

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um estudo de bases de Riesz e
aplicação na controlabilidade
fronteira para um sistema de
equações de ondas acopladas

Shirley dos Santos Primo

João Pessoa – PB
Janeiro de 2023

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um estudo de bases de Riesz e
aplicação na controlabilidade
fronteira para um sistema de
equações de ondas acopladas

por

Shirley dos Santos Primo

sob a orientação de

Prof. Dr. Maurício Cardoso Santos

João Pessoa – PB
Janeiro de 2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

P953e Primo, Shirley Dos Santos.

Um estudo de bases de Riesz e aplicação na controlabilidade fronteira para um sistema de equações de ondas acopladas / Shirley Dos Santos Primo. - João Pessoa, 2023.

99 f. : il.

Orientação: Maurício Cardoso Santos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Sistemas de equações de ondas. 2. Controlabilidade exata. 3. Método dos momentos. 4. Família de exponencias. 5. Bases de Riesz. I. Santos, Maurício Cardoso. II. Título.

UFPB/BC

CDU 517.912(043)

Um estudo de bases de Riesz e aplicação na controlabilidade fronteira para um sistema de equações de ondas acopladas

por

Shirley dos Santos Primo ¹

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em: 31 de janeiro de 2023

Banca Examinadora:



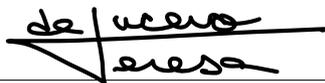
Prof. Dr. Maurício Cardoso Santos – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Fágner Dias Araruna – UFPB
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Alberto Mercado Saucedo – UTFSM
(Examinador Externo)



Prof^a. Dr^a. María de la Luz Jimena de Teresa – UNAM
(Examinadora Externa)

¹Este trabalho contou com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES entre 01/03/2021 e 31/01/2023.

A minha família.

Agradecimentos

A Deus por ter concedido chegar aqui e realizar esse sonho.

Aos meus pais, Ademar Júlio dos Santos e Lucivânia das Dores Primo, e minha irmã, Monique dos Santos Primo, que me apoiaram e acreditaram até o final. Por toda ajuda, proteção e amor.

A minha família, em especial, a minha prima Angelica Primo Seabra (In Memoriam) que sempre sentiu orgulho de mim e mostrava isso à todos.

Ao meu orientador, Dr. Maurício Santos Cardoso, por toda assistência, ensinamento e disponibilidade durante esse trabalho.

Aos meus professores da Universidade Regional do Cariri-URCA no período da graduação, particularmente, Flávio França Cruz, José Tiago Nogueira Cruz e Tiago da Silva Alencar que acreditaram no meu potencial e incentivaram na ingressão da pós-graduação, desde o início.

A todos colegas e amigos da graduação e pós-graduação, especialmente, Alessandro Fernandes Silva, Ana Soégila dos Santos Sousa, Cláudia Raniele da Silva Sousa, Geivison dos Santos Ribeiro, João Vitor Silva de Oliveira, Lúcia Silva de Melo, Manoel Messias da Silva Junior, Maria Jaislayne Moisés da Silva e Renato Carlos da Silva Vieira, por proporcionar e compartilhar momentos.

A outra raiz da equação do segundo grau: x'' , vulgo, Natália das Neves Lucas, que se tornou uma peça importante na minha formação e vida no decorrer desses anos.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho de dissertação, estudaremos a controlabilidade exata para um sistema de equações de ondas acopladas no caso unidimensional com o controle atuando na fronteira de apenas uma equação. Para resolver o problema de controlabilidade, utilizamos o método dos momentos, que consiste em transformar o problema de controle em um problema de momento. A controlabilidade do sistema de equações e o problema de momento estão inteiramente relacionados com as propriedades das famílias de exponenciais que surgem naturalmente do sistema, mais precisamente, reduz-se a mostrarmos que tal família constitui uma base de Riesz.

Palavras-chave: sistema de equações de ondas, controlabilidade exata, método dos momentos, família de exponenciais, bases de Riesz.

Abstract

In this dissertation work, we will study the exact controllability for a system of coupled wave equations in the one-dimensional case with the control acting on the boundary of only one equation. To solve the controllability problem, we use the method of moments, which consists of transforming the control problem into a moment problem. The controllability of the system of equations and the problem of momentum are entirely related to the properties of the families of exponentials that arise naturally from the system, more precisely, it boils down to showing that such a family constitutes a Riesz basis.

Keywords: system of wave equations, exact controllability, method of moments, family of exponents, Riesz bases.

Sumário

Introdução	1
1 O problema dos momentos	4
1.1 Famílias em espaços de Hilbert	4
1.2 Problema abstrato de momentos	15
2 O método dos momentos	24
2.1 Equações de evolução de primeira ordem no tempo	24
2.2 Equações de evolução de segunda ordem no tempo	40
2.3 Tipos de controlabilidade e sua relação com famílias exponenciais . . .	48
2.3.1 Controlabilidade para sistemas de primeira ordem no tempo . .	48
2.3.2 Controlabilidade para sistemas de segunda ordem no tempo . .	57
3 Controlabilidade exata de equações hiperbólicas acopladas	64
3.1 Do sistema acoplado ao problema dos momentos	66
3.2 Solução do problema de momentos	68
3.3 Provas dos teoremas	81
A Resultados auxiliares	83
A.1 Análise funcional	83
A.1.1 Espaços normados e espaços de Banach	83
A.1.2 Espaços de Hilbert	85
A.1.3 Operadores lineares limitados	86
A.2 A matriz exponencial	88
Referências Bibliográficas	90

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- \in : pertence;
- \notin : não pertence;
- \forall : para todo;
- \max : denota o máximo;
- \sup : denota o supremo;
- \lim : denota o limite;
- \int : denota a integral;
- \hookrightarrow : denota a imersão entres os espaços;
- \oplus : denota a soma direta entre os espaços;
- \cong : denota o isomorfismo entres os espaços;
- $f(x) \asymp g(x), x \in X$: significa que existem constantes positivas c e C tais que para todo $x \in X$ as desigualdades $cg(x) \leq f(x) \leq Cg(x)$ é verdadeira;
- $\text{card}(\Omega)$: denota a cardinalidade do conjunto Ω ;
- $\text{codim}(\Omega)$: denota a codimensão do conjunto Ω ;
- $\bar{\Omega}$: denota o fecho do conjunto Ω ;
- $\partial\Omega$: denota a fronteira do conjunto Ω ;

- Ω^\perp : denota o complemento ortogonal do conjunto Ω ;
- \bar{x} : denota o conjugado de x ;
- $x \perp y$: x é ortogonal a y ;
- \det : denota o determinante;
- A^{-1} : denota a inversa da matriz A ;
- x^T : denota a transposta do vetor x ;
- e^A : denota a exponencial da matriz A ;
- \mathbb{N} : denota o conjunto dos números naturais;
- \mathbb{Z} : denota o conjunto dos números inteiros;
- \mathbb{R} : denota o conjunto dos números reais;
- \mathbb{C} : denota o conjunto dos números complexos;
- $C(\Omega)$: denota o espaço das funções contínuas definidas em Ω com valores reais ou complexos;
- $C_\infty^0(\Omega)$: denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto;
- $\mathcal{D}(\Omega)$: denota o espaço das distribuições em Ω ;
- ℓ^2 : denota o espaço das sequências de quadrados somáveis;
- $L^2(\Omega)$: denota o espaço das aplicações de quadrados integráveis definidas em Ω com valores reais ou complexos;
- $H^1(\Omega)$: denota o espaço de Sobolev;
- $H_0^1(\Omega)$: denota o fecho do conjunto $C_\infty^0(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$;
- $H^{-1}(\Omega)$: denota o espaço dual topológico de H_0^1 .

Introdução

A Teoria de Controle tem sido nos últimos anos uma área de pesquisa bastante interdisciplinar, envolvendo vários campos de conhecimento da engenharia e da matemática. Um sistema de controle é uma interconexão de vários componentes resultando numa configuração que fornece um desempenho desejado. A descrição do sistema do ponto de vista matemático é dada através de equações diferenciais (ordinárias ou parciais) da forma

$$y_t = f(t, y, u). \quad (1)$$

Aqui, o número real $T > 0$ é fixo, chamado de tempo final, e $t \in [0, T]$ representa o instante de tempo ao qual as variáveis estão submetidas. A função $y : [0, T] \rightarrow H$ é a variável estado do sistema e y_t representa a derivada de y em relação ao tempo. Por outro lado, a função $u : [0, T] \rightarrow U$ é a variável de controle do sistema. Os conjuntos H e U mencionados anteriormente são espaços funcionais adequados.

Enfim, o problema de controle (1) consiste em estudar a existência de um controle u de tal modo que a solução atinja um estado prescrito desejado.

Uma técnica utilizada para estudar a controlabilidade de um determinado sistema é o método de momentos, que transforma o problema de controle ao problema momentos correspondente a uma família de exponenciais. N. N. Krasovskii em 1968 (ver [19]) aplicou o método aos sistemas descritos por Equações Diferenciais Ordinárias. Também tem sido amplamente usado na teoria de controle de sistemas de parâmetros distribuídos desde os trabalhos clássicos (ver, por exemplo, [14] e [15]) de H. O Fattorini e D. L. Russel no final dos anos 1960 até o início dos anos 1970 (ver [3] para a história do assunto e referências completas).

A solubilidade do problema de momentos resultante está diretamente associado com as propriedades das famílias de exponencias, sendo as mais importantes para a teoria de controle a completude, minimalidade e propriedade de base de Riesz (geralmente no espaço $L^2(0, T)$). O estudo de famílias exponenciais teve início na década de 1930 na obra clássica de R. Paley e N. Wiener (ver [20]), e desde então motivou muitos trabalhos de muitos matemáticos (ver [3] e referências contida nele para mais informações).

Este trabalho de dissertação é um estudo bibliográfico de duas referências, a saber:

- S. A. Avdonin & S. A. Ivanov, *Families of Exponentials: The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems* (ver [3]);
- S. Avdonin, A. C. Rivero & L. Teresa, *Exact Boundary Contrillability of Coupled Hyperbolic Equations* (ver [6]).

Aqui, nos debruçamos sobre os cálculos aí contidos e fornecemos um material autossuficiente que permite a leitura mais fluida e completa dos resultados e referências acima mencionados. Dividimos então a dissertação da seguinte maneira:

No Capítulo 1, começaremos apresentando as principais propriedades para uma família arbitrária de elementos do espaço de Hilbert e, em seguida, demonstraremos implicações e equivalências entre tais propriedades. Também, definiremos o operador de momentos relacionado a uma família de elementos e veremos que o problema de momentos corresponde em verificar a sobrejetividade desse operador. O resultado mais importante do capítulo nos dará condições necessárias para que o problema de momentos admita solução que será dada em termos das propriedades que satisfaz a família de elementos envolvida.

No Capítulo 2, estudaremos o sistema de evolução de primeira ordem no tempo,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + Ax = f, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Veremos o resultado que garante a existência e unicidade de soluções em diferentes espaços de Hilbert que construiremos ao longo do capítulo. Entraremos no contexto de controlabilidade e reduziremos o problema de controlabilidade do sistema acima ao problema de momentos relativo a uma família de exponencias. A partir disso, apresentaremos uma série de conceitos de controlabilidade e caracterizaremos a controlabilidade em termos das propriedades de certas famílias de exponenciais, conforme desenvolvido no Capítulo 1. Ainda, estudaremos o sistema de evolução de segunda ordem no tempo

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + Ax = f, \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1, \end{cases}$$

veremos definições e mostraremos resultados que foram feitos para o sistema de evolução de primeira ordem no tempo.

No Capítulo 3, aplicaremos toda a teoria estudada nos capítulos anteriores para resolver o problema de controlabilidade de duas equações hiperbólicas acopladas. Mais

precisamente, se $\Omega = (0, \pi)$, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, escrevemos o sistema de equações de onda

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + \alpha q = 0 & \text{em } Q, \\ q_{tt} - q_{xx} + \beta y = 0 & \text{em } Q, \\ y(0, t) = u(t), y(\pi, t) = 0 & \text{em } (0, T), \\ q = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y^0(x), y_t(x, 0) = y^1(x) & \text{em } \Omega, \\ q(x, 0) = q^0(x), q_t(x, 0) = q^1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Para

$$\mathcal{V} = L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

escolhemos os dados iniciais (y^0, q^0, y^1, q^1) e finais $(y^{0,T}, q^{0,T}, y^{1,T}, q^{1,T})$ em \mathcal{V} e queremos saber se é possível encontrar um controle $u \in L^2(0, T)$ tal que

$$(y(T), q(T), y_t(T), q_t(T)) = (y^{0,T}, q^{0,T}, y^{1,T}, q^{1,T}).$$

Este é chamado de problema de controlabilidade exata. Veremos que as respostas positivas e negativas para tal problema poderão ser dadas por meio de estimativas precisas do tempo T .

Para resolvermos o problema de controlabilidade, transformaremos este problema de controle ao problema de momentos. Analisaremos a partir dos parâmetros de acoplamentos α e β três casos ($\alpha = 0$, $\alpha\beta > 0$ e $\alpha\beta < 0$) para o problema de momentos, assim obtemos três famílias de funções correspondentes. O ponto chave para obter a resolubilidade do problema de momentos e também a controlabilidade do sistema, segue exclusivamente do fato das famílias de funções possuírem a propriedade de base de Riesz. Os cálculos mais detalhados são os dois últimos casos ($\alpha\beta > 0$ e $\alpha\beta < 0$) em que necessitamos utilizar a teoria de diferenças divididas exponenciais. Mostraremos então que as famílias de funções formam uma base de Riesz e depois concluiremos a controlabilidade do sistema estudado.

No Apêndice A, apresentaremos alguns resultados auxiliares sobre a teoria de Análise Funcional e da Matriz Exponencial. Todos os teoremas enunciados nesta parte não foram demonstrados, porém deixamos claro onde podem ser encontrados.

Capítulo 1

O problema dos momentos

1.1 Famílias em espaços de Hilbert

Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ e norma $\|\cdot\|_H$. Quando não houver risco de confusão quanto ao espaço de Hilbert considerado, denotamos o produto simplesmente por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e a norma por $\|\cdot\|$.

Definição 1.1.1. Dizemos que a família $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é ω -linearmente independente (ω -l.i) se não existe uma sequência $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, diferente de zero, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle f, \varphi_n \rangle$ converge a zero para toda $f \in H$ que cumpre $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 < \infty$.

Se $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 < \infty$ para toda $f \in H$ então neste caso o conceito de independência ω -linear significa que a soma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$ é única no sentido fraco, em outras palavras:

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n = 0 \text{ fraco em } H \Rightarrow a_n = 0 \forall n.$$

No entanto, esta propriedade não caracteriza as famílias ω -l.i, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.1.2. Seja $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base ortonormal de H e defina

$$\phi_1 = \varphi_1, \phi_n = n(\varphi_n - \varphi_{n-1}), n = 2, 3, \dots$$

Mostraremos que a família $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui a unicidade da soma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n$ fraca, mas a definição de independência ω -linear não é satisfeita. Devemos mostrar que se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in$

1. O problema dos momentos

ℓ^2 , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n = 0$ fraco em H então $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos que para toda

$f \in H$ vale $\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n, f \right\rangle = 0$, então tomando $f = \varphi_m$ e observando que

$$\langle \phi_n, \varphi_m \rangle = \begin{cases} m, & \text{se } m = n, \\ -(m+1), & \text{se } m+1 = n, \\ 0, & \text{em qualquer caso,} \end{cases}$$

obtemos

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle a_n \phi_n, f \rangle = a_m m - a_{m+1} (m+1),$$

e portanto $a_{m+1} = a_m \frac{m}{m+1}$ com o qual $a_m = \frac{m-1}{m} \frac{m-2}{m-1} \cdots \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{m} a_1$. Assim, podemos escrever a soma parcial da seguinte forma

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^R a_n \phi_n &= a_1 \varphi_1 + 2a_2(\varphi_2 - \varphi_1) + \cdots + Ra_R(\varphi_R - \varphi_{R-1}) \\ &= a_1(\varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) + \cdots + (\varphi_R - \varphi_{R-1})) \\ &= a_1 \varphi_R, \end{aligned}$$

e daí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n = 0$ fraco se, e somente se, $a_1 = a_2 = \dots = 0$, como queríamos. Agora,

vamos mostrar que a definição de ω -l.i não se verifica. Seja $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$, e note que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \phi_n \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \varphi_1 \right\rangle + \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, 2(\varphi_2 - \varphi_1) \right\rangle + \cdots \\ &\quad + \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, n(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \right\rangle + \cdots \\ &= c_1 + 2(c_2 - c_1) + \dots + n(c_n - c_{n-1}) + \dots \\ &= -c_1 - c_2 - \cdots - c_n - \cdots \\ &= -\sum_{j=1}^{\infty} c_j, \end{aligned}$$

1. O problema dos momentos

logo $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 < \infty$. Tomando $a_n = \frac{1}{n} \in \ell^2$, temos

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \phi_n = \varphi_1 + \frac{1}{2} 2(\varphi_2 - \varphi_1) + \cdots + \frac{1}{N} N(\varphi_N - \varphi_{N-1}) = \varphi_N$$

e com isso a soma $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \phi_n$ converge a zero fraco, pois

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle f, \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \phi_n \right\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_j \langle \varphi_j, \varphi_N \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} c_N = 0.$$

Definição 1.1.3. Uma família $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é dita mínima se, para todo $n \in \mathbb{N}$, o elemento φ_n não pertence ao fecho do subespaço gerado por os outros elementos, ou seja,

$$\varphi_n \notin \overline{\text{span}\{\varphi_j\}_{j \neq n}}.$$

Definição 1.1.4. Dada uma família $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizemos que a família $\tilde{\mathcal{F}} = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema biortogonal para \mathcal{F} se satisfaz

$$\langle \varphi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Observação 1. Segue-se da definição acima que toda família ortonormal $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema biortogonal de si mesma.

Definição 1.1.5. A família $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é dita completa no espaço de Hilbert H quando $\overline{\text{span}\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}} = H$.

Proposição 1.1.6. A família $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é mínima se, e somente se, existe um sistema $\tilde{\mathcal{F}} = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ biortogonal para \mathcal{F} .

Demonstração. De fato, suponhamos que $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seja mínima. Temos que $\overline{\text{span}\{\varphi_j\}_{j \neq n}}$ é um conjunto linear e fechado e $\{\varphi_n\}$ é um conjunto compacto com $\overline{\text{span}\{\varphi_j\}_{j \neq n} \cap \{\varphi_n\}} = \emptyset$, logo pelo Teorema de Hahn Banach, segunda forma geométrica, existe um hiperplano fechado que separa estritamente $\overline{\text{span}\{\varphi_j\}_{j \neq n}}$ e $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ou seja, existe um α positivo e um funcional linear limitado $\Phi_n : H \rightarrow \mathbb{R}$ em que $\Phi_n(f) < \alpha$ para todo $f \in \overline{\text{span}\{\varphi_j\}_{j \neq n}}$ e $\Phi_n(\varphi_n) > \alpha$. Isso nos diz que $\Phi_n(f) = 0$ para todo $f \in \overline{\text{span}\{\varphi_j\}_{j \neq n}}$ pois para qualquer $f \in \overline{\text{span}\{\varphi_j\}_{j \neq n}}$ tem-se $\Phi_n(\lambda f) < \alpha$ e portanto $\lambda \Phi_n(f) < \alpha$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e, mais ainda que $\Phi_n(\varphi_n) > 0$, pois $\alpha > 0$. Definindo $\tilde{\Phi}_n = \frac{\Phi_n}{\Phi_n(\varphi_n)}$, obtemos que $\tilde{\Phi}_n(\varphi_n) = 1$ e $\tilde{\Phi}_n(f) = 0$ para toda $f \in \overline{\text{span}\{\varphi_j\}_{j \neq n}}$. Sendo

1. O problema dos momentos

H um espaço de Hilbert e $\tilde{\Phi}_n \in H^*$, o Teorema da Representação de Riesz garante que existe $\psi_n \in H$ de modo que $\tilde{\Phi}_n(f) = \langle f, \psi_n \rangle$ para toda $f \in H$. Claramente a família $\tilde{\mathcal{F}} = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema biortogonal para \mathcal{F} procurado. Reciprocamente, suponhamos que $\tilde{\mathcal{F}} = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema biortogonal de $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se \mathcal{F} não é mínima então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_{n_0} \in \overline{\text{span}\{\varphi_j\}_{j \neq n_0}}$, isto é, existem $v_j \in \text{span}\{\varphi_j\}_{j \neq n_0}$ tais que $\lim_{j \rightarrow \infty} v_j = \varphi_{n_0}$. Como $\langle v_j, \psi_{n_0} \rangle = 0$ para todo $j \in \mathbb{N} - \{n_0\}$, temos que

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle v_j, \psi_{n_0} \rangle = \langle \varphi_{n_0}, \psi_{n_0} \rangle,$$

o que é um absurdo. □

Veremos agora que as propriedades enunciadas até aqui não são equivalentes, mais precisamente que ω -l.i não implica necessariamente ser mínima.

Exemplo 1.1.7. Seja $H = L^2(0, 1)$ e $\mathcal{F} = \{t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Provaremos que tal família é ω -l.i, mas não é mínima. Considere a família de polinômios $\{P(t)\}$ que, pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass (ver [9, pg. 26]) é densa em $L^2(0, 1)$. O mesmo vale para a família de polinômios $\{t^R P(t)\}$, em que $R \in \mathbb{N}$ é fixo. Basta provarmos (ver [10, pg. 8]) que se $f \in L^2(0, 1)$ tal que $\langle f, t^k \rangle = 0$ para todo $k \geq R$, então $f \equiv 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle f, t^k \rangle = 0, \forall k \geq R &\Rightarrow \int_0^1 f t^k dt = 0, \forall k \geq R \\ &\Rightarrow \int_0^1 f t^{R+j} dt = 0, \forall j \geq 0 \\ &\Rightarrow \int_0^1 (f t^R) t^j dt = 0, \forall j \geq 0. \end{aligned}$$

Como o espaço de polinômios é denso, temos que $f t^R = 0$ para todo t e, daí obtemos que $f = 0$. Observe que a família $\{t^R, t^{R+1}, t^{R+2}, \dots\}$ é completa em $L^2(0, 1)$, pois

$$\overline{\text{span}\{t^R, t^{R+1}, t^{R+2}, \dots\}} = \overline{\{t^R P(t)\}} = L^2(0, 1),$$

e $t^k \in \overline{\text{span}\{t^j\}_{j > k}} \subset \overline{\text{span}\{t^j\}_{j \neq k}}$ provando assim que a família $\mathcal{F} = \{t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ não é mínima.

Seja χ_s a função característica no intervalo $[0, s]$. Então

$$\langle \chi_s, t^j \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^s t^j dt = \frac{t^{j+1}}{j+1} \Big|_0^s = \frac{s^{j+1}}{j+1},$$

daí

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle \chi_s, t^j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{s^{2j+2}}{(j+1)^2} < \infty, \quad s \in [0, 1].$$

1. O problema dos momentos

Se \mathcal{F} não é ω -l.i existe uma sequência $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, diferente de zero, tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \langle a_j \chi_s, t^j \rangle$ converge a zero para todo $s \in [0, 1]$. Definindo a função $F(s) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \langle \chi_s, t^j \rangle$ e usando a hipótese, temos $F \equiv 0$. Mas, como $\langle \chi_s, t^j \rangle = \frac{s^{j+1}}{j+1}$ segue que $F(s) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{s^{j+1}}{j+1}$ e F é analítica, logo $a_j = 0$ para todo j , o que é um absurdo. Portanto, a família \mathcal{F} é ω -l.i.

Definição 1.1.8. A família $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é mínima uniforme se existe um sistema biortogonal $\tilde{\mathcal{F}} = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $M > 0$ tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\psi_n\| \leq M.$$

É fácil ver que a propriedade de mínima uniforme é estritamente mais forte do que a de ser mínima, observe o próximo exemplo.

Exemplo 1.1.9. Sejam H um espaço de Hilbert e $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base ortonormal. Considerando as famílias $\mathcal{F} = \left\{ \frac{1}{n} \varphi_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\tilde{\mathcal{F}} = \{n \varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, temos claramente que $\tilde{\mathcal{F}}$ é um sistema biortogonal para \mathcal{F} e pela Proposição 1.1.6 \mathcal{F} é mínima. Entretanto, como $\|n \varphi_n\| = n$, tem-se que \mathcal{F} não é mínima uniforme.

Definição 1.1.10. A família $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é considerada uma \mathcal{L} -base ou uma base de Riesz de $V := \overline{\text{span}\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$ se existe um operador $T : V \rightarrow V$ linear, limitado e invertível e uma base ortonormal $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de V tal que $T(e_n) = \varphi_n$. Para o caso em que $V = H$ diremos diretamente que $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}$ é uma base de Riesz sem nos referirmos ao espaço V propriamente. O operador T será chamado de ortogonalizador de \mathcal{F} .

Todas as características introduzidas das famílias estão relacionadas de maneira que cada uma é implicada pela próxima, rigorosamente temos a seguinte proposição:

Proposição 1.1.11. Sejam H um espaço de Hilbert, $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de elementos de H e $V := \overline{\text{span}\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$. Dadas as seguintes afirmações:

- (a) A família \mathcal{F} é uma base de Riesz de V .
- (b) A família \mathcal{F} é mínima uniforme.
- (c) A família \mathcal{F} é mínima.
- (d) A família \mathcal{F} é ω -l.i.

Tem-se que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$.

1. O problema dos momentos

Demonstração. (a) \Rightarrow (b) Seja \mathcal{F} uma base de Riesz de V . Pela definição existe um ortogonalizador $T : V \rightarrow V$ e uma base ortonormal $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $T(e_n) = \varphi_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\Lambda_n : V \rightarrow \mathbb{C}, \Lambda_n(\varphi) = \langle T^{-1}(\varphi), e_n \rangle.$$

É claro que Λ_n é linear e pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|\Lambda_n(\varphi)| = |\langle T^{-1}(\varphi), e_n \rangle| \leq \|T^{-1}\| \|\varphi\| \|e_n\|,$$

donde $\|\Lambda_n\| \leq \|T^{-1}\|$ e Λ_n é limitada. Observe que,

$$\Lambda_n(\varphi_n) = \langle T^{-1}(\varphi_n), e_n \rangle = 1 \text{ e } \Lambda_n(\varphi_m) = \langle T^{-1}(\varphi_m), e_n \rangle = 0, \text{ } m \neq n.$$

Segue do Teorema da Representação de Riesz que existe $\psi_n \in V$ tal que $\Lambda_n(\varphi) = \langle \varphi, \psi_n \rangle$, para todo $\varphi \in V$, e $\|\Lambda_n\| = \|\psi_n\|$. Por construção resulta que a família $\tilde{\mathcal{F}} = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema biortogonal para \mathcal{F} e, além disso

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\psi_n\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\Lambda_n\| \leq \|T^{-1}\|.$$

Com isso \mathcal{F} é mínima uniforme.

(b) \Rightarrow (c) É imediato.

(c) \Rightarrow (d) Seja \mathcal{F} mínima. Se tal \mathcal{F} não é ω -l.i então existe $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, diferente de zero, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle f, \varphi_n \rangle$ converge a zero para toda $f \in H$ satisfazendo $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 < \infty$. Sabemos da Proposição 1.1.6 que existe $\tilde{\mathcal{F}} = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sistema biortogonal a \mathcal{F} . Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \psi_m, \varphi_n \rangle|^2 = 1 \text{ e } \sum_{n=1}^N a_n \langle \psi_m, \varphi_n \rangle = a_m \text{ se } N > m,$$

isto implica que $a_m = 0$ e portanto \mathcal{F} é ω -l.i. \square

Estudaremos com mais profundidade as famílias que cumprem ser base de Riesz, pois serão importantes para entender e estudar o problema dos momentos em geral. Vamos agora provar um resultado que será muito útil ao trabalhar com bases de Riesz.

Teorema 1.1.12. (Bari) Sejam H um espaço de Hilbert, $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de elementos de H e $V := \overline{\text{span}\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$.

(a) Se $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Riesz de V , $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base ortonormal em V e T é o ortogonalizador tal que $T(e_n) = \varphi_n$, então o sistema biortogonal

1. O problema dos momentos

$\tilde{\mathcal{F}} = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contido em V também é uma base de Riesz de V , mais ainda, $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pode ser expresso através do ortogonizador T e da base ortonormal $T^{-1}\varphi_n$ de $T^{-1}(V)$, pela fórmula

$$\psi_n = (T^{-1})^* T^{-1}(\varphi_n).$$

(b) A família $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Riesz de V se, e somente se, para toda sequência finita $\{c_j\}_{j=1}^N$ existem constantes $m, M > 0$ tais que

$$m \sum_{j=1}^N |c_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j \right\|^2 \leq M \sum_{j=1}^N |c_j|^2.$$

Além disso, se $\tilde{\mathcal{F}} = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema biortogonal associado a \mathcal{F} , todo elemento $f \in V$ tem expansões em séries da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \varphi_n, \\ f &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \psi_n. \end{aligned}$$

Demonstração. (a) Vimos na prova da primeira implicação da proposição anterior que se \mathcal{F} é uma base de Riesz então existe um sistema biortogonal $\tilde{\mathcal{F}} = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que satisfaz a igualdade

$$\langle T^{-1}(\varphi), e_n \rangle = \langle \varphi, \psi_n \rangle,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e para toda $\varphi \in H$. Resulta daí que $e_n \in D((T^{-1})^*)$ e como $e_n = T^{-1}(\varphi_n)$ temos

$$\begin{aligned} \langle \varphi, (T^{-1})^* e_n \rangle &= \langle \varphi, (T^{-1})^* T^{-1}(\varphi_n) \rangle \\ &= \langle T^{-1}(\varphi), T^{-1}(\varphi_n) \rangle \\ &= \langle T^{-1}(\varphi), e_n \rangle \\ &= \langle \varphi, \psi_n \rangle, \quad \forall \varphi \in V. \end{aligned}$$

Então,

$$(T^{-1})^* e_n = \psi_n, \quad (T^{-1})^* T^{-1}(\varphi_n) = \psi_n.$$

Uma vez que T^{-1} é um isomorfismo, $(T^{-1})^*$ também é. Desta forma, concluímos que $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Riesz de V .

(b) Seja \mathcal{F} uma base de Riesz, $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base ortonormal de V e T o ortogonali-

1. O problema dos momentos

zador. Temos que

$$\left\| \sum_{j=1}^N c_j e_j \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^N c_j e_j, \sum_{j=1}^N c_j e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^N |c_j|^2.$$

Multiplicando por $\frac{1}{\|T^{-1}\|^2}$ em ambos os lados da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|T^{-1}\|^2} \sum_{j=1}^N |c_j|^2 &= \frac{1}{\|T^{-1}\|^2} \left\| \sum_{j=1}^N c_j e_j \right\|^2 \\ &= \frac{1}{\|T^{-1}\|^2} \left\| \sum_{j=1}^N c_j T^{-1}(\varphi_j) \right\|^2 \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j \right\|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j \right\|^2 &= \left\| \sum_{j=1}^N c_j T(e_j) \right\|^2 \\ &\leq \|T\|^2 \left\| \sum_{j=1}^N c_j e_j \right\|^2 \\ &\leq \|T\|^2 \sum_{j=1}^N |c_j|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$m \sum_{j=1}^N |c_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j \right\|^2 \leq M \sum_{j=1}^N |c_j|^2$$

em que $m = \frac{1}{\|T^{-1}\|^2}$ e $M = \|T\|^2$.

Reciprocamente, considere

$$m \sum_{j=1}^N |c_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j \right\|^2 \leq M \sum_{j=1}^N |c_j|^2,$$

para toda sequência finita $\{c_j\}_{j=1}^N$. Como $V = \overline{\text{span}\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$ é um subespaço fechado em H , que é Hilbert, temos que V também é Hilbert. Logo existe uma base ortonormal $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de V . Definimos o operador T da seguinte forma: inicialmente pedimos que $T(e_n) = \varphi_n$ e por linearidade podemos definir T em todo

1. O problema dos momentos

$$\text{span}\{e_n\}, T\left(\sum_{n=1}^N a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^N a_n T(e_n) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \text{ para todo } a_n \in \mathbb{R} \text{ e } N \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal, $\overline{\text{span}\{e_n\}} = V$. Assim, para todo $z \in \overline{\text{span}\{e_n\}}$ existe $z_n \in \text{span}\{e_n\}$ no qual $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, e portanto podemos definir $Tz = \lim_{n \rightarrow \infty} Tz_n$. O operador $T : V \rightarrow V$ está bem definido. De fato, observe que

$$\begin{aligned} \|Tz_n - Tz_m\|^2 &= \left\| \sum_{j=1}^{K(N)} a_j^N \varphi_j - \sum_{n=1}^{K(M)} a_n^M \varphi_n \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{n=1}^L (a_n^N - a_n^M) \varphi_n \right\|^2 \\ &\leq M \sum_{n=1}^L |a_n^N - a_n^M|^2 \\ &= M \|z_n - z_m\|^2, \end{aligned}$$

com $L = \max\{K(N), K(M)\}$. Portanto, Tz_n é convergente e, além disso, converge para um elemento de V , dessa forma T está bem definido. Pela construção não é difícil verificar que T é linear e limitada com norma menor ou igual a $M^{\frac{1}{2}}$. Analogamente, definimos $S(\varphi_n) = e_n$, que é linear e limitada. Perceba que

$$S(T(z)) = S\left(T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right)\right) = S\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n = z, \quad \forall z \in V$$

e

$$T(S(w)) = T\left(S\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n\right)\right) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n = w, \quad \forall w \in V.$$

Logo $S = T^{-1}$ e S, T são invertíveis. Com isso, concluímos que \mathcal{F} é uma base de Riesz.

Se $f \in V$ temos $T^{-1}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ e aplicando T obtemos que $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$.

Multiplicando por ψ_n resulta que $\langle f, \psi_n \rangle = c_n$ e com isso $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \varphi_n$.

Agora, se $f \in V$ temos $T^*(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n T^{-1}(\varphi_n)$ e aplicando $(T^{-1})^*$

obtemos que $f = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \psi_n$. Multiplicando por φ_n resulta que $\tilde{c}_n = \langle f, \varphi_n \rangle$ e com

1. O problema dos momentos

$$\text{isso } f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \psi_n.$$

□

Para completar esta parte da teoria apresentamos um exemplo de uma família mínima uniforme que não é uma base de Riesz.

Exemplo 1.1.13. Seja $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma base ortonormal de um espaço de Hilbert H , para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\phi_n = \varphi_0 + \varphi_n$ e $\mathcal{F} = \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Valem que:

- (a) \mathcal{F} é completa.
- (b) \mathcal{F} é mínima uniforme.
- (c) \mathcal{F} não é uma base de Riesz, mas seu sistema biortogonal é.

Vamos verificar essas afirmações.

- (a) Se $f \in \overline{\text{span}\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}}^{\perp}$ e $f = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j$, então através da multiplicação por ϕ_n com $n > 1$ encontra-se

$$0 = \langle f, \phi_n \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle c_j \varphi_j, \varphi_0 + \varphi_n \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle c_j \varphi_j, \varphi_0 \rangle + \langle c_j \varphi_j, \varphi_n \rangle = c_0 + c_j$$

$$\Rightarrow c_j = -c_0 \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

e como $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ deve estar em ℓ^2 , necessariamente, $c_0 = 0$. Daí $c_n = 0$, para todo $n = 0, 1, \dots$. Portanto $f = 0$.

- (b),(c) Vê-se facilmente que a família $\tilde{\mathcal{F}} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema biortogonal para \mathcal{F} com

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varphi_n\| = 1,$$

e mais ainda, é base de Riesz via o ortogonalizador $T : V \rightarrow V$, $T(\varphi_m) = \varphi_{m+1}$. Tomamos a sequência $a_n = \frac{1}{n} \in \ell^2$ e suponhamos que a família \mathcal{F} seja uma base de Riesz. Então, pelo item (b) do Teorema 1.1.12, temos que existem constantes m, M tais que

$$m \sum_{n=1}^N \left| \frac{1}{n} \right|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \phi_n \right\|^2 \leq M \sum_{n=1}^N \left| \frac{1}{n} \right|^2.$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \varphi_n + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right) \varphi_0,$$

1. O problema dos momentos

segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi_n^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \varphi_n \right)^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Isso implica que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é convergente, o que é um absurdo. Logo, a família \mathcal{F} não é uma base de Riesz.

Lema 1.1.14. (Invariância por isomorfismos) Sejam H um espaço de Hilbert, $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de elementos em H e $T : H \rightarrow H$ um isomorfismo, definimos $T(\mathcal{F}) := \{T(\varphi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Então

- (a) \mathcal{F} é uma base de Riesz se, e somente se, $T(\mathcal{F})$ também é.
- (b) \mathcal{F} é mínima uniforme se, e somente se, $T(\mathcal{F})$ também é.
- (c) \mathcal{F} é mínima se, e somente se, $T(\mathcal{F})$ também é.
- (d) \mathcal{F} é ω -l.i se, e somente se, $T(\mathcal{F})$ também é.

Demonstração. (a) Seja $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base de Riesz. Então, por definição, existem um ortogonalizador $S : H \rightarrow H$ e uma base ortonormal $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de H tal que $S(e_n) = \varphi_n$. Temos que $T \circ S : H \rightarrow H$ é o ortogonalizador de $T(\mathcal{F}) = \{T(\varphi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ e, mais ainda $\{S(e_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de H com $T(S(e_n)) = T(\varphi_n)$, uma vez que S leva base ortonormal em base ortonormal. Logo, $T(\mathcal{F}) = \{T(\varphi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é base de Riesz. Reciprocamente, conseguimos mostrar de forma análoga que $T^{-1} \circ S : H \rightarrow H$ é o ortogonalizador de $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{S(e_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de H tal que $T^{-1}(S(e_n)) = T^{-1}(T(\varphi_n)) = \varphi_n$, portanto \mathcal{F} é uma base de Riesz.

- (b) Se a família $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é mínima uniforme, existem um sistema biortogonal $\tilde{\mathcal{F}} = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $M > 0$ tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\psi_n\| \leq M.$$

Observe que $\{(T^*)^{-1}\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema biortogonal para a família $T(\mathcal{F}) = \{T(\varphi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, pois

$$\langle T(\varphi_m), (T^*)^{-1}\psi_n \rangle = \langle \varphi_m, T^*(T^*)^{-1}\psi_n \rangle = \langle \varphi_m, \psi_n \rangle = \delta_{mn}.$$

Observe ainda que,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(T^*)^{-1}\psi_n\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|(T^*)^{-1}\| \|\psi_n\| = \|(T^*)^{-1}\| \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\psi_n\| \leq N,$$

1. O problema dos momentos

em que $N = \|(T^*)^{-1}\|M$. A partir dessas observações, obtemos que a família $T(\mathcal{F})$ é mínima uniforme. Reciprocamente, se a família $T(\mathcal{F})$ é mínima uniforme, então seja $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o sistema biortogonal com

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\Phi_n\| \leq M.$$

Temos que $\{T^*\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é o sistema biortogonal para a família \mathcal{F} , pois

$$\delta_{mn} = \langle T\varphi_m, \Phi_n \rangle = \langle \varphi_m, T^*\Phi_n \rangle.$$

Temos ainda que,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T^*\Phi_n\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T^*\| \|\Phi_n\| = \|T^*\| \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\Phi_n\| \leq N,$$

em que $N = \|T^*\|M$. Logo, a família \mathcal{F} é mínima uniforme.

(c) É imediato, basta usarmos o item anterior.

(d) Seja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ de modo que para toda $f \in H$ satisfazendo $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle T(\varphi_n), f \rangle|^2 <$

∞ tem-se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle f, T(\varphi_n) \rangle$ converge a zero. Observe que $\langle f, T(\varphi_n) \rangle = \langle T^*f, \varphi_n \rangle$,

logo tomando $g = T^*f$, temos $\sum_{n=1}^{\infty} \langle g, \varphi_n \rangle^2 < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle g, \varphi_n \rangle$ converge a zero.

Como \mathcal{F} é ω -l.i, segue-se que $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto $T(\mathcal{F})$ é ω -l.i.

Reciprocamente, conseguimos mostrar de forma análoga que \mathcal{F} é ω -l.i, bastando observar que $\langle T(\varphi_n), (T^*)^{-1}f \rangle = \langle \varphi_n, T^*(T^*)^{-1}f \rangle = \langle \varphi_n, f \rangle$ e tomar $g = (T^*)^{-1}f$.

□

1.2 Problema abstrato de momentos

Nesta parte estudaremos em abstrato o problema dos momentos, ou seja, o problema dos momentos em relação a uma família arbitrária de elementos do espaço de Hilbert. Ao longo da seção explicaremos quais propriedades da família influenciam a resolubilidade do problema dos momentos, e de que forma.

Seja H um espaço de Hilbert separável e $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família arbitrária de elementos em H . Definimos o operador linear do problema dos momentos $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}} : D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}) \subset H \rightarrow \ell^2, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f) = \{\langle f, \varphi_n \rangle_H\}_{n \in \mathbb{N}},$$

1. O problema dos momentos

em que $D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ é o conjunto $\{f \in H; \{\langle f, \varphi_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2\}$.

O problema dos momentos consiste em verificar se o operador $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ é sobrejetivo, quer dizer, se dada uma sequência $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ existe $f \in H$ (e encontrar, se possível) tal que $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f) = \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, em outras palavras, se $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$.

Pode-se ver facilmente que o operador $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ é fechado. De fato, temos que $G(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}) \subset \overline{G(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})}$, resta provar que $\overline{G(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})} \subset G(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$. Se $(f, g) \in \overline{G(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})}$ então existe uma sequência $(f_n, g_n) \in G(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ tal que $f_n \rightarrow f \in D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ e $g_n \rightarrow g \in \ell^2$. Veja que $g_n = \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f_n)$. Assim, $f_n - f \rightarrow 0$ e $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f_n) - g \rightarrow 0$. Tomando $z_n = f_n - f$, tem-se $z_n \rightarrow 0$ e $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(z_n + f) - g \rightarrow 0$. Como $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ é linear, $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(z_n) - h \rightarrow 0$, com $h = g - \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f)$. Observando que

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\langle z_n, \varphi_k \rangle\}_k = 0,$$

obtemos que $g = \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f)$ e assim $(f, g) \in G(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$.

Se a família \mathcal{F} não é completa em H , definindo $V := \overline{\text{span}\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$ temos que $H = V \oplus V^\perp$ com o qual o operador $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ tem núcleo não trivial V^\perp , logo não é injetivo. Considere agora o operador $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ restrito a V , $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V : V \cap D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}) \rightarrow \ell^2$, este novo operador é injetivo, logo um isomorfismo com sua imagem e, evidentemente $\text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}) = \text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V)$. Portanto, para estudar a solubilidade de um problema dos momentos, bastará estudar a imagem do operador $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V$, no qual é invertível, fechado como $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ e seu inverso $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}$ também é fechado. Pois, se $(f, g) \in \overline{G(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1})}$ então $f_n \rightarrow f$ em $\text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V)$ e $g_n \rightarrow g$ em $V \cap D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$. Veja que $g_n = \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(f_n)$. Assim, $f_n - f \rightarrow 0$ e $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(f_n) - g \rightarrow 0$. Tomando $z_n = f_n - f$, tem-se $z_n \rightarrow 0$ e $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(z_n) - h \rightarrow 0$, com $h = g - \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(f)$. Note que $z_n \in \text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V)$, isto é, existe $w_n \in V \cap D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ de modo que $z_n = \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V(w_n)$. Logo $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V(w_n) \rightarrow 0$ e $w_n \rightarrow h$, daí

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V(w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\langle w_n, \varphi_k \rangle\}_k = \langle h, \varphi_k \rangle.$$

Com isso obtemos que $h = 0$ e, assim $g = \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(f)$.

A seguir iremos enunciar e provar um resultado que nos permite caracterizar a solubilidade de um problema dos momento em termos das propriedades da família \mathcal{F} associada.

Teorema 1.2.1. (Resolubilidade) Sejam H um espaço de Hilbert, $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família, $V := \overline{\text{span}\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$, $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base canônica de ℓ^2 tal que $e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$, \dots e $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ o operador do problema dos momentos.

- (a) O operador $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V$ é um isomorfismo entre V e ℓ^2 se, e somente, se a família \mathcal{F} é uma base de Riesz de V . Em particular, se \mathcal{F} é uma base de Riesz de V então $\text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}) = \ell^2$.

1. O problema dos momentos

- (b) Se $Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}) = \ell^2$ então \mathcal{F} é mínima uniforme.
- (c) A família \mathcal{F} é mínima se, e somente, se a base padrão de $\ell^2 : \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$.
- (d) $\overline{Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})} = \ell^2$ se, e somente, se a família \mathcal{F} é ω -l.i.
- (e) Suponha que a família $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ em que $\mathcal{F}_0 = \{\varphi_n^0\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Riesz e $\mathcal{F}_1 = \{\varphi_n^1\}_{n=1}^{\omega} \subset \overline{span\{\varphi_n^0\}_{n \in \mathbb{N}}}$ com $\omega \leq \infty$. Então o conjunto $Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ é um subconjunto fechado de ℓ^2 e a codimensão da $Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ é igual ao número de elementos de \mathcal{F}_1 . (A dimensão do espaço ortogonal a todos os elementos da $Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ é chamada de codimensão da $Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$).

Demonstração. (a) (\Rightarrow) Se $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V$ é um isomorfismo entre V e ℓ^2 então a família $\{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(e_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de Riesz de V por definição. Como

$$\{\langle \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(e_n), \varphi_k \rangle\}_{k \in \mathbb{N}} = \mathcal{P}_{\mathcal{F}} \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(e_n) = \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(e_n) = e_n,$$

isso nos diz que \mathcal{F} é um sistema biortogonal para a família $\{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(e_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ contido em V . Pelo item (a) do Teorema 1.1.12, \mathcal{F} é uma base de Riesz de V .

(\Leftarrow) Seja \mathcal{F} uma base de Riesz de V , $\tilde{\mathcal{F}} = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o seu sistema biortogonal, $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base ortonormal de V e $T : V \rightarrow V$ um ortogonalizar que cumpre $T(\phi_n) = \varphi_n$. Dada $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ e $f \in V$ tal que $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V((T^{-1})^* f) &= \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n (T^{-1})^* \phi_n \right) \\ &= \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n \right) \\ &= \left\{ \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n, \varphi_k \right\rangle \right\}_{k \in \mathbb{N}} \\ &= \{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Isso significa que $\ell^2 \subset Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V)$, e como $Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V) \subset \ell^2$ vale a igualdade $\ell^2 = Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V)$. Vimos acima que o operador $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V$ é injetivo. Com isso, concluimos que $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V$ é um isomorfismo.

- (b) Como $Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}) = \ell^2$, os elementos $\psi_n = \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(e_n)$ existem em V e formam um sistema biortogonal para \mathcal{F} , pelo que foi demonstrado no item anterior. O Teorema

1. O problema dos momentos

do Gráfico Fechado nos dá que o operador $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}$ é limitado e em consequência

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\psi_n\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(e_n)\| \leq \|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}\| \sup_{n \in \mathbb{N}} \|e_n\|_{\ell^2} = \|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}\| < \infty.$$

Logo, a família \mathcal{F} é mínima uniforme.

- (c) (\Rightarrow) Se \mathcal{F} é mínima e $\tilde{\mathcal{F}} = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema biortogonal associado a \mathcal{F} , por definição

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\psi_n) = \{\langle \psi_n, \varphi_k \rangle\}_{k \in \mathbb{N}} = e_n,$$

e $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V)$.

(\Leftarrow) Como os elementos $\psi_n = \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(e_n)$ existem em V e formam um sistema biortogonal para \mathcal{F} , a família \mathcal{F} é mínima, pela Proposição 1.1.6.

- (d) (\Rightarrow) Supondo que \mathcal{F} não é ω -l.i., existe uma sequência $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em ℓ^2 , diferente de zero, tal que para toda $f \in D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ vale

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle f, \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \right\rangle = 0.$$

Notemos que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \overline{\text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})}^{\perp}$, pois para toda $f \in D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_{\mathcal{F}}f, a_n \rangle_{\ell^2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (\mathcal{P}_{\mathcal{F}}f)_n \overline{a_n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \langle f, \varphi_n \rangle \overline{a_n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle f, \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que implica $a_n = 0$ para todo n .

(\Leftarrow) Vamos provar pela contra-positiva, isto é, se $\overline{\text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})} \neq \ell^2$ então \mathcal{F} não é ω -l.i. Tomamos uma sequência não nula $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \overline{\text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})}^{\perp}$ temos $\langle \mathcal{P}_{\mathcal{F}}f, a_n \rangle_{\ell^2} = 0$ para toda $f \in D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$. Logo $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle f, \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \right\rangle = 0$, como queríamos.

- (e) Como a família \mathcal{F}_0 é uma base de Riesz, pela Proposição 1.1.11 \mathcal{F}_0 é mínima uniforme. Denote $\{\varphi'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o sistema biortogonal a \mathcal{F}_0 , que pertence a $\overline{\text{span}\{\varphi_n^0\}_{n \in \mathbb{N}}}$.

1. O problema dos momentos

Expandindo os elementos da família \mathcal{F}_1 sobre a base \mathcal{F}_0 , temos

$$\varphi_n^1 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi_n^1, \varphi_k^0 \rangle \varphi_k^0.$$

Seja b_n a sequência $\{\langle \varphi_n^1, \varphi_n^0 \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ainda do fato da família \mathcal{F}_0 ser uma base de Riesz, conseguimos pelo item (a) do Teorema 1.1.12 que seu sistema biortogonal $\{\varphi_n^0\}_{n \in \mathbb{N}}$ também é, logo $b_n \in \ell^2$.

Para um elemento arbitrário $f \in D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$, sua imagem

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f) &= \{\langle f, \varphi_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}} \\ &= \{\langle f, (\varphi_n^0, \varphi_n^1) \rangle\}_{n \in \mathbb{N}} \\ &= \langle f, (\varphi_1^0, \varphi_1^1, \varphi_2^0, \varphi_2^1, \dots) \rangle \\ &= (\langle f, \varphi_1^0 \rangle, \langle f, \varphi_1^1 \rangle, \langle f, \varphi_2^0 \rangle, \langle f, \varphi_2^1 \rangle, \dots) \\ &= (\langle f, \varphi_1^0 \rangle, 0, \langle f, \varphi_2^0 \rangle, 0, \dots) + (0, \langle f, \varphi_1^1 \rangle, 0, \langle f, \varphi_2^1 \rangle, \dots) \\ &= \{\langle f, \varphi_n^0 \rangle\}_{n \in \mathbb{N}} + \{\langle f, \varphi_n^1 \rangle\}_{n=1}^{\omega} \in \ell^2 \oplus \ell, \end{aligned}$$

em que $\ell = \ell^2$ se $\omega = \infty$ e $\ell = \mathbb{C}^N$ se $\omega = N < \infty$. Consideramos o operador $B : \ell^2 \rightarrow \ell$ dado por $Bc = \{\langle c, b_n \rangle_{\ell^2}\}_{n=1}^{\omega}$ para todo $c = \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. Agora, para $f \in D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ e f na forma $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n^0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f) &= \{\langle f, \varphi_n^0 \rangle\}_{n \in \mathbb{N}} + \{\langle f, \varphi_n^1 \rangle\}_{n=1}^{\omega} \\ &= \left\{ \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n^0, \varphi_n^0 \right\rangle \right\}_{n \in \mathbb{N}} + \left\{ \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n^0, \varphi_n^1 \right\rangle \right\}_{n=1}^{\omega} \\ &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle \varphi_n^0, \varphi_n^0 \rangle \right\}_{n \in \mathbb{N}} + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle \varphi_n^0, \varphi_n^1 \rangle \right\}_{n=1}^{\omega} \\ &= \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \right\}_{n=1}^{\omega} \\ &= (c, Bc). \end{aligned}$$

Disto segue-se que o conjunto $Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ consiste em todos os pares ordenados (c, Bc) com $c \in \ell^2$. Assim, o conjunto $Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ ser fechado é equivalente ao fato do operador B ser fechado. Observando que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}_1}(f) = \{\langle f, \varphi_n^1 \rangle\}_{n=1}^{\omega} = Bc,$$

1. O problema dos momentos

obtemos que o operador B coincide com o operador dos problemas de momentos para a família \mathcal{F}_1 e, portanto é fechado.

Resta apenas provar que $\text{codim}(\text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})) = \text{card}(\mathcal{F}_1)$. Temos que cada par $v_n = (b_n, -e_n)$ é ortogonal ao conjunto $\text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$, pois

$$\langle \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f), (b_n, -e_n) \rangle = \langle b_n, c \rangle_{\ell^2} - \overline{(Bc)_n} = \langle b_n, c \rangle - \overline{\langle c, b_n \rangle} = 0.$$

Como o conjunto de pares $\{v_n\}_{n=1}^{\omega}$ é linearmente independente, o item (e) está provado. □

Apresentamos abaixo um exemplo em que o problema dos momentos tem solução.

Exemplo 1.2.2. Consideramos o operador dos momentos associado a família \mathcal{F} do Exemplo 1.1.13, no qual $D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}) = \{f \in H; f \perp \varphi_0\}$. Dada $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, tomamos $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n \in D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ tal que $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f) = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Isso nos dá um exemplo de um problema de momentos que pode ser resolvido com uma família que não é uma base de Riesz.

Um exemplo de família não mínima para o qual o problema de momentos é solucionável sobre um conjunto denso, pela força das afirmações (c) e (d), qualquer família não mínima, mas linearmente independente, digamos a do Exemplo 1.1.7.

Em geral, dada uma família $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com um sistema biortogonal $\tilde{\mathcal{F}} = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e um elemento $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, uma solução formal do problema dos momentos $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f) = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é a seguinte:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n.$$

Se esta série converge então

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f) = \{\langle f, \varphi_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

O seguinte resultado nos dará uma forma de identificar quando esta solução formal é uma solução correta do problema.

Teorema 1.2.3. Sejam H um espaço de Hilbert, $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família mínima com sistema biortogonal $\tilde{\mathcal{F}} = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$.

(a) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ se, e somente se, existe $f \in H$ tal que

$$\left\langle \sum_{n=1}^N a_n \psi_n, g \right\rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \langle f, g \rangle,$$

1. O problema dos momentos

para cada combinação linear finita $g = \sum_{j=1}^M c_j \varphi_j$.

(b) Se $Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}) = \ell^2$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n$ converge a uma $f \in H$ e $\mathcal{P}_{\mathcal{F}} f = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Demonstração. (a) Suponha que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$, isto é, existe $f \in H$ de modo que $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f) = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Tome $g = \sum_{j=1}^M c_j \varphi_j$, com $\{c_j\}_{j=1}^M$ uma sequência finita. Para $N > M$, temos

$$\begin{aligned}
 \left\langle \sum_{n=1}^N a_n \psi_n, g \right\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^N a_n \psi_n, \sum_{j=1}^M c_j \varphi_j \right\rangle \\
 &= \left\langle a_1 \psi_1, \sum_{j=1}^M c_j \varphi_j \right\rangle + \cdots + \left\langle a_M \psi_M, \sum_{j=1}^M c_j \varphi_j \right\rangle + \cdots \\
 &\quad \cdots + \left\langle a_N \psi_N, \sum_{j=1}^M c_j \varphi_j \right\rangle \\
 &= \sum_{n=1}^M a_n \bar{c}_n \\
 &= \sum_{n=1}^M \langle f, \varphi_n \rangle \bar{c}_n \\
 &= \left\langle f, \sum_{n=1}^M c_n \varphi_n \right\rangle \\
 &= \langle f, g \rangle.
 \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que existe $f \in H$ tal que para qualquer g da forma

$$g = \sum_{j=1}^M c_j \varphi_j, \text{ vale}$$

$$\left\langle \sum_{n=1}^N a_n \psi_n, g \right\rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \langle f, g \rangle.$$

Tomando $g = \varphi_j$ e observando que para $N > j$

$$\left\langle \sum_{n=1}^N a_n \psi_n, \varphi_j \right\rangle = \langle a_1 \psi_1, \varphi_j \rangle + \cdots + \langle a_j \psi_j, \varphi_j \rangle + \cdots + \langle a_N \psi_N, \varphi_j \rangle = a_j,$$

temos $\langle f, \varphi_j \rangle = a_j$. Daí $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$.

(b) Como $Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}) = \ell^2$, pela prova do item (c) do Teorema 1.2.1, temos que o operador $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}$ é contínuo. Dada $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, tem-se que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$.

1. O problema dos momentos

Segue-se do item anterior que para toda $g = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$,

$$\sum_{n=1}^N \langle a_n \psi_n, g \rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \langle f, g \rangle \Rightarrow \langle \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(\{a_n\}_{n=1}^N), g \rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \langle f, g \rangle.$$

Por continuidade,

$$\langle \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(\{a_n\}_{n=1}^N), g \rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \langle \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}), g \rangle.$$

Logo, pela unicidade do limite, $\langle \mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_V^{-1}(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}), g \rangle = \langle f, g \rangle$ para toda $g = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$. Portanto $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f) = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, bastando tomar a g como φ_n . □

Observação 2. O teorema mostra que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n$ converge fracamente em H , sua soma serve como uma solução f do problema dos momentos $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(f) = \{a_n\}$.

Mostraremos agora um corolário do teorema que nos permitirá decidir quando um problema de momento é solucionável com base em estimativas de norma da família biortogonal.

Corolário 1.2.4. Sejam H um espaço de Hilbert, $\mathcal{F} = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família mínima com sistema biortogonal $\tilde{\mathcal{F}} = \{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

(a) Se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \|\psi_n\|^2 < \infty$ então $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$.

(b) Se existe $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \|\psi_n\|^2 = \infty$ então $\text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}) \neq \ell^2$.

Demonstração. (a) A soma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n$ converge em norma e mais ainda fracamente.

Pelo item (a) do teorema anterior $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Im}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$.

(b) Para provar esse item, faremos uso do Lema de Orlicz enunciado abaixo.

Lema 1.2.5. (Orlicz) Se H é um espaço de Hilbert e $\{x_1, \dots, x_N\}$ é uma família finita de elementos de H então

$$\sum_n |x_n|^2 \leq \max \left\{ \left\| \sum_{n=1}^N a_n x_n \right\|^2 ; |a_n| = 1, n = 1, \dots, N \right\}.$$

Demonstração. Ver [18, pg. 137]. □

1. O problema dos momentos

Agora, vamos demonstrar o item (b) do Corolário 1.2.4. Supondo que $Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}) = \ell^2$, o operador $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_{V^{-1}}$ é limitado pela prova do item (c) do Teorema 1.2.1. Seja $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ uma família finita de elementos em H . Temos pelo lema acima que

$$\sum_{j=1}^N |\psi_j|^2 \leq \max \left\{ \left\| \sum_{j=1}^N b_j x_j \right\|^2 ; |b_j| = 1, j = 1, \dots, N \right\}.$$

Considere uma sequência finita $\{c_j\}_{j=1}^N$ tal que $c_j = a_j b_j$ para cada $j = 1, \dots, N$, e note que $|c_j| = |a_j|$. Assim,

$$\left\| \sum_{j=1}^N c_j \psi_j \right\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^N b_j (a_j \psi_j) \right\|^2 \geq \sum_{j=1}^N |a_j|^2 |\psi_j|^2$$

e, como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \|\psi_n\|^2 \neq \infty$ segue que $\left\| \sum_{j=1}^N c_j \psi_j \right\|^2 \neq \infty$. Por outro lado,

$$\left\| \sum_{j=1}^N c_j \psi_j \right\|^2 = \|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}|_{V^{-1}} \{c_j\}_{j=1}^N\|^2 \leq C \sum_{j=1}^N |c_j|^2 = C \sum_{j=1}^N |a_j|^2 \leq C \|a_j\|_{\ell^2}^2$$

e, sendo $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ resulta que $\left\| \sum_{j=1}^N c_j \psi_j \right\|^2 < \infty$, o que é um absurdo. Logo, $Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}) \neq \ell^2$.

□

Capítulo 2

O método dos momentos

2.1 Equações de evolução de primeira ordem no tempo

Sejam V e H dois espaços de Hilbert tais que a inclusão $V \hookrightarrow H$ é contínua e V é denso em H . Identificamos H com H^* e seja V^* o espaço dual de V , então H pode ser identificado com algum subespaço denso de V^* de modo que a inclusão $H \hookrightarrow V^*$ é contínua e costuma-se escrever

$$V \hookrightarrow H \cong H^* \hookrightarrow V^*.$$

Seja $G(a, b)$ uma forma bilinear simétrica contínua em V . Definimos

$$G_\alpha(a, b) = G(a, b) + \alpha \langle a, b \rangle_H, \quad \alpha \geq 0.$$

Suponha que existe $C_\alpha > 0$ tal que

$$G_\alpha(a, a) \geq C_\alpha \|a\|_V^2. \tag{2.1}$$

Devido a continuidade da forma G_α e da desigualdade acima temos que a norma gerada por G_α definida como $\|a\|_\alpha = \sqrt{G_\alpha(a, a)}$, é equivalente à norma em V , ou seja, existem constantes m, M tais que

$$m\|x\|_V \leq G_\alpha(x, x) \leq M\|x\|_V.$$

Como V é um espaço de Hilbert com respeito à norma $\|\cdot\|_V$, ele também é com respeito à norma $\|a\|_\alpha$.

Os resultados a seguir são encontrados em [8, cap. 10].

Lema 2.1.1. Todo operador auto-adjunto estritamente positivo $A : D(A) \subset V \rightarrow V$ corresponde exclusivamente à forma

$$\langle Aa, b \rangle_H = G(a, b), \quad \forall a \in D(A) \text{ e } b \in V.$$

Demonstração. Seja $A : D(A) \subset V \rightarrow V$ um operador auto-adjunto, isto é, $A^* = A$ e considere $G : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma definida por $G(a, b) = \langle Aa, b \rangle_H$ para todo $a \in D(A), b \in V$. Como $G(a, b) = \langle Aa, b \rangle_H = \langle a, Ab \rangle_H = G(b, a)$ e A é linear, resulta que G é bilinear e simétrica. Resta mostrar que G é contínua. Mas, note que por um lado, G é contínua em relação a b , pois $|G(a, b)| = |\langle Aa, b \rangle_H| \leq \|Aa\|_H \|b\|_H$ e por outro G é contínua em relação a a , pois $|G(a, b)| = |\langle Aa, b \rangle_H| = |\langle a, Ab \rangle_H| \leq \|a\|_H \|Ab\|_H$. Logo G é contínua, mostrando assim que G é uma forma bilinear, simétrica e contínua. Reciprocamente, seja $G : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, simétrica e contínua dada por $G(a, b) = \langle Aa, b \rangle_H$ para todo $a, b \in V$. Note que, para cada $a \in V$ fixo, o funcional $b \mapsto G(a, b)$ é linear e contínuo em V , uma vez que G é uma forma bilinear, contínua e $|G(a, b)| \leq M\|a\|\|b\|$, em que $M\|a\| > 0$ é uma constante em relação a b . Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $\eta_a \in V$ tal que

$$G(a, b) = \langle \eta_a, b \rangle_H, \quad \forall b \in V.$$

Defina $A : D(A) \subset V \rightarrow V$ um operador que associa a a η_a , ou seja, $A(a) = \eta_a$. Escrevemos, portanto, $G(a, b) = \langle Aa, b \rangle_H$ para todo $a \in D(A), b \in V$. Temos que

$$\begin{aligned} \langle A(a_1 + \alpha a_2), b \rangle &= G((a_1 + \alpha a_2), b) \\ &= G(a_1, b) + \alpha G(a_2, b) \\ &= \langle Aa_1, b \rangle + \alpha \langle Aa_2, b \rangle \\ &= \langle Aa_1, b \rangle + \langle \alpha Aa_2, b \rangle \\ &= \langle Aa_1 + \alpha Aa_2, b \rangle. \end{aligned}$$

Logo, $A(a_1 + \alpha a_2) = Aa_1 + \alpha Aa_2$ para todo $a_1, a_2 \in D(A)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos ainda que

$$\|Aa\|_H^2 = |\langle Aa, Aa \rangle_H| = |G(a, Aa)| \leq M_1 \|a\|_H \|Aa\|_H,$$

donde $\|Aa\|_H \leq M_1 \|a\|_H \|Aa\|_H$ para todo a . Com isso, concluímos que A é linear e contínuo. Agora, considere uma forma $S : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $S(b, a) := \langle b, Aa \rangle_H$. Por A ser linear e contínuo, conseguimos a bilinearidade e continuidade de S . Aplicando o que foi feito anteriormente, garantimos a existência de um operador linear limitado $A : D(A) \subset V \rightarrow V$ de modo que $S(b, a) = \langle Aa, b \rangle_H$. Assim, $\langle Aa, b \rangle_H = S(b, a) =$

$\langle b, Aa \rangle_H$ e A é auto-adjunto. □

Por sua vez, para cada $\alpha \geq 0$ a forma G_α corresponde ao operador auto-adjunto estritamente positivo $A_\alpha = A + \alpha I$ e, além disso $D(A_\alpha) = D(A)$. Logo (ver [8, pg. 144]), existe um operador B_α auto-adjunto estritamente positivo que satisfaz $B_\alpha^2 = A_\alpha$ com $D(B_\alpha) = V$ e colocando $B_\alpha = A_\alpha^{1/2}$ tem-se (ver [8, pg. 222])

$$D(A^{1/2}) = V,$$

$$\langle A_\alpha^{1/2}a, A_\alpha^{1/2}b \rangle_H = G_\alpha(a, b), \quad a, b \in V.$$

A partir de agora vamos assumir que o operador A tem autovalores associados $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, e autofunções $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que formam uma base ortonormal no espaço H .

Observação 3. Como A é auto-adjunto e estritamente positivo, o conjunto $\{(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}_{\geq C}$, em que C é mesma constante de (2.1). De fato, se $Aa = \lambda_n a$ então $\langle Aa, a \rangle = \langle \lambda_n a, a \rangle = \lambda_n \langle a, a \rangle = \lambda_n \|a\|_H^2 > C \|a\|_H^2$, já que $\langle Aa, a \rangle = G(a, a)$ e $G(a, a) > C \|a\|_H^2$. Assim, $\lambda_n \geq C$.

Definição 2.1.2. Para $r \in \mathbb{R}$ definimos o espaço das seqüências

$$\ell_r^2 = \left\{ (c_n)_{n \in \mathbb{N}}; \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 (\lambda_n + \alpha)^r < \infty \right\},$$

munido do produto interno

$$\langle (c_n)_{n \in \mathbb{N}}, (d_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle_{\ell_r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\lambda_n + \alpha)^{r/2} \overline{d_n (\lambda_n + \alpha)^{r/2}}$$

e da norma

$$\|(c_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\ell_r^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 (\lambda_n + \alpha)^r \right)^{1/2}.$$

Definição 2.1.3. Para $r \geq 0$ definimos o espaço

$$W_r = \left\{ f \in H; f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_r^2 \right\},$$

munido do produto interno

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, g = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n; \langle f, g \rangle_{W_r} := \langle (c_n)_{n \in \mathbb{N}}, (d_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle_{\ell_r^2}$$

e da norma

$$\|f\|_{W_r} = \|(c_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\ell_r^2}.$$

De maneira análoga à definição anterior, definimos para $r > 0$ o espaço W_{-r} .

Observação 4. Apresentamos aqui algumas observações que serão úteis ao longo do capítulo:

- Com as definições anteriores, ℓ_r^2 e W_r são dois espaços de Hilbert.
- As inclusões $W_r \subset H \subset W_{-s}$ são verdadeiras para todo $r, s > 0$. De fato, a primeira inclusão segue diretamente da definição de W_r . Agora, se $f \in H$ então $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$. Para que a segunda inclusão seja verificada, resta mostrar que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_{-s}^2$. Como $\lambda_n \geq C$, em que C é a mesma constante de (2.1), temos que

$$(\lambda_n + \alpha) \geq C > 0 \Rightarrow \frac{1}{(\lambda_n + \alpha)^s} \leq \frac{1}{C^s}.$$

Daí,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 (\lambda_n + \alpha)^{-s} \leq \frac{1}{C^s} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

Portanto $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_{-s}^2$, concluindo que $f \in W_{-s}$.

- O espaço ℓ_r^2 é isomorfo a ℓ^2 via a correspondência $\{c_n\} \mapsto \{c_n(\lambda_n + \alpha)^{r/2}\}$ e em consequência

$$\{c_n\} \in \ell_r^2 \Leftrightarrow \{c_n(\lambda_n + \alpha)^{r/2}\} \in \ell^2.$$

Isto é, o operador $M_r : \ell_r^2 \rightarrow \ell^2$ dado por $M_r(\{c_n\}) = \{c_n(\lambda_n + \alpha)^{r/2}\}$ é linear, limitado, bijetivo e com inversa limitada. Com efeito, é claro que M_r é linear e, mais ainda M_r é limitado, pois

$$\begin{aligned} \|M_r(\{c_n\})\|_{\ell^2}^2 &= \|\{c_n(\lambda_n + \alpha)^{r/2}\}\|_{\ell^2}^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(\lambda_n + \alpha)^{r/2}|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 (\lambda_n + \alpha)^r \\ &= \|\{c_n\}\|_{\ell_r^2}^2. \end{aligned}$$

Se $M_r(\{c_n\}) = 0$ então $\{c_n(\lambda_n + \alpha)^{r/2}\} = 0$ para todo n , implicando que $\{c_n\} = 0$ para todo n . Agora, dado $\{d_n\} \in \ell^2$ existe $\{c_n\} = \{d_n(\lambda_n + \alpha)^{-r/2}\} \in \ell_r^2$, veja

que isso é verdade, pois

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 (\lambda_n + \alpha)^r &= \sum_{n=1}^{\infty} |d_n (\lambda_n + \alpha)^{-r/2}|^2 (\lambda_n + \alpha)^r \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 (\lambda_n + \alpha)^{-r} (\lambda_n + \alpha)^r \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Assim,

$$M_r(\{c_n\}) = M_r(\{d_n (\lambda_n + \alpha)^{-r/2}\}) = \{d_n (\lambda_n + \alpha)^{-r/2} (\lambda_n + \alpha)^{r/2}\} = \{d_n\}.$$

A partir disso, M_r é injetiva e sobrejetiva, isto é, bijetiva. Logo, admite inversa limitada (ver [10, pg. 35]).

- De forma análoga ao item anterior, vemos que $M_r^s : \ell_r^2 \rightarrow \ell_{r+s}^2$, $M_r^s(\{c_n\}) = \{c_n (\lambda_n + \alpha)^{-s/2}\}$ também é um isomorfismo.

O próximo resultado sai como consequência do Teorema Espectral (ver [8, pg. 140]).

Lema 2.1.4. Para $r > 0$, os espaços W_r coincidem com os domínios das potências dos operadores A_α , ou seja, $W_r = D(A_\alpha^{r/2})$.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} D(A_\alpha^{r/2}) &= \left\{ f \in H, f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n; \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\lambda_n + \alpha)^{r/2} \varphi_n \text{ converge em } H \right\} \\ &= \left\{ f \in H, f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n; \{c_n (\lambda_n + \alpha)^{r/2} \varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \right\} \\ &= \left\{ f \in H, f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n; \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_r^2 \right\} \\ &= W_r. \end{aligned}$$

□

Observação 5. Diante disso, conseguimos que

$$W_0 = D(I) = H, W_2 = D(A) \text{ e } W_1 = D(A_\alpha^{1/2}) = V.$$

Denotamos W_r^* o espaço dual de W_r e $\langle \varphi, f \rangle_*$ o produto interno da dualidade $\langle \varphi, f \rangle_{W_r, W_r^*}$ com $f \in W_r^*$ e $\varphi \in W_r$.

2. O método dos momentos

Definimos o operador $J_s^r : W_r \rightarrow W_{r+s}$ da seguinte forma

$$J_s^r \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} M_s^r(c_n) \varphi_n.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \left\| J_s^r \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \right) \right\|_{W_{r+s}} &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} M_s^r(c_n) \varphi_n \right\|_{W_{r+s}} \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\lambda_n + \alpha)^{-s/2} \varphi_n \right\|_{W_{r+s}} \\ &= \| c_n (\lambda_n + \alpha)^{-s/2} \|_{\ell_{r+s}^2} \\ &= \| (c_n) \|_{\ell_r^2} \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \right\|_{W_r} \end{aligned}$$

e daí concluímos que J_s^r é isométrico.

Lema 2.1.5. O espaço W_r^* é isomorfo ao espaço W_{-r} .

Demonstração. Dada $g \in W_{-r}$, temos que $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n$ com $g_n \in \ell_{-r}^2$. Definimos

$T_g : W_r \rightarrow \mathbb{C}$ por $T_g(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \overline{g_n}$. É claro que este operador é linear e limitado, pois

$$T_g(f + \mu h) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n + \mu h_n) \overline{g_n} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \overline{g_n} + \mu \sum_{n=1}^{\infty} h_n \overline{g_n} = T_g(f) + \mu T_g(h)$$

e

$$|T_g(f)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \overline{g_n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| |\overline{g_n}| = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| (\lambda_n + \alpha)^{r/2} |\overline{g_n}| (\lambda_n + \alpha)^{-r/2} \leq \|f\|_{W_r} \|g\|_{W_{-r}}.$$

Com isso, $T_g \in W_r^*$. Note que $\|T_g\|_{W_r^*} = \|g\|_{W_{-r}}$. De fato, pela desigualdade anterior temos

$$\|T_g\|_{W_r^*} = \sup_{\substack{f \in W_r^* \\ \|f\| \neq 0}} \frac{|T_g(f)|}{\|f\|} \leq \|g\|_{W_{-r}}.$$

2. O método dos momentos

Por outro lado, considere $f \in W_r$ e tome $f_n = \frac{g_n(\lambda_n + \alpha)^{-r}}{\|g\|_{W_{-r}}}$, daí

$$\begin{aligned} T_g(f) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \overline{g_n} \\ &= \frac{1}{\|g\|_{W_{-r}}} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\lambda_n + \alpha)^{-r} \overline{g_n} \\ &= \frac{1}{\|g\|_{W_{-r}}} \sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^2 (\lambda_n + \alpha)^{-r} \\ &= \frac{\|g\|_{W_{-r}}^2}{\|g\|_{W_{-r}}} \\ &= \|g\|_{W_{-r}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|T_g\|_{W_r^*} = \sup_{\substack{f \in W_r^* \\ \|f\|=1}} \frac{|T_g(f)|}{\|f\|} = \sup_{f \in W_r} |T_g(f)| \geq \|g\|_{W_{-r}}.$$

Isto implica que $\|T_g\|_{W_r^*} = \|g\|_{W_{-r}}$. A partir disso, podemos definir $T : W_{-r} \rightarrow W_r^*$ por $T(g) = T_g$. Veremos que T é um isomorfismo. É claro que T é linear e limitada. Agora, dada $\psi \in W_r^*$, consideramos o operador $J_r^0 \in \mathcal{L}(H, W_r)$ e seu adjunto $(J_r^0)^* \in \mathcal{L}(W_r^*, H^*)$ definido por $(J_r^0)^*(\psi)(h) = \psi(J_r^0(h))$. Como $(J_r^0)^*(\psi) \in H^*$, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe $g \in H$ tal que $(J_r^0)^*(\psi)(h) = \langle h, g \rangle_H$ para todo $h \in H$, além disso $\|g\| = \|(J_r^0)^*(\psi)\|_{H^*}$. Uma vez que $H \subset W_{-r}$, tem-se $g \in W_{-r}$ e assim podemos definir $R : W_r^* \rightarrow W_{-r}$ por $R(\psi) = g_\psi$. Perceba que

$$\|R(\psi)\|_{W_{-r}} = \|g_\psi\|_{W_{-r}} = \|(J_r^0)^*(\psi)\|_{H^*} = \|\psi\|_{W_r^*},$$

isso nos diz que R é limitado. Vamos provar que R é a inversa do operador T , isto é, que $(T \circ R)(\psi) = \psi$ e $(R \circ T)(g) = g$ para todo $\psi \in W_r^*$ e todo $g \in W_{-r}$. Temos que

$$(R \circ T)(g) = R(T(g)) = R(T_g) \text{ e } \langle h, R(T_g) \rangle = (J_r^0)^*(T_g)(h) = \langle h, g \rangle,$$

logo $R(T_g) = g$. Temos ainda que

$$(T \circ R)(\psi) = T(R(\psi)) = T_{R(\psi)}$$

e

$$T_{R(\psi)}(h) = T_{g_\psi}(h) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \overline{(g_\psi)_n} = \langle h, g \rangle = (J_r^0)^*(\psi)(h) = \psi(J_r^0(h)) = \psi(h),$$

2. O método dos momentos

para todo $h \in W_r$ (já que J_r^0 é a inclusão), logo $T_{R(\psi)} = \psi$. Portanto, o espaço W_r^* é isomorfo ao espaço W_{-r} . \square

Agora vamos trabalhar com um sistema da forma

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) = f(t), & 0 < t < T, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

em que A é um operador auto-adjunto estritamente positivo com autovalores $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e autofunções $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que formam uma base ortonormal no espaço H . Em primeiro lugar, temos que dizer como se deve entender a solução para o problema (2.2). Para isso, definimos os seguintes espaços.

Definição 2.1.6. O espaço $L^2(0, T; W_r)$ consiste em todas as funções mensuráveis $f : (0, T) \rightarrow W_r$ com

$$\|f\|_{L^2(0, T; W_r)}^2 := \int_0^T \|f(t)\|_{W_r}^2 dt < \infty.$$

Definição 2.1.7. O espaço $C(0, T; W_r)$ é o conjunto das funções contínuas $f : [0, T] \rightarrow W_r$ com

$$\|f\|_{C(0, T; W_r)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|f\| < \infty.$$

Observação 6. O espaço $L^2(0, T; W_r)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle f, g \rangle_{L^2(0, T; W_r)} = \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle_{W_r} dt.$$

Abreviaremos a partir de agora o espaço $L^2(0, T; \mathbb{C})$ por $L^2(0, T)$. Consideremos o espaço $\mathcal{D}(0, T)$ de distribuições em $(0, T)$. Para $f \in L^2(0, T; W_r)$, definimos sua derivada generalizada como um elemento de $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T), W_r)$ da seguinte maneira: dada uma função $f \in L^2(0, T; W_r)$, podemos representá-la da forma

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \varphi_n \quad \text{com} \quad \int_0^T \|f(t)\|_{W_r}^2 dt < \infty.$$

2. O método dos momentos

Então $f_n(t) \in L^2(0, T)$ e, além disso tem-se que $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^2(0, T)}^2 (\lambda_n + \alpha)^r < \infty$, pois

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^2(0, T)}^2 (\lambda_n + \alpha)^r &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T |f_n(t)|^2 (\lambda_n + \alpha)^r dt \\ &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)|^2 (\lambda_n + \alpha)^r dt \\ &= \int_0^T \|f_n(t)\|_{\ell_r}^2 dt \\ &= \int_0^T \|f(t)\|_{W_r}^2 dt < \infty. \end{aligned}$$

Em particular, também vale que $\{|f_n|\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_r^2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos a derivada generalizada usual: se $\eta \in \mathcal{D}(0, T)$

$$\frac{df_n}{dt}(\eta) := -f_n \left(\frac{d\eta}{dt} \right) = - \int_0^T f_n(t) \eta'(t) dt \quad (2.3)$$

e definimos

$$\frac{df}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dt} \varphi_n, \quad \frac{df}{dt}(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dt}(\eta) \varphi_n.$$

Então, por (2.3)

$$\begin{aligned} \frac{df_n}{dt}(\eta_1 + a\eta_2) &= - \left(\int_0^T f_n(t) (\eta_1 + \mu\eta_2)'(t) dt \right) \\ &= - \left(\int_0^T f_n(t) (\eta_1'(t) + \mu\eta_2'(t)) dt \right) \\ &= - \int_0^T f_n(t) \eta_1'(t) dt - \mu \int_0^T f_n(t) \eta_2'(t) dt \\ &= \frac{df_n}{dt}(\eta_1) + \mu \frac{df_n}{dt}(\eta_2), \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in \mathcal{D}(0, T) \text{ e } \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} \left| \frac{df_n}{dt}(\eta) \right|^2 &= \left| \int_0^T f_n(t) \eta'(t) dt \right|^2 \\ &\leq \int_0^T |f_n(t) \eta'(t)|^2 dt \\ &= \int_0^T |f_n(t)|^2 |\eta'(t)|^2 dt \\ &= \|f_n\|_{L^2(0, T)}^2 \|\eta'\|_{L^2(0, T)}^2. \end{aligned}$$

2. O método dos momentos

A partir disso, vê-se que $\frac{df}{dt} : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow W_r$ é linear, contínua e satisfaz a identidade

$$\frac{df}{dt}(\eta) = -f\left(\frac{d\eta}{dt}\right).$$

Estamos interessados em uma solução contínua (em relação a t) da equação (2.2) em que os valores pertencem a um dos espaços W_r .

Seja $f \in L^2(0, T; W_{r-1})$, $x_0 \in W_r$, dizemos que $x \in C(0, T; W_r)$ é uma solução de (2.2) se a soma $\frac{dx}{dt} + Ax$ pertence ao espaço $L^2(0, T; W_{r-1})$, a igualdade $\frac{dx}{dt} + Ax = f$ é válida nesse espaço e $x(0) = x_0$ em W_r .

Teorema 2.1.8. Sejam $f \in L^2(0, T; W_{r-1})$ e $x_0 \in W_r$. Então existe uma única solução $x \in C(0, T; W_r)$ do problema (2.2), além disso a aplicação $\Gamma : L^2(0, T; W_{r-1}) \times W_r \rightarrow C(0, T; W_r)$, $\Gamma(f, x_0) = x$ é contínua.

Demonstração. Como $f \in L^2(0, T; W_{r-1})$ e $x_0 \in W_r$ podemos representar f e x_0 na forma

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\varphi_n, \quad x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^0\varphi_n,$$

com

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(t)\|^2(\lambda_n + \alpha)^{r-1} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^0|^2(\lambda_n + \alpha)^r < \infty.$$

Formalmente, a solução procurada será na forma

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)\varphi_n. \tag{2.4}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dx_n(t)}{dt}\varphi_n + A\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)\varphi_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dx_n(t)}{dt}\varphi_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n(t)\varphi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{dx_n(t)}{dt} + \lambda_n x_n(t)\right)\varphi_n \end{aligned}$$

e

$$x(0) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(0)\varphi_n.$$

Daí, para x ser solução, para cada $n \in \mathbb{N}$ deve valer

$$\begin{cases} \frac{dx_n(t)}{dt} + \lambda_n x_n(t) = f_n(t), \\ x_n(0) = x_n^0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Sabemos que tal sistema tem solução e é dada por

$$x_n(t) = x_n^0 e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \quad (2.6)$$

Vamos verificar se a função $x_n(t)$ construída por esses coeficientes é realmente a solução desejada para o problema (2.2). Segue de (2.6) que

$$\begin{aligned} |x_n(t)| &= \left| x_n^0 e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right| \\ &\leq |x_n^0 e^{-\lambda_n t}| + \int_0^t |e^{-\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)| d\tau \\ &= |x_n^0| e^{-\lambda_n t} + \|e^{-\lambda_n(t-\tau)}\|_{L^2(0,t)} \|f_n\|_{L^2(0,t)} \end{aligned}$$

logo,

$$|x_n(t)|^2 \leq 2(|x_n^0|^2 e^{-2\lambda_n t} + \|e^{-\lambda_n(t-\tau)}\|_{L^2(0,t)}^2 \|f_n\|_{L^2(0,t)}^2).$$

Para continuar precisamos do próximo resultado.

Lema 2.1.9. Existe uma constante positiva M tal que

$$\frac{1 - e^{-2\lambda_n t}}{2\lambda_n} \leq \frac{M}{(\lambda_n + \alpha)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Demonstração. Como $\lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq C}$, basta provar que existe uma constante K_α de modo que a função $g(x) = \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right) (1 - e^{-xt})$ seja limitada por K_α para todo $x > C$ e, isso ocorre, pois

$$\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right) (1 - e^{-xt}) \leq \left(1 + \frac{\alpha}{C}\right).$$

□

Voltando para demonstração do Teorema 2.1.8 e observando que

$$\|e^{-\lambda_n(t-\tau)}\|_{L^2(0,t)}^2 = \frac{1 - e^{-2\lambda_n t}}{2\lambda_n},$$

temos do Lema 2.1.9 acima que existe uma constante positiva M_α tal que

$$\|e^{-\lambda_n(t-\tau)}\|_{L^2(0,t)}^2 \leq M_\alpha (\lambda_n + \alpha)^{-1}.$$

Com isso,

$$|x_n(t)|^2 \leq M_\alpha(|x_n^0|^2 + \|f_n\|_{L^2(0,t)}^2(\lambda_n + \alpha)^{-1}). \quad (2.7)$$

Multiplicando a última relação por $(\lambda_n + \alpha)^r$ e somando sobre $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t)|^2(\lambda_n + \alpha)^r \leq M_\alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^0|^2(\lambda_n + \alpha)^r + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^2(0,t)}^2(\lambda_n + \alpha)^{r-1} \right), \quad (2.8)$$

o que implica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t)|^2(\lambda_n + \alpha)^r < \infty$$

e portanto $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_r^2$ para cada $t \in [0, T]$. Assim, a solução construída pela fórmula (2.4) com coeficientes (2.5) satisfaz $x(t) \in W_r$ e, as igualdades de (2.2) saí diretamente de (2.5). Ainda de (2.8), temos

$$\|x(t)\|_{W_r}^2 \leq M_\alpha(\|x_0\|_{W_r}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;W_{r-1})}^2). \quad (2.9)$$

Veja que o limite acima é uniforme em t , logo pelo Teorema de Weierstrass (ver [17, pg. 159]) x é contínuo em t , que é $x(t) \in C(0, T; W_r)$. Tomando o supremo e a raiz quadrada no limite obtido em (2.9), obtemos

$$\|x(t)\|_{C(0,T;W_r)} \leq K_\alpha(\|x_0\|_{W_r} + \|f\|_{L^2(0,T;W_{r-1})}).$$

Desta última desigualdade segue a unicidade de x e também a continuidade da aplicação Γ . □

Definição 2.1.10. Definimos o espaço $X_r(0, T)$ como

$$X_r(0, T) = \left\{ x \in H; x \in L^2(0, T; W_{r+1}), \frac{dx}{dt} \in L^2(0, T; W_{r-1}) \right\},$$

munido da norma

$$\|f\|_{X_r(0,T)}^2 = \|f\|_{L^2(0,T;W_{r+1})}^2 + \left\| \frac{df}{dt} \right\|_{L^2(0,T;W_{r-1})}^2.$$

Teorema 2.1.11. Sob condições do Teorema 2.1.8, a solução do problema (2.2) pertencem ao espaço $X_r(0, T)$, além disso a aplicação $\Gamma : L^2(0, T; W_{r-1}) \times W_r \rightarrow X_r(0, T)$, $\Gamma(f, x_0) = x$ é contínua.

Demonstração. Mostremos que a solução construída no Teorema 2.1.8 pertence ao espaço $X_r(0, T)$. Suponha primeiro que as soluções x_n são reais. Multiplicando a

2. O método dos momentos

primeira igualdade de (2.5) por $x_n(t)(\lambda_n + \alpha)^r$ temos

$$x_n(t)(\lambda_n + \alpha)^r \frac{dx_n(t)}{dt} + x_n(t)(\lambda_n + \alpha)^r \lambda_n x_n(t) = x_n(t)(\lambda_n + \alpha)^r f_n(t),$$

integrando em t de 0 a T obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\lambda_n + \alpha)^r (|x_n(T)|^2 - |x_n(0)|^2) + \lambda_n(\lambda_n + \alpha)^r \int_0^T |x_n(t)|^2 dt \\ & = \int_0^T (\lambda_n + \alpha)^{\frac{r-1}{2}} f_n(t) (\lambda_n + \alpha)^{\frac{r+1}{2}} x_n(t) dt, \end{aligned}$$

e finalmente somando $\alpha(\lambda_n + \alpha)^r \int_0^T |x_n(t)|^2 dt$ a ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\lambda_n + \alpha)^r (|x_n(T)|^2 - |x_n(0)|^2) + (\lambda_n + \alpha)^{r+1} \int_0^T |x_n(t)|^2 dt \\ & = \alpha(\lambda_n + \alpha)^r \int_0^T |x_n(t)|^2 dt + \int_0^T (\lambda_n + \alpha)^{\frac{r-1}{2}} f_n(t) (\lambda_n + \alpha)^{\frac{r+1}{2}} x_n(t) dt. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\lambda_n + \alpha)^{\frac{r-1}{2}} f_n(t) (\lambda_n + \alpha)^{\frac{r+1}{2}} x_n(t) dt \\ & \leq \int_0^T \left(\frac{((\lambda_n + \alpha)^{\frac{r-1}{2}} f_n(t))^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon((\lambda_n + \alpha)^{\frac{r+1}{2}} x_n(t))^2}{2} \right) dt \\ & = \frac{1}{2\varepsilon} (\lambda_n + \alpha)^{r-1} \|f_n\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} (\lambda_n + \alpha)^{r+1} \|x_n\|_{L^2(0,T)}^2 \\ & \leq \frac{1}{2\varepsilon} (\lambda_n + \alpha)^{r-1} \|f_n\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} (\lambda_n + \alpha)^{r+1} \|x_n\|_{L^2(0,T)}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\lambda_n + \alpha)^r (|x_n(T)|^2 - |x_n(0)|^2) + (\lambda_n + \alpha)^{r+1} \|x_n\|_{L^2(0,T)}^2 \\ & \leq \alpha(\lambda_n + \alpha)^r \|x_n\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} (\lambda_n + \alpha)^{r-1} \|f_n\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} (\lambda_n + \alpha)^{r+1} \|x_n\|_{L^2(0,T)}^2. \end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon < 2$, transferindo os termos contendo $x_n(T)$ e $x_n(0)$ para o lado direito e

2. O método dos momentos

usando a desigualdade do Teorema 2.1.8, temos

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (\lambda_n + \alpha)^{r+1} \|x_n\|_{L^2(0,T)}^2 &\leq \alpha (\lambda_n + \alpha)^r \|x_n\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} (\lambda_n + \alpha)^{r-1} \|f_n\|_{L^2(0,T)}^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} (\lambda_n + \alpha)^r (|x_n(T)|^2 - |x_n(0)|^2) \\
&\leq M_\alpha (\lambda_n + \alpha)^r (|x_n^0|^2 + \|f_n\|_{L^2(0,T)}^2) (\lambda_n + \alpha)^{-1} \\
&\quad + \frac{1}{2\varepsilon} (\lambda_n + \alpha)^{r-1} \|f_n\|_{L^2(0,T)}^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} (\lambda_n + \alpha)^r (|x_n(T)|^2 - |x_n(0)|^2) \\
&= M_\alpha ((\lambda_n + \alpha)^r |x_n^0|^2 + (\lambda_n + \alpha)^{r-1} \|f_n\|_{L^2(0,T)}^2) \\
&\quad + \frac{1}{2\varepsilon} (\lambda_n + \alpha)^{r-1} \|f_n\|_{L^2(0,T)}^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} (\lambda_n + \alpha)^r (|x_n(T)|^2 - |x_n(0)|^2),
\end{aligned}$$

e fazendo a soma dessa desigualdade em n , conseguimos uma constante $K_\alpha > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \alpha)^{r+1} \|x_n\|_{L^2(0,T)}^2 \leq K_\alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \alpha)^{r-1} \|f_n\|_{L^2(0,T)}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \alpha)^r |x_n^0|^2 \right), \quad (2.10)$$

o que implica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \alpha)^{r+1} \|x_n\|_{L^2(0,T)}^2 < \infty.$$

Com isso, $x \in L^2(0, T; W_{r+1})$.

Ainda de (2.10) obtemos

$$\|x\|_{L^2(0,T;W_{r+1})}^2 \leq K_\alpha (\|x_0\|_{W_r}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;W_{r-1})}^2). \quad (2.11)$$

Resulta da igualdade (2.5) que $\frac{dx(t)}{dt} \in L^2(0, T; W_{r-1})$. Portanto, $x \in X_r(0, T)$ e

$$\|x\|_{X_r(0,T)} \leq K_\alpha (\|x_0\|_{W_r}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;W_{r-1})}^2).$$

Agora, no caso complexo, devemos multiplicar a igualdade $\frac{dx_n(t)}{dt} + \lambda_n x_n(t) = f_n(t)$ por $\overline{x_n(t)} (\lambda_n + \alpha)^r$ e depois multiplicar o conjugado dessa mesma igualdade por o fator $x_n(t) (\lambda_n + \alpha)^r$ e coloque ambas as expressões juntas e a partir daí as desigualdades seguem como antes. \square

Vamos agora trazer isso para o contexto de problemas de controlabilidade. Sejam U um espaço de Hilbert, $\mathcal{U} = L^2(0, T; U)$ e $B \in \mathcal{L}(U, W_{r-1})$, para $r \in \mathbb{R}$. Considere o

sistema de controle

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) = Bu(t), & 0 < t < T, \quad u \in \mathcal{U}, \\ x(0) = x_0, \quad x_0 \in W_r. \end{cases} \quad (2.12)$$

Fazendo a composição dos operadores B e u temos um novo operador Bu que é definido no intervalo $(0, T)$ com valores no espaço W_{r-1} . Como B é limitado, $\|Bu(t)\|_{W_{r-1}} \leq \|B\| |u(t)|$, e portanto $\int_0^T \|Bu(t)\|_{W_{r-1}}^2 dt < \infty$. Logo $Bu \in L^2(0, T; W_{r-1})$, e então pelo Teorema 2.1.8, temos que para cada $u \in \mathcal{U}$ existe uma única solução $x(\cdot, u, x_0) \in C(0, T; W_r)$ do problema (2.12). Isso permite definir o conjunto alcançáveis $R(T, x_0)$ no tempo T a partir do estado x_0 como o conjunto das extremidades das trajetórias $x(T, u, x_0)$ solução de (2.12), isto é,

$$R(T, x_0) = \{x(T, u, x_0); x(T, u, x_0) \in C(0, T; W_r), u \in \mathcal{U}\}.$$

Definimos dois operadores $S(T) \in \mathcal{L}(W_r, W_r)$ e $K(T) \in \mathcal{L}(U, W_r)$ por

$$S(T)x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^0 e^{-\lambda_n T}) \varphi_n \quad (2.13)$$

e

$$K(T)u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T e^{\lambda_n(T-t)} (Bu(t))_n dt \right) \varphi_n, \quad (2.14)$$

com o qual pela igualdade (2.6) temos que

$$x(T, u, x_0) = x(T, 0, x_0) + x(T, u, 0) = S(T)x_0 + K(T)u. \quad (2.15)$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, as funções $(Bu(t))_n$ são as “coordenadas” do elemento $B(u(t)) \in W_{r-1}$, isto é,

$$B(u(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} (Bu(t))_n \varphi_n \text{ com } (Bu(t))_n \in \ell_{r-1}^2. \quad (2.16)$$

Estamos interessados em analisar o conjunto $R(T, 0) := R(T)$ que é imagem do operador $K(T)$. O conjunto $R(T, x_0)$ é obtido de $R(T)$ através de um deslocamento $S(T)x_0$. Agora vamos nos concentrar em estudar o conjunto $R(T) = \text{Im}(K(T))$.

Como já mencionado, W_{-r} é o espaço dual de W_r , $r \in \mathbb{R}$, assim os elementos de um podem ser tratados como funcionais aplicados em elementos do outro. Vamos denotar

2. O método dos momentos

o funcional $f \in W_{-r}$ no elemento $g \in W_r$ como $\langle f, g \rangle_*$, isto é, se

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \text{ e } g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n,$$

então

$$\langle f, g \rangle_* = f(g) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \overline{c_n}.$$

Identificando U com U^* e dado $B \in \mathcal{L}(U, W_{r-1})$, definimos $B^* \in \mathcal{L}(W_{1-r}, U)$ por a igualdade

$$\langle Bg, f \rangle_* = \langle g, B^* f \rangle_U, g \in U, f \in W_{r-1}. \quad (2.17)$$

A partir disso, vemos que $Bu(t)$ pode ser expresso por

$$(Bu(t))_n = \langle Bu(t), \varphi_n \rangle_* = \langle u(t), B^* \varphi_n \rangle_U. \quad (2.18)$$

Seja

$$x_n(T, u, 0) = \langle x(T, u, 0), \varphi_n \rangle_*,$$

em que $x(T, u, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(T, u, 0) \varphi_n$. Como $\|x(T, u, 0)\|_{W_r} = \|\{x_n(T, u, 0)\}\|_{\ell_r^2}$, o conjunto alcançável $R(T) \subset W_r$ é isométrico ao conjunto $\hat{R}(T)$ de seqüências $\{x_n(T, u, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no espaço ℓ_r^2 , no qual o controle u percorre em todo o espaço \mathcal{U} .

Agora, observemos de (2.14) e (2.18) que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x_n(T, u, 0) &= \int_0^T e^{-\lambda_n(T-\tau)} (Bu(\tau))_n d\tau \\ &= \int_0^T \langle u(\tau), e^{-\lambda_n(T-\tau)} B^* \varphi_n \rangle_U d\tau \\ &= \langle u(\tau), e^{-\lambda_n(T-\tau)} B^* \varphi_n \rangle_U. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Considere a família de funções de $\mathcal{U} = L^2(0, T; U)$

$$\mathcal{F} = \{e_n(T - \tau)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } e_n(T - \tau) = e^{-\lambda_n(T-\tau)} B^* \varphi_n \in \mathcal{U}. \quad (2.20)$$

Chamaremos estas funções de famílias de vetores exponenciais porque consistem em uma multiplicação de uma função escalar em $L^2(0, T)$ e um vetor do espaço U .

Fazendo a mudança de variável $t = T - \tau$ com o qual a fórmula (2.19) é expressa

$$x_n(T, u, 0) = \langle u(T - t), e^{-\lambda_n t} B^* \varphi_n \rangle_U = \langle u(T - t), e_n(t) \rangle_U,$$

vemos que o problema da controlabilidade passa a ser um problema dos momentos da família \mathcal{F} (ver Seção 1.2). Podemos enunciar o resultado de nossos argumentos na forma de um teorema.

Teorema 2.1.12. O conjunto alcançável $R(T) \subset W_r$ do problema (2.12) é isométrico ao conjunto $\hat{R}(T) \subset \ell_r^2$ em que $\hat{R}(T)$ coincide com o conjunto de seqüências $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_r^2$ tal que o problema dos momentos

$$c_n = \langle u(T-t), e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}}, n \in \mathbb{N}, \quad (2.21)$$

tem solução $u \in \mathcal{U}$.

Uma vez que os espaços ℓ_r^2 e ℓ^2 são isomorfos, visto na Observação 4, podemos enunciar um problema de momentos em ℓ^2 . Vamos escrever $\tilde{x}_n = x_n(\lambda_n + \alpha)^{r/2}$, $\tilde{e}_n = e_n(\lambda_n + \alpha)^{r/2}$ e

$$\tilde{R}(T) = \{(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2; (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{R}(T)\}.$$

Temos o seguinte corolário.

Corolário 2.1.13. O conjunto $\tilde{R}(T) \subset \ell^2$ coincide com o conjunto de seqüências $(\tilde{c}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_r^2$ para o qual o problema de momentos

$$\tilde{c}_n = \langle u(T-t), (\lambda_n + \alpha)^{r/2} e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}}, n \in \mathbb{N}, \quad (2.22)$$

tem solução $u \in \mathcal{U}$.

2.2 Equações de evolução de segunda ordem no tempo

Consideramos a equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + Ax(t) = f(t), & 0 < t < T, \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1, \end{cases} \quad (2.23)$$

em que A é um operador auto-adjunto estritamente positivo com autovalores $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e autofunções $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que formam uma base ortonormal no espaço H . Aqui, também consideramos para cada $f \in L^2(0, T; W_r)$, a derivada generalizada $\frac{d^2 x(t)}{dt^2}$ como um elemento de $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T), W_r)$.

Podemos definir a solução do problema (2.23) da mesma forma que fizemos para o problema (2.2) da seção anterior. Sejam $f \in L^2(0, T; W_r)$, $x_0 \in W_{r+1}$ e $x_1 \in W_r$. Dizemos que a função x é solução de (2.23) se

2. O método dos momentos

- (a) $x \in C(0, T, W_{r+1})$ e $\dot{x} \in C(0, T, W_r)$;
- (b) A soma $\frac{d^2x}{dt^2} + Ax$ pertence ao espaço $L^2(0, T; W_r)$ e a igualdade $\frac{d^2x}{dt^2} + Ax = f$ é válida nesse espaço;
- (c) As condições iniciais $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1$ são igualdades nos espaços W_{r+1} e W_r , respectivamente.

Teorema 2.2.1. Sejam $f \in L^2(0, T; W_r)$ e $\{x_0, x_1\} \in \mathcal{W}_{r+1}$ em que $\mathcal{W}_{r+1} = W_{r+1} \oplus W_r$. Então o problema (2.23) admite uma única solução, além disso a aplicação $\Gamma : L^2(0, T; W_r) \times \mathcal{W}_{r+1} \rightarrow C(0, T, W_{r+1}), \Gamma(f, \{x_0, x_1\}) = \{x, \dot{x}\}$ é contínua.

Demonstração. Como na demonstração do Teorema 2.1.8 podemos escrever f, x_0 e x_1 por

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\varphi_n, \quad x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^0\varphi_n, \quad x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^1\varphi_n,$$

com

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(t)\|^2(\lambda_n + \alpha)^{r-1} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^0|^2(\lambda_n + \alpha)^r < \infty, \\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^1|^2(\lambda_n + \alpha)^r < \infty. \end{aligned}$$

Procuramos a função x na forma

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)\varphi_n. \quad (2.24)$$

Então,

$$\begin{cases} \frac{d^2x_n(t)}{dt^2} + \lambda_n x_n(t) = f_n(t), \\ x_n(0) = x_n^0, \dot{x}_n(0) = x_n^1. \end{cases} \quad (2.25)$$

As soluções do sistema (2.25) acima são

$$x_n(t) = x_n^0 \cos(\sqrt{\lambda_n}t) + x_n^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}t)}{\sqrt{\lambda_n}} + \int_0^t f_n(\tau) \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(t-\tau))}{\sqrt{\lambda_n}} d\tau \quad (2.26)$$

se $\lambda_n > 0$,

$$x_n(t) = x_n^0 \cosh(\sqrt{-\lambda_n}t) + x_n^1 \frac{\sinh(\sqrt{-\lambda_n}t)}{\sqrt{-\lambda_n}} + \int_0^t f_n(\tau) \frac{\sinh(\sqrt{-\lambda_n}(t-\tau))}{\sqrt{-\lambda_n}} d\tau \quad (2.27)$$

se $\lambda_n < 0$,

$$x_n(t) = x_n^0 + x_n^1 t + \int_0^t f_n(\tau)(t - \tau) d\tau \quad (2.28)$$

se $\lambda_n = 0$. Também

$$\dot{x}_n(t) = -\sqrt{\lambda_n} x_n^0 \sin(\sqrt{\lambda_n} t) + x_n^1 \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + \int_0^t f_n(\tau) \cos(\sqrt{\lambda_n}(t - \tau)) d\tau \quad (2.29)$$

se $\lambda_n > 0$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) &= -\sqrt{-\lambda_n} x_n^0 \sinh(\sqrt{-\lambda_n} t) + x_n^1 \cosh(\sqrt{-\lambda_n} t) + \\ &+ \int_0^t f_n(\tau) \cosh(\sqrt{-\lambda_n}(t - \tau)) d\tau \end{aligned} \quad (2.30)$$

se $\lambda_n < 0$,

$$\dot{x}_n(t) = x_n^1 + \int_0^t f_n(\tau) d\tau \quad (2.31)$$

se $\lambda_n = 0$.

Uma vez que, para $\lambda_n > 0$, temos que

$$\cos(\sqrt{\lambda_n} t) = \cosh(\sqrt{-\lambda_n} t) e \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{\sinh(\sqrt{-\lambda_n} t)}{\sqrt{-\lambda_n}},$$

e que para $\lambda_n = 0$,

$$\frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}} = t,$$

podemos combinar as fórmulas (2.26), (2.27), (2.28) apenas na fórmula (2.26) e (2.29), (2.30), (2.31) apenas na fórmula (2.29). Mostremos que a função $x_n(t)$ construída por esses coeficientes é a solução desejada para o problema (2.23). Segue de (2.26) que

$$\begin{aligned} |x_n(t)| &= \left| x_n^0 \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + x_n^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}} + \int_0^t f_n(\tau) \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(t - \tau))}{\sqrt{\lambda_n}} d\tau \right| \\ &\leq |x_n^0 \cos(\sqrt{\lambda_n} t)| + \left| x_n^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}} \right| + \int_0^t \left| f_n(\tau) \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(t - \tau))}{\sqrt{\lambda_n}} \right| d\tau \\ &= |x_n^0| |\cos(\sqrt{\lambda_n} t)| + |x_n^1| \left| \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}} \right| + \int_0^t |f_n(\tau)| \left| \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(t - \tau))}{\sqrt{\lambda_n}} \right| d\tau. \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado e depois multiplicando por $(\lambda_n + \alpha)^{r+1}$ em ambos os lados,

tem-se

$$|x_n(t)|^2(\lambda_n + \alpha)^{r+1} \leq 3 \left(|x_n^0|^2 |\cos(\sqrt{\lambda_n}t)|^2 (\lambda_n + \alpha)^{r+1} + |x_n^1|^2 \left| \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}t)}{\sqrt{\lambda_n}} \right|^2 (\lambda_n + \alpha)^{r+1} + \left(\int_0^t |f_n(\tau)|^2 \left| \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(t-\tau))}{\sqrt{\lambda_n}} \right|^2 d\tau \right) (\lambda_n + \alpha)^{r+1} \right).$$

O seguinte lema é preciso para continuarmos, cuja a prova segue de maneira análoga ao Lema 2.1.9.

Lema 2.2.2. Existe uma constante positiva M tal que

$$\left| \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}t)}{\sqrt{\lambda_n}} \right|^2 \leq \frac{M}{(\lambda_n + \alpha)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Dando continuidade, obtemos que

$$\begin{aligned} |x_n(t)|^2(\lambda_n + \alpha)^{r+1} &\leq M_\alpha \left(|x_n^0|^2(\lambda_n + \alpha)^{r+1} + |x_n^1|^2(\lambda_n + \alpha)^{-1}(\lambda_n + \alpha)^{r+1} \right. \\ &\quad \left. + (\lambda_n + \alpha)^{r+1} \int_0^t |f_n(\tau)|^2(\lambda_n + \alpha)^{-1} d\tau \right) \\ &\leq M_\alpha \left(|x_n^0|^2(\lambda_n + \alpha)^{r+1} + |x_n^1|^2(\lambda_n + \alpha)^r + \|f_n(t)\|_{L^2(0,T)}^2(\lambda_n + \alpha)^r \right). \end{aligned}$$

Aplicando a soma em n , obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t)|^2(\lambda_n + \alpha)^{r+1} &\leq M_\alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^0|^2(\lambda_n + \alpha)^{r+1} + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^1|^2(\lambda_n + \alpha)^r \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(t)\|_{L^2(0,T)}^2(\lambda_n + \alpha)^r, \end{aligned} \quad (2.32)$$

o que implica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t)|^2(\lambda_n + \alpha)^{r+1} < \infty$$

e, portanto $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_{r+1}^2$ para cada $t \in [0, T]$. Resulta ainda de (2.32) que

$$\|x(t)\|_{W_{r+1}}^2 \leq M_\alpha (\|x_0\|_{W_{r+1}}^2 + \|x_1\|_{W_r}^2 + \|f\|_{L^2(0,T)}^2). \quad (2.33)$$

Agora, segue de (2.29) que

$$|\dot{x}_n(t)|^2(\lambda_n + \alpha)^r \leq 3(|x_n^0|^2(\lambda_n + \alpha)^r |\lambda_n| + |x_n^1|^2(\lambda_n + \alpha)^r + \|f_n(t)\|_{L^2(0,T)}^2(\lambda_n + \alpha)^r).$$

2. O método dos momentos

Sendo $\lambda_n + \alpha \geq C > 0$, $|\lambda_n| \leq N_\alpha(\lambda_n + \alpha)$ em que N_α ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\dot{x}_n(t)|^2 (\lambda_n + \alpha)^r &\leq N_\alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^0|^2 (\lambda_n + \alpha)^{r+1} + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^1|^2 (\lambda_n + \alpha)^r \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(t)\|_{L^2(0,T)}^2 (\lambda_n + \alpha)^r \right), \end{aligned} \quad (2.34)$$

o que implica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\dot{x}_n(t)|^2 (\lambda_n + \alpha)^r < \infty$$

e, então $\{\dot{x}_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_r^2$ para todo $t \in [0, T]$. Portanto, a função

$$\dot{x}(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \dot{x}_n(t) \varphi_n$$

($\dot{x}_n(t)$ determinado por (2.29)) satisfaz

$$\|\dot{x}(t)\|_{W_r}^2 \leq N_\alpha (\|x_0\|_{W_{r+1}}^2 + \|x_1\|_{W_r}^2 + \|f\|_{L^2(0,T)}^2). \quad (2.35)$$

Os outros passos da prova são semelhantes aos realizados no Teorema 2.1.8. Em particular, as desigualdades (2.33) e (2.35) implicam

$$\|\{x, \dot{x}\}\|_{C(0,T; \mathcal{W}_{r+1})}^2 \leq K_\alpha (\|x_0\|_{W_{r+1}}^2 + \|x_1\|_{W_r}^2 + \|f\|_{L^2(0,T)}^2),$$

no qual K_α é uma constante positiva. □

Sejam U um espaço de Hilbert, $\mathcal{U} = L^2(0, T; U)$ e $B \in \mathcal{L}(U, W_r)$, para $r \in \mathbb{R}$. Considere o sistema de controle

$$\begin{cases} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + Ax(t) = Bu(t), & 0 < t < T, \quad u \in \mathcal{U}, \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1, & \{x_0, x_1\} \in \mathcal{W}_{r+1}. \end{cases} \quad (2.36)$$

Uma vez que $Bu \in L^2(0, T; W_r)$, o Teorema 2.2.1 nos permite definir o conjunto alcançáveis $\mathcal{R}(T, x_0, x_1)$ do sistema (2.36) da seguinte maneira

$$\mathcal{R}(T, x_0, x_1) = \{\{x(T), \dot{x}(T)\} \in \mathcal{W}_{r+1}; u \in \mathcal{U}\}.$$

Cada elemento do conjunto $\mathcal{R}(T, x_0, x_1)$ pode ser representado exclusivamente na forma

$$\begin{aligned} x(T) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n(T) \varphi_n, \|x(T)\|_{W_{r+1}} = \|\{x_n(T)\}\|_{\ell_{r+1}^2}, \\ \dot{x}(T) &= \sum_{n=1}^{\infty} \dot{x}_n(T) \varphi_n, \|\dot{x}(T)\|_{W_r} = \|\{\dot{x}_n(T)\}\|_{\ell_r^2}. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto $\mathcal{R}(T, x_0, x_1)$ é isométrico ao conjunto $\hat{\mathcal{R}}(T, x_0, x_1) \subset \ell_{r+1}^2 \oplus \ell_r^2$ consistindo de pares de sequências $(\{x_n(T)\}, \{\dot{x}_n(T)\})$ correspondente a $(x(T), \dot{x}(T)) \in \mathcal{R}(T, x_0, x_1)$.

Definimos os operadores $\mathcal{G}(T) : \mathcal{W}_{r+1} \rightarrow \mathcal{W}_{r+1}$ e $\mathcal{H}(T) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}_{r+1}$ por

$$\mathcal{G}(T) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n^0 \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + x_n^1 \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n} t)}{\sqrt{\lambda_n}} \right) \varphi_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\sqrt{\lambda_n} x_n^0 \sin(\sqrt{\lambda_n} t) + x_n^1 \cos(\sqrt{\lambda_n} t) \right) \varphi_n \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

e

$$\mathcal{H}(T)u = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(T-t))}{\sqrt{\lambda_n}} (Bu(t))_n dt \right) \varphi_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T \cos(\sqrt{\lambda_n}(T-t)) (Bu(t))_n dt \right) \varphi_n \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Segue daí e de (2.26), (2.29) que

$$\begin{pmatrix} x(T) \\ \dot{x}(T) \end{pmatrix} = \mathcal{G}(T) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \mathcal{H}(T)u. \quad (2.39)$$

Como na seção anterior, estamos interessados primeiro no conjunto $\mathcal{R}(T) := \mathcal{R}(T, 0, 0)$, que é a imagem do operador $\mathcal{H}(T)$, e no conjunto isométrico a ele,

$$\hat{\mathcal{R}}(T) = \hat{\mathcal{R}}(T, 0, 0).$$

Seja $B \in \mathcal{L}(U, W_r)$ e defina $B^* \in \mathcal{L}(W_{-r}, U)$ por a relação

$$\langle Bv, \psi \rangle_* = \langle v, B^* \psi \rangle_U, v \in U, \psi \in W_{-r}.$$

As fórmulas (2.26) e (2.29) fornecem os elementos do conjunto $\hat{\mathcal{R}}(T)$ a ser determinado

pelo controle $u \in \mathcal{U}$ de acordo com (comparar com (2.19))

$$\begin{aligned} x_n(T) &= \left\langle u(T - \tau), \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(T - \tau))}{\sqrt{\lambda_n}} B^* \varphi_n \right\rangle_{\mathcal{U}}, \\ \dot{x}_n(T) &= \langle u(T - \tau), \cos(\sqrt{\lambda_n}(T - \tau)) B^* \varphi_n \rangle_{\mathcal{U}}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Vamos introduzir no espaço \mathcal{U} duas famílias de funções, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \zeta_n^{(1)}(T - \tau) &= \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(T - \tau))}{\sqrt{\lambda_n}} B^* \varphi_n, \\ \zeta_n^{(2)}(T - \tau) &= \cos(\sqrt{\lambda_n}(T - \tau)) B^* \varphi_n. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Mudando a variável $t = T - \tau$ em (2.40), obtemos

$$\begin{aligned} x_n(T) &= \left\langle u(T - t), \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}(t))}{\sqrt{\lambda_n}} B^* \varphi_n \right\rangle_{\mathcal{U}} = \langle u(T - t), \zeta_n^{(1)}(t) \rangle_{\mathcal{U}}, \\ \dot{x}_n(T) &= \langle u(T - t), \cos(\sqrt{\lambda_n}(t)) B^* \varphi_n \rangle_{\mathcal{U}} = \langle u(T - t), \zeta_n^{(2)}(t) \rangle_{\mathcal{U}}, \end{aligned}$$

e assim reduzimos o problema da controlabilidade do sistema (2.36) ao problema dos momentos relativo à família de funções $\{\zeta_n^{(1)}\} \cup \{\zeta_n^{(2)}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Os resultados obtidos podem ser formulados como o seguinte teorema.

Teorema 2.2.3. O conjunto alcançável $\mathcal{R}(T) \subset \mathcal{W}_{r+1}$ do sistema (2.36) é isométrico ao conjunto $\hat{\mathcal{R}}(T) \subset \ell_{r+1}^2 \oplus \ell_r^2$ em que $\hat{\mathcal{R}}(T)$ coincide com o conjunto de pares de seqüências $(\{a_n\}, \{b_n\})$ para o qual o problema dos momentos

$$a_n = \langle u(T - t), \zeta_n^{(1)}(t) \rangle_{\mathcal{U}}, b_n = \langle u(T - t), \zeta_n^{(2)}(t) \rangle_{\mathcal{U}}, n \in \mathbb{N}, \quad (2.42)$$

tem solução $u \in \mathcal{U}$.

Iremos representar as igualdades (2.42) do teorema anterior de uma forma diferente, pois precisaremos adiante. Para isso, definimos $\mathbb{K} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e introduzimos o espaço $\tilde{\ell}_r^2$ de seqüências $(c_k)_{k \in \mathbb{K}}$ com a norma

$$\|(c_k)_{k \in \mathbb{K}}\|_{\tilde{\ell}_r^2} = \left(\sum_{k \in \mathbb{K}} |c_k|^2 (\lambda_{|k|} + \alpha)^r \right)^{1/2}.$$

Quando $r = 0$, denotamos o espaço $\tilde{\ell}_0^2$ apenas por $\tilde{\ell}^2$. Analogamente ao terceiro item da Observação 4, conseguimos a existência de um isomorfismo entre os espaços $\tilde{\ell}_r^2$ e $\tilde{\ell}^2$.

2. O método dos momentos

Escrevemos

$$\kappa = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{|\lambda_n|; \lambda_n \neq 0\} \text{ e } \mathbb{K}_0 = \begin{cases} \{k \in \mathbb{K}; \lambda_{|k|} = 0\}, & \text{se } \kappa > 0, \\ \{k \in \mathbb{K}; |\lambda_{|k|}| < 1\}, & \text{se } \kappa = 0. \end{cases} \quad (2.43)$$

Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\omega_n = \begin{cases} \sqrt{\lambda_n}, & \text{se } \lambda_n \geq 0, \\ -i\sqrt{-\lambda_n}, & \text{se } \lambda_n < 0, \end{cases} \quad \omega_{-n} = -\omega_n.$$

Vamos associar o par de seqüências $(\{a_n\}, \{b_n\})$ à seqüência (c_k) de tal modo que

$$\begin{cases} c_k = -i\omega_k a_{|k|} + b_{|k|}, & \text{para } k \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_0, \\ c_{|k|} = a_{|k|}, c_{-|k|} = b_{|k|}, & \text{para } k \in \mathbb{K}_0. \end{cases} \quad (2.44)$$

O operador $L : \ell_{r+1}^2 \oplus \ell_r^2 \rightarrow \tilde{\ell}_r^2$ definido por $(\{a_n\}, \{b_n\}) \mapsto \{c_k\}$ em que c_k é dado pelas fórmulas (2.44) é um isomorfismo. De fato, consideremos o operador $M : \tilde{\ell}_r^2 \rightarrow \ell_{r+1}^2 \oplus \ell_r^2$ definido por

$$\begin{cases} a_n = \frac{c_n - c_{-n}}{2i\omega_n}, b_n = \frac{c_n + c_{-n}}{2}, & \text{para } n \in \mathbb{N} \cap (\mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_0) \\ a_n = c_n, b_n = c_{-n}, & \text{para } n \in \mathbb{N} \cap \mathbb{K}_0. \end{cases}$$

Não é difícil verificar que $(L \circ M)(\{c_k\}_{k \in \mathbb{K}}) = \{c_k\}_{k \in \mathbb{K}}$ para todo $\{c_k\}_{k \in \mathbb{K}} \in \tilde{\ell}_r^2$ e $(M \circ L)((\{a_n\}, \{b_n\})_{n \in \mathbb{N} \cap \mathbb{K}}) = ((\{a_n\}, \{b_n\})_{n \in \mathbb{N} \cap \mathbb{K}})$ para todo $(\{a_n\}, \{b_n\})_{n \in \mathbb{N} \cap \mathbb{K}} \in \ell_{r+1}^2 \oplus \ell_r^2$, isto é, a inversa de L é o operador M , ou seja, $M = L^{-1}$. Também não é difícil ver que L é um operador linear e limitado, com inversa limitada.

Em vez das famílias $\{\zeta_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\zeta_n^{(2)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, vamos considerar no espaço \mathcal{U} a família $\mathcal{E} = \{e_k(t)\}_{k \in \mathbb{K}}$:

$$\begin{cases} e_k(t) = e^{i\omega_k t} B^* \varphi_{|k|}, & \text{se } k \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_0, \\ e_{|k|}(t) = \zeta_{|k|}^{(1)}(t), e_{-|k|}(t) = \zeta_{|k|}^{(2)}(t), & \text{se } k \in \mathbb{K}. \end{cases} \quad (2.45)$$

Multiplicando a primeira das igualdades (2.42), $n \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_0$, por $\pm i\omega_n$ e somando o resultado com a segunda igualdade, obtemos

$$c_k = \langle u(T-t), e_k(t) \rangle_{\mathcal{U}}, k \in \mathbb{K}. \quad (2.46)$$

Assim, do Teorema 2.2.3 e dos argumentos subsequentes, podemos tirar a seguinte conclusão.

Teorema 2.2.4. O conjunto alcançável $\mathcal{R}(T) \subset \mathcal{W}_{r+1}$ do sistema (2.36) é isomorfo ao

conjunto de sequências (c_k) no espaço $\tilde{\ell}_r^2$ para o qual o problema de momentos (2.46) tem solução $u \in \mathcal{U}$.

Multiplicando ambas as partes da igualdade (2.46) por $(\lambda_{|k|} + \alpha)^{r/2}$, como no caso (2.21),(2.22), podemos passar o problema de momentos para sequências do espaço $\tilde{\ell}^2$.

2.3 Tipos de controlabilidade e sua relação com famílias exponenciais

2.3.1 Controlabilidade para sistemas de primeira ordem no tempo

Para simplificar, voltamos ao sistema

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) = Bu(t), & 0 < t < T, \quad u \in \mathcal{U}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Nosso objetivo é analisar o conjunto alcançabilidade $R(T)$, que determinamos ser a imagem do operador $K(T)$. Como mostrado o operador $K(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, W_r)$ é da forma

$$K(T)u = x(T, u, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(T-t), e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}} \varphi_n. \quad (2.48)$$

Seja H_0 um espaço de Hilbert densamente contínuo contido em W_r , que contém todas as autofunções φ_n (em particular, H_0 pode coincidir com W_r). Apresentamos as definições de controlabilidade para o sistema (2.47).

Definição 2.3.1. Diz-se que o sistema (2.47) é exatamente controlável em relação a H_0 no tempo T , se $H_0 \subset R(T)$. Em outras palavras, dada $\varphi_n \in H_0 \subset W_r$ existe um controle $u_n \in \mathcal{U}$ tal que $x(T, u_n, 0) = K(T)u = \varphi_n$.

Observação 7. Em particular, a igualdade $H_0 = R(T)$ pode ocorrer. Essa condição especial está relacionada a uma importante propriedade da família \mathcal{F} que veremos mais adiante.

Definição 2.3.2. Diz-se que o sistema (2.47) é aproximadamente controlável em relação a H_0 no tempo T , se $\overline{R(T)}^{\|\cdot\|_{W_r}} = W_r$. Em outras palavras, dados $\varphi_n \in H_0 \subset W_r$ e $\varepsilon > 0$ existe um controle $u_n \in \mathcal{U}$ tal que $\|x(T, u_n, 0) - \varphi_n\|_{W_r} < \varepsilon$.

Observação 8. A controlabilidade aproximada pode ser separada mais em dois casos:

2. O método dos momentos

- Controlável mínima em relação a H_0 no tempo T : para qualquer $n \in \mathbb{N}$ pode ser encontrado um controle $u_n \in \mathcal{U}$ tal que $K(T)u_n = \varphi_n$.
- Controlável mínima uniforme em relação a H_0 no tempo T : para qualquer $n \in \mathbb{N}$ pode ser encontrado um controle $u_n \in \mathcal{U}$ tal que $K(T)u_n = \varphi_n$ e um $c > 0$ com $\|u_n\|_{\mathcal{U}} \leq c\|\varphi_n\|_{H_0}$.

Vamos estabelecer a relação entre a controlabilidade do sistema (2.47) e as propriedades da família $\mathcal{F} = \{e_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no espaço \mathcal{U} , em que $e_n(t) = e^{-\lambda_n t} B^* \varphi_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\rho_n > 0$ para todo n e considere o espaço $W_{(\rho_n)}$ dado pelo fecho das somas finitas da forma $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ com norma

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \right\|_{W_{(\rho_n)}} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \rho_n^2 \right)^{1/2}. \quad (2.49)$$

Anunciaremos os resultados de controlabilidade para espaços específicos $H_0 = W_{(\rho_n)}$. Para fazer a inclusão $H_0 \hookrightarrow W_r$, vamos exigir que a relação

$$(\lambda_n + \alpha)^r \leq N \rho_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

seja verdadeira. Considere também o espaço $\ell_{(\rho_n)}^2$ dado pelas sequências $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(c_n \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pertence ao espaço ℓ^2 . Como antes, podemos verificar que os espaços ℓ^2 e $\ell_{(\rho_n)}^2$ são isomorfos.

Observação 9. Notemos que $W_{(\rho_n)}$ é igual ao espaço das séries da forma $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ tal que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_{(\rho_n)}^2$. Isso porque se $f \in W_{(\rho_n)}$ existe $f_k = \sum_{n=1}^k c_n^{(k)} \varphi_n$ com $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$, logo a sequência $(c_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\ell_{(\rho_n)}^2$, em consequência existe $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de modo que $\lim_{k \rightarrow \infty} c_n^{(k)} = c_n$ e, finalmente $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_{(\rho_n)}^2$.

Observação 10. O espaço W_r coincide com $W_{(r_n)}$, uma vez que $r_n = (\lambda_n + \alpha)^{r/2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De fato, basta perceber que

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_r^2 \Leftrightarrow (c_n (\lambda_n + \alpha)^{r/2})_{n \in \mathbb{N}} = (c_n r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \Leftrightarrow (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_{(r_n)}^2.$$

Agora, junto com a família $\mathcal{F} = \{e_n(t)\}$, vamos introduzir as famílias $\tilde{\mathcal{F}} = \{r_n e_n(t)\}$

2. O método dos momentos

com $r_n = (\lambda_n + \alpha)^{r/2}$, $\mathcal{F}_0 = \{\rho_n e_n(t)\}$ e definir os seguintes operadores

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}} : \ell^2 &\rightarrow W_r, \quad \tilde{\mathcal{S}}((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{r_n} \varphi_n, \\ \mathcal{S}_0 : \ell^2 &\rightarrow H_0, \quad \mathcal{S}_0((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\rho_n} \varphi_n.\end{aligned}$$

Lembremos que os operadores do problema de momentos das famílias $\tilde{\mathcal{F}}$ e \mathcal{F}_0 são, respectivamente,

$$\begin{aligned}D(\mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{F}}}) &= \{v \in \mathcal{U}; \{\langle v, r_n e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2\} = \{v \in \mathcal{U}; \{\langle v, e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_r^2\}, \\ \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{F}}} : D(\mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{F}}}) &\subset \mathcal{U} \rightarrow \ell^2, \quad \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{F}}}(g) = \{\langle g, r_n e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{n \in \mathbb{N}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}) &= \{v \in \mathcal{U}; \{\langle v, \rho_n e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2\} = \{v \in \mathcal{U}; \{\langle v, e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_{(\rho_n)}^2\}, \\ \mathcal{P}_{\mathcal{F}_0} : D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}) &\subset \mathcal{U} \rightarrow \ell^2, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}(g) = \{\langle g, \rho_n e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{n \in \mathbb{N}}.\end{aligned}$$

Notemos que se $u \in D(\mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{F}}})$ então

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{F}}}(u(T-t))) &= \tilde{\mathcal{S}}(\{\langle u(T-t), r_n e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{n \in \mathbb{N}}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u(T-t), r_n e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}}}{r_n} \varphi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(T-t), e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}} \varphi_n.\end{aligned}$$

Analogamente, se $u \in D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0})$ então

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_0(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}(u(T-t))) &= \mathcal{S}_0(\{\langle u(T-t), \rho_n e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{n \in \mathbb{N}}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle u(T-t), \rho_n e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}}}{\rho_n} \varphi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(T-t), e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}} \varphi_n.\end{aligned}$$

Nessas condições, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.3.3. Os operadores $\tilde{\mathcal{S}}, \mathcal{S}_0$ são isométricos em seus espaços e, além disso, as igualdades

$$K(T) = \tilde{\mathcal{S}} \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{F}}} S, \quad K(T)|_{S^{-1}D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0})} = \mathcal{S}_0 \mathcal{P}_{\mathcal{F}_0} S|_{S^{-1}D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0})}$$

são verdadeiras, em que $S : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ é uma isometria dada por $S(u)(t) = u(T - t)$.

Demonstração. De fato,

$$\|\tilde{\mathcal{S}}((x_n)_{n \in \mathbb{N}})\|_{W_r}^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{r_n} \varphi_n \right\|_{W_r}^2 = \left\| \frac{x_n}{r_n} \right\|_{\ell_r^2}^2 = \|x_n\|_{\ell^2}^2$$

e

$$\|\mathcal{S}_0((x_n)_{n \in \mathbb{N}})\|_{H_0}^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\rho_n} \varphi_n \right\|_{H_0}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_n}{\rho_n} \right|^2 \rho_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{\rho_n^2} \rho_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x_n\|_{\ell^2}^2.$$

As igualdades segue imediatamente da fórmula (2.48). \square

Observação 11. Se $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema biortogonal para a família \mathcal{F} então $\{\tilde{\theta}_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{r_n^{-1}\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\theta_n^0\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\rho_n^{-1}\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são sistemas biortogonais para as famílias $\tilde{\mathcal{F}}$ e \mathcal{F}_0 , respectivamente, pois

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\theta}_m, r_n e_n(t) \rangle &= \langle r_m^{-1} \theta_m, r_n e_n(t) \rangle = r_m^{-1} r_n \langle \theta_m, e_n(t) \rangle = \delta_{mn}, \\ \langle \theta_m^0, \rho_n e_n(t) \rangle &= \langle \rho_m^{-1} \theta_m, \rho_n e_n(t) \rangle = \rho_m^{-1} \rho_n \langle \theta_m, e_n(t) \rangle = \delta_{mn}. \end{aligned}$$

Estamos em condições de enunciar o teorema da controlabilidade para um sistema como (2.47).

Teorema 2.3.4. Sejam $H_0 = W_{(\rho_n)}$ e considere as famílias $\tilde{\mathcal{F}} = \{r_n e_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{F}_0 = \{\rho_n e_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (a) O sistema (2.47) é exatamente controlável em relação a H_0 no tempo T no sentido de $H_0 = R(T)$ se, e somente se, a família \mathcal{F}_0 é uma base de Riesz em \mathcal{U} .
- (b) Se o sistema (2.47) é exatamente controlável em relação a H_0 no tempo T então a família \mathcal{F}_0 é mínima uniforme em \mathcal{U} .
- (c) O sistema (2.47) é aproximadamente controlável em relação a H_0 no tempo T no sentido de controle mínimo uniforme se, e somente se, a família \mathcal{F}_0 é mínima uniforme em \mathcal{U} .
- (d) O sistema (2.47) é aproximadamente controlável no tempo T no sentido de controle mínimo se, e somente se, a família \mathcal{F}_0 é mínima em \mathcal{U} .
- (e) O sistema (2.47) é aproximadamente controlável no tempo T se, e somente, se família $\tilde{\mathcal{F}}$ é ω -li em \mathcal{U} .

2. O método dos momentos

Demonstração. Antes de iniciarmos a prova do teorema, vamos mostrar que $D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}) = \mathcal{U}$ se, e somente se, $R(T) \subset H_0$. Suponha que $D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}) = \mathcal{U}$ e que $f \in R(T)$. Então, existe $u \in \mathcal{U}$ tal que $f = K(T)u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(T-t), e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}} \varphi_n$. Como $u \in \mathcal{U}$ e $D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}) = \mathcal{U}$, segue que $\{\langle u(T-t), \rho_n e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. Logo, $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(T-t), e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}} \varphi_n$ com $\{\langle u(T-t), e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2_{(\rho_n)}$ e, portanto $f \in H_0$. Reciprocamente, suponha que $R(T) \subset H_0$ e consideramos $u \in \mathcal{U}$. Sabemos que para cada controle, existe uma solução, logo $f \in R(T)$ e $f = K(T)u$. Perceba $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ com $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2_{(\rho_n)}$ e também $f = K(T)u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(T-t), e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}} \varphi_n$. Assim, $\langle u(T-t), e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}} = c_n$ e daí $\langle u(T-t), \rho_n e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}} = (c_n \rho_n)$ com $(c_n \rho_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. Isso implica que $Su \in D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0})$, mas como S é uma isometria, $u \in D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0})$. Com isso, temos $\mathcal{U} \subset D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0})$ e, portanto vale $D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}) = \mathcal{U}$.

- (a) Se o sistema (2.47) é exatamente controlável em relação a H_0 no tempo T no sentido de $H_0 = R(T)$ então pelo o que foi provado acima $D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}) = \mathcal{U}$. Sabemos pelo item (a) do Teorema 1.2.1 que \mathcal{F}_0 é uma base de Riesz se, e somente se, $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}$ é um isomorfismo entre \mathcal{U} e ℓ^2 . Seja $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, temos que $\left(\frac{c_n}{\rho_n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2_{(\rho_n)}$ e como o sistema é exatamente controlável, dada $f \in R(T) = H_0$ existe $u \in \mathcal{U}$ tal que $K(T)u = f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\rho_n} \varphi_n$, logo $\mathcal{S}_0 \mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}(u(T-t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\rho_n} \varphi_n$ com o qual $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}(u(T-t)) = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Portanto o operador $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}$ é invertível e em consequência do Teorema do Gráfico Fechado, é um isomorfismo.

Agora, se $f \in H_0 = W_{(\rho_n)}$ então $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ em que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2_{(\rho_n)}$, isto é, $(c_n \rho_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. Como a família \mathcal{F}_0 é uma base de Riesz em \mathcal{U} , pelo Teorema 1.2.1 temos que $Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}) = \ell^2$. Logo existe $u \in \mathcal{U}$ de modo que $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}(u(T-t)) = (c_n \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Usando a fórmula $K(T)|_{S^{-1}D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0})} = \mathcal{S}_0 \mathcal{P}_{\mathcal{F}_0} S|_{S^{-1}D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0})}$ aplicada em u , obtemos

$$K(T)u = \mathcal{S}_0 \mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}(u(T-t)) = \mathcal{S}_0((c_n \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \rho_n}{\rho_n} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n = f.$$

Portanto, $f \in R(T)$. Novamente pelo item (a) Teorema 1.2.1 temos $D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}) = \mathcal{U}$ e então $R(T) \subset H_0$. Com isso, $R(T) = H_0$.

- (b) Como o sistema (2.47) é exatamente controlável em relação a H_0 no tempo T , temos pelo item anterior que a família \mathcal{F}_0 é uma base de Riesz em \mathcal{U} , logo vale a igualdade $Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}) = \ell^2$. Segue do item (b) do Teorema 1.2.1 que a família \mathcal{F}_0 é

mínima uniforme.

(c) Seja $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a base canônica de ℓ^2 .

Se o sistema (2.47) é aproximadamente controlável em relação a H_0 no tempo T no sentido de controle mínimo uniforme, então para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existe um controle $u_n \in \mathcal{U}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \langle u_n(T-t), e_n(t) \rangle_{\mathcal{U}} \varphi_n = K(T)u_n = \varphi_n$ e um $c > 0$ com $\|u_n\|_{\mathcal{U}} \leq c \|\varphi_n\|_{H_0}$. Como $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal em H , temos

$$\langle u_n(T-t), e_k(t) \rangle_{\mathcal{U}} = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq n \\ 1, & \text{se } k = n. \end{cases}$$

Logo, $\langle \rho_n^{-1}u_n(T-t), \rho_k e_k(t) \rangle_{\mathcal{U}} = \delta_{nk}$, isso nos diz que $\{\rho_n^{-1}u_n(T-t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema biortogonal para a família \mathcal{F}_0 . Além disso,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\rho_n^{-1}u_n\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \rho_n^{-1} \|u_n\| \leq c \sup_{n \in \mathbb{N}} \rho_n^{-1} \|\varphi_n\|_{H_0} \leq c$$

e, portanto \mathcal{F}_0 é mínima uniforme.

Reciprocamente, se a família \mathcal{F}_0 é mínima uniforme, existe um sistema biortogonal $\{\theta_n^0\}_{n \in \mathbb{N}}$ para \mathcal{F}_0 e uma constante positiva M tal que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\theta_n^0\| \leq M$. Note que

$$\begin{aligned} K(T)(S^{-1}(\theta_n^0)) &= \mathcal{S}_0 \mathcal{P}_{\mathcal{F}_0} S|_{S^{-1}D(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0})}(S^{-1}(\theta_n^0)) \\ &= \mathcal{S}_0 \mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}(\theta_n^0) \\ &= \mathcal{S}_0(\{\langle \theta_n^0, \rho_n e_n(t) \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}) \\ &= \mathcal{S}_0(\phi_n). \end{aligned}$$

Assim, se $u_n = \rho_n S^{-1}(\theta_n^0)$ então

$$K(T)(\rho_n S^{-1}(\theta_n^0)) = \mathcal{S}_0(\rho_n \phi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n \phi_n}{\rho_n} \varphi_n = \varphi_n$$

e

$$\|u_n\|_{\mathcal{U}} = \|\rho_n S^{-1}(\theta_n^0)\|_{\mathcal{U}} = \|\theta_n^0\|_{\mathcal{U}} \rho_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\theta_n^0\|_{\mathcal{U}} \rho_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\theta_n^0\|_{\mathcal{U}} \|\varphi_n\|_{H_0}.$$

A partir disso, concluímos que o sistema é aproximadamente controlável no sentido de controle mínimo uniforme.

(d) A prova da afirmação (d) está contida na prova da afirmação (c).

- (e) Fazendo uso da representação $K(T) = \tilde{\mathcal{S}}\mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{F}}}S$, conseguimos que a controlabilidade aproximada é equivalente $\overline{Im(\mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{F}}})} = \ell^2$ que, pelo Teorema 1.2.1 é, por sua vez, equivalente a família $\tilde{\mathcal{F}}$ ser ω -l.i.

□

Vamos apresentar um resultado referente a controlabilidade em relação aos diferentes espaços da forma $H_0 = W_{(\rho_n)}$.

Teorema 2.3.5. (a) Sejam $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\hat{\rho}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ duas sequências de números positivos de tal modo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n^2}{\hat{\rho}_n^2} < \infty$. Se o sistema (2.47) é aproximadamente controlável no tempo T em relação a $W_{(\rho_n)}$ no sentido de controle mínimos uniforme então o sistema (2.47) é exatamente controlável no tempo T em relação a $W_{(\hat{\rho}_n)}$.

- (b) Considere \mathcal{F} uma família mínima em \mathcal{U} , $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um sistema biortogonal para \mathcal{F} e $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência tal que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\theta_n\|_{\mathcal{U}} \rho_n^{-1} = \infty$. Então o sistema (2.47) não é exatamente controlável no tempo T em relação a $W_{(\rho_n)}$.

Demonstração. (a) Temos pelo teorema anterior item (c) que a família \mathcal{F}_0 é mínima uniforme em \mathcal{U} , logo existem um sistema biortogonal $\{\rho_n^{-1}u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para \mathcal{F}_0 e uma constante $M > 0$ tal que $\|\rho_n^{-1}u_n\|_{\mathcal{U}} \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $\theta_n = u_n$, pela construção θ_n é um sistema biortogonal para \mathcal{F} e $\|\theta_n\|_{\mathcal{U}} \leq M\rho_n$. Agora, fazendo $\tilde{\theta}_n = r_n^{-1}\theta_n$, esta família é um sistema biortogonal para $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\|\tilde{\theta}_n\|_{\mathcal{U}} \leq M\rho_n r_n^{-1}$. Se $x \in W_{(\hat{\rho}_n)}$ então $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \hat{\rho}_n^2 < \infty$. Queremos mostrar que $x \in R(T)$. Pela fórmula $K(T) = \tilde{\mathcal{S}}\mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{F}}}S$, basta ver que a sequência $\{x_n r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pertence a imagem do operador $\mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{F}}}$. Para isso, pelo item (a) do Corolário 1.2.4, é suficiente provar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n r_n| \|\tilde{\theta}_n\|_{\mathcal{U}}$ é convergente. De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n r_n| \|\tilde{\theta}_n\|_{\mathcal{U}} &\leq M \sum_{n=1}^{\infty} |x_n r_n| \rho_n r_n^{-1} = M \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \rho_n = M \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \hat{\rho}_n \rho_n \hat{\rho}_n^{-1} \\ &\leq M \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \hat{\rho}_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n^2}{\hat{\rho}_n^2} \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

- (b) Como $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\theta_n\|_{\mathcal{U}} \rho_n^{-1} = \infty$, existe $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \|\theta_n^0\|_{\mathcal{U}^2} \rho_n^{-2} = \infty$. Em outras palavras, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \|\theta_n^0\|_{\mathcal{U}^2} = \infty$, em que $\{\theta_n^0\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\theta_n \rho_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é

2. O método dos momentos

um sistema biortogonal para a família \mathcal{F}_0 . Segue do item (b) do Corolário 1.2.4 que $Im(\mathcal{P}_{\mathcal{F}_0}) \neq \ell^2$, e conseqüentemente $R(T) \neq W_{(\rho_n)}$.

□

Teorema 2.3.6. Se o sistema (2.47) é aproximadamente controlável no tempo $T > 0$ então existe um espaço H_0 denso em W_r de modo que $R(T) = H_0$.

Demonstração. Considere, juntamente com o sistema de controle (2.47), o sistema dual

$$\begin{cases} -\frac{dy(t)}{dt} + A^*y(t) = 0, 0 < t < T, \\ y(T) = y_T, y_T \in W_r^* = W_{-r}. \end{cases} \quad (2.50)$$

Aqui, A é um operador entre os espaços W_{r+1} e W_{r-1} definido por

$$A \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n \varphi_n.$$

É imediato que $A \in \mathcal{L}(W_{r+1}, W_{r-1})$ e, portanto $A^* \in \mathcal{L}(W_{r-1}^*, W_{r+1}^*) = \mathcal{L}(W_{-r+1}, W_{-r-1})$.

Analogamente ao que foi feito no Teorema 2.1.11, pode-se provar que existe uma solução $y \in X_r(0, T)$ para o sistema (2.50). Isso significa dizer, $y \in L^2(0, T; W_{-r+1})$, $\frac{dy}{dt} \in L^2(0, T; W_{-r-1})$ e $A^*y \in L^2(0, T; W_{-r+1})$. Também conseguimos de forma análoga à desigualdade (2.11), a seguinte $\|y\|_{L^2(0, T; W_{-r+1})} \leq K \|y_T\|_{W_{-r}}$.

Uma vez que $B^* \in \mathcal{L}(W_{-r+1}, U)$ e está definido por $B^*y = v$, temos que $v \in \mathcal{U} = L^2(0, T; U)$, pois para cada t , $v(t) = B^*y(t) \in U$. Além disso, $\|v\|_{\mathcal{U}} = \|B^*y\| \leq \|B^*\| \|y\|_{L^2(0, T; W_{-r+1})} \leq M \|y_T\|_{W_{-r}}$.

Vamos definir o espaço \hat{H} como sendo o fecho de W_{-r} com a norma $\|y_T\|_{\hat{H}} = \|B^*y\|_{\mathcal{U}}$, em que y é a solução da equação (2.50). Vejamos que é de fato uma norma em W_{-r} . Como o operador B^* é linear e $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ é uma norma, vale a desigualdade triangular e o produto por um escalar. Resta agora verificar que se $\|y_T\|_{\hat{H}} = 0$ então $y_T = 0$. Suponha que $\|y_T\|_{\hat{H}} = 0$, então por definição $\|B^*y\|_{\mathcal{U}} = 0$ e como $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ é uma norma, $B^*y = 0$.

Seja $u \in \mathcal{U} = L^2(0, T; U)$ e $x \in L^2(0, T; W_{r+1})$ com $\frac{dx}{dt} \in L^2(0, T; W_{r-1})$ uma solução do problema (2.47). Seja também $y_T \in W_{-r}$ e $y \in L^2(0, T; W_{-r+1})$ com $\frac{dy}{dt} \in$

$L^2(0, T; W_{-r-1})$ uma solução de (2.50). Temos que

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^T \left\langle \frac{dx}{dt} + Ax - Bu, y \right\rangle_* dt - \int_0^T \left\langle x, \frac{dy}{dt} + A^*y \right\rangle_* dt \\
 &= \int_0^T \left\langle \frac{dx}{dt}, y \right\rangle_* dt - \int_0^T \langle Bu, y \rangle_* dt + \int_0^T \left\langle x, \frac{dy}{dt} \right\rangle_* dt \\
 &= \int_0^T \frac{d}{dt} \langle x, y \rangle_* dt - \int_0^T \langle u, B^*y \rangle_U dt \\
 &= \langle x(T), y(T) \rangle_* - \langle x(0), y(0) \rangle_* - \langle u, B^*y \rangle_U \\
 &= \langle x(T), y(T) \rangle_* - \langle u, B^*y \rangle_U,
 \end{aligned}$$

o que implica,

$$\langle x(T), y(T) \rangle_* = \langle u, B^*y \rangle_U. \quad (2.51)$$

Se $B^*y = 0$, então o lado esquerdo de (2.51) é igual a zero para todo $u \in \mathcal{U}$. Como o sistema (2.47) é aproximadamente controlável, o conjunto $R(T)$ é denso em W_r e, portanto $y(T) = y_T = 0$. Logo, $\|\cdot\|_{\hat{H}}$ é uma norma e assim \hat{H} é um espaço normado bem definido com $W_{-r} \subset \hat{H}$.

Vamos denotar H_0 como o espaço dual de \hat{H} , isto é, $H_0 = \hat{H}^*$. Em vista disso, a inclusão $H_0 \hookrightarrow W_r$ é densamente contínua. Mostraremos que o sistema (2.50) é exatamente controlável em relação a H_0 no tempo T no sentido de $H_0 = R(T)$.

Seja $x(T) \in R(T) = \text{Im}(K(T)) \subset W_r$. Temos por (2.51) que

$$|\langle x(T), y_T \rangle_*| = |\langle u, B^*y \rangle_U| \leq \|u\|_{\mathcal{U}} \|y_T\|_{\hat{H}}, \text{ para todo } y_T \in W_{-r},$$

isto é, $x(T)$ é limitado para qualquer $u \in \mathcal{U}$. Logo $x(T) \in W_r^* = W_{-r}$ e assim, pelo Teorema de Hahn-Banach, podemos estender $x(T)$ até \hat{H} , concluindo daí que $x(T) \in H_0$. Vamos mostrar que a inclusão inversa é válida.

Definimos o operador $\Lambda : W_{-r} \rightarrow W_r$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 W_{-r} &\rightarrow L^2(0, T; W_{-r+1}) \rightarrow L^2(0, T; U) \rightarrow C(0, T; W_r) \rightarrow W_r \\
 y_T &\mapsto y \text{ solução de (2.50)} \mapsto u = B^*y \mapsto x \text{ solução de (2.47)} \mapsto x(T).
 \end{aligned}$$

Não é difícil verificar que Λ é linear e também é limitada, pois

$$\|\Lambda y_T\|_{W_r} = \|x(T)\|_{W_r} \leq K \|Bu\|_{L^2(0, T; W_{r-1})} \leq M \|u\|_{\mathcal{U}} = M \|B^*y\|_{\mathcal{U}} = M \|y_T\|_{\hat{H}}.$$

Logo, pelo Teorema de Hahn-Banach, podemos estender Λ até \hat{H} .

Seja $y_T \in W_{-r}$, usando de novo (2.51) e o fato de W_{-r} ser denso em \hat{H} , temos que

$$\langle \Lambda y_T, y_T \rangle_* = \langle x(T), y_T \rangle_* = \langle u, B^* y \rangle_{\mathcal{U}} = \langle B^* y, B^* y \rangle_{\mathcal{U}} = \|B^* y\|_{\mathcal{U}}^2 = \|y_T\|_{\hat{H}}^2. \quad (2.52)$$

Definimos $C : W_{-r} \times W_{-r} \rightarrow \mathbb{C}$ por $C(y_T, z_T) = \langle \Lambda y_T, z_T \rangle_*$. C resulta em uma forma bilinear contínua que também satisfaz $|C(y_T, z_T)| \leq \|y_T\|_{\hat{H}} \|z_T\|_{\hat{H}}$. Com um argumento semelhante, podemos estender C ao espaço $\hat{H} \times \hat{H}$. Como $|C(y_T, z_T)| \leq \|y_T\|_{\hat{H}} \|z_T\|_{\hat{H}}$ e $C(y_T, y_T) = \langle \Lambda y_T, y_T \rangle_* \geq \|y_T\|_{\hat{H}}^2$, estamos nas hipóteses do Teorema de Lax-Milgram.

Dado $\Phi \in H_0$ existe um único elemento $z \in \hat{H}$ tal que $C(z, y_T) = \Phi(y_T)$ para todo $y_T \in \hat{H}$. Como $C(z, y_T) = \langle \Lambda z, y_T \rangle_* = \Phi(y_T)$ para todo y_T , temos que $\Lambda z = \Phi$ e o resultado está provado. \square

2.3.2 Controlabilidade para sistemas de segunda ordem no tempo

Até agora, os argumentos que estudamos estão relacionados ao sistema de controle (2.47). Mostramos aqui que todas as definições e construções, com apenas pequenas modificações, podem ser transferidas para sistemas de segunda ordem no tempo.

Seja $u \in \mathcal{U} = L^2(0, T; U)$, $B \in \mathcal{L}(U, W_r)$. Considere o sistema

$$\begin{cases} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + Ax(t) = Bu(t), 0 < t < T, u \in \mathcal{U}, \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0. \end{cases} \quad (2.53)$$

Vamos estudar o conjunto alcançável $\mathcal{R}(T)$ do sistema (2.53), que é a imagem do operador $\mathcal{H}(T)$. Lembre que o operador $\mathcal{H}(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W}_{r+1})$ com $\mathcal{W}_{r+1} := W_{r+1} \oplus W_r$ é dado por

$$\mathcal{H}(T)u = \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(T-t), \zeta_n^{(1)}(t) \rangle_{\mathcal{U}} \varphi_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(T-t), \zeta_n^{(2)}(t) \rangle_{\mathcal{U}} \varphi_n \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

em que $\zeta_n^{(1)}(t) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}t)}{\sqrt{\lambda_n}} B^* \varphi_n$ e $\zeta_n^{(2)}(t) = \cos(\sqrt{\lambda_n}t) B^* \varphi_n$ para todo n .

Seja \mathcal{H}_0 um espaço de Hilbert densamente contido em \mathcal{W}_{r+1} e contendo todas as funções da forma $\{\varphi_n, 0\}$ e $\{0, \varphi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Veremos abaixo as definições de controlabilidade para o sistema (2.53).

Definição 2.3.7. Dizemos que o sistema (2.53) é exatamente controlável em relação a \mathcal{H}_0 no tempo T , se $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{R}(T)$.

Observação 12. Na definição anterior, a igualdade $\mathcal{H}_0 = \mathcal{R}(T)$ pode ocorrer.

Definição 2.3.8. Dizemos que o sistema (2.53) é aproximadamente controlável em relação a \mathcal{H}_0 no tempo T , se $\overline{\mathcal{R}(T)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{W}_{r+1}}} = \mathcal{W}_{r+1}$.

Observação 13. Há mais dois tipos de controlabilidade aproximada, que são as seguintes:

- Controlabilidade mínima em relação a \mathcal{H}_0 no tempo T : para qualquer $n \in \mathbb{N}$ é possível encontrar controles $u_n^0, u_n^1 \in \mathcal{U}$ tal que

$$\mathcal{H}(T)u_n^0 = \{\varphi_n, 0\}, \quad \mathcal{H}(T)u_n^1 = \{0, \varphi_n\};$$

- Controlabilidade mínima uniforme em relação a \mathcal{H}_0 no tempo T : para qualquer $n \in \mathbb{N}$ é possível encontrar controles $u_n^0, u_n^1 \in \mathcal{U}$ tal que

$$\mathcal{H}(T)u_n^0 = \{\varphi_n, 0\}, \quad \mathcal{H}(T)u_n^1 = \{0, \varphi_n\}$$

e constantes positivas c_1, c_2 com

$$\|u_n^0\|_{\mathcal{U}} \leq c_1 \|\{\varphi_n, 0\}\|_{\mathcal{H}_0}, \quad \|u_n^1\|_{\mathcal{U}} \leq c_2 \|\{0, \varphi_n\}\|_{\mathcal{H}_0}.$$

Vamos associar as definições de controlabilidade introduzidos para o sistema (2.53) e as propriedades da família $\mathcal{E} = \{e_k(t)\}_{k \in \mathbb{K}}$ em que

$$\begin{cases} e_k(t) = e^{i\omega_k t} B^* \varphi_{|k|}, & \text{se } k \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_0, \\ e_{|k|}(t) = \zeta_{|k|}^{(1)}(t), e_{-|k|}(t) = \zeta_{|k|}^{(2)}(t), & \text{se } k \in \mathbb{K}_0, \end{cases}$$

com \mathbb{K}_0 dado pelas fórmulas (2.43).

Para isso, nos limitaremos ao espaço \mathcal{H}_0 da forma $\mathcal{W}_{(\rho_n)}$,

$$\mathcal{W}_{(\rho_n)} := W_{((\lambda_n + \alpha)^{1/2} \rho_n)} \oplus W_{(\rho_n)}.$$

Lembre que o espaço $W_{(\rho_n)}$ é definido como o fecho das somas finitas da forma $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ com norma (2.49). Uma vez que a inclusão $\mathcal{H}_0 \hookrightarrow \mathcal{W}_{r+1}$ é verdadeira, existe uma constante positiva M tal que

$$(\lambda_n + \alpha)^{r/2} \leq M \rho_n.$$

Definimos também o espaço $\tilde{\ell}_{(\rho_n)}^2$ dado pelas sequências $(c_k)_{k \in \mathbb{K}}$ tal que $(c_k \rho_{|k|})_{k \in \mathbb{K}}$

2. O método dos momentos

pertence ao espaço $\tilde{\ell}^2$. Como antes, podemos verificar a existência de um isomorfismo entre os espaços $\tilde{\ell}^2$ e $\tilde{\ell}_{(\rho_n)}^2$.

Observação 14. Tomando $r_n = (\lambda_n + \alpha)^{r/2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que o espaço \mathcal{W}_{r+1} é igual ao espaço $\mathcal{W}_{(r_n)}$, pois

$$\mathcal{W}_{r+1} = W_{r+1} \oplus W_r = W_{((\lambda_n + \alpha)^{1/2} r_n)} \oplus W_{(r_n)} = \mathcal{W}_{(r_n)}.$$

Vimos na seção anterior que o operador $L : \ell_{r+1}^2 \oplus \ell_r^2 \rightarrow \tilde{\ell}_r^2$ é um isomorfismo e é definido por

$$\begin{cases} c_k = -i\omega_k a_{|k|} + b_{|k|}, \text{ para } k \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_0, \\ c_{|k|} = a_{|k|}, c_{-|k|} = b_{|k|}, \text{ para } k \in \mathbb{K}_0, \end{cases} \quad (2.55)$$

e seu inverso $L^{-1} : \tilde{\ell}_r^2 \rightarrow \ell_{r+1}^2 \oplus \ell_r^2$ é dado por

$$\begin{cases} a_n = \frac{c_n - c_{-n}}{2i\omega_n}, b_n = \frac{c_n + c_{-n}}{2}, \text{ para } n \in \mathbb{N} \cap (\mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_0), \\ a_n = c_n, b_n = c_{-n}, \text{ para } n \in \mathbb{N} \cap \mathbb{K}_0. \end{cases} \quad (2.56)$$

Definimos os operadores

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}} : \tilde{\ell}^2 \rightarrow \mathcal{W}_{r+1}, \quad \tilde{\mathcal{S}}((c_k)_{k \in \mathbb{K}}) &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n} \varphi_n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{r_n} \varphi_n \right\}, \\ \mathcal{S}_0 : \tilde{\ell}^2 \rightarrow \mathcal{W}_{(\rho_n)}, \quad \mathcal{S}_0((c_k)_{k \in \mathbb{K}}) &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\rho_n} \varphi_n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\rho_n} \varphi_n \right\}, \end{aligned}$$

em que os coeficientes a_n e b_n , $n \in \mathbb{N}$, são determinados via c_k , $k \in \mathbb{K}$, por as fórmulas (2.56).

Junto com a família $\mathcal{E} = \{e_k(t)\}$, agora consideramos as famílias $\tilde{\mathcal{E}} = \{r_{|k|}e_k(t)\}$ e $\mathcal{E}_0 = \{\rho_{|k|}e_k(t)\}$. Os operadores do problema de momentos de tais famílias são, respectivamente,

$$\begin{aligned} D(\mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{E}}}) &= \{v \in \mathcal{U}; \{\langle v, r_{|k|}e_k(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{k \in \mathbb{K}} \in \tilde{\ell}^2\} = \{v \in \mathcal{U}; \{\langle v, e_k(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \tilde{\ell}_r^2\}, \\ \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{E}}} : D(\mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{E}}}) &\subset \mathcal{U} \rightarrow \tilde{\ell}^2, \quad \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{E}}}(g) = \{\langle g, r_{|k|}e_k(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{k \in \mathbb{K}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D(\mathcal{P}_{\mathcal{E}_0}) &= \{v \in \mathcal{U}; \{\langle v, \rho_{|k|}e_k(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{k \in \mathbb{K}} \in \tilde{\ell}^2\} = \{v \in \mathcal{U}; \{\langle v, e_k(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{k \in \mathbb{K}} \in \tilde{\ell}_{(\rho_n)}^2\}, \\ \mathcal{P}_{\mathcal{E}_0} : D(\mathcal{P}_{\mathcal{E}_0}) &\subset \mathcal{U} \rightarrow \tilde{\ell}^2, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{E}_0}(g) = \{\langle g, \rho_{|k|}e_k(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{k \in \mathbb{K}}. \end{aligned}$$

2. O método dos momentos

Nessas condições, notemos que se $u \in D(\mathcal{P}_{\tilde{\varepsilon}})$ então

$$\tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{P}_{\tilde{\varepsilon}}(u(T-t))) = \tilde{\mathcal{S}}(\{\langle u(T-t), r_{|k|}e_k(t) \rangle u\}_{k \in \mathbb{K}}).$$

Assim, para $k \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_0$ temos $e_k = e^{i\omega_k t} B^* \varphi_{|k|}$ e por (2.54)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\langle u(T-t), r_{|n|}e^{i\omega_n t} B^* \varphi_{|n|} \rangle u - (\langle u(T-t), r_{|-n|}e^{i\omega_{-n} t} B^* \varphi_{|-n|} \rangle u)}{2i\omega_n} \\ &= \frac{\langle u(T-t), r_n e^{i\omega_n t} B^* \varphi_n - r_n e^{-i\omega_n t} B^* \varphi_n \rangle u}{2i\omega_n} \\ &= \left\langle u(T-t), r_n \frac{e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}}{2i\omega_n} B^* \varphi_n \right\rangle u \\ &= \left\langle u(T-t), r_n \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} B^* \varphi_n \right\rangle u \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\langle u(T-t), r_{|n|}e^{i\omega_n t} B^* \varphi_{|n|} \rangle u + (\langle u(T-t), r_{|-n|}e^{i\omega_{-n} t} B^* \varphi_{|-n|} \rangle u)}{2} \\ &= \frac{\langle u(T-t), r_n e^{i\omega_n t} B^* \varphi_n + r_n e^{-i\omega_n t} B^* \varphi_n \rangle u}{2} \\ &= \left\langle u(T-t), r_n \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2} B^* \varphi_n \right\rangle u \\ &= \langle u(T-t), r_n \cos(\omega_n t) B^* \varphi_n \rangle u. \end{aligned}$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{P}_{\tilde{\varepsilon}}(u(T-t))) &= \tilde{\mathcal{S}}(\{\langle u(T-t), r_{|k|}e_k(t) \rangle u\}_{k \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_0}) \\ &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle u(T-t), \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} B^* \varphi_n \right\rangle u \varphi_n, \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(T-t), \cos(\omega_n t) B^* \varphi_n \rangle u \varphi_n \right\}. \end{aligned}$$

Agora, para $k \in \mathbb{K}_0$ temos $e_{|k|}(t) = \zeta_{|k|}^{(1)}(t)$, $e_{-|k|}(t) = \zeta_{|k|}^{(2)}(t)$ e novamente por (2.54)

$$a_n = \langle u(T-t), r_n \zeta_n^{(1)}(t) \rangle u \text{ e } b_n = \langle u(T-t), r_n \zeta_n^{(2)}(t) \rangle u.$$

De onde, obtemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}(\mathcal{P}_{\tilde{\varepsilon}}(u(T-t))) &= \tilde{\mathcal{S}}(\{\langle u(T-t), r_{|k|}e_k(t) \rangle u\}_{k \in \mathbb{K}_0}) \\ &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(T-t), \zeta_n^{(1)}(t) \rangle u \varphi_n, \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(T-t), \zeta_n^{(2)}(t) \rangle u \varphi_n \right\}. \end{aligned}$$

2. O método dos momentos

Analogamente, se $u \in D(\mathcal{P}_{\mathcal{E}_0})$, então

$$\mathcal{S}_0(\mathcal{P}_{\mathcal{E}_0}(u(T-t))) = \mathcal{S}_0(\{\langle u(T-t), \rho_{|k|} e_k(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{k \in \mathbb{K}}).$$

Logo, para $k \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_0$,

$$a_n = \left\langle u(T-, t), \rho_n \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} B^* \varphi_n \right\rangle_{\mathcal{U}}, \quad b_n = \langle u(T-, t), \rho_n \cos(\omega_n t) B^* \varphi_n \rangle_{\mathcal{U}},$$

e para $k \in \mathbb{K}_0$,

$$a_n = \langle u(T-t), \rho_n \zeta_n^{(1)}(t) \rangle_{\mathcal{U}}, \quad b_n = \langle u(T-t), \rho_n \zeta_n^{(2)}(t) \rangle_{\mathcal{U}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0(\mathcal{P}_{\mathcal{E}_0}(u(T-t))) &= \mathcal{S}_0(\{\langle u(T-t), \rho_{|k|} e_k(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{k \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{K}_0}) \\ &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle u(T-t), \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} B^* \varphi_n \right\rangle_{\mathcal{U}} \varphi_n, \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(T-t), \cos(\omega_n t) B^* \varphi_n \rangle_{\mathcal{U}} \varphi_n \right\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0(\mathcal{P}_{\mathcal{E}_0}(u(T-t))) &= \mathcal{S}_0(\{\langle u(T-t), \rho_{|k|} e_k(t) \rangle_{\mathcal{U}}\}_{k \in \mathbb{K}_0}) \\ &= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(T-t), \zeta_n^{(1)}(t) \rangle_{\mathcal{U}} \varphi_n, \sum_{n=1}^{\infty} \langle u(T-t), \zeta_n^{(2)}(t) \rangle_{\mathcal{U}} \varphi_n \right\}. \end{aligned}$$

Proposição 2.3.9. Os operadores $\tilde{\mathcal{S}}, \mathcal{S}_0$ são isomorfismos em seus espaços e, além disso, as igualdades

$$\mathcal{H}(T) = \tilde{\mathcal{S}} \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{E}}} S, \quad \mathcal{H}(T)|_{S^{-1}D(\mathcal{S}_0)} = \mathcal{S}_0 \mathcal{P}_{\mathcal{S}_0} S|_{S^{-1}D(\mathcal{S}_0)}, \quad (2.57)$$

são válidas, em que $S : \mathcal{U} \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}$ é uma isometria dada por $S(u)(t) = u(T-t)$.

Demonstração. Se $\tilde{\mathcal{S}}((c_k)_{k \in \mathbb{K}}) = 0$ então $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n} \varphi_n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{r_n} \varphi_n \right\} = 0$, implicando $a_n = b_n = 0$, isto é, $c_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{K}$, ou ainda, $\{c_k\}_{k \in \mathbb{K}} = 0$. Logo, $\tilde{\mathcal{S}}$ é injetivo. Agora, dado $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n} \varphi_n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{r_n} \varphi_n \right\} \in \mathcal{W}_{r+1}$, basta tomar c_k , para todo k , dado pelas fórmulas (2.55), e com isso $\tilde{\mathcal{S}}$ é sobrejetivo. Portanto, uma bijeção. Com um argumento análogo, concluímos também que \mathcal{S}_0 é uma bijeção. Então, $\tilde{\mathcal{S}}$ e \mathcal{S}_0 admitem inversas. Verifica-se diretamente que os operadores $\tilde{\mathcal{S}}$ e \mathcal{S}_0 são lineares. Além disso, são limitados,

pois

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{\mathcal{S}}((c_k)_{k \in \mathbb{K}})\|_{\mathcal{W}_{r+1}} &= \left\| \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n} \varphi_n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{r_n} \varphi_n \right\} \right\|_{W_{r+1} \oplus W_r} \\
 &= \left\| \left\{ \frac{a_n}{r_n}, \frac{b_n}{r_n} \right\} \right\|_{\ell_{r+1}^2 \oplus \ell_r^2} \\
 &\leq M \left\| \left\{ \frac{c_k}{r_k} \right\}_{k \in \mathbb{K}} \right\|_{\tilde{\ell}_r^2} \\
 &= M \|\{c_k\}_{k \in \mathbb{K}}\|_{\tilde{\ell}^2}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{S}_0((c_k)_{k \in \mathbb{K}})\|_{\mathcal{W}_{(\rho_n)}} &= \left\| \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\rho_n} \varphi_n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\rho_n} \varphi_n \right\} \right\|_{W_{((\lambda_n + \alpha)^{1/2} \rho_n)} \oplus W_{(\rho_n)}} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{\rho_n} \right|^2 (\lambda_n + \alpha) \rho_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{b_n}{\rho_n} \right|^2 \rho_n^2 \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 (\lambda_n + \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 (\lambda_n + \alpha)^{r+1} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 (\lambda_n + \alpha)^r \\
 &= \|(\{a_n\}, \{b_n\})\|_{\ell_{r+1}^2 \oplus \ell_r^2} \\
 &\leq M \|\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}\|_{\tilde{\ell}_r^2} \\
 &= M \|\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}\|_{\tilde{\ell}^2}.
 \end{aligned}$$

Segue (ver [10, pg. 35]) que os operadores inversos de $\tilde{\mathcal{S}}$ e \mathcal{S}_0 são limitadas. As identidades em (2.57) são facilmente verificadas pela fórmula (2.54). \square

Com base na proposição anterior, pode-se obter os análogos das afirmações do Teorema 2.3.4.

Teorema 2.3.10. Sejam $\mathcal{H}_0 = \mathcal{W}_{r+1}$ e considere as famílias $\tilde{\mathcal{E}} = \{r_{|k|} e_k(t)\}_{k \in \mathbb{K}}$ e $\mathcal{E}_0 = \{\rho_{|k|} e_k(t)\}_{k \in \mathbb{K}}$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (a) O sistema (2.53) é exatamente controlável em relação a \mathcal{H}_0 no tempo T no sentido de $\mathcal{H}_0 = R(T)$ se, e somente, se a família \mathcal{E}_0 é uma base de Riesz em \mathcal{U} .
- (b) Se o sistema (2.53) é exatamente controlável em relação a \mathcal{H}_0 no tempo T então a família \mathcal{E}_0 é mínima uniforme em \mathcal{U} .

- (c) O sistema (2.53) é aproximadamente controlável em relação a \mathcal{H}_0 no tempo T no sentido de controle mínimo uniforme se, e somente se, a família \mathcal{E}_0 é mínima uniforme em \mathcal{U} .
- (d) O sistema (2.53) é aproximadamente controlável em relação a \mathcal{H}_0 no tempo T no sentido de controle mínimo se, e somente se, a família \mathcal{E}_0 é mínima em \mathcal{U} .
- (e) O sistema (2.53) é aproximadamente controlável em relação a \mathcal{H}_0 no tempo T se, e somente se, a família $\tilde{\mathcal{E}}$ é ω -li em \mathcal{U} .

Também é válido um análogo do Teorema 2.3.6.

Teorema 2.3.11. Se o sistema (2.53) é aproximadamente controlável no tempo $T > 0$ então existe um espaço \mathcal{H}_0 denso em \mathcal{W}_{r+1} de modo que $\mathcal{R}(T) = \mathcal{H}_0$.

Capítulo 3

Controlabilidade exata de equações hiperbólicas acopladas

Neste capítulo, aplicaremos os resultados vistos até então na controlabilidade de um sistema de equações de ondas com controle localizado na fronteira do domínio. Aqui, reduziremos o problema de controlabilidade à resolubilidade de um problema de momentos associado. Os resultados apresentados aqui são provenientes do artigo [6].

Sejam $\Omega = (0, \pi)$, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \partial Q$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Estudaremos as propriedades de controlabilidade do sistema

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + \alpha q = 0 & \text{em } Q, \\ q_{tt} - q_{xx} + \beta y = 0 & \text{em } Q, \\ y(0, t) = u(t), y(\pi, t) = 0 & \text{em } (0, T), \\ q = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x, 0) = y^0(x), y_t(x, 0) = y^1(x) & \text{em } \Omega, \\ q(x, 0) = q^0(x), q_t(x, 0) = q^1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Nosso primeiro resultado, estabelece a regularidade da solução ao problema de valor inicial e de fronteira (PVIF) do sistema (3.1). Antes de enunciar, definimos $\mathcal{V} = \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_{-1} \times \mathcal{H}_0$ em que $\mathcal{H}_0 = L^2(0, \pi)$, $\mathcal{H}_1 = H_0^1(0, \pi)$ e $\mathcal{H}_{-1} = H^{-1}(0, \pi)$.

Teorema 3.0.1. Sejam $(y^0, q^0, y^1, q^1) \in \mathcal{V}$ e $u \in L^2(0, T)$. Então o par de soluções $(y, q) = (y^u(x, t), q^u(x, t))$ do PVIF (3.1) existe, é único e $(y, q, y_t, q_t) \in C([0, T], \mathcal{V})$. Isso significa que para qualquer $t \in [0, T]$, $(y(\cdot, t), q(\cdot, t), y_t(\cdot, t), q_t(\cdot, t)) \in \mathcal{V}$ e é contínua em t na norma em \mathcal{V} .

A prova do Teorema 3.0.1 acima segue de maneira similar aos resultados na Seção 2.2. Inicialmente, supomos que a solução se escreve em termos de séries de Fourier, provamos que os coeficientes podem ser calculados explicitamente como solução

de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Em seguida, mostramos que os mesmos possuem a regularidade temporal necessária. A diferença é que a regularidade não poderá ser obtida por estimativas explícitas dos coeficientes. Dependerá fortemente do fato que os coeficientes se escrevem em termos de famílias de exponenciais que veremos mais adiante que constituem uma base de Riesz.

Para o sistema (3.1), introduzimos o conjunto de estados alcançáveis a partir de (y^0, q^0, y^1, q^1) em um instante $T > 0$, definido por

$$\mathcal{R}(T, (y^0, q^0, y^1, q^1)) = \{(y^u(\cdot, T), q^u(\cdot, T), y_t^u(\cdot, T), q_t^u(\cdot, T)); u \in L^2(0, T)\}.$$

Definição 3.0.2. (i) O sistema (3.1) é dito exatamente controlável no intervalo de tempo $[0, T]$ se, para qualquer $(y^0, q^0, y^1, q^1) \in \mathcal{V}$, o conjunto alcançável $\mathcal{R}(T, (y^0, q^0, y^1, q^1))$ é igual a \mathcal{V} .

(ii) O sistema (3.1) é dito aproximadamente controlável no intervalo de tempo $[0, T]$ se, para qualquer $(y^0, q^0, y^1, q^1) \in \mathcal{V}$, o conjunto alcançável $\mathcal{R}(T, (y^0, q^0, y^1, q^1))$ é denso em \mathcal{V} .

Os principais resultados deste trabalho são descritos pelo seguinte teorema.

Teorema 3.0.3. Suponha que $\beta \neq 0$, e considere a igualdade

$$n^2 - \sqrt{\alpha\beta} = m^2 + \sqrt{\alpha\beta}, \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

- (a) Se (3.2) nunca ocorre para $m \neq n$, o sistema (3.1) é exatamente controlável no intervalo de tempo $[0, T]$ sempre que $T \geq 4\pi$.
- (b) Se (3.2) ocorre para algum m, n , o sistema (3.1) não é aproximadamente controlável para qualquer T .
- (c) O sistema (3.1) não é aproximadamente controlável para $T < 4\pi$.

Observação 15. Se $\beta = 0$, então a segunda equação é desacoplada da primeira equação, em que o controle atua e, portanto, o sistema (3.1) não é aproximadamente controlável para qualquer $T > 0$

Observação 16. A igualdade (3.2) vale se $\alpha\beta = \frac{p^2}{4}$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Em particular, nunca vale se $|\alpha\beta|$ é suficientemente pequeno, mais precisamente, se $|\alpha\beta| < \frac{1}{4}$.

A partir de agora, nos centraremos em provar o Teorema 3.0.3.

3.1 Do sistema acoplado ao problema dos momentos

Para provar o Teorema 3.0.3, transformamos o problema de controlabilidade em um problema de momentos da forma

$$\int_0^T u(t)f_n(t)dt = c_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Sabe-se do item (a) do Teorema 1.2.1 que o problema (3.3) tem solução se, e somente se, a família $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ forma uma base de Riesz em $L^2(0, T)$. A família \mathcal{F} tem formas diferentes nos casos $\alpha = 0$, $\alpha\beta > 0$, e $\alpha\beta < 0$. Provaremos que, em todos esses casos, quando (3.2) não vale (pode valer se $\alpha\beta > 0$), a família correspondente \mathcal{F} forma uma base de Riesz em $L^2(0, T)$ para $T \geq 4\pi$.

Começamos derivando o problema dos momentos relacionados com a controlabilidade exata do sistema (3.1). É bem conhecido que a reversibilidade do tempo e linearidade do sistema (3.1) torna a controlabilidade exata equivalente à controlabilidade exata a partir de zero. Portanto, consideramos o sistema

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} + \alpha q = 0, & \text{em } Q, \\ q_{tt} - q_{xx} + \beta y = 0, & \text{em } Q, \\ y(0, t) = u(t), \quad y(\pi, t) = q(0, t) = q(\pi, t) = 0, & \text{em } (0, T), \\ y(x, 0) = y_t(x, 0) = q(x, 0) = q_t(x, 0) = 0, & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

Aqui $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\beta \neq 0$ e $u \in L^2(0, T)$.

Apresentamos y, q na forma de series:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x) \text{ e } q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x), \quad (3.5)$$

em que $\phi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$. Multiplicando (3.4) por $\sin(nx)$ e integrando por partes em $(0, \pi)$, obtemos

$$\begin{cases} \int_0^{\pi} (y_{tt}(x, t) + n^2 y(x, t) + \alpha q(x, t)) \sin(nx) dx = nu(t), & \text{em } (0, T), \\ \int_0^{\pi} (q_{tt}(x, t) + n^2 q(x, t) + \beta y(x, t)) \sin(nx) dx = 0, & \text{em } (0, T). \end{cases} \quad (3.6)$$

Substituindo (3.5) em (3.6), temos

$$\begin{cases} \ddot{a}_n + n^2 a_n + \alpha b_n = k_n u(t), & k_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} n, \\ \ddot{b}_n + n^2 b_n + \beta a_n = 0, \\ a_n(0) = \dot{a}_n(0) = b_n(0) = \dot{b}_n(0) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Para resolvermos o sistema (3.7) para todo n , definimos

$$Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ \dot{a}_n \\ \dot{b}_n \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -n^2 & -\alpha & 0 & 0 \\ -\beta & -n^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_n \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

e reescrevemos (3.7) na forma

$$\dot{Y}_n(t) = A_n Y_n(t) + F_n(t), \quad Y_n(0) = 0. \quad (3.8)$$

Pela Fórmula de Variação dos Parâmetros, a solução de (3.8) é dada por

$$Y_n(t) = \int_0^t e^{A_n(t-\tau)} F_n(\tau) d\tau. \quad (3.9)$$

Como A_n é uma matriz de ordem 4 e seu polinômio característico é

$$p_{A_n}(\lambda) = \lambda^4 + 2n\lambda^2 + n^4 - \alpha\beta = (\lambda^2 + n^2 - \sqrt{\alpha\beta})(\lambda^2 + n^2 + \sqrt{\alpha\beta}),$$

pelo Teorema A.2.2,

$$e^{A_n t} = z_{0,n}(t)I + z_{1,n}(t)A_n + z_{2,n}(t)A_n^2 + z_{3,n}(t)A_n^3, \quad (3.10)$$

na qual $z_{k,n}(t)$ são as soluções das equações diferenciais

$$\begin{aligned} z^{(4)} + 2n^2 z'' + n^4 - \alpha\beta &= 0, \\ z_{k,n}^{(j)}(0) &= \delta_{jk}, \quad j, k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Vejamos que as raízes do polinômio caraterístico da matriz A_n determinam as soluções $z_{k,n}(t)$. O problema da controlabilidade reduz-se então ao problema do momento da forma

$$\int_0^T e^{A_n(T-t)} F_n(t) dt = c_n, \quad \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R}^4).$$

Na seção seguinte apresentamos a forma explícita deste problema de momento e

derivamos sua solução dependendo dos parâmetros α e β .

3.2 Solução do problema de momentos

Sabemos (ver Seção 2.1) que as normas das funções y e q , bem como suas derivadas de tempo nos espaços de Sobolev correspondentes, são equivalentes às normas de seus coeficientes de Fourier nos espaços ℓ^2 ponderados:

$$\|y^u(\cdot, T), q^u(\cdot, T), y_t^u(\cdot, T), q_t^u(\cdot, T)\|_{\mathcal{V}}^2 \asymp \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n(T)|^2 + |nb_n(T)|^2 + |n^{-1}\dot{a}_n(T)|^2 + |\dot{b}_n(T)|^2] \quad (3.12)$$

Através de alguns cálculos, obtemos que as soluções das equações (3.7) e (3.8) é dada por

$$a_n(t) = \int_0^t (z_{1,n}(t-\tau) - z_{3,n}(t-\tau))k_n u(\tau) d\tau, b_n(t) = \int_0^t z_{3,n}(t-\tau)(-\beta)k_n u(\tau) d\tau.$$

Observamos que elas dependem de α , β e discutimos três casos diferentes.

Caso 1. $\alpha = 0, \beta \neq 0$. Primeiramente, vamos determinar as soluções das equações (3.7) e (3.8). Vejamos que o polinômio característico correspondente a (3.11) neste caso é

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + n^2)^2.$$

As raízes de p tem multiplicidade dois e são in e $-in$. Logo sua solução é dada por

$$z_{k,n}(t) = c_n^1 \cos(nt) + c_n^2 \sin(nt) + c_n^3 t \cos(nt) + c_n^4 t \sin(nt).$$

Iremos calcular $z_{k,n}(t)$, para todo $k = 1, 3$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $z_{1,n}(0) = z_{1,n}''(0) = z_{1,n}^{(3)}(0) = 0$ e $z_{1,n}'(0) = 1$, então

$$\begin{cases} c_n^1 = 0 \\ c_n^2 n + c_n^3 = 1 \\ -c_n^1 n^2 + 2c_n^4 n = 0 \\ -c_n^2 n^3 - 3c_n^3 n^2 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, concluímos que

$$c_n^1 = c_n^4 = 0, c_n^2 = \frac{3}{2n} \text{ e } c_n^3 = -\frac{1}{2},$$

e assim

$$z_{1,n}(t) = \frac{3}{2n} \sin(nt) - \frac{1}{2}t \cos(nt).$$

Da mesma maneira, encontramos que

$$z_{3,n}(t) = \frac{1}{2n^3} \sin(nt) - \frac{1}{2n^2}t \cos(nt).$$

Portanto, a solução de (3.7) e (3.8) é dada pelas fórmulas

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \frac{k_n}{n} \int_0^t \sin(n(t-\tau))u(\tau)d\tau, \\ b_n(t) &= -\frac{k_n\beta}{2n^3} \int_0^t \sin(n(t-\tau)) - n(t-\tau) \cos(n(t-\tau))u(\tau)d\tau, \\ \dot{a}_n(t) &= k_n \int_0^t \cos(n(t-\tau))u(\tau)d\tau, \\ \dot{b}_n(t) &= -\frac{k_n\beta}{2n} \int_0^t (t-\tau) \sin(n(t-\tau))u(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Uma vez que $k_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}n$, escrevemos

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \sin(n(t-\tau))u(\tau)d\tau, \\ nb_n(t) &= -\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \left(\frac{\sin(n(t-\tau))}{n} - (t-\tau) \cos(n(t-\tau)) \right) u(\tau)d\tau, \\ n^{-1}\dot{a}_n(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \cos(n(t-\tau))u(\tau)d\tau, \\ \dot{b}_n(t) &= -\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t (t-\tau) \sin(n(t-\tau))u(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Nosso próximo passo é provar que a família de funções

$$\mathcal{F} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nt), \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{\sin(nt)}{n} + t \cos(nt) \right), \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nt), -\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} t \sin(nt) \right\}_{n \in \mathbb{N}},$$

forma uma base de Riesz em $L^2(0, T)$ para $T \geq 4\pi$. Para isto, consideremos a família

$$\mathcal{E} = \{ \sin(nt), t \cos(nt), \cos(nt), t \sin(nt) \}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos o operador \mathcal{B} que mapeia \mathcal{E} para \mathcal{F} . Perceba que existe um isomorfismo entre tais famílias. Com efeito, podemos escrever o operador na forma

matricial $\mathcal{F} = B_n \mathcal{E}$, em que

$$B_n = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\pi}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{n\sqrt{2\pi}} & \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{\pi}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \end{pmatrix},$$

e observar que $\det B_n \neq 0$, logo a matriz B_n é invertível com

$$B_n^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}} & \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} \end{pmatrix}.$$

Para garantir que a família \mathcal{F} é de fato base de Riesz em $L^2(0, T)$ para $T \geq 4\pi$, precisamos escrever \mathcal{E} como uma família de exponenciais (ver [7] ou [23]). Claramente, a família $\tilde{\mathcal{E}} = \{e^{int}, te^{int}, e^{-int}, te^{-int}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é isomorfa a \mathcal{E} pela correspondência

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & 0 & -\frac{1}{2i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2i} & 0 & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{int} \\ te^{int} \\ e^{-int} \\ te^{-int} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(nt) \\ t \cos(nt) \\ \cos(nt) \\ t \sin(nt) \end{pmatrix}.$$

De acordo com os resultados de [7, pg. 47] ou [23, pg. 51]), a família $\tilde{\mathcal{E}}$ é uma base de Riesz para $T > 4\pi$ e, conseqüentemente, as famílias \mathcal{E} e \mathcal{F} também são, pelo Lema 1.1.14.

Caso 2. $\alpha\beta > 0$. Aqui, consideramos o caso em que ambos os parâmetros de acoplamento têm o mesmo sinal. Como anteriormente, queremos resolver um problema de momentos. Para este fim, precisamos construir a base de Riesz correspondente de exponenciais. Em geral (veja abaixo), esta base é dada por duas famílias de funções. O primeiro é definido por um número finito de índices n : $n^2 < \sqrt{\alpha\beta}$, e o segundo - por um número infinito de índices n : $n^2 \geq \sqrt{\alpha\beta}$. Claramente, quando $\alpha\beta \leq 1$, temos apenas a segunda família indexada por $n \in \mathbb{N}$. Começamos com o estudo da família

finita.

Subcaso 2.1. $n^2 < \sqrt{\alpha\beta}$. Neste subcaso o polinômio característico associado a (3.11) é

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2n^2\lambda^2 + n^4 - \alpha\beta.$$

Em particular, suas raízes são

$$\sqrt{-n^2 + \sqrt{\alpha\beta}}, -\sqrt{-n^2 + \sqrt{\alpha\beta}}, i\sqrt{n^2 + \sqrt{\alpha\beta}} \text{ e } -i\sqrt{n^2 + \sqrt{\alpha\beta}}.$$

Se $\gamma_n^+ = \sqrt{n^2 + \sqrt{\alpha\beta}}$ e $\gamma_n^- = \sqrt{\sqrt{\alpha\beta} - n^2}$, podemos escrever

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - (\gamma_n^-)^2)(\lambda^2 + (\gamma_n^+)^2).$$

Assim, sua solução é dada por

$$z_{k,n}(t) = c_n^1 e^{\gamma_n^- t} + c_n^2 e^{-\gamma_n^- t} + c_n^3 \cos(\gamma_n^+ t) + c_n^4 \sin(\gamma_n^+ t).$$

Daí, $z_{1,n}(0) = z'_{1,n}(0) = z''_{1,n}(0) = 0$ e $z'_{1,n}(0) = 1$ implica que

$$\begin{cases} c_n^1 + c_n^2 + c_n^3 = 0, \\ c_n^1(\gamma_n^-) + c_n^2(\gamma_n^-) + c_n^3(\gamma_n^+) = 1, \\ c_n^1(\gamma_n^-)^2 + c_n^2(\gamma_n^-)^2 - c_n^3(\gamma_n^+)^2 = 0, \\ c_n^1(\gamma_n^-)^3 - c_n^2(\gamma_n^-)^3 - c_n^3(\gamma_n^+)^3 = 0. \end{cases}$$

Com isso, temos

$$c_n^1 = -c_n^2 = -\left(-\frac{(\gamma_n^+)^2}{2(\gamma_n^-)((\gamma_n^+)^2 - (\gamma_n^-)^2)}\right), c_n^3 = 0 \text{ e } c_n^4 = \frac{(\gamma_n^-)^2}{(\gamma_n^+)((\gamma_n^+)^2 - (\gamma_n^-)^2)},$$

e assim

$$z_{1,n}(t) = \frac{n^2 + \sqrt{\alpha\beta}}{2\sqrt{\alpha\beta}} \frac{\sinh(\gamma_n^- t)}{\gamma_n^-} + \frac{\sqrt{\alpha\beta} - n^2}{2\sqrt{\alpha\beta}} \frac{\sin(\gamma_n^+ t)}{\gamma_n^+}.$$

De mesma maneira, obtemos que

$$z_{3,n}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \frac{\sinh(\gamma_n^- t)}{\gamma_n^-} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \frac{\sin(\gamma_n^+ t)}{\gamma_n^+}.$$

Dessa forma, a solução de (3.7) e (3.8) é dada pelas fórmulas

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \frac{k_n}{2} \int_0^t \left(\frac{\sinh(\gamma_n^-(t-\tau))}{\gamma_n^-} + \frac{\sin(\gamma_n^+(t-\tau))}{\gamma_n^+} \right) u(\tau) d\tau, \\ b_n(t) &= \frac{k_n}{2} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^t \left(\frac{\sin(\gamma_n^+(t-\tau))}{\gamma_n^+} - \frac{\sinh(\gamma_n^-(t-\tau))}{\gamma_n^-} \right) u(\tau) d\tau, \\ \dot{a}_n(t) &= \frac{k_n}{2} \int_0^t (\cos(\gamma_n^+(t-\tau)) + \cosh(\gamma_n^-(t-\tau))) u(\tau) d\tau, \\ \dot{b}_n(t) &= \frac{k_n}{2} \int_0^t (\cos(\gamma_n^+(t-\tau)) - \cosh(\gamma_n^-(t-\tau))) u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de k_n , obtemos que

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \left(\frac{\sinh(\gamma_n^-(t-\tau))}{\gamma_n^-} + \frac{\sin(\gamma_n^+(t-\tau))}{\gamma_n^+} \right) u(\tau) d\tau, \\ nb_n(t) &= \frac{n^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \left(\frac{\sin(\gamma_n^+(t-\tau))}{\gamma_n^+} - \frac{\sinh(\gamma_n^-(t-\tau))}{\gamma_n^-} \right) u(\tau) d\tau, \\ n^{-1}\dot{a}_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t (\cos(\gamma_n^+(t-\tau)) + \cosh(\gamma_n^-(t-\tau))) u(\tau) d\tau, \\ \dot{b}_n(t) &= \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t (\cos(\gamma_n^+(t-\tau)) - \cosh(\gamma_n^-(t-\tau))) u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Agora, consideramos a família finita

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\sqrt{\alpha\beta}} &= \left\{ \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sinh(\gamma_n^-(t-\tau))}{\gamma_n^-} + \frac{\sin(\gamma_n^+(t-\tau))}{\gamma_n^+} \right), \right. \\ &\quad \frac{n^2}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\gamma_n^+(t-\tau))}{\gamma_n^+} - \frac{\sinh(\gamma_n^-(t-\tau))}{\gamma_n^-} \right), \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\cos(\gamma_n^+(t-\tau)) + \cosh(\gamma_n^-(t-\tau))), \\ &\quad \left. \frac{n}{\sqrt{2\pi}} (\cos(\gamma_n^+(t-\tau)) - \cosh(\gamma_n^-(t-\tau))) \right\}_{n^2 < \sqrt{\alpha\beta}}. \end{aligned}$$

É claro que o operador \mathcal{B} que transforma $\mathcal{F}_{\sqrt{\alpha\beta}}$ para a família de exponencias

$$\mathcal{E}_{\sqrt{\alpha\beta}} = \{e^{-i(i\gamma_n^-)t}, e^{i(i\gamma_n^-)t}, e^{i\gamma_n^+t}, e^{-i\gamma_n^+t}\}_{n^2 < \sqrt{\alpha\beta}}$$

é um isomorfismo.

Subcaso 2.2. $n^2 \geq \sqrt{\alpha\beta}$. Neste subcaso o polinômio característico é o mesmo do anterior, porém suas raízes são

$$i\sqrt{n^2 - \sqrt{\alpha\beta}}, -i\sqrt{n^2 - \sqrt{\alpha\beta}}, i\sqrt{n^2 + \sqrt{\alpha\beta}} \text{ e } -i\sqrt{n^2 + \sqrt{\alpha\beta}}.$$

3. Controlabilidade exata de equações hiperbólicas acopladas

Definindo $\omega_n^\pm = \sqrt{n^2 \pm \sqrt{\alpha\beta}}$, escrevemos

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + (\omega_n^+)^2)(\lambda^2 + (\omega_n^-)^2).$$

Logo a sua solução é

$$z_{k,n}(t) = c_n^1 \cos(\omega_n^- t) + c_n^2 \sin(\omega_n^- t) + c_n^3 \cos(\omega_n^+ t) + c_n^4 \sin(\omega_n^+ t).$$

Aqui, $z_{1,n}(t)$ e $z_{3,n}(t)$ são

$$\begin{aligned} z_{1,n}(t) &= \frac{n^2 + \sqrt{\alpha\beta}}{2\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{n^2 - \sqrt{\alpha\beta}}} \sin(\omega_n^- t) - \frac{n^2 - \sqrt{\alpha\beta}}{2\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{n^2 + \sqrt{\alpha\beta}}} \sin(\omega_n^+ t), \\ z_{3,n}(t) &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{n^2 - \sqrt{\alpha\beta}}} \sin(\omega_n^- t) - \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{n^2 + \sqrt{\alpha\beta}}} \sin(\omega_n^+ t). \end{aligned}$$

Dessa forma, a solução de (3.7) e (3.8) é dada pelas fórmulas

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \frac{k_n}{2} \int_0^t \left(\frac{\sin(\omega_n^-(t-\tau))}{\omega_n^-} + \frac{\sin(\omega_n^+(t-\tau))}{\omega_n^+} \right) u(\tau) d\tau, \\ b_n(t) &= \frac{k_n}{2} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^t \left(\frac{\sin(\omega_n^+(t-\tau))}{\omega_n^+} - \frac{\sin(\omega_n^-(t-\tau))}{\omega_n^-} \right) u(\tau) d\tau, \\ \dot{a}_n(t) &= \frac{k_n}{2} \int_0^t (\cos(\omega_n^-(t-\tau)) + \cos(\omega_n^+(t-\tau))) u(\tau) d\tau, \\ \dot{b}_n(t) &= \frac{k_n}{2} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^t (\cos(\omega_n^+(t-\tau)) - \cos(\omega_n^-(t-\tau))) u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Substituindo $k_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} n$, temos

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \left(\frac{\sin(\omega_n^-(t-\tau))}{\omega_n^-} + \frac{\sin(\omega_n^+(t-\tau))}{\omega_n^+} \right) u(\tau) d\tau, \\ nb_n(t) &= \frac{n^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^t \left(\frac{\sin(\omega_n^+(t-\tau))}{\omega_n^+} - \frac{\sin(\omega_n^-(t-\tau))}{\omega_n^-} \right) u(\tau) d\tau, \\ n^{-1} \dot{a}_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t (\cos(\omega_n^-(t-\tau)) + \cos(\omega_n^+(t-\tau))) u(\tau) d\tau, \\ \dot{b}_n(t) &= \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^t (\cos(\omega_n^+(t-\tau)) - \cos(\omega_n^-(t-\tau))) u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Seja a família

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ \sin(\omega_n^+ t), \frac{\sin(\omega_n^+ t) - \sin(\omega_n^- t)}{\omega_n^+ - \omega_n^-}, \cos(\omega_n^+ t), \frac{\cos(\omega_n^+ t) - \cos(\omega_n^- t)}{\omega_n^+ - \omega_n^-} \right\}_{n^2 \geq \sqrt{\alpha\beta}}.$$

O operador \mathcal{B} que transforma \mathcal{E}_1 para a família

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ \begin{aligned} & \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\omega_n^-(t-\tau))}{\omega_n^-} + \frac{\sin(\omega_n^+(t-\tau))}{\omega_n^+} \right), \\ & \frac{n^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \left(\frac{\sin(\omega_n^+(t-\tau))}{\omega_n^+} - \frac{\sin(\omega_n^-(t-\tau))}{\omega_n^-} \right), \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\cos(\omega_n^-(t-\tau)) + \cos(\omega_n^+(t-\tau))), \\ & \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} (\cos(\omega_n^+(t-\tau)) - \cos(\omega_n^-(t-\tau))) \end{aligned} \right\}_{n^2 \geq \sqrt{\alpha\beta}}$$

é um isomorfismo. Com efeito, basta observarmos que $\mathcal{F}_1 = B_n \mathcal{E}_1$ com

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} n \left(\frac{\omega_n^+ + \omega_n^-}{\omega_n^+ \omega_n^-} \right) & n \left(\frac{\omega_n^- - \omega_n^+}{\omega_n^-} \right) & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} n^2 \frac{(\omega_n^- - \omega_n^+)}{\omega_n^+ \omega_n^-} & \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} n^2 \frac{(\omega_n^+ - \omega_n^-)}{\omega_n^-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \omega_n^- - \omega_n^+ \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} n (\omega_n^+ - \omega_n^-) \end{pmatrix}.$$

Observe que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\det B_n = \frac{n^4 \beta (\omega_n^+ - \omega_n^-)^2}{\pi^2 \alpha \omega_n^- \omega_n^+} > 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \det B_n = \frac{\beta^2}{\pi^2}.$$

Podemos trabalhar com $\tilde{\mathcal{E}}_1 = \left\{ e^{i\omega_n^+ t}, \frac{e^{i\omega_n^+ t} - e^{i\omega_n^- t}}{\omega_n^+ - \omega_n^-}, e^{-i\omega_n^+ t}, \frac{e^{-i\omega_n^+ t} - e^{-i\omega_n^- t}}{\omega_n^+ - \omega_n^-} \right\}_{n^2 \geq \sqrt{\alpha\beta}}$ em

vez \mathcal{E}_1 , pois existe um isomorfismo entre \mathcal{E}_1 e $\tilde{\mathcal{E}}_1$ pela correspondência

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2i} & 0 & -\frac{1}{2i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2i} & 0 & -\frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega_n^+ t} \\ \frac{e^{i\omega_n^+ t} - e^{i\omega_n^- t}}{\omega_n^+ - \omega_n^-} \\ e^{-i\omega_n^+ t} \\ \frac{e^{-i\omega_n^+ t} - e^{-i\omega_n^- t}}{\omega_n^+ - \omega_n^-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\omega_n^+ t) \\ \frac{\sin(\omega_n^+ t) - \sin(\omega_n^- t)}{\omega_n^+ - \omega_n^-} \\ \cos(\omega_n^+ t) \\ \frac{\cos(\omega_n^+ t) - \cos(\omega_n^- t)}{\omega_n^+ - \omega_n^-} \end{pmatrix}.$$

Provaremos agora que a família $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\sqrt{\alpha\beta}} \cup \mathcal{F}_1$ é uma base de Riesz em $L^2(0, T)$ para $T \geq 4\pi$. De fato, dado o exposto, existe um isomorfismo entre $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{\sqrt{\alpha\beta}} \cup \mathcal{E}_1$ e \mathcal{F} . Então, basta provarmos que \mathcal{E} é uma base de Riesz em $L^2(0, T)$ para $T \geq 4\pi$.

Fazendo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu_n^+ = \begin{cases} \gamma_n^+ & \text{se } n^2 < \sqrt{\alpha\beta}, \\ \omega_n^+ & \text{se } n^2 \geq \sqrt{\alpha\beta}, \end{cases} \quad \text{e } \mu_n^- = \begin{cases} i\gamma_n^- & \text{se } n^2 < \sqrt{\alpha\beta}, \\ \omega_n^- & \text{se } n^2 \geq \sqrt{\alpha\beta}, \end{cases}$$

definimos

$$\mathcal{E}_2 = \{e^{i\mu_n^- t}, e^{-i\mu_n^- t}, e^{i\mu_n^+ t}, e^{-i\mu_n^+ t}\}.$$

Para continuarmos, vamos precisar da teoria de Bases de Diferenças Divididas Exponenciais, que pode ser encontrada em [4] e [5]. Abaixo, apresentamos a definição de diferença dividida e enunciamos alguns resultados, omitindo suas demonstrações, para garantir a propriedade de base de Riesz.

Seja $\Lambda = \{\nu_n\}$ uma sequência em \mathbb{C} ordenada de tal forma que $\{\Re(\nu_n)\}$ forme uma sequência não-decrescente. No que segue, também assumimos que $\sup |\Im(\nu_n)| < \infty$. A cada Λ , associamos a família exponencial

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{e^{i\nu_n t}, te^{i\nu_n t}, \dots, t^{m_n-1}e^{i\nu_n t}\},$$

em que m_n é a multiplicidade de $\nu_n \in \Lambda$.

A sequência Λ é chamada uniformemente discreta ou separada se

$$\delta(\Lambda) := \inf_{k \neq n} |\nu_k - \nu_n| > 0,$$

e é chamada relativamente uniformemente discreta se puder ser decomposto em um número finito de subsequências uniformemente discretas.

Para qualquer $\nu \in \mathbb{C}$, denotamos por $D_\nu(r)$ um disco de centro ν e raio r . Seja $G^{(p)}(r), p = 1, 2, \dots$, os componentes conexos da união $\cup_{\nu \in \Lambda} D_\nu(r)$. Escreva $\Lambda^{(p)}(r) = \{\nu_{n,p}\}$ para as subsequências de Λ situadas em $G^{(p)}(r)$, ou seja, $\Lambda^{(p)}(r) := \Lambda \cap G^{(p)}(r)$.

Lema 3.2.1. Seja Λ uma união de N conjuntos uniformemente discretos Λ_j ,

$$\delta(\Lambda_j) := \inf_{\nu \neq \rho; \nu, \rho \in \Lambda_j} |\nu - \rho| \quad \text{e } \delta := \delta(\Lambda) := \min_j \delta(\Lambda_j).$$

Então, para $r < r_0 := \delta/(2N)$, temos $\mathcal{N}^{(p)}(r) := \#\Lambda^{(p)}(r) \leq N$.

Sejam $\rho_k, k = 1, \dots, m$, números complexos arbitrários, não necessariamente distintos.

Definição 3.2.2. A diferença dividida generalizada (DDG) de ordem zero da função $e^{i\rho t}$ correspondente ao ponto ρ_1 é $[\rho_1](t) = e^{i\rho_1 t}$. A DDG de ordem $n - 1, n \leq m$, de

$e^{i\rho t}$ correspondente a ρ_1, \dots, ρ_n é

$$[\rho_1, \dots, \rho_n] := \begin{cases} \frac{[\rho_1, \dots, \rho_{n-1}] - [\rho_2, \dots, \rho_n]}{\rho_1 - \rho_n}, & \rho_1 \neq \rho_n, \\ \left. \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}] \right|_{\rho=\rho_1}, & \rho_1 = \rho_n. \end{cases}$$

Se todos os ρ_k forem distintos, pode-se facilmente derivar a fórmula explícita para DDG:

$$[\rho_1, \dots, \rho_n](t) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{i\rho_k t}}{\prod_{j \neq k} (\rho_k - \rho_j)}. \quad (3.13)$$

Sejam $\Lambda^{(p)}(r), p = 1, 2, \dots$ as subsequências de Λ descritas acima:

$$\Lambda^{(p)}(r) = \{\nu_{j,p}\}, \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}^{(p)}(r).$$

Denotado por $\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r)$ a família de DDGs correspondentes aos pontos $\Lambda^{(p)}(r)$:

$$\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r) := \{[\nu_{1,p}], [\nu_{1,p}, \nu_{2,p}], \dots, [\nu_{1,p}, \dots, \nu_{\mathcal{N}^{(p)}(r),p}]\}.$$

Escreva $\{\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r)\}$ para a família de $\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r)$ correspondendo a todos os $p = 1, 2, \dots$.

O seguinte teorema descreve as bases de Riesz de diferenças divididas generalizadas. É provado em [4] usando os métodos desenvolvidos em [3, Seções. II.2, II.3].

Teorema 3.2.3. Seja Λ uma sequência relativamente uniformemente discreta e $r < r_0 = \frac{\delta}{2N}$. Então a família $\{\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r)\}$ forma uma base de Riesz em $L^2(0, T)$ se, e somente, se existe uma função inteira F do tipo exponencial com diagrama indicador de largura T e zeros nos pontos ν_n de multiplicidade m_{ν_n} (a função geradora da família $\mathcal{E}(\Lambda)$ no intervalo $(0, T)$) tal que, para algum h real, a função $|F(x + ih)|^2$ satisfaz a condição de Helson-Szegö: funções $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}), \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \pi/2$ podem ser encontradas de tal forma

$$|F(x + ih)|^2 = \exp\{u(x) + \tilde{v}(x)\}.$$

Aqui a aplicação $v \mapsto \tilde{v}$ denota a transformada de Hilbert para funções limitadas:

$$\tilde{v}(x) = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \left\{ \frac{1}{x-t} + \frac{t}{t^2+1} \right\} dt.$$

É bem conhecido que a condição de Helson-Szegö é equivalente à condição de Muc-

kenhoupt (A_2) :

$$\sum_{I \in \mathcal{J}} \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I |F(x + ih)|^2 dx \frac{1}{|I|} \int_I |F(x + ih)|^{-2} dx \right\} < \infty,$$

em que \mathcal{J} é o conjunto de todos os intervalos do eixo real.

Para formular nosso próximo resultado, escrevemos

$$n^+(r) := \sup_{x \in \mathbb{R}} \#\{\Re(\Lambda) \cap [x, x + r)\}, \quad n^-(r) := \inf_{x \in \mathbb{R}} \#\{\Re(\Lambda) \cap [x, x + r)\},$$

e definimos de forma padronizada as densidades uniformes superior e inferior de Λ a serem respectivas

$$\mathcal{D}^+(\Lambda) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^+(r)}{r}, \quad \mathcal{D}^-(\Lambda) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^-(r)}{r}.$$

Ambos os limites existem devido à subaditividade de $n^+(r)$ e subaditividade de $n^-(r)$.

A prova do seguinte teorema é apresentada em [2]. É baseado no teorema de ‘1/4 na média’ (ver [3, Seção II.4]).

Teorema 3.2.4. Sob as condições do teorema anterior, as seguintes afirmações são válidas

- (a) Para qualquer $T < 2\pi\mathcal{D}^-(\Lambda)$, existe uma subfamília \mathcal{E}_0 de $\{\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r)\}$ que forma uma base de Riesz em $L^2(0, T)$.
- (b) Para qualquer $T > 2\pi\mathcal{D}^+(\Lambda)$, a família $\{\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r)\}$ que forma uma base de Riesz em $L^2(0, T)$.

Vamos seguir os passos acima. Considere o conjunto $\Lambda = \{\mu_n^+, \mu_n^-\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$. Denotamos $D(\mu_n^\pm, r)$ os discos centrados em μ_n^\pm e raio r suficientemente pequeno. Uma vez que μ_n^+ e μ_n^- se aproximam quando $n \rightarrow \infty$, temos que se n é pequeno os discos $D(\mu_n^+, r)$ e $D(\mu_n^-, r)$ são disjuntos e se n suficientemente grande, os discos $D(\mu_n^+, r)$ e $D(\mu_n^-, r)$ formam uma mesma componente conexa. Portanto, a família de diferenças divididas correspondente aos pontos $\Lambda^{(p)}(r)$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r) = & \{e^{i\mu_n^+ t}, e^{-i\mu_n^+ t}, e^{i\mu_n^- t}, e^{-i\mu_n^- t}\}_{n^2 < \sqrt{\alpha\beta}} \\ & \cup \left\{ e^{i\mu_n^+ t}, \frac{e^{i\mu_n^+ t} - e^{i\mu_n^- t}}{\mu_n^+ - \mu_n^-}, e^{i\mu_n^- t}, \frac{e^{-i\mu_n^+ t} - e^{-i\mu_n^- t}}{\mu_n^+ - \mu_n^-} \right\}_{n^2 \geq \sqrt{\alpha\beta}}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.2.4, a família $\{\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r)\}$ forma uma base de Riesz em $L^2(0, T)$ se $T > 2\pi\mathcal{D}^+(\Lambda)$. Iremos então determinar o conjunto $D^+(\Lambda)$.

Notemos que,

$$|\mu_n^+ - \mu_n^-| = \left| \sqrt{n^2 + \sqrt{\alpha\beta}} - \sqrt{n^2 - \sqrt{\alpha\beta}} \right| = \left| \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{n^2 + \sqrt{\alpha\beta}} + \sqrt{n^2 - \sqrt{\alpha\beta}}} \right|$$

converge a 0 quando $n \rightarrow \infty$. É claro que o mesmo vale para $|-\mu_n^+ - (-\mu_n^-)|$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\mu_{n+1}^+ - \mu_n^+| &= \left| \sqrt{(n+1)^2 + \sqrt{\alpha\beta}} - \sqrt{n^2 + \sqrt{\alpha\beta}} \right| \\ &= \left| \frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2 + \sqrt{\alpha\beta}} + \sqrt{n^2 + \sqrt{\alpha\beta}}} \right|, \end{aligned}$$

converge para 1 quando $n \rightarrow \infty$. Analogamente, o mesmo vale para $|\mu_{n+1}^- - \mu_n^-|$. Por fim, podemos ver que $|\mu_n^- - (-\mu_n^+)|$ diverge para infinito, assim como $|\mu_n^+ - (-\mu_n^-)|$.

Para cada $x \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, escrevemos $r = N + \varepsilon$ em que $N \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon < 1$. Observe que

$$[x, x+r) = \cup_{j=0}^{N-1} [x+j, x+j+1] \cup [x+N, x+r),$$

donde existe $N_0 \in \mathbb{N}$ e $k > 0$ tal que $\#\{\Re(\Lambda) \cap [x, x+N_0)\} = k$ para todo x e $\#\{\Re(\Lambda) \cap ([x+N_0, x+r))\}$ vale $2(N-N_0)$ ou $2(N-N_0+1)$ a depender se no intervalo $[x+N_0, x+r)$ possui dois elementos da sequência. Portanto,

$$D^+(\Lambda) = 2.$$

Concluimos assim que $\{\mathcal{E}^{(p)}(\Lambda, r)\}$ é uma base de Riesz em $L^2(0, T)$ para $T > 4\pi$.

Caso 3. $n^2 \leq \sqrt{\alpha\beta}$. O polinômio característico correspondente a equação (3.11) neste caso é

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2n^2\lambda^2 + n^4 - \alpha\beta$$

e consequentemente, suas raízes são

$$\sqrt{-n^2 + i\sqrt{-\alpha\beta}}, -\sqrt{-n^2 + i\sqrt{-\alpha\beta}}, \sqrt{-n^2 - i\sqrt{-\alpha\beta}}, -\sqrt{-n^2 - i\sqrt{-\alpha\beta}}.$$

Fazendo uma decomposição nessas funções complexas, obtemos

$$\begin{aligned}\sqrt{-n^2 + i\sqrt{-\alpha\beta}} &= \delta_n^- + i\delta_n^+, \\ \sqrt{-n^2 - i\sqrt{-\alpha\beta}} &= \delta_n^- - i\delta_n^+, \\ -\sqrt{-n^2 + i\sqrt{-\alpha\beta}} &= -\delta_n^- + i\delta_n^+, \\ -\sqrt{-n^2 - i\sqrt{-\alpha\beta}} &= -\delta_n^- - i\delta_n^+, \end{aligned}$$

em que $\delta_n^+ = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{n^4 - \alpha\beta} + n^2)}$ e $\delta_n^- = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{n^4 - \alpha\beta} - n^2)}$. Logo a sua solução é

$$z_{k,n}(t) = e^{\delta_n^- t}(c_n^1 \cos(\delta_n^+ t) + c_n^2 \sin(\delta_n^+ t)) + e^{-\delta_n^- t}(c_n^3 \cos(\delta_n^+ t) + c_n^4 \sin(\delta_n^+ t)).$$

Calculando de forma análoga aos casos anteriores, vemos que a solução de (3.7) e (3.8) é dada pelas fórmulas

$$\begin{aligned}a_n(t) &= \frac{k_n}{\sqrt{n^4 - \alpha\beta}} \int_0^t (\delta_n^- \sinh(\delta_n^-(t - \tau)) \cos(\delta_n^+(t - \tau)) \\ &\quad + \delta_n^+ \cosh(\delta_n^-(t - \tau)) \sin(\delta_n^+(t - \tau))) u(\tau) d\tau, \\ b_n(t) &= \frac{\beta k_n}{2\sqrt{n^4 - \alpha\beta}} \int_0^t \left(\frac{\sinh(\delta_n^-(t - \tau)) \cos(\delta_n^+(t - \tau))}{\delta_n^-} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cosh(\delta_n^-(t - \tau)) \sin(\delta_n^+(t - \tau))}{\delta_n^+} \right) u(\tau) d\tau, \\ \dot{a}_n(t) &= k_n \int_0^t \cosh(\delta_n^-(t - \tau)) \cos(\delta_n^+(t - \tau)) u(\tau) d\tau, \\ \dot{b}_n(t) &= -\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} k_n \int_0^t \sinh(\delta_n^-(t - \tau)) \sin(\delta_n^+(t - \tau)) u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Como $k_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} n$, temos

$$\begin{aligned}a_n(t) &= n \sqrt{\frac{2}{\pi(n^4 - \alpha\beta)}} \int_0^t (\delta_n^- \sinh(\delta_n^-(t - \tau)) \cos(\delta_n^+(t - \tau)) \\ &\quad + \delta_n^+ \cosh(\delta_n^-(t - \tau)) \sin(\delta_n^+(t - \tau))) u(\tau) d\tau, \\ nb_n(t) &= \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} n^2 \int_0^t \left(\frac{\sinh(\delta_n^-(t - \tau)) \cos(\delta_n^+(t - \tau))}{\delta_n^- \sqrt{n^4 - \alpha\beta}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cosh(\delta_n^-(t - \tau)) \sin(\delta_n^+(t - \tau))}{\delta_n^+ \sqrt{n^4 - \alpha\beta}} \right) u(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^{-1}\dot{a}_n(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \cosh(\delta_n^-(t-\tau)) \cos(\delta_n^+(t-\tau)) u(\tau) d\tau, \\ \dot{b}_n(t) &= -n \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \sinh(\delta_n^-(t-\tau)) \sin(\delta_n^+(t-\tau)) u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Consideremos a família

$$\mathcal{E} = \left\{ e^{(\delta_n^- + i\delta_n^+)t}, \frac{e^{(\delta_n^- + i\delta_n^+)t} - e^{-(\delta_n^- - i\delta_n^+)t}}{2\delta_n^-}, e^{(\delta_n^- - i\delta_n^+)t}, \frac{e^{(\delta_n^- - i\delta_n^+)t} - e^{-(\delta_n^- + i\delta_n^+)t}}{2\delta_n^-} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Pode-se verificar que o operador \mathcal{B} que mapeia \mathcal{E} para a família

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \left\{ n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\delta_n^+ \cosh(\delta_n^- t) \sin(\delta_n^+ t)}{\sqrt{n^4 - \alpha\beta}} + \frac{\delta_n^- \cos(\delta_n^+ t) \sinh(\delta_n^- t)}{\sqrt{n^4 - \alpha\beta}} \right), \right. \\ &\quad \frac{n^2\beta}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\cosh(\delta_n^- t) \sin(\delta_n^+ t)}{\delta_n^+ \sqrt{n^4 - \alpha\beta}} - \frac{\sinh(\delta_n^- t) \cos(\delta_n^+ t)}{\delta_n^- \sqrt{n^4 - \alpha\beta}} \right), \\ &\quad \left. \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cosh(\delta_n^- t) \cos(\delta_n^+ t), \sqrt{\frac{2}{\pi}} n \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} \sinh(\delta_n^- t) \sin(\delta_n^+ t) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Com efeito, $\mathcal{F} = B_n \mathcal{E}$ com $B_n = \sqrt{\frac{2}{n}} (X_{ij})$, em que X_{ij} ($i, j = 1, 2$), são blocos 2×2 dados por

$$\begin{aligned} X_{11} &= \begin{pmatrix} -\frac{i n \delta_n^+}{2\sqrt{n^4 - \alpha\beta}} & \frac{n \delta_n^- (\delta_n^- + i \delta_n^+)}{2\sqrt{n^4 - \alpha\beta}} \\ \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{i n^2 \beta}{\sqrt{n^4 - \alpha\beta} \delta_n^+} & -\frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{i n^2 \beta (\delta_n^- + i \delta_n^+)}{\sqrt{n^4 - \alpha\beta} \delta_n^+} \end{pmatrix}, \\ X_{12} &= \begin{pmatrix} \frac{i n \delta_n^+}{2\sqrt{n^4 - \alpha\beta}} & \frac{n \delta_n^- (\delta_n^- - i \delta_n^+)}{2\sqrt{n^4 - \alpha\beta}} \\ -\frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{i n^2 \beta}{\sqrt{n^4 - \alpha\beta} \delta_n^+} & \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{i n^2 \beta (\delta_n^- - i \delta_n^+)}{\sqrt{n^4 - \alpha\beta} \delta_n^+} \end{pmatrix}, \\ X_{21} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\delta_n^-}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} i n \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} \delta_n^- \end{pmatrix}, \\ X_{22} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\delta_n^-}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} i n \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} \delta_n^- \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\det B_n = \frac{n^4 \alpha \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{3/2} \sqrt{\sqrt{n^4 - \alpha\beta} - n^2}}{2\pi^2 \sqrt{n^4 - \alpha\beta} \sqrt{\sqrt{n^4 - \alpha\beta} + n^2}} \neq 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \det B_n = \frac{\beta|\beta|}{4\pi^2}.$$

Analogamente aos casos anteriores, conseguimos mostrar que \mathcal{E} base de Riesz em $L^2(0, T)$ para $T > 4\pi$ e, pelo Lema 1.1.14, \mathcal{F} também é.

3.3 Provas dos teoremas

Prova do Teorema 3.0.1. Sabemos (ver Seções 3.1 e 3.2) que o problema de momentos é dado por

$$\{(a_n(t), nb_n(t), n^{-1}\dot{a}_n(t), \dot{b}_n(t))\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\langle u, \xi_j \rangle_{L^2(0, T)}\}_{n \in \mathbb{N}},$$

em que $\{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ são as bases de Riesz em $L^2(0, T)$ para $T \geq 4\pi$ de cada caso da Seção 3.2. Então, pelo item (a) do Teorema 1.2.1 temos que $\{(a_n(t), nb_n(t), n^{-1}\dot{a}_n(t), \dot{b}_n(t))\}_{n \in \mathbb{N}}$ pertence a ℓ^2 e, da desigualdade (3.12) segue que a solução construída pela fórmula (3.5) com coeficientes (3.7) e (3.8) satisfaz $(y(\cdot, t), q(\cdot, t), y_t(\cdot, t), q_t(\cdot, t)) \in \mathcal{V}$ e, as igualdades de (3.4) saí diretamente de (3.7) e (3.8). Ainda da desigualdade (3.12) segue a unicidade $(y(\cdot, t), q(\cdot, t), y_t(\cdot, t), q_t(\cdot, t))$ e também a continuidade.

Prova do Teorema 3.0.3, item (a). Se (3.2) nunca ocorre, a família \mathcal{F} forma uma base de Riesz em $L^2(0, T)$ para $T \geq 4\pi$. Logo, nosso sistema é exatamente controlável em $L^2(0, T)$ para $T \geq 4\pi$, pelo item (a) dos Teoremas 1.2.1 e 2.3.10.

Prova do Teorema 3.0.3, item (b). Se $\alpha\beta > 0$ (ver Caso 2 da Seção 3.2) para algum α e β , pode existir um número finito de pares (m, n) satisfazendo a igualdade (3.2). Nesse caso, a família \mathcal{F} é claramente linearmente dependente, pois alguma função (ou funções) se repete duas vezes nessa família. Então, de acordo com o item (e) do Teorema 1.2.1, a família \mathcal{F} não é uma base de Riesz e, conseqüentemente não é ω -l.i. Agora, pelo item (e) do Teorema 2.3.10, nosso sistema não é aproximadamente controlável para qualquer $T > 0$.

Prova do Teorema 3.0.3, item (c). Se $T < 4\pi$ então em todos os casos considerados, existe uma subfamília própria $\mathcal{E}_T \subset \mathcal{E}$ constituindo uma base de Riesz em $L^2(0, T)$, pelo item (a) do Teorema 3.2.4. Assim, podemos usar novamente o item (e) dos Teoremas

3. Controlabilidade exata de equações hiperbólicas acopladas

1.2.1 e 2.3.10, para demonstrar que nosso sistema não é aproximadamente controlável em $L^2(0, T)$ para $T < 4\pi$.

Apêndice A

Resultados auxiliares

A.1 Análise funcional

A.1.1 Espaços normados e espaços de Banach

Definição A.1.1. Seja E um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Uma norma em E é uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{K}$ que satisfaz as propriedades:

- (a) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$; $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
- (b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para todo $x \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$;
- (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$.

Um espaço vetorial E munido de uma norma $\|\cdot\|$ é chamado um espaço vetorial normado e denotado por $(E, \|\cdot\|)$.

Observação 17. Todo espaço normado E munido de uma norma $\|\cdot\|$ é um espaço métrico quando a métrica é definida por

$$d(x, y) = \|x - y\| \text{ para todo } x, y \in E.$$

Definição A.1.2. Seja E um espaço vetorial normado.

- (a) Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ converge para $x \in E$, e escrevemos $x_n \rightarrow x$, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

- (b) Dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ é uma sequência de Cauchy quando para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ para todo $n, m \geq n_0$.

Definição A.1.3. Seja E um espaço vetorial normado. Dizemos que E é um espaço de Banach se ele é um espaço métrico completo, ou seja, se toda sequência de Cauchy em E converge para um elemento de E .

Teorema A.1.4. (Teorema de Hahn-Banach) Sejam E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} e $p : E \rightarrow \mathbb{K}$ uma função que satisfaz

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= |\lambda|p(x) \quad \forall x \in E \text{ e } \lambda > 0, \\ p(x + y) &\leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E. \end{aligned}$$

Sejam também G um subespaço linear de E e $g : G \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear tal que $|g(x)| \leq |p(x)|$ para todo $x \in G$. Sob essas suposições, existe um funcional linear f definido em todo E que estende g , isto é, $g(x) = f(x) \quad \forall x \in G$, e que satisfaz

$$|f(x)| \leq |p(x)| \quad \forall x \in E.$$

Demonstração. Ver [10, pg. 1]. □

Corolário A.1.5. Seja G um subespaço de um espaço normado E sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Se $g : G \rightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear contínuo em E , então existe $f \in E^*$ que estende g tal que $\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G^*}$.

Demonstração. Ver [10, pg. 3]. □

Definição A.1.6. Seja E um espaço vetorial normado. Um hiperplano afim é um subconjunto H de E da forma

$$H = f^{-1}(\alpha) = \{x \in E; f(x) = \alpha\},$$

em que $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear não nulo e $\alpha \in \mathbb{R}$. Escrevemos $H = [f = \alpha]$ e dizemos que $f = \alpha$ é a equação de H .

Definição A.1.7. Sejam A e B dois subconjuntos de E .

- (a) Dizemos que o hiperplano $H = [f = \alpha]$ separa A e B se $f(x) \leq \alpha$ para todo $x \in A$ e $f(x) \geq \alpha$ para todo $x \in B$.
- (b) Dizemos que o hiperplano H separa estritamente A e B se existe algum $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq \alpha - \varepsilon$ para todo $x \in A$ e $f(x) \geq \alpha + \varepsilon$ para todo $x \in B$.

Teorema A.1.8. (Hahn-Banach, primeira forma geométrica). Seja E um espaço vetorial normado. Considere $A, B \subset E$ dois subconjuntos convexos tais que $A \cap B = \emptyset$. Suponha que um deles é aberto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B .

Demonstração. Ver [10, pg. 5]. □

Teorema A.1.9. (Hahn-Banach, segunda forma geométrica). Seja E um espaço vetorial normado. Considere $A, B \subset E$ dois subconjuntos convexos tais que $A \cap B = \emptyset$. Suponha que A é fechado e B é compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa estritamente A e B .

Demonstração. Ver [10, pg. 7]. □

A.1.2 Espaços de Hilbert

Definição A.1.10. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Um produto interno em E é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ tal que para quaisquer $x, y, z \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale

- (a) $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in E$; $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
- (b) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in E$;
- (c) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e todo $x, y, z \in E$.

O par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamado de espaço com produto interno. Neste caso dizemos a função

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

é a norma induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposição A.1.11. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Seja E um espaço com produto interno. Então

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

para quaisquer $x, y \in E$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente, se os vetores x e y são linearmente dependentes.

Demonstração. Ver [9, pg. 78]. □

Proposição A.1.12. Seja E um espaço com produto interno. A função

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{K}, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

é uma norma em E .

Demonstração. Ver [9, pg. 78]. □

Definição A.1.13. Um espaço com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno é chamado de espaço de Hilbert. Em particular, um espaço de Hilbert é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.

A.1.3 Operadores lineares limitados

Definição A.1.14. Sejam E, F espaços vetoriais normados e $A : E \rightarrow F$ um operador.

(a) Dizemos que A é linear se

$$A(x + \alpha y) = Ax + \alpha Ay \text{ para todo } x, y \in E \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(b) Dizemos que A é limitado se existe uma constante M tal que

$$\|Ax\|_F \leq M\|x\|_E \text{ para todo } x, y \in E.$$

O espaço de todas as funcionais lineares e limitadas de E para F é denotado por $\mathcal{L}(E, F)$ e, se $E = F$ denotamos apenas por $\mathcal{L}(E)$.

Teorema A.1.15. Se E é um espaço vetorial normado e F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup \{\|Ax\|; x \in E, \|x\| \leq 1\}.$$

Demonstração. Ver [11, pg. 104]. □

Se E é um espaço vetorial normado, denotamos o espaço vetorial dos funcionais lineares limitados por $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ e esse espaço é chamado espaço dual topológico de E (ou simplesmente espaço dual de E).

Corolário A.1.16. O dual E^* de qualquer espaço vetorial normado E é um espaço de Banach.

Definição A.1.17. Sejam E, F espaços de vetoriais normados e $A : E \rightarrow F$ um operador linear. O gráfico A é o conjunto

$$G(A) = \{(x, y); x \in E, y = A(x)\} = \{(x, A(x)); x \in E\} \subset E \times F.$$

Note que $G(A)$ é um subespaço vetorial de $E \times F$. Em geral $G(A)$ pode ser um subconjunto fechado de $E \times F$ ou não. Vejamos que, para funcionais lineares entre espaços de Banach, a continuidade de A é equivalente ao fato de $G(A)$ ser fechado.

Teorema A.1.18. (Teorema do Gráfico Fechado) Sejam E, F espaços de Banach e $A : E \rightarrow F$ um operador linear. Então, A é contínuo se, e somente se, $G(A)$ é fechado em $E \times F$.

Demonstração. Ver [9, pg. 35]. □

Proposição A.1.19. Seja H um espaço de Hilbert e $A : H \rightarrow H$ um funcional linear e limitado. Então $A^* : H \rightarrow H$ é o único funcional linear limitado que satisfaz

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \text{ para todo } x, y \in H.$$

Demonstração. Ver [9, pg. 146]. □

Definição A.1.20. Seja H um espaço de Hilbert e $A : H \rightarrow H$ um funcional linear e limitado.

- (a) O funcional A^* construído no teorema acima é chamado de adjunto de A .
- (b) O funcional A é auto-adjunto quando $A = A^*$.
- (c) O funcional $A : H \rightarrow H$ é dito positivo se $\langle Ax, x \rangle \geq 0$.

Proposição A.1.21. Sejam $A : H \rightarrow H$ um funcional linear e limitado e $A^* : H \rightarrow H$ o adjunto de A . Se A é invertível então A^* também é e vale $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Demonstração. Ver [11, pg. 131]. □

Teorema A.1.22. (Teorema da Representação de Riesz Fréchet) Sejam H um espaço de Hilbert e $\varphi : H \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um único $f \in H$ tal que

$$\varphi(x) = \langle x, f \rangle, \text{ para todo } x \in H.$$

Além disso, $\|\varphi\| = \|f\|$.

Demonstração. Ver [11, pg. 106]. □

Definição A.1.23. Seja H um espaço vetorial. Uma aplicação $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é dita bilinear se $B(x, \cdot) : H \rightarrow \mathbb{R}$ e $B(\cdot, y) : H \rightarrow \mathbb{R}$ são lineares para todo x, y em H .

Definição A.1.24. Seja H um espaço de Hilbert. Uma forma bilinear $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é

- (a) contínua se existe uma constante C tal que

$$|B(x, y)| \leq C|x||y| \text{ para todo } x, y \in H.$$

- (b) coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$B(y, y) \geq \alpha|y|^2 \text{ para todo } y \in H.$$

Teorema A.1.25. (Lax-Milgram) Seja H um espaço de Hilbert e suponha que $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear contínua e coerciva em H . Então, dado $\varphi \in H^*$, existe um único elemento $x \in H$ tal que

$$B(x, y) = \langle \varphi, y \rangle, \text{ para todo } y \in H.$$

Além disso, se B é simétrica, então x é caracterizado pela propriedade

$$x \in H \text{ e } \frac{1}{2}B(x, x) - \langle \varphi, x \rangle = \min_{y \in H} \left\{ \frac{1}{2}B(y, y) - \langle \varphi, y \rangle \right\}.$$

Demonstração. Ver [10, pg. 140]. □

A.2 A matriz exponencial

As definições e resultados abaixo são dados em [16].

Assim como a função exponencial escalar e^{at} pode ser representada pela série de potências

$$e^{at} = 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}a^k t^k + \dots,$$

dada uma matriz $n \times n$ constante A , a série correspondente

$$I + At + \frac{1}{2!}At^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \dots,$$

pode ser mostrado para convergir para uma matriz $n \times n$, a função exponencial da matriz, denotada por e^{At} .

É fácil ver que

$$e^0 = e^{A0} = I \text{ e } \frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}.$$

Portanto, usando a função exponencial matricial, a solução para o sistema de equações diferenciais lineares homogêneas de primeira ordem com coeficiente constante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

pode ser escrito como $x(t) = e^{At}x_0$.

O primeiro teorema garante a existência de uma solução única para um problema de valor inicial para uma equação diferencial matricial, enquanto o segundo teorema fornece um método para construir a matriz exponencial a partir das soluções para certos problemas escalares de valor inicial.

Teorema A.2.1. Se A é uma matriz $n \times n$ constante com polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0,$$

então $\Phi(t) = e^{At}$ é a única solução para a equação diferencial da matriz de ordem n

$$\Phi^{(n)} + c_{n-1}\Phi^{(n-1)} + \cdots + c_1\Phi' + c_0\Phi = 0,$$

satisfazendo a condição inicial

$$\Phi(0) = I, \Phi'(0) = A, \Phi''(0) = A^2, \dots, \Phi^{(n-1)}(0) = A^{n-1}.$$

Teorema A.2.2. Se A é uma matriz $n \times n$ constante com polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0,$$

então

$$e^{At} = x_1(t)I + x_2(t)A + x_3(t)A^2 + \cdots + x_n(t)A^{n-1},$$

em que $x_k(t)$, $1 < k < n$, são as soluções para a equação diferencial escalar de ordem n

$$x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + c_1x' + c_0x = 0,$$

satisfazendo as seguintes condições iniciais

$$\left. \begin{array}{l} x_1(0) = 1 \\ x_1'(0) = 0 \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)}(0) = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_2(0) = 0 \\ x_2'(0) = 1 \\ \vdots \\ x_2^{(n-1)}(0) = 0 \end{array} \right\} \cdots \left. \begin{array}{l} x_n(0) = 0 \\ x_n'(0) = 0 \\ \vdots \\ x_n^{(n-1)}(0) = 1 \end{array} \right\}.$$

Referências Bibliográficas

- [1] AMMAR-KOHDJA, A. BENABDALLAH, M. GONZÁLEZ-BURGOS & L. DE TERESA, *Recent results on the controllability of coupled parabolic problems: A survey*, Mathematical Control and Related Fields, pg. 267-306, 2011.
- [2] S. A. AVDONIN, *On Riesz bases of exponentials in L^2* , Vestnik Leningr. Univ. Math., Vol.7, pg. 203-211, 1979.
- [3] S. A. AVDONIN & S. A. IVANOV, *Families of Exponentials: The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems*, Cambridge University Press, New York, 1995.
- [4] S. A. AVDONIN & S. A. IVANOV, *Exponential Riesz bases of subspaces and divided differences*, St Petersburg Mathematical Journal, pg. 339-351, 2001.
- [5] S. A. AVDONIN & W. MORAN, *Ingham-type inequalities and Riesz bases of divided differences*, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, pg. 803-820, 2001.
- [6] S. AVDONIN, A. C. RIVERO & L. TERESA, *Exact Boundary Contrillability of Coupled Hyperbolic Equations*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., Vol. 23, No. 4, pg. 701-710, 2013.
- [7] C. BATOCCHI, V. KOMORNIK & P. LORETI, *Ingham type theorems and applications to control theory*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 2-B, pg. 33-63, 1999.
- [8] M. S. BIRMAM & M. Z. SOLOMJAK, *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*, D. Reidel Publishing Company, 1987.
- [9] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO & E. TEIXEIRA, *Fundamentos de Análise Funcional*, IMPA, 2011.
- [10] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

- [11] P. R. BRYAN & A. Y. MARTIN, *Linear Functional Analysis*, Springer-Verlag , 1968.
- [12] R. DÁGER, *Insensitizing controls for the 1-D wave equation*, SIAM Journal on Control and Optimization, pg. 1758-1768, 2006.
- [13] L. C. EVANS *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 1998.
- [14] H. O. FATTORINI & D. L. RUSSELL, *Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension*, Arch. Rational Mech. Anal., pg. 272-292, 1971.
- [15] H. O. FATTORINI & D. L. RUSSELL, *Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials with an application to the control theory of parabolic equations*, Quart. Appl. Math., pg. 45-69, 1974/75.
- [16] I. E. LEONARD, *The Matrix Exponential*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996.
- [17] E. L. LIMA, *Análise Real*, IMPA, 2017.
- [18] N. K. NIKOL'SKII, *Treatise on the Shift Operator*, Springer-Verlag, 1986.
- [19] N. N. KRASOVSKII, *The theory of motion control*, Nauka, Russian, 1968.
- [20] R. E. A. C. PALEY & N. WIENER, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, volume XIX, AMS Coll. Publ., New York, 1934.
- [21] D. RUSSELL, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations*, SIAM Review, pg. 639-739, 1978.
- [22] P. A. TORRES, *El método de los momentos en problemas de controlabilidad*, Tesis de licenciatura, Universidad de Buenos Aires, 2017.
- [23] D. ULLRICH, *Divided Differences and Systems of Nonharmonic Fourier Series*, Proceeding of the American Mathematical Society, Volume 80, Number 1, September 1980.