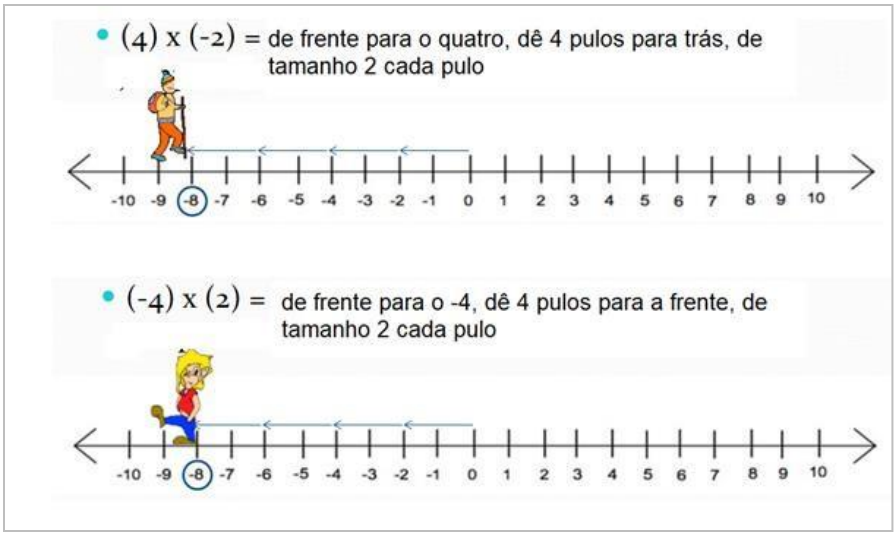


Fonte: REGO (s/d)

No terceiro exemplo de subtração -3-(-5) = 2, o boneco sai da origem e anda 3 passos para trás pelo lado negativo da reta chegando ao número -3, em seguida o boneco dá meia volta e anda 5 passos para trás pelo lado positivo da reta , chegando ao resultado igual a 2.No ultimo exemplo da subtração 3-(-5) = 8, o boneco sai da origem até o número 3 pelo lado positivo da reta, em seguida o boneco dá meia volta e anda 5 passos para trás pelo lado positivo da reta, chegando ao resultado igual a 8.

Os exemplos a seguir são de multiplicação na reta numérica (Figura 27). A autora considerou também um personagem que pode dar passos largos. Outra orientação diz respeito ao fato de posicionar a personagem “de frente” para o número indicado no primeiro fator, dependendo do sinal. Isso já orienta o sentido da caminhada. O sinal de menos (-) no caso do segundo fator indica que a caminha é para trás, ou para frente, no caso do mais (+).

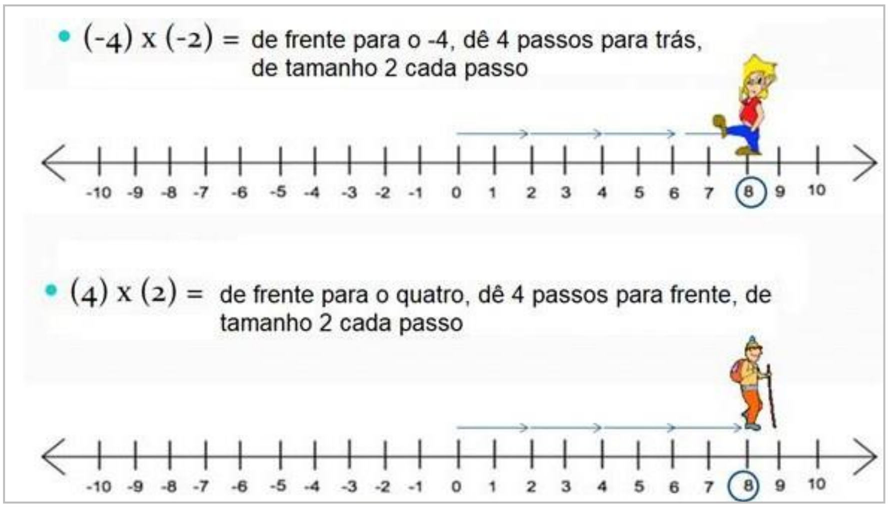
Figura 27 - Multiplicação na reta com personagem



Fonte: REGO (s/d)

No primeiro exemplo da multiplicação (4) x (-2), o boneco sai da origem de frente para o quatro e dá quatro pulos para trás pelo lado negativo da reta, cada pulo tem tamanho 2, chegando ao resultado -8.No segundo exemplo da multiplicação (-4) x (2), a boneca sai da origem de frente para o número -4, e dá quatro pulos para frente de tamanho 2 cada pulo, pelo lado negativo da reta , chegando ao resultado igual a -8.

Figura 28 – Multiplicação na reta com personagem (continuação)

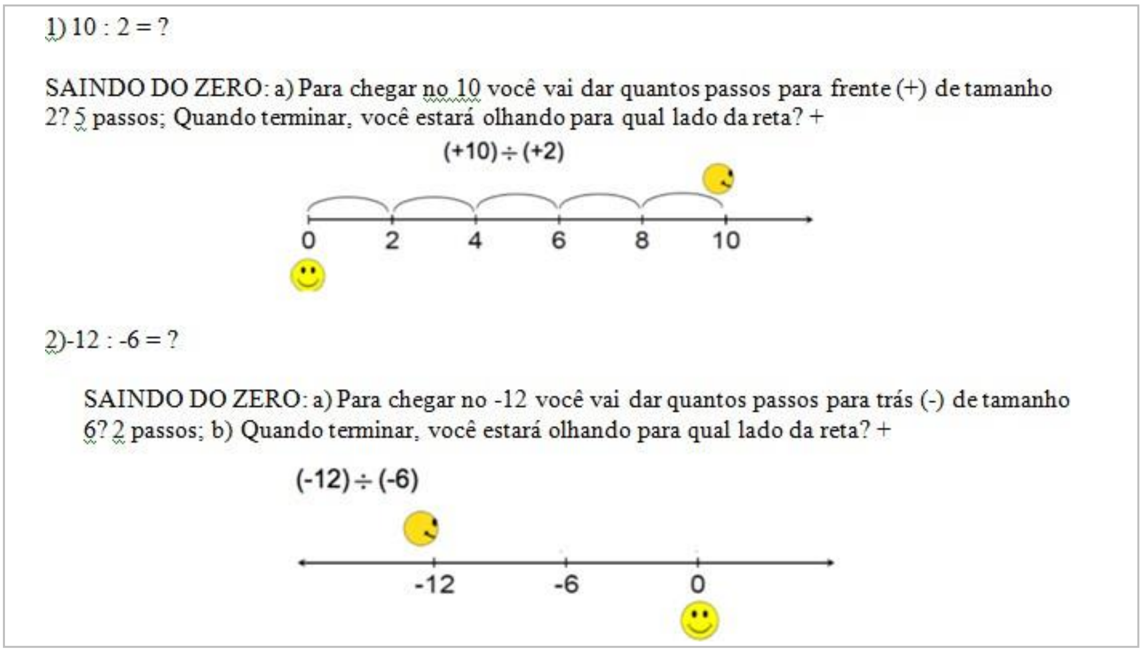


Fonte: REGO (s/d)

No terceiro (-4) x (-2), a boneca sai da origem de frente para o número -4 e dá quatro passos para trás, cada passo de tamanho 2 pelo lado positivo da reta, chegando assim ao resultado igual a 8 positivo. No ultimo exemplo da multiplicação (4) x(2), o boneco sai da origem de frente para o número 4, e dá 4 passos para frente de tamanho 2 cada passo pelo lado positivo da reta, chegando ao resultado igual a 8 positivo.

Os exemplos a seguir são de divisão na reta numérica. A autora usa um emoji para indicar quando o personagem está na origem, quando está voltado para a direita e outra para a esquerda. No caso da divisão é sugerido um trabalho com perguntas do tipo: Para chegar-nos 10, você vai dar quantos passos para frente (+) de tamanho 2 ? O dividendo indica aonde se quer chegar (ponto de chegada), podendo ser no lado direito (+) ou esquerdo da reta (-). O divisor indica o tamanho do passo a ser dado e o sentido, para frente (+) ou para trás (-). A resposta indica quantos passos são necessários.

Figura 29 - Divisão na reta numérica

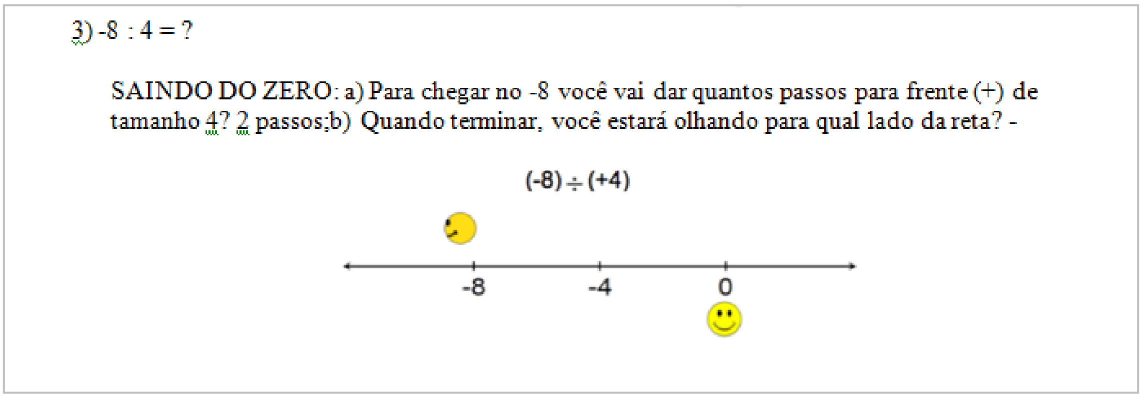


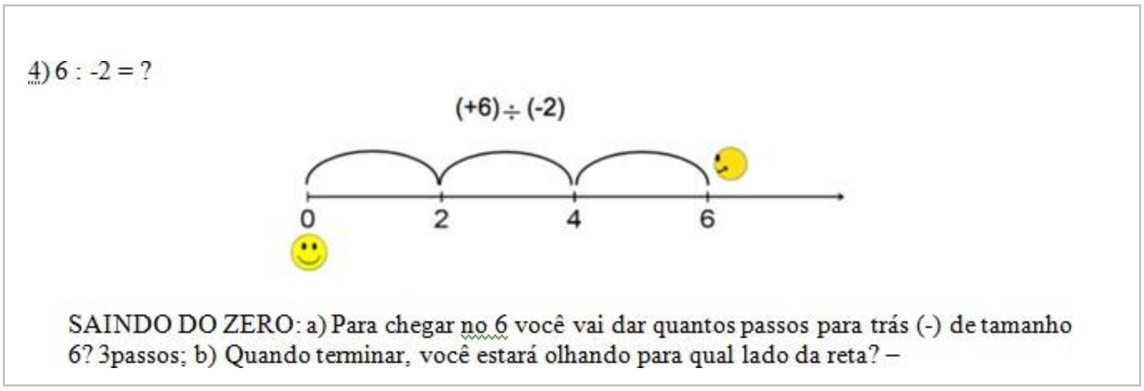
Fonte: REGO (s/d)

No primeiro exemplo da divisão 10 ÷ 2 , a carinha sai da origem e anda cinco passos para frente pelo lado positivo da reta. Cada passo tem tamanho 2, dessa forma o resultado da divisão é igual a 5 positivo. No segundo exemplo da divisão -12÷ (-6), a carinha sai da origem e dá dois passos para trás. Cada passo de tamanho 6, chegando ao -12, pelo lado negativo da reta. Logo a carinha está olhando para o lado positivo e dessa forma o resultado será igual a 2 positivo.

No terceiro exemplo -8÷ 4, a carinha sai da origem pelo lado negativo da reta, e dá dois passos para a frente , cada passo de tamanho 4, chegando assim ao resultado igual a-2 negativo.

Figura 30 - Divisão na reta numérica (continuação)





Fonte: REGO (s/d)

No último exemplo da divisão 6÷(-2) , a carinha sai da origem até o número 6, em seguida a carinha dá 3 passos para trás pelo lado positivo da reta cada passo de tamanho 2, chegando assim ao resultado -3 negativo.

3.4 A reta numérica nas propostas analisadas: operando com os inteiros

Nesta seção fazemos uma análise das propostas considerando as seguintes categorias: 1) Contempla habilidades da BNCC; 2) Trata das 4 operações na reta; 3) Diferencia o sinal de menos da operação de subtração do sinal que indica uma quantidade negativa; 4) Facilidade do uso da reta para calcular o resultado; 5) Participação do aluno na representação do resultado da operação na reta.

O primeiro recurso apresentado neste trabalho foi o livro do 7º ano dos autores Patrícia Moreno Patoro e Rodrigo Balestri, edição do ano 2018. Neste livro os autores trabalham com as quatro operações onde o uso da reta numérica para se chegar ao resultado das operações não é complicado (categoria 4), porém para entender como se chegou ao resultado das operações é preciso que o aluno desenvolva o procedimento (categoria 5). A soma e a subtração neste livro trabalham com situações problemas envolvendo o dia a dia. O livro tem uma proposta mais completa apenas para a adição e subtração, contemplando todas as regras de sinais. No estudo da multiplicação o autor apresenta exemplo na reta numérica, já na divisão os autores não apresentam nenhum exemplo com utilização da reta numérica (categoria 2). Neste recurso a habilidade EM07MA03 da BNCC foi contemplada (categoria 1).

O segundo recurso utilizado foi a proposta do software GeoGebra. Essa proposta trabalha apenas com duas operações adição e subtração (categoria 2). Nesta proposta o uso da reta para se chegar ao resultado é fácil, pois o resultado na reta é de forma automática (categoria 4) o aluno não tem como movimentar a reta (categoria 5). No caso da adição e da subtração se faz diferenciação entre o sinal do número e o sinal que indica a operação, onde a escrita aparece de forma simplificada (categoria 3). Essa proposta trata da habilidade EM07MA03 da BNCC (categoria 1)

O terceiro recurso utilizado foi o livro Matemática no Ensino Fundamental do autor Van de Walle, que trabalha as quatro operações na reta numérica utilizando setas de papeis. Para se chegar ao resultado das operações na reta numérica é necessário uma memorização dos procedimentos para se chegar ao resultado de cada operação (categoria 4). Nesta proposta a habilidade EF07MA03 da BNCC é tratada (categoria 1). Na subtração se faz diferenciação entre o sinal do número e sinal que indica a operação, ou seja, para se chegar ao resultado das subtrações precisa voltar setas, saindo da extremidade da outra seta. Esse recurso tem uma grande potencialidade para o aprendizado dos alunos do 7º ano do ensino fundamental, porém deveria ter explicações mais claras como se chegar ao resultado das operações na reta. Uma limitação da proposta é que os alunos precisam memorizar cada ação a ser feita nos casos dos números negativos.

O último recurso utilizado foi o material de Rogéria Gaudêncio do Rego. Neste material a autora trabalha com as quatro operações e trata da habilidade EF07MA03 da BNCC. Nesta proposta o uso da reta numérica é de fácil entendimento para se chegar ao resultado de cada operação na reta. Na subtração se faz diferenciação no sinal do número e no sinal que indica a operação, ou seja, para se chegar ao resultado da subtração se usa dois termos dá meia-volta e andar para trás. Esse recurso tem como potencialidade as ações de cada operação, mais é limitado, pois os alunos precisam memorizar cada ação a ser feita nos casos dos números negativos.

Os quadros síntese a seguir (Quadro 1,2,3 e 4) resumem a análise dos recursos estudados.

Quadro 1– Síntese da análise do recurso LD

Recurso: Livro Didático Matemática Essencial de Patoro e Balestri (2018)	
Categorias de análises	A partir das análises das categorias chegamos a conclusão que este recurso atende as categorias 1, 4 e 5. Ela contempla a habilidade EM07MA03 da BNCC; É considerado um recurso de fácil entendimento pelos alunos e onde os mesmos são responsáveis por encontrar a representação na reta. Não atende a categoria 2, pois este recurso não trata das 4 operações com representação na reta como também não atende a categoria 3 de diferenciação do sinal de menos da operação de subtração do sinal que indica uma quantidade negativa.
Potencialidades e limitações	Podemos observar que esse recurso tem grandes potencialidades em trabalhar com operações de números inteiros, porém é limitado em trabalhar apenas com três operações na reta numérica, já que na divisão não tem exemplos com resultado na reta numérica.

Quadro 2– Síntese da análise do recurso Geogebra

Recurso: Proposta no GeoGebra de Brito	
Categorias de análises	A partir das análises das categorias, concluímos que este recurso atende as categorias 1, 3 e 4, pois contempla a habilidade EM07MA03 da BNCC, diferencia o sinal de menos da operação de subtração do sinal que indica uma quantidade negativa e é considerado um recurso de fácil entendimento pelos alunos. Não atende as categorias analisadas 2 e 5 , pois o recurso não trata das quatro operações na reta, e não tem participação do aluno na representação do resultado da operação na reta , já que o resultado é feito de forma automática.
Potencialidades e limitações	Essa proposta trabalha tem grande potencial para trabalhar com a reta numérica com as operações adição e subtração. Nesta proposta o uso da reta para se chegar ao resultado é fácil, e faz diferenciação entre o sinal do número e o sinal que indica a operação, onde a escrita aparece de forma simplificada. Tem limitações quanto às operações

	e o fato do resultado na reta ser obtido de forma automática onde aluno não tem como movimentar a reta.

Quadro 3 – Síntese da análise do recurso Livro

Recurso: Livro de Van de Walle (2009)	
Categorias de análises	A partir das análises das categorias chegamos à conclusão que este recurso atende todas as categorias analisadas.
Potencialidades e limitações	Esse recurso tem uma grande potencialidade para o aprendizado dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental referente ao estudo das quatro operações na reta numérica. Porém tem uma limitação, pois os alunos precisam memorizar cada procedimento a ser feito nos casos de números negativos.

Quadro 4 – Síntese da análise do recurso Material de Rego (s/d)

Recurso: Material de Rego (s/d)	
Categorias de análises	A partir das análises das categorias concluímos que este recurso atende a todas as categorias analisadas.
Potencialidades e limitações	Esse recurso tem uma grande potencialidade para o aprendizado dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental referente ao estudo das quatro operações na reta numérica. Porém tem uma limitação, pois os alunos precisam memorizar cada procedimento a ser feito nos casos de números negativos. Ele se diferencia da proposta de Van de Walle pelo emojis que indicam a diferenciação do sinal de menos e da operação de subtração.

4 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo investigar as potencialidades e limitações de propostas de atividades com suporte da reta numérica envolvendo as operações básicas com números inteiros voltadas para o 7º ano do Ensino Fundamental. Para tanto, trabalhamos com os seguintes objetivos específicos. Compreender o funcionamento da reta numérica como suporte para as operações com números inteiros no recurso livro didáticos, materiais para professores e no GeoGebra; Estabelecer categorias de análise para comparar as propostas; Analisar potencialidades e limitações das propostas considerando as categorias de análise.

As propostas apresentadas no trabalho são todas voltadas para o ensino do 7º ano do ensino fundamental. Esse trabalho é uma pesquisa exploratória, bibliográfica e qualitativa, onde os dados apresentados foram resultados de propostas dos recursos: livro didático *Matemática Essencial* do 7º ano do Ensino Fundamental dos autores Patrícia Moreno Patoro e Rodrigo Balestri; Geogebra com uma proposta de Luciano Brito; do livro para professores *Matemática no ensino Fundamental* de Van de Walle de 2009 e de outro material para professores da professora Rogéria do Rego, sem data de publicação.

Criamos como categorias de análise as seguintes: Contempla habilidades da BNCC; 2) Trata das 4 operações na reta; 3) Diferencia o sinal de menos da operação de subtração do sinal que indica uma quantidade negativa; 4) Facilidade do uso da reta para calcular o resultado; 5) Participação do aluno na representação do resultado da operação na reta.

Com os estudos das propostas percebemos que o enfoque maior é na adição e na subtração, pois essas duas operações são as primeiras que os alunos aprendem no 7º ano. O trabalho com as operações de multiplicação e divisão com suporte na reta numérica não é mencionado na BNCC. Também não trabalhamos com propostas de formulação e resolução de problemas envolvendo os números inteiros como indica a BNCC na habilidade EF07MA04.

A adição e a subtração têm regras de sinais simples onde os alunos aprendem com facilidade, ou seja, a regra de adição e de subtração diz que se os sinais forem iguais soma e conserva o sinal, e se o sinal for diferente subtrai e conserva o sinal do maior. O problema surge quando os alunos aprendem a multiplicação e a divisão, pois neste momento os alunos começam a confundir as regras de sinais das operações, ou seja, na multiplicação e na divisão existe uma regra para resolver as operações e essa regra é diferente da regra da adição e da subtração, onde a regra da multiplicação e da divisão diz que os dois números da operação tiverem sinais iguais o resultado é positivo, se tiverem sinais diferentes o resultado é negativo. Com essa regra os alunos compreendem como se resolve a multiplicação e a divisão com números inteiros, porém acabam querendo resolver todas as operações com uma única regra, dessa forma surgem as dificuldades com as regras de sinais das quatro operações.

No livro dos autores Patoro e Balestri a adição, a subtração, e a multiplicação foram tratados na reta numérica. Já na divisão os exemplos apresentados pelos autores no livro didático não são representados na reta numérica, também não aparecem nas atividades propostas, logo esse capítulo do livro que trabalha os números inteiros e a reta numérica é limitado em explica apenas três operações na reta numérica.

Ao analisamos as propostas percebemos que a melhor proposta para entendemos as operações de adição e subtração de números inteiros na reta numérica é a proposta dos números inteiros trabalhados no Geogebra. Ela é de fácil entendimento para usá-la e chegar aos resultados das operações. Essa proposta poderia ser mais bem trabalhada pelos alunos se os próprios alunos tivessem uma forma de manipular as setas. Isso seria de grande aprendizagem em termo do pensar matemático e de conhecimentos, pois é o próprio Geogebra que coloca automaticamente as setas. Talvez ela sirva como proposta inicial para o trabalho na reta numérica avançando nas demais, em seguida.

No livro de Van Walle não foi difícil entendermos como se trabalhar com as setas de papéis na reta numérica, pois para cada operação tem as explicações de como se chegar aos resultados das operações na reta numérica.

Já na proposta do material de Rogéria do Rego tem uma grande potencialidade nas quatro operações básicas com alunos do 7º ano do Fundamental, por nos parece ser a mais completa atendendo aos critérios de análise elencados por nós. A autora apresenta as imagens inseridas em seu trabalho de forma clara, e suas explicações sobre como se trabalha as operações na reta numérica são de fácil entendimento para os professores e para os alunos. Há, também, a diferenciação entre a ação feita para o caso da subtração (dar meia volta), da feita para um número negativo (andar para trás), ajudando o estudante a compreender a diferenciação entre o sinal do número e o sinal da operação.

Neste estudo percebemos semelhanças e diferenças entre os recursos analisados. O livro didático de Patoro e Balestri tem semelhança com o recurso GeoGebra: os dois recursos não atendem a categoria 2 que diz respeito ao tratamento das quatro operações na reta, os dois tratam da operações de adição e subtração. Portanto esse recurso é diferente do recurso do livro de Van de Walle e do Material de Rego, pois os dois tratam das quatro operações na reta. Percebemos que o recurso do autor Van de Walle é semelhante ao material de Rego. Os dois recursos têm as mesmas limitações, e os dois recursos atendem todas as categorias analisadas. Como diferença, temos que o livro de Van de Walle, usa setas de papel para analisar os resultados das operações na reta numérica, já o material de Rego usa setas, *emoji*, e bonecos para indicar as operações e os resultados das operações na reta.

Ao final desse trabalho podemos observar que o estudo dos números inteiros na reta numérica é um recurso que requer conhecimento do professor para o desenvolvimento da aprendizagem das quatro operações básicas. A reta numérica auxilia na observação dos alunos, pois através da observação compreendemos como resolver as operações e chegar aos resultados esperados de cada operação, a reta numérica também ajuda os alunos a entender melhor as regras de sinais.

Uma sugestão para a proposta da reta numérica é de utilizar uma trilha de tamanho grande, com os estudantes simulando os movimentos indicados para cada operação, há a vantagem da ação sinestésica. Uma limitação das propostas, exceto do caso do Geogebra, é que provavelmente, os estudantes tendem a se preocupar com a memorização das ações a serem feitas para os casos que envolvem números negativos.

Essa pesquisa será uma forma de mostrar para os alunos e professores a importância de entendermos as potencialidades e limitações do uso da reta numérica em propostas de ensino em diferentes recursos para o caso específico das operações com números inteiros. Essas potencialidades e limitações devem estimular os professores a buscar por recursos complementares que ampliam o repertório de propostas do professor de acordo com seus objetivos de ensino e necessidades dos seus alunos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Educacionais**; Matemática. Brasília, 1998.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento**, tradução Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1947.

CASTRUCCI, B; GIOVANNI, J, J, R**. A conquista da matemática** 7º ano. Ed renovado. São Paulo: FTD, 2009.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006, 226 p.

GLADCHEFF A. P.; ZUFFI, E. M.; SILVA, M. **Um Instrumento para Avaliação da Qualidade de Softwares Educacionais de Matemática para o Ensino Fundamental.** Anais do XXI Congresso da Sociedade Brasileira de Computação. Fortaleza, 2001.

GLAESER, G. Epistemologia dos Números Relativos. GEPEM **- Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática**, Rio de Janeiro, Jul/Dez 2010. 65-102.

GIL, A, C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4.ed.São Paulo:Atlas, 2008.

GARCÍA, J, N. **Manual de dificuldades de aprendizagem: linguagem, leitura, escrita e matemática.** 4 ed, Porto Alegre : Artes médicas , 2011.

HERNÁNDEZ S, R; FERNÁNDEZ, C, C; BAPTISTA, L, P. **Metodologia de La investigación**. México: MC Graw Hill, 2006.

IFRAH, G**. Os números, a história de uma grande invenção**, 11. ed. São Paulo: Globo, 1985.

MEGID, M, A, B. A. Construindo matemática na sala de aula: uma experiência com os números inteiros relativos, In: FIORENTINE, Dario e MIORIM, Maria Ângela (orgs). **Por trás da porta, que matemática acontece?**Campinas, SP: FE/Unicamp-Cempem, 2001.

MEISTER, J, C. **Estudando dificuldades na compreensão de números inteiros**. Trabalho de conclusão da Graduação, 2009 – Porto Alegre. Disponível em http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/18224.

PATORO, P M; BALESTRI, R. Números positivos e números negativos. In: PATORO, Patrícia Moreno. **Ensino fundamental**: matemática essencial 7º ano. São Paulo: Scipione, 2018. Cap. 5. p. 92-122

REGO, R.G. Modelos de ensino de operações com Inteiros. Notas de aula. Universidade Federal da Paraíba (UFPB), s/d texto inédito.

RIBEIRO, J, S. **Projeto Radix**: Matemática, 7º ano. São Paulo: Scipione, 2009.

SCHUBRING, G. Desenvolvimento histórico do conceito e do processo de aprendizagem, a partir de recentes concepções matemático-didáticas (erro, obstáculos, transposição). Zetetiké. **Revista do Círculo de Estudo**, Memória e Pesquisa em Educação Matemática. vol. 6, nº 10. Campinas/SP, jul/dez, 1998. Disponível: http://scholar.google.com.br/. Acesso em: 06 jan. 2014.

SAMPIERI, R. H.; COLLADO, C. F.; LUCIO, M. P. B. **Metodologia de pesquisa**. 5. ed. Porto Alegre: Penso, 2013.

TRINDADE, J, A, O. **Obstáculos Epistemológicos à aprendizagem do conceito de função.** Anais do II Seminário de Pesquisa em Educação – Região Sul. UFSC. 1999.

WALLE J. V, A. Desenvolvimento dos conceitos de expoentes inteiros e números reais. In: WALLE, John A van de. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6. Ed. Porto Alegre: Penso 2009. Cap. 24. p. 532-538