

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Singularidades de Matrizes

Isabele Eleonora do Espírito Santo Silva

JOÃO PESSOA – PB
JUNHO DE 2021

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Singularidades de Matrizes

por

Isabele Eleonora do Espírito Santo Silva

sob a orientação da

Prof. Dra. Miriam da Silva Pereira

João Pessoa – PB
Junho de 2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586s Silva, Isabele Eleonora do Espírito Santo.
Singularidades de matrizes / Isabele Eleonora do
Espírito Santo Silva. - João Pessoa, 2021.
52 f.

Orientação: Miriam da Silva Pereira.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Singularidades de matrizes. 3.
G-equivalência. I. Pereira, Miriam da Silva. II. Título.

UFPB/BC

CDU 5(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CAMPUS I – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA DE MESTRADO JUNTO AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA, REALIZADA NO DIA 10 DE JUNHO DE 2022.

Ao décimo dia de junho de dois mil e vinte e dois, às 08:00 horas, de forma híbrida, por meio da plataforma virtual *Google Meet*, através do link: <https://meet.google.com/bcm-emio-kza> e na Sala de aula 1 do Departamento de Matemática em conformidade com o parágrafo único do Art. 80 da Resolução CONSEPE nº 79/2013, que regulamenta a defesa de trabalho final por videoconferência, seguindo os mesmos preceitos da defesa presencial, foi aberta a sessão pública de Defesa de dissertação intitulada “**Singularidades de Matrizes**”, da aluna **Isabele Eleonora do Espírito Santo Silva**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestra em Matemática, na área de **Geometria/Topologia**, sob a orientação da Prof.^a Dr.^a Miriam da Silva Pereira. A Banca Examinadora, indicada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, foi composta pelos professores: Dr.^a Miriam da Silva Pereira (Orientadora), Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior (membro externo/USP) e Dr.^a Thaís Maria Dalbelo (membro externo/UFSCAR). A professora Miriam da Silva Pereira, em virtude da sua condição de orientadora, presidiu os trabalhos e, depois das formalidades de apresentação, convidou a aluna a discorrer sobre o conteúdo da dissertação. Concluída a explanação, a candidata foi arguida pela banca examinadora que, em seguida, sem a presença da aluna, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar tendo concedido à candidata a menção: Aprovada. E, para constar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 10 de junho de 2022.

Miriam da Silva Pereira _____



Documento assinado digitalmente



NIVALDO DE GOES GRULHA JUNIOR
Data: 10/06/2022 11:45:39-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Nivaldo de Góes Grulha Júnior _____

Thaís Maria Dalbelo _____



Agradecimentos

Eu reverencio toda a minha ancestralidade. De modo especial, Zuíla do Espírito Santo Reis, minha avó falecida.

Agradeço aos meu pais Xangô e Oxóssi, à energia da Jurema Sagrada e a todos os meus guias espirituais que me iluminaram e me trouxeram até aqui.

Aos meus pais Eleonora e Bento por todo suporte racional e emocional. Sinto-me muito amada.

Aos meus irmãos Luiz Vítor e Emanuel, que preencheram minha infância e são hoje os meus grandes amigos. A meu Príncipe, pelo grande companheirismo. A Maninho, pelas injeções de serotonina através das crises de risos inevitáveis.

A Maria Carolina, por todo amor a mim dedicado.

Às minhas tias Beta, Tonha, Neide, Lane, Amélia, Lininha, Dora, Lúcia, Valda, Bel por toda a torcida e amor que recebi.

Sou muito grata!

A Rosinha, por todo carinho, apoio, broncas necessárias e cuidados. Roró, eu amo você!

Aos meus padrinhos que tanto oraram por mim.

A Shirly Campelo, a melhor amiga de todos os tempos.

A minha amiga Thay, que me inspira tanta sinceridade e simplicidade.

A Natale, pelos momentos mais divertidos.

A Anny Rafaelly, por ter me ensinado tantas lições de matemática. Ela foi a primeira amiga de minha infância e permanece até hoje.

A Izabela Freitas, que me acolheu na vida quando eu mais precisei. Foi lindo! Obrigada por sua amizade e incentivo. Amor imenso por você!

Às mais legais da UFPB: Déa e Mary.

Às nerds mais especiais de nosso grupo: Íze e Dani.

Ao meu amigo de todos os dias, Francisco

Às minhas colegas de trabalho Zezé, Cláudia, Lu, Rha e Ieda e por toda a nossa convivência.

A Timidez e a Luna pela oportunidade de receber o amor de cada um deles nessa existência.

Ao corpo docente do PPGMat, pelo aprendizado.

À sociedade, por me proporcionar um ensino público, gratuito e de qualidade.

Fechando essa lista, gostaria de agradecer à minha orientadora, a Professora Dra Míriam Pereira, por aceitar o meu convite, pelo suporte fundamental para a construção desse trabalho e pela preocupação com questões de gênero e raça que tanto nos atravessa dentro da área da matemática. Gratidão, professora, orgulho imenso de ter sido sua orientanda!

Resumo

Neste trabalho, estudamos singularidades de famílias de matrizes. Apresentamos, mais especificamente, a classificação de germes simples de singularidades de matrizes quadradas que estão associadas a variedades determinantis. A classificação é norteada pela $\mathcal{G}$ -equivalência, que consiste em mudanças de coordenadas na fonte e multiplicação à direita e à esquerda por germes de matrizes que têm posto máximo na origem. Discutimos alguns conceitos relacionados à teoria de singularidades de matrizes $n \times p$ que generalizam resultados obtidos por J.W. Bruce e F. Tari em [10] para matrizes quadradas. Finalizamos, apresentando alguns resultados concentrados em variedades determinantis de codimensão 2, com singularidade isolada na origem.

Palavras-chave: Variedades Determinantis; Singularidades de matrizes; $\mathcal{G}$ -equivalência.

Abstract

In this work, we study singularities of matrices families. More specifically, it presents a simple germ classification of matrix singularities associated with determinant varieties. The classification is guided by the $\mathcal{G}$ –equivalence that consists of changes of orientation in the source and multiplication to the right and to the left by matrix germs that have maximum rank in the origin. Discusses some concepts related to the theory of singularities of matrices $n \times p$ that generalize results obtained by J.W. Bruce and F. Tari in [10] for square matrices. We conclude by presenting some results concentrated on determinant manifolds of encoding 2, with singularity isolated at the origin.

Keywords: Singularity Theory; Matrix singularities; $\mathcal{G}$ –equivalence.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	5
1.1 Grupo Linear Geral e Grupo dos Automorfismos Lineares	5
1.2 Variedades Diferenciáveis	8
1.2.1 Transversalidade	11
1.3 Germes de Aplicações Diferenciáveis	12
1.4 Ação de Grupos	14
1.5 Alguns grupos de Mather	16
2 Teoria de Singularidades de Matrizes	20
2.1 Variedade Determinantal	20
2.2 Resultados Básicos	21
3 $\mathcal{G}$-Estabilidade de Matrizes	35
3.1 Deformações de Germes Cohen-Macaulay de Codimensão 2	36
3.2 $\mathcal{G}$ -Estabilidade de Matrizes	38
3.3 Resultados e Classificação	40

Introdução

A Teoria das Catástrofes, elaborada pelo célebre matemático francês René Thom (1923-2002), gerou um impacto muito grande não só na comunidade científica. Esse estudo popularizou-se através dos meios de comunicação de massa que, utilizando uma linguagem mais acessível, alcançou o grande público, por causa também de suas aplicações nas áreas mais diversas da ciência.

A palavra **catástrofe**, neste contexto, está intimamente ligada a mudanças bruscas de padrões. Na natureza, tsunamis, terremotos, deslizamentos de terra e tornados são exemplos de catástrofes. Mas não só desastres naturais são abarcados por esse conceito; a simples quebra de uma onda do mar ou as fases de divisão celular de um embrião também o são.

Os conceitos fundamentais na Teoria das Catástrofes são a genericidade e a estabilidade estrutural. Os modelos matemáticos construídos com base na teoria de Thom não tinham como finalidade fazer algum tipo previsão, mas sim destinar-se a entender inteligentemente os fenômenos naturais, de modo que a principal preocupação era encontrar estruturas matemáticas que descrevessem as formas de todas as possíveis superfícies de equilíbrio (estáveis), que explicassem a sua criação bem como as suas alterações.

As famílias de aplicações diferenciáveis dependentes de parâmetros, manipuladas de maneira conveniente, mostraram-se adequadas à descrição e classificação das catástrofes. O estudo de René Thom partiu da Teoria de Morse, que tratava de formas normais de funções $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ na vizinhança de um ponto singular não-degenerado. Provou-se que pequenas perturbações da função em torno desse ponto forneciam, no máximo, singularidades de mesmo tipo.

Hassler Whitney (1907-1989) foi outro importante matemático que estudava singularidades de aplicações diferenciáveis, mas, diferente de Morse, seu foco era em aplicações $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Whitney apresentou dois tipos de singularidades estruturalmente estáveis: a dobra e a cúspide.

Thom estendeu os trabalhos de Whitney e de Morse usando ferramentas matemáticas diferentes, ele estudou o comportamento de uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mergulhando-as em famílias de aplicações $F(x, t)$ com $F(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, sendo x e t variáveis multidimensionais com t fazendo vez de parâmetro, técnica que ele chamou de *desdobramento da função*.

Os estudos de René Thom mostraram que, para espaços de parâmetros com dimensão menor ou igual a 4, é possível encontrar um desdobramento de f que fornece

todas informações importantes de f . A isso ele chamou de *desdobramento universal*. Ele listou sete desdobramentos estáveis com no máximo quatro parâmetros, conhecidos como *As sete catástrofes elementares*.

A formalidade matemática da teoria de Thom foi apresentada nas pesquisas dos matemáticos John Mather (1942-2017) e Bernard Malgrange (1928-), que usaram ferramentas nada triviais de Análise Funcional e de Topologia para provar a teoria.

A Teoria de Singularidades é um ramo de pesquisa que está dentro das grandes áreas matemáticas de Geometria e de Topologia que, no início de sua fundamentação e primeiros estudos, deu base à Teoria das Catástrofes e, atualmente, devido a seu desenvolvimento ao longo dos últimos anos, a abarca. Se considerarmos a história da matemática, esse é um ramo de pesquisa relativamente novo.

O termo **singularidade** geralmente é usado, na matemática, para comportamentos inesperado de determinados objetos. Considerando, por exemplo, uma aplicação suave $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, dizemos que $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto singular se o posto da matriz *jacobiana* de f aplicada a x não é maximal. De maneira mais geral, considerando variedades diferenciáveis N e P , de dimensões n e p , respectivamente, uma aplicação suave $g : N \rightarrow P$ tem um ponto singular $\bar{x} \in N$ se existe uma direção ao longo da qual a derivada de g é nula em $\bar{x}$.

Podemos pensar a Teoria de Singularidades como uma especialidade que estuda a geometria e a topologia de variedades definidas por equações polinomiais ou analíticas não-suaves. O desenvolvimento da teoria envolve técnicas de diferentes áreas da matemática e os resultados obtidos possuem diversas aplicações práticas.

Uma abordagem da Teoria de Singularidades que atualmente se mostra muito atrativa à pesquisa científica diz respeito ao estudo de família de matrizes.

Nossa principal referência nesse trabalho é o artigo [10] dos matemáticos James William Bruce e Farid Tari. Ali eles classificam singularidades em matrizes quadradas. Também em [18], Bruce especifica o estudo para matrizes simétricas. Uma das variedades de interesse atualmente são as chamadas variedades determinantis, isto é, variedades definidas por equações provenientes de menores de matrizes. Temos como objetivo de nosso trabalho classificar germes simples de singularidades de matrizes quadradas, associadas a variedades determinantis, usando técnicas da Teoria de Singularidades aplicada a matrizes.

Uma família de matrizes quadradas é um germe de uma aplicação suave $A : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Como motivação ao estudo das singularidades de matrizes quadradas, consideremos as n -uplas diferenciáveis 1-forma em $\mathbb{R}^n$,

$$\alpha_i = a_{i1}(x)dx_1 + \dots + a_{in}(x)dx_n, \text{ para } 1 \leq i \leq n,$$

onde a_{ij} são germes de funções suaves. Podemos associar, a cada n -upla, a família de matrizes $(a_{ij}(x))$, que podemos pensar cada entrada como funções $a_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

O discriminante das n -uplas é o conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $\det(A(x)) = 0$.

Dada uma matriz A como acima e duas outras matrizes X e Y de ordem n , cujas entradas são funções diferenciáveis em x e que, avaliadas em $x = 0$, são matrizes invertíveis, podemos considerar a função XAY . É fácil ver que seu determinante zera nos mesmos pontos que o discriminante de A .

Considere agora um difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e defina $(A \circ \phi)(x) = ((a_{ij} \circ \phi)(x))$. Ao longo do trabalho, apresentamos a $\mathcal{G}$ -equivalência que tem, como uma de suas propriedades, a preservação da função discriminante. Com esse conceito em mente, não é difícil mostrar que qualquer mudança suave de coordenadas na fonte de A leva o discriminante de A ao discriminante de $A \circ \phi$.

No capítulo 1, começamos apresentando algumas ferramentas de singularidades de matrizes como, por exemplo, as definições de germes, transversalidade e variedade determinantal.

No capítulo 2, definimos o conceito de variedade determinantal e introduzimos ferramentas mais específicas para o estudo dos germes $(\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ como o estudo do espaço tangente e a $\mathcal{G}$ -determinação finita.

No capítulo 3, discutiremos um pouco sobre Germes Cohen-Macaulay de dimensão 2 bem como a $\mathcal{G}$ -estabilidade de matrizes.

No capítulo 4, começamos a olhar efetivamente para os critérios de classificação de germes simples $A : (\mathbb{C}^r, 0) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ finitamente determinado.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados preliminares necessários ao desenvolvimento do nosso trabalho. As principais referências são [6], [3] e [8].

1.1 Grupo Linear Geral e Grupo dos Automorfismos Lineares

Seja $M_n(\mathbb{K})$ o espaço das matrizes de ordem n com entradas em $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Consideremos o seguinte subconjunto de $M_n(\mathbb{K})$.

Definição 1.1. *O conjunto $GL_n(\mathbb{K})$ é um grupo com a operação usual de multiplicação de matrizes chamado grupo linear geral.*

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : A \text{ é invertível}\} = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \det(A) \neq 0\}$$

A operação de produto usual de matrizes é binária, associativa e tem como elemento neutro a matriz identidade de ordem n , denotada por Id_n .

Definição 1.2. *Dado U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão $n < \infty$, definimos o grupo de automorfismos lineares de U , $GL(U)$, como sendo o grupo de todas as transformações lineares $T : U \rightarrow U$ invertíveis.*

Se U é um espaço vetorial cuja dimensão é n , $GL(U)$ é isomorfo a $GL_n(\mathbb{K})$, basta notar que a aplicação ϕ_β , definida abaixo, é um isomorfismo:

$$\begin{aligned}\phi_\beta : GL(U) &\rightarrow GL_n(\mathbb{K}) \\ T &\mapsto [T]_\beta\end{aligned}$$

sendo $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base fixada de U e $[T]_\beta$ a matriz da transformação linear de $T \in GL(U)$ na base β . Ver ([6], p. 82).

Considere V e W espaços vetoriais de dimensão n , definimos em $GL(V) \times GL(W)$ uma operação de produto tal que, dados $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in GL(V) \times GL(W)$, $(A_1, B_1) \cdot (A_2, B_2) = (A_1 A_2, B_1 B_2) \in GL(V) \times GL(W)$. A operação é binária, associativa, admite elemento inverso para cada elemento do conjunto $GL(V) \times GL(W)$ e tem como elemento neutro o par (Id_n, Id_n) , logo, $(GL(V) \times GL(W), \cdot)$ é grupo.

Denotamos por $Hom_{\mathbb{K}}(U, V)$ o conjunto das transformações lineares entre os espaços vetoriais U e V sobre $\mathbb{K}$. Tal conjunto tem uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Teorema 1.1. *Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ com dimensões m e n , respectivamente. Então o espaço $Hom_{\mathbb{K}}(U, V)$ tem dimensão $m \cdot n$.*

Demonstração. Ver ([6], p. 10). □

Definição 1.3. *Um operador linear é uma transformação linear $T : U \rightarrow U$, sendo U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial.*

O conjunto dos operadores lineares é um caso particular de $Hom_{\mathbb{K}}(U, V)$, onde $U = V$. Podemos definir neste espaço a operação de composição, operação que é associativa e traz o operador identidade $Id : U \rightarrow U$ como elemento neutro da operação. Porém não é verdade que todo elemento de $Hom_{\mathbb{K}}(U, U)$ tem inverso relativo a essa operação e nem que a composição seja comutativa, como veremos nos exemplos abaixo.

Exemplo 1.1. *Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformação linear tal que $T(x, y) = (x+y, x+y)$. Note que $T \in Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ e $(-1, 1) \in Ker(T)$, isto é, T não é injetora. Logo T não possui inversa.*

Exemplo 1.2. *Sejam $T, G \in Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tais que $T(x, y) = (2x + y, 2x + y)$ e $G(x, y) = (x + y, x - y)$. Facilmente encontramos*

$$\begin{array}{ccc} T \circ G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 & e & G \circ T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (3x + y, 3x + y) & & (x, y) \mapsto (4x + 2y, 0) \end{array}$$

Obviamente, $(T \circ G) \neq (G \circ T)$.

Observações 1.1.

- i) *Se U é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$, podemos mostrar que existe um isomorfismo entre $Hom_{\mathbb{K}}(U, U)$ e $M_n(\mathbb{K})$;*
- ii) *Com isso, os teoremas sobre matrizes podem ser inferidos dos teoremas sobre operadores lineares e vice-versa.*

No que segue, estudamos especificamente algumas transformações lineares cujos contradomínios são o corpo $\mathbb{K}$.

Definição 1.4. *Seja U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Um funcional linear em U é uma transformação linear $f : U \longrightarrow \mathbb{K}$.*

Proposição 1.2. *Um funcional linear $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, \mathbb{K})$ não-nulo é sempre sobrejetor e será injetor se, e somente se, $\dim_{\mathbb{K}} U = 1$.*

Demonstração. Consequência do **Teorema do Núcleo e da Imagem**. Ver ([6], p. 87). $\square$

O espaço dual a U é o espaço $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, \mathbb{K})$ denotado por U^* . Segue do Teorema 1.1 que $\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} U^*$.

Exemplo 1.3. *Seja U o $\mathbb{K}$ -espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ e $\beta \in \mathbb{K}$. A função*

$$\begin{aligned} f_{\beta} : U &\longrightarrow \mathbb{K} \\ p &\longmapsto p(\beta) \end{aligned}$$

é um funcional linear.

Exemplo 1.4. *Seja $U = \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ e considere a função abaixo chamada função traço, isto é,*

$$\begin{aligned} tr : U &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A = (a_{ij})_{ij} &\longmapsto tr A = \sum_{i=1}^n a_{ii} \end{aligned}$$

é um funcional linear. Não é difícil de ver que $A, B \in U$, $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ e dado $\lambda \in \mathbb{K}$, $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$.

Teorema 1.3. *Seja U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com $\dim_{\mathbb{K}}(U) = n < \infty$ e seja $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de U . Então existe uma única base $\beta^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ de U^* tal que $f_i(u_j) = \delta_{ij}$, para $i, j = 1, \dots, n$. Além disto, para cada $u \in U$, temos que*

$$u = \sum_{i=1}^n f_i(u) u_i$$

e para cada $f \in U^$, temos que*

$$f = \sum_{i=1}^n f(u_i) f_i$$

Demonstração. Ver ([6], p. 112) $\square$

O conjunto β^* é chamada de base dual a β . Se $u \in U$, então as coordenadas deste vetor com relação à base β são $f_1(u), \dots, f_n(u)$, isto é, $u = (f_1(u), \dots, f_n(u))_\beta$. Além disso, as coordenadas de $f \in U^*$ com relação à base β^* são $f(u_1), \dots, f(u_n)$, isto é, $f = (f(u_1), \dots, f(u_n))_{\beta^*}$. A dualidade vem dessa interação entre essas bases.

Exemplo 1.5. *Sejam $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 0, -1)$ e $u_3 = (0, 1, 1)$ em $\mathbb{R}^3$. Observe que $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Calculemos a base dual $\beta^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Teremos então que $f_i(u_j) = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, 2, 3$. Escrevendo um elemento $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ em função da base β , teremos*

$$(x, y, z) = \alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(1, 0, -1) + \alpha_3(0, 1, 1)$$

isto é, $(x, y, z) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_\beta$. Com isso,

$$f_i(x, y, z) = f_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_\beta = \alpha_i \text{ para } i = 1, 2, 3$$

Calculemos, então, α_1, α_2 e α_3 em função de x, y e z . Temos,

$$f_1(x, y, z) = x + z - y, f_2(x, y, z) = y - z, f_3(x, y, z) = 2y - x - z$$

1.2 Variedades Diferenciáveis

A definição de uma *variedade diferenciável* formaliza a ideia que localmente tal conjunto se comporta como um subconjunto do espaço euclidiano na perspectiva de sua estrutura diferenciável.

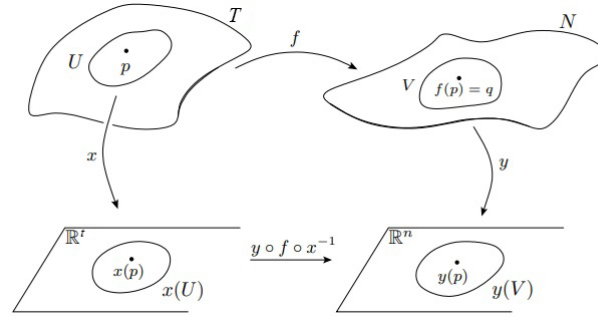
Nesta seção, introduziremos alguns conceitos elementares que nos ajudarão a ficar familiarizados com a noção de variedades.

Definição 1.5. *Sejam X um conjunto em $\mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação e $a \in X$. Dizemos que f é de classe C^∞ em a se existir $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, com $a \in U$ e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, C^∞ em a , tal que $F|_{X \cap U} = f|_{X \cap U}$.*

Definição 1.6. *Uma parametrização n -dimensional de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^p$ é uma aplicação suave (C^∞) $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto tal que $\Phi(U) = X$ e $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ é um difeomorfismo.*

Definição 1.7. *Dizemos que $N \subset \mathbb{R}^p$ é uma variedade diferenciável n -dimensional se todo $x \in N$ tem uma vizinhança $U_x \cap N$, com $U_x \subset \mathbb{R}^p$ e uma parametrização $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^p$, onde $V \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $\Phi(V) = U_x \cap N$. A aplicação Φ é chamada carta de N em x .*

Figura 1.1: Sistemas de coordenadas e diferenciabilidade da aplicação $y \circ f \circ x^{-1}$



Fonte: Lima, ed. 2011, p. 130. [4]

Definição 1.8. *Sejam T e N variedades de classe C^∞ de dimensões t e n , respectivamente. Uma aplicação $f : T \rightarrow N$ é diferenciável num ponto $p \in T$ se existem sistemas de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^t$ em T , $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ em N , com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $x(p)$. Em particular, f é contínua no ponto $p \in T$. Ver a figura 1.1.*

Definição 1.9. *Seja $N \subset \mathbb{R}^p$ uma variedade diferenciável n -dimensional. Então, dado $x \in N$, existem abertos $W \subset N$, $U \subset \mathbb{R}^n$ e uma aplicação $\Phi : U \rightarrow W$ difeomorfismo. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\Phi(0) = x$. Definimos o espaço tangente a N em x como $(d\Phi)_0(\mathbb{R}^n)$.*

Denotamos o espaço tangente a N em x como $T_x N$.

Observações 1.2.

- i) A definição de $T_x N$ independe da parametrização escolhida;
- ii) $T_x N$ é um subespaço vetorial n -dimensional de $\mathbb{R}^p$.

Exemplo 1.6. *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável quando munido da estrutura C^∞ gerada pela carta $id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $id : x \mapsto x$.*

Exemplo 1.7. *No mesmo sentido do exemplo anterior, considere o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ de números reais. Os n^2 elementos de cada uma das matrizes, ordenados segundo um preceito qualquer, definem um ponto em $\mathbb{R}^{n^2}$, de modo que o conjunto em questão pode ser identificado com o $\mathbb{R}^{n^2}$ e herda deste sua estrutura diferenciável.*

Existem variedades que não estão contidas num espaço euclidiano. Daremos dois exemplos a seguir: os espaços projetivos e as variedades Grassmannianas.

Exemplo 1.8. O espaço projetivo $\mathbb{P}(V)$ é o conjunto dos subespaços vetoriais de V de codimensão 1, sendo V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. De maneira mais precisa, $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\}) / \sim$, onde, para $v, w \in (V \setminus \{0\})$, temos que $v \sim w$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tal que $w = \lambda v$. No caso em que $V = \mathbb{K}^{n+1}$, usaremos a notação $\mathbb{P}^n$. Podemos ver o espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ como o conjunto de todas as retas $R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem. Os elementos $R \in \mathbb{P}^n$ podem ser descritos por um sistema de coordenadas homogêneas. Cada vetor não-nulo $v = (y^1, \dots, y^{n+1})$ é uma base de R e, para cada real, $t \neq 0$, tv ainda é uma base de R . As coordenadas $y^1, \dots, y^{n+1}$, definidas a menos de um fator arbitrário $t \neq 0$, se chamam as coordenadas homogêneas de R .

Exemplo 1.9. A variedade de Grassmann $G_r(V)$ de um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V , de dimensão n , é o conjunto de todos os subespaços vetoriais de dimensão r de V . Em particular, $\mathbb{P}^n = G_1(\mathbb{R}^{n+1})$. A também chamada Grassmanniana $G_r(V)$ tem dimensão igual a $r(n - r)$.

Definição 1.10. Seja N uma variedade diferenciável n -dimensional. Uma subvariedade diferenciável P de N é ela própria uma variedade diferenciável m -dimensional com $P \subseteq N$ e $m \leq n$. Neste caso, definimos denotamos a codimensão de P por $\text{cod}(P) = n - m$.

Com as definições que exibimos até agora nesta seção, mostrar que certo conjunto P é uma subvariedade, na maioria dos casos, apresenta-se como uma atividade não muito simples de ser executada, já que, para isso, teríamos de buscar parametrizações de vizinhanças de cada ponto $x \in P$.

A próxima definição nos possibilita outros jeito de encontrar subvariedades que são diferenciáveis.

Definição 1.11. Seja $s : N \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável de classe C^∞ entre variedades N e P . Um ponto $p \in P$ é chamado **valor regular** de s se, para cada $n \in s^{-1}(p)$, a derivada $ds_n : T_n N \rightarrow T_p P$ é sobrejetiva.

Teorema 1.4. Considere a aplicação de classe C^∞ $s : N \rightarrow P$ entre duas variedades N e P de dimensões n e m , respectivamente. Se $p \in P$ é um valor regular, $s^{-1}(p)$ é vazio ou $s^{-1}(p)$ é uma subvariedade de N com $\dim(s^{-1}(p)) = n - m$.

Demonstração. Ver ([4], p. 69) □

A seguir, vamos mostrar as principais definições que versam sobre o conceito de estratificação de Whitney. Tal teoria objetiva decompor uma variedade singular em subvariedades regulares disjuntas, as quais chamamos de estratos.

Definição 1.12. *Sejam N uma variedade diferenciável e $S \subset N$. Uma estratificação localmente finita de S é uma partição de S em subvariedades de N , chamadas estratos, tais que, para todo ponto de S , existe uma vizinhança de N que encontra apenas um número finito de estratos.*

Definição 1.13. *Seja N uma variedade suave, $S \subset N$ e $\{S_\alpha\}$ uma estratificação de S . Dizemos que $\{S_\alpha\}$ satisfaz a condição de fronteira se, para dois estratos S_α e S_β , tais que $S_\alpha \cap \overline{S_\beta} \neq \emptyset$, então $S_\alpha \subset \overline{S_\beta}$.*

Definição 1.14. *Uma estratificação $\{S_\alpha\}$ que satisfaz as condições de Whitney atende às seguintes condições.*

Para todo par (S_α, S_β) de estratos tais que $S_\beta \subset \overline{S_\alpha}$ e para todo $y \in S_\beta$, temos,

a) Para toda sequência de pontos x_i de S_α convergindo para y , tal que o limite

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_{x_i}(S_\alpha) = T$$

existe na Grassmanniana correspondente, então T contém $T_y(S_\beta)$.

b) Se além disso, para toda sequência y_i de pontos de S_β convergindo para y e tal sequência de direções

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i y_i = \lambda$$

existe no espaço projetivo, então T contém λ .

Em [16], Whitney mostrou que toda variedade analítica complexa admite uma estratificação que atende a essas duas condições.

1.2.1 Transversalidade

Com o objetivo de generalizar o conceito de valor regular, nós vamos apresentar o conceito de Transversalidade.

A noção de objetos que se interceptam transversalmente é um conceito fundamental para a teoria de singularidades. Nesta seção, apresentaremos sua definição, alguns resultados e exemplos.

A noção mais primitiva deste conceito diz respeito à soma de dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V .

Definição 1.15. *Sejam W e Q dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V . Nós dizemos que W e Q se interceptam transversalmente quando $W + Q = V$.*

Exemplo 1.10. Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$ e os subconjuntos $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = 0\}$ e $Q = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 | y_2 = 0\}$. É fácil ver que W e Q são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ e que $W + Q = \mathbb{R}^2$. Portanto, W e Q se interceptam transversalmente.

Vamos estender agora a ideia de transversalidade a subvariedades diferenciáveis de uma variedade diferenciável.

Definição 1.16. Dizemos que duas subvariedades N_1 e N_2 de uma variedade N se interceptam transversalmente em $x \in N_1 \cap N_2$ quando os espaços tangentes $T_x N_1$ e $T_x N_2$ se interceptam transversalmente em $T_x N$. N_1 e N_2 se interceptam transversalmente quando a noção acima vale para todos os pontos $x \in N_1 \cap N_2$.

Definição 1.17. Sejam S e P variedades diferenciáveis e $s : S \rightarrow P$ uma aplicação C^∞ . Seja W uma subvariedade de P e $x \in S$. Então s intersepta W transversalmente em x se

(i) $s(x) \notin W$, ou

(ii) $s(x) \in W$ e $T_{s(x)}P = T_{s(x)}W + (ds)_x(T_x S)$

Dizemos que s é transversal a W se s é transversal a W para todo $x \in S$. Notação: $s \pitchfork W$.

Exemplo 1.11. Considere a aplicação $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $s(t) = (t, 0)$ e seja W o eixo- y em $\mathbb{R}^2$. Note que a aplicação s é transversal a W em $s(\mathbb{R}) \cap W = \{(0, 0)\}$,

$$T_{s(x)}\mathbb{R}^2 = T_{s(x)}W + (ds)_x(T_x\mathbb{R})$$

Proposição 1.5. Seja $f : P \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^k transversal a uma subvariedade $S \subset N$, de classe C^k . Então

(i) Ou bem $f^{-1}(S) = \emptyset$ ou bem $f^{-1}(S)$ é uma subvariedade de classe C^k de P , cuja codimensão em P é igual à codimensão de S em N ;

(ii) Neste caso, $T_p(f^{-1}(S)) = (df)_p^{-1}(T_{f(p)}S)$ para todo $p \in f^{-1}(S)$

Demonstração. Ver ([4], p.179)

□

1.3 Germes de Aplicações Diferenciáveis

Nesta seção, definimos importantes estruturas da Teoria de Singularidades de Aplicações Diferenciáveis tais como germes de funções diferenciáveis, o anel $\mathcal{O}_n$ e também o seu ideal maximal $\mathfrak{M}$.

Definição 1.18. *Seja L um aberto do $\mathbb{K}^n$ contendo a origem e*

$$\mathcal{F} = \{f : L \rightarrow \mathbb{K}^p \mid f \text{ é de classe } C^\infty\}$$

Dados $L_1, L_2 \subseteq L$, $f_1 : L_1 \rightarrow \mathbb{K}^p$ e $f_2 : L_2 \rightarrow \mathbb{K}^p$, em $\mathcal{F}$, definimos:

$$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow \exists W \subset L_1 \cap L_2 \text{ tal que } f_{1|_W} = f_{2|_W}$$

A classe de equivalência de f concernente a essa relação é chamada de germe.

A notação de cada classe de equivalência é dada por $[f]$ ou $f : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow \mathbb{K}^p$, sendo $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$ um representante de classe.

Denotamos por

$$\mathcal{O}_{(n,p)} = \frac{\mathcal{F}}{\sim} = \{[f] \mid f \in C^\infty\},$$

o anel local dos germes de função analíticas $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p$. Por simplicidade, quando tratamos de germes de funções ($p = 1$), escrevemos $\mathcal{O}_n$. O conjunto $\mathfrak{M}_n = \{f \in \mathcal{O}_n \mid f(0) = 0\}$ é seu ideal maximal e, quando não houver perigo de notação, $\mathfrak{M}_n$ será denotado apenas por $\mathfrak{M}$.

Definição 1.19. *O conjunto $\mathfrak{M}^k$ é dado pela multiplicação do conjunto $\mathfrak{M}$ k vezes.*

$$\mathfrak{M}^k = \underbrace{\mathfrak{M} \dots \mathfrak{M}}_{k\text{-vezes}}$$

Definição 1.20. *O k -jato de $f : U \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ em $a \in U$ é o polinômio de grau menor ou igual a k em n variáveis dado por*

$$j^k f(a) = (df)_a x + \frac{1}{2}(d^2 f)_a x^2 + \dots + \frac{1}{k!}(d^k f)_a x^k$$

Definição 1.21. *O k -jato de $f : U \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$, com $f = (f_1, \dots, f_p)$, em $a \in U$ é dado por*

$$j^k f(a) = (j^k f_1(a), \dots, j^k f_p(a))$$

O espaço dos k -jatos é denotado por $J^k(n, p)$, é o conjunto das p -uplas de polinômios em n variáveis de grau menor ou igual a k sem o termo constante. Notemos que é um espaço vetorial de dimensão finita e que

$$J^k(n, p) = \mathfrak{M}_n \mathcal{O}_{(n,p)} / \mathfrak{M}_n^{k+1} \mathcal{O}_{(n,p)}$$

Uma das principais ideias na teoria das singularidades é substituir o espaço dos germes $\mathfrak{M} \mathcal{O}_{(n,p)}$ pelo espaço $J^k(n, p)$ dos k -jatos.

1.4 Ação de Grupos

Uma relação de equivalência nos possibilita agrupar elementos do conjunto $\mathfrak{MO}_{(n,p)}$ em classes. Para tal, exibiremos aqui as noções de *ação de grupo* e de *grupo de Lie*. Quando consideramos o conjunto $\mathfrak{MO}_{(n,p)}$, estamos trabalhando com os germes $(\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^p, 0)$.

Definição 1.22. *Sejam $(G, *)$ um grupo com a operação binária $* : G \times G \rightarrow G$ e X um conjunto não-vazio. A ação de um G em X é uma operação binária $\alpha : G \times X \rightarrow X$ com $(g, x) \mapsto \alpha(g, x)$ satisfazendo*

$$a) \alpha(e_G, x) = x, \text{ para todo } x \in X \text{ sendo } e_G \text{ o elemento neutro de } G.$$

$$b) \alpha(g_1, \alpha(g_2, x)) = \alpha(g_1 * g_2, x), \quad g_1, g_2 \in G, \quad x \in X.$$

Definição 1.23. *Sejam $(G, *)$ um grupo, X um conjunto não-vazio e $\alpha : G \times X \rightarrow X$ uma ação do grupo G em X . A órbita de um elemento $x \in X$ é o conjunto $\{\alpha(g, x) : \forall g \in G\}$. Denotamos tal conjunto por $G \cdot x$.*

Proposição 1.6. *Sejam $(G, *)$ um grupo e X um conjunto não vazio que sofre uma ação do grupo G . Temos que X pode ser escrito como a união disjuntas das órbitas de seus elementos.*

$$X = \dot{\bigcup}_{x \in X} G \cdot x$$

Proposição 1.7. *Sejam V e W $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais de dimensão n e $H = GL(V) \times GL(W)$. A ação natural de H no conjunto $Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ é dada pela seguinte aplicação*

$$\alpha : H \times Hom(V, W) \rightarrow Hom(V, W)$$

$$((A, B), T) \mapsto ATB^{-1}$$

Demonstração. Note que a aplicação α está bem definida e é, de fato, uma ação, pois, tomando $(Id_n, Id_n) \in H$ e $T \in Hom(V, W)$, temos,

$$a) \alpha((Id_n, Id_n), T) = (Id_n)T(Id_n^{-1}) = T$$

$$b) \text{ Sejam } (A, B), (A_1, B_1) \in H \text{ e } T \in Hom(V, W), \text{ temos que}$$

$$\begin{aligned} \alpha((A, B), \alpha((A_1, B_1), T)) &= \alpha((A, B), A_1 T B_1^{-1}) = (A A_1) T (B B_1)^{-1} = \\ &= \alpha((A A_1, B B_1), T) = \alpha((A, B) \cdot (A_1, B_1), T) \end{aligned}$$

□

Definição 1.24. *Uma ação de um grupo G em um conjunto X induz uma relação de equivalência $(\sim_G)$ em X :*

$$x, y \in X, x \sim_G y \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ tal que } y = g \cdot x$$

Não há dificuldade em ver que essa relação é *reflexiva, simétrica e transitiva*.

Definição 1.25. Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável T , de classe C^∞ , com uma estrutura de grupo em que a operação $m : T \times T \rightarrow T$, $m(t_1, t_2) = t_1 t_2$ e a inversão $i : T \rightarrow T$, $i(g) = g^{-1}$, são aplicações de classe C^∞ .

Exemplo 1.12. O grupo $GL_n(\mathbb{R})$ é um exemplo de grupo de Lie. Considere a função $\det : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$, que é contínua, e que podemos identificar $GL_n(\mathbb{R})$ com $\det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, logo é um subconjunto aberto do espaço das matrizes $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$. A operação multiplicação de matrizes em $M_n(\mathbb{R})$ é dada por uma aplicação polinomial, consequentemente suave, e a inversão de matrizes em $GL_n(\mathbb{R})$ é dada por uma aplicação racional com denominador não-nulo, portanto é suave.

Uma ação suave de um grupo de Lie em uma variedade suave N é uma ação

$$\phi : T \times N \rightarrow N$$

em que ϕ é uma aplicação suave.

Proposição 1.8. Seja ϕ uma ação suave de um grupo de Lie T numa variedade suave N . Para cada $p \in N$, a aplicação que representa a órbita de p , $\phi_p : T \rightarrow N$, é suave e tem um posto constante, então o grupo $T_p = (\phi_p)^{-1}(p)$ é um subgrupo de Lie de T . Se $T_p = \{e_T\}$, então ϕ_p é uma imersão suave injetiva e a órbita $T \cdot p$ é uma subvariedade de N .

Demonstração. Ver ([15], p.74) □

Via de regra, **não** podemos afirmar que as órbitas de uma ação de um grupo de Lie T em uma variedade diferenciável N são subvariedades, mas sim subvariedades imersas como vimos na proposição anterior. Entretanto, nos casos que, para algum $x \in N$, $G \cdot x$ seja uma subvariedade, temos as seguintes proposição e definição.

Proposição 1.9. Seja $\phi : T \times N \rightarrow N$ uma ação suave de um grupo de Lie T em uma variedade diferenciável N . Se as órbitas são subvariedades de N , então, para qualquer $x \in N$, a aplicação $\phi_x : T \rightarrow T \cdot x$, dado por $\phi_x(t) = t \cdot x$, é uma submersão.

Demonstração. Ver ([15], p.74) □

Definição 1.26. O Espaço Tangente à órbita $G \cdot x$ em x é a imagem de $d\phi_x : T_{Id}G \rightarrow T_x(G \cdot x)$, ou seja, $T_x(G \cdot x) = d\phi_x(T_{Id}G)$.

1.5 Alguns grupos de Mather

As próximas definições dizem respeito a equivalências utilizadas para classificações de germes. Tais relações determinam os grupos de Mather. Introduziremos as definições dos grupos $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}$ e $\mathcal{C}$.

Definição 1.27. *Sejam $f, g \in \mathfrak{MO}_{(n,p)}$. Dizemos que f, g são $\mathcal{A}$ -equivalentes ($f \sim_{\mathcal{A}} g$) se existirem difeomorfismos $h : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^n, 0)$ e $k : (\mathbb{K}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^p, 0)$ tais que*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^p \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^p \end{array}$$

Com $g = k \circ f \circ h^{-1}$ e $f = k^{-1} \circ g \circ h$.

Exemplo 1.13. *Considere os germes $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dados por $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$ e $g(x, y) = (x^2, y^2)$. Tomemos $h, k \in \mathcal{A}$ tais que $h^{-1}(x, y) = (x + y, x - y)$ e $k(x, y) = (\frac{1}{4}(x + 2y), \frac{1}{4}(x + 2y))$. Note então que*

$$g = k \circ f \circ h^{-1}$$

Portanto, $(f \sim_{\mathcal{A}} g)$.

Definição 1.28. *Dizemos que $f \in \mathfrak{MO}_{(n,p)}$ é estável (ou $\mathcal{A}$ -estável) se existe uma vizinhança V de f em $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, com a topologia de Whitney, tal que, para todo $g \in V$, temos $f \sim_{\mathcal{A}} g$.*

Definição 1.29. *O grupo dos germes de difeomorfismos $h : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^n, 0)$ é denotado por $\mathcal{R}$. O grupo $\mathcal{R}$ é chamado grupo de mudança de coordenadas na fonte.*

Observação 1.1.

i. *O conjunto dos germes de difeomorfismos que não preservam a origem é denotado por $\mathcal{R}_e$.*

Definição 1.30. *Sejam $f, g \in \mathfrak{MO}_{(n,p)}$. Dizemos que f, g são $\mathcal{R}$ -equivalentes ($f \sim_{\mathcal{R}} g$) se existe $h \in \mathcal{R}$ tal que $f \circ h^{-1} = g$*

A ação de $\mathcal{R}$ sobre $\mathfrak{MO}_{(n,p)}$ é dada por composição à direita

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \times \mathfrak{MO}_{(n,p)} &\rightarrow \mathfrak{MO}_{(n,p)} \\ (h, f) &\mapsto f \circ h^{-1} \end{aligned}$$

Definição 1.31. *O espaço tangente à órbita de um germe $f \in \mathfrak{MO}_{(n,p)}$ pela ação de $\mathcal{R}$ é dado por*

$$T\mathcal{R}f = \mathfrak{M}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$$

Definição 1.32. *O grupo dos germes de difeomorfismos $l : (\mathbb{K}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^p, 0)$ é denotado por $\mathcal{L}$. O grupo $\mathcal{L}$ é chamado grupo de mudança de coordenadas na meta (em $(\mathbb{K}^p, 0)$).*

A ação de $\mathcal{L}$ sobre $\mathfrak{MO}_{(n,p)}$ é dada por composição à direita

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \times \mathfrak{MO}_{(n,p)} &\rightarrow \mathfrak{MO}_{(n,p)} \\ (l, f) &\mapsto f \circ l \end{aligned}$$

Com as últimas definições, podemos agora identificar o grupo $\mathcal{A}$ com o produto $\mathcal{R} \times \mathcal{L}$.

Definição 1.33. *O grupo de contato, que denotamos por $\mathcal{K}$, é o grupo dos germes de difeomorfismo $(\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p, 0)$, que são da forma*

$$H(x, y) = (h(x); \Theta(x, y))$$

onde $h \in \mathcal{R}$ e $\Theta(x, 0) = 0$, para x próximo da origem.

Definição 1.34. *Sejam $f, g : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow \mathbb{K}^p$. Dizemos que f, g são $\mathcal{K}$ -equivalentes quando existir $H = (h, \Theta) \in \mathcal{K}$, tal que:*

$$(h(x), g \circ h(x)) = H(x, f(x)),$$

isto é, uma forma especial, H leva o gráfico de f sobre o gráfico de g .

O subgrupo de $\mathcal{K}$ formados pelos elementos da forma $H(id_n, \Theta)$ é denotado por $\mathcal{C}$, sendo id_n a aplicação identidade de $\mathbb{K}^n$.

Definição 1.35. *Dois germes $f, g \in \mathfrak{MO}_{(n,p)}$ são $\mathcal{C}$ -equivalentes se existir $H \in \mathcal{C}$ tal que*

$$H(x, f(x)) = (x, \Theta(x, f(x))) = (x, g(x))$$

Em [15], podemos ver que $\mathcal{K}$ é dado como um produto semi-direto dos grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}$.

Definição 1.36. *O espaço tangente à órbita de um germe $f \in \mathfrak{MO}_{(n,p)}$ pela ação de $\mathcal{C}$ é dado por*

$$T\mathcal{C}f = f^*(\mathfrak{M}_p)\mathcal{O}_{(n,p)}, \text{ sendo } \mathfrak{M}_p = \{g \in \mathcal{O}_p | g(0) = 0\}$$

Lema 1.10. *Dois germes $f, g \in \mathfrak{MO}_{(n,p)}$ são ditos $\mathcal{K}$ -equivalentes se, e somente se, existe um germe invertível $h : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^n, 0)$ tal que $f \circ h$ e g são $\mathcal{C}$ -equivalentes.*

Demonstração. Ver ([15], p. 149) □

Definição 1.37. *O espaço tangente à órbita de um germe $f \in \mathfrak{MO}_{(n,p)}$ pela ação de $\mathcal{K}$ é dado por*

$$TKf = T\mathcal{R}f + TCf$$

Definição 1.38. *Um germe $f \in \mathfrak{MO}_{(n,p)}$ é dito finitamente determinado quando é equivalente a um de seus polinômios de Taylor.*

Observações 1.3.

i) A definição acima permite que o problema da classificação possa ser reduzido ao espaço dos k -jatos, que é um espaço de dimensão finita.

Definição 1.39. *Um dado germe de aplicação $f \in \mathfrak{MO}_{(n,p)}$ é $k - G$ -determinado ($G = \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{K}$ ou $\mathcal{C}$) se, para todo $g \in \mathfrak{MO}_{(n,p)}$ tais que os k -jatos $j^k f(0)$ e $j^k g(0)$ são iguais, g é G -equivalente a f .*

Infelizmente, com as definições e resultados que incluímos até agora, o espaço $\mathcal{O}_{(n,p)}$ não é uma variedade diferenciável e nem os grupos de Mather apresentados são grupos de Lie. Contudo, se G é um grupo de Mather e definimos G_k como o subgrupo de G tal que seus elementos são os germes de G cujo k -jato é a identidade, então são definidos os grupos de k -jatos dos elementos de G , que são denotados por $J^k G = G \setminus G_k$. Estes grupos são grupos de Lie.

A ação de G sobre $\mathfrak{M}_n \mathcal{O}_{(n,p)}$ induz uma ação de $J^k G$ sobre $J^k(n, p)$ com

$$\begin{aligned} \omega : J^k G \times J^k(n, p) &\rightarrow J^k(n, p) \\ (j^k h, j^k f) &\mapsto j^k(h \cdot f) \end{aligned}$$

A ideia aqui é estudar a ação de G sobre $\mathfrak{M}_n \mathcal{O}_{(n,p)}$ através de ω . Os principais resultados para tal são o *Lema de Mather*, a *Transversal Completa* e os critérios de determinação finita.

Começamos pelo Lema de Mather que está relacionado às ações dos grupos de Lie e ao cálculo de órbitas.

Lema 1.11. *Seja G um grupo de Lie agindo suavemente em uma variedade n -dimensional N . Seja P uma subvariedade conexa de N . Então P está contida em uma única órbita de G se, e somente se,*

- i) para cada $x \in X$, $T_x P \subset T_x G \cdot x$;
- ii) $\dim(T_x G \cdot x)$ permanece constante para todo $x \in X$.

Demonstração. Ver ([19], p. 234) □

Considere agora o subconjunto $H^k(n, p)$ de $J^k(n, p)$ formado pelas p -uplas de polinômios homogêneos de grau k em n variáveis.

Teorema 1.12. *Seja $f \in J^k(n, p)$. Denotamos por G_1 o subgrupo de G dos elementos cujo 1-jato é a identidade, e $H^{k+1}(n, p)$ para as aplicações polinomiais homogêneas de grau $k+1$. Suponha que $T_f(J^{k+1}G_1)j^{k+1}f \cap H^{k+1}(n, p) + T = H^{k+1}(n, p)$ para algum subespaço T de $H^{k+1}(n, p)$. Então todo $(k+1)$ -jato com k -jato f é $J^{k+1}G_1$ -equivalente a um jato da forma $f + B$, com $B \in T$. O conjunto T é chamado de transversal completa.*

Demonstração. Ver ([20], p. 255) □

Estamos interessados na classificação com o grupo G , entretanto o Teorema da Transversal Completa é válido para um subgrupo G_1 de G . Usamos então o Lema de Mather para excluir os termos desnecessários que não foram eliminados na Transversal Completa com o grupo G_1 .

Em cada $j^k f$ usamos a Transversal Completa para obter a parametrização dos $(k+1)$ -jatos que têm o k -jato igual a $j^k f$. Usamos o Lema de Mather para produzir as G -órbitas dentro desta parametrização. Aplicamos os critérios de determinação finita a cada órbita no $(k+1)$ -jato (cujo k -jato é $j^k f$). Se o germe é $(k+1)$ -finitamente determinado paramos o processo. Caso contrário, consideramos $(k+2)$ -jato e seguimos o raciocínio.

Os próximos enunciados são bastante utilizados na teoria de singularidades e serão muito referenciados durante o nosso trabalho.

Lema 1.13. (Lema de Nakayama) *Seja R um anel comutativo com unidade 1 e $\mathfrak{M}$ um ideal em R com a propriedade que $1 + x$ é invertível em R para todo $x \in \mathfrak{M}$. Seja C um R -módulo e A, B R -submódulos de C com A finitamente gerado.*

$$\text{Se } A \subset B + \mathfrak{M}A \text{ então } A \subset B$$

Demonstração. Ver ([15], p. 102) □

Proposição 1.14. *Seja C um R -módulo com base finita e seja $T \subset C$ um R -submódulo. Uma condição necessária e suficiente para que T tenha finita codimensão em C é que exista um inteiro $k \geq 1$ com $\mathfrak{M}^k \cdot C \subset T$.*

Demonstração. Ver ([15], p. 104) □

Capítulo 2

Teoria de Singularidades de Matrizes

2.1 Variedade Determinantal

Seja $\mathbb{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ o conjunto de todas as matrizes $n \times p$ com entradas em $\mathbb{K}$. Denotamos por Δ_t o subconjunto de $\mathbb{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ formados pelas matrizes que têm o posto menor que t , com $1 \leq t \leq \min\{n, p\}$. O conjunto Δ_t é denominado *variedade determinantal genérica*.

Definição 2.1. *Sejam $L = (l_{ij}(x))$ uma matriz $n \times p$ cujas entradas são funções analíticas complexas em $U \subset \mathbb{C}^r$ e, f , a função cujas coordenadas são os menores $t \times t$ da matriz L . Dizemos que X é uma variedade determinantal de codimensão $(n - t + 1)(p - t + 1)$ se X é definida pelas equações $f = 0$.*

Olhemos agora a matriz L como uma aplicação $L : \mathbb{K}^r \rightarrow \mathbb{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$, com $L(0) = 0$. A *variedade determinantal* é o conjunto $X = L^{-1}(\Delta_t)$, com $1 \leq t \leq \min\{n, p\}$ e o conjunto singular de X é dado por $L^{-1}(\Delta_{t-1})$. A parte regular de X é denotada por $X_{reg} = L^{-1}(\Delta_t \setminus \Delta_{t-1})$. Notemos que, se X tem singularidade isolada na origem, então $r < (n - t + 2)(p - t + 2)$.

Proposição 2.1. *Se $1 \leq t \leq \min\{n, p\} - 1$, então*

- i) O conjunto Δ_{t+1} é uma subvariedade algébrica irredutível de $\mathbb{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ de codimensão $(n - t)(p - t)$;*
- ii) O conjunto singular de Δ_t é exatamente Δ_{t-1} e para $A \in \Delta_t \setminus \Delta_{t-1}$, então*

$$T_A \Delta_t = \{B \in \mathbb{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \mid B(Ker(A)) \subset A(\mathbb{K}^r)\}.$$

Demonstração. Ver ([22], p. 67) □

Teorema 2.2. *Sejam R um anel Noetheriano e L uma matriz $n \times p$ com entradas em R . O ideal I , gerado pelos menores maximais de R , é perfeito.*

No caso em que as entradas de L são indeterminadas sobre um corpo e I é o ideal gerado pelos menores maximais de L é chamado *ideal determinantal*.

Observação 2.1. *Seja L uma matriz $n \times p$ e I um ideal com entradas em $\mathcal{O}_r$ gerado pelos menores $t \times t$ de L , com $t \leq \min\{n, p\}$. Chamamos de operações elementares entre colunas as seguintes operações:*

- i) *Permutações entre colunas;*
- ii) *A substituição de C_j por $uC_j + vC_i$, onde C_i e C_j denotam colunas distintas de L , $1 \leq j, i \leq p$, $i \neq j$, v é unidade em $\mathcal{O}_r$ e $u \in \mathcal{O}_r$.*

Operações elementares entre linhas são definidas da mesma forma. Então:

- a) *O ideal determinantal I é invariante sob operações elementares entre linhas e colunas;*
- b) *Se uma das entradas da matriz L é uma unidade em $\mathcal{O}_r$, podemos transformar L , por um número finito de operações entre linhas e colunas, à seguinte forma:*

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{L} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

e, I é igual ao ideal gerado pelos menores $(t-1) \times (t-1)$ de L' . Portanto, sem perda de generalidade, na maior parte do trabalho vamos considerar matrizes cujas entradas pertencem ao ideal maximal de $\mathcal{O}_r$.

2.2 Resultados Básicos

Sejam V e W dois espaços vetoriais de dimensão n sobre $\mathbb{K}$, que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. O espaço das aplicações lineares $V \rightarrow W$ é denotado por $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ e existe uma ação natural do produto $\mathcal{H} = GL(V) \times GL(W)$, com a operação produto, neste espaço. Ver ([1.7]).

Precisaremos também de uns resultados básicos da Álgebra Linear que nós exibiremos aqui por conveniência.

Observação 2.2.

i) Podemos decompor o espaço das matrizes quadradas de ordem n , $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, usando o posto. Se denotamos por Δ o subconjunto de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ formado pelas matrizes que têm determinante igual a zero, então

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{K}) = GL_n(\mathbb{K}) \cup \Delta$$

Proposição 2.3. 1) Existe um isomorfismo natural $Hom_{\mathbb{K}}(V, W) \cong Hom_{\mathbb{K}}(W^*, V^*)$.

2) Existe um isomorfismo natural $Hom_{\mathbb{K}}(V, W)^* \cong Hom_{\mathbb{K}}(W, V)$. Este isomorfismo é dado como segue: se $\theta \in Hom_{\mathbb{K}}(W, V)$ então $\bar{\theta} : Hom_{\mathbb{K}}(V, W) \rightarrow \mathbb{K}$ por $\bar{\theta}(\alpha) = \text{traço}(\alpha \circ \theta)$. Esta aplicação traço dá uma forma bilinear não-degenerada $Hom_{\mathbb{K}}(V, W) \times Hom_{\mathbb{K}}(W, V) \rightarrow \mathbb{K}$.

Demonstração. 1) Defina

$$\Phi : Hom_{\mathbb{K}}(V, W) \rightarrow Hom_{\mathbb{K}}(W^*, V^*)$$

$$f \mapsto f^*$$

Como $\dim_{\mathbb{K}}(Hom_{\mathbb{K}}(V, W)) = \dim_{\mathbb{K}}(Hom_{\mathbb{K}}(W^*, V^*))$, basta mostrar que Φ é injetiva e é um homomorfismo para concluirmos que também é isomorfismo.

Afirmamos que Φ é injetiva. Devemos mostrar que, se $f \neq 0$, então $f^* \neq 0$. De fato, se $f \neq 0$, tome $v \in V$ com $w = f(v) \neq 0$. Complete w até formar uma base β de W . $\beta = \{w, w_2, \dots, w_n\}$, sendo $\dim_{\mathbb{K}} W = n$. Agora considere a base dual de W^* . $\beta^* = \{w^*, w_2^*, \dots, w_n^*\}$. Por definição, $w^*(w) = 1$, $w^*(w_2) = 0, \dots, w^*(w_n) = 0$, portanto $w^*(w) \neq 0$. Podemos tomar $u = \alpha w^* + \dots + \alpha_n w_n^* \in W^*$, com $\alpha, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, sendo $\alpha \neq 0$. Façamos agora $f^*(u)(v) = [f^*(\alpha w^* + \dots + \alpha_n w_n^*)](v) = \alpha f^*(w^*)(v) + \dots + \alpha_n f^*(w_n^*)(v) = \alpha(w^* \circ f)(v) + \dots + \alpha_n(w_n^* \circ f)(v) = \alpha(w^*(f(v))) + \dots + \alpha_n(w_n^*(f(v))) = \alpha(w^*(w)) = \alpha$, ou seja, $f^* \neq 0$ e $\ker(\Phi) = \{f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W); \Phi(f) = 0\} = \{0\}$. Logo Φ é injetiva. Resta-nos mostrar que Φ é um homomorfismo. Para tal, considere $\lambda f_1 + f_2 \in Hom(V, W)$, com $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\Phi(\lambda f_1 + f_2) = (\lambda f_1 + f_2)^* = \lambda f_1^* + f_2^* = \lambda \Phi(f_1) + \Phi(f_2)$$

2) Queremos mostrar agora que $Hom_{\mathbb{K}}(V, W)^* \cong Hom_{\mathbb{K}}(W, V)$. Para tal, defina

$$\mathfrak{T} : Hom_{\mathbb{K}}(W, V) \rightarrow Hom_{\mathbb{K}}(V, W)^*$$

$$T \mapsto \mathfrak{T}(T)(S) := \text{tr}(S \circ T)$$

Como $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V)) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)^*)$, basta mostrar que $\mathfrak{T}$ é injetiva e é um homomorfismo para concluirmos que também é isomorfismo.

Por definição, se $T \in \ker(\mathfrak{T})$ então $\text{tr}(S \circ T) = 0$ para todo $S \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, logo $T = 0$ e $\mathfrak{T}$ é injetiva. Resta-nos agora mostrar que $\mathfrak{T}$ é um homomorfismo. De fato, considere $T_1 + T_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V)$ com $\lambda \in \mathbb{K}$, $T_1 = (b_{ij})$ e $T_2 = (c_{ij})$ sendo $S \circ T_1 = (\beta_{ij})$ e $S \circ T_2 = (\gamma_{ij})$. Tome então $S = (a_{ij}) \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Temos que

$$\mathfrak{T}(\lambda T_1 + T_2)(S) = \text{tr}(S \circ (\lambda T_1 + T_2)) = (d_{ij})$$

Perceba que $d_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(\lambda b_{kj} + c_{kj}) = \lambda \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{kj} = \lambda \beta_{ij} + \gamma_{ij}$. Daí

$$\mathfrak{T}(\lambda T_1 + T_2)(S) = (d_{ij}) = (\lambda \beta_{ij} + \gamma_{ij}) = (\lambda \beta_{ij}) + (\gamma_{ij}) = \lambda \mathfrak{T}(T_1)(S) + \mathfrak{T}(T_2)(S)$$

Esta aplicação traço nos dá uma forma bilinear não-degenerada $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \times \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V) \rightarrow \mathbb{K}$

$$\mathfrak{P} : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \times \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V) \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(S, T) \mapsto \text{tr}(S \circ T)$$

Vamos mostrar que $\mathfrak{P}$ é uma forma bilinear. De fato, dados $S, S_1, S_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, $T, T_1, T_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos:

$$\text{i')} \quad \mathfrak{P}(\lambda S, T) = \text{tr}(\lambda S \circ T) = \text{tr}(S \circ \lambda T) = \lambda \text{tr}(S \circ T) = \lambda \mathfrak{P}(S, T)$$

$$\text{ii')} \quad \mathfrak{P}(S_1, T) + \mathfrak{P}(S_2, T) = \text{tr}(S_1 \circ T) + \text{tr}(S_2 \circ T) = \mathfrak{P}((S_1 + S_2), T)$$

□

Para o desenvolvimento de nosso trabalho, precisaremos das próximas definições e resultados.

Definição 2.2. *Sejam U e T espaços vetoriais de dimensão finita e $\tilde{\mathcal{H}}$, um subgrupo de $GL(T)$. Dizemos que $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, T)$ são $(GL(U) \times \tilde{\mathcal{H}})$ -equivalentes se, para algum $\beta \in GL(U)$ e para algum $\gamma \in \tilde{\mathcal{H}}$, temos*

$$\alpha_2 = \gamma \circ \alpha_1 \circ \beta$$

Definição 2.3. *Seja $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, T)$. Denotamos por α^* o elemento correspondente de $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(T^*, U^*)$.*

Definição 2.4. *Se S é um subespaço de U , nós escrevemos $S^\perp$ para $\{\phi \in U^* : \phi(S) = 0\}$.*

Lema 2.4. 1) As aplicações α_1 e α_2 são $(GL(U) \times \tilde{\mathcal{H}})$ -equivalentes se, e somente se, algum $\gamma \in \tilde{H}$ leva a $Im(\alpha_1)$ à imagem de $Im(\alpha_2)$.

2) Temos que $[Im(\alpha)]^\perp = ker(\alpha^*)$ e $[ker(\alpha)]^\perp = Im(\alpha^*)$.

3) As aplicações α_1 e α_2 são equivalentes se, e somente se, para algum $\gamma \in \tilde{\mathcal{H}}$ a aplicação γ^* leva $ker(\alpha_1^*)$ a $ker(\alpha_2^*)$.

Demonstração. 1) Sejam U, T $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais e $\tilde{\mathcal{H}} \subseteq GL(T)$. Considere as transformações lineares equivalentes $\alpha_1, \alpha_2 : U \rightarrow T$. Sabe-se que

$$\alpha_1 \sim \alpha_2 \Leftrightarrow \exists \beta \in GL(U) \text{ e } \gamma \in \tilde{H} \text{ tal que } \alpha_2 = \gamma \circ \alpha_1 \circ \beta$$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\alpha_1} & T \\ \beta \uparrow & \circlearrowleft & \downarrow \gamma \\ U & \xrightarrow{\alpha_2} & T \end{array}$$

Assim, $\alpha_1 \sim \alpha_2 \Leftrightarrow \gamma^{-1} \circ \alpha_2 = \alpha_1 \circ \beta$. Como $\beta : U \rightarrow U$ é isomorfismo, para todo $u \in U$, existe $u' \in U$ tal que $u = \beta(u')$. Daí

$$t \in Im(\alpha_1) \Leftrightarrow t = \alpha_1(u), u \in U \Leftrightarrow t = \alpha_1(\beta(u')), u' \in U$$

Como $\alpha_2 = \gamma \circ \alpha_1 \circ \beta$, então

$$\gamma(\alpha_1(\beta(u'))) = \gamma(t) = \alpha_2(u')$$

Logo, $\gamma(Im(\alpha_1)) \subset Im(\alpha_2)$. Como γ é um isomorfismo que leva o subespaço r -dimensional $Im(\alpha) \subset Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ noutro subespaço r -dimensional, então $\gamma(Im(\alpha_1)) = Im(\alpha_2)$.

2) $Im(\alpha)^\perp = \{\phi \in T^* : \phi(s) = 0, \forall s \in Im(\alpha)\} = \{\phi \in T^* : \phi(\alpha(t)) = 0, \forall t \in U\} = \{\phi \in T^* : \alpha^*(\phi)(t) = 0, \forall t \in U\} = \{\phi \in T^* : \alpha^*(\phi) = 0\} = ker(\alpha^*)$.

A segunda parte da prova é feita usando a primeira parte da prova e equivalências de Álgebra Linear:

$$\begin{aligned} Im(\alpha)^\perp = ker(\alpha^*) &\Leftrightarrow Im(\alpha^*)^\perp = ker((\alpha^*)^*) \Leftrightarrow Im(\alpha^*)^\perp = ker(\alpha) \Leftrightarrow \\ &\{[Im(\alpha^*)]^\perp\}^\perp = ker(\alpha)^\perp \Leftrightarrow Im(\alpha^*) = ker(\alpha)^\perp \end{aligned}$$

3) Sejam $\alpha_1, \alpha_2 : U \rightarrow T$ transformações lineares equivalentes, ou seja, existem $\beta \in GL(U)$ e $\gamma \in GL(T)$ tais que $\gamma^{-1} \circ \alpha_2 = \alpha_1 \circ \beta$. Sabe-se que

$$ker(\alpha_1^*) = \{\varphi \in T^* : \alpha_1^*(\varphi) = 0\} = \{\varphi \in T^* : \varphi \circ \alpha_1 = 0\}$$

Como $\beta : U \rightarrow U$ é isomorfismo, para cada $u \in U$, existe $u' \in U$ tal que $u = \beta(u')$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi \in \ker(\alpha_1^*) &\xrightarrow{2)} \varphi \in [Im(\alpha_1)]^\perp = \{\varphi \in T^* : \varphi(Im(\alpha_1)) = 0\} \implies \\ \varphi(\alpha_1(\beta(u'))) &= 0, \forall u' \in U \xrightarrow{1)} \varphi(\alpha_1(\beta(u'))) \stackrel{hip}{=} \varphi(\gamma^{-1}(\alpha_2(u'))) = 0 \implies \\ \alpha_2^*(\phi \circ \gamma^{-1})(u') &= 0, \forall u' \in U \implies \phi \circ \gamma^{-1} \in \ker(\alpha_2^*) \implies (\gamma^{-1})^*(\varphi) \in \ker(\alpha_2^*) \end{aligned}$$

Logo,

$$(\gamma^{-1})^*(\ker(\alpha_1^*)) \subset \ker(\alpha_2^*)$$

□

Do Lema anterior, inferimos que classificar aplicações de posto r em $Hom_{\mathbb{K}}(U, T)$ sobre a $GL(V) \times \tilde{\mathcal{H}}$ -equivalência é equivalente a classificar subespaços r -dimensionais de T sobre a $\tilde{\mathcal{H}}$ -equivalência, ou seja, se queremos classificar aplicações lineares equivalentes de acordo com a $GL(V) \times \tilde{\mathcal{H}}$ -equivalência, podemos olhar para a classificação das imagens dessas aplicações sobre a $\tilde{\mathcal{H}}$ -equivalência, sendo o conjunto da imagem de cada aplicação subespaços r -dimensionais de T ; ou classificar subespaços $(\dim_{\mathbb{K}}(T) - r)$ -dimensionais de T^* sobre a $\tilde{\mathcal{H}}$ -equivalência. Isso nos dá um resultado útil de dualidade que usaremos na classificação dos 1-jatos de matrizes.

Aplicando o Lema 2.4 para $V = W = \mathbb{K}^n$, $\mathcal{H} = GL(V) \times GL(W)$ (agindo como um subgrupo de $GL(Hom_{\mathbb{K}}(V, W))$) e com $GL(V) = GL(W) = GL_n(\mathbb{K})$ e $Hom_{\mathbb{K}}(V, W) = \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, segue pelo item 1) que, classificar aplicações de posto r em $Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^r, \mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$ pela $(GL(U) \times \tilde{\mathcal{H}})$ -equivalência é equivalente a classificar subespaços r -dimensionais de $Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ pela $\mathcal{H}$ -equivalência. Pelos itens 2) e 3), classificar aplicações de posto r é equivalente a classificar subespaços $[n^2 - r]$ -dimensionais de $T^* = (Hom_{\mathbb{K}}(V, W))^*$ sob $\mathcal{H}$ -equivalência. No que se segue, considere $V = W = \mathbb{K}^n$, $GL(V) \cong GL_n(\mathbb{K})$ e $Hom_{\mathbb{K}}(V, W) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposição 2.5. *Seja $(W_i)_{i \in I}$ uma família de subespaços k -dimensionais de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ equivalentes pela $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ -equivalência. Então os subespaços da família $(W_i^\perp)_{i \in I}$ com $W_i^\perp = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) : tr(AB) = 0, \forall B \in W_i\}$ é uma lista de subespaços $[n^2 - k]$ -dimensionais de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.*

Demonstração. Como, para todo $i \in I$, $W_i \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\dim(\mathbb{M}_n(\mathbb{K})) = \dim(W_i) + \dim(W_i^\perp) \Leftrightarrow n^2 = k + \dim(W_i^\perp) \Leftrightarrow \dim(W_i^\perp) = n^2 - k$$

Ver ([6], p. 192)

□

O espaço das aplicações lineares singulares Δ é também um conjunto extremamente singular em $Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$. Em geral, quando trabalhamos com a teoria clássica de singularidades, a dimensão desse espaço é muito pequena em relação ao espaço (se não for 0). O que segue nos dá uma boa "dessingularização" $\tilde{\Delta}_j$, com $j = 1, 2$, de Δ .

Proposição 2.6. (1) *Os conjuntos*

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_1 &= \{(A, v) \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \times \mathbb{P}(V) : Av = 0\} \\ \tilde{\Delta}_2 &= \{(A, \psi) \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \times \mathbb{P}(W)^* : \psi \circ A = 0\}\end{aligned}$$

são suaves de dimensão $n^2 - 1$ e as projeções

$$\begin{aligned}\pi_1 : \tilde{\Delta}_1 &\subset \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \times \mathbb{P}(V) \rightarrow \Delta \subset \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ \pi_2 : \tilde{\Delta}_2 &\subset \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \times \mathbb{P}(W)^* \rightarrow \Delta \subset \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)\end{aligned}$$

são isomorfismos sobre o conjunto de aplicações de coposto igual a 1.

(2) *Se trocarmos V e W por W^* e V^* , respectivamente, então usando os isomorfismos naturais, vemos que $\tilde{\Delta}_1$ e $\tilde{\Delta}_2$ são permutáveis.*

Demonstração. (1) Considere primeiro o conjunto $\tilde{\Delta}_1$ e a aplicação projeção π_1 . Em $\tilde{\Delta}_1$, $\text{Ker}(A) = v$. Como $v \in \mathbb{P}(V)$, podemos entender v como um representante da classe de equivalência que determina um ponto no espaço projetivizado, definindo de maneira única esse ponto em $\mathbb{P}(V)$. Pelo teorema do núcleo e da imagem, $\dim(\text{Ker}(A)) = 1$, logo o seu coposto (complementar do posto) é igual a 1, assim $\text{posto}(A) = n - 1$. Não é difícil ver que $\tilde{\Delta}_1 \xrightarrow{\pi_1} \Delta_{n-1}$, sendo π_1^{-1} tal que $\pi_1^{-1}(A) = (A, v)$, $v \in \mathbb{P}(V)$. Mais ainda, $\tilde{\Delta}_1$ é difeomorfo a Δ_{n-1} , pois, por tratar-se de projeção, π_1 é diferenciável e sua inversa π_1^{-1} também o é porquanto as variáveis são os a'_{ij} s.

(2) Pela proposição 2.3, temos que $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \cong \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W^*, V^*)$. Aqui podemos fazer as identificações de V e W com W^* e V^* , respectivamente, pois são espaços de mesma dimensão. Assim, sob essa troca, não é difícil ver que $\tilde{\Delta}_1$ corresponderá a $\tilde{\Delta}_2$ (sob as condições de (1)) e vice-versa.

□

Uma motivação para o estudo das singularidades de matrizes é o estudos das n -uplas 1-formas diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$, cada qual às quais podemos associar uma família de matrizes $(a_{ij}(x))$ com $a_{ij} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\alpha_i = a_{i1}(x)dx_1 + \dots + a_{in}(x)dx_n, \text{ para } 1 \leq i \leq n,$$

onde a_{ij} são germes de funções suaves. Isto motiva as seguintes definições.

Seja $\mathcal{H}$ o conjunto dos germes das aplicações suaves $\mathbb{K}^r, 0 \rightarrow GL(V) \times GL(W)$ e $\mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$ o conjuntos dos germes $A : (\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Pensemos em tais germes

como uma família de r -parâmetros de matrizes. O conjunto $\mathcal{H}$ recebe uma estrutura de grupo proveniente do grupo de produtos na meta.

Definição 2.5 ($\mathcal{G}$ -equivalência). *Se $A, B : \mathbb{K}^r, 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ são aplicações suaves de germes, nós dizemos que eles são $\mathcal{G} = \mathcal{R} \times \mathcal{H}$ equivalentes se, e somente se, para $(\phi, (X, Y)) \in \mathcal{R} \times \mathcal{H}$ nós temos $B = X(A \circ \phi)Y$. Se nós damos a $\mathcal{G}$ a estrutura de grupo com o produto semi-direto usual de matrizes, a aplicação $A \mapsto X^{-1}(A \circ \Phi^{-1})Y$ fornece uma ação de grupo no espaço $\mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$.*

Observações 2.1.

i) Em [17], o matemático James Damon definiu subgrupos especiais de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{K}$, chamados de **subgrupos geométricos**. Em [21] é possível encontrar uma prova de que $\mathcal{G}$ é um dos subgrupos geométricos de $\mathcal{K}$ e, como consequência dos resultados de Damon, podemos usar todas as técnicas de Teoria das Singularidades para investigar essas singularidades.

Relacionando a definição acima com a motivação que apresentamos, temos o seguinte:

Proposição 2.7. *Dado uma n -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de uma 1-formas diferenciais, nós denotamos o correspondente elemento em $\mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$ por $A(\alpha)$. Se $\Phi : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^n, 0)$ é o germe de um difeomorfismo levando α a $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, então $A(\alpha)$ e $A(\beta)$ são $\mathcal{G}$ -equivalentes.*

Demonstração. Denotando a diferencial de ϕ por $d\phi$, a nova n -upla tem como correspondente a matriz $A(\beta)$ com

$$A(\beta) = (A(\alpha) \circ \phi)(d\phi), \text{ sendo } \alpha_i(\phi(x)) = \beta_i, 1 \leq i \leq n$$

Considerando $X = Id$ e Y a matriz jacobiana de ϕ ($d\phi$), vemos claramente que $A(\alpha)$ e $A(\beta)$ são elementos $\mathcal{G}$ -equivalentes de $\mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$. $\square$

Um elemento de $\mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$ também pode ser considerado como uma aplicação $(\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow \mathbb{K}^N$, onde nós fazemos a correspondência de $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ com $n \times n$ matrizes, e $N = n^2$.

Lema 2.8. *O grupo $\mathcal{G} = \mathcal{R} \times \mathcal{H}$ age no espaço das aplicações $(\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow \mathbb{K}^N \equiv \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ como subgrupo do grupo de contato correspondente $\mathcal{K}$ para germes $(\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow \mathbb{K}^N$.*

Demonstração. A ação do grupo $\mathcal{R}$ em ambos os casos claramente coincide. O grupo $\mathcal{C}$ é o conjunto das aplicações $(\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow GL(n^2, \mathbb{K})$. Existe um homomorfismo natural

$\theta : GL(V) \times GL(W) \rightarrow GL(Hom_{\mathbb{K}}(V, W)) = GL(V^* \otimes W)$, ou, em termos mais concretos, $GL_n \times GL_n \rightarrow GL_{n^2}$, com $\det(\theta(X, Y)) = \det(X)^n \det(Y)^n$. Além disso, a aplicação θ fornece um grupo de homomorfismo $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}$ e as correspondentes ações. Segue o resultado. $\square$

Por exemplo, considere o caso $n = 2$, aqui as matrizes $(X, Y) \in \mathcal{H}$ agem numa aplicação $(\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^4, 0)$ da mesma maneira que a matriz $Z \in \mathcal{C}$, onde

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_3 & \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_3 \\ \alpha_1\beta_2 & \alpha_1\beta_4 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_2\beta_4 \\ \alpha_3\beta_1 & \alpha_3\beta_3 & \alpha_4\beta_1 & \alpha_4\beta_3 \\ \alpha_3\beta_2 & \alpha_3\beta_4 & \alpha_4\beta_2 & \alpha_4\beta_4 \end{pmatrix}$$

Determinar o espaço tangente sob a ação do grupo $\mathcal{G}$ é fundamental para resolver o problema de classificação.

Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$. A matriz $C_{ij}(A)$ (respectivamente $R_{lk}(A)$) é a que tem a i -ésima coluna (respectivamente l -ésima linha) igual à j -ésima coluna de A (respectivamente k -ésima linha) com zeros em qualquer outro lugar. Definimos a matriz $A_{ij} = C_{ij}(A) + R_{ij}(A)$. Escrevemos A_{x_i} para a matriz $\frac{\partial A}{\partial x_i}$. O conjunto $\mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$ é isomorfo ao conjunto $\mathcal{O}_{(r, N)}$ com $N = n^2$ e o grupo $\mathcal{G} = \mathcal{R} \times \mathcal{H}$, um subgrupo do correspondente grupo de contato $\mathcal{K}$.

Exemplo 2.1. *Seja $A = \begin{pmatrix} 2x & x \\ x+y & y \end{pmatrix}$, tem-se que*

- $A_{11} = C_{11}(A) + R_{11}(A) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ x+y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & x \\ x+y & 0 \end{pmatrix}$
- $A_{12} = C_{12}(A) + R_{12}(A) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y & y \\ y & 0 \end{pmatrix}$
- $A_{21} = C_{21}(A) + R_{21}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 0 & x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 2x & 2x+y \end{pmatrix}$
- $A_{22} = C_{22}(A) + R_{22}(A) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x+y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x+y & 2y \end{pmatrix}$

Proposição 2.9. 1. *O $\mathcal{R}$ -espaço tangente à órbita de um elemento de $M \in \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$ é o $\mathcal{O}_r$ -módulo gerado por M_{x_i} .*

2. *O espaço tangente à órbita de M sob a ação do subgrupo $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ é o $\mathcal{O}_r$ -módulo gerado por $C_{ij}(M)$ e $R_{lk}(M)$, com $1 \leq i$ e $j \leq n$.*

Demonstração. 1. Sejam $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$. A $\mathcal{R}$ -equivalência é dada da seguinte maneira

$$A \sim_{\mathcal{R}} B \Leftrightarrow \exists \Phi \in \mathcal{R} \text{ tal que } A = B \circ \Phi$$

A $\mathcal{H}$ -equivalência é dada como

$$A \sim_{\mathcal{H}} B \Leftrightarrow \exists M_1, M_2 \in \mathcal{H} \text{ tais que } A = M_1 B M_2$$

Para determinar o espaço tangente, separamos a ação do grupo $\mathcal{R}$ e dividimos a ação do grupo $\mathcal{H}$ em duas partes (ação à direita e ação à esquerda).

Considere a ação do grupo $\mathcal{R}$ no conjunto $\mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$ abaixo:

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{R} \times \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r) &\rightarrow \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r) \\ (\phi, M) &\mapsto \phi \circ M \end{aligned}$$

A órbita de uma matriz $M \in \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$ determinada por essa ação é o conjunto $G \cdot M = \{\phi \circ M; \phi \in \mathcal{R}\}$. Fixando M , podemos estabelecer a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \gamma_M : \mathcal{R} &\rightarrow \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r) \\ \phi &\mapsto \phi \circ M \end{aligned}$$

Como é dada por uma ação, γ'_M é sobrejetora, γ_M é uma submersão. Agora tomamos um caminho em $\mathcal{R}$ dado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \alpha : I &\rightarrow \mathcal{R} \\ t &\mapsto Id_n + tg, \end{aligned}$$

sendo I um intervalo da reta que contém o zero. Note que $\alpha(0) = Id_n$.

Façamos agora a composição da ação γ_M com o caminho α .

$$[(\gamma_M \circ \alpha)(t)](x) = [(\gamma_M(\alpha(t)))](x) = [(Id_n + tg) \circ M](x) = (x_1 + tg_1(x), \dots, x_r + tg_r(x)) \circ M$$

Temos que $[(\gamma_M \circ \alpha)](0) = M$, assim

$$(\gamma_M \circ \alpha)'(0) = (d\gamma_M)_{Id_n} \cdot g = g_1 \cdot \frac{\partial M}{\partial x_1} + \dots + g_r \cdot \frac{\partial M}{\partial x_r}$$

2. O espaço tangente a M em relação à órbita proveniente da ação do grupo $\mathcal{R}$ no espaço das matrizes será o $\mathcal{O}_r$ -módulo gerado pelas derivadas parciais da matriz M em relação às coordenadas.

Assim, os vetores no espaço tangente da são obtidos da forma usual, isto é, $T\mathcal{R}M = \mathfrak{M}\{M_{x_i} | 1 \leq i \leq r\}$. Para determinar os outros vetores que compõem o espaço tangente, consideremos a ação do grupo $\mathcal{H} = GL(V) \times GL(W)$. Para cada matriz $M \in \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$, consideremos inicialmente somente a ação à direita, isto é,

$$\begin{aligned} h_M : GL(V) &\rightarrow \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r) \\ R &\mapsto MR \end{aligned}$$

Tomemos um caminho $\gamma(t) = Id_n + tE_{ij}$, onde Id_n é a matriz identidade $n \times n$ e $E_{i,j}$ é a matriz $n \times n$ com 1 na entrada (i, j) e zero em qualquer outro lugar. Temos,

$$(h_M \circ \gamma)(t) = h_M(Id_n + tE_{ij}) = M + tME_{ij}$$

logo,

$$(h_M \circ \gamma)'(t) = ME_{ij}$$

É fácil ver que

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}, E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow ME_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & m_{1,j} & 0 \\ \vdots & m_{i,j} & \vdots \\ 0 & m_{n,j} & 0 \end{pmatrix} = C_{ij},$$

onde $1 \leq i, j \leq n$.

Considere agora a ação do grupo $\mathcal{H}$ à esquerda como vê-se abaixo

$$\begin{aligned} \tilde{h}_M : GL(W) &\rightarrow \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r) \\ R &\mapsto RM \end{aligned}$$

De maneira análoga, obteremos as matrizes R_{lk} . Com

$$E_{ij}M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ m_{l1} & m_{lk} & m_{ln} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = R_{lk}, \text{ onde } 1 \leq l, k \leq n.$$

Portanto, o $\mathcal{G}$ -espaço tangente é dado por

$$T\mathcal{G}M = \mathfrak{M}\{M_{x_i} | 1 \leq i \leq r\} + \mathcal{O}_r\{R_{lk}, C_{ij} | 1 \leq i, j, l, k \leq n\}$$

□

Segue da discussão acima que o $\mathcal{G}$ -espaço tangente estendido a um germe A é dado por

$$T_e\mathcal{G}A = \mathcal{O}_r\{A_{x_i}, R_{lk}, C_{ij}\}$$

É possível escrever a expressão do espaço tangente de uma outra forma. Seja $M \in \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$ e h_M a aplicação como definimos anteriormente. Consideremos um caminho pela identidade $\gamma(t) = (Id_n + tL_1, Id_n + tL_2)$, onde t é pequeno e $L_1, L_2 \in \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$. Note que $\gamma(0) = (Id_n, Id_n)$ e $\gamma'(t) = (L_1, L_2)$ e $(dh_M)(L_1, L_2) = (\theta \circ \gamma)'(0)$.

Mas,

$$(h_M \circ \gamma)(t) = h_M(Id_n + tL_1, Id_n + tL_2) = (Id_n + tL_1)M(Id_n + L_2) = \\ M + tL_2M + t^2L_2ML_1 + tML_1$$

então

$$(h_M \circ \gamma)'(0) = L_2M + ML_1$$

Desta maneira, o espaço tangente também pode ser dado por

$$T\mathcal{G}M = \mathfrak{M}\{M_{x_i} | 1 \leq i \leq r\} + \mathcal{O}_r\{L_2M + ML_1 | L_1, L_2 \in \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)\}.$$

Se consideramos o subconjunto $\mathcal{S}$, formado pelos germes de aplicações suaves $A : (\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow \text{Sim}_n(\mathbb{K})$, onde $\text{Sim}_n(\mathbb{K})$ é o conjunto de matrizes simétricas $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$, podemos pensar nas mesmas definições do grupo $\mathcal{G}$. Então, o item 1 da Proposição 2.9 ficaria inalterado e o espaço tangente à órbita de $A \in \mathcal{S}$ sob a ação do subgrupo $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ é o $\mathcal{O}_r$ -módulo gerado por $A_{ij} = C_{ij}(A) + R_{lk}(A)$.

Denotamos por $\mathcal{S}$, o conjunto dos germes de aplicações suaves $A : (\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow \text{Sim}_n(\mathbb{K})$. Se a Proposição 2.9 fosse aplicada a matrizes simétricas teria seu enunciado como segue:

Proposição 2.10. 1. O $\mathcal{R}$ -espaço tangente à órbita de um elemento de $A \in \mathcal{S}$ é o $\mathcal{O}_r$ -módulo gerado por $x_j A_{x_i}$, com $1 \leq i$ e $j \leq r$.

2. O espaço tangente à órbita de A sob a ação do subgrupo $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ é o $\mathcal{O}_r$ -módulo gerado por $A_{ij} = C_{ij}(A) + R_{lk}(A)$.

Portanto, seguindo a prova de maneira análoga, teríamos

$$T\mathcal{G}A = \mathfrak{M}\{A_{x_i} | 1 \leq i \leq r\} + \mathcal{O}_r\{A_{i,j} | 1 \leq i, j \leq r\}$$

Definição 2.6. Um germe de matriz A é $\mathcal{G}$ -estável se $T_e\mathcal{G}A = \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$, isto é,

$$\mathcal{O}_r\{A_{x_i}, R_{lk}, C_{ij}\} = \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r).$$

Observemos que a ação $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C})$ em $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tem n órbitas que determinam uma estratificação de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

Observações 2.2.

i) Dizemos que um elemento $A \in \mathcal{S}$ é $\mathcal{G}$ -estável quando $T_e\mathcal{G}A = \mathcal{S}$.

Uma propriedade desejada em Teoria de Singularidades é chamada de Determinação Finita. De maneira geral, esta é uma forma de entender as condições necessárias e suficientes de quando o germe é finitamente determinado.

Definição 2.7. Um germe de matriz $L \in \mathbb{M}_{(n+1,n)}(\mathcal{O}_r)$ é k -determinado, ou k - $\mathcal{G}$ -determinado, se para toda matriz N tal que $j^k L(0) = j^k N(0)$, N é $\mathcal{G}$ -equivalente a L . Se L é k -determinado para algum k , dizemos que L é $\mathcal{G}$ -finitamente determinado.

Teorema 2.11. (Critério Infinitesimal da Determinação Finita) Seja $L \in \mathbb{M}_{(n,p)}(\mathcal{O}_r)$ um germe de matriz. Seja k um inteiro positivo tal que

$$\mathfrak{M}^{k+1}\mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r) \subseteq \mathfrak{M}^2\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_r}\right) + \mathfrak{M}Im(g)$$

Então L é k -finitamente determinado.

Demonstração. Ver ([21], p.20) □

Caracterizaremos geometricamente os germes finitamente determinados no caso dos complexo. Para enunciar o Critério Geométrico da Determinação Finita, precisamos introduzir algumas notações. Considere agora L um germe de matriz $n \times n$ com entradas em $\mathcal{O}_r$ e U, V vizinhanças da origem em $\mathbb{C}^r$ e de $L(0)$, respectivamente. Denotamos por $\mathcal{O}(U)$ o feixe de funções analíticas em U e por $\mathcal{O}(U, V)$ o feixe de aplicações de U em V .

Teorema 2.12. (Critério Geométrico) Um elemento $L : \mathbb{C}^r, 0 \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é $\mathcal{G}$ -finitamente determinado se, e somente se, L é transversal às órbitas de estratificação de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ fora da origem.

Demonstração. Um germe de matriz L é $\mathcal{G}$ -estável a condição abaixo é satisfeita:

$$\mathcal{O}_r\{L_{x_i}, R_{lk}, C_{ij}\} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$$

□

Afirmamos que L é $\mathcal{G}$ -estável se, e somente se, as aplicações $\frac{\partial L}{\partial x_i}(0)$ são transversais a $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C})$ -órbita de $L(0)$.

De fato, suponhamos que L é $\mathcal{G}$ -estável, então

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \subset T_e \mathcal{GL}$$

Assim,

$$\mathcal{O}_r\left\{\frac{\partial L}{\partial x_i}(0), R_{lk}(0), C_{ij}(0)\right\} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$$

Observemos que a equação acima é uma condição de transversalidade entre a aplicação L em 0 e a $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C})$ -órbita de $L(0)$.

Reciprocamente, se $\frac{\partial L}{\partial x_i}(0), i = 1, \dots, r$, são transversais à $GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C})$ -órbita de $L(0)$, temos

$$T_e \mathcal{GL} + \mathfrak{M}\mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r) = \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$$

Segue do lema de Nakayama que $\mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r) = T_e \mathcal{GL}$, o que prova a afirmação acima.

A ideia para a segunda parte da prova é considerar o $\mathcal{O}(U)$ -homomorfismo $tL : \mathbb{M}_n(U) \rightarrow \mathcal{O}_r(U, V)$ e o $\mathcal{O}_r(U)$ submódulo $\mathcal{N}$ gerado por $R_{lk}(0)$ e $C_{ij}(0)$. Assim, é possível concluir que

$$N_{\mathcal{G}}(L) = \frac{\mathcal{O}_r(U, V)}{\{tL(M_n(U)) + \mathcal{N}\}}$$

é um feixe coerente. Agora, usando o Teorema dos Zeros de Hilbert (Nullstellensatz) para feixes coerentes usamos argumentos análogos ao de [18] para obter o resultado.

Como consequência do **Cr terio Geométrico**, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.13. *Seja $L \in \mathbb{M}_{(n,p)}(\mathcal{O}_r)$ ($L(0) = 0$) definindo uma singularidade isolada. Então L   finitamente determinada.*

Demonstra o. Sejam $L : U \rightarrow \mathbb{M}_{(n,p)}(\mathbb{C})$ um representante de L definido em uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^r$ e $\{\Delta_i\}$ a estratifica o de $\mathbb{M}_{(n,p)}(\mathbb{C})$ determinada pela a o do grupo $GL_p(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$. Observemos que, como L define uma singularidade isolada, então $L(U) \cap \Delta_i = \emptyset$ se $\Delta_i \neq \{0\}$. Logo, L   transversal   órbita da estratifica o fora da origem. Portanto, pelo cr terio geométrico, L   $\mathcal{G}$ -finitamente determinada. $\square$

Como mencionado acima, um dos nossos principais interesses nos elementos de $\mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$   com seus discriminantes associados. A seguir, discutiremos algumas estruturas adicionais preservadas por esta rela o de equivalência.

Defini o 2.8. *O discriminante de um elemento $A \in \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$   o conjunto dos germes*

$$D(A), 0 = \{x \in \mathbb{K}^r : \det(A(x)) = 0\}, 0$$

Ou seja, $x \in D(A) \Leftrightarrow A \in \Delta$.

Proposi o 2.14. *Se $A, B \in \mathcal{S}$ são $\mathcal{G}$ -equivalência então existe um germe de um difeomorfismo $\phi : (\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^r, 0)$, preservando discriminantes, isto  , levando $D(A)$ em $D(B)$.*

Em termos de matrizes, o resultado da proposi o acima traz que, dadas $A(x) = (a_{ij}(x))$ e $B(x) = (b_{ij}(x))$, com $x \in \mathbb{K}^n$, cujas entradas a_{ij} 's e b_{ij} 's são germes na origem de fun es $a_{ij}, b_{ij} : (\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow \mathbb{K}$, podemos classificar matrizes em $\mathbb{M}_n(\mathcal{O}_n)$ de acordo com uma equivalência que preserva o conjunto Δ . Temos que

$$A \stackrel{\mathcal{G}}{\sim} B \Leftrightarrow \begin{cases} \{x \in \mathbb{K}^r : \det(A(x)) = 0\} \\ \text{  difeomorfo a} \\ \{x \in \mathbb{K}^r : \det(B(x)) = 0\} \end{cases}$$

A ideia é olhar pro conjunto $\mathbb{M}_n(\mathcal{O}_n)$ e decompô-lo em classes de equivalências.

Observações 2.3. *Dado n 1-forma diferencial em $\mathbb{K}^n$, se estamos apenas interessados nos locus dos pontos onde eles são dependentes, então é bastante considerar a família de matrizes construídas acima até essa noção de equivalência.*

Proposição 2.15. *Se $n \geq 2$ e $r \leq 4$, o complemento do conjunto dos germes de aplicações $(\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathcal{O}_r)$, cujo discriminante tem uma singularidade isolada, é de codimensão infinita. Por outro lado, se $r \geq 5$ e $n \geq 2$, o conjunto das aplicações dos germes, cujo discriminante tem uma singularidade não isolada, é aberto.*

Demonstração. Considere as matrizes singulares $\Delta = \{A \in M_n | \det(A) = 0\}$. Sabe-se que $\text{cod}(\Delta) = 1$, pois, considerando a função $\det : M_n \rightarrow \mathbb{K}$, função contínua e sobrejetora com $A \mapsto \det(A)$, temos que $\det^{-1}(0) = \Delta$. Se $n \geq 2$, $\sum(\Delta) = \{B \in M_n | \text{posto}(B) \leq n - 2\}$. Esta é de codimensão 4. Se $A \in M_n$, tem-se que $x \in D(A)$ se, e somente se, $A(x) \in \Delta$. Se $r \leq 4$, então é fácil provar que, para todo A fora do conjunto das aplicações dos germes $(\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow M_n$ de codimensão infinita, A encontra o conjunto singular em pontos isolados, e o discriminante tem uma singularidade isolada. Por outro lado, se $r \geq 5$, o conjunto das aplicações para o qual o discriminante tem um ponto singular não isolado é aberto. $\square$

Dado um germe de aplicação suave $A : \mathbb{K}^r, 0 \rightarrow \mathbb{M}_n$ e já conhecida uma dessingularização $\pi : \tilde{\Delta}_1 \rightarrow \mathbb{M}_n$ de Δ (ver 2.6), definimos:

Definição 2.9. *O criminante de A , $C(A)$ é definido como o fecho o conjunto*

$$\{(x, v) \in \mathbb{K}^r \times PV : A(x)v = 0, \text{ e o posto}(A) = n - 1\}$$

Definição 2.10. *O full criminante de A , $FC(A)$, é definido como o conjunto*

$$\{(x, v) \in \mathbb{K}^r \times \mathbb{P}(V) : A(x)v = 0\}$$

Definição 2.11. *O dual full criminante de A , $FC^*(A)$, é definido como o conjunto*

$$\{(x, v) \in \mathbb{K}^r \times \mathbb{P}(W)^* : \psi \circ A(x) = 0\}$$

O *full criminante* representa a família de conjuntos solução da família de equações lineares fornecido por A . Na hipótese de A e π transversais, então $FC(A)$ é suave.

Os full criminantes, os criminantes e seus duais são $\mathcal{G}$ -invariantes num sentido natural.

Definição 2.12. *Dado qualquer germe de aplicação $A : (\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, existe um germe correspondente $A^* : (\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W^*, V^*)$ obtido usando o isomorfismo canônico dado acima. Diremos que os germes A e A^* são duais.*

Capítulo 3

$\mathcal{G}$ -Estabilidade de Matrizes

Um conjunto algébrico pode ser definido como um conjunto em $\mathbb{K}^n$ formado por zeros de polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}$. Considere $V_k \subset J^k M$ subconjuntos algébricos, com $V_{k+1} \subset \zeta^{-1}(V_k)$, sendo $\zeta : J^{k+1} M \rightarrow J^k M$ com $A \mapsto j^k A$ uma submersão. O conjunto V dos germes de aplicações f com $j^k f \in V_k$, para todo k , é chamado de conjunto proalgébrico com $\text{cod}(V_k) \leq \text{cod}(V_{k+1})$. Denotaremos $\text{cod}(V)$ para o limite de $\text{cod}(V_k)$, quando $k \rightarrow \infty$.

Uma propriedade de germes de aplicações é dita propriedade geral quando é válida exceto em um conjunto proalgébrico de codimensão infinita.

Proposição 3.1. *Seja V um conjunto proalgébrico. Temos que $\text{cod}(V) = \infty$ se, e somente se, para cada $z \in J^k M$ nós podemos exibir $f \notin V$ com $j^k f = z$.*

Demonstração. Ver ([23], p. 513). □

Proposição 3.2. *Para todo r e n , o conjunto dos germes $A : (\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ que não são de $\mathcal{G}$ -codimensão finita formam um conjunto de codimensão infinita em M , conjuntos de germes $A : (\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow \text{hom}(V, W)$.*

Demonstração. Primeiro, tratamos do caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. É suficiente mostrar que, para todo germe, $A : (\mathbb{C}^r, 0) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ de aplicações polinomiais de grau m , nós podemos encontrar uma aplicação polinomial $B : (\mathbb{C}^r, 0) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ de grau $m + 1$ com $j^m B = A$ e B finitamente $\mathcal{G}$ -determinado. Seja H^{m+1} o espaço das aplicações polinomiais homogêneas $(\mathbb{C}^r, 0) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ de grau $m + 1$ e considere a aplicação $G : \mathbb{C}^r \times H^{m+1} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ com $(x, D) \mapsto A(x) + D(x)$. G é uma submersão quando restringimos seu domínio a $(\mathbb{C}^r - \{0\} \times H^{m+1})$. Temos também que $G|_{(\mathbb{C}^r - \{0\} \times H^{m+1})}$ é transversal ao conjunto das matrizes singulares Δ . Podemos ver em [15], que o *Lema de Transversalidade de Thom* garante que, para quase todo $D \in H^{m+1}$, temos $G(-, D) : (\mathbb{C}^r - \{0\} \times H^{m+1}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ é transversal a Δ . Tomemos $D \in H^{m+1}$ tal que

a transversalidade aconteça e defina $B = A + D$. Pelo critério geométrico descrito no Teorema 2.12, temos que B é finitamente $\mathcal{G}$ -determinado e assim temos os resultado. O caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ de maneira usual. $\square$

3.1 Deformações de Germes Cohen-Macaulay de Codimensão 2

Tem-se que, se A é uma matriz com entradas em $\mathcal{O}_r$ e $t = \min\{n, p\}$, o ideal I gerado pelos menores $t \times t$ de A , além de determinantal, é Cohen-Macaulay.

Aqui usaremos esta correspondência para estudar propriedades de variedades que são Cohen-Macaulay de codimensão 2 através de sua matriz de representação.

A proposição que segue é uma aplicação do Teorema de Hilbert-Burch e descreve os germes Cohen-Macaulay de codimensão 2 e suas deformações mostrando a correspondência entre o espaço das deformações de primeira ordem da variedade e o espaço das deformações da matriz de representação, justificando o uso da $\mathcal{G}$ -equivalência de matrizes para o estudo desses germes.

Proposição 3.3. 1) *Seja A uma matriz $(n+1) \times n$ com entradas em $\mathcal{O}_r$ e $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$ seus menores maximais e, por abuso de notação, o ideal destes menores. Se $\text{codim}(V(f)) \geq 2$, a seguinte sequência é exata:*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_r^n \rightarrow \mathcal{O}_r^{n+1} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_r}{(f)} \rightarrow 0$$

A álgebra quociente $\frac{\mathcal{O}_r}{(f)}$ é Cohen-Macaulay e $\text{codim}(V(f)) = 2$

2) *Se $X \subset \mathbb{C}^r$ é Cohen-Macaulay, $\text{codim}(X) = 2$ e $X = V(I)$, então $\frac{\mathcal{O}_r}{I}$ tem uma resolução minimal do tipo*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_r^n \rightarrow \mathcal{O}_r^{n+1} \rightarrow \frac{\mathcal{O}_r}{I} \rightarrow 0$$

Além disso, existe um elemento invertível $u \in \mathcal{O}_r$ tal que $I = u \cdot f$, onde f é novamente o ideal dos menores maximais de A .

3) *Qualquer deformação de A é uma deformação de X .*

4) *Qualquer deformação de X pode ser gerada por uma perturbação da matriz A .*

Demonstração. (Ver [21], p.52). $\square$

Considere X uma variedade dos zeros de um ideal determinantal . Suponha agora que X é uma variedade determinantal de codimensão 2, então podemos usar o teorema de Hilbert-Burch para obter uma boa descrição de X e de suas deformações em termo de sua matriz de representação. Isto é, se X é uma variedade Cohen-Macaulay de codimensão 2, então X pode ser definida pelos menores maximais de uma matriz $(n+1) \times n$. Além disso, qualquer deformação de uma matriz $(n+1) \times n$ dá origem a uma deformação de X e qualquer deformação de X pode ser obtida através de uma perturbação de uma matriz de representação.

Cohen-Macaulay é uma propriedade algébrica, mas facilita o cálculo quando você quer procurar relações entre variantes topológicos e invariantes algébricos. Não usamos essa ideia aqui, mas, quando olhamos para $V(f)$, que é o conjunto de todos os pontos onde f se anula, visto que a álgebra quociente $\frac{\mathcal{O}_r}{(f)}$ é Cohen-Macaulay, a codimensão de $V(f)$ é sempre 2.

Temos então a correspondência entre variedades Cohen-Macaulay de codimensão 2 com variedades determinantis definidas por menores maximais de matriz de tamanho $(n+1) \times n$.

A próxima proposição vai nos dar condições de conseguir deformações (variedades) que nos dê boas informações sobre minha variedade inicial.

Proposição 3.4. *Seja A uma matriz $(n+1) \times n$ com entradas no ideal maximalde $\mathcal{O}_r$ e X o germe definido por seus menores maximais. O módulo normal é dado por*

$$\mathcal{N}_X \cong \frac{M_{(n+1,n)}(\mathcal{O}_r)}{Im(g)}$$

onde

$$\begin{aligned} g : \mathcal{H} \times \mathbb{M}_{(n+1,n)}(\mathcal{O}_r) &\rightarrow \mathbb{M}_{(n+1,n)}(\mathcal{O}_r) \\ (R_1, R_2, M) &\mapsto R_1 M R_2 \end{aligned}$$

Demonstração. (Ver [21], p. 54)

□

As informações que nos interessam são as direções de deformações que não estão no espaço tangente. A ideia é calcular o espaço tangente e ver as deformações que não estão lá.

Proposição 3.5. *Com as mesmas notações da proposição anterior*

$$T_X^1 = \frac{\mathbb{M}_{(n+1,n)}(\mathcal{O}_r)}{J(M) + Im(g)}$$

onde

$$J(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{11}}{x_j} & \cdots & \frac{\partial A_{1n}}{x_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A_{(n+1)1}}{x_j} & \cdots & \frac{\partial A_{(n+1)n}}{x_j} \end{pmatrix}, \forall 1 \leq j \leq r$$

Demonstração. (Ver [21], p. 56) □

Mostramos assim que podemos expressar os módulos $\mathcal{N}_X$ e T_1 em termos de matrizes.

3.2 $\mathcal{G}$ -Estabilidade de Matrizes

Considere uma variedade determinantal X , Cohen-Macaulay de codimensão 2, com singularidade isolada. Nosso interesse é determinar condições para que perturbações estáveis de X sejam variedades suaves. A condição de estabilidade equivale à transversalidade de M com relação aos estratos da estratificação de $\mathbb{M}_{(n+1,n)}(\mathbb{C})$ (ver Proposição 2.12). Ou seja, X é suave se, e somente se, a matriz de representação não intercepta o conjunto Δ das matrizes singulares. Como a codimensão de Δ é igual a 2, isto ocorre se $r < 6$.

Estudaremos o caso de existência de perturbações estáveis de variedades Cohen-Macaulay de codimensão 2, com singularidade isolada na origem, do ponto de vista da $\mathcal{G}$ -equivalência.

Proposição 3.6. *Considere $M \in \mathbb{M}_{(n+1,n)}(\mathcal{O}_r)$. Se $r < n(n+1)$, então M não é $\mathcal{G}$ -estável.*

Demonstração. Como $m_{ij} = 0$ quaisquer que sejam i, j , assim as matrizes constantes só podem ser obtidas no espaço tangente da parte $\{\frac{\partial M}{\partial x_i}\}$, concernente ao $\mathcal{R}$ -espaço tangente. Dessa podemos obter, no máximo, r matrizes constantes linearmente independentes. Por hipótese, $r < n(n+1)$, então $T\mathcal{G}M \neq \mathbb{M}_{(n,n+1)}(\mathcal{O}_r)$, pois $\dim(\mathbb{M}_{(n,n+1)}(\mathcal{O}_r)) = n(n+1)$. Concluimos assim que M não pode ser $\mathcal{G}$ -estável. □

Inferimos que, se M é $\mathcal{G}$ -estável e $r < n(n+1)$, então $M(0) \neq 0$. A próxima proposição dá conta de caracterizar as variedades Cohen Macaulay de codimensão 2 com singularidade isolada na origem e que são $\mathcal{G}$ -estáveis.

Proposição 3.7. *Seja $M \in \mathbb{M}_{(2,3)}(\mathcal{O}_r)$ e $r \geq 6$. Então M é $\mathcal{G}$ -estável se, e somente se, M é $\mathcal{G}$ -equivalente a $M' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$*

Demonstração. Se M é $\mathcal{G}$ -estável e $M(0) = 0$, então $T\mathcal{G}M = \mathbb{M}_{(2,3)}(\mathcal{O}_r)$. Em particular, $T\mathcal{G}M(0) = \mathbb{M}_{(2,3)}(\mathbb{C})$, isto é,

$$\mathbb{C}\left\{\frac{\partial M}{\partial x_i}\right\} = \mathbb{M}_{(2,3)}(\mathbb{C})$$

Logo, a menos de mudança de coordenadas, $M = M'$.

Reciprocamente, suponhamos inicialmente que M tenha 1-jato da forma M' , então $M = M' + P$, onde $P = (p_{ij}(x)) \in \mathfrak{M}^2$. Assim,

$$T\mathcal{G}M + \mathfrak{M}\mathbb{M}_{(2,3)}(\mathcal{O}_r) = \mathbb{M}_{(2,3)}(\mathcal{O}_r)$$

□

Proposição 3.8. *Seja $\mathcal{O}_1 = \mathbb{C}\{x\}$ e $M \in \mathbb{M}_{(2,3)}(\mathcal{O}_1)$. Então M é $\mathcal{G}$ -estável se, e somente se, o posto de M é igual a 2.*

Demonstração. Começemos supondo que M seja $\mathcal{G}$ -estável, então

$$T\mathcal{G}M(0) = \mathbb{M}_{(2,3)}(\mathbb{C})$$

A parte $\left\{\frac{\partial M}{\partial x_i}(0)\right\}$ contribui no máximo com uma matriz constante para o espaço tangente, pois as entradas estão em $\mathcal{O}_1$. De tal forma, que a parte $\{C_{ij}M(0), R_{lk}M(0)\}$ deve ser gerado por cinco matrizes constantes linearmente independentes. Isso só é possível se o posto da matriz M é maximal, neste caso, igual a 2.

Reciprocamente, se M tem rank 2, então $M(0)$ é $\mathcal{G}$ -equivalente a uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

então, $T\mathcal{G}M + \mathfrak{M}\mathbb{M}_{(2,3)}(\mathcal{O}_r) = \mathbb{M}_{(2,3)}(\mathcal{O}_r)$. Logo, M é $\mathcal{G}$ -estável.

□

Proposição 3.9. *Se X é uma variedade de Cohen Macaulay de codimensão 2, com singularidade isolada na origem, definida pelos menores $n \times n$ de matrizes de uma matriz $M \in \mathbb{M}_{(n+1,n)}(\mathcal{O}_r)$, com $r < 6$ e $\mathcal{G}_e$ -codimensão de M finita. Então uma estabilização de M existe e é única a menos de difeomorfismos.*

Demonstração. Temos que, se $p \in \mathbb{C}^r$ e $p \neq 0$ então p não é ponto singular de X . Como supomos a $\mathcal{G}_e$ -codimensão finita de M , então $\dim \frac{\mathbb{M}_{(n+1,n)}(\mathcal{O}_r)}{T\mathcal{G}_e M} < \infty$.

Sendo $M : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{M}_{(n+1,n)}(\mathbb{C})$ com $x \mapsto M(x)$, olhemos para as deformações versais, aplicações descritas abaixo. Para cada $u \in \mathbb{C}^k$, temos

$$\begin{aligned} M_u : \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^k &\rightarrow \mathbb{M}_{(n+1,n)} \times \mathbb{C}^k \\ (x, u) &\mapsto (M_u(x), u) \end{aligned}$$

Para cada $u_0 \in \mathbb{C}^r$ fixo, temos X_{u_0} variedade determinantal associada a M_{u_0} .

Sejam $\mathfrak{X} \subset \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^k$ o espaço das deformações versais de M e

$$Bif(\mathfrak{X}) = \{u \in \mathbb{C}^k | X_u \subset \mathfrak{X} \text{ não é estável}\} = \{u \in \mathbb{C}^k | M_u \text{ não é } \mathcal{G}\text{-estável}\},$$

o seu conjunto de bifurcação.

Observemos que o conjunto $Bif(\mathfrak{X})$ é um conjunto analítico próprio e, portanto, seu complementar é um conjunto conexo.

Considere $u \in Bif(\mathfrak{X})^c$, então M_u é $\mathcal{G}$ -estável. Logo $T\mathcal{G}M_u = \mathbb{M}_{(n+1,n)}(\mathcal{O}_r)$. Assim, pela proposição 3.6, temos que $M_u(0) \neq 0$, ou seja, existe uma vizinhança U que contém o $0 \in \mathbb{C}^r$ tal que $X_u \subseteq U$ é suave, donde concluímos que M_u é uma suavização de M . O fato de o conjunto $Bif(\mathfrak{X})^c$ ser conexo garante a unicidade da suavização, pois conseguimos de forma contínua conectar os parâmetros em $\mathbb{C}^r$ através de um caminho. $\square$

Exemplo 3.1. *Seja X uma variedade determinada pelo anulamento dos menores maximais de uma matriz $M = (m_{ij})_{(n+1 \times n)}$, da forma*

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

onde $R = (r_{ij})$ é uma matriz 2×3 com entradas no ideal maximal de $\mathcal{O}_6$ e Id é a matriz identidade de ordem $n = 2$. Observemos que X tem singularidade isolada.

3.3 Resultados e Classificação

Objetivamos classificar germes simples de aplicações, finitamente determinados, $A : (\mathbb{C}^r, 0) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Nesta seção, apresentaremos a definição de *germe simples* e alguns critérios que o identifiquem.

Definição 3.1. *Um germe finitamente determinado $f \in \mathfrak{MO}_{(n,p)}$ é dito $\mathcal{G}$ -simples se existe uma vizinhança V de $j^k f$ (sendo k suficientemente grande) em $J^k(n, p)$ tal que V encontra um número finito de $J^k G$ -órbitas.*

Observações 3.1.

- i) Se $f \in \mathfrak{MO}_{(n,p)}$ é simples, então seu k -jato $j^k f(0)$ é simples para qualquer $k \geq 1$.

Para começar a discutir os resultados sobre classificação, precisamos introduzir um pouco mais de notação.

Definição 3.2. *Dados dois germes de aplicação $A_j : (\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow \mathbb{M}_{n_j}(\mathbb{K})$, com $j = 1, 2$, definimos*

$$A_1 \oplus A_2 : \mathbb{K}^{r_1+r_2}, 0 \rightarrow \mathbb{M}_{n_1+n_2}(\mathbb{K})$$

$$(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} A_1(x) & 0 \\ 0 & A_2(y) \end{pmatrix}$$

Usando esta definição e as operações elementares entre linhas e colunas apresentadas no fim do Capítulo 1, segue que, se um germe de matriz $A : (\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow \mathbb{M}_n$ tem posto s na origem, então A é $\mathcal{G}$ -equivalente a um germe da forma $I_x \oplus B$, onde $B : (\mathbb{K}^r, 0) \rightarrow \mathbb{M}_{n-s}$ tem posto zero na origem e I_s é a matriz identidade. Consequentemente, a $\mathcal{G}$ -codimensão de A é igual a G -codimensão de B , seus desdobramentos são naturalmente isomorfos e a simplicidade de uma é equivalente à simplicidade da outra.

Assim, para fins de classificação vamos considerar apenas germes de matrizes A tal que $A(0) = 0$, isto é, cujo posto linear é zero. Além disso, para fazer a classificação vamos usar o Lema de Mather (ver Lema 1.11) e o Teorema da Transversal Completa (ver Teorema 1.12).

Seguindo os passos padrões usados em Teoria de Singularidades, o primeiro a se fazer é determinar condições para r, n para os quais 1-jatos podem conduzir a construção de germes simples.

Proposição 3.10. *Seja G um grupo algébrico agindo num K -espaço afim V e S uma subvariedade própria de V tal que*

$$\{s \in S : T_s S \subset T_s G \cdot s\}$$

é subvariedade própria de S . Nestas condições, dados qualquer $s \in S$, qualquer U vizinhança de s contém infinitas órbitas.

Demonstração. Suponha por absurdo que existam $s \in S$ e U , vizinhança de s , de tal forma que U contenha um número finito de órbitas. Então, a interseção de alguma órbita com S contém um conjunto aberto, o que é uma contradição (pois, neste caso teríamos $\dim T_s G \cdot s = \dim G$ o que contradiz o fato que $\{s \in S : T_s S \subset T_s G \cdot s\}$ é uma subvariedade própria de V). $\square$

Observações 3.2.

i) Observemos que, se $\dim(S) > \dim(G)$, o germe não será simples. Lembremos que, se $\dim(T_s S) \leq \dim(G)$, temos que

$$\dim(T_s G \cdot s) \leq \dim(G) < \dim(S)$$

logo o conjunto $\{s \in S : T_s S \subset T_s G \cdot s\}$ será vazio. Segue da proposição anterior que não teremos germe simples.

Vamos dar uma breve descrição dos 1-jatos e a ação que estamos considerando no espaço dos 1-jatos. Para isso, é mais conveniente escrever K^r como U . Então, um 1-jato é simplesmente uma aplicação linear $\alpha : U \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, isto é, um elemento de $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))$. A equivalência natural é via o grupo $GL(U) \times GL(V) \times GL(W)$. Como vimos, se estamos olhando para germes de posto s , precisamos classificar subespaços de $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ de dimensão s sob a $GL(V) \times GL(W$)-equivalência.

Proposição 3.11. (1) Não existem germes simples se $n \geq 3$ e $3 \leq r \leq n^2 - 3$;

(2) Se um germe simples tem 1-jato $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))$ então:

(i) $n = 1, 2$ ou $r = 1$;

(ii) para $n \geq 3$, o posto de α é 1 ou 2 ou o corank de α é 0, 1, 2.

Demonstração. A ação de $J^1 G$ se reduz a ação de $GL(U) \times GL(V) \times GL(W)$ em $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. A dimensão do grupo é $r^2 + 2n^2$, pois $\dim(GL(U)) = r^2$, $\dim(GL(V)) = \dim(GL(W)) = n^2$, mas considerando a ação de múltiplos da identidade de cada uma das três componentes, podemos ver que as dimensões de qualquer órbita é, no máximo, $r^2 + 2n^2 - 2$, pois os elementos de $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ têm posto no máximo $n - 1$, assim, como a ação não muda o posto, na melhor das hipóteses, a órbita de maior dimensão é $r^2 + (n^2 - 1) + (n^2 - 1)$.

O germe não será simples se $r^2 + 2n^2 - 2 < \dim(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)))$, segundo o que consta na Observação 3.2, ou seja, quando $r^2 - rn^2 + 2n^2 - 1 \leq 0$ (i). Tratando a equação $r^2 - rn^2 + 2n^2 - 1 = 0$ como uma equação quadrática na variável r , temos que

$$r = \frac{n^2 \pm \sqrt{n^4 - 4(2n^2 - 1)}}{2}$$

A equação acima só apresentará raízes reais se $n^4 - 4(2n^2 - 1) \geq 0$ (ii). Denotando n_1, n_2 como as duas raízes da equação, temos

$$n_1 = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad n_2 = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ ou $n = 0$. Em qualquer uma das hipóteses, não teremos germes simples em (i).

Substituindo os valores na equação 3.3 e considerando as raízes r_1 e r_2 , temos

$$r_1 = 2 - \sqrt{3} \quad \text{e} \quad r_2 = 2 + \sqrt{3}$$

Como estamos interessados nos valores de r onde a equação (i) é maior ou igual a zero, temos que $r \leq 0$ ou $r \geq 3$. Por também se tratar de um número natural, $r \geq 3$.

De (ii), podemos inferir o seguinte

$$\begin{aligned} n^4 - 4(2n^2 - 1) &< (n^2 - 4)^2 \stackrel{n \geq 3}{\Rightarrow} \\ r &\leq (n^2 - 3) \end{aligned}$$

Concluimos assim a primeira parte da prova.

Para a segunda parte da prova, pensemos em germes de rank s , então consideramos subespaços s -dimensionais de $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Esta Grassmanniana $Gr(s, n^2)$ tem dimensão $s(n^2 - s)$. No entanto, ao considerar os efeitos das ações de múltiplos das identidades em GL_n^2 , nós vemos que a dimensão de cada órbita é, no máximo $2n^2 - 2$, então o germe não será simples, a nível de 1-jato, se $sn^2 \geq s^2 + 2n^2 - 1$ (i'). As contas são semelhantes à primeira parte. Assim, $n \geq 3$ e $3 \leq s \leq (n^2 - 3)$. Se $n \geq 3$, para que haja germes simples, temos $n^2 - s < 3$ (ii') ou $s < 3$ (iii'). Note que se $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))$, $\text{posto}(\alpha) = n^2 - s$. Assim, por (ii'), temos que $\text{posto}(\alpha) \leq 2$. Por (iii'), temos que o $\text{coposto}(\alpha) \leq 2$. □

A Proposição 3.11 traz os possíveis valores de r e n para que tenhamos germes simples.

Tomemos $M \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W))$, com $\text{posto}(M) = n - 1$ e considere o conjunto $J^1G \cdot M = \{S = \Phi \cdot M, \text{para } \Phi \in J^1G\} = \{T \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)); \text{posto}(T) = \text{posto}(M)\}^{(**)}$. Então $\dim(J^1G \cdot M) = \dim((**))$

Pelo Lema 2.4, vimos que classificar subespaços em $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensão 1, 2 é equivalente à classificação de subespaços de codimensão 1, 2, respectivamente. Abaixo listamos esses subespaços.

Teorema 3.12. 1) *Os subespaços de dimensão 1 são gerados pelas matrizes I_t^* , $1 \leq t \leq n$, que tem **um** nas t primeiras entradas diagonais e **zeros** nas demais;*

2) *Se $n = 2$, os subespaços de dimensão 2, chamados de pencils, têm formas normais: $(x, 0, 0, y)$, $(x, -y, y, x)^*$, $(x, y, 0, x)$, $(x, 0, y, 0)$, $(x, y, 0, 0)$. Sobre $\mathbb{C}$, o pencil marcado por $*$, não é necessário. Similarmente, temos isso em 3).*

3) *Se $n = 3$, os pencils têm formas normais e são representados como seguem: $x(E_{11} + E_{33}) + y(E_{22} + E_{33})$, (I_i) ; $x(E_{11} + E_{22}) + y(E_{12} - E_{21} + E_{33})^*$, (I_{ii}) ; $x(E_{11} + E_{33}) + y(E_{12} + E_{33})$, (II_i) ; $x(E_{11} + E_{33}) + yE_{33}$, (II_{ii}) ; $xId + y(E_{12} + E_{23})$, (III_i) ; $xId + yE_{12}$, (III_{ii}) ; (esses são os 6 pencils regulares). $x(E_{12} + E_{21}) + y(E_{13} + E_{31})$;*

$x(E_{11} + E_{22}) + y(E_{13} + E_{21}); x(E_{11} + E_{22}) + y(E_{12} + E_{31}); x(E_{12} + E_{21}) + yE_{13};$
 (os pencils singulares irreduzíveis); junto com $A \oplus 0$, onde A é um dos pencils em 2), considerada aqui como uma matriz 3×3 de maneira óbvia.

4) Não existe germe simples se $n \geq 4$.

Observação 3.1. Os pencils de duas variáveis, descritos em 2) no Teorema 3.12, são um par de matrizes 2×2 (B_x, B_y) , sendo feita uma correspondência de cada matriz a cada coordenada x, y do pencil, respectivamente. Para cada pencil, obtemos então o 1-jato do tipo $xB_{i_x} + yB_{i_y} \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^2, \mathbb{M}_2(\mathbb{K}))$. Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned} (x, 0, 0, y) &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (x, -y, y, x)^* &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (x, y, 0, x) &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (x, 0, y, 0) &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (x, y, 0, 0) &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

As órbitas são geradas pelos primeiros pencils. No caso de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $(x, y, 0, x)$ e $(x, 0, y, 0)$.

Para $n = 3$, se o pencil contém uma matriz de posto maximal, reduzimos ela à matriz identidade e podemos agir na segunda matriz por conjugação.

Em seguida, usa-se a forma normal de Jordan e o fato de que podemos fazer uma mudança linear nas variáveis (x, y) .

Os pencils que não contêm matrizes de posto maximal são chamados pencils singulares. Para estes pencils, escolha uma das matrizes de posto maximal (2 ou 1) e reduza a segunda matriz à forma normal, usando o fato de que nenhuma combinação pode ter posto maior que a primeira.

Referências Bibliográficas

- [1] GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves, *Elementos de Álgebra*, 2ª edição, Projeto Euclides, IMPA, 2003.
- [2] GONÇALVES, Adilson, *Introdução à Álgebra*, 5ª edição, 2009.
- [3] LIMA, Elon Lages, *Álgebra Linear*, 1ª edição, IMPA, 2014.
- [4] LIMA, Elon Lages, *Variedades diferenciáveis*, 1ª edição, IMPA, 2011.
- [5] RODRÍGUEZ, José Luis Vilca, *Automorfismos de 2-grupos de Suzuki*, UFMG, 2015.
- [6] ULHOA, Flavio e LOURENÇO, Mary Lilian, *Um Curso de Álgebra Linear*, 2ª edição, Edusp, 2010.
- [7] HALAS, Gabrielly, *Relações entre Teoria de Representações de Grupo e a Álgebra Multilinear: Uma Introdução Naif*, UTFPR, 2015.
- [8] FARID, *Singularidades de Aplicações Diferenciáveis*. Notas de Aula, ICMC-USP, 1998.
- [9] ANJOS, Kelvin John Silva dos, *Ações Parciais de Grupos*, FURG, 2017.
- [10] BRUCE, J.W e TARI, F., *On Families of Square Matrices*, London Mathematical Society, 2004.
- [11] KIST, Airton, *Grupos de Matrizes*, UFSC, 1999.
- [12] MENDES, Adim Martins, *Uma breve introdução ao estudo da análise do $\mathbb{R}^n$* , UFPB, 2017.
- [13] MIRANDA, Aldicio José, *Os tipos estáveis e multiplicidades de germes quase homogêneos de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$* , ICMC-USP, 2004.
- [14] SILVA, Fernando de Ávila, *Folheações transversais à esfera tridimensional*, UFPR, 2011

- [15] GIBSON, Christopher G., *Singular points of smooth mappings*, volume 25 do Research Notes in Mathematics. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1979.
- [16] WHITNEY, H., *Tangents to an Analytic Variety*, Ann. Math., 93, Nº 5, 1020-1058, 1971.
- [17] DAMON, J., *The unfolding and determinancy theorems for subgroups of A and K* , Memoirs of the American Mathematical Society, Providence RI, 1984.
- [18] J. W. Bruce. *On families of symmetric matrices*. Mosc. Math. J., 3(2):335–360, 741, 2003. Dedicated to Vladimir I. Arnold on the occasion of his 65th birthday.
- [19] MATHER J., *Stability of C^∞ mappings, IV. Classification of stable germs by R -algebras*. Publications mathématiques de l’I.H.É.S. 37, págs. 223-248, 1969
- [20] BRUCE J.; KIRK N.P.; DU PLESSIS, A. *Complete transversals and the classification of singularities*. Nonlinearity 10, págs 253-275, 1997
- [21] PEREIRA, M. S.; RUAS. *Variedades determinantis e singularidades de matrizes*. 2010. Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010
- [22] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves*, v.1 Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, New York, 1985
- [23] C.T.C. Wall, *Finite Determinacy of smooth map-germs*. London Math. Soc., 13(6): 481-539, 1981