UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Ruan Bosco Gomes de Brito

Sequência de Fibonacci: Uma perspectiva de abordagem para o estudo de Sequências

Rio Tinto – PB
2022

Ruan Bosco Gomes de Brito

Sequência de Fibonacci: Uma perspectiva de abordagem para o estudo de Sequências

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. José Laudelino de Menezes Neto

Rio Tinto – PB
2022

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

B862s Brito, Ruan Bosco Gomes de.
Sequência de Fibonacci: uma perspectiva de abordagem para o estudo de sequências / Ruan Bosco Gomes de Brito. - João Pessoa, 2022.
34 f. : il.

Orientação: José Laudelino de Menezes Neto.
TCC (Graduação) - UFPB/CCAE.

1. Indução Matemática. 2. Recorrência Linear de Segunda Ordem. 3. Número de Ouro. I. de Menezes Neto, José Laudelino. II. Título.

UFPB/CCAE CDU 51(043)

Elaborado por CATIA CRISTINA DA SILVA COSTA - CRB-15/837

Ruan Bosco Gomes de Brito

Sequência de Fibonacci: Uma perspectiva de abordagem para o estudo de Sequências

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Prof. José Laudelino de Menezes Neto

Aprovado em: 15 / 06 / 2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. José Laudelino de Menezes Neto - UFPB
Orientador

Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida - UFPB

Prof. Dr. José Fabrício Lima de Souza

Aos meus pais, irmãos, minha esposa e filha pelo incentivo, carinho e apoio irrestrito, propiciando vitória nesta minha caminhada.

RESUMO

O presente trabalho tem como tema a Sequência de Fibonacci. O trabalho é caracterizado como um estudo bibliográfico do tema. Iniciamos o estudo apresentando a sequência de Fibonacci a partir do problema da reprodução de coelhos, em seguida, abordamos as definições e exemplos de sequências. Trabalhamos com a definição de recorrência, estudando recorrência lineares de segunda ordem, para encontrar o termo geral da Sequência de Fibonacci. Abordamos o número de ouro e sua relação com a sequência de Fibonacci. Utilizando a indução matemática demonstramos algumas das propriedades da sequência de Fibonacci.

Palavras-chave: Indução Matemática. Recorrência Linear de Segunda Ordem. Número de Ouro.

ABSTRACT

The present work has as its main theme the Fibonacci sequence, also know as Fibonacci Number. The work is characterized as a bibliographic study of the theme. We start presenting the Fibonacci sequence from the classic problem of rabbit reproduction, then we study the definitions and examples of sequences. We introduce the definition of recurrence to study linear recurrences of order two, with the objective to find the general term of the Fibonacci Sequence. We show the relationship between the golden ratio and the Fibonacci sequence. Using mathematical induction we demonstrate some properties of the Fibonacci sequence.

Keywords: Mathematical induction; Linear recurrence of order two; Golden ratio.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Delimitação do Tema e Problema de Pesquisa

Neste trabalho abordaremos uma das sequências recorrentes nos estudos da área da matemática, a sequência de Fibonacci. Trata-se de uma sucessão numérica em que cada termo é igual a soma dos dois termos anteriores. Ela foi definida pelo matemático Leonardo de Pisa (1170 – 1250), conhecido como Fibonacci, sendo um dos grandes matemáticos italianos. Depois de uma viagem pelo Mediterrâneo, Fibonacci conheceu a Matemática Oriental descobrindo formas algébricas árabes e também se dispôs a conhecer as obras de Al-Khwarizmi. Ele deu continuidade a seus estudos, o que o levou a escrever o *Liber Abaci*, Livro do Ábaco, onde podemos encontrar o problema dos pares de coelhos. Analisando esse problema pode-se revelar a lógica para definir os elementos da sequência de Fibonacci. Essa sequência assim como o número de ouro pode ser estudados em diversos campos do conhecimentos como Biologia, Anatomia, Genética, Arte, dentre outros temas, evidenciando que a Matemática não está isolada de outras áreas do conhecimento.

Nas escolas públicas ou particulares, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – Brasil (2018), o estudo de Sequências é abordado nos ensinos fundamental e médio e contemplam diversos campos do conhecimento na área da Matemática tais como, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística assim como também das ciências da natureza podendo ser atribuídos a resolução de problemas que envolvam situações cotidianas.

Nessa pesquisa nos interessamos por conhecer um pouco da teoria da sequência de Fibonacci, além de diferentes conceitos e propostas de aplicações desta sequência no ensino, através de estudos em livros que abordem tal tema.

1.2 Justificativa

Esse trabalho tem como finalidade o aprimoramento profissional e a busca por conhecimentos que possam ser utilizados na prática docente com o intuito de colaborar para a formação de outros professores e interessados em Matemática. A pesquisa tem o propósito de reunir informações para facilitar o acesso ao conteúdo da sequência de Fibonacci e suas relações com outros temas.

Dentre diversas razões pelas quais o estudo da sequência de Fibonacci e o número de ouro é considerado interessante, está o fato da ligação com fenômenos naturais e artísticos, a exemplo da forma da concha de um molusco, à disposição das folhas nos galhos, a reprodução dos coelhos, a pintura da Mona Lisa. Esses fenômenos nos quais pode-se traçar uma lógica baseada nos estudos de

Leonardo de Pisa, podem, por exemplo, ser usados como base para formulação de problemas que possam ser utilizados na Educação Básica como proposta de ensino de sequências.

A BNCC vem modificando os processos de ensino e de aprendizagem no Brasil inclusive na área da Matemática, desfazendo a proposta de ensino tradicionalmente mecanizado para um que possa trazer a possibilidades de que o aluno tenha a autonomia de produzir o seu próprio conhecimento. No que se refere ao ensino de sequências é importante utilizar a sequência de Fibonacci como um exemplo que evidencie como se dá a construção de uma sequência e seus conceitos.

Para explorar as potencialidades desse conteúdo pode-se propor a resolução de problemas que envolvam a aplicabilidade da lógica dessa sequência tanto na Matemática quanto nas demais áreas do conhecimento, pois, é necessário que o professor se desprenda dos métodos tradicionais e mecânicos.

De acordo com Brasil (1997. P.32) "Tradicionalmente os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicações de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos."

Diante disso, utilizar exemplos que contextualizam a sequência de Fibonacci em diversos campos do conhecimento, pode ser uma estratégia para fixação do ensino de Sequências numéricas dando a possibilidade de compreensão em relação aos termos, a lógica, as razões dentre outros conceitos. Enfim, identificar padrões. Não utilizando problemas que exijam exclusivamente cálculos e fórmulas mas principalmente interpretação e análise de dados e informações.

> os padrões permitem que os estudantes construam uma imagem mais positiva da Matemática porque apelam fortemente a que desenvolvam o seu sentido estético e a criatividade, estabeleçam várias conexões entre os diferentes temas, promovam uma melhor compreensão das suas capacidades matemáticas, desenvolvam a capacidade de classificar e ordenar informações e compreendam a ligação entre a Matemática e o mundo em que vivem. (VALE et al. 2011, p. 10)

Em grande parte dos livros didáticos, a sequência de Fibonacci é exemplificada de forma sucinta através de exemplos básicos como o caso dos coelhos que originalmente foi a primeira das observações de Leonardo de Pisa. Esse e outros problemas são descritos a cada passo para que o professor e o aluno possam enxergar a lógica da formação da sequência. Ampliamos o escopo do trabalho para temas que vão além das sequências de Fibonacci, como é o caso da Indução Matemática e a definição formal de sequências. Porém, ressaltamos que esses temas tem interrelação com nosso objeto de estudo, além de proporcionar o conhecimento, o uso e o ensino de mais ferramentas matemáticas.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Conhecer e elaborar o conteúdo sobre sequência de Fibonacci visando construir uma prática eficaz do ensino de Sequências de um modo geral, bem como assuntos correlacionados.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Definir sequências de modo geral e algumas de suas propriedades;
- Definição e propriedades das sequências definidas por recorrência;
- Estudar a correlação entre sequência de Fibonacci e o método de Indução Matemática.

2 ENSINO DE SEQUÊNCIAS

Nesta Seção, apresentamos o que a BNCC fala sobre o ensino de sequências no ensino básico e os motivos de tal assunto fomentar a interdisciplinaridade.

2.1 Ensino de Sequências na BNCC

Atualmente, o professor da Educação Básica tem como referência para o seu trabalho documentos norteadores como a BNCC, que apresenta caminhos e possibilidades de aprimoramento do conhecimento dos alunos através do desenvolvimento de competências gerais, específicas e de habilidades apontadas para cada segmento do ensino. Ela enfatiza a correlação entre o conhecimento e temas presentes no entorno social e cultural dos alunos.

Nos anos finais do ensino Fundamental as Sequências numéricas devem ser abordadas através da aplicação dos conceitos estudados anteriormente nos anos iniciais. Porém nessa fase, a Base faz uma junção do estudo de Sequências e de Álgebra sugerindo para a prática docente o uso de tecnologias. Esse norteamento para o processo educativo destaca a necessidade dos alunos desenvolverem o senso argumentativo, lógico e o pensamento computacional. Segundo o documento BNCC. Os Processos Matemáticos de resolução de problemas e de investigação através da construção de modelos são uma importante estratégia para a aprendizagem no Ensino fundamental.

> Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (BRASIL, 2018 p.266),

Com relação ao Ensino Médio, na BNCC o estudo de Sequências está associado à resolução de problemas através da construção de modelos. Sugerindo o uso de tecnologias para análise e interpretação dos contextos como de acordo com a Competência 3, citada a seguir:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos analisando a possibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir uma argumentação consistente (BRASIL, 2018, p.535)

Essa competência faz referência a habilidade que associa o estudo de Sequências até então no Ensino Fundamental ligado ao eixo temático Números com a Álgebra fazendo uma ligação dos problemas que envolvem Matemática financeira e Funções, a exemplo da habilidade EM13MAT304:

> (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

Podemos relacionar o problema dos coelhos apresentado com habilidades que estão inseridas na BNCC. Considerando a unidade temática de Números, identificamos no Ensino Fundamental (6º e 7º ano)

- (EF07MA06) - Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.
- (EF07MA07) - Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.

Considerando a unidade temática de Álgebra, identificamos no Ensino Fundamental as seguintes habilidades relacionadas:

- (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
- (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
- (EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.

Considerando a unidade temática Números e Álgebra, identificamos no Ensino Médio as seguintes habilidades relacionadas:

- (EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.
- (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

Embora as habilidades para o Ensino Médio na BNCC não estejam dispostas de forma que se defina em quais anos elas devam ser trabalhadas, é possível perceber que no ensino de Sequências existe a necessidade de analisar problemas que relacionem as progressões com situações de outros campos da matemática como a Matemática financeira e o estudo de funções. Vemos que a orientação para o ensino de Sequências no Ensino Médio procura associar o conteúdo à sua aplicação.

2.2 Interdisciplinaridade no ensino de Matemática

A relação entre ensino e aprendizagem deve ser alimentada por práticas e metodologias que se voltem às necessidades, realidades e contextos de todos envolvidos no processo educativo. Diante disso a interdisciplinaridade pode ser considerada uma ponte para que o professor explore as competências intelectuais, pessoais e sociais dos alunos, o que pode trazer evidentes benefícios para a Educação. De acordo com Fazenda, a interdisciplinaridade;

> Passa-se de uma relação pedagógica baseada na transmissão do saber de uma disciplina ou matéria, que se estabelece segundo um modelo hierárquico linear, a uma relação pedagógica dialógica na qual a posição de um é a posição de todos. Nesses termos, o professor passa a ser o atuante, o crítico, o animador por excelência (FAZENDA, 1979, p.48-49).

Os novos formatos que o ensino de Matemática vem tomando no atual cenário da educação trazem a preocupação em demonstrar para os estudantes a importância dos conhecimentos estudados para a compreensão de situações de diferentes áreas como a Geografia, Química, Biologia, Física, Economia e Arte. Alguns conceitos Matemáticos podem ser apresentados através de problemas que contemplem questões dessas áreas de conhecimento que podem ser exemplificadas através de situações cotidianas. Diante disso, a interdisciplinaridade é uma proposta pedagógica que integra todos os campos de conhecimento e liga os saberes que já não estarão mais isolados, limitados e sem contexto. Dentre os planos de ação da BNCC para a aprendizagem está:

> Decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem (BRASIL, 2017, p.12).

Os problemas que envolvem a sequência de Fibonacci são um caminho importante para a introdução ao estudo de sequências numéricas apresentando a sua aplicação em outras áreas. Podemos então descrevê-los na Educação Básica associando-os às habilidades da BNCC para cada segmento de ensino. Com isso pode-se desenvolver o instinto investigativo, a organização de informações e a compreensão da importância do conhecimento que está sendo transmitido para o desenvolvimento de competências pessoais e sociais do aluno.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 O Livro Liber Abaci

O livro Liber Abaci (o Livro do Ábaco ou do Cálculo), escrito por Fibonacci em 1202, demonstram-se métodos de cálculo que aplicam algarismos indianos. Em 1228 o livro foi republicado após uma revisão. O livro contém problemas que envolvem álgebra e aritmética, contemplando a abstração da Matemática, dividido em três partes onde a primeira apresenta problemas aritméticos nos 7 primeiros capítulos, na segunda parte apresenta matemática voltada a questões comerciais com técnicas que pudesse compartilhar com seus compatriotas e, por fim, diversos problemas dentre os quais o mais famoso é o problema do casal de coelhos que se relaciona com o tema deste trabalho. Posteriormente essa obra foi utilizada por outros estudiosos, tornando-se um dos livros mais vendidos entre suas publicações. Nos dias atuais os termos matemáticos que foram introduzidos no livro ainda são comuns, como por exemplo as expressões fatores de um número ou fatores de uma multiplicação, outras expressões bem conhecidas são numerador e denominador.

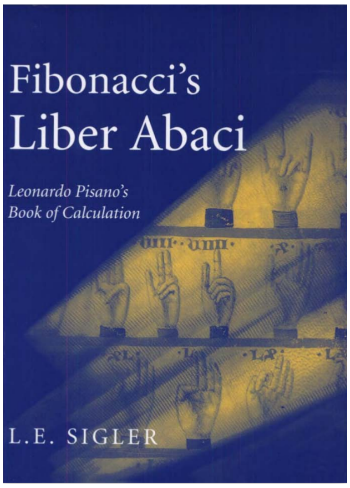

Figura 1: Livro Liber Abaci
Fonte:[13]

3.2 Sequência de Fibonacci

Um dos problemas tratados no libro Liber Abaci é o problema dos coelhos que detalha uma sequência na reprodução destes animais. O problema é apresentado da seguinte forma:

Seja um par de coelhos recém-nascidos, sendo um macho e uma fêmea, colocados em um campo. Os coelhos são capazes de reproduzir com a idade de um mês e têm um período de gestação de um mês, de forma que, no final do segundo mês, uma fêmea produz um par de coelhos. Supondo que os coelhos nunca morram e que cada fêmea continue reproduzindo exatamente um macho e uma fêmea a partir do final de seu segundo mês, quantos pares teríamos em um ano?

Solução: Segue abaixo a demonstração do processo de reprodução dos coelhos, sendo definida em cada mês:

- No 1º mês, temos apenas um par de coelhos (ainda filhotes).
- No 2º mês, os filhotes viraram adultos, o casal acasala. Continuamos com um par de coelhos.
- No 3º mês, nasce um par de filhotes. Logo, passamos a contar com dois casais nesse mês (um par de adultos e um par de filhotes).
- No 4º mês, o par inicial gera o seu segundo par de coelhos, ficando um total de três pares de coelhos (o par inicial, o primeiro par de filhotes, agora adultos, e o segundo par de filhotes).
- E continuando.

Para identificar como esta situação ficaria mensalmente, foi construído um gráfico e uma tabela. Assumindo que um par de coelhos bebês (B) se tornam adultos (A) em período de um mês reprodutores, então podemos desenvolver:

Na Tabela 1, mostra a solução até o 12º mês, onde haverá 144 pares de coelhos.

Mês	Nº de pares de adultos (A)	Nº de pares de bebês (B)	Total de Pares
Janeiro	0	1	1
Fevereiro	1	0	1
Março	1	1	2
Abril	2	1	3
Maio	3	2	5
Junho	5	3	8
Julho	8	5	13
Agosto	13	8	21
Setembro	21	13	34
Outubro	34	21	55

Novembro	55	34	89
Dezembro	89	55	144

Tabela 1: Quantidade de coelhos referente ao mês.

A Figura 2 mostra a reprodução dos coelhos até sexto mês.

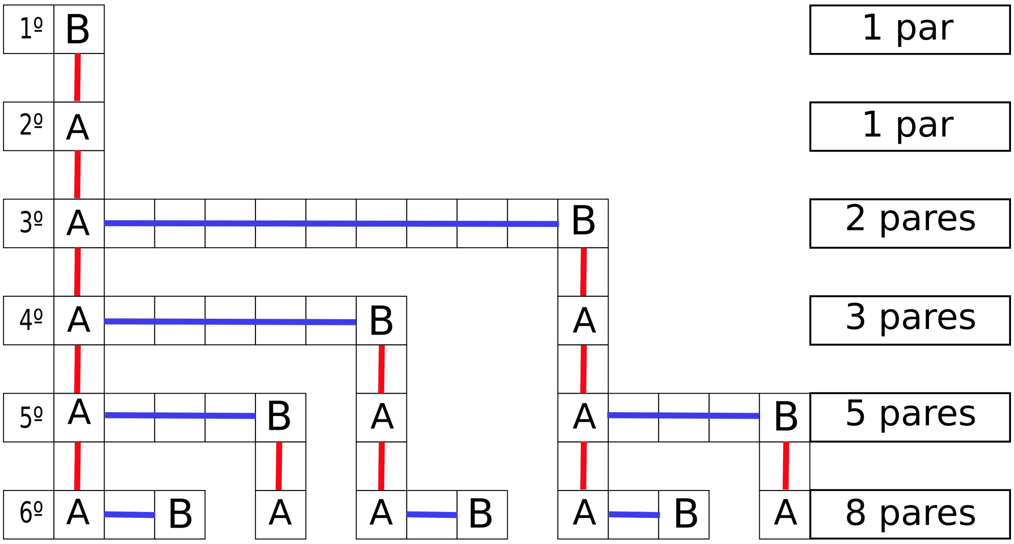

Figura 2: Reprodução dos coelhos

Figura feita pelo autor usando o software Inkscape.

Com este problema gerou uma sequência de números:

Representando a lógica da questão, obteremos uma sequência numérica (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …). O resultado da questão é igual a 144. Esses números obtido nesta sequência é conhecido hoje como os números de Fibonacci.

Representando *n* como quantidade de mês, então teremos F_n representa o número de pares de coelhos. Observando os dois primeiros meses, temos

$$F_1 = F_2 = 1$$

sendo que todo mês, o número de coelhos é soma de dois meses antecessores. Então, podemos definir uma relação de recorrência da seguinte forma.

Segundo o livro Fundamentos de matemática discreta de David J. Hunter [7]

Definição 1. “Os números de Fibonacci F_n satisfazem a relação de recorrência a seguir:

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n=1 \text{ e } n=2 \\ F_{n-1}+F_{n-2} & \text{se } n>2. \end{cases}$$

A sequência $F_1, F_2, F_3, \ldots$ é chamada de sequência de Fibonacci.

A segunda parte dessa definição, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, é a parte recursiva, pois a definição se refere a ela mesma. O termo F_{n-1} representa o número de pares de coelhos presentes no mês anterior. O termo F_{n-2} representa o número de novos coelhos – igual ao número de pares de coelhos presentes dois meses atrás.”

Considerando essa definição, sua generalização é dada por:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots, F_{n-2}, F_{n-1}, F_n, \ldots,$$

Essa sequência de números naturais, é chamada *Sequência de Fibonacci*, cujos todos os seus termos são chamados de *Números de Fibonacci.*

3.3 Biografia de Fibonacci

Leonardo de Pisa foi um matemático italiano, nascido na cidade portuária de Pisa, Itália por volta do ano 1175. Conhecido como está registrado na história, Fibonacci, devido ao fato de Fibonacci ser um diminutivo de fillius Bonacci, provavelmente querendo dizer filho de Bonacci. Seu pai Guilielmo Bonacci que tornou-se funcionário público na alfândega da República de Pisa, ficou ligado aos negócios mercantis, principalmente nas regiões do Mediterrâneo, onde seu filho Leonardo se juntou a ele pouco tempo depois da sua chegada, para desenvolver habilidades de calcular, para se tornar um comerciante. As habilidades adquiridas foram de grande importância, pois, em cada república tinha suas próprias unidades de dinheiro, por meio disso os comerciantes tinham que se aperfeiçoar no calculo em si. Essa influência e a participação do seu pai impulsionaram a adquirir um gosto pela matemática, principalmente pela aritmética.

Figura 3: Leonardo Fibonacci
Fonte:[11]

Sua primeira relação com as nove figuras indianas aconteceu na Bugia, essas figuras se chamavam Algarismos hindus, depois da criação dessas figuras muitos anos se passaram e foi desenvolvida a numeração decimal, que se acrescentou o que temos o “sinal 0 que os árabes chamam de zephyr”. Os indianos criaram os símbolos e desenvolveram as regras, contudo foi os árabes que melhoram e aperfeiçoaram. Fibonacci declarou seu fascínio pelos métodos de cálculo utilizando esses numerais, aplicando-os no seu mais famoso livro, Liber Abaci, que introduziu o sistema decimal Hindu-Árabe. Fibonacci foi influenciado por um professor muçulmano, que o instruiu e lhe deu a oportunidade de ser apresentado a obra de Al-Khwarismi (780.dc – 850.dc), um livro sobre álgebra intitulado Hisab al-jabr w’al muqabâlah. Por meio dessa experiência adquiriu numerosas informações aritméticas e algébricas.

Fibonacci fez diversas viagens para Grécia, Síria, Sicília, Egito e Provença, onde se reuniu com matemáticos para construir conhecimentos sobre a matemática dos respectivos locais. Com todo o conhecimento adquirido com o tempo, Fibonacci escreveu cinco obras, sendo quatro livros e uma que foi preservada como carta, os livros são o Liber Abaci (1202), Practica geometrie (1220), Flos (1225) e Liber quadratorum (1225), entre esses livros que foram escritos boa parte deles foram perdidos durante a história.

3.4 Sequências

Uma sequência é uma estrutura discreta usada para representar uma lista ordenada. Por exemplo, 1, 2, 3, 5, 8 é uma sequência com cinco termos e 1, 3, 9, 27, 81, … sequência infinita.

Aqui, o interesse é somente aplicar e estudar as sequências infinitas.

Pelo livro de Elon Lages [8], “Uma sequência de números reais é um função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural *n* um número real x_n, chamado o *n*-ésimo termo da sequência”, x_n também é chamado de termo geral da sequência.

Escrevemos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n), para indicar a sequência *x*. onde x_1 é o primeiro termo, x_2 é segundo termo, x_3 é terceiro, e assim sucessivamente.

Exemplos de sequências, do livro Curso de Análise [15]

Exemplo 1. $x_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$; isto define a sequência constante $(1,1,\ldots,1,\ldots)$;

Exemplo 2. $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observando a sequência dos números naturais percebesse que os termos são dispostos em ordem crescente, envolvendo um infinito número de termos. É óbvio, que não podemos listar todos os termos de uma sequência infinita, por isso, são mostrados apenas alguns termos. Sequência $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$

Exemplo 3. $x_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos a sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$.

Às vezes uma sequência de poucos termos indica sem deixar dúvidas a regra ou fórmula que determina o termo geral. Essa expressão nos permite calcular o valor de qualquer termo conhecendo-se apenas a sua posição *n*. Mas muitas vezes fica complicado ou até impossível determinar o termo geral, através de um exemplo numérico formado por alguns termos. Na sequência de Fibonacci, definimos seu termo geral utilizando recorrência que vai ser estudado na próxima seção.

3.5 Recorrências

Muitas sequências são definidas recursivamente, ou seja. Por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função de um antecessor imediato, ou de vários antecessores imediatos.

Exemplo 4. A sequência (x_n) dos números naturais ímpares 1, 3, 5, 7, … pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + 2 (n \geq 1), com\, x_1 = 1.$

Exemplo 5. Qualquer progressão aritmética (x_n) de razão r e primeiro termo a pode ser definida por $x_{n+1}=x_n+r(n\geq 1)$, com $x_1=a$.

Exemplo 6. Qualquer progressão geométrica (x_n) de razão q e primeiro termo a pode ser definida por $x_{n+1}=q\cdot x_n(n\geq 1)$, com $x_1=a$.

É fácil ver que uma recorrência, por si só, não define a sequência. Por exemplo, a recorrência do **Exemplo 4,** $x_{n+1}=x_n+2$, é satisfeita não apenas pela sequência dos números ímpares, mas por todas as progressões aritméticas de razão 2. Para que a sequência fique perfeitamente determinada é necessário também o conhecimento do primeiro termo, ou dos termos iniciais.

Observe que, nos **Exemplos 4, 5** e **6** temos recorrências de primeira ordem, isto é, nas quais cada termo é expresso em função do antecessor imediato.

3.5.1 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Uma recorrência de primeira ordem expressa x_{n+1} em função de x_n. Ela é dita linear se, e somente se, essa função for do primeiro grau.

Exemplo 8. As recorrências $x_{n+1}=2x_n-n^2$ e $x_{n+1}=nx_n$ são lineares e a recorrência $x_{n+1}=x_n^2$ não é linear. As duas últimas são ditas homogêneas, por não possuírem termo independente de x_n.

Resolver uma recorrência, consiste em determinar x_n apenas em função de *n*. Não há grandes dificuldades na resolução de uma recorrência linear homogênea de primeira ordem, conforme mostram os exemplos a seguir.

Exemplo 9. Resolva a recorrência $x_{n+1}=nx_n$, $x_1=1$.

Solução. Temos

$$\begin{gathered} x_1=1 \\ x_2=1\cdot x_1 \\ x_3=2x_2 \\ x_4=3x_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_n=(n-1)x_{n-1}. \end{gathered}$$

Daí, multiplicando, obtemos $x_n = (n-1)!\, x_1$. Como $x_1 = 1$, temos $x_n = (n-1)!$

3.5.2 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Trataremos das recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, isto é, recorrências da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0.$$

Suporemos sempre $q \neq 0$, pois se $q = 0$, a recorrência seria, na realidade, uma recorrência de primeira ordem.

A cada recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, da forma acima, associaremos uma equação do segundo grau, $r^2 + pr + q = 0$, chamada equação característica. A nossa suposição preliminar de que $q \neq 0$ implica que 0 não é raiz da equação característica.

O teorema a seguir mostra que se as raízes da equação característica são r_1 e r_2, então qualquer sequência da forma $a_n = C_1 (r_1)^n + C_2 (r_2)^n$ é solução da recorrência, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Teorema 1. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então $a_n = C_1 (r_1)^n + C_2 (r_2)^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Demonstração. Substituindo $a_n = C_1 (r_1)^n + C_2 (r_2)^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos, agrupando convenientemente os termos,

$$C_1 (r_1)^n \left((r_1)^2 + pr_1 + q\right) + C_2 (r_2)^n \left((r_2)^2 + pr_2 + q\right)$$
$$= C_1 (r_1)^n 0 + C_2 (r_2)^n 0 = 0.$$

Exemplo 10. A equação $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0$ tem $r^2 + 3r - 4 = 0$ como equação característica. As raízes da equação característica são 1 e – 4. De acordo com o **Teorema 1**, todas as sequências da forma $a_n = C_1 1^n + C_2 (-4)^n$ são soluções da recorrência.

O teorema a seguir mostra que, se $r_1 \neq r_2$, todas as soluções da recorrência têm a forma apontada no **Teorema 1.**

Teorema 2. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1(r_1)^n + C_2(r_2)^n$, C_1 e C_2 constantes.

Demonstração. Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determinemos constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistemas de equações

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 (r_1)^2 + C_2 (r_2)^2 = y_2 \end{cases} ,$$

isto é,

$$C_1 = \frac{(r_2)^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \text{ e } C_2 = \frac{r_1 y_2 - (r_1)^1 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}.$$

Isso é possível pois $r_1 \neq r_2$ e $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Afirmamos que $y_n = C_1 (r_1)^n + C_2 (r_2)^n$ para todo n natural, o que provará o teorema. Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1 (r_1)^n - C_2 (r_2)^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo *n*. Temos

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1 (r_1)^n ((r_1)^2 + pr_1 + q) - C_2 (r_2)^n ((r_2)^2 + pr_2 + q).$$

O primeiro parêntese é igual a zero porque y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0;$ os dois últimos parênteses são iguais a zero porque r_1 e r_2 são raízes de $r_2 + pr + q = 0$. Então $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$.

Além disso, como $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$ e $C_1 (r_1)^2 + C_2 (r_2)^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$. Mas, se $z_{n+2} + pz\, n + 1 + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, entao $z_n = 0$ para todo n.

Exemplo 12. Vamos determinar as soluções da recorrência

$$x_{n+2}+3x_{n+1}-4x_n=0.$$

A equação característica $r^2+3r-4=0$, tem raízes 1 e – 4. De acordo com os **Teoremas 1 e 2,** as soluções da recorrência são as sequências da forma $a_n=C_1 1^n+C_2(-4)^n$, isto é $a_n=C_1+C_2(-4)^n$, onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias definidas a partir dos termos iniciais.

3.5.3 Termo Geral da Sequência de Fibonacci.

Determinemos o número de Fibonacci F_n definido por

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n,\ \text{com}\ F_1=F_2=1.$$

A equação característica é $r^2-r-1=0$ e as suas raízes são dadas por

Usando a fórmula de Bhaskara, podemos encontrar as raízes da equação característica.

$$r=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}\Rightarrow\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \text{e}\ r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Então,

$$F_n=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Para determinar C_1 e C_2, podemos usar $F_1=F_2=1$, mas é mais conveniente usar $F_0=0$ e $F_1=1$.

Obtemos o sistema

$$\begin{gathered}C_1+C_2=0\\ C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}+C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1\end{gathered}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $C_1=-C_2=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Daí:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

isto é,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

3.6 Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro

Nesta seção, vamos demonstrar a relação entre os números de Fibonacci e a proporção áurea, também chamada de número de ouro.

3.6.1 Número de ouro

O número de ouro é um número irracional. Símbolo da proporcionalidade, se encontra na natureza, nas maiores construções, na música e na arte.

O número de ouro é representado pela letra φ, homenagem a Fídias (Phideas) pelo matemático americano Mark Barr, um grande escultor grego, suas maiores realizações foram o “Partenon de Atenas” e o “Zeus” no templo de Olímpia, em muitos dos seus trabalhos foram usado o número de ouro.

Geometricamente, o Número de Ouro surge a partir de uma relação entre a divisão de pedaços de um segmento.

Tomando um segmento AB, tal que o comprimento de *AB* seja igual a $x \in \mathbb{R}$. A partir de um ponto *C*, sobre o segmento *AB*, dividimos este segmento em duas partes, *AC* e *CB.*

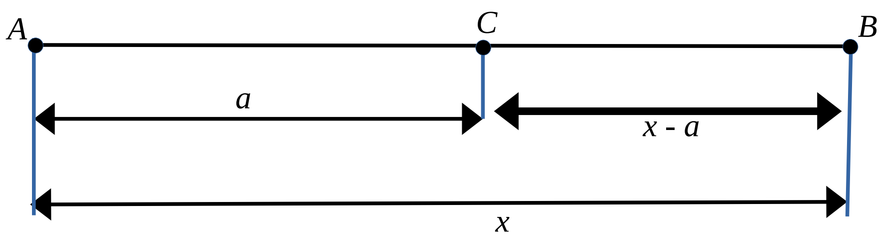

Figura 4

feita pelo autor usando o software LibreOffice Writer.

Seja $a \in \mathbb{R}$ o valor do comprimento da parte maior desta divisão do segmento *AB*, digamos *AC*, enquanto *CB* é a parte menor. Tomamos esta divisão do segmento *AB* em duas partes, *AC* e *CB*, de forma que satisfaça a seguinte relação.

$$\frac{\text{Parte maior}}{\text{parte menor}}=\frac{\text{Segmento todo}}{\text{Parte maior}}$$

Obtemos:

$$\frac{a}{x-a}=\frac{x}{a}$$

Aplicando propriedade distributiva e invertendo a igualdade.

$$a^2=x(x-a)$$

Obtemos a equação do 2º grau.

$$x^2-xa-a^2=0$$

Resolvendo a equação, temos:

$$x=\frac{-(-a)\pm\sqrt{(a)^2-4\cdot 1\cdot(-a^2)}}{2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4a^2}}{2}=\frac{a\pm\sqrt{5a^2}}{2}=\frac{a\pm a\sqrt{5}}{2}=a\,\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Desconsiderando o valor negativo, temos:

o número $\frac{x}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}6180399\ldots$ é o Número de Ouro φ.

3.6.2 Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.

Na sequência de Fibonacci, vamos calcular a razão entre o termo F_{n+1} dividido pelo seu antecessor F_n, ou seja $\frac{F_{n+1}}{F_n}$. Para obter os valores dos termos da sequência de Fibonacci, usamos o termo geral F_n obtido na Subseção 3.5.3.

$\frac{F_2}{F_1}=\frac{1}{1}=1$	$\frac{F_9}{F_8}=\frac{34}{21}=1{,}619047$
$\frac{F_3}{F_2}=\frac{2}{1}=2$	$\frac{F_{10}}{F_9}=\frac{55}{34}=1{,}61764705882352941$
$\frac{F_4}{F_3}=\frac{3}{2}=1{,}5$	$\frac{F_{11}}{F_{10}}=\frac{89}{55}=1{,}618$

$\frac{F_5}{F_4}=\frac{5}{3}=1{,}66667$	$\frac{F_{12}}{F_{11}}=\frac{144}{89}=1{,}6179775280898876404494382022471\ldots$
$\frac{F_6}{F_5}=\frac{8}{5}=1{,}6$	$\frac{F_{13}}{F_{12}}=\frac{233}{144}=1{,}61805$
$\frac{F_7}{F_6}=\frac{13}{8}=1{,}625$	$\frac{F_{14}}{F_{13}}=\frac{377}{233}=1{,}6180257510729613733905579399142\ldots$
$\frac{F_8}{F_7}=\frac{21}{13}=1{,}61538$	$\frac{F_{15}}{F_{14}}=\frac{610}{377}=1{,}618037135$

Tabela 2

A Tabela 2 mostra que, quanto maior o *n*, os valores de $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ se aproximam de um número específico 1,6180… , sendo este o valor do número de ouro, φ, descrito na secção 3.6.1.

Também poderíamos ter considerado a proporção dos números do Sequência de Fibonacci na ordem invertida.

$\frac{F_n}{F_{n+1}}$	
$\frac{F_1}{F_2}=\frac{1}{1}=1{,}000000000$	$\frac{F_9}{F_{10}}=\frac{34}{55}=0{,}618181818$
$\frac{F_2}{F_3}=\frac{1}{2}=0{,}500000000$	$\frac{F_{10}}{F_{11}}=\frac{55}{89}=0{,}617977528$
$\frac{F_3}{F_4}=\frac{2}{3}=0{,}666666667$	$\frac{F_{11}}{F_{12}}=\frac{89}{144}=0{,}618055556$
$\frac{F_4}{F_5}=\frac{3}{5}=0{,}600000000$	$\frac{F_{12}}{F_{13}}=\frac{144}{233}=0{,}618025751$
$\frac{F_5}{F_6}=\frac{5}{8}=0{,}625000000$	$\frac{F_{13}}{F_{14}}=\frac{233}{377}=0{,}618037135$
$\frac{F_6}{F_7}=\frac{8}{13}=0{,}615384615$	$\frac{F_{14}}{F_{15}}=\frac{377}{610}=0{,}618032787$
$\frac{F_7}{F_8}=\frac{13}{21}=0{,}619047619$	$\frac{F_{15}}{F_{16}}=\frac{610}{987}=0{,}618034448$

$\frac{F_8}{F_9}=\frac{21}{34}=0{,}617647059$	

Tabela 3

Observamos que os números da Tabela 3 se relacionam com os números da Tabela 1 da seguinte forma: $\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{F_{n-1}}{F_n}+1$, e esta é outra forma de se obter o Número de Ouro a partir da sequência de Fibonacci.

3.7 Indução Matemática

Uma propriedade essencial do conjunto $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ de inteiros positivos segue abaixo:

Princípio de Indução Matemática: Seja P uma proposição definida sobre os inteiros positivos $\mathbb{N}$; isto é, $P(n)$ é verdadeira ou falsa para $n\in\mathbb{N}$. Suponha que P tem as duas propriedades a seguir:

(i) $P(1)$ é verdadeira.
(ii) $P(k+1)$ é verdadeira sempre que $P(k)$ for verdadeira.

Então P é verdadeira para todo inteiro positivo $n\in\mathbb{N}$.

Não demonstraremos esse princípio. De fato, ele geralmente é dado como um dos axiomas quando $\mathbb{N}$ é desenvolvido axiomaticamente.

Exemplo 13. Seja P a proposição de que a soma dos primeiros n números ímpares é n^2; ou seja,

$$P(n):1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

(O k-ésimo número ímpar é $2k-1$, e o próximo número ímpar é $2k+1$.)Observe que $P(n)$ é verdadeira para $n=1$; a saber,

$$P(1):1=1^2$$

Assumindo que $P(k)$ é verdadeira, adicionamos $2k+1$ a ambos os lados, obtendo

$$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

o que é $P(k+1)$. Em outras palavras, $P(k+1)$ é verdadeira quando $P(k)$ é verdadeira. Pelo Princípio de Indução Matemática, P é verdadeira para todo n.

Exemplo 14. Demonstre a proposição $P(n)$ que afirma que a soma dos primeiros n inteiros positivos é $\frac{1}{2}n(n+1)$; ou seja,

$$P(n)=1+2+3+...+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

A proposição vale para $n=1$, uma vez que:

$$P(1):1=\frac{1}{2}(1)(1+1)$$

Assumido que $P(k)$ é verdadeira, somamos $k+1$ em ambos os lados de $P(k)$, obtendo

$$\begin{aligned}1+2+3+...+k+(k+1)&=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\&=\frac{1}{2}[k(k+1)+2(k+1)]\\&=\frac{1}{2}[(k+1)(k+2)]\end{aligned}$$

que resulta em $P(k+1)$. Isto é, $P(k+1)$ é verdadeira quando $P(k)$ é verdadeira. Pelo Princípio de Indução, P é verdadeira para todo n.

Exemplo 15. Prove a seguinte proposição para $n\geq 1$:

$$P(n):1+2+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$$

$P(0)$ é verdadeira, uma vez que $1=2^1-1$. Assumindo que $P(k)$ é verdadeira, somamos 2^{k+1} a ambos os lados de $P(k)$, obtendo

$$1+2+2^2+2^3+...+2^k+2^{k+1}=2^{k+1}-1+2^{k+1}=2(2^{k+1})-1=2^{k+2}-1$$

que resulta em $P(k+1)$. Isto é, $P(k+1)$ é verdadeira se $P(k)$ é verdadeira. Pelo Princípio de Indução, $P(n)$ é verdadeira para todo n.

3.7.1 Propriedades da sequência de Fibonacci

Utilizando indução, vamos mostrar propriedades das sequências de Fibonacci. Lembrando que $F_1=1, F_2=1, F_3=2, F_4=3, F_5=5, ...,$ e $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$

Propriedade 1: $F_1+F_2+...+F_n=F_{n+2}-1$

Solução: $P(n): F_1+F_2+...+F_n=F_{n+2}-1$

A proposição vale para $n=1$ uma vez que

$$\begin{gathered} P(1)=F_1=F_{1+2}-1 \\ F_1=F_3-1 \\ 1=2-1 \\ 1=1 \end{gathered}$$

Assumido que $P(k)$ é verdadeira, somamos $k+1$ em ambos os lados de $P(k)$, obtendo

$$F_1+F_2+F_3+...+F_k+F_{k+1}=(F_{k+2}-1)+F_{k+1}=(F_{k+1}+F_{k+2})-1=F_{k+3}-1$$

que resulta em $P(k+1)$. Isto é, $P(k+1)$ é verdadeira quando $P(k)$ é verdadeira. Pelo Princípio de Indução, P é verdadeira para todo n.

Propriedade 2: $F_1+F_3+...+F_{2n-1}=F_{2n}$

Solução: Seja $P(n): F_1+F_3+...+F_{2n-1}=F_{2n}$.

i) $P(1)$ é verdadeira, já que

$$\begin{gathered} F_{2\cdot 1-1}=F_{2\cdot 1} \\ F_1=F_2 \end{gathered}$$

ii) Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira, para algum $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que, para este valor de n, temos

$$F_1+F_3+...+F_{2n-1}=F_{2n}$$

Somando o próximo termo do somatório, F_{2n+1}, a ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$F_1+F_3+...+F_{2n-1}+F_{2n+1}=F_{2n}+F_{2n+1}$$

Manipulando a expressão no segundo membro, de modo a torná-la igual a

$$F_{2(n+1)}=F_{2n+2}$$

De fato, temos:

$F_{2n}+F_{2n+1}=F_{2n+2}$

o que mostra que $P(n+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio da Indução Finita permitiu, concluir que $P(n)$ é verdadeira para todo $n\in\mathbb{N}$.

Propriedade 3: $F_2+F_4+...+F_{2n}=F_{2n+1}-1$.

Solução: Seja $P(n): F_2+F_4+...+F_{2n}=F_{2n+1}-1$.

i) $P(1)$ é verdadeira, já que

$$F_{2\cdot 1}=F_{2\cdot 1+1}-1$$
$$F_2=F_3-1$$
$$1=2-1\Rightarrow 1=1$$

ii) Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira, para algum $n\in\mathbb{N}$. Isto significa que, para este valor de n, temos

$$F_2+F_4+...+F_{2n}=F_{2n+1}-1.$$

Somando o próximo termo do somatório, F_{2n+2}, a ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$F_2+F_4+...+F_{2n}+F_{2n+2}=F_{2n+1}-1+F_{2n+2}$$

Manipulando a expressão no segundo membro, de modo a torná-la igual a

$$F_{2(n+1)+1}-1=F_{2n+3}-1$$

De fato, temos:

$F_{2n+1}-1+F_{2n+2}=F_{2n+1}+F_{2n+2}-1=F_{2n+3}-1$

o que mostra que $P(n+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio da Indução Finita permitiu, concluir que $P(n)$ é verdadeira para todo $n\in\mathbb{N}$.

4 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como proposta mostrar uma das sequências mais intrigantes da matemática, a Sequência de Fibonacci. No processo do desenvolvimento da pesquisa, foi estudado a parte histórica, o problema da reprodução dos coelhos, indução matemática, número de ouro e a demonstração do termo geral da Sequência de Fibonacci.

Embora a pesquisa tendo as suas dificuldades, o resultado proporcionou um pensamento diferenciado sobre Sequência de Fibonacci, mostrando-se como um processo de auto-organização em sistemas naturais, apresentando propriedades matemáticas interessantes, que podem ser estudadas em Teoria dos Números.

O trabalho foi de grande importância e acrescentou bastante na minha formação. Aprendi muito com as pesquisas feitas, os livros e artigos estudados, que puderam se acrescentar na minha evolução na área da matemática.

5 REFERÊNCIAS

[1] BORGES NETO, Hermínio. Sequências de Fibonacci e de Lucas: **uma aplicação da sequência fedathi**. In: Anais do V HTM- Colóquio de História e Tecnologia na
Ensino da Matemática, Recife, p.1-10, 2010.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Curricular Comum: documento preliminar. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf Acesso em Outubro. 2021.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular Secretaria da Educação Fundamental. Brasília, 2018. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf Acesso em Outubro. 2021.

[4] FAZENDA, Ivani Catarina. Integração e interdisciplinaridade no ensino brasileiro: **efetividade ou ideologia.** São Paulo: Loyola, 1979.

[5] FREITAS, Luis Carlos. Avaliação Educacional- Blog do Freitas. Disponível em: https://avaliacaoeducacional.com/author/freitaslc/ Acesso em Novembro 2021.

[6] Gil, A.C. **Como elaborar Projetos de Pesquisa.** Como classificar as Pesquisas? 4 ed. São Paulo: Atlas,2007, cap.4

[7] HUNTER, David J. **Fundamentos da matemática discreta.** Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[8] LIMA, Elon Lages. **Análise real Vol. 1.** 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[9] LIPCHUTZ, Seymour , LIPSON, Marc . **Matemática Discreta.** Teoria dos Conjuntos. Paraná. 2013. Bookman. p.12-

[10] MORGADO, Augusto César. **Matemática Discreta.** Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[11] POSAMENTIER, Alfred S. **The fabulous Fibonacci numbers**. New York: Prometheus Books, 2007.

[12] RAMOS , MARCOS G. OLIVEIRA. **A sequência de Fibonacci e o número de Ouro**, 90 páginas. Trabalho de conclusão de curso - Ilhéus-BA, Universidade Estadual de Santa Cruz, 2013. Disponível em: <www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277d.pdf>.

[13] SIGLER, L. E. **Fibonacci's Liber Abaci:** a translation into modern english of Leonardo Pisano's book of calculation. New York: Ed. Springer, 2002.

[14] THIESEN, Juarez da Silva. A interdisciplinaridade como um movimento articulador no processo ensino aprendizagem. IN: Revista Brasileira de Educação. V.13, n. 39, set/dez. 2008.

[15] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise Vol. 1.** 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.