Universidade Federal da Paraíba
Campus IV – Litoral Norte
Centro de Ciências Aplicadas e Educação
Departamento de Ciências Exatas
Licenciatura em Matemática

Samara Vanessa Meireles de Santana

Estudo das razões seno, cosseno e tangente através da resolução de problemas.

RIO TINTO/PB

2022

Samara Vanessa Meireles de Santana

Estudo das razões seno, cosseno e tangente através da resolução de problemas.

Pré-projeto de pesquisa apresentado à disciplina Pesquisa Aplicada à Matemática, correspondente à terceira avaliação da disciplina, e requisito parcial para a elaboração do Projeto de Pesquisa do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

Orientador (a): Prof. José Fabrício Lima de Souza

RIO TINTO/PB

2022

Catalogação na publicação Seção de Catalogação e Classificação

S232e Santana, Samara Vanessa Meireles de.
Estudo das razões seno, cosseno e tangente através da resolução de problemas / Samara Vanessa Meireles de Santana. - João Pessoa, 2022.
39 f. : il.

Orientação: José Fabrício Lima de Souza.
TCC (Graduação) - UFPB/CCAE.

1. Resolução de problemas. 2. Razões trigonométricas. 3. Ensino de Matemática. I. Souza, José Fabrício Lima de. II. Título.

UFPB/CCAE CDU 51

Elaborado por Michelle de Kássia Fonseca Barbosa - CRB-738

Samara Vanessa Meireles de Santana

Estudo das razões seno, cosseno e tangente através da resolução de problemas.

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador (a): Prof. Dr. José Fabrício Lima de Souza – UFPB/DCX

Aprovado em: 07/ 12 / 2022

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. José Fabrício Lima de Souza – UFPB/DCX

Claudilene Gomes da Costa

____

Profa. Dra. Claudilene Gomes da Costa – UFPB/DCX

Agnes Liliane L. Soares de Santana

____

Profa. Ma. Agnes Liliane Lima Soares De Santana– UFPB/DCX

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela força que me proporcionou em todos os momentos da minha vida.

Aos meus pais e especialmente, à minha mãe, Maria da Penha, pelo amor, por sempre ter me apoiado desde o inicio do curso e nas horas mais difíceis. A senhora é e sempre será a minha heroína, meu mundo todo. Te amo.

Ao meu padrinho, Neuzomar Junior, por sempre ter me apoiado nos estudos e que Deus não poderia ter colocado uma pessoa melhor pra ser meu padrinho.

Ao Professor Dr. José Fabrício Lima de Souza, pelo trabalho de orientação, amizade, paciência e entusiasmo, que a meu ver são características importantes para ser um maravilhoso Orientador (a).

Ao professor, Thiago Florêncio, por ter me cedido suas aulas para que pudesse aplicar as atividades com os alunos.

E não menos importante, é claro, os meus amigos, Islayne Silva, Yuri Lins e Renata Oliveira. Que nessa longa trajetória estiveram comigo nos bons e maus momentos, passando por poucas e boas, sempre um apoiando o outro. Como diziam os professores, não tem como você chegar ao final do curso sozinho.

RESUMO

Uma das grandes reclamações dos alunos com respeito ao aprendizado da matemática é saber onde aplicar estes conteúdos em seu cotidiano. O que torna o estudo da matemática algo sem muita relevância. Sendo assim, este trabalho tem o objetivo de sanar este problema apresentando um roteiro de ensino de razões trigonométricas no triângulo retângulo a partir da resolução de problemas. A metodologia utilizada para o desenvolvimento da pesquisa em relação aos objetivos foi empregado o formato exploratório, em relação à abordagem do problema, foi utilizada o modelo de pesquisa qualitativa e quanto aos procedimentos técnicos utilizados caracterizou-se como pesquisa campo. O tamanho da amostra foram 12 alunos do 2º ano do ensino médio de uma escola da região de Rio tinto-PB. Os instrumentos empregados na coleta de dados da pesquisa foi um questionário. Os resultados mostraram a importância desta forma de apresentar o conteúdo matemático, principalmente com relação a revelar ao aluno a relevância do conteúdo em áreas práticas da ciência.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Razões trigonométricas. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

There are several complaints from students regarding learning mathematics and knowing where to apply these contents in their daily lives. Which makes the study of mathematics something without much relevance. Therefore, this work aims to remedy this problem by presenting a teaching script of trigonometric ratios in the right triangle from the resolution of problems. The methodology used for the development of the research in relation to the objectives was used the exploratory format, in relation to the approach of the problem, the qualitative research model was used and as for the technical procedures used it was characterized as field research. The sample size was 12 students in the 2nd year of high school at a school in the region of Rio Tinto-PB. The instruments used in the research data collection was a questionnaire. The results showed the importance of this way of presenting the mathematical content, mainly in relation to revealing to the student the relevance of the content in practical areas of science.

Keywords: Problem solving. Trigonometric ratios, Mathematics Teaching.

LISTA DE FIGURAS PÁG**.**

Figura 1- Tábua Plimpton 13

Figura 2 - Relógio do sol 14

Figura 3 - Triângulo retângulo 15

Figura 4 - Semelhança de triângulos retângulos 16

Figura 5 - Triângulos retângulos separados 16

Figura 6 - Triângulo equilátero 18

Figura 7 - Quadrado..19

Figura 8 - Coleta de dados da altura e da sombra..25

Figura 9 - Resposta obtida pelos alunos.. 26

Figura 10 - Exercício sobre razões trigonométricas 27

Figura 11 - Problema sobre identificação da razão trigonométrica................................... 28

Figura 12 - Problema de aplicação da razão trigonométrica... 28

LISTA DE TABELAS

PÁG.

Tabela 1 - Tabela dos ângulos notáveis..20

Tabela 2 - Coleta de medidas da altura e da sombra.. 26

Tabela 3 - Coleta de dados para obtenção do seno e do cosseno de um ângulo................27

LISTA DE GRÁFICOS PÁG.

Gráfico 1 - Percentual dos resultados da Questão 1 da atividade 3. 29

Gráfico 2 - Percentual dos resultados da Questão 2 da atividade 3. 30

Gráfico 3 - Percentual dos resultados da Questão 3 da atividade 3. 30

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **11**
1.1 Delimitação do Tema e Problema de Pesquisa **11**
1.2 Justificativa **11**
1.3 Objetivos **12**
1.3.1 Objetivo Geral **12**
1.3.2 Objetivos Específicos **12**
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 13
2.1 Um pouco sobre a história da Trigonometria **13**
2.2 Razões seno, cosseno e tangente: definições e aplicações **14**
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS **23**
4 METODOLOGIA **24**
5 RESULTADOS E DISCURSÕES **28**
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS **30**
REFERÊNCIAS **31**

1 INTRODUÇÃO

1.1 Delimitação do Tema e Problema de Pesquisa

Com relação ao ensino da matemática, uma das maiores reclamações é com respeito ao fato de que matemática parece ser somente um decorar de fórmulas e conceitos sem nenhuma utilidade. Em particular, o conteúdo de trigonometria sofre desse mesmo dilema, e isso ainda acompanhado de que este conteúdo é considerado muito difícil por alunos do Ensino Médio. O que levanta o questionamento de como tratar esse conteúdo em sala de aula. O que nos leva a procurar de novos métodos que diminuam tal dificuldade, tornando o ensino/aprendizagem muito mais dinâmica. Uma das alternativas possíveis é a resolução de problemas, tendo em vista que, segundo Vergnaud (1987, 1990), o conceito e a competência se formam a partir da resolução de problemas.

De acordo com Lindegger (2000, p.14):

> Partindo da premissa de que o aluno constrói o seu conhecimento, é necessário, para que isto ocorra, sua interação com o objeto, objeto esse que pode ser concreto ou abstrato, como, por exemplo, um conceito matemático. Segundo Vygotsky, o centro de um processo de ensino-aprendizagem é essa interação, que irá ocorrer a partir de atividades e de resolução de problemas propostos ao aluno.

Logo, é importante fazer com que o aluno possa enxergar que o conteúdo de trigonometria, embora sendo um ramo da matemática, ele pode ser aplicado a diversas áreas do conhecimento, como por exemplo: medicina, engenharia, música, entre outros.

Portanto, este trabalho, que foi fruto de reflexões na disciplina de Pesquisa Aplicada à Matemática, visa apresentar a resolução de problemas como uma forma didática e dinâmica para o ensino de razões trigonométricas no triângulo retângulo.

1.2 Justificativa

Uma das razões para escolha desse tema foi a minha própria dificuldade ao me deparar com o conteúdo de trigonometria no ensino médio, principalmente com a didática a que era apresentada.

Santos *et al* (2007) afirmam que as dificuldades e o fracasso no ensino de Matemática, bem como as dificuldades que os alunos apresentam em relação a essa disciplina não é fato novo, pois vários educadores já elencaram elementos que contribuem para o fracasso no ensino da matemática. Estas dificuldades encontradas pelos alunos no que diz respeito a aprendizagem, está muito vinculada na forma em que o conteúdo é apresentado. O que exige do professor na procura da melhor maneira de lecionar o conteúdo.

Com respeito ao ensino de razões trigonométricas, não se pode vincular o ensino deste conteúdo tão somente a determinação de uma variável x em um triângulo. É necessário fazer o aluno enxergar a praticidade do que se está aprendendo. É preciso tornar o conteúdo usual no dia a dia do aluno. E neste sentido, a aplicação de resolução de problemas se torna uma ferramenta bastante útil para atingir estes propósitos.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Investigar o processo de Ensino Aprendizagem das razões trigonométricas utilizando o triângulo retângulo.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Promover a compreensão das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente a partir de situações cotidianas realizadas na escola;
- Aplicar o método da resolução de problemas como forma de promover a compreensão das razões trigonométricas no triângulo retângulo;
- Analisar o comportamento dos alunos quanto à capacidade de aplicar os conteúdos estudados.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Um pouco sobre a história da Trigonometria

Desde os primórdios, a Matemática se entrelaça intimamente com a história da civilização por ser muito rica em características culturais. Estima-se que isso tenha ocorrido entre o século IV e V a.C., no Egito e na Babilônia, onde foram encontrados problemas envolvendo a cotangente, no Papiro Rhind, e uma tábua de secantes na tábula cuneiforme babilônica, a Plimpton 322 (Figura 1).

Figura 1: Tábua Plimpton

Fonte: Oliveira, 2013.

A trigonometria não tem uma origem certa, pode-se dizer que o início do seu desenvolvimento se deu principalmente devido aos problemas gerados pela astronomia e navegação. A palavra trigonometria tem origem no grego trigonos (triângulos) e metrum (medidas), cujo principal objetivo é estudar as relações entre os ângulos e lados de um triângulo.

A Trigonometria grega atingiu seu ápice com Cláudio Ptolomeu, em seu principal trabalho, o Almagesto. O Almagesto tem por objetivo descrever matematicamente o funcionamento do sistema solar, supondo que a Terra está em seu centro (teoria geocêntrica, que seria substituída já no século XV pela teoria heliocêntrica).

A trigonometria era baseada numa única função, a corda de um arco de circulo arbitrário, onde conseguiu identificar as primeiras sequências numéricas relacionadas com comprimentos de sombra com horas do dia. O astrônomo Hiparco de Nicéia ganhou o direito de ser chamado de “Pai da Trigonometria”, por ter feito um tratado em doze livros no qual trata da construção na primeira tabela trigonométrica por volta na segunda metade do século II a. c., onde escreve a respeito do cálculo de comprimentos das cordas através de uma relação chamada seno de um ângulo ou seno de um arco.

A função seno, primeiramente conhecida como função corda, foi trabalhada com bastante intensidade durante muitos séculos anteriores a Ptolomeu. A função corda correlacionava um arco de circunferência com a corda respectiva. Com a natural evolução do pensamento matemático, quando alguém pensou em usar uma tábua a metade da corda de um arco duplo, estava criada a função seno, que, em latim, era designada *sinus.*

O termo *co-sinus* foi utilizado pela primeira vez, no século XVII por Edmundo Gunter, onde era utilizado para indicar o complemento do seno, combinando essas duas palavras, que, em português, transformaram-se em cosseno. O tangente apareceu há mais de três milênios, tanto em cálculos relativos à construção de pirâmides, corno em cálculos envolvendo relógios de sol. Portanto os conceitos de seno e cosseno possuíram sua origem na história da astronomia e a tangente surgiu das necessidades da medição de alturas e distancias. Esses relógios mostravam a relação entre as horas do dia e o comprimento da sombra de uma vara (Figura 2).

Figura 2: Relógio do sol

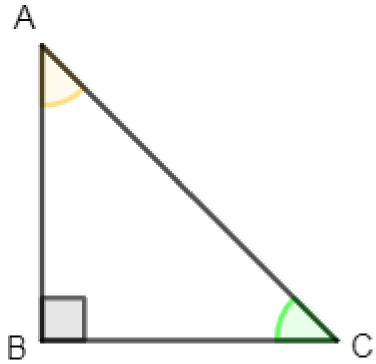
Fonte: Oliveira, 2013.

2.2 Razões seno, cosseno e tangente: definições e aplicações

Com o intuito do entendimento do conceito metodológico, vale frisar que as ações no processo da trigonometria, em particular as razões trigonométricas, devem a partir da percepção do sujeito na aprendizagem de seus conhecimentos. Em seguida definiremos os conceitos de seno, cosseno e tangente em triangulo retângulo.

Dado um triângulo retângulo ABC, retângulo em B, podemos destacar os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e a hipotenusa $\overline{AC}$, conforme Figura 3.

Figura 3: Triângulo retângulo



Fonte: Autoria própria, 2022.

A partir do ângulo $\hat{A}$, podemos escrever:

O lado $\overline{BC}$ é o cateto oposto ao ângulo $\hat{A}$;

O lado $\overline{AB}$ é o cateto adjacente ao ângulo $\hat{A}$

E agora usando como ponto de referencia o ângulo $\hat{C}$

O lado $\overline{AB}$ é o cateto oposto ao ângulo $\hat{C}$;

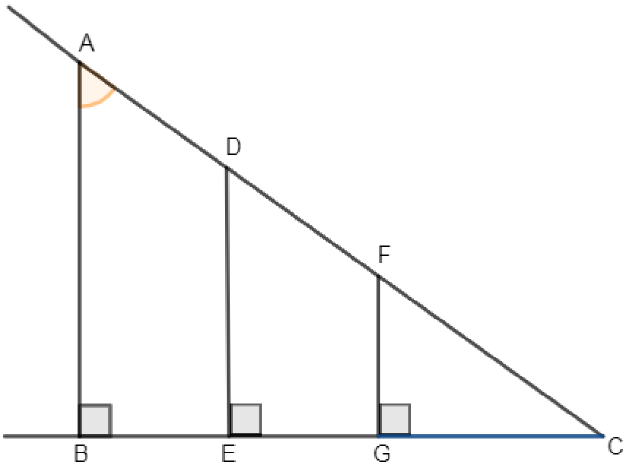
O lado $\overline{BC}$ é o cateto adjacente ao ângulo $\hat{C}$

Fazendo uso de semelhança de triângulos (ver APÊNDICE A), podemos obter algumas razões de semelhança, são a partir dessas semelhanças que poderemos definir o conceito de seno, cosseno e tangente em um triangulo retângulo.

Observe que, com base na Figura 4 e fazendo uso do caso de semelhança AA temos que:

$$\Delta ABC \sim \Delta DEC \sim \Delta FGC$$

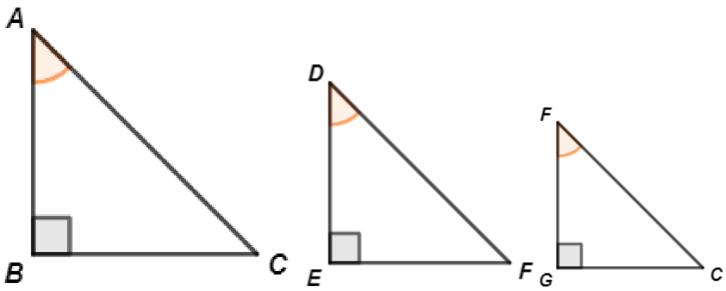
Figura 4: Semelhança de triângulos retângulos



Fonte: Autoria própria, 2022.

Separando os triângulos conforme a Figura 5, podemos obter algumas razões conforme a seguir:

Figura 5: Triângulos retângulos separados



Fonte: Autoria própria, 2022.

$$\frac{BC}{AC} = \frac{EC}{DC} = \frac{GC}{FC} = \kappa_1$$

A referida constante κ_1 será denominada de seno do ângulo $\hat{A}$, representado por $sen(\hat{A})$. Sendo assim, em um triângulo retângulo, podemos definir o seno de um ângulo agudo α como sendo:

$$sen\ \alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa}$$

De maneira semelhante iremos definir o cosseno e a tangente de um ângulo agudo sobre um triângulo retângulo. A partir da Figura 5 temos que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DC} = \frac{FG}{FC} = \kappa_2$$

A referida constante κ_2 será denominada de cosseno do ângulo $\hat{A}$, representado por $cos(\hat{A})$. Sendo assim, em um triângulo retângulo, podemos definir o cosseno de um ângulo agudo α como sendo:

$$\cos\alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ angulo\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa}$$

De forma semelhante, utilizando a Figura 5, podemos obter algumas razões conforme a seguir:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{EC}{DE} = \frac{GC}{FG} = \kappa_3$$

A referida constante κ_3 será denominada de tangente do ângulo $\hat{A}$, representado por $tang(\hat{A})$. Sendo assim, em um triângulo retângulo, podemos definir a tangente de um ângulo agudo α como sendo:

$$tg\ \alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \beta}{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \ \beta}$$

Após a construção dos triângulos e das operações com as razões trigonométricas e algumas discussões, confirmações e analises dos resultados obtidos nas tarefas desenvolvidas, começou-se a formalizar as razões trigonométricas básicas. “Essas razões se tornaram fundamentais na resolução de problemas de topografia, Astronomia e Física, ou problemas atuais.” (EVES 2004, p. 22 apud LIMA, 2015, p. 48)**.**

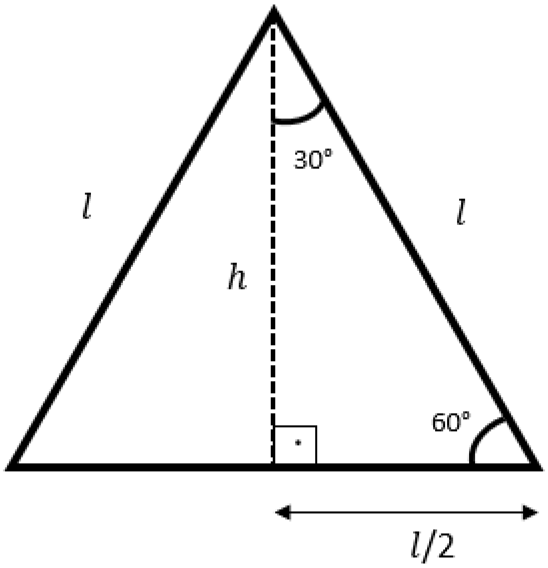
2.3 Razões trigonométricas nos ângulos notáveis

As razões trigonométricas dependem dos ângulos agudos, desse modo, cada um dos ângulos tem seus valores particulares de seno, cosseno e tangente. Vamos demonstrar os ângulos notáveis (30°, 45° e 60°) nas razões trigonométricas.

i. Ângulo de 60°

Podemos usar um triangulo equilátero de lado l, conforme Figura 6. A partir dele, traçamos a altura relativa à base obtendo um ângulo reto e os ângulos de 30° e 60°.

Figura 6: Triângulo equilátero



Fonte: Autoria própria, 2022.

$$sen\ 60° = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{l} \Rightarrow sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{l} \Rightarrow \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60° = \frac{h}{\frac{l}{2}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{l} \Rightarrow tg\ 60° = \sqrt{3}$$

ii. Ângulo de 30°

Como os ângulos 30° e 60° são complementares, logo:

$$sen\ 30° = \cos 60° = \frac{1}{2} \Rightarrow sen\ 30° = \frac{1}{2}$$

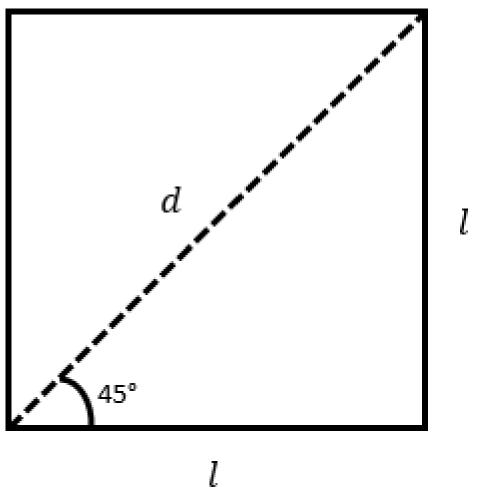
$$\cos 30° = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 30° = \frac{sen\ 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

iii. Ângulo de 45°

Podemos considerar um quadrado de lado l e diagonal d conforme Figura 7. A partir da diagonal obtemos o ângulo de 45°.

Figura 7: Quadrado



Fonte: Autoria própria, 2022.

Sendo assim temos:

$$sen\ 45° = \frac{l}{d} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{l}{d} = sen\ 45° \Rightarrow \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\ 45° = \frac{l}{l} = 1 \Rightarrow tg\ 45° = 1$$

Logo, podemos sintetizar esses valores na tabela abaixo:

Tabela 1: Tabela dos ângulos notáveis

a	$\mathbf{30°}$	$\mathbf{45°}$	$\mathbf{60°}$
$\boldsymbol{sen}\ a$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\mathbf{cos}\ a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\boldsymbol{tg}\ a$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Autoria própria, 2022.

2.4 Razões seno, cosseno e tangente na BNCC

Em sua ultima versão publicada no final do ano de 2018 a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) é definida como:

> [...] é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento. (BRASIL, 2018, p7)

A BNCC propõe cinco unidades temáticas (Números, Álgebras, Geometria, Grandezas e medidas, Probabilidade e estatística), correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Segundo a BNCC do Ensino Médio [...] se organiza em continuidade ao proposto para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental, centrada no desenvolvimento de competências e orientada pelo princípio da educação integral. (BRASIL, p. 469)

A BNCC do Ensino Médio está organizada por áreas de conhecimento (Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) e onde para cada área de conhecimento são definidas competências específicas, articuladas às respectivas competências das áreas do Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes do Ensino Médio. E relacionando cada uma das competências, são descritas habilidades a serem desenvolvidas ao logo de cada etapa.

Ao assunto Trigonometria podem ser destacadas as competências 3, 4 e 5 no Ensino Médio. Onde tratam de forma mais direta daquilo que o docente pode se valer como base da construção de objetivos a serem alcançados no estudo da Trigonometria. Entre as competências, utilizaremos a competência 3.

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 535)

Entre as dezesseis habilidades dessa competência específica, daremos destaque a uma habilidade que permeiam razões trigonométricas na competência 3.

> (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. (BRASIL, 2018, P.536)

De acordo com a habilidade o assunto razões trigonométricas é uma extensão das relações métricas e que também através dela podemos resolver e elaborar problemas envolvendo triângulos em vários contextos.

2.5 Resolução de problemas no cotidiano

Na reforma do sistema Educacional reconhece a necessidade e a importância da resolução de problemas como um conteúdo curricular da Educação Básica, como um fato de proporcionar aos alunos habilidades e estratégias para a solução de problemas ficarem reconhecido não somente como o objetivo parcial de cada uma das diversas áreas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Então, a solução de problemas deveria construir um conteúdo necessário das diversas áreas do currículo obrigatório. A solução de problemas está mais relacionada à aquisição de procedimentos eficazes para a aprendizagem. Conduzir o currículo para a solução de problemas significa procurar e planejar situações abertas para que os alunos busquem e apropriem-se de estratégias adequadas não somente para darem respostas as perguntas escolares, mas também às da realidade cotidiana. Podemos definir a solução de problemas de acordo com Brito:

> [...] um processo que se inicia quando o sujeito se defronta com uma determinada situação e necessita buscar alternativas para atingir uma meta; nesses casos, o sujeito se encontra frente a uma situação-problema e, a partir daí desenvolve as etapas para atingir a solução. A solução de problemas é, portanto, geradora de um processo através do qual o aprendiz vai combinar, na estrutura cognitiva, os conceitos, princípios, procedimentos, técnicas, habilidades e conhecimentos previamente adquiridos que são necessários para encontrar a solução com uma nova situação que demanda uma reorganização conceitual cognitiva. Trata-se, portanto, de reorganização dos elementos já presentes na estrutura cognitiva, combinados com os novos elementos trazidos. (BRITO, 2006, p. 19 apud GABRIEL; UTSUMI, 2020, p.176)

A matemática constitui um âmbito mais tradicional no estudo da solução de problemas. Uma prova dessa identificação existente entre "problemas" e "matemática" é dado pelo fato de que a Matemática tem sido uma das áreas onde se realiza o maior número de pesquisas e trabalhos sobre o rótulo da "solução de problemas".

A aplicação da resolução de problemas como metodologia de ensino ganhou impulso na década de 80, após a agenda do "Nacional Council of Teachers of Mathematies" (Conselho Nacional de Professores de Matemática), recomendar tal metodologia como ênfase para o ensino da matemática. Nos dias atuais a resolução de problema não é vista somente como uma ferramenta metodológica, mas sim com uma trajetória na aprendizagem significativa.

O ato de ensinar a resolver problemas não significa somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas também fazer com que eles criem os hábitos e atitudes de enfrentar a aprendizagem como um problema para qual deve ser encontrada uma resposta. Não é uma questão de somente ensinar a resolver problemas, mas também de ensinar a propor problemas para si mesmo, transformando a realidade em um problema que merece ser questionada e estudada.

A transferência ou generalização dos conhecimentos adquiridos para um novo contexto faz com que o problema de aprendizagem se torne mais difícil, tanto para a teoria quanto para a prática didática. Às vezes não é difícil fazer com que os alunos entendam como se aplica em certo procedimento ou conceito no contexto de um problema, mas fazer com que eles aprendam a utiliza-lo de forma relativamente independente, transferindo-o espontaneamente para novos problemas.

Esta transferência torna-se difícil em determinado assunto, unidade didática ou de uma área para a outra, mas se torna mais complicado quando se trata de mudar uma habilidade ou conhecimento adquirido em aula para um contexto mais do cotidiano. Como destaca Dante:

> Situações-problema são problemas de aplicação que retratam situações reais do dia a dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos... Através de conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos procura-se matematizar uma situação real, organizando os dados em tabelas, traçando gráficos, fazendo operações, etc.(DANTE, 2003, p. 20 apud SILVA, 2014 p.30)

A ligação do exercício para o problema constitui, muitas vezes, o longo caminho que é preciso percorrer da sala de aula até a vida cotidiana. A grande parte dos problemas que o aluno deve resolver em sala de aula, devido ao seu contexto de definição e de execução, fica reduzida a uma simples exercitação na qual o aluno vai se tomando mais ou menos especializado. É imprescindível ampliar o âmbito dos problemas escolares, tanto na sua natureza, incluindo também abertos ou mal definidos. Como no seu conteúdo, abrangendo também algum dos problemas e situações que causam inquietação nos alunos.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 Apresentação do contexto da pesquisa

Esta pesquisa, intitulada **Estudo das razões seno, cosseno e tangente através da resolução de problemas**, tem como objetivo geral o ensino do conteúdo de razões trigonométricas no triângulo retângulo a partir de resoluções de problemas. Para tanto, realizaremos uma pesquisa com 12 alunos de uma turma do ensino médio em uma escola pública da região de Rio Tinto.

3.2 Classificação da pesquisa

Uma pesquisa pode ser classificada segundo a natureza de abordagem do objeto a ser pesquisado quanto aos objetivos e quanto aos procedimentos técnicos de investigação. No caso da pesquisa que apresentamos, segundo Gil (2002), a classificamos como método qualitativo, pesquisa exploratória e pesquisa experimental (campo).

Para Gil (2022, p.133), uma pesquisa é dita qualitativa , quando depende de muitos fatores, tais como a natureza dos dados coletados, a extensão da amostra, os instrumentos de pesquisa e os pressupostos teóricos que nortearam a investigação. De fato, na nossa pesquisa daremos uma análise nas atividades que serão propostas.

Para Gil (2002, p.41), uma pesquisa é dita exploratória, quando o objetivo é proporcionar maior familiaridade com o problema, com visto a torna-lo mais explícitos ou a construir hipóteses e o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições.

Para Gil (2002, p.53), uma pesquisa é dita de campo, quando pesquisa é desenvolvida por meio da observação direta das atividades do grupo estudado e de entrevistas com informantes para captar suas explicações e interpretações do que ocorre no grupo.

3.3 Etapas e instrumentos da pesquisa

A realização da pesquisa se deu conforme as seguintes etapas e instrumentos para coleta de dados:

Etapa 1 – Elaboração de situações problemas para os alunos contemplando diferentes objetivos e um problema para habilidades da BNCC;

Etapa 2 – Aplicar questões sobre razões trigonométricas em uma turma de ensino médio;

Etapa 3 – Coleta das atividades aplicadas;

Etapa 4 – Identificar e comparar os erros cometidos pelos alunos na resolução de problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

4 METODOLOGIA

A atividade ocorreu em três etapas. Na primeira etapa a ideia era fazer com que os alunos coletassem dados das suas alturas e sombras para que posteriormente eles pudessem deduzir as razões trigonométricas num triângulo retângulo a partir da noção de semelhança de triângulos. Nesse sentido foi aplicado um questionário (ver APÊNDCIE B) no qual o aluno deveria coletar dados que pudessem preenchidos em quadros para posterior utilização. Para essa atividade, foram necessários a formação de pares para que cada aluno, a partir de uma fita métrica, coletasse a altura do colega e a medida da sombra dele, depois era feito o processo contrário, conforme é ilustrado na Figura 8.

Figura 8: Coleta de dados da altura e da sombra

Fonte: Autoria própria, 2022.

Após isso os dados eram colocados na tabela abaixo.

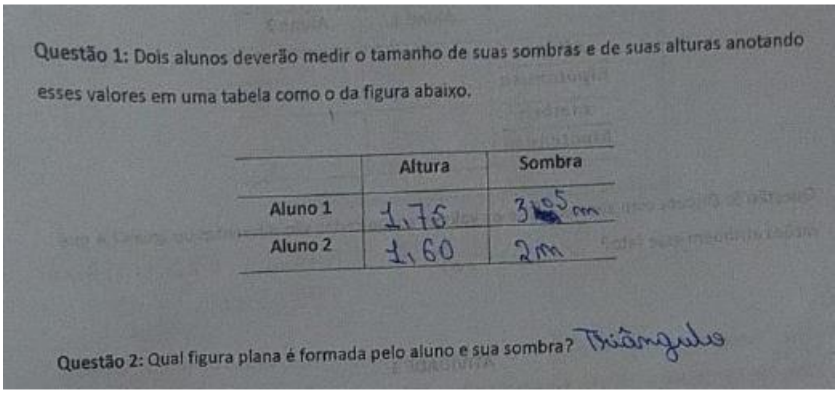
Tabela 2: Coleta de medidas da altura e da sombra

	Altura	**Sombra**
Aluno 1		
Aluno 2		

Fonte: Autoria própria, 2022.

Com os dados da tabela preenchidos, os alunos deveriam em seguida responder que figura plana era formada pela altura dele e a medida de sua sombra, e depois desenhá-la em uma folha de papel numa escala de 1:10. A Figura 9 ilustra a resposta de um dos alunos que participou da atividade.

Figura 9: Resposta obtida pelos alunos


Questão 1: Dois alunos deverão medir o tamanho de suas sombras e de suas alturas anotando esses valores em uma tabela como o da figura abaixo.

	Altura	Sombra
Aluno 1	1,76	3,05m
Aluno 2	1,60	2m

Questão 2: Qual figura plana é formada pelo aluno e sua sombra? Triângulo

Fonte: Autoria própria, 2022.

Após esta etapa, os alunos deveriam agora as razões trigonométricas a partir dos dados obtidos. Para isso, foi aplicada uma segunda atividade, ver APÊNDICE C, na qual os alunos calculavam a razão entre a altura obtida e a medida de sua sombra, a partir disso os alunos percebiam que os valores eram muito semelhantes independente da pessoa escolhida. Sendo assim, eles eram convidados a perceber que essa semelhança levava a uma constante que denominamos de tangente.

Em seguida, de posse do triângulo retângulo obtido na primeira atividade, foi explicado aos alunos como identificar, dado um ângulo agudo qualquer, quem seria o cateto oposto e o cateto adjacente. O terceiro elemento do triângulo retângulo, a hipotenusa, foi o mais fácil de ser identificado, pois representava o maior lado. Para determinar a medida da hipotenusa, eles fizeram uso do Teorema de Pitágoras.

Obtido todos os lados do triângulo, eles puderam classificar a tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo como sendo a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente. Em seguida os alunos deveriam preencher os dados da Tabela 3 abaixo e com isso obter as outras duas razões trigonométricas, o seno e o cosseno de um ângulo agudo do triângulo retângulo.

Tabela 3: Coleta de dados para obtenção do seno e do cosseno de um ângulo

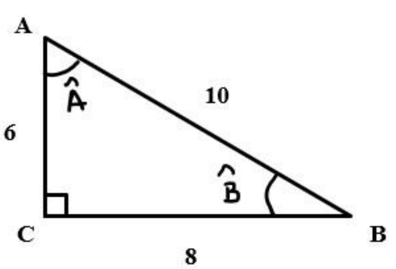
	Aluno 1	**Aluno 2**
$\frac{altura}{hipotenusa}$		
$\frac{sombra}{hipotenusa}$		

Fonte: Autoria própria, 2022.

Por fim, para avaliar o nível do conhecimento obtido a partir das atividades anteriores, foi aplicada uma terceira atividade, ver APÊNDICE D, na qual os alunos deveriam responder a situações problemas. No primeiro problema, ilustrado na Figura 10, o objetivo era perceber se os alunos foram capazes de identificar de forma correta as razões seno, cosseno e tangente.

Figura 10: Exercício sobre razões trigonométricas

Questão 1: Com base nas relações de seno, cosseno e tangente em um triângulo retângulo, determine o que se pede com base no triângulo abaixo:



(a) $sen(\hat{A}) =$
(b) $cos(\hat{A}) =$
(c) $tg(\hat{A}) =$
(d) $sen(\hat{B}) =$
(e) $cos(\hat{B}) =$
(f) $tg(\hat{B}) =$

Fonte: Autoria própria, 2022.

Em seguida, no segundo problema, o aluno agora deveria saber identificar, dentre as opções de razões trigonométricas disponíveis, qual delas deveria ser aplicada para resolver a Questão 2, conforme ilustrado na Figura 11. Com isso, iríamos perceber a percepção do aluno em aplicar de forma correta o que foi aprendido na atividade.

Figura 11: Problema sobre identificação da razão trigonométrica

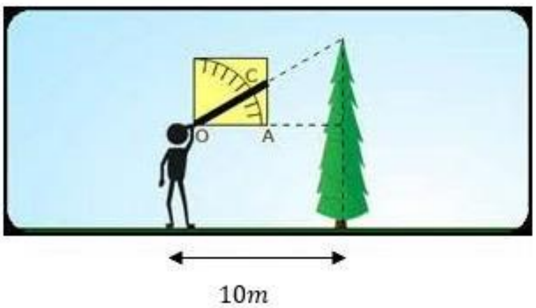
Questão 2: Jonofon deseja determinar a altura de uma árvore que se encontra perto de sua casa. Para isso ele faz uso de um aparelho que permite medir ângulos chamado de teodolito. Para obter a altura da árvore ele se afastou dela cerca de 10 metros e mediu o ângulo formado até o cume da árvore, conforme a figura abaixo. Sabendo que o ângulo formado $C\hat{O}A$ mediu 60°, qual era a altura da árvore. Detalhe, lembre-se que Jonofon tem $1{,}70m$ de altura.

DADOS:

$sen(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(60°) = \frac{1}{2}$

$tg(60°) = \sqrt{3}$



Fonte: Autoria própria, 2022.

E por fim, os alunos deveriam mostrar na Questão 3, conforme Figura 12, sua capacidade de ilustrar uma situação-problema e resolvê-la a partir das razões trigonométricas estudadas.

Figura 12: Problema de aplicação da razão trigonométrica

Questão 3: Um avião decola de um aeroporto formando um ângulo 45° com a horizontal. Após percorrer 1.200 km em linha reta mantendo a mesma inclinação inicial, a que altura ele está do solo?

DADOS:

$sen(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg(45°) = 1$

Fonte: Autoria própria, 2022.

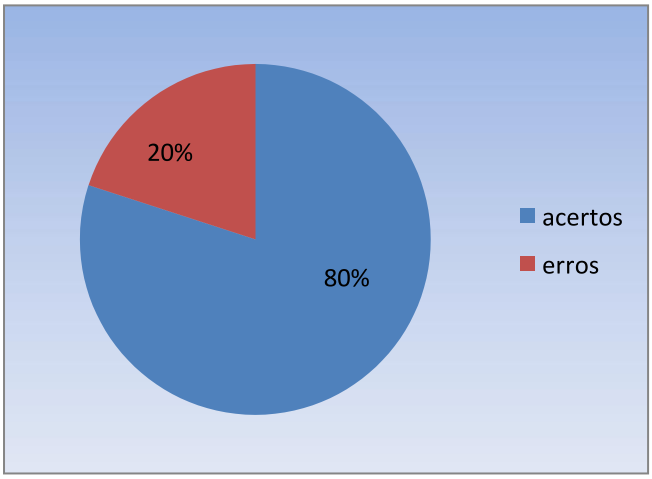
O objetivo era fazer com que o aluno fosse capaz de ilustrar por si só uma situação real e com isso obter a melhor razão trigonométrica a ser utilizada.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com respeito aos resultados obtidos, podemos afirmar que a atividade cumpriu os seus objetivos. Isso pode ser observado após a coleta das respostas dadas pelos alunos as três questões da terceira atividade.

Com respeito a Questão 1 que analisava a compreensão do uso das razões trigonométricas, foi obtido um percentual de 80% de acerto nas questões, conforme ilustra o Gráfico 1 abaixo. Revelando assim um bom aprendizado com relação a identificação das razões trigonométricas. O percentual dos 20% que cometeram algum erro, todos estavam ligados a identificação da tangente.

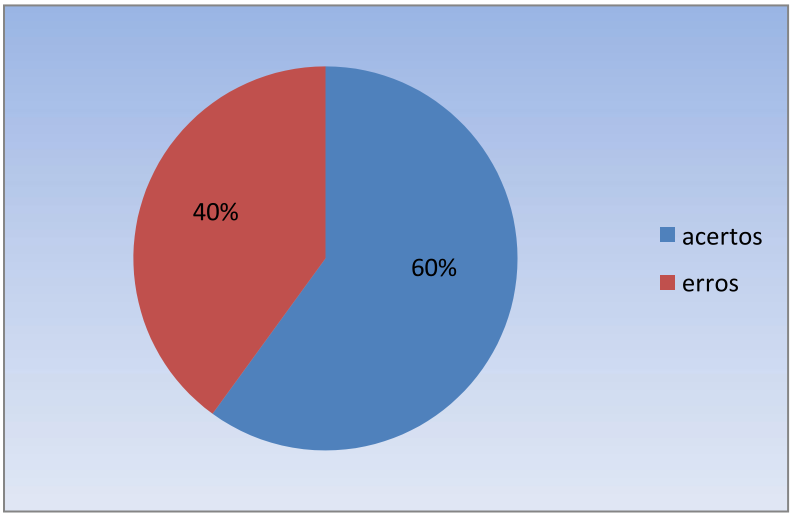
Gráfico 1: Percentual dos resultados da Questão 1 da atividade 3



Fonte: Autoria própria, 2022.

Com respeito a Questão 2 desta atividade houve uma redução no percentual de acertos, que foi de 60% conforme ilustra a Gráfico 2. Nessa questão os alunos identificar qual a razão trigonométrica correta a ser aplicada na resolução do problema. Embora a questão ilustre a imagem que facilitaria a compreensão, percebemos que houve uma certa dificuldade em perceber que deveriam utilizar a tangente do ângulo de 60°. Outros até perceberam que seria a tangente, mas esqueceram de acrescentar a resposta a altura do personagem para poder obter a altura correta da árvore.

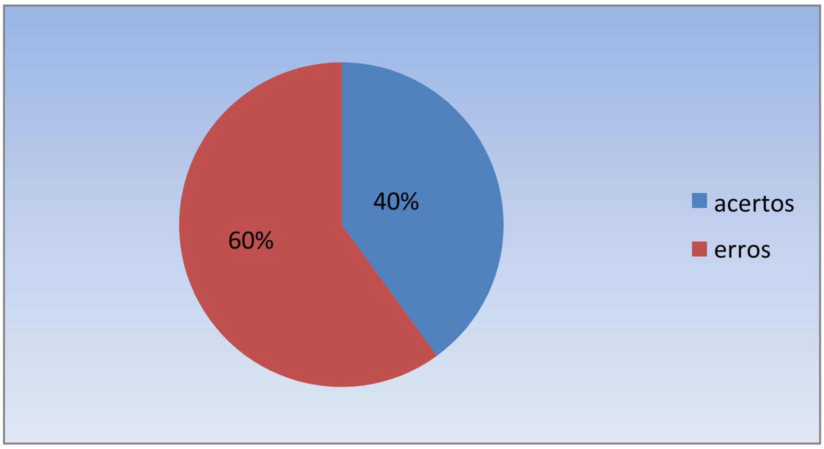
Gráfico 2: Percentual dos resultados da Questão 2 da atividade 3



Fonte: Autoria própria, 2022.

Na última questão, o índice de acertos diminuiu ainda mais, tendo em vista que na atividade o aluno deveria representar geometricamente a situação e tomar a decisão de aplicar a razão trigonométrica correta. Nesse item, o índice de acerto foi de 40%, conforme indicado no Gráfico 3. Muitos classificaram a última questão difícil, mostrando assim uma certa dificuldade em representar graficamente uma situação problema.

Gráfico 3: Percentual dos resultados da Questão 3 da atividade 3



Fonte: Autoria própria, 2022.

Por fim, foi aplicado um questionário avaliativo da atividade, ver APÊNDICE E, para que os alunos pudessem classificá-la como uma forma de retorno da eficácia desta atividade em seu aprendizado. No questionário 60% dos alunos classificaram a atividade como excelente e 40% classificaram como boa. Eles também deveriam indicar pontos positivos e negativos desta atividade. Como ponto positivo foi destacado o fato de observar em problemas práticos o conteúdo abordado. Não foi indicado por eles nenhum ponto negativo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Podemos considerar que a atividade aplicada conseguiu atingir os objetivos propostos por este trabalho, tendo em vista a boa aceitação da atividade por parte dos alunos da turma. Enxergamos que os resultados obtidos foram promissores, diante do fato de que a atividade foi aplicada em um único encontro. O que mostra a força da resolução de problemas como forma didática do ensino/aprendizagem em matemática.

Como pontos positivos podemos destacar o fato de que a atividade aplicada revela aos alunos que os conteúdos estudados possuem a sua finalidade no cotidiano de algumas áreas da ciência, como por exemplo a engenharia. Instigando assim que o saber matemático pode ser aplicado em diversas áreas da sociedade.

Sendo assim, esta atividade colaborou de forma significativa em revelar a necessidade do professor em enxergar novas maneiras de explorar um conteúdo, principalmente com respeito a mostrar aos alunos a importância dos conteúdos estudados no dia a dia da sociedade.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018

COSTA, Bruno; PEQUENO, Pedro; PEREIRA, Msc. CICERO. **Dificuldades de aprendizagem na Trigonometria**. In: Congresso Nacional de Educação. CONEDU, 6. Editora: Realise Disponível em:https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2019/TRABALHO_EV127_MD1_SA13_ID11326_24092019110045.pdf. Acesso: 24 maio 2022

GIL, Antonio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4ª Edição. São Paulo: Editora Atlas S.A, 2002.

LIMA, Hélio. **Proposta Metodológica de Ensino e Aprendizagem da Trigonometria na Educação Fundamental**. Orientadora: Prof.ª. Msc. Maria da Conceição Vieira Fernandes. 2015. 70 f. TCC (Graduação) – Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015. Disponível em: http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/8609/1/PDF%20-%20H%C3%A9lio%20Lima.pdf. Acesso em: 16 junho 2022.

SANTOS, Maylsa et al. **Ensinando e Aprendendo Trigonometria no Ensino Médio**. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12, 2016, São Paulo, p. 1-10. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7990_4369_ID.pdf. Acesso: 24 maio 2022

SANTOS, Welton Ramos Matias. **Estratégias Pedagógicas na Construção de Conceitos Trigonométricos**. Orientadora: Profª Dra Claudilene Gomes . 2013. 44 F. TCC (Graduação) - Licenciatura em Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/3710/1/WRMS06042017.pdf. Acesso: 24 maio 2022.

SOUSA, Airtoneltoon Magalhães. **Currículo de Trigonometria no Ensino Médio: Uma análise nos documentos oficiais, PNLD, PNLD e ENEM**. Orientador: Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho. 2020. 139 f. TCC (Graduação) – Curso de Matemática. Universidade Federam de Campina Grande, Campina Grande, 2020. Disponível: http://mat.ufcg.edu.br/profmat/wp-content/uploads/sites/5/2020/10/Dissertacao-Airtonelton-Versao-Final_compressed-1.pdf. Acesso em: 07 julho 2022.

SILVA, Osmair Melo**. Utilizando a metodologia de resolução de problemas no ensino de funções afim: um estudo de caso na escola estadual Professor Luiz Gonzaga A. Burity em João Pessoa – PB.** Orientadora: Profª Ms. Ruth Brito de Figueiredo Melo. 2014. 45 f. TCC (Graduação) – Curso de Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, João Pessoa, 2014. Disponível em: http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/9781. Acesso em: 28 nov 2022.

SOUSA, Juliana Malta. **Funções Trigonométricas e suas aplicações no cálculo de distâncias inacessíveis.** Orientador: Prof. Dr. Américo Lopez Galvez. 2017. 123 f. Tese – Curso de Matemática, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, São Carlos, 2017. Disponível em:

https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-03022017-113829/publico/JulianaMaltadeSousa_revisada.pdf. Acesso em: 07 julho 2022.

OLIVEIRA, Juliana Elvira Mendes. **A Trigonometria na Educação Básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas.** Orientadora: Marinês Guerreiro. 2013. 144 f. Dissertação - Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa - Minas Gerais, 2013. Disponível em: https://www.locus.ufv.br/bitstream/123456789/5886/1/texto%20completo.pdf. Acesso em: 16 junho 2022.

UBERTI, Gerson Luiz. **Uma Abordagem das aplicações Trigonométricas**. Orientador: Nereu Estanislau Burin. 2003. 54 f. TCC (Graduação) – Curso de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, Florianópolis, 2003. Disponível em: :https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97049/Gerson_Luis_Uberti.PDF?sequence=1. Acesso em: 07 julho 2022.

ZAGO, Glaciete J.; SCIANI, Walter Antonio. **Trigonometria**. Editora: Érica Ltda, 1997. Disponível em: https://www.jorgestreet.com.br/wp-content/uploads/2020/03/livro_trigonometria.pdf . Acesso em: 07 julho 2022.

APÊNDICE A – SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são semelhantes quando seus ângulos análogos são congruentes e os lados homólogos são proporcionais

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{matrix} \; e \; \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}\right)$$

Quando dois triângulos são semelhantes, a razão entre as medidas dos lados correspondentes é chamada razão de semelhança. Dos triângulos ABC e DEF visto anteriormente na figura 4, obtemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k, onde\ k\ \text{é}\ a\ razão\ de\ semelhança$$

O conceito de triângulos semelhantes fixou as seguintes condições para dois triângulos serem semelhantes: Três congruências de ângulos e Proporcionalidade dos três lados. Para assegurar que dois triângulos são semelhantes, é necessário mostrar que satisfazem a pelo menos um dos três critérios de semelhança (critério – LLL – lado, lado, lado), (critério – ALA – ângulo, lado, ângulo) ou (critério – AA – ângulo, ângulo). Porém, utilizamos o caso (AA – ângulo, ângulo), para demonstrar as razões trigonométricas no triângulo retângulo.

APÊNDICE B

ATIVIDADE 1

(Medindo alturas e sombras)

Questão 1: Dois alunos deverão medir o tamanho de suas sombras e de suas alturas anotando esses valores em uma tabela como o da figura abaixo.

	Altura	**Sombra**
Aluno 1		
Aluno 2		

Questão 2: Qual figura plana é formada pelo aluno e sua sombra?

Questão 3: Desenhe em uma folha de papel o triângulo retângulo que representa sua altura e sua sombra utilizando uma escala de 1:10, isto é, se sua altura for 1,72 metros e sua sombra 3,15 metros, o triângulo terá os lados perpendiculares com 17,2 centímetros e 31,5 centímetros.

APÊNDICE C

ATIVIDADE 2

(Conhecendo a tangente, o seno e o cosseno)

Questão 1: Calcule o quociente entre a sua altura e a sua sombra, utilizando duas casas decimais.

Questão 2: Porque os resultados foram aproximadamente iguais se as alturas e tamanhos de sombras são diferentes, ou seja, os triângulos dos alunos possuem medidas de lados distintas?

Questão 3: A partir do Teorema de Pitágoras, calcule a medida da hipotenusa do triângulo obtido na primeira atividade.

Questão 4: Utilizando o resultado encontrado para a hipotenusa, calcule os valores das razões indicadas na tabela abaixo:

	Aluno 1	**Aluno 2**
$\frac{altura}{hipotenusa}$		
$\frac{sombra}{hipotenusa}$		

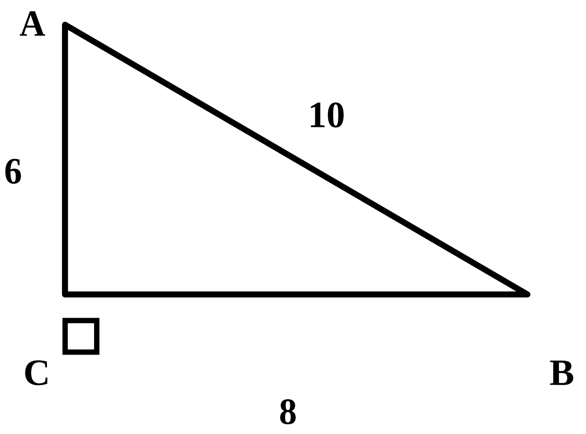
Questão 5: Discuta com seu colega se os valores encontrados são diferentes ou iguais? A que razões atribuem esse fato?

APÊNDICE D

ATIVIDADE 3

(Aplicando o que foi aprendido)

Questão 1: Com base nas relações de seno, cosseno e tangente em um triângulo retângulo, determine o que se pede com base no triângulo abaixo:



(a) $sen(\hat{A}) =$

(b) $cos(\hat{A}) =$

(c) $tg(\hat{A}) =$

(d) $sen(\hat{B}) =$

(e) $cos(\hat{B}) =$

(f) $tg(\hat{B}) =$

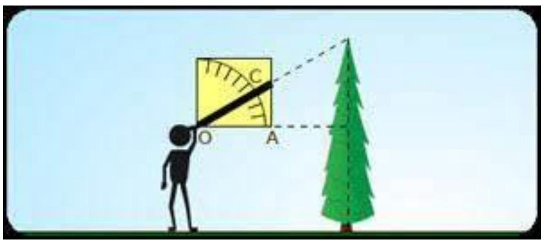
Questão 2: Jonofon deseja determinar a altura de uma árvore que se encontra perto de sua casa. Para isso ele faz uso de um aparelho que permite medir ângulos chamado de teodolito. Para obter a altura da árvore ele se afastou dela cerca de 10 metros e mediu o ângulo formado até o cume da árvore, conforme a figura abaixo. Sabendo que o ângulo formado $C\hat{O}A$ mediu $60°$, qual era a altura da árvore. Detalhe, lembre-se que Jonofon tem $1,70m$ de altura.

DADOS:

$sen(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(60°) = \frac{1}{2}$

$tg(60°) = \sqrt{3}$



$10m$

Questão 3: Um avião decola de um aeroporto formando um ângulo $45°$ com a horizontal. Após percorrer 1.200 km em linha reta mantendo a mesma inclinação inicial, a que altura ele está do solo?

DADOS:

$sen(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg(45°) = 1$

APÊNDICE E

QUESTIONÁRIO AVALIATIVO DA ATIVIDADE

1. Com relação a atividade, como vocês a classificariam quanto a ajudar na compreensão do conteúdo?

(a) RUIM

(B) BOA

(C) EXCELENTE

2. Que pontos positivos você poderia citar da atividade proposta?

____

____

____

____

3. Que pontos negativos, caso existam, você poderia citar da atividade?

____

____

____

____