



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
- Mestrado - Doutorado

**SOLUÇÕES HÍBRIDAS DOS PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA
SIMULTÂNEA DE CALOR E MASSA COM FRONTEIRA MÓVEL
VIA GITT**

por

Marinaldo José de Medeiros

*Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal da Paraíba para
obtenção do Título de Doutor.*

MARINALDO JOSÉ DE MEDEIROS

**SOLUÇÕES HÍBRIDAS DOS PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA
SIMULTÂNEA DE CALOR E MASSA COM FRONTEIRA MÓVEL
VIA GITT**

Tese de doutorado apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Antonio Cabral dos Santos

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M488s Medeiros, Marinaldo José de.

Soluções híbridas dos problemas de transferência simultânea de calor e massa com fronteira móvel VIA GITT / Marinaldo José de Medeiros. - João Pessoa, 2022.
204 f. : il.

Orientação: Carlos Antonio Cabral dos Santos.
Tese (Doutorado) - UFPB/CT.

1. Engenharia Mecânica. 2. Transferência de Calor e de Massa. 3. Filme Descendente. 4. Número de Biot. 5. Balanço Integral. I. Santos, Carlos Antonio Cabral dos. II. Título.

UFPB/BC

CDU 621(043)

**SOLUÇÕES HÍBRIDAS DOS PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA
SIMULTÂNEA DE CALOR E MASSA COM FRONTEIRA MÓVEL
VIA GITT**

por

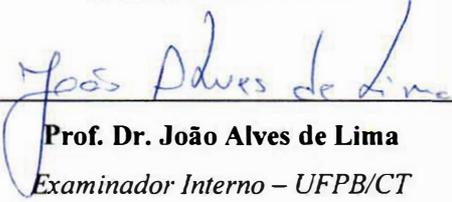
Marinaldo José de Medeiros

Tese aprovada em 30 de setembro de 2022



Prof. Dr. Carlos Antonio Cabral dos Santos

Orientador – UFPB/CT



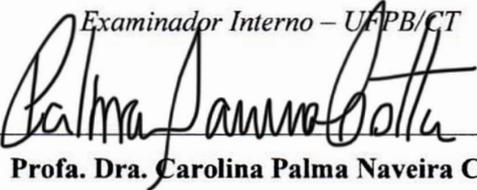
Prof. Dr. João Alves de Lima

Examinador Interno – UFPB/CT



Prof. Dr. Francisco Antônio Belo

Examinador Interno – UFPB/CT



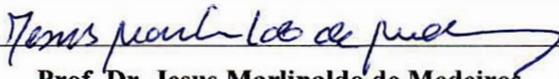
Profa. Dra. Carolina Palma Naveira Cotta

Examinadora Externa – UFRJ/COPPE



Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma

Examinador Externo - FEQ/UFPB



Prof. Dr. Jesus Marlinaldo de Medeiros

Examinador Externo - IFPB

DEDICATÓRIA

Dedico esta tese aos meus pais, Benedito e Lindinalva (in memoriam), que fizeram muitos sacrifícios para formar seus quatro filhos. À minha esposa, Jaqueline, e aos meus filhos, Caroline, Matheus e Jonathan, os quais efetivamente compreendem as grandes dificuldades surgidas para conclusão deste trabalho, por todas as horas ausentes e pelo grande amor que nos une.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, quero agradecer a Deus, por ter me dado a oportunidade de finalizar essa etapa da minha vida, só Ele sabe quantas pedras surgiram durante o caminho. Tenho a convicção que nos momentos mais difíceis, o Senhor me deu o discernimento e a inteligência para conseguir seguir em frente e vencer.

Ao Prof. Carlos Antônio Cabral dos Santos, pela orientação fornecida desde a iniciação científica, a qual completou, neste ano, 30 anos; uma vida. Além disso, e de forma principal, agradeço a amizade, confiança e estímulos efetuados para finalização dessa tese.

Ao Prof. João Alves de Lima, pela amizade, contribuições e dúvidas tiradas desde o tempo de mestrado, tanto na programação como no uso da técnica da transformada integral generalizada.

Ao Prof. Francisco Antônio Belo, agradeço pelos ensinamentos desde a época da graduação, participando da banca de mestrado e doutorado, e contribuindo com suas ideias.

À Profa. Carolina Palma Naveira Cotta pelas contribuições realizadas na qualificação imprescindíveis para conclusão da tese.

Ao Prof. João Nazareno Nonato Quaresma pelas contribuições desde a participação na Banca de Mestrado em 1998 e principalmente na qualificação desta tese doutoral.

Ao Prof. Jesus Marlinaldo de Medeiros, meu irmão e companheiro de todos os momentos, inclusive aqueles vividos dentro da Academia, agradeço pelo estímulo, incentivo e, principalmente, pela ajuda na conclusão dessa tese.

Aos colegas de doutorado - Álvaro, Carol, Davi, Fábio, Gustavo, Igor, João Medeiros, João Batista, Mabel, Merques e Thiago -, pela socialização de vitórias, sofrimentos e conquistas.

Aos professores da coordenação de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pelos ensinamentos e pelas contribuições para realização desse trabalho.

Aos servidores da coordenação de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pela atenção prestada e pela ajuda durante a pandemia.

Ao IFPB, pela liberação das minhas atividades docentes durante três anos, fundamental para conclusão do trabalho.

À UFPB, minha *alma mater*, onde passei a graduação, mestrado e doutorado, sendo a representação de toda minha educação superior.

E aos demais que, de alguma forma, contribuíram para realização desse trabalho.

SOLUÇÕES HÍBRIDAS DOS PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA SIMULTÂNEA DE CALOR E MASSA COM FRONTEIRA MÓVEL VIA GITT

Este trabalho apresenta uma solução híbrida analítico-numérica para a transferência simultânea de calor e massa em absorvedores horizontal e vertical com perfil de velocidade constante completamente desenvolvido, usando coordenadas retangulares e cilíndricas, respectivamente. Esses problemas foram resolvidos por meio da Técnica da Transformada Integral Generalizada usando uma mudança de variável para determinação da espessura do filme. Esta técnica permitiu manipulações analíticas dos sistemas de equações diferenciais parciais e utilizou filtros nas suas condições de contorno, para tornar o problema homogêneo, com objetivo de produzir sistemas de equações diferenciais ordinários para os potenciais transformados. Foi aplicado um balanço integral para permitir resultados coerentes dos potenciais e seus fluxos nas condições de contorno. O modelo matemático utilizou a equação de transferência de calor sujeita à condição de contorno de Robin (terceiro tipo) e na equação de transferência de massa sujeita à condição de contorno de Neumann (segundo tipo), para calcular as taxas de transferência de calor e massa variando o número de *Biot* e o fator de acoplamento. Para validar o modelo proposto, foram simuladas várias situações: $Bi=0,001$ (parede adiabática), $Bi=0.1, 1, 2, 5$ e 10 (casos intermediários) e $Bi=1000$ (parede isotérmica). Os perfis de temperatura e concentração também foram determinados e comparados com resultados disponíveis na literatura, obtendo-se bons resultados. Foi realizado um estudo paramétrico com uma ferramenta de simulação baseada no modelo apresentado. Este estudo destaca que variando o número de *Biot*, verifica-se que a influência no campo térmico é maior que no campo de concentração, enquanto variando o fator de acoplamento mostra que a influência no campo de concentração é maior que no campo de temperatura.

Palavras-chave: Filme Descendente, Número de *Biot*, Técnica de Transformação Integral Generalizada, Balanço Integral, Transferência simultânea de Calor e de Massa.

HYBRID SOLUTIONS FOR SIMULTANEOUS HEAT AND MASS TRANSFER PROBLEMS WITH MOVING BOUNDARY VIA GITT

This work presents an analytical-numerical hybrid solution for the simultaneous transfer of heat and mass in horizontal and vertical absorbers with a fully developed constant velocity profile, using rectangular and cylindrical coordinates, respectively. These problems were solved using the Generalized Integral Transform Technique using a change of variable to determine the film thickness. This technique allowed analytical manipulations of the systems of partial differential equations and used filters in their boundary conditions, to make the problem homogeneous, in order to produce systems of ordinary differential equations for the transformed potentials. An integral balance was applied to allow coherent results of the potentials and their flows in the boundary conditions. The mathematical model used the heat transfer equation subject to the Robin boundary condition (third type) and the mass transfer equation subject to the Neumann boundary condition (second type), to calculate the heat and mass transfer rates varying the *Biot* number and the coupling factor. To validate the proposed model, several situations were simulated: $Bi=0.001$ (adiabatic wall), $Bi=0.1, 1, 2, 5$ and 10 (intermediate cases) and $Bi=1000$ (isothermal wall). The temperature and concentration profiles were also determined and compared with results available in the literature, obtaining good results. A parametric study was carried out with a simulation tool based on the model presented. This study highlights that varying the *Biot* number shows that the influence in the thermal field is greater than in the concentration field, while varying the coupling factor shows that the influence in the concentration field is greater than in the temperature field.

Keywords: Falling Film, *Biot* Number, Generalized Integral Transformation Technique, Integral Balance, Simultaneous Heat and Mass Transfer.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I	23
INTRODUÇÃO	23
1.1 PROBLEMA PROPOSTO	23
1.2 JUSTIFICATIVA	24
1.3 CICLO DE REFRIGERAÇÃO POR ABSORÇÃO	25
1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	30
1.5 MOTIVAÇÃO	41
1.6 MÉTODO DE TRATAMENTO DO PROBLEMA	42
1.7 OBJETIVOS	44
1.8 ESTRUTURA DA TESE	46
CAPÍTULO II	48
ESTUDO DOS PROBLEMAS DE CAMADA LIMITE	48
2.1 INTRODUÇÃO	48
2.1.1 Campo Hidrodinâmico	48
2.1.2 Campo Térmico	51
2.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA	52
2.3 MODELO MATEMÁTICO ADIMENSIONAL	57
2.4 APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA	59
2.5 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO SISTEMA DE EQUAÇÕES	62
2.6 RESULTADOS	72
2.6.1 Camada Limite Hidrodinâmica	72
2.6.2 Camada Limite Térmica	76
2.6.3 Camada Limite de Concentração	80
2.7 CONCLUSÕES	81
CAPÍTULO III	83

SOLUÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURA E CONCENTRAÇÃO EM UM ABSORVEDOR HORIZONTAL COM ESPESSURA DE PELÍCULA CONSTANTE E VARIÁVEL.....	83
3.1 INTRODUÇÃO	83
3.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA COM ESPESSURA CONSTANTE.....	85
3.3 APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA	89
3.4 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA COM ESPESSURA DE PELÍCULA VARIÁVEL.....	94
3.5 APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA	96
3.6 RESULTADOS.....	103
3.7 CONCLUSÕES	126
CAPÍTULO IV.....	128
SOLUÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURA E CONCENTRAÇÃO EM UM ABSORVEDOR VERTICAL VIA GITT.....	128
4.1 INTRODUÇÃO	128
4.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA COM ESPESSURA CONSTANTE	131
4.3 APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA	135
4.5 CONCLUSÕES	154
APÊNDICE A	167
PROBLEMAS DE SOLIDIFICAÇÃO RÁPIDA POR VAZAMENTO EM FLUXO PLANAR (PFC)	167
APÊNDICE B.....	187
BALANÇO INTEGRAL PARA OS POTENCIAIS NA INTERFACE DE UM ABSORVEDOR HORIZONTAL – ESPESSURA CONSTANTE.....	187
APÊNDICE C	190
BALANÇO INTEGRAL PARA OS POTENCIAIS NA INTERFACE DE UM ABSORVEDOR HORIZONTAL – ESPESSURA VARIÁVEL	190
APÊNDICE D	193

BALANÇO INTEGRAL PARA OS POTENCIAIS NO ESCOAMENTO INTERNO EM UM ABSORVEDOR VERTICAL	193
APÊNDICE E.....	196
 DETERMINAÇÃO DO PERFIL DE VELOCIDADE PARA COORDENADAS RETANGULARES	196
APÊNDICE F.....	199
 DETERMINAÇÃO DO PERFIL DE VELOCIDADE PARA COORDENADAS CILÍNDRICAS.....	199

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Ciclo de Refrigeração por Absorção (Adaptada de HAVESTINI, 2021.).....	26
Figura 2 - Diagrama esquemático da absorção de LiBr-H ₂ O sobre uma parede fria. (Adaptada de HAVESTINI, 2021.).....	28
Figura 3 - Diagrama esquemático da absorção de LiBr-H ₂ O em tubos horizontais. (Adaptada de HAVESTINI, 2021.).....	29
Figura 4 - Descrição do problema físico com camada limite hidrodinâmica, térmica e de concentração.	53
Figura 5 - Comportamento da espessura da camada limite hidrodinâmica em função da posição x [m]	73
Figura 6 - Comportamento da espessura da camada limite hidrodinâmica em função da posição x [m]	74
Figura 7 - Perfil da velocidade adimensional em função das posições x e y	74
Figura 8 - Perfil de temperatura ao longo da placa com variação das posições x e y	78
Figura 9 - Comportamento da espessura da camada limite térmica em função da posição x [m].	78
Figura 10 - Comportamento da espessura da camada limite térmica em função da posição x [m], variando o número de Prandtl.....	79
Figura 11 - Comportamento da espessura da camada limite térmica em função da posição x [m], variando o número de Reynolds.	79
Figura 12 - Comportamento da espessura das camadas limites em função da posição x [m].	81
Figura 13 - Ilustração do Problema Proposto (ANDRADE, 2018).....	86
Figura 14 - Escoamento do filme líquido: (a) gotejamento, (b) filete estável, (c) placa (Adaptada de SILVA, 2010).....	86
Figura 15 - Distribuição das temperaturas média, parede e interface para $LE = 1000$, $Fac = 0,01$, usando $Bi = 0,001$ e 200 autovalores.....	107

Figura 16 - Distribuição das concentrações média, parede e interface para $LE = 1000$, $Fac = 0,01$, usando $Bi = 0,001$ e 200 autovalores.....	107
Figura 17 - Número de Nusselt ao longo do comprimento longitudinal para $LE = 1000$, $Fac = 0,01$, usando $Bi = 0,001$ e 200 autovalores.	108
Figura 18 - Número de Sherwood ao longo do comprimento longitudinal para $LE = 1000$, $Fac = 0,01$, usando $Bi = 0,001$ e 200 autovalores.....	108
Figura 19 - Temperatura média adimensional em função da posição X , variando o número de Biot de 0,001 a 1000 ($LE = 1000$ e $Fac = 0,01$).	116
Figura 20 - Concentração média adimensional em função da posição X , variando o número de Biot de 0,001 a 1000 ($LE = 1000$ e $Fac = 0,01$).	117
Figura 21 - Temperaturas adimensionais em função da posição X ($Bi = 10$, $LE = 1000$ e $Fac = 0,01$).....	118
Figura 22 - Concentrações adimensionais em função da posição X ($Bi = 10$, $LE = 1000$ e $Fac = 0,01$).....	118
Figura 23 - Distribuição das espessuras de camada limite térmica e de concentração com espessura variável para $LE = 1000$, $Fac = 0,01$, usando $Bi = 0,001$ e 55 autovalores.	125
Figura 24 - Distribuição das temperaturas média, parede e interface com espessura variável para $LE = 1000$, $Fac = 0,01$, usando $Bi = 0,001$ e 55 autovalores.....	125
Figura 25 - Distribuição das concentrações média, parede e interface com espessura variável para $LE = 1000$, $Fac = 0,01$, usando $Bi = 0,001$ e 55 autovalores.....	126
Figura 26 - Desenho Esquemático da distribuição dos fluidos de vapor d'água e da solução líquida BrLi-H ₂ O descendente do duto em estudo (ANDRADE, 2018).....	129
Figura 27 - Diagrama esquemático do set-up para estudo experimental do escoamento da película descendente no processo de absorção (Imagem Adaptada de MEDRANO, 2000).	130
Figura 28 - Distribuição das temperaturas média, parede e interface adimensionais para $LE = 102,31$, $Fac = 0,006506$, usando $Bi = 0,001$ e 55 autovalores.	145
Figura 29 - Distribuição das concentrações média, parede e interface para $LE = 102,31$, $Fac = 0,006506$, usando $Bi = 0,001$ e 55 autovalores.	146
Figura 30 - Distribuição das temperaturas média, parede e interface adimensionais para $LE = 102,31$, $Fac = 0,006506$ usando $Bi = 1000$ e 30 autovalores.	153
Figura 31 - Distribuição das concentrações média, parede e interface adimensionais para $LE = 102,31$, $Fac = 0,006506$ usando $Bi = 0,001$ e 30 autovalores.	154

Figura 32 - Temperatura em função da distância do menisco superior, para alumínio sobre o volante de cobre, sendo as posições de 4, 17, 55, 87 e 114 μm (topo da fita).	183
Figura 33 - Localização vertical da interface como função da distância do menisco superior, para alumínio sobre volante de cobre com variação do coeficiente de transferência de calor.	184
Figura 34 - Velocidade da interface como função da distância do menisco superior, para alumínio sobre volante de cobre.	185

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resumo das soluções analíticas, numéricas e experimentais de absorção de filme descedente em uma parede.	39
Tabela 2 - Espessura da camada limite hidrodinâmica em função da posição x [m] ao longo da placa.	75
Tabela 3 - Espessura da camada limite hidrodinâmica da posição x [m] ao longo da placa.	76
Tabela 4 - Comparação da temperatura da interface [°C] ao longo da posição x [m] na placa com resultados obtidos por NAVEIRA (2006), SEYYEDI et al. (2019) e com a equação de Blasius.	76
Tabela 5 - Concentração média ao longo da posição na placa.	80
Tabela 6 - Convergência de temperatura média adimensional ao longo da posição X para parede adiabática ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$).	104
Tabela 7 - Distribuição das temperaturas na parede e interface ao longo da posição X para parede adiabática ($Bi = 0,001$; $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$).....	105
Tabela 8 - Distribuição das concentrações na parede e interface ao longo da posição X para parede adiabática ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$).....	109
Tabela 9 - Convergência da Concentração Média ao longo da posição X na parede isotérmica ($Bi = 1000$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$).....	110
Tabela 10 - Distribuição das temperaturas média, parede e interface ao longo da posição X na parede isotérmica ($Bi = 1000$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$).	112
Tabela 11 - Distribuição da temperatura média adimensionalizada ao longo da posição X variando Biot ($Fac = 0,01$ e $LE = 1000$).....	113
Tabela 12 - Distribuição da concentração média adimensionalizada ao longo da posição X variando Biot ($Fac = 0,01$ e $LE = 1000$).....	115
Tabela 13 - Convergência da temperatura média adimensional ao longo da posição X ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$) com espessura variável.....	119

Tabela 14 - Distribuição das temperaturas média, parede e interface adimensionais ao longo da posição X ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$) com espessura variável usando 55 autovalores.....	120
Tabela 15 - Distribuição das espessuras da camada limite térmica e de concentração ao longo da posição X ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$) com espessura variável usando 55 autovalores.....	122
Tabela 16 - Distribuição da temperatura média adimensional ao longo da posição X variando Biot ($Fac = 0,01$ e $LE = 1000$) com espessura variável.....	123
Tabela 17 - Convergência da temperatura média adimensional ao longo da posição ξ na parede adiabática ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,006506$ e $LE = 102,31$).....	141
Tabela 18 - Distribuição das temperaturas média, parede e interface adimensionais ao longo da posição ξ na parede adiabática ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,006506$ e $LE = 102,31$).	142
Tabela 19 - Convergência da concentração média adimensional ao longo da posição ξ na parede adiabática ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,006506$ e $Lewis = 102,31$).....	143
Tabela 20 - Distribuição das concentrações média, parede e interface adimensionais ao longo da posição ξ na parede adiabática ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,006506$ e $Lewis = 102,31$).	146
Tabela 21 - Distribuição das temperaturas média, parede e interface adimensionais ao longo da posição ξ ($Bi = 1000$, $Fac = 0,00506$ e $Lewis = 102,31$).....	147
Tabela 22 - Distribuição das concentrações média, parede e interface adimensionais ao longo da posição ξ ($Bi = 1000$, $Fac = 0,006506$ e $Lewis = 102,31$).....	149
Tabela 23 - Distribuição da temperatura média adimensional ao longo da posição ξ variando Biot ($Fac = 0,006506$ e $Lewis = 102,31$).....	150
Tabela 24 - Distribuição da concentração média adimensional ao longo da posição ξ , variando Biot ($Fac = 0,006506$ e $Lewis = 102,31$).....	151
Tabela 25 - Dados extraídos do trabalho de WANG e MATTHYS (1992) e aplicados no estudo para comparação e validação do modelo.	179
Tabela 26 - Convergência da temperatura que se refere à distância de $114 \mu\text{m}$ da base da poça, com espessura da fita igual a $114 \mu\text{m}$	181
Tabela 27 - Comportamento das temperaturas da curva de referência à espessura da fita igual a $114 \mu\text{m}$ para as posições $21 \mu\text{m}$, $68 \mu\text{m}$ e $114 \mu\text{m}$, ao longo da posição $x(m)$	182

LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS

CFC	Clorofluorcarbono
CFD	Dinâmica dos Fluidos Computacional (sigla da expressão em inglês <i>Computational Fluid Dynamics</i>)
CITT	Técnica da Transformada Integral Clássica
CSF	Força Superficial Contínua
FAC	Fator de Acoplamento
GITT	Técnica da Transformada Integral Generalizada (sigla da expressão em inglês <i>Generalized Integral Transform Technique</i>)
LiBr	Brometo de Lítio
LiBr-H2O	Mistura de Brometo de Lítio / Água
PVI	Problema de Valor Inicial
R-KSM	<i>Runge-Kutta shooting</i>
VOF	Volume de Fluido

SÍMBOLOS

AC_{ijk}	Coeficiente da transformação integral campo de concentração
ACF_{ik}	Coeficiente da transformação integral campo de concentração
AP_{jk}	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
AT_{ijk}	Coeficiente da transformação integral campo térmico
ATF_{ik}	Coeficiente da transformação integral campo térmico
AV_{ijk}	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
BC_{ik}	Coeficiente da transformação integral campo de concentração
BP_k	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico

BT_{ij}	Coeficiente da transformação integral campo térmico
$BT F_i$	Coeficiente da transformação integral campo térmico
BV_{ij}	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
Bi	Número de <i>Biot</i>
CC_{ijk}	Coeficiente da transformação integral campo de concentração
CCF_{ik}	Coeficiente da transformação integral campo de concentração
$CC1_{ij}$	Coeficiente da transformação integral campo de concentração
$CC2_{ij}$	Coeficiente da transformação integral campo de concentração
$CC3_i$	Coeficiente da transformação integral campo de concentração
$CC4_i$	Coeficiente da transformação integral campo de concentração
C_{PL}	Calor específico à pressão constante da região líquida [J/kg K]
CP_{jk}	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
C_{PS}	Calor específico à pressão constante da região sólida [J/kg K]
CT_{ijk}	Coeficiente da transformação integral campo térmico
CTF_{ijk}	Coeficiente da transformação integral campo térmico
$CT1_{ij}$	Coeficiente da transformação integral campo térmico
$CT2_{ij}$	Coeficiente da transformação integral campo térmico
$CT3_i$	Coeficiente da transformação integral campo térmico
$CT4_i$	Coeficiente da transformação integral campo térmico
CV_{ijk}	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
C	Concentração
DC_{ik}	Coeficiente da transformação integral campo de concentração
DP_k	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
DT_{ij}	Coeficiente da transformação integral campo térmico
$DT F_i$	Coeficiente da transformação integral campo térmico
DV_{ij}	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
EC_{ijk}	Coeficiente da transformação integral campo de concentração
EP_k	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico

ET_{ijk}	Coeficiente da transformação integral campo térmico
EV_{ij}	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
FC_{ijk}	Coeficiente da transformação integral campo de concentração
FF_i	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
FT_{ijk}	Coeficiente da transformação integral campo térmico
FV_i	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
$F_i(\eta)$	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
$FFT(\chi, \eta_t)$	Filtro utilizado na homogeneização das condições de contorno – campo térmico
$GC1_{ik}$	Coeficiente da transformação integral campo de concentração
$GC2_{ik}$	Coeficiente da transformação integral campo de concentração
GT_{ik}	Coeficiente da transformação integral campo térmico
GV_{ijk}	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
$G(\eta)$	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
h_c	Coeficiente de transferência de calor por convecção
HH_i	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
HT_{ij}	Coeficiente da transformação integral campo térmico
HV_{ijk}	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
$H_i(\eta)$	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
IT_{ij}	Coeficiente da transformação integral campo térmico
IV_{ik}	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
JT_{ij}	Coeficiente da transformação integral campo térmico
JV_{ij}	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
K_L	Condutividade térmica do material na região líquida
K_S	Condutividade térmica do material na região sólida
Le	Número de Lewis
LT_i	Coeficiente da transformação integral campo térmico
LV_{ij}	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico

MV_i	Coeficiente da transformação integral campo hidrodinâmico
Nu	Número de Nusselt
Pe	Número de Peclet
Pr	Número de Prandtl
q_c	Calor por convecção
q_k	Calor por condução
Re	Número de Reynolds
Sc	Número de Schmidt
T	Temperatura [K]
T_0	Temperatura inicial dimensional do processo
T_∞	Temperatura dimensional do processo do ambiente e do volante
U	Velocidade longitudinal adimensional
$U(\chi, \eta)$	Velocidade longitudinal adimensional
$U^*(\chi, \eta)$	Velocidade longitudinal adimensional filtrada
$\overline{U}_j^*(\chi)$	Potencial transformado da velocidade
$UF(\eta)$	Filtro utilizado na homogeneização das condições de contorno – campo hidrodinâmico
$V(\chi, \eta)$	Velocidade transversal adimensional
V	Velocidade transversal adimensional
V_w	Velocidade linear do volante
x	Variável adimensional de comprimento
x^*	Variável dimensional de comprimento
y	Variável adimensional de comprimento
y^*	Variável dimensional de comprimento
W	Concentração adimensional
$W(\chi, \eta_c)$	Concentração adimensional
$\overline{W}_j(\chi)$	Potencial transformado da concentração

Símbolos Gregos

α	Coeficiente de transferência de calor [W/m K]
ΔH	Calor latente de mudança de fase do metal
δ	Espessura de camada limite hidrodinâmica adimensional
δ^*	Espessura de camada limite hidrodinâmica
δ_c	Espessura de camada limite de concentração adimensional
δ_c^*	Espessura de camada limite de concentração
δ_t	Espessura de camada limite térmica adimensional
δ_t^*	Espessura de camada limite térmica
η	Variável da transformação de domínio para o campo hidrodinâmico
η_c	Variável da transformação de domínio para o campo de concentração
η_t	Variável da transformação de domínio para o campo térmico
$\theta(\chi, \eta_t)$	Temperatura adimensional
$\theta^*(\chi, \eta_t)$	Temperatura adimensional filtrada
φ	Autofunções do problema auxiliar do campo hidrodinâmico
$\tilde{\varphi}$	Autofunções do campo hidrodinâmico normalizado
Θ	Autofunções do problema auxiliar do campo térmico
$\tilde{\Theta}$	Autofunções do campo hidrodinâmico normalizado
ς	Autofunções do problema auxiliar do campo mássico
$\tilde{\varsigma}$	Autofunções do campo mássico normalizado
Γ	Autofunções do problema auxiliar do campo de temperatura
$\tilde{\Gamma}$	Autofunções da temperatura normalizada
ψ	Autofunções do problema auxiliar do campo de temperatura
$\tilde{\psi}$	Autofunções da temperatura normalizada
Φ	Autofunções do problema auxiliar da concentração
$\tilde{\Phi}$	Autofunções do campo de concentração normalizado
ϕ	Autofunções do problema auxiliar da concentração

$\tilde{\Phi}$	Autofunções do campo de concentração normalizado
χ	Variável adimensional de comprimento
β_i	Autovalores associados ao campo hidrodinâmico
Ω_i	Autovalores associados ao campo térmico
λ_i	Autovalores associados ao campo de concentração
γ_i	Autovalores associados ao campo de Temperatura
ε_i	Autovalores associados ao campo de Concentração
μ_i	Autovalores associados ao campo de Temperatura
ω_i	Autovalores associados ao campo de Concentração

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 PROBLEMA PROPOSTO

A situação energética global apresenta alguns desafios devido à escassez de recursos energéticos e o aumento dos impactos ambientais causados pelas emissões de CO₂, acarretando custos elevados na oferta da energia. Em razão disso, faz-se necessária a utilização racional e otimizada da energia disponível.

Os sistemas produtivos (alto consumidores de energia) devem demandar menos recursos naturais, mantendo-se a produção, e, ao mesmo tempo, sendo mais eficientes, contribuindo, assim, para o desenvolvimento sustentável.

O sistema de refrigeração por compressão a vapor representa uma parcela significativa no consumo de energia elétrica. Desta forma, a fim de diminuir tal consumo, os sistemas de refrigeração por absorção têm atraído cada vez mais interesse, por serem menos agressivos ao meio ambiente e, principalmente, por diminuir consideravelmente o consumo de energia.

No intuito de aumentar o número de máquinas utilizando a refrigeração por absorção, faz-se necessário realizar mais pesquisas, no intuito de melhorar o rendimento e eficiência dessas máquinas, além de proporcionar melhorias no controle do processo.

A diferença do sistema de compressão a vapor e o de absorção está na forma do aumento da pressão no fluido refrigerante. No sistema tradicional, utiliza-se um compressor, enquanto no sistema por absorção é utilizada uma bomba de líquido, um absorvedor, um trocador de calor e um gerador de vapor. Este conjunto faz a função do compressor no

sistema tradicional, por essa razão é normalmente chamado de compressor térmico ou compressor termoquímico (DORGAN, LEIGHT e DORGAN, 1995).

No sistema de refrigeração por absorção, o principal componente é o absorvedor, o qual tem um papel crítico no custo e no desempenho dos ciclos de refrigeração por absorção e nos sistemas de bomba de calor de absorção. A absorção de vapor d'água por um absorvente, comumente o Brometo de Lítio (LiBr) mais solução aquosa, é encontrada em muitas aplicações em diferentes setores da indústria.

As principais aplicações envolvendo o fenômeno de absorção são os sistemas de condicionamento de ar, conservação de alimentos, purificação de água e dessalinização.

O processo de absorção é complexo devido à transferência simultânea de calor e massa acontecendo no fluxo de duas fases absorvente e refrigerante e a relação de equilíbrio na interface líquido-vapor.

O absorvedor de filme descendente é um equipamento chave no ciclo de refrigeração por absorção, onde o refrigerante absorvido por uma solução absorvente é dessorvido a montante em um processo altamente endotérmico, produzindo o efeito de refrigeração.

O filme descendente é encontrado em uma variedade de processos industriais que envolvem transferência simultânea de calor e massa, como absorção, dessorção, evaporação e destilação. Geralmente, o princípio de funcionamento do filme descendente consiste em um tubo ou placa, onde o líquido flui para baixo por gravidade, sob condições controladas, formando uma fina película de líquido em suas paredes.

A principal vantagem deste dispositivo é a grande superfície de contato da fina camada de líquido em queda, que permite altas taxas de transferência de calor e massa entre as fases líquida e vapor, exigindo um pequeno fluxo de líquido (TELEKEN, 2013). Dependendo da aplicação, o líquido pode evaporar ou o vapor pode ser absorvido ou dessorvido.

Este estudo tem o propósito de modelar, simular e analisar os absorvedores horizontais e verticais de filme descendente formados pela solução de Brometo de Lítio e água resolvidos por meio da técnica da transformada integral generalizada, a fim de obter alternativas para diminuição do consumo elétrico e a redução dos impactos ambientais provocados pela refrigeração tradicional.

1.2 JUSTIFICATIVA

No mundo atual, o bem-estar e o conforto térmico são necessidades sociais imprescindíveis. Isto acarreta um elevado consumo elétrico e o aumento das emissões de gases geradores do efeito estufa.

Segundo dados do IEO 2016 - DOE/IEA - estima-se que o consumo energético total e de eletricidade em 2040 alcance o valor de 239×10^{12} kWh e $36,5 \times 10^{12}$ kWh, respectivamente, de modo que se torna imperiosa o desenvolvimento de novas fontes de energia elétrica convencionais e/ou renováveis, ou a melhoria da eficiência das máquinas, a exemplo do sistema de refrigeração.

O retorno das pesquisas em refrigeração por absorção foi impulsionado em razão das metas de substituição dos gases refrigerantes à base de Clorofluorcarbono (CFC), conforme previsto nos PROTOCOLOS DE MONTREAL (1987) e KYOTO (1997).

Comparando com o sistema de refrigeração por compressão de vapor, tem-se que o sistema de refrigeração por absorção é considerado uma ótima alternativa para diminuição do consumo de energia elétrica.

O absorvedor de filme descendente oferece a vantagem de ser um equipamento compacto, portanto pode ser integrado a outras operações unitárias em um único equipamento, a fim de aumentar a absorção/dessorção. O absorvedor de filme descendente consiste em um tubo ou placa onde o líquido flui para baixo por gravidade sob condições específicas, formando um filme líquido fino em suas paredes.

Tem-se, então, que é possível obter uma grande superfície de contato devido à fina camada de líquido em queda, o que permite aumentar as taxas de transferência de calor e massa entre as fases líquida e vapor (ROSA, 2021).

A modelagem matemática do absorvedor de filme descendente tem enorme importância industrial, pois permite o monitoramento do processo, o desenvolvimento de estratégias para melhorar o processo de absorção e aumentar as taxas de absorção com base na otimização e controle das condições de operação.

1.3 CICLO DE REFRIGERAÇÃO POR ABSORÇÃO

Em um ciclo de refrigeração por absorção, tem-se que o calor é usado como a energia motriz para transferência da pressão baixa para alta. Nos ciclos de refrigeração por absorção, faz-se necessária a utilização de uma quantidade menor de energia, comparado com o ciclo tradicional de refrigeração por compressão de vapor, para obtenção do mesmo resultado.

A grande vantagem de utilizar a mistura de Brometo de Lítio-Água ($\text{LiBr-H}_2\text{O}$) é a condição não tóxica do Brometo de Lítio, sendo, portanto, mais apropriado para o condicionamento de ar. Neste caso, o Brometo de Lítio é o absorvente e a água é o refrigerante, tornando sua aplicação limitada em razão de seu ponto de congelamento.

O efeito refrigerante de um sistema de absorção é produzido pelo uso da energia térmica, a qual, para que se torne economicamente viável, deve ser fornecida por uma fonte barata, estando em uma entre 100 e 200°C, conforme explanou ÇENGEL E BOLES (2006). São exemplos dessas fontes: a energia geotérmica, a energia solar, o calor rejeitado pelas usinas de cogeração ou de instalações de vapor para processos, e até mesmo o gás natural, desde que disponível a um preço baixo.

A Figura 1, a seguir disposta, demonstra o esquema de um ciclo de refrigeração por absorção de simples efeito, o qual será esmiuçado nesta oportunidade. Neste ciclo, o compressor de um ciclo de compressão de vapor equivalente é substituído pelos componentes circundados pela linha tracejada azul na referida figura. Veja-se:

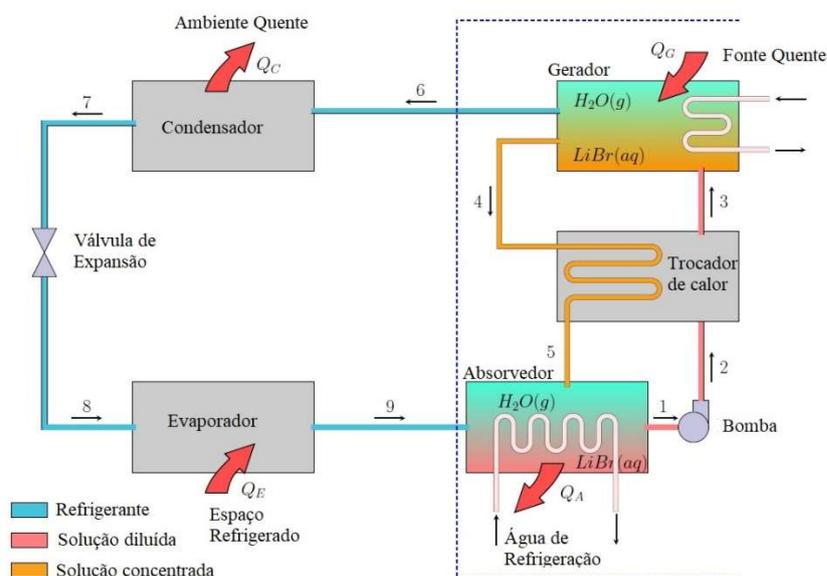


Figura 1 - Ciclo de Refrigeração por Absorção (Adaptada de HAVESTINI, 2021.)

Note-se que, em um ciclo de absorção de simples efeito, o absorvente e o refrigerante são gerados em uma única etapa e este ciclo é a configuração de ciclo de absorção mais simples.

Analisando a presente figura, tem-se que a solução, LiBr, inicialmente, circula entre o absorvedor de baixa pressão e o gerador de alta pressão. No absorvedor, uma solução forte (pobre em refrigerante) absorve o vapor do refrigerante, tornando-se concentrada em refrigerante (Ponto 1).

Ao sair do absorvedor, por meio da bomba (Ponto 2), a solução passa pelo trocador de calor, oportunidade em que troca energia com a solução quente que sai do gerador. No ponto 3, a solução entra no gerador e, ao receber calor, parte do refrigerante sai do gerador na forma de vapor (Ponto 6). Este processo faz com que a solução que flui de volta para o absorvedor seja mais forte em absorvente (Ponto 4).

No circuito de refrigerante, o refrigerante de vapor (vapor de água) deixa o gerador em alta temperatura e rejeita o calor que passa pelo condensador (Pontos 6 a 7). O refrigerante líquido sub-resfriado é direcionado ao evaporador após estrangulamento por meio da válvula de expansão e sofre uma queda de pressão (Ponto 8).

No evaporador, o refrigerante recebe calor e se transforma em vapor antes de entrar no absorvedor (Ponto 9). Dando continuidade ao ciclo, tem-se que, no absorvedor, o vapor é absorvido pela solução forte proveniente do gerador (Ponto 5).

Mister se faz considerar que o absorvedor tem um impacto crítico no desempenho, custo e tamanho do sistema de um ciclo de refrigeração por absorção. A hidrodinâmica do fluxo em um absorvedor pode afetar em grande medida o seu desempenho. Além disso, os fenômenos complexos de transferência de calor e massa durante a absorção de vapor na solução exigem um entendimento completo do fluxo bifásico multicomponente.

Os absorvedores de filme descendente receberam maior atenção e visibilidade, comparado com outros tipos de absorvedores, em razão de possuírem maiores taxas de transferência de massa e calor. Nesse caso, tem-se que o desempenho do absorvedor pode ser melhorado se o filme líquido for misturado e as áreas da superfície interfacial forem aumentadas.

Para ideal compreensão das melhorias de desempenho do absorvedor, necessário se faz conceituar a principal diferença entre a condensação de vapor e a absorção, que se demonstra na relação de equilíbrio na interface de fase. Na condensação, a relação de equilíbrio é estabelecida entre a temperatura e a pressão do vapor, enquanto na absorção, além da temperatura e da pressão, a fração mássica da solução também é um dos fatores que contribuem para a condição de equilíbrio.

Na absorção, percebe-se que quando o vapor é absorvido na solução líquida, o calor de absorção é liberado devido à mudança de fase vapor-líquido e à diluição do vapor d'água na solução líquida. Este calor é dependente da massa interfacial absorvida e a fração de massa dos componentes da solução está relacionada à temperatura da interface. Depreende-se do exposto que tanto a transferência de massa quanto a transferência de calor na interface controlam a temperatura da interface líquido-vapor e a fração de massa.

Na absorção sobre placas verticais ou dentro de canais verticais, uma película fina de solução composta por dois componentes flui para baixo em uma parede fria. Quando o vapor do refrigerante entra em contato com o filme líquido, conforme demonstra a Figura 2, a diferença da fração de massa do refrigerante no vapor e no filme líquido causa a absorção do refrigerante na interface líquido-gás.

É preciso considerar que o refrigerante pode estar em uma temperatura mais baixa do que o filme líquido e a parede; nesse cenário, as diferenças de temperatura entre a parede fria, o filme líquido e o vapor mais a liberação do calor de absorção na interface se combinam para causar gradientes de temperatura entre as fases líquida e gasosa e entre a parede e a interface.

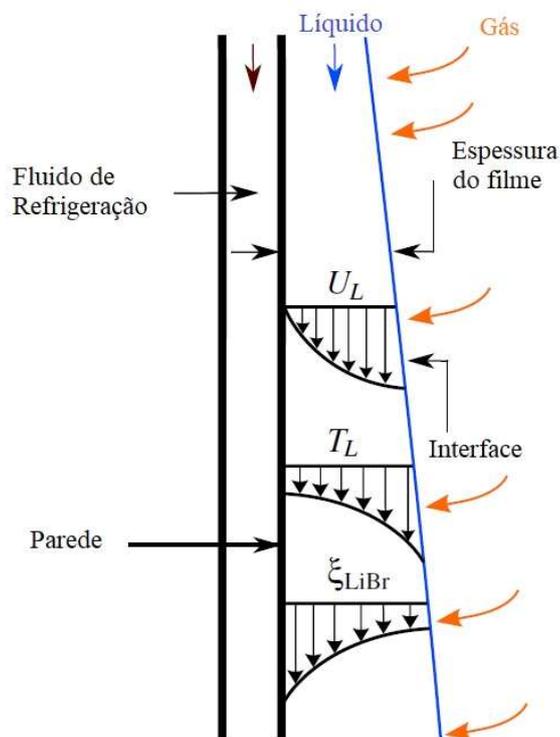


Figura 2 - Diagrama esquemático da absorção de LiBr-H₂O sobre uma parede fria.

(Adaptada de HAVESTINI, 2021.)

Depreende-se do demonstrado na figura que, enquanto a energia está sendo transferida para a parede fria, a temperatura muda no filme líquido e na fase gasosa, o que também se observa em relação à fração de massa das espécies. A adição de massa de refrigerante ao líquido faz com que o filme líquido cresça ao longo da placa, fazendo com que, na saída da placa fria ao final do processo de absorção, a solução esteja mais rica em refrigerante.

Analisando a absorção em tubos horizontais resfriados internamente, percebe-se a ampla utilização em bombas de calor de absorção e *chillers*. A Figura 3 mostra um diagrama esquemático de um filme líquido LiBr-H₂O em torno de um tubo. Na prática, os tubos são geralmente localizados um em cima do outro, formando um banco de tubos alinhados. Conforme se demonstra:

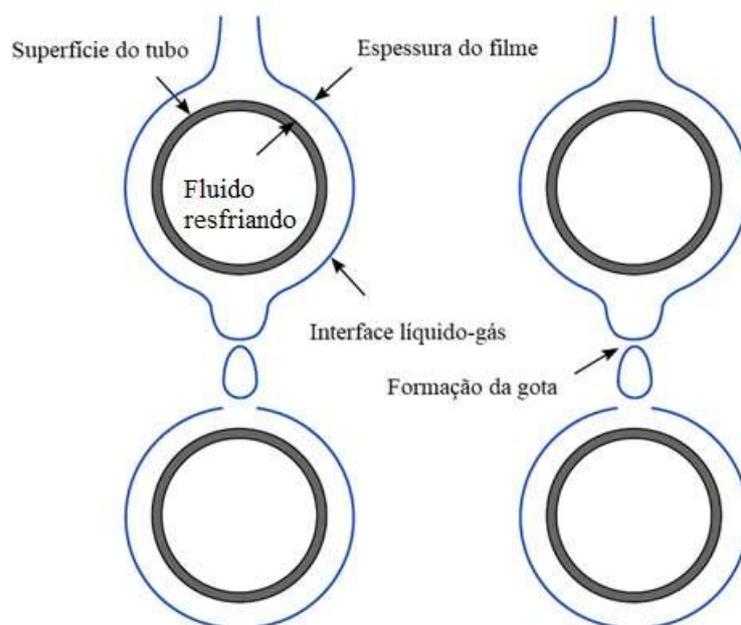


Figura 3 - Diagrama esquemático da absorção de LiBr-H₂O em tubos horizontais.

(Adaptada de HAVESTINI, 2021.)

Embora a absorção de filme descendente sobre tubos horizontais tenha sido utilizada por décadas em muitas aplicações, os recursos detalhados desses sistemas que podem ser usados para fins de projeto não foram totalmente compreendidos. Em absorvedores de tubos horizontais, a solução é pulverizada sobre os tubos a partir da parte superior do absorvedor e o vapor do refrigerante flui para o absorvedor. O filme líquido com uma espessura inicial

flui sobre o tubo sob o efeito da gravidade, enquanto o fluido de resfriamento flui para dentro do tubo.

Portanto, verifica-se que a geometria do tubo, a forma do filme líquido ao redor do tubo, especialmente na parte superior e inferior do tubo, o umedecimento da superfície do tubo e a formação de gotículas entre os tubos aumentam a complexidade dos fenômenos de absorção nos tubos.

1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O absorvedor de filme descendente tem sido amplamente estudado analiticamente, numericamente e experimentalmente por vários pesquisadores, no intuito de fornecer ferramentas úteis para um melhor projeto de absorvedores de filme descendente aplicados aos sistemas de refrigeração por absorção.

Os fluidos de trabalho de absorção mais convencionais são a amônia/água (volátil) e as misturas água/Brometo de Lítio (não volátil), os quais representam os principais pares absorvato-adsorventes, sendo utilizados como absorvedores industriais. Ambas as misturas apresentam vantagens e desvantagens, motivo pelo qual seu uso é direcionado para diferentes aplicações, a depender das especificidades de cada uma.

Esforços significativos têm sido feitos para modelar a transferência simultânea de calor e massa em fluxos de filme laminar ($Re_L < 20$), ondulado ($20 < Re_L < 200$) e turbulento ($Re_L > 200$), conforme definido em KILLION E GARIMELLA (2001). Especificamente nessa tese, considerou-se apenas absorvedores com escoamento laminar que utiliza o par Brometo de Lítio/água ($LiBr - H_2O$), por não ser necessário um retificador no projeto do ciclo, além de possuir um calor de vaporização extremamente alto e, portanto, têm temperaturas de condução mais baixas que o par amônia/água.

Nesta revisão, os estudos de absorção de filme descendente são categorizados nos três grupos principais de estudos analíticos, numéricos e experimentais.

NAKORYAKOV E GRIGOR'EVA (1977) estudaram em uma placa vertical isotérmica a absorção do filme descendente laminar, usando o modelo analítico de similaridade, considerando a velocidade do filme em fluxo uniforme e a espessura do filme constante. Os termos de difusão e advecção na direção do fluxo foram desprezados e um perfil linear de temperatura foi obtido para o filme. Na oportunidade, aplicaram na interface uma relação de equilíbrio linear entre a temperatura e a fração de massa. Nesse estudo,

concluíram que a solução para o problema de absorção era dependente das condições de contorno e de entrada, bem como dos números de Lewis, Prandtl e Reynolds e de um número adimensional que relacionava o calor específico de solução e o calor de absorção denominado de Fator de Acoplamento (FAC).

GRIGOR'EVA E NAKORYAKOV (1977) resolveram as equações governantes de forma analítica usando uma expansão em série de autofunções para solucionar as equações diferenciais parciais acopladas com perfil de velocidade uniforme e espessura de filme constante. As soluções obtidas permitiram calcular o fluxo de calor e massa por meio da superfície do filme, o fluxo de calor por meio da parede sólida, bem como a temperatura e concentração médias ao longo da seção transversal, encontrando valores compatíveis com dados disponíveis na literatura.

GROSSMAN (1982) desenvolveu um modelo numérico para resolver as equações simplificadas de energia e fração de massa para um filme descendente de LiBr-H₂O em uma parede inclinada adiabática ou de temperatura constante (isotérmica). Um perfil de velocidade parabólico completamente desenvolvido foi usado em todo o filme líquido. Para desenvolver seu estudo, o autor assumiu uma condição de equilíbrio linear e um calor constante de absorção na interface líquido-vapor. Usando um método de linhas ou método de semidiscretização por meio do método de diferenças finitas, os resultados da temperatura e concentração adimensionais da interface e da seção transversal foram produzidos e obtiveram bons resultados com a literatura.

GROSSMAN (1983) usou uma expansão em série e um método de solução de similaridade para simular a absorção de queda do filme sobre uma parede isotérmica ou adiabática, para tanto, resolveu as equações governantes simplificadas para a fase líquida apenas com uma absorção de calor constante. O autor afirmou que a variação da temperatura e das frações de massa dos componentes dependia do número de Lewis e do calor de absorção adimensional. Nestes estudos, a espessura de filme foi considerada constante e a condição de equilíbrio linear foram utilizadas enquanto o cisalhamento interfacial, a convecção na direção y e a difusão de massa nas equações de energia foram desprezadas.

ANDBERG (1986) estendeu seu modelo numérico para a absorção de película descendente de LiBr-H₂O sobre feixes de tubos horizontais. As aproximações da camada limite foram usadas para simplificar as equações de continuidade, quantidade de movimento, energia e fração de massa para resolver o problema dos tubos superiores e internos de um

absorvedor. Destaca-se, nesse cenário, que, devido à geometria complexa, foram usadas coordenadas ajustadas ao corpo.

Por meio de seus estudos, o autor chegou às seguintes conclusões: a diluição da água no filme líquido não é infinita e uma condição de contorno adequada deve ser usada para a difusão da água por meio da interface do líquido. O calor de absorção foi dado em função da temperatura e concentração da solução. Resultados numéricos para velocidade de líquido, perfis de temperatura e concentração, bem como fluxos de calor e massa foram apresentados. Os resultados estavam de acordo com os resultados experimentais.

ANDBERG E VLIET (1987) apresentaram um modelo simplificado para absorção de vapor em filmes líquidos escoando sobre tubos horizontais. O filme líquido entrou em contato com a superfície do tubo como um jato plano com condições de entrada de velocidade, temperatura e concentração de massa uniformes.

Os autores simplificaram a equação da quantidade de movimento para usar uma solução de Nusselt com mudança do ângulo de gravidade, conforme o cálculo avança ao longo da superfície do tubo, e usaram uma equação de continuidade para obtenção de uma equação para a velocidade de amplitude. A equação da energia parabólica era resolvida numericamente usando um método de diferenças finitas com *upwind* em um método de Crank-Nicholson e a fração de massa foi obtida por uma solução de similaridade. Os resultados numéricos obtidos concordaram fortemente com os dados experimentais, com erro médio de 7,5%.

NOMURA et al. (1993) mediu a temperatura da solução ao longo e entre os tubos e a capacidade de resfriamento do absorvedor em diferentes taxas de fluxo de massa da solução de LiBr usando um dispositivo absorvedor tendo a mesma construção dos refrigeradores de absorção existentes. O experimento revelou que o aumento de 1°C na temperatura do vapor de água causa cerca de 5 a 8% de aumento na capacidade de refrigeração. Os autores notaram um aumento significativo da temperatura da solução (2°C) entre os tubos e concluíram que, como não existia calor externo, o aumento da temperatura é o resultado da absorção do vapor de água na solução enquanto cai de um tubo para o próximo tubo.

WASSENAAR (1994) desenvolveu, na sua tese de doutorado, ferramentas numéricas para o projeto de trocadores de calor e massa com o intuito de obter uma melhor relação preço-desempenho. Para tanto, utilizou-se do método de elementos finitos de Galerkin e seus resultados foram apresentados em forma de gráficos.

COLINSK E MAO (1996) apresentaram uma solução analítica para absorção de um gás de dois componentes a um filme líquido de $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{O}$ em um tubo horizontal, oportunidade em que enfatizaram a dependência da absorção das características da fase de vapor. Devido à pequena espessura do filme em comparação com o raio do tubo, os termos de curvatura foram desprezados nas equações de Navier-Stokes e a equação da quantidade de movimento foi simplificada para o perfil de velocidade de Nusselt. Os autores obtiveram uma equação para a variação da espessura do filme em função da posição do filme na circunferência do tubo. As equações de fração de massa e temperatura foram resolvidas analiticamente, por meio da adoção de uma transformada de Fourier. Os resultados analíticos sugeriram que a absorção é mais rápida na parte superior do tubo, onde o filme está se afinando, em comparação ao fundo do tubo. A utilização da mistura $\text{LiBr-H}_2\text{O}$ foi também considerada como um caso especial.

HOFFMANN et al. (1996) correlacionou o coeficiente de transferência de calor com mudanças na viscosidade cinemática e tensão superficial para uma solução aquosa de LiBr fluindo sobre um absorvedor de tubo horizontal. A análise de erro dos dados medidos gerou um erro em torno de 19% para o coeficiente de transferência de calor resultante. Ao final, os autores chegaram às conclusões: os dados experimentais revelaram que o coeficiente de transferência de calor aumenta com o aumento da taxa de fluxo de massa da solução em uma concentração específica, bem como com a diminuição da viscosidade devido à mudança de concentração em uma taxa de fluxo específica.

MIN E CHOI (1999) aplicaram o algoritmo SIMPLER nas equações elípticas da quantidade de movimento, temperatura e concentração para modelar o filme em queda livre da solução LiBr sobre um único tubo isotérmico. A solução numérica foi realizada em duas etapas, sendo elas: primeiramente, as equações de continuidade e momentum foram resolvidas em uma grade ortogonal sobre as duas fases para determinar a localização da superfície livre usando o método MAC. Em segundo lugar, as equações de energia e concentração foram resolvidas na fase líquida apenas usando uma grade não ortogonal, combinando com a superfície livre obtida na primeira etapa. O exame dos efeitos da tensão superficial para o número de Reynolds de 16,7 e 166,7 mostrou que no número de Reynolds inferior, o modelo numérico sem tensão superficial foi incapaz de prever a região de recirculação próxima ao ponto de estagnação superior do tubo e resultou em uma película muito fina, enquanto teve efeito insignificante em um número de Reynolds mais alto.

Observou-se que a consideração da tensão superficial altera as características de transferência de massa e a taxa de absorção de massa, especialmente em vazões mais baixas.

FRANCÉS E OJER (2003) usaram uma abordagem matemática para modelar a absorção do filme descendente de LiBr-H₂O em um absorvedor composto por 14 tubos horizontais. No modelo matemático, a solução de velocidade de Nusselt completamente desenvolvida foi assumida e o efeito do vapor no filme líquido foi desprezado. Com base na suposição de mistura completa entre os tubos, a temperatura da solução de entrada e a concentração de cada tubo foram consideradas uniformes. O modelo previu a carga de calor e o coeficiente de transferência de calor com precisão, mas não teve um bom desempenho na previsão de transferência de massa. Notou-se que a resistência na fase de vapor produzida por gases não absorvíveis e os termos de acoplamento na interface devem ser considerados nas simulações numéricas para tornar a transferência de massa mais precisa.

ISLAM, WIJEYSUNDERA e HO (2004) desenvolveram um modelo acoplado linearizado para a transferência de calor e massa em absorvedores de filme descendente. As expressões analíticas resultantes do modelo linearizado são utilizadas para extrair os coeficientes de transferência de calor e massa dos dados experimentais para absorvedores tubulares horizontal e vertical. Os coeficientes de transferência de massa obtidos usando o modelo linearizado e a formulação LMD concordam em cerca de 10%, enquanto os coeficientes de transferência de calor mostraram grandes diferenças. O número de Nusselt e de Sherwood para o absorvedor tubular aumentam com o aumento do número de Reynolds do filme e da temperatura da água de resfriamento de entrada. As previsões da distribuição da temperatura da água de resfriamento dentro do absorvedor pelo modelo linearizado concordam bem com as medições realizadas.

KILLION e GARIMELLA (2004) apresentaram um método numérico para investigar a formação de gotas e o impacto sobre tubos horizontais. O pacote CFD (sigla da expressão em inglês *Computational Fluid Dynamics*), usando o Fluent para modelar um filme LiBr em contato com ar. Um método de Volume de Fluido (VOF) foi usado para rastrear a superfície livre entre o filme de líquido e ar. A abordagem de Força Superficial Contínua (CSF) foi usada para modelar a tensão superficial. Uma equação de continuidade modificada (incluindo a fração de volume da fase gasosa) e equações de *momentum* para o filme líquido foram resolvidas usando o método PISO de forma segregada. Eles apresentaram resultados de visualização de fluxo para ilustrar o padrão de fluxo e a formação de gotículas.

BABADI e FARHANIEH (2005) realizaram um estudo numérico do fenômeno de transferência de calor e massa no processo de absorção de LiBr-H₂O em um tubo horizontal. Eles realizaram a solução numérica para uma condição operacional realista de um absorvedor. Os números de Reynolds, Prandtl e Schmidt foram usados para obter os coeficientes de transferência de calor e massa. Os resultados numéricos foram comparados aos resultados experimentais fornecidos por ANDBERG e VLIET (1983). Usando os dados numéricos de sua pesquisa, eles propuseram duas correlações para estimar os coeficientes médios de transferência de calor e massa dos fenômenos de transporte ao longo do tubo com base nos números de Schmidt e Reynolds.

SEOL e LEE (2005) investigaram as características da transferência de calor e massa e o padrão de fluxo do filme líquido fluindo sobre um único tubo horizontal. O estudo mostrou que o aumento da pressão do absorvedor causou a formação de ondas no filme líquido, resultando em rupturas parciais do filme e manchas secas no tubo. Os dados experimentais mostraram um aumento linear na temperatura de saída da solução quando a temperatura de entrada da solução foi aumentada, exceto em pequenas taxas de fluxo de solução com altas pressões de absorção. A taxa de absorção foi maior para uma drenagem de fluxo em folha com taxas de fluxo de solução mais baixas. Uma placa foi colocada e ajudou a estabilizar o filme líquido e produziu menos resistência pela formação de um filme líquido mais fino.

PAPAEFTHIMIOU et al. (2006) analisaram a transferência de calor e massa em um filme líquido de LiBr sobre um único tubo horizontal resfriado. As equações de Nusselt foram usadas para determinar a espessura do filme e a velocidade do fluxo. Uma transformação de coordenadas foi aplicada para resolver a temperatura parabólica simplificada bidimensional e equações de conservação de massa usando um método de colocação de elementos finitos. As temperaturas de saída e entrada da solução foram comparadas aos resultados experimentais de SEOL e LEE (2005). Os efeitos da vazão mássica da solução, da temperatura do refrigerante e da geometria do tubo na transferência de calor e massa durante a absorção também foram investigados.

KYUNG et al. (2007) empregaram um modelo de absorção para um tubo horizontal com um filme líquido dividido em três regimes: filme descendente, formação de gota e queda de gotas. A fração de massa transformada e as equações de energia foram resolvidas usando um método de diferenças finitas em um esquema de marcha para o regime de filme descendente. As velocidades longitudinal e transversal foram obtidas por uma solução de

Nusselt e uma equação de continuidade, respectivamente. Eles concluíram que quando o filme está fluindo no topo do tubo, onde a temperatura da parede não afetou o filme, o perfil de temperatura é muito não linear. Os autores também destacaram que a temperatura da interface e a fração de massa do LiBr diminuem à medida que o filme líquido passa sobre o tubo.

ISLAM (2008) descreveu uma análise experimental e teórica do processo de transferência simultânea de calor e massa que acontece nos absorvedores de sistemas de refrigeração onde os efeitos das principais variáveis de operação são investigados experimentalmente. Um modelo matemático que leva em conta os detalhes geométricos do escoamento da solução e do refrigerante foi desenvolvido seguindo a análise tradicional dos trocadores de calor para obter informação adicional a respeito do desempenho do absorvedor.

BO et al. (2010) simularam numericamente o processo de transferência simultânea de calor e massa através da absorção no filme descendente com a solução líquida aquosa de LiBr-H₂O para um tubo vertical usando pacote FLUENT do software CFD (Software de Dinâmica dos Fluidos Computacionais). A condição de contorno convectiva prática no lado da água de resfriamento foi considerada. O coeficiente de transferência de calor foi assumido constante, e a temperatura de resfriamento muda linearmente ao longo do escoamento. Os resultados numéricos indicaram que o perfil de temperatura é exponencial e seus gradientes são elevados devido a efeitos térmicos distintos com a absorção na interface. Foi adotado a variação das propriedades físicas do processo verificando que a taxa total de transferência de massa é 6,5% maior que em relação a propriedades constantes.

SILVA (2010) estudou o fenômeno da transferência simultânea de calor e massa em absorvedores horizontais das máquinas de refrigeração por absorção, em duas situações de interesse prático da engenharia (parede adiabática e isotérmica), considerando a espessura da película constante ao longo do escoamento. Utilizando a técnica da transformada integral generalizada para resolver o problema, encontrando resultados satisfatórios comparando com dados obtidos na literatura.

PAPAEFTHIMIOU et al. (2012) aplicaram uma abordagem numérica em um feixe de tubos. Eles descreveram as propriedades termofísicas da água de vapor superaquecido em detalhes. Seu estudo mostrou que diminuições na concentração de LiBr e na temperatura da solução foram mais significativas em taxas de fluxo de massa mais baixas da solução, quando o número de tubos foi aumentado. Eles também concluíram que em valores mais

altos de taxas de fluxo de massa da solução por comprimento do tubo, o fluxo de massa médio da solução não foi afetado pelo número de tubos se fosse maior do que o fluxo de massa médio de um terço do número total de tubos.

SILVA e SANTOS (2014) estudou o fenômeno da transferência simultânea de calor e massa em absorvedores horizontais das máquinas de refrigeração por absorção, nas paredes adiabática e isotérmica, considerando a espessura da película constante ao longo do escoamento. Utilizando a técnica da transformada integral generalizada para resolver o problema, calculando o número de Nusselt, de Sherwood e fluxo de massa na interface obtendo bons resultados comparando com dados obtidos na literatura.

MITTERMAIER, SCHULZE e ZIEGLER (2014) usaram a velocidade de fluxo uniforme constante para simplificar o modelo e facilitar a investigação dos efeitos hidrodinâmicos e termodinâmicos e uma comparação com soluções analíticas. Uma abordagem de solução parabólica iterativa foi usada para atualizar as propriedades das variáveis e obter perfis de temperatura e concentração dentro da solução de LiBr. Concluiu-se que a transferência de massa durante a absorção é visivelmente maior do que a dessorção e as propriedades não constantes e o calor diferencial da solução alteram ligeiramente os resultados.

ZHANG et al. (2015) usou o código comercial Fluent para simular a absorção de vapor d'água em uma solução de LiBr. A técnica de Volume de Controle finito e o método PISO foram usados para discretizar e resolver as equações governantes totalmente elípticas apenas no filme. Na entrada, o perfil de velocidade do filme foi assumido como completamente desenvolvido e na saída, uma condição de contorno de escoamento foi aplicada. Eles descobriram que conforme o número de Reynolds do filme aumenta, o fluxo máximo de transferência de massa ao longo da placa diminui. Eles também observaram que o coeficiente de transferência de calor reduz ao longo do filme caindo enquanto o coeficiente de transferência de massa mostra o comportamento oposto.

ARMOU et al. (2016) resolveram as equações parabólicas que regem a absorção usando um código interno de abordagem de volumes finitos. Eles modelaram o filme líquido LiBr-H₂O apenas resolvendo a continuidade, quantidade de movimento, energia e fração de massa governando as equações chegando aos mesmos resultados obtidos por ZHANG et al (2015). Eles também notaram que um aumento na pressão de entrada aumenta a temperatura na interface e o fluxo de massa.

ANDRADE (2018) apresentou uma solução para a transferência simultânea de calor e massa em absorvedores de tubos horizontais e verticais, em regime permanente, no escoamento da película descendente formada pela solução por cima do tubo horizontal e no interior do duto vertical dos absorvedores obtendo boa harmonia com resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura.

ODUNFA, ONWUKA e AJUKA (2018) aplicaram o modelo de fluxo laminar estável bidimensional dentro da espessura do filme para a parede do absorvedor e utilizaram equações de conservação de massa, energia e momento através do método de diferenças finitas com programação MATLAB para a simulação.

ARSHI e SUDHARSAN (2020) realizaram um estudo experimental e paramétrico no absorvedor de filme descendente de tubo horizontal usando solução de LiBr-H₂O, considerando a influência da densidade de pulverização, vazão de água de resfriamento, temperatura e concentração da água de resfriamento nas temperaturas da solução, temperaturas da água de resfriamento, entrada e concentrações de saída, coeficiente de transferência de calor e coeficiente de transferência de massa com a ajuda de gráficos. Os resultados foram validados e as lacunas da literatura foram discutidas.

HAVESTINI (2021) utilizou modelos numéricos bidimensionais de duas fases para estudar a absorção de vapor de água pura em uma solução aquosa de LiBr fluindo dentro de um canal vertical ou sobre um tubo horizontal. O filme descendente em um canal vertical foi estudado usando um modelo numérico parabólico e um elíptico, então o modelo elíptico é aplicado a um tubo horizontal. Os resultados do modelo numérico foram comparados aos dados numéricos ou experimentais disponíveis. Uma ampla gama de parâmetros foi estudada para investigar o desenvolvimento de fluxos de contracorrente de líquido e gás em fenômenos de absorção. Foram apresentadas as distribuições de velocidade, pressão e temperatura em ambas as fases e a distribuição da fração de massa na fase líquida. No modelo parabólico, os parâmetros interfaciais ficaram em boa concordância com os resultados do modelo elíptico no caso do canal vertical até o ponto axial onde a massa de vapor é insuficiente na fase gasosa cessa o avanço do modelo parabólico. O modelo elíptico é computacionalmente mais caro, mas tem a capacidade de prever fluxos de recirculação. O modelo elíptico previu os detalhes do fluxo em um tubo horizontal que estavam de acordo com os trabalhos anteriores disponíveis na literatura.

SEHGAL et al. (2021) realizaram uma revisão abrangente dos desenvolvimentos recentes em absorvedores de filme descendente para sistemas de absorção, onde são

discutidos os papéis das técnicas de aprimoramento passivo, incluindo modificações de superfície, uso de surfactantes e nanofluidos.

ASHOURI E BAHRAMI (2022) apresentaram uma nova solução analítica para absorventes não voláteis usando o método da transformada de Laplace propondo um novo perfil de velocidade para filmes em queda. Além disso, relações compactas são propostas para calcular as taxas de transferência de calor e massa no processo de absorção do filme descendente sendo validadas com dados experimentais coletados por outros com razoável precisão. Um estudo paramétrico foi realizado para investigar o impacto dos parâmetros de entrada na taxa de absorção do filme descendente em uma placa inclinada. Observa-se que a concentração da solução de entrada é o parâmetro mais eficaz e a vazão mássica da solução tem o menor impacto.

A Tabela 1, conforme se apresenta nessa oportunidade, apresenta um resumo das soluções de absorção de filme descendente em uma parede contendo tipo de geometria, método de solução utilizado e a forma de solução adotada, veja-se:

Tabela 1 - Resumo das soluções analíticas, numéricas e experimentais de absorção de filme descendente em uma parede.

Autor	Geometria	Método de Solução	Tipo de Solução
Nakoryakov e Grigor`eva (1977)	Placa Vertical	Solução de similaridade	Analítica
Grigor`eva e Nakoryakov (1977)	Placa Vertical	Série de Expansão	Analítica
Grossman (1982)	Placa Inclinada	Métodos das linhas	Numérica
Grossman (1983)	Placa Inclinada	Série de Fourier	Analítica
Andberg (1986)	Tubo Horizontal	Diferenças Finitas	Numérica
Andberg e Vliet (1987)	Tubo Horizontal	Crank-Nicholson	Numérica

Autor	Geometria	Método de Solução	Tipo de Solução
Nomura et al. (1993)	Tubo Horizontal	-	Experimental
Wassenaar (1994)	Tubo Horizontal	Diferenças Finitas	Numérica
Colinsk e Mao (1996)	Tubo Horizontal	Transformada de Fourier	Analítica
Hoffmann et al. (1996)	Tubo Horizontal	-	Experimental
Min e Choi (1999)	Tubo Horizontal	SIMPLER	Numérica
Francés e Ojer (2003)	Tubo Horizontal	-	Experimental
Islam et al. (2004)	Placa Vertical	Transformada de Laplace	Numérica
Killion e Garimella (2004)	Tubo Horizontal	CFD, VOF e PISO	Numérica
Babadi e Farhanieh (2005)	Tubo Horizontal	Diferenças Finitas	Numérica
Seol e Lee (2005)	Tubo Horizontal	-	Experimental
Papaefthimiou et al. (2006)	Tubo Horizontal	Colocação de Elementos Finitos	Numérica
Kyung et al. (2007)	Tubo Horizontal	Diferenças Finitas	Numérica
Islam (2008)	Tubo Horizontal	Transformada de Laplace	Numérica/ Experimental
Bo et al. (2010)	Tubo Vertical	CFD-Fluent	Numérica
Silva (2010)	Tubo Horizontal	GITT	Analítica/ Numérica

Autor	Geometria	Método de Solução	Tipo de Solução
Papaefthimiou et al. (2012)	Tubo Horizontal	Colocação de Elementos Finitos	Numérica
Silva e Santos (2014)	Tubo Horizontal	GITT	Analítica/ Numérica
Mittermaier, Schulze e Ziegler (2014)	Placa Vertical	Newton–Raphson	Numérica
Zhang et al. (2015)	Placa Vertical	CFD-Fluent	Numérica
Armou et al. (2016)	Placa Vertical	Volume Finito	Numérica
Andrade (2018)	Tubo Horizontal e Duto Circular	GITT	Analítica/ Numérica
Odunfa, Onwuka e Ajuka (2018)	Tubo Horizontal	Diferenças Finitas	Numérica
Arshi e Sudharsan (2020)	Tubo Horizontal	-	Experimental
Havestini (2021)	Canal Vertical e Tubo Horizontal	Equações Algébricas	Numérica
Ashouri e Bahrami (2022)	Tubo Horizontal	Transformada de Laplace	Analítica

1.5 MOTIVAÇÃO

Diante do apresentado no estado da arte, observa-se que o absorvedor de filme descendente para paredes adiabática e isotérmica foram referenciadas considerando modelos matemáticos com espessura do filme constante. A presente tese tem como objetivo aplicar a

técnica da transformada integral generalizada, empregando um modelo de espessura do filme variável sob condições de contorno do tipo Robin.

A modelagem do absorvedor de filme descendente deve considerar a descrição da transferência simultânea de calor e massa, além do equilíbrio de fases na interface e o regime de fluido.

Para resolver a região da interface, faz-se necessário entender bem o fenômeno físico, pois exige uma análise criteriosa, por causa das condições de contorno acopladas, representadas por formulações complexas e maiores dificuldades matemáticas associadas à obtenção dos campos de temperatura e concentração.

Em razão disso, constata-se que foi importante resolver inicialmente um problema de solidificação rápida por vazamento de fluxo planar, servindo de aprendizado para desenvolvimento do trabalho, onde a maior dificuldade nesse problema foi a determinação da posição da interface entre a região líquida e sólida, para, a partir deste entendimento, conseguir avançar no problema principal, o qual é apresentado no Apêndice A, contendo descrição das equações, método de solução aplicado e comparação dos resultados obtidos com outros trabalhos.

Em seguida, para resolver o problema de transferência simultânea de calor e massa com espessura do filme constante e variável foi imprescindível determinar a espessura da camada limite, por isso foi resolvido inicialmente um problema que calcula a espessura de camada limite hidrodinâmica, térmica e de concentração, usando a equação da quantidade de movimento, da energia e da concentração, respectivamente, no intuito de entender o procedimento adotado, e a partir daí, utilizá-lo de maneira análoga para resolução da espessura variável do campo térmico e de concentração no problema proposto.

Por último, pretende-se estender a aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) para resolver o problema de transferência simultânea de calor e massa para determinar o campo de temperatura e concentração em absorvedores horizontais com espessura do filme constante e variável, e em absorvedores verticais com espessura do filme constante, usando a condição de contorno de Robin, variando o número de *biot*, simulando várias situações: $Bi = 0,001$ (parede adiabática), $Bi = 0.1, 1, 2, 5$ e 10 (casos intermediários) e $Bi = 1000$ (parede isotérmica).

1.6 MÉTODO DE TRATAMENTO DO PROBLEMA

As equações diferenciais governantes dos processos difusivos-convectivos do problema tratado nesta tese apresentam estrutura não-linear, onde duas condições de contorno apresentam-se fortemente acopladas, desta forma, torna-se impossível obter solução puramente analítica. Por esta razão, será aplicada a Técnica da Transformada Integral Generalizada, comumente chamada de GITT, em razão da abreviação em inglês *Generalized Integral Transform Technique*, no tratamento do fenômeno da transferência simultânea de calor e massa.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é uma metodologia híbrida analítica-numérica derivada da Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT), representando uma extensão do método de separação de variáveis. A GITT consiste basicamente de atuar analiticamente até onde é possível e em seguida, resolver numericamente o problema proposto, oferecendo um controle na precisão e permitindo uma performance computacional eficiente para uma grande variedade de problemas não-transformáveis, incluindo as formulações não-lineares mais usuais nas aplicações em transferência de calor e mecânica dos fluidos, e tem sido utilizada com sucesso na solução de problema convectivos-difusivos (COTTA, 1993;1994;1998; COTTA & MIKHAILOV, 1997; COTTA & MIKHAILOV, 2006; COTTA et al., 2017), incluindo problemas térmicos com contornos móveis (SIAS, RUPERTI e COTTA, 2009; MONTEIRO, QUARESMA e COTTA, 2011).

Vale salientar que avanços recentes na GITT possibilitaram o uso de técnicas para aceleração da convergência em problemas complexos, ou seja, problemas que apresentam geometria complexa ou condições de contorno não-lineares, garantindo a precisão dos resultados e diminuindo o custo computacional (COTTA et al., 2018). Dentre esses avanços podemos citar a metodologia adotada por COTTA et al. (2016), onde as condições de contorno não lineares dos problemas convectivo-difusivos foram incorporadas ao problema de autovalor adotado na transformação integral. Essa abordagem apresentou um ganho significativo na convergência da solução em comparação com a abordagem clássica da GITT, além de apresentar um comportamento uniforme da convergência em todo domínio da solução, até mesmo em posições próximas aos contornos não-lineares.

Para a solução de um determinado problema a ser resolvido pelo uso da GITT devem-se seguir as seguintes etapas:

- Escolher de um problema de autovalor auxiliar, que contenha o maior número de informações a respeito do problema original;
- Obter as autofunções, os autovalores e as normas do problema auxiliar;
- Determinar o par de transformada integral e inversa;
- Transformar o sistema de equações diferenciais parciais em ordinárias, por intermédio de um operador integral que contenha a autofunção do problema auxiliar e permitir a eliminação de uma ou mais variáveis espaciais;
- Resolver numericamente o sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, através do truncamento da série em uma ordem suficientemente grande para obter a precisão desejada, utilizando sub-rotinas numéricas disponíveis e em seguida, obter os potenciais transformados;
- Utilizar a fórmula da inversa, a fim de recuperar o potencial original.

1.7 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver um modelo matemático através da técnica da transformada integral generalizada para estudar os efeitos da transferência simultânea de calor e massa para determinar o campo de temperatura e concentração em absorvedores horizontais com espessura constante e variável, e em absorvedores verticais com espessura constante, usando a condição de contorno de Robin, variando o número de Biot, bem como, comparar com dados numéricos e experimentais obtidos na literatura.

Desta forma, dividiu-se em objetivos específicos a resolução dos problemas iniciais, para melhor entendimento do problema:

- Determinar as Camadas Limites Hidrodinâmica, Térmica e concentração, utilizando a mudança de variável na equação da quantidade de movimento, da energia e da concentração;
- Determinar o perfil de temperatura e concentração utilizando a equação de energia e de concentração, em um escoamento laminar, unidimensional em película sobre um tubo de um absorvedor horizontal e vertical em coordenadas retangulares e cilíndricas, respectivamente, variando o número de Biot.

Para alcançar os objetivos específicos elencados acima faz-se necessários seguir os seguintes passos:

- Determinar as Equações Diferenciais Parciais para espessura constante e variável com suas condições iniciais e de contorno que representem bem o fenômeno.
- Propor uma mudança de variável, a fim de permitir a determinação da espessura da camada limite hidrodinâmica, térmica e de concentração.
- Escolher os Problemas Auxiliares adequados, que devem conter o maior número de informações possíveis do problema original e que seja homogêneo.
- Obter as autofunções, autovalores, normas e propriedades de ortogonalidades, utilizando o software MATHEMATICA, para determinação da auto-condição e dos coeficientes necessários para a resolução do Problema.
- Determinar o Par transformado para obtenção dos potenciais: velocidade, temperatura e concentração.
- Transformar o sistema de equações diferenciais parciais, com o intuito de eliminar uma variável independente do sistema diferencial, tornando um sistema de equações diferenciais ordinárias formadas por infinitas equações acopladas.
- Truncar o sistema ordinário infinito em uma ordem suficientemente grande, de tal forma que a solução obtida seja representativa e convergente. Esta convergência deverá ser na quarta casa decimal, utilizando o Software MATHEMATICA, a exemplo da rotina NDSolve, para resolução de um Problema de Valor Inicial.
- Aplicar a fórmula da inversa, para determinação do potencial original.

Na modelagem numérica de absorção, todas as equações governantes são acopladas: continuidade, quantidade de movimento, energia e fração de massa. O escoamento bifásico e multicomponente em uma geometria complexa torna a absorção do filme descendente um problema desafiador de modelar. Como resultado, a maioria dos modelos numéricos considera apenas a fase do filme e negligência o impacto da tensão de cisalhamento na interface líquido-vapor.

Esses modelos também simplificam a hidrodinâmica do filme e não levam em consideração o efeito da transferência de calor e massa e da interação com o vapor no escoamento do líquido. O crescimento da espessura do filme líquido é um dos parâmetros

que podem ser afetados pelas condições de operação, mas geralmente é negligenciado para fins de simplificação ou está simplesmente relacionado à massa absorvida na interface.

Como a interação interfacial entre o vapor e o filme da solução está relacionada à condição de equilíbrio e ao calor de absorção na interface, é necessário um entendimento completo da física de absorção.

O presente estudo, aplica a Técnica da Transformada Integral Generalizada usando a variação do número de Biot para determinar o perfil de temperatura e de concentração de absorção laminar bifásica de vapor para uma solução aquosa de LiBr com espessura da película constante e variável.

1.8 ESTRUTURA DA TESE

Este trabalho está organizado em 5 (cinco) capítulos, os quais são iniciados pelo capítulo introdutório, o qual dispõe, além da introdução, breve revisão bibliográfica e motivação sobre o problema de transferência simultânea de calor e massa em absorvedores horizontais e verticais usando duas condições de contorno acopladas com espessura da película constante e variável.

Dando continuidade ao trabalho, o capítulo 2 é dedicado à determinação das espessuras da camada limite hidrodinâmica, térmica e de concentração do problema de transferência simultânea de calor e massa em regime permanente no escoamento laminar em uma placa, por meio da mudança de variável que permite colocar a espessura da camada limite como uma variável, sendo determinada mediante o uso das equações da quantidade de movimento, da energia e da concentração, de maneira acoplada, utilizando a GITT para transformação de um sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias, as quais são resolvidas por meio rotina NDSolve do software MATEHMATICA, obtendo a convergência da solução e resultados compatíveis quando comparados com a literatura.

No capítulo 3 é apresentada a aplicação da GITT na formulação do problema de transferência simultânea de calor e massa em absorvedores horizontais com duas condições de contorno acopladas, sendo aplicados dois casos: espessura constante e variável, usando problemas auxiliares em função de seno e de cosseno, obtendo convergência da solução e bons resultados comparados com a literatura.

O capítulo 4 é dedicado à aplicação da GITT na formulação do problema de transferência simultânea de calor e massa em absorvedores verticais com duas condições de contorno acopladas, com espessura constante, usando problemas auxiliares em funções de Bessel, obtendo convergência da solução e bons resultados comparados com a literatura.

Finalmente, o capítulo 5 dispõe as conclusões e limitações do presente escrito, apontando os avanços obtidos por meio do presente trabalho, oportunidade em que delinea perspectivas de trabalhos futuros e continuidade do presente estudo.

CAPÍTULO II

ESTUDO DOS PROBLEMAS DE CAMADA LIMITE

Conforme já indicado, tem-se que o objetivo desse capítulo é resolver o problema de transferência simultânea de calor e massa com formulação em variáveis primitivas, fazendo uso de uma mudança de variável, a fim de determinar as espessuras de camada limite hidrodinâmica, térmica e de concentração, em um escoamento laminar, bidimensional em uma placa plana com perfil de velocidade constante em desenvolvimento, usando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) para transformar o sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias, sendo resolvido pela subrotina NDSolve do software Mathematica.

2.1 INTRODUÇÃO

2.1.1 Campo Hidrodinâmico

A teoria da camada limite é umas das ideias mais importantes da mecânica dos fluidos, desenvolvida por Prandtl em 1904, que leva em consideração os efeitos viscosos para o entendimento do estudo em transferências de calor e massa por convecção, onde há um movimento relativo entre o escoamento de um fluido quando entra em contato com uma superfície.

Prandtl utilizou as equações de camada limite para descrever perfeitamente os efeitos viscosos, sem a necessidade de resolver as equações de Navier-Stokes. Estas equações simplificadas tornaram-se a base para o desenvolvimento da mecânica dos fluidos teórica moderna juntamente com a teoria do aerofólio e a ciência da dinâmica dos gases (FREIRE, 1980).

Uma das aplicações mais simples e convencionais da teoria da camada limite é em um escoamento sobre uma placa plana de comprimento infinito.

Blasius solucionou as equações da camada limite por meio da mudança de variável via função corrente, formada ao longo de uma placa plana, reduzindo a equação diferencial parcial, em uma equação ordinária não linear, ou seja, uma solução de similaridade chamada de equação de Blasius.

Com a evolução dos computadores de última geração e o aumento da capacidade de processadores disponíveis no mercado, aumentou o número de soluções para equações que antes eram consideradas impossíveis de resolver devido à necessidade de memória para rodar os programas, com isso, vários pesquisadores têm buscado novas soluções para o problema de Blasius usando algoritmos ou resolvendo o problema por meio de séries a fim de encontrar uma solução que melhor represente o modelo matemático e o fenômeno físico.

Em 2014, SANDERS investigou as propriedades da camada limite sobre uma placa de forma analítica, experimental e numérica empregando o software XFOIL, adotando a teoria de Blasius e von Karman, usando o Túnel de Vento da Universidade de Twente obtendo bons resultados.

ADEBISI (2015) fez um estudo do escoamento da camada limite sobre uma placa plana usando um método semi-analítico de decomposição de Adomian modificado (MADM), e comparou com o método numérico de diferenças finitas denominado de “*Runge-Kutta shooting*” (R-KSM), obtendo resultados convergentes com a solução de Blasius.

PARVEEN (2016) encontrou uma solução numérica para equação de Blasius usando os métodos de Runge-Kutta e de disparo (*shooting*) através do software Matlab, obtendo resultados em boa concordância com a solução exata.

BOGNAR (2017) resolveu numericamente o problema de Blasius usando o método da similaridade para a determinação dos perfis de velocidade e temperatura na camada limite próxima a uma superfície móvel horizontal aquecida por baixo. Os resultados mostraram que o aumento no número de Prandtl leva a uma diminuição na temperatura da parede, na temperatura na espessura da camada limite térmica e o aumento do parâmetro de empuxo leva a um aumento da velocidade na camada limite de momento e uma ligeira diminuição na temperatura da parede e na temperatura na camada limite térmica.

SEYYEDI et al. (2019) estudaram as equações de camada limite em uma placa plana no intuito de obter uma solução mais precisa a espessura da camada limite e número de Nusselt, encontrando um novo perfil de velocidade com polinômio de ordem m , calculando

$m = 2,5243$ chegaram a uma nova relação para a espessura da camada limite hidrodinâmica e térmica, obtendo resultados próximos às soluções de Blasius.

OLIVEIRA e ALMEIDA (2019) mostraram que a equação de Blasius e o sistema de Ostrach podem ser resolvidos em termos do Problema de Valor Inicial e fazendo uso da técnica de otimização, método IVASO, com boa concordância com resultados da literatura.

FAZIO (2019) definiu um método de transformação não iterativo para o problema de Blasius, com resultados numéricos obtidos em boa concordância com os disponíveis na literatura.

JAGUARIBE (2020) apresentou duas inconsistências na solução de Blasius em uma placa plana: matemática (a equação diferencial ordinária de 3ª ordem é resolvida com quatro condições de contorno e física (os perfis de velocidade resultantes, não atendem à definição da camada limite como definida por Prandtl) baseado nisso, o autor resolveu o problema proposto através da expansão da função z através da série de MacLaurin utilizando muitos termos (461) pelo software Matlab encontrando $X = 58,8154$, obtendo o parâmetro de similaridade $\eta_\infty = 4,67551$.

FAZIO (2021) aprimorou um método de transformação não iterativo que permitiu resolver numericamente o problema de Blasius. Os resultados numéricos obtidos foram melhorados tanto por um refinamento de malha quanto usando a técnica de extrapolação de Richardson.

ASAITHAMBI (2021) fez uma revisão sobre a resolução do problema de valor de contorno de 3ª ordem não linear, denominado de Falkner-Skan, usando tratamentos analíticos, semi-analíticos e numéricos (chute, diferenças finitas, de colocação e outros métodos híbridos), quando se faz $\beta = 0$, torna-se um problema de Blasius.

MONTEIRO (2021) estudou a equação de Blasius por meio de soluções numéricas usando uma função objetivo, na qual sua solução representa difusão anômala, por meio do cálculo fracionário, para obter resultados mais refinados dos perfis de velocidade e temperatura.

MEDEIROS e SANTOS (2021) realizou uma análise teórica do comportamento hidrodinâmico e térmico da espessura da camada limite em um problema conjugado condução-convecção externa, em um escoamento laminar de um fluido newtoniano em uma placa plana, em regime permanente, por meio da aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada encontrando resultados convergentes com a solução exata de Blasius.

FAREO (2022) resolveu o problema de Blasius e uma variante do modelo de Falkner-Skan por meio do método de transformação iterativo, transformando um problema de valor de contorno em um problema de valor inicial.

2.1.2 Campo Térmico

A grande maioria dos problemas de transferência de calor encontrados na natureza levam em consideração os efeitos da condução de calor e convecção, contudo, ainda existe grandes dificuldades em simular esses problemas em termos de precisão e custo computacional. Desta forma, iremos tratar sobre o estudo do problema conjugado condução-convecção externa em regime permanente por meio da Técnica da Transformada Integral Generalizada.

PERELMAN (1961) usou o termo transferência de calor conjugada para descrever o problema acoplado de transferência de calor por convecção na camada limite térmica de um escoamento sobre uma placa plana de espessura finita e a condução de calor bidimensional na parede sólida. Identificando um parâmetro que combinava a razão de condutividade do fluido e do sólido, número de Prandtl e Reynolds.

Para este problema conjugado condução-convecção externa são encontrados na literatura aberta disponível soluções aproximadas, empregando o Método Integral em conjunto com o Método das Diferenças Finitas ou ainda soluções puramente numéricas. Vale salientar que estes trabalhos demonstraram as dificuldades matemáticas e/ou computacionais associadas à solução do problema conjugado.

SUNDEN (1989) investigou numericamente o problema conjugado condução-convecção forçada externa sobre uma placa plana, considerando os casos laminar e turbulento, por meio do método das diferenças finitas de segunda ordem e o modelo de duas equações, respectivamente.

LACHI et al. (1997) desenvolveram uma solução numérica baseada no Método Integral para estudar o problema de convecção forçada permanente sujeita a um fluxo de calor constante comparando os casos de uma placa plana de espessura desprezível e uma placa de espessura finita.

MOSAAD (1999) realizou um estudo teórico do emprego do Método Integral na solução de problemas conjugados convecção-condução sobre uma placa plana para o caso de temperatura prescrita na superfície inferior da placa.

CHIDA (2000) estudou o comportamento da temperatura na interface sólido/líquido em um problema conjugado utilizando os métodos da bisseção e Runge-Kutta.

NAVEIRA et al. (2007) estudaram o problema conjugado transiente de condução-convecção externa aplicando um fluxo de calor na parede através da Técnica da Transformada Integral Generalizada por meio do método de linhas. No campo hidrodinâmico utilizaram a solução de Blasius (método de similaridade), já no campo térmico, aplicaram um filtro que utiliza a espessura da camada limite térmica e obtiveram soluções transientes para a temperatura da parede compatíveis com resultados obtidos pela solução exata de Blasius.

BOGNAR (2017) resolveu numericamente o problema de Blasius usando o método da similaridade para a determinação dos perfis de velocidade e temperatura na camada limite próxima a uma superfície móvel horizontal aquecida por baixo. Os resultados mostraram que o aumento no número de Prandtl leva a uma diminuição na temperatura da parede, na temperatura na espessura da camada limite térmica e o aumento do parâmetro de empuxo leva a um aumento da velocidade na camada limite de momento e uma ligeira diminuição na temperatura da parede e na temperatura na camada limite térmica.

SEYYEDI et al. (2019) estudaram as equações de camada limite em uma placa plana no intuito de obter uma solução mais precisa a espessura da camada limite e número de Nusselt, encontrando um novo perfil de velocidade com polinômio de ordem m , calculando $m=2,5243$ chegaram a uma nova relação para a espessura da camada limite hidrodinâmica e térmica, obtendo resultados próximos às soluções de Blasius.

MONTEIRO (2021) estudou a equação de Blasius por meio de soluções numéricas usando uma função objetivo, na qual sua solução representa difusão anômala, por meio do cálculo fracionário, para obter resultados mais refinados dos perfis de velocidade e temperatura.

MEDEIROS e SANTOS (2021) realizou uma análise teórica do comportamento hidrodinâmico e térmico da espessura da camada limite em um problema conjugado condução-convecção externa, em um escoamento laminar de um fluido newtoniano em uma placa plana, em regime permanente, por meio da aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada encontrando resultados convergentes com a solução exata de Blasius.

2.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

O escoamento é considerado bidimensional, laminar e incompressível de um fluido newtoniano sobre uma placa plana, governado pelas equações da continuidade, da quantidade de movimento, energia e de concentração.

As propriedades termofísicas são supostas constantes e as camadas limites hidrodinâmica, térmica e de concentração são assumidas em regime permanente. O escoamento com velocidade de corrente livre, u_∞ , chega à borda da placa com Temperatura T_∞ e concentração C_∞ . O modelo físico é esquematicamente mostrado na Figura 4.

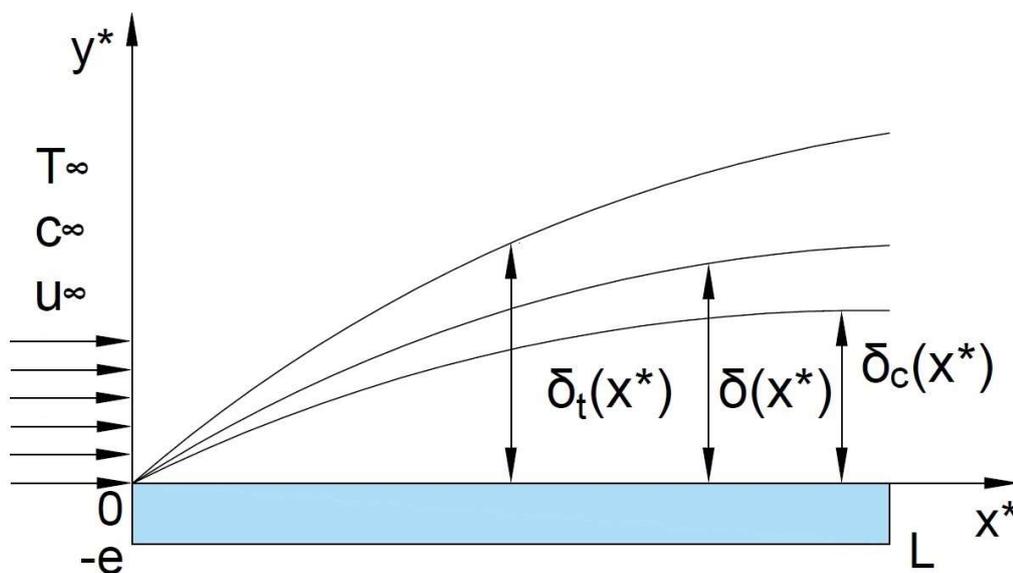


Figura 4 - Descrição do problema físico com camada limite hidrodinâmica, térmica e de concentração.

Tendo como objetivo determinar as características hidrodinâmicas, térmicas e de concentração deste escoamento ao longo da região, por meio da determinação das espessuras de camada limite hidrodinâmica, térmica e de concentração, sendo considerado a participação da parede, que tem espessura, e , e comprimento, L . Para a modelagem do problema físico proposto, faz-se necessário assumir algumas hipóteses:

- O sistema está em regime permanente;
- O fluido é newtoniano e possui propriedades termo físicas constantes;
- Escoamento Bidimensional;
- Perfil de velocidade constante em desenvolvimento;

- Escoamento incompressível.

Considerando as hipóteses simplificadoras descritas anteriormente, as equações representativas da conservação da massa, da quantidade de movimento, da energia e da concentração em variáveis primitivas na forma dimensional, são definidas abaixo:

Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x^*} + \frac{\partial v}{\partial y^*} = 0 \quad \text{em} \quad 0 < x^* < L \quad \text{e} \quad 0 < y^* < \delta^*(x) \quad (2.1)$$

Equação da Conservação do Momentum na direção x^* :

$$u \frac{\partial u}{\partial x^*} + v \frac{\partial u}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx^*} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^{*2}} \quad \text{em} \quad 0 < x^* < L \quad \text{e} \quad 0 < y^* < \delta^*(x) \quad (2.2a)$$

Equação da Conservação do Momentum na direção y^* :

$$-\frac{dP}{dy^*} = 0 \quad \text{em} \quad 0 < x^* < L \quad \text{e} \quad 0 < y^* < \delta^*(x) \quad (2.2b)$$

Cujas condições de entrada e de contorno são dadas como:

$$u(0, y^*) = U_\infty \quad ; \quad u(x^*, 0) = 0 \quad ; \quad u(x^*, \delta^*(x)) = U_\infty \quad (2.2c-e)$$

$$v(0, y^*) = 0 \quad ; \quad v(x^*, 0) = 0 \quad ; \quad v(x^*, \delta^*(x)) = 0 \quad (2.2f-h)$$

Equação da Energia:

$$u \frac{\partial T}{\partial x^*} + v \frac{\partial T}{\partial y^*} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^{*2}} \quad \text{em} \quad 0 < x^* < L \quad \text{e} \quad 0 < y^* < \delta_t^*(x) \quad (2.3)$$

Cujas condições de entrada e de contorno são dadas como:

$$T(0, y^*) = T_\infty \quad ; \quad \left. \frac{\partial T(x^*, y^*)}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = -\delta_t^*(x) \quad ; \quad T(x^*, \delta_t^*(x)) = T_\infty \quad (2.3a-c)$$

Equação da Concentração:

$$u \frac{\partial C}{\partial x^*} + v \frac{\partial C}{\partial y^*} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^{*2}} \quad \text{em } 0 < x^* < L \text{ e } 0 < y^* < \delta_c^*(x) \quad (2.4)$$

Cuja condições de entrada e de contorno são dadas como:

$$C(0, y^*) = C_\infty ; \quad \left. \frac{\partial C(x^*, y^*)}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = 0 ; \quad T(x^*, \delta_c^*(x)) = A C(x^*, \delta_c^*(x)) + B \quad (2.4a-c)$$

Utilizando os grupos adimensionais abaixo:

$$U = \frac{u}{U_\infty} \quad ; \quad V = \frac{v}{U_\infty} \quad (2.5 \text{ a-b})$$

$$x = \frac{x^*}{L} \quad ; \quad y = \frac{y^*}{L} \quad (2.5 \text{ c-d})$$

$$\delta = \frac{\delta^*}{L} \quad ; \quad \delta_t = \frac{\delta_t^*}{L} \quad ; \quad \delta_c = \frac{\delta_c^*}{L} \quad (2.5 \text{ e-g})$$

$$p^* = \frac{p}{L U_\infty^2} \quad ; \quad Re = \frac{U_\infty L}{\nu} \quad Pe = \frac{U_\infty L}{\alpha} \quad (2.5 \text{ h-j})$$

$$\theta(x, y) = \frac{T(x^*, y^*) - T_0}{T_e - T_0} \quad ; \quad W(x, y) = \frac{C(x^*, y^*) - C_0}{C_e - C_0} \quad (2.5 \text{ l-m})$$

$$T_e = A W_0 + B \quad ; \quad T_0 = A W_e + B \quad (2.5 \text{ n-o})$$

Substituindo os grupos adimensionais no problema geral, obtém-se:

Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{em } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < \delta(x) \quad (2.6)$$

Equação da Conservação do Momentum na direção x:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{dp^*}{dx} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \text{em} \quad 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < \delta(x) \quad (2.7)$$

Equação da Conservação do Momentum na direção y:

$$-\frac{dp^*}{dy} = 0 \quad \text{em} \quad 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < \delta(x) \quad (2.7a)$$

$$U(0, y) = 1 \quad ; \quad U(x, 0) = 0 \quad ; \quad U(x, \delta(x)) = 1 \quad (2.7b-d)$$

$$V(0, y) = 0 \quad ; \quad V(x, 0) = 0 \quad ; \quad V(x, \delta(x)) = 0 \quad (2.7e-g)$$

Equação da Energia:

$$U \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad \text{em} \quad 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < \delta_t(x) \quad (2.8)$$

Cuja condições de entrada e de contorno são dadas como:

$$\theta(0, y) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = -\delta_t(x) \quad ; \quad \theta(x, \delta_t(x)) = 0 \quad (2.8a-c)$$

Equação da Concentração:

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{1}{Pe Le} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad \text{em} \quad 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < \delta_c(x) \quad (2.9)$$

Cuja condições de entrada e de contorno são dadas como:

$$W(0, y) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad ; \quad \theta(x, \delta_t(x)) + W(x, \delta_c(x)) = 1 \quad (2.9a-c)$$

Usando a Mudança de Variável proposta abaixo, as equações se tornam:

$$\chi = x \quad \eta = \frac{y}{\delta(\chi)} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{1}{\delta(\chi)} \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\delta(\chi)} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.10a-d)$$

2.3 MODELO MATEMÁTICO ADIMENSIONAL

Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial U}{\partial \chi} - \frac{1}{\delta(\chi)} \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \eta \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{1}{\delta(\chi)} \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em } 0 < \chi < 1 \text{ e } 0 < \eta < 1 \quad (2.11)$$

Equação da Conservação do Momentum na direção χ :

$$U \frac{\partial U}{\partial \chi} - \frac{U}{\delta(\chi)} \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \eta \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{V}{\delta(\chi)} \frac{\partial U}{\partial \eta} = -\frac{dp^*}{d\chi} + \frac{1}{Re} \frac{1}{\delta(\chi)^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \quad \text{em } 0 < \chi < 1 \text{ e } 0 < \eta < 1 \quad (2.11a)$$

Equação da Conservação do Momentum na direção η :

$$-\frac{dp^*}{d\eta} = 0 \quad \text{em } 0 < \chi < 1 \text{ e } 0 < \eta < 1 \quad (2.11b)$$

$$U(0, \eta) = 1 \quad ; \quad U(\chi, 0) = 0 \quad ; \quad U(\chi, 1) = 1 \quad (2.11c-e)$$

$$V(0, \eta) = 0 \quad ; \quad V(\chi, 0) = 0 \quad ; \quad V(\chi, 1) = 0 \quad (2.11f-h)$$

Equação da Energia:

$$U \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi} - \frac{\eta}{\delta_t(\chi)} \frac{d\delta_t(\chi)}{d\chi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \frac{V}{\delta_t(\chi)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Pe} \frac{1}{\delta_t(\chi)^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad \text{em } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < \eta < 1 \quad (2.12)$$

Cuja condições de entrada e de contorno são dadas como:

$$\theta(0, \eta_t) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \theta(\chi, \eta_t)}{\partial \eta_t} \right|_{\eta_t=0} = -\delta_t(\chi) \quad ; \quad \theta(\chi, 1) = 0 \quad (2.12a-c)$$

Equação da Concentração:

$$U \left(\frac{\partial W}{\partial \chi} - \frac{\eta}{\delta_c(\chi)} \frac{d\delta_c(\chi)}{d\chi} \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) + \frac{V}{\delta_c(\chi)} \frac{\partial W}{\partial \eta} = \frac{1}{Pe} \frac{1}{\delta_c(\chi)^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}$$

em $0 < \chi < 1$ e $0 < \eta < 1$ (2.13)

Cujas condições de entrada e de contorno são dadas como:

$$W(0, \eta_c) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial W(\chi, \eta_c)}{\partial \eta_c} \right|_{\eta_c=0} = 0 \quad ; \quad \theta(\chi, 1) + W(\chi, 1) = 1 \quad (2.13a-c)$$

No intuito de tornar o problema homogêneo, utiliza-se os filtros para a velocidade e temperatura, respectivamente, definidos abaixo para eliminar as condições de contorno não homogêneas, da seguinte forma:

$$U(\chi, \eta) = U^*(\chi, \eta) + UF(\eta) \quad \text{onde : } UF(\eta) = \eta \quad (2.14)$$

$$\theta(\chi, \eta_t) = \theta^*(\chi, \eta_t) + FFT(\chi, \eta_t) \quad \text{onde : } FFT(\chi, \eta_t) = \frac{\delta_t(\chi)}{2} (1 - \eta_t)^2 \quad (2.15)$$

Inserindo o filtro nas equações da continuidade e *momentum*, obtemos:

Equação da Continuidade

$$\frac{\partial U^*}{\partial \chi} - \frac{1}{\delta(\chi)} \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \eta \left(\frac{\partial U^*}{\partial \eta} + 1 \right) + \frac{1}{\delta(\chi)} \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em } 0 < \chi < 1 \text{ e } 0 < \eta < 1 \quad (2.16)$$

Equação da Conservação do Momentum na direção χ :

$$\begin{aligned}
(U^* + \eta) \left(\frac{\partial U^*}{\partial \chi} - \frac{1}{\delta(\chi)} \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \eta \left(\frac{\partial U^*}{\partial \eta} + 1 \right) \right) + V \frac{1}{\delta(\chi)} \left(\frac{\partial U^*}{\partial \eta} + 1 \right) \\
= -\frac{dp^*}{d\chi} + \frac{1}{Re} \frac{1}{\delta(\chi)^2} \frac{\partial^2 U^*}{\partial \eta^2} \\
\text{em } 0 < \chi < 1 \text{ e } 0 < \eta < 1 \quad (2.16a)
\end{aligned}$$

Equação da Conservação do *Momentum* na direção η :

$$-\frac{dp^*}{d\eta} = 0 \quad \text{em } 0 < \chi < 1 \text{ e } 0 < \eta < 1 \quad (2.16b)$$

$$U^*(0, \eta) = 1 \quad ; \quad U^*(\chi, 0) = 0 \quad ; \quad U^*(\chi, 1) = 0 \quad (2.16c-e)$$

$$V(0, \eta) = 0 \quad ; \quad V(\chi, 0) = 0 \quad ; \quad V(\chi, 1) = 0 \quad (2.16f-h)$$

Equação da Energia:

$$\begin{aligned}
(U^* + \eta) \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial \chi} - \frac{\partial FFT}{\partial \chi} - \frac{\eta}{\delta_t(\chi)} \frac{d\delta_t(\chi)}{d\chi} \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} - \frac{\partial FFT}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{V}{\delta_t(\chi)} \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} - \frac{\partial FFT}{\partial \eta} \right) = \\
\frac{1}{Pe} \frac{1}{\delta_t(\chi)^2} \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 FFT}{\partial \eta^2} \right) \\
\text{em } 0 < \chi < 1 \text{ e } 0 < \eta_t < 1 \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Cuja condição de entrada e de contorno são dadas como:

$$\theta^*(0, \eta_t) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial \theta^*(\chi, \eta_t)}{\partial \eta_t} \right|_{\eta_t=0} = 0 \quad ; \quad \theta^*(\chi, \eta_t) = 0 \quad (2.17a-c)$$

2.4 APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Com o objetivo de transformar o problema proposto em um sistema de equações diferenciais ordinárias faz-se necessário a utilização de um problema auxiliar com solução

já conhecida, para eliminar uma dependência espacial e torná-lo um problema apenas com uma dependência espacial, tornando-o um sistema de equações diferenciais ordinárias.

O problema de Autovalor Auxiliar para o campo hidrodinâmico é definido como:

$$\frac{d^2\varphi(\beta_i,\eta)}{d\eta_1^2} + \beta_i^2 \varphi(\beta_i,\eta) = 0 \quad 0 < \eta < 1 \quad (2.18)$$

$$\varphi(\beta_i,\eta) = 0 \quad \eta = 0 \quad (2.18a)$$

$$\varphi(\beta_i,\eta) = 0 \quad \eta = 1 \quad (2.18b)$$

A qual é resolvida pelas autofunções, autovalores e norma, respectivamente, como:

$$\varphi(\beta_i,\eta) = \text{Sen}(\beta_i \eta) \quad (2.18c)$$

$$\beta_i = i \pi, i = 1,2,3 \quad (2.18d)$$

$$N_i = \int_0^1 \varphi(\beta_i,\eta) \varphi(\beta_i,\eta) d\eta = \frac{1}{2} \quad (2.18e)$$

A autofunção normalizada é dada por:

$$\tilde{\varphi}(\beta_i,\eta) = \frac{\varphi(\beta_i,\eta)}{\sqrt{N_i}} = \sqrt{2} \text{Sen}(\beta_i \eta) \quad (2.18f)$$

O problema de Autovalor Auxiliar para o campo térmico é definido como:

$$\frac{d^2\Theta(\Omega_i,\eta_t)}{d\eta_2^2} + \Omega_i^2 \Theta(\Omega_i,\eta_t) = 0 \quad 0 < \eta_t < 1 \quad (2.19)$$

$$\frac{d\Theta(\Omega_i,\eta_t)}{d\eta_t} = 0 \quad \eta_t = 0 \quad (2.19a)$$

$$\Theta(\Omega_i,\eta_t) = 0 \quad \eta_t = 1 \quad (2.19b)$$

A qual é resolvida pelas autofunções, autovalores e norma, respectivamente, como:

$$\Theta(\Omega_i, \eta_t) = \text{Cos}(\Omega_i \eta_t) \quad (2.19c)$$

$$\Omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{2}, i = 1, 2, 3 \dots \quad (2.19d)$$

$$AN_i = \int_0^1 \Theta(\Omega_i, \eta_t) \Theta(\Omega_i, \eta_t) d\eta_t = \frac{1}{2} \quad (2.19e)$$

A autofunção normalizada é dada por:

$$\tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) = \frac{\Theta(\Omega_i, \eta_t)}{\sqrt{AN_i}} = \sqrt{2} \text{Cos}(\Omega_i \eta_t) \quad (2.19f)$$

O problema de Autovalor Auxiliar para o campo de concentração é definido como:

$$\frac{d^2 \zeta(\lambda_i, \eta_c)}{d\eta_c^2} + \lambda_i^2 \zeta(\lambda_i, \eta_c) = 0 \quad 0 < \eta_c < 1 \quad (2.20)$$

$$\frac{d\zeta(\lambda_i, \eta_c)}{d\eta_c} = 0 \quad \eta_c = 0 \quad (2.20a)$$

$$\zeta(\lambda_i, \eta_c) = 0 \quad \eta_c = 1 \quad (2.20b)$$

A qual é resolvida pelas autofunções, autovalores e norma, respectivamente, como:

$$\zeta(\lambda_i, \eta_c) = \text{Cos}(\lambda_i \eta_c) \quad (2.20c)$$

$$\lambda_i = \frac{(2i-1)\pi}{2}, i = 1, 2, 3 \dots \quad (2.20d)$$

$$ANC_i = \int_0^1 \zeta(\lambda_i, \eta_c) \zeta(\lambda_i, \eta_c) d\eta_c = \frac{1}{2} \quad (2.20e)$$

A autofunção normalizada é dada por:

$$\tilde{\zeta}(\lambda_i, \eta_c) = \frac{\zeta(\lambda_i, \eta_c)}{\sqrt{ANC_i}} = \sqrt{2} \text{Cos}(\lambda_i \eta_c) \quad (2.20f)$$

Os problemas de Autovalores Auxiliares permitem a definição dos pares de transformada do campo hidrodinâmico, térmico e de concentração, respectivamente:

$$\overline{U}_j^*(\chi) = \int_0^1 \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) U^*(\chi, \eta) d\eta \quad \text{Transformada} \quad (2.21)$$

$$U^*(\chi, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) \overline{U}_j^*(\chi) \quad \text{Inversa} \quad (2.22)$$

$$\overline{\theta}_j^*(\chi) = \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_j, \eta_t) \theta^*(\chi, \eta_t) d\eta_t \quad \text{Transformada} \quad (2.23)$$

$$\theta^*(\chi, \eta_t) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Theta}(\Omega_j, \eta_t) \overline{\theta}_j^*(\chi) \quad \text{Inversa} \quad (2.24)$$

$$\overline{W}_j^*(\chi) = \int_0^1 \tilde{\zeta}(\lambda_j, \eta_c) W^*(\chi, \eta_c) d\eta_c \quad \text{Transformada} \quad (2.25)$$

$$W^*(\chi, \eta_c) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\zeta}(\lambda_j, \eta_c) \overline{W}_j^*(\chi) \quad \text{Inversa} \quad (2.26)$$

2.5 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

O processo de transformação integral do sistema de equações diferenciais parciais nas equações da quantidade de movimento e da continuidade, é realizado utilizando operadores nos potenciais e em seguida, aplicando a inversa obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias, descrito abaixo.

Determinação do gradiente de pressão:

$$\begin{aligned}
\text{DPDX}(\chi) = & 2 \sum_{k=1}^{\text{nauv}} \left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} \text{AP}_{j,k} U_j(\chi) + \text{BP}_k \right) \frac{dU_k(\chi)}{d\chi} \\
& - \frac{2}{\delta(\chi)} \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \sum_{k=1}^{\text{nauv}} \left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} \text{CP}_{j,k} U_j(\chi) + \text{DP}_k + \text{EP}_k \right) U_k(\chi) - \frac{2}{\delta(\chi)} \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \frac{1}{3} \\
& - \frac{1}{\text{RE} \delta(\chi)^2} \sum_{j=1}^{\text{nauv}} \frac{(\text{Cos}(\beta_j)\beta_j - \text{Cos}(0)\beta_j)}{N_j^{0.5}} U_j(\chi)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Onde os coeficientes são definidos abaixo:

$$\text{AP}_{jk} = \int_0^1 \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) \tilde{\varphi}(\beta_k, \eta) d\eta \tag{2.27a}$$

$$\text{BP}_k = \int_0^1 \eta \tilde{\varphi}(\beta_k, \eta) d\eta \tag{2.27b}$$

$$\text{CP}_{jk} = \int_0^1 \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) \eta \partial_\eta \tilde{\varphi}(\beta_k, \eta) d\eta \tag{2.27c}$$

$$\text{DP}_k = \int_0^1 \eta \eta \partial_\eta \tilde{\varphi}(\beta_k, \eta) d\eta \tag{2.27d}$$

$$\text{EP}_k = \int_0^1 \eta \tilde{\varphi}(\beta_k, \eta) d\eta \tag{2.27e}$$

Determinação do perfil de velocidade:

$$\begin{aligned}
& \delta(\chi)^2 \sum_{k=1}^{\text{nauv}} \left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} (AV_{ijk} + GV_{ijk}) U_j(\chi) \right) \frac{dU_k(\chi)}{d\chi} + \delta(\chi)^2 \sum_{k=1}^{\text{nauv}} (BV_{ik} + JV_{ik}) \frac{dU_k(\chi)}{d\chi} \\
& - \delta(\chi) \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \left(\sum_{k=1}^{\text{nauv}} \left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} (CV_{ijk} + HV_{ijk}) U_j(\chi) \right) U_k(\chi) \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{\text{nauv}} (DV_{ij} + EV_{ij}) U_j(\chi) + FV_i \right) \\
& - \delta(\chi) \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \left(\sum_{k=1}^{\text{nauv}} (IV_{ik} + LV_{ik}) U_k(\chi) \right) - \delta(\chi) \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} MV_i \\
& = -\delta(\chi)^2 \text{DPDX}(\chi) \text{FF}_i - \frac{\beta_i^2}{\text{RE}} U_i(\chi)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Onde os coeficientes são definidos abaixo:

$$AV_{ijk} = \int_0^1 \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) \tilde{\varphi}(\beta_k, \eta) d\eta \tag{2.28a}$$

$$BV_{ij} = \int_0^1 \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) \eta \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) d\eta \tag{2.28b}$$

$$CV_{ijk} = \int_0^1 \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) \eta \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) \eta \partial_\eta \tilde{\varphi}(\beta_k, \eta) d\eta \tag{2.28c}$$

$$DV_{ij} = \int_0^1 \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) \eta^2 \partial_\eta \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) d\eta \tag{2.28d}$$

$$EV_{ij} = \int_0^1 \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) \eta \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) d\eta \tag{2.28e}$$

$$FV_i = \int_0^1 \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) \eta^2 d\eta \tag{2.28f}$$

$$H_i(\eta) = \int_{\eta}^1 \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) d\eta \quad (2.28g)$$

$$GV_{ijk} = \int_0^1 \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) H_k(\eta) \partial_{\eta} \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) d\eta \quad (2.28h)$$

$$F_i(\eta) = \int_{\eta}^1 \eta \partial_{\eta} \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) d\eta \quad (2.28i)$$

$$HV_{ijk} = \int_0^1 \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) F_k(\eta) \partial_{\eta} \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) d\eta \quad (2.28j)$$

$$G(\eta) = \frac{1}{2} - \frac{\eta^2}{2} \quad (2.28l)$$

$$IV_{ik} = \int_0^1 \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) G(\eta) \partial_{\eta} \tilde{\varphi}(\beta_k, \eta) d\eta \quad (2.28m)$$

$$JV_{ij} = \int_0^1 \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) H_j(\eta) d\eta \quad (2.28n)$$

$$LV_{ij} = \int_0^1 \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) F_j(\eta) d\eta \quad (2.28o)$$

$$MV_i = \int_0^1 \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) G(\eta) d\eta \quad (2.28p)$$

A condição inicial transformada para o campo de velocidade é dada por:

$$\bar{U}_i(0) = \int_0^1 \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) (U(0, \eta) - UF(\eta)) d\eta = FF_i - HH_i \quad (2.28q)$$

$$FF_i = \int_0^1 U(0, \eta) \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) d\eta \quad (2.28r)$$

$$HH_i = \int_0^1 UF(\eta) \tilde{\varphi}(\beta_i, \eta) d\eta \quad (2.28s)$$

No intuito de resolver o sistema de equações diferenciais acoplado, faz-se necessário ter uma equação ou expressão para a espessura da camada limite hidrodinâmica, para isto iremos utilizar a expressão encontrada por NAVEIRA (2006) dada por:

$$\delta(\chi) = 4.96 \chi Re_{\chi}^{-1/2} \quad (2.29)$$

Derivando a equação 2.29, encontra-se uma expressão para determinar o sistema de equações proposto, dada por:

$$\frac{d\delta(\chi)}{d\chi} = 2.48 \chi^{-1/2} Re_{\chi}^{-1/2} \quad (2.30)$$

Faz-se necessário, determinar a condição inicial para espessura da camada limite hidrodinâmica, para evitar problemas de Stiff, utilizamos um valor muito pequeno para χ da ordem de 1×10^{-6} , na equação 2.29, encontrando:

$$\delta(1 \times 10^{-6}) = 4.96 \cdot 1 \times 10^{-6} Re^{-1/2} \quad (2.31a)$$

Determinação do perfil de temperatura:

$$\begin{aligned}
& \delta T(\chi)^2 \sum_{k=1}^{\text{nauv}} \left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} \text{AT}_{ijk} U_j(\chi) + \frac{\delta T(\chi)}{\delta(\chi)} \text{ATF}_{ik} \right) \frac{d\theta_k(\chi)}{d\chi} \\
& + \frac{\delta T(\chi)^2}{2} \frac{d\delta T(\chi)}{d\chi} \left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} \text{BT}_{ij} U_j(\chi) + \frac{\delta T(\chi)}{\delta(\chi)} \text{BTF}_i \right) \\
& - \delta T(\chi) \frac{d\delta T(\chi)}{d\chi} \sum_{k=1}^{\text{nauv}} \left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} \text{CT}_{ijk} U_j(\chi) + \frac{\delta T(\chi)}{\delta(\chi)} \text{CTF}_{ik} \right) \theta_k(\chi) \\
& + \delta T(\chi)^2 \frac{d\delta T(\chi)}{d\chi} \left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} \text{DT}_{ij} U_j(\chi) + \frac{\delta T(\chi)}{\delta(\chi)} \text{DTF}_i \right) \\
& + \delta T(\chi) \delta(\chi) \left(\sum_{k=1}^{\text{nauv}} \left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} \text{ET}_{ijk} \frac{dU_j(\chi)}{d\chi} \right) \theta_k(\chi) \right) \\
& - \delta T(\chi) \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \left(\sum_{k=1}^{\text{nauv}} \left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} \text{FT}_{ijk} U_j(\chi) \right) \theta_k(\chi) \right) \\
& + \sum_{k=1}^{\text{nauv}} \left(\text{GT}_{1ik} - \frac{\delta T(\chi)}{\delta(\chi)} \text{GT}_{2ik} \right) \theta_k(\chi) + \delta T(\chi)^2 \delta(\chi) \sum_{j=1}^{\text{nauv}} \text{HT}_{ij} \frac{dU_j(\chi)}{d\chi} \\
& - \delta T(\chi)^2 \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} \text{IT}_{ij} U_j(\chi) + \left(\text{JT}_{1i} - \frac{\delta T(\chi)}{\delta(\chi)} \text{JT}_{2i} \right) \right) = \\
& = -\frac{\Omega_i^2}{\text{PE}} \theta_i(\chi) + \frac{\delta T(\chi)}{\text{PE}} \text{LT}_i
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Onde os coeficientes são definidos abaixo:

$$\text{AT}_{ijk} = \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) \tilde{\Theta}(\Omega_k, \eta_t) d\eta_t \tag{2.32a}$$

$$\text{ATF}_{ik} = \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) \eta_t \tilde{\Theta}(\Omega_k, \eta_t) d\eta_t \quad (2.32b)$$

$$\text{BT}_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) (1 - \eta_t)^2 d\eta_t \quad (2.32c)$$

$$\text{BTF}_i = \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) \eta (1 - \eta_t)^2 d\eta_t \quad (2.32d)$$

$$\text{CT}_{ijk} = \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) \eta_t \partial_{\eta_t} \tilde{\Theta}(\Omega_k, \eta_t) d\eta_t \quad (2.32e)$$

$$\text{CTF}_{ik} = \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) \eta \eta_t \partial_{\eta_t} \tilde{\Theta}(\Omega_k, \eta_t) d\eta_t \quad (2.32f)$$

$$\text{DT}_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) \eta_t (1 - \eta_t) d\eta_t \quad (2.32g)$$

$$\text{DTF}_i = \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) \eta \eta_t (1 - \eta_t) d\eta_t \quad (2.32h)$$

$$\text{ET}_{ijk} = \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) H_j(\eta) \partial_{\eta_t} \tilde{\Theta}(\Omega_k, \eta_t) d\eta_t \quad (2.32i)$$

$$\text{FT}_{ijk} = \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) F_j(\eta) \partial_{\eta_t} \tilde{\Theta}(\Omega_k, \eta_t) d\eta_t \quad (2.32j)$$

$$\text{GT1}_{ik} = \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) \partial_{\eta_t} \tilde{\Theta}(\Omega_k, \eta_t) d\eta_t \quad (2.32l)$$

$$\text{GT2}_{ik} = \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) \frac{\eta_t^2}{2} \partial_{\eta_t} \tilde{\Theta}(\Omega_k, \eta_t) d\eta_t \quad (2.32m)$$

$$\text{HT}_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) H_j(\eta) (1 - \eta_t) d\eta_t \quad (2.32n)$$

$$\text{IT}_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) F_j(\eta) (1 - \eta_t) d\eta_t \quad (2.32o)$$

$$\text{JT1}_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) (1 - \eta_t) d\eta_t \quad (2.32p)$$

$$JT2_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) \frac{\eta_t^2}{2} (1 - \eta_t) d\eta_t \quad (2.32q)$$

$$LT_i = \int_0^1 \tilde{\Theta}(\Omega_i, \eta_t) d\eta_t \quad (2.32r)$$

A condição inicial transformada do campo térmico é dada por:

$$\overline{\theta}_k(0) = \int_0^1 \tilde{\Gamma}(\mu_i, \eta) (\theta(0, \eta) + FFT(0, \eta)) d\eta \quad (2.32s)$$

De maneira similar, ao procedimento efetuado para determinação da equação da espessura da camada limite hidrodinâmica, faz-se necessário utilizar alguma expressão que relacione a camada limite hidrodinâmica com a térmica.

Adota-se uma expressão para relação entre a camada limite térmica e hidrodinâmica, a partir da correlação de Blasius, encontrada na literatura (OZISIK, 1985), para esse caso específico de um escoamento bidimensional, regime permanente e laminar de um fluido incompressível, e propriedades constantes:

$$\frac{\delta_T(\chi)}{\delta(\chi)} = 0.976 Pr^{-1/3} \quad (2.33)$$

Derivando a equação 2.33, encontra-se uma expressão para determinar o sistema de equações proposto, dada por:

$$\frac{d\delta_T(\chi)}{d\chi} = 2.42048 Pr^{-1/3} \chi^{1/2} Re_\chi^{-1/2} \quad (2.34)$$

Faz-se necessário, determinar a condição inicial para espessura da camada limite hidrodinâmica, para evitar problemas de Stiff, utilizamos um valor muito pequeno para χ da ordem de 1×10^{-6} , na equação 2.33, encontrando:

$$\delta_T(1 \times 10^{-6}) = 4.84096 \times 10^{-6} Pr^{-1/3} Re_\chi^{-1/2} \quad (2.35)$$

Determinação do perfil de concentração:

$$\begin{aligned}
& \delta C(\chi)^2 \sum_{k=1}^{\text{nauv}} \left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} AC_{ijk} U_j(\chi) + \frac{\delta C(\chi)}{\delta(\chi)} ACF_{ik} \right) \frac{dW_k(\chi)}{d\chi} \\
& - \delta C(\chi) \frac{d\delta C(\chi)}{d\chi} \sum_{k=1}^{\text{nauv}} \left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} CC_{ijk} U_j(\chi) + \frac{\delta C(\chi)}{\delta(\chi)} CCF_{ik} \right) W_k(\chi) \\
& + \delta C(\chi) \delta(\chi) \left(\sum_{k=1}^{\text{nauv}} \left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} EC_{ijk} \frac{dU_j(\chi)}{d\chi} \right) W_k(\chi) \right) \\
& - \delta C(\chi) \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \left(\sum_{k=1}^{\text{nauv}} \left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} FC_{ijk} U_j(\chi) \right) W_k(\chi) \right) \\
& + \sum_{k=1}^{\text{nauv}} \left(GC1_{ik} - \frac{\delta C(\chi)}{\delta(\chi)} GC2_{ik} \right) W_k(\chi) \\
& = -\frac{\lambda_i^2}{LE PE} W_i(\chi) + \frac{\text{Sin}(\lambda_i) \lambda_i}{LE PE} - \frac{\text{Sin}(\lambda_i) \lambda_i}{LE PE} \sum_{k=1}^{\text{nauv}} (\text{Sin}(\Omega_k)) \theta_k(\chi)
\end{aligned}$$

Onde os coeficientes são definidos abaixo:

$$AC_{ijk} = \int_0^1 \zeta(\lambda_i, \eta_c) \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) \zeta(\lambda_k, \eta_c) d\eta_c \quad (2.36a)$$

$$ACF_{ik} = \int_0^1 \zeta(\lambda_i, \eta_c) \eta_c \zeta(\lambda_k, \eta_c) d\eta_c \quad (2.36b)$$

$$CC_{ijk} = \int_0^1 \zeta(\lambda_i, \eta_c) \tilde{\varphi}(\beta_j, \eta) \eta_c \partial_{\eta_c} \zeta(\lambda_k, \eta_c) d\eta_c \quad (2.36c)$$

$$CCF_{ik} = \int_0^1 \zeta(\lambda_i, \eta_c) \eta \eta_c \partial_{\eta_c} \zeta(\lambda_k, \eta_c) d\eta_c \quad (2.36d)$$

$$EC_{ijk} = \int_0^1 \zeta(\lambda_i, \eta_c) H_j(\eta) \partial_{\eta_c} \zeta(\lambda_k, \eta_c) d\eta_c \quad (2.36e)$$

$$FC_{ijk} = \int_0^1 \tilde{\zeta}(\lambda_i, \eta_c) F_j(\eta) \partial_{\eta_c} \tilde{\zeta}(\lambda_k, \eta_c) d\eta_c \quad (2.36f)$$

$$GC1_{ik} = \int_0^1 \tilde{\zeta}(\lambda_i, \eta_c) \frac{1}{2} \partial_{\eta_c} \tilde{\zeta}(\lambda_k, \eta_c) d\eta_c \quad (2.36g)$$

$$GC2_{ik} = \int_0^1 \tilde{\zeta}(\lambda_i, \eta_c) \frac{\eta_c^2}{2} \partial_{\eta_c} \tilde{\zeta}(\lambda_k, \eta_c) d\eta_c \quad (2.36h)$$

A condição inicial transformada do campo de concentração é dada por:

$$\overline{W}_k(0) = \int_0^1 \tilde{\zeta}(\lambda_i, \eta_c) W(0, \eta_c) d\eta_c \quad (2.36i)$$

De maneira similar, ao procedimento efetuado para determinação da equação da espessura da camada limite hidrodinâmica, faz-se necessário utilizar alguma expressão que relacione a camada limite hidrodinâmica com a de concentração.

Adota-se uma expressão para relação entre a camada limite de concentração e hidrodinâmica, a partir da correlação de Blasius, encontrada na literatura (CREMASCO, 1998), para esse caso específico de um escoamento bidimensional, regime permanente e laminar de um fluido incompressível, e propriedades constantes:

$$\frac{\delta_c(\chi)}{\delta(\chi)} = 0.976 Sc^{-1/3} \quad (2.37)$$

Derivando a equação 2.37, encontra-se uma expressão para determinar o sistema de equações proposto, dada por:

$$\frac{d\delta_c(\chi)}{d\chi} = 2.42048 Sc^{-1/3} \chi^{1/2} Re_\chi^{-1/2} \quad (2.38)$$

Faz-se necessário, determinar a condição inicial para espessura da camada limite de concentração, para evitar problemas de Stiff, utilizamos um valor muito pequeno para χ da ordem de 1×10^{-6} , na equação 2.37, encontrando:

$$\delta_c(1 \times 10^{-6}) = 4.84096 \times 10^{-6} Sc^{-1/3} Re_\chi^{-1/2} \quad (2.39)$$

Após a avaliação das integrais nas equações acima, os sistemas formados pelas equações (2.28, 2.30, 2.32, 2.33, 2.36 e 2.38) são truncados e resolvidos numericamente, através da rotina NDSolve do software MATHEMATICA, para um grande número de autovalores e autofunções suficientes para garantir a convergência. Com os potenciais transformados pode-se solicitar o inverso da fórmula para fornecer os campos de velocidade, temperatura e concentração, permitindo a identificação do perfil de camada limite hidrodinâmico, térmico e de concentração.

2.6 RESULTADOS

2.6.1 Camada Limite Hidrodinâmica

A Técnica da Transformada Integral Generalizada mostrou-se ser uma ferramenta importante para resolver o problema proposto, sendo capaz de determinar a espessura da camada limite hidrodinâmica e o perfil de velocidade.

O código computacional desenvolvido no software Mathematica 13, versão estudante, incorpora todas as etapas computacionais simbólicas e numéricas no procedimento de solução, usando a rotina NDSolve, sendo validado de diversas formas, incluindo a comparação com a solução de Blasius no campo hidrodinâmico.

Na maioria dos trabalhos publicados na literatura, o perfil de velocidade é determinado usando a solução de Blasius. Neste trabalho, o problema hidrodinâmico é resolvido usando a equação de quantidade de movimento e continuidade para determinar a velocidade e o gradiente de pressão. Em seguida, a equação de energia é usada para calcular o campo de temperatura e a equação da concentração é utilizada para determinar a espessura de camada limite de concentração.

A Figura 5 mostra o comportamento da espessura da camada limite em função da posição x [m], onde observa-se que a solução obtida pelo presente trabalho é relativamente próxima da solução de Blasius. O gráfico de espessura da camada limite mostra ainda mais desvios entre a solução proposta e as aproximações de Karman-Pohlhausen de quinta e terceira ordem. Essas duas aproximações polinomiais foram escolhidas por EYO, OGBONNA e EKPENYOUNG (2012) pois nos cálculos de erro para o parâmetro de

similaridade, obtiveram 7,18 e 3,58%, respectivamente. As demais aproximações polinomiais de ordem diferente apresentaram erros maiores.

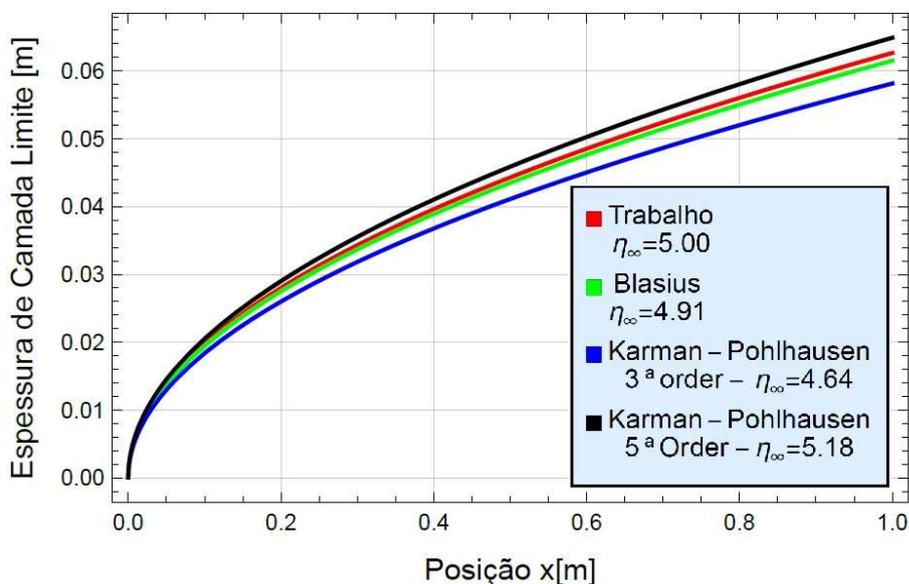


Figura 5 - Comportamento da espessura da camada limite hidrodinâmica em função da posição x [m]

A Figura 6 mostra o comportamento da espessura da camada limite hidrodinâmica calculada pelo presente trabalho e compara com NAVEIRA (2006) que usa o método de similaridade (equação de Blasius) e com SEYYED et al. (2019), que utilizam uma nova proposta para o perfil de velocidade, onde utiliza um polinômio de ordem m , encontrando $m=2,5243$. Pode-se verificar que o trabalho usando GITT está mais próximo do trabalho de NAVEIRA (2006).

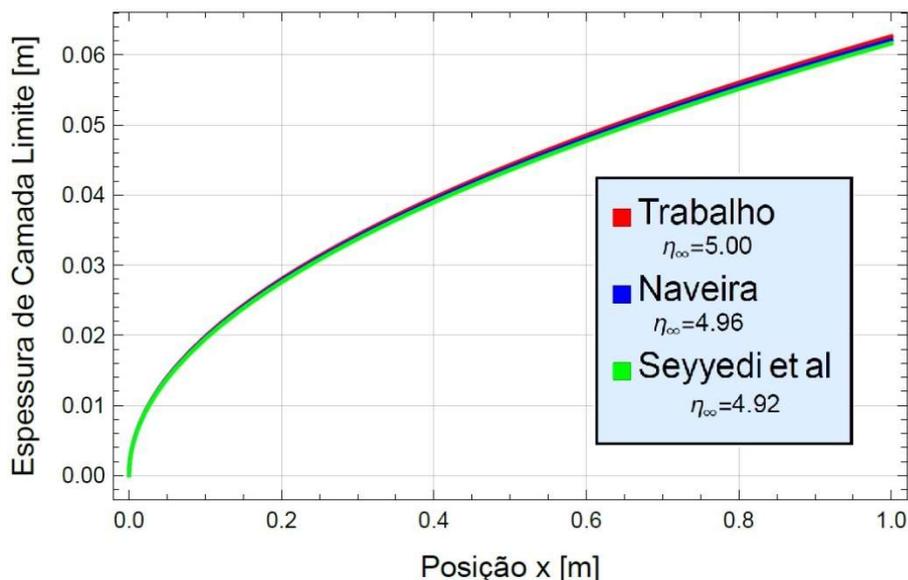


Figura 6 - Comportamento da espessura da camada limite hidrodinâmica em função da posição x [m]

A Figura 7 mostra o comportamento da velocidade adimensional em função da posição x e y ao longo da placa, pode-se verificar que na entrada da placa, existe uma perturbação proveniente da velocidade está ainda em desenvolvimento e depender das posições x e y , quando a velocidade está completamente desenvolvida o perfil se torna parabólico, característica onde a velocidade depende apenas da posição y .

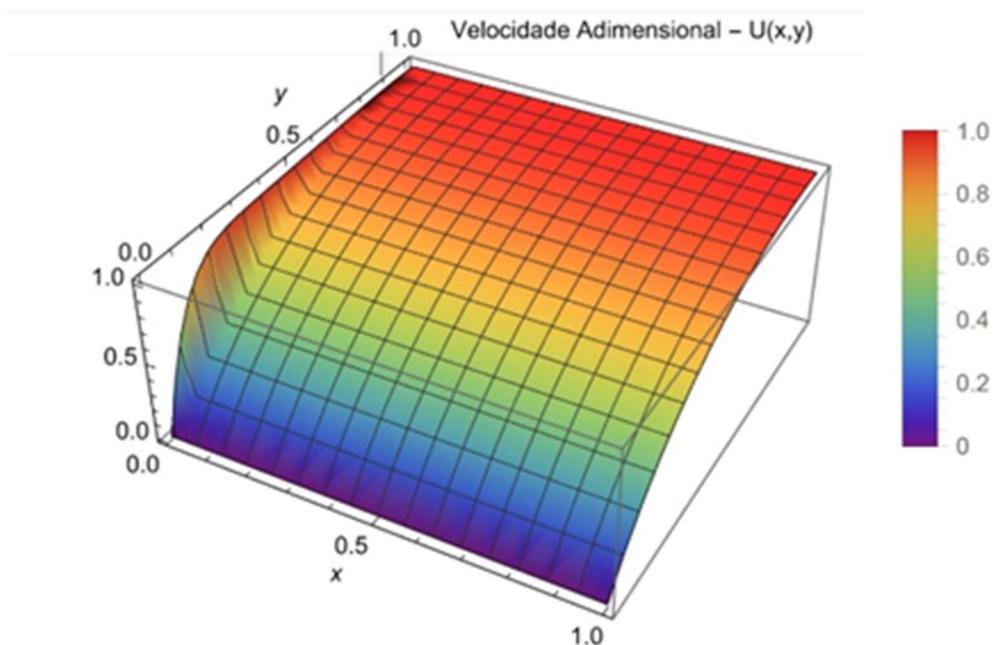


Figura 7 - Perfil da velocidade adimensional em função das posições x e y .

A Tabela 2 mostra o comportamento da espessura da camada limite hidrodinâmica em comparação com NAVEIRA (2006) e solução exata, obtendo excelentes resultados, com erros aceitáveis da ordem de 1%, o que permite comprovar que o modelo adotado utilizando a rotina NDSolve do software Mathematica 13.0, versão estudante, pode ser perfeitamente usado.

A Tabela 3 mostra o comportamento da espessura da camada limite hidrodinâmica comparando com JAGUARIBE (2020) que utiliza a série de Maclaurin, obtendo dois valores de X (56,0495 e 58,8154) para N=461 (número de termos da série), obtendo o parâmetro de similaridade $\eta_{\infty}=5,52$ e $\eta_{\infty}=4,68$, respectivamente. A partir disso, pode-se determinar os erros relativos à solução exata da ordem de 10,36 e 6,49 %, respectivamente. Esses erros obtidos por JAGUARIBE (2020) devem-se à metodologia aplicada, onde utiliza uma série de Maclaurin com 461 termos para resolver o problema proposto, encontrando η_{∞} distante da solução exata.

Tabela 2 - Espessura da camada limite hidrodinâmica em função da posição $x[m]$ ao longo da placa.

X [m]	Espessura da camada limite hidrodinâmica [m]				
	GITT $\eta_{\infty} = 5.00$	Solução exata	Erro relativo (%)	NAVEIRA (2006) $\eta_{\infty} = 4.96$	Erro relativo (%)
1	0,0626492	0,0626498	0,001	0,0621486	0,800
0.9	0,0594343	0,0594348	0,001	0,0589594	0,800
0.8	0,0560352	0,0560357	0,001	0,0555874	0,800
0.7	0,0524161	0,0524166	0,001	0,0519973	0,800
0.6	0,0485278	0,0485283	0,001	0,0481401	0,800
0.5	0,0442996	0,0443001	0,001	0,0439457	0,800
0.4	0,0396227	0,0396232	0,001	0,0393062	0,800
0.3	0,0343142	0,0343147	0,001	0,0340402	0,800
0.2	0,0280173	0,0280179	0,002	0,0277937	0,800
0.1	0,0198111	0,0198116	0,003	0,0196531	0,800
1.1×10^{-6}	0,0000626	0,0000626	0,000	0,0000652	4,153

Tabela 3 - Espessura da camada limite hidrodinâmica da posição x [m] ao longo da placa.

X [m]	Espessura da camada limite hidrodinâmica [m]				
	GITT $\eta_{\infty} = 5.00$	JAGUARIBE (2020) $\eta_{\infty} = 5.52$	Erro relativo (%)	JAGUARIBE (2020) $\eta_{\infty} = 4.68$	Erro relativo (%)
1	0,0626492	0,0691430	10,365	0,0585840	6,489
0.9	0,0594343	0,0655948	10,365	0,0555776	6,489
0.8	0,0560352	0,0618434	10,365	0,0523991	6,489
0.7	0,0524161	0,0578492	10,365	0,0490149	6,489
0.6	0,0485278	0,0535579	10,365	0,0453789	6,489
0.5	0,0442996	0,0488915	10,366	0,0414251	6,489
0.4	0,0396227	0,0437299	10,366	0,0370518	6,488
0.3	0,0343142	0,0378712	10,366	0,0320878	6,488
0.2	0,0280173	0,0309217	10,366	0,0261995	6,488
0.1	0,0198111	0,0218649	10,367	0,0185259	6,487
1.1×10^{-6}	0,0000626	0,0000725	15,815	0,0000614	1,917

2.6.2 Camada Limite Térmica

Foi desenvolvido um código computacional no software MATHEMATICA, onde foram calculados os coeficientes das integrais resolvidas analiticamente, determinadas as condições iniciais do problema proposto e utilizado a rotina NDSolve para determinação do problema de valor inicial, aplicando depois a inversa para determinar o campo térmico.

Na Tabela 4 mostramos a comparação da temperatura ao longo da placa com resultados obtidos com NAVEIRA (2006), SEYYEDI et al. (2019) e com a equação de Blasius apresentando boa concordância. Além disso, mostramos a convergência da temperatura na terceira casa decimal com 120 autovalores.

Tabela 4 - Comparação da temperatura da interface [°C] ao longo da posição x [m] na placa com resultados obtidos por NAVEIRA (2006), SEYYEDI et al. (2019) e com a equação de Blasius.

Autovalores	X [m]				
	0.01	0.025	0.05	0.075	0.1
Temperatura da Interface [°C]					
10	23.6883	25.8318	28.2473	30.1009	31.6635
20	23.7036	25.8558	28.2814	30.1426	31.7117
30	23.7086	25.8638	28.2927	30.1565	31.7277
40	23.7111	25.8678	28.2984	30.1634	31.7357
50	23.7126	25.8702	28.3017	30.1675	31.7404
60	23.7137	25.8718	28.3040	30.1703	31.7437
70	23.7144	25.8729	28.3056	30.1722	31.7459
80	23.7149	25.8738	28.3068	30.1738	31.7477
90	23.7154	25.8745	28.3078	30.1750	31.7490
100	23.7156	25.8750	28.3085	30.1758	31.7500
110	23.7159	25.8754	28.3091	30.1766	31.7509
120	23.7162	25.8758	28.3096	30.1772	31.7516
NAVEIRA	23.7178	25.8717	28.3008	30.1652	31.7370
SEYYEDI et al.	23.7171	25.8768	28.3106	30.1782	31.7526
BLASIUS	23.7343	25.9044	28.3008	30.2267	31.8088

A Figura 8 mostra o comportamento da temperatura em função da posição x e y ao longo da placa, utilizando a técnica da transformada integral generalizada, apresentando uma boa harmonia com a solução obtida por NAVEIRA (2006). Vale ressaltar que, como pode ser visto, em relação à posição x , a distribuição da temperatura é semelhante ao perfil da espessura da camada limite térmica, pois a posição y é muito pequena, não havendo variação significativa nesta direção. Isso pode ser comprovado com os valores apresentados na Tabela 4, onde fixamos uma posição em y e variamos a posição x .

A Figura 9 mostra o comportamento da espessura da camada limite térmica calculadas pelo presente trabalho e comparadas com NAVEIRA (2006) e SEYYEDI et al. (2019), onde se verifica que a espessura da camada limite térmica proposta se aproxima mais de NAVEIRA (2006) do que SEYYEDI et al. (2019), isso se deve ao parâmetro de similaridade $\eta_{\infty} = 4,96$ e $\eta_{\infty} = 4,92$, respectivamente.

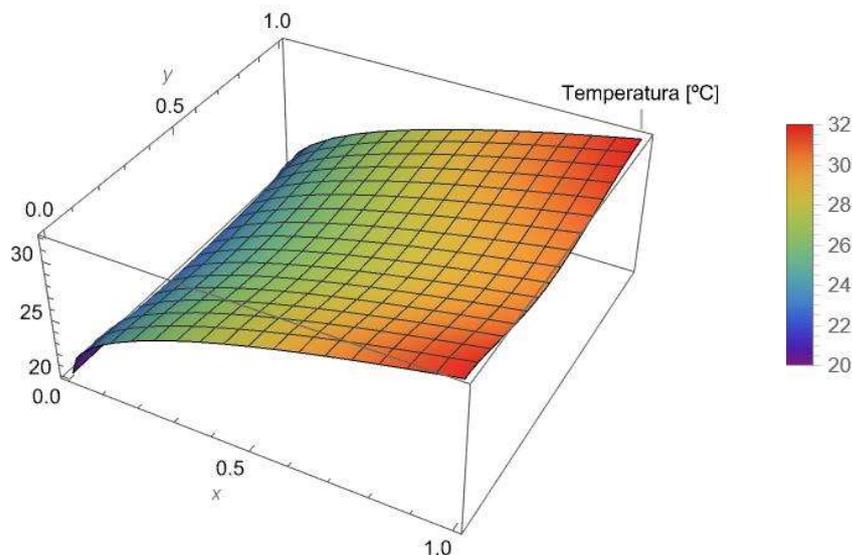


Figura 8 - Perfil de temperatura ao longo da placa com variação das posições x e y .

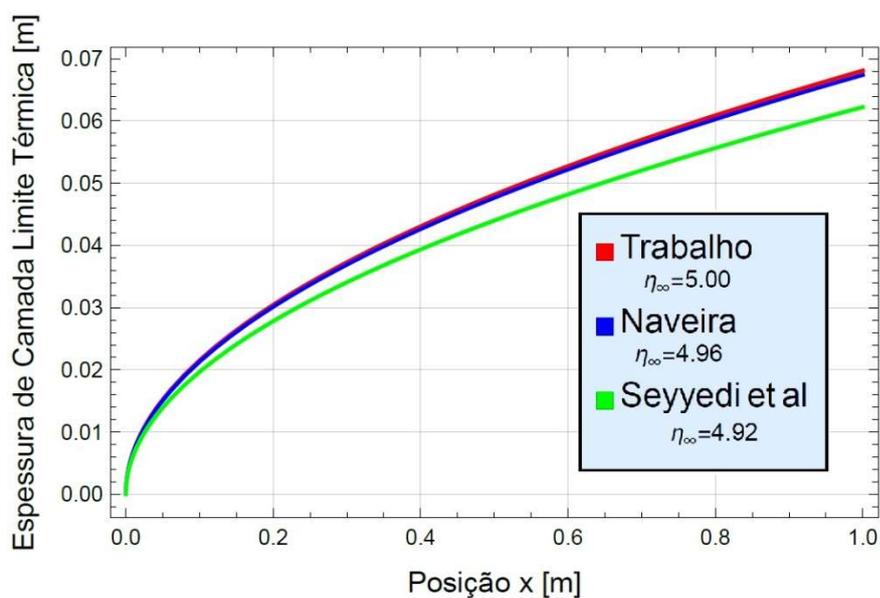


Figura 9 - Comportamento da espessura da camada limite térmica em função da posição x [m].

A Figura 10 mostra o comportamento da espessura da camada limite térmica variando o número de Prandtl, pode-se verificar que a espessura da camada limite térmica aumenta à medida que o número de Prandtl diminui. Isto prova que o modelo adotado está correto, pois na literatura para $Pr < 1$, a espessura da camada limite térmica é maior que a espessura da camada limite hidrodinâmica, e para $Pr > 1$, ocorre o contrário.

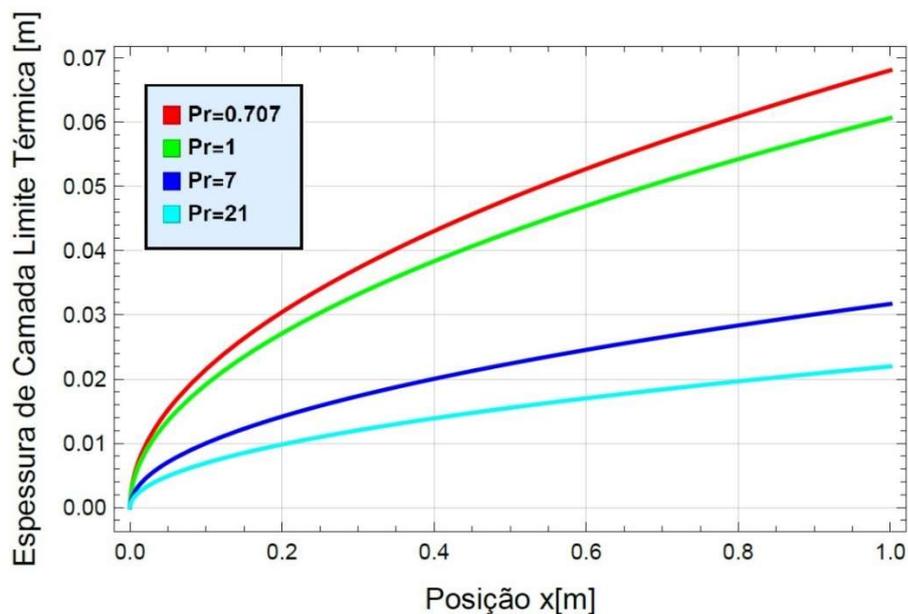


Figura 10 - Comportamento da espessura da camada limite térmica em função da posição x [m], variando o número de Prandtl.

A Figura 11 mostra o comportamento da espessura da camada limite térmica variando o número de Reynolds, pode-se verificar que a espessura da camada limite térmica aumenta à medida que o número de Reynolds diminui.

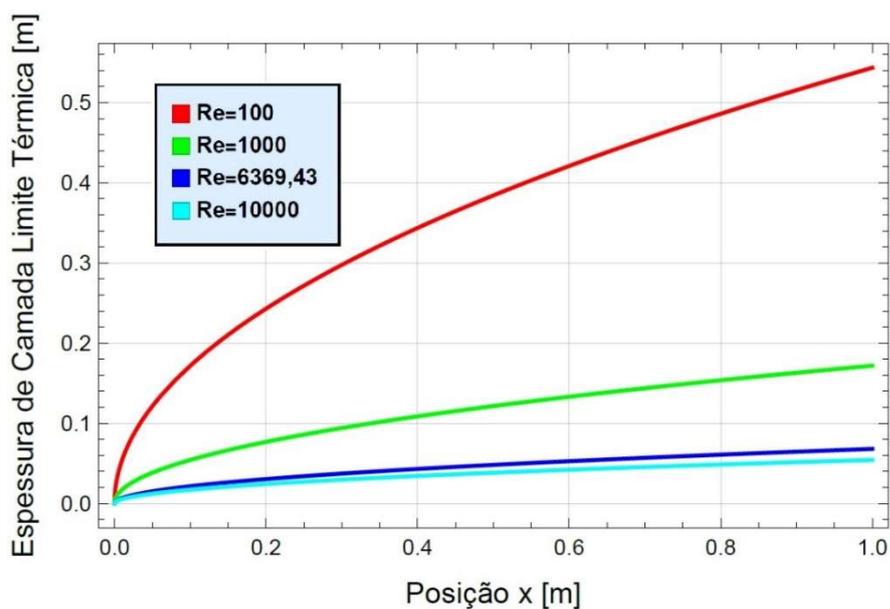


Figura 11 - Comportamento da espessura da camada limite térmica em função da posição x [m], variando o número de Reynolds.

2.6.3 Camada Limite de Concentração

Foi desenvolvido um código computacional no software MATHEMATICA, no qual foram calculados os coeficientes das integrais resolvidas analiticamente, determinadas as condições iniciais do problema proposto e utilizado a rotina NDSolve para determinação do problema de valor inicial de concentração.

Na Tabela 5 demonstra a concentração média ao longo da placa. Além disso, verifica-se a convergência da concentração na segunda casa decimal com 120 autovalores.

Tabela 5 - Concentração média ao longo da posição na placa.

	X [m]				
	0.01	0.10	1	10	100
Autovalores	Concentração média [m]				
10	0.001367	0.001367	0.001369	0.001374	0.001390
20	0.002722	0.002723	0.002726	0.002736	0.002769
30	0.004067	0.004068	0.004073	0.004088	0.004137
40	0.005404	0.005406	0.005412	0.005433	0.005496
50	0.006733	0.006736	0.006744	0.006769	0.006848
60	0.008056	0.008059	0.008068	0.008098	0.008193
70	0.009371	0.009375	0.009386	0.009421	0.009530
80	0.010680	0.010684	0.010697	0.010736	0.010861
90	0.011982	0.011987	0.01200	0.01245	0.012185
100	0.013277	0.013282	0.013298	0.013347	0.013502
110	0.014566	0.014572	0.014589	0.014643	0.014813
120	0.015208	0.015214	0.015232	0.015289	0.015466

A Figura 12 mostra o comportamento da espessura da camada limite hidrodinâmica, térmica e de concentração calculada pelo presente trabalho. Verifica-se que como $Pr=0.707$, a espessura da camada limite térmica é maior que a da hidrodinâmica, conforme previsto na literatura. A espessura da camada limite de concentração utilizou $Sc=1$, logo ela se aproxima da hidrodinâmica.

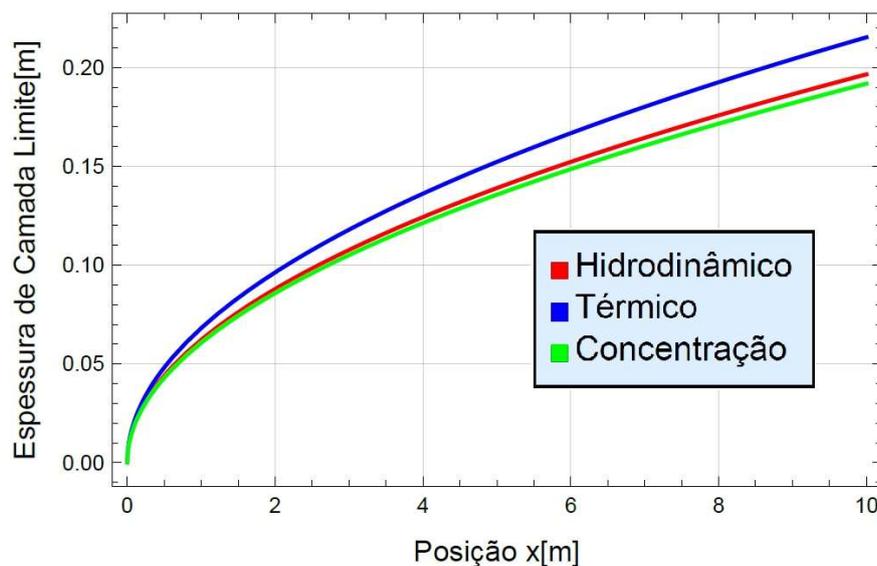


Figura 12 - Comportamento da espessura das camadas limites em função da posição x [m].

2.7 CONCLUSÕES

Neste capítulo, preocupou-se em observar as soluções e interpretação física de um problema que trata o campo hidrodinâmico, térmico e de concentração em um escoamento laminar sobre uma placa plana de espessura não desprezível e comprimento finito, em regime permanente.

A solução para a determinação das espessuras da camada limite hidrodinâmica, térmica e de concentração permitiram a obtenção de resultados, que podem ser utilizados a nível de engenharia para projetos e desenvolvimento de novos equipamentos.

Os resultados obtidos na determinação da espessura da camada limite hidrodinâmica comparados com os resultados da solução exata foram muito próximos com um erro inferior a 1%. Isso corrobora para a validação do modelo proposto, além disso, comparamos com as aproximações polinomiais de Karman-Pohlhausen de terceira e quinta ordem (EYO, OGBONNA e EKPENYOUNG, 2012) mostrando que essas aproximações causam um desvio maior em relação a solução analítica exata. Comparamos também com a solução obtida por JAGUARIBE (2020) utilizando a série de MacLaurin, apresentando também um desvio em relação a solução analítica exata.

Os resultados obtidos no campo térmico foram muito satisfatórios quando comparados com os resultados encontrados em NAVEIRA (2006) e SEYYEDI et al. (2019), além de comprovar que a espessura da camada limite térmica é inversamente proporcional ao número de Prandtl e Reynolds, conforme previsto na literatura.

CAPÍTULO III

SOLUÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURA E CONCENTRAÇÃO EM UM ABSORVEDOR HORIZONTAL COM ESPESSURA DE PELÍCULA CONSTANTE E VARIÁVEL

O objetivo deste capítulo é resolver o problema de transferência simultânea de calor e massa com formulação em variáveis primitivas, fazendo uso de uma mudança de variável para determinar o perfil de temperatura e de concentração, em um escoamento laminar, unidimensional em película sobre um tubo de um absorvedor horizontal em coordenadas cartesianas com perfil de velocidade completamente desenvolvido variando o número de Biot , usando a Técnica da Transformada Integral Generalizada, por meio do software MATHEMATICA 12.3 versão estudante e comparando com os trabalhos de Tese de WASSENAAR (1994), SILVA (2010) e ANDRADE (2018).

3.1 INTRODUÇÃO

O sistema de refrigeração por absorção tem despertado cada vez mais interesse devido à sua economia de energia, uma vez que pode aproveitar os resíduos térmicos como fonte de calor na produção de frio, resultando na redução do consumo de energia elétrica. Uma das vantagens dos ciclos de absorção é que eles não utilizam refrigerantes agressivos ao meio ambiente, além de gerarem menos ruído e vibração, porém, seus valores de COP geralmente são muito menores quando comparados aos sistemas de compressão de vapor e seu custo inicial pode ser alto. O par LiBr-H₂O está sendo amplamente utilizado por ser um fluido de trabalho ecologicamente correto.

O processo de absorção é complexo devido à transferência simultânea de massa e calor que ocorre no fluxo bifásico absorvente-absorvente e a relação de equilíbrio na interface vapor-líquido.

Os absorvedores de filme descendente são comumente usados em sistemas de refrigeração por absorção e têm um papel crítico na eficiência e no custo do ciclo. Nestes absorvedores, uma película líquida de absorvente que cai sobre uma superfície fica em contato com o vapor absorvido. Embora a absorção de filme descendente em tubos horizontais seja utilizada há décadas em muitas aplicações, o tema ainda continua despertando o interesse dos pesquisadores, pois ainda não foram totalmente compreendidos, principalmente quando se trata de absorvedores onde a solução é pulverizada sobre os tubos a partir do e o vapor refrigerante flui para o absorvedor, que é considerado o componente mais importante do sistema, pois, além da transferência simultânea de calor e massa, há também o tratamento do filme descendente.

NAKORYAKOV e GRIGOR'EVA (1977) obtiveram soluções analíticas para transferência combinada de calor e massa por técnicas de separação de variáveis de Fourier para absorção do filme laminar descendente em uma placa horizontal isotérmica. Eles concluíram que a solução para o problema de absorção dependia das condições de contorno e de entrada, bem como dos números de Lewis, Prandtl e Reynolds e um número adimensional relacionando o calor específico de solução e o calor de absorção, denominado de fator de acoplamento.

GROSSMAN (1983) desenvolveu um modelo numérico para resolver as equações simplificadas de energia e fração de massa para um filme descendente de LiBr-H₂O em uma parede adiabática ou isotérmica. Utilizando um método de linhas ou método de semi-discretização pelo método das diferenças finitas, foram produzidos os resultados adimensionais de temperatura e concentração da interface e da seção transversal.

CONSENZA e VLIET (1990) investigaram experimentalmente a absorção do filme descendente de LiBr em tubos horizontais lisos. Uma única coluna de tubos sendo resfriada internamente foi usada como conjunto absorvedor. A transferência de calor por absorção foi correlacionada em termos de números de Nusselt e Reynolds.

WASSENAAR (1994) aplicou o método de elementos finitos de Galerkin em um filme descendente de espessura constante para solução de refrigerante LiBr-H₂O e comparou-o com resultados experimentais, e encontrou uma correlação muito forte entre os resultados de absorção previstos e medidos.

KILLION e GARIMELLA (2001) fizeram uma revisão abrangente dos esforços significativos que os pesquisadores fizeram para modelar matematicamente os fenômenos acoplados de transferência de calor e massa que ocorrem durante o processo de absorção.

KILLION e GARIMELLA (2004) apresentaram um método numérico para investigar a formação de gotas e o impacto em tubos horizontais. O pacote CFD, usando Fluent para modelar um filme LiBr em contato com o ar. Uma equação de continuidade modificada e equações de momento para o filme líquido foram resolvidas usando o método PISO de forma segregada. Eles apresentaram resultados de visualização de fluxo para ilustrar o padrão de fluxo e a formação de gotículas.

SILVA e SANTOS (2016) estudaram o fenômeno de transferência simultânea de calor e massa em absorvedores horizontais de máquinas de refrigeração por absorção, em duas situações (parade adiabática e isotérmica), considerando a espessura constante do filme ao longo do escoamento, utilizando a técnica da transformada integral generalizada para resolver o problema e encontrar resultados satisfatórios em comparação com os dados obtidos na literatura.

MITTERMAIER e ZIEGLER (2016) investigaram o impacto dos perfis de velocidade de entrada na fração de massa e no perfil de temperatura através do filme líquido, bem como no fluxo de massa absorvido. Eles observaram que quando a solução flui com uma velocidade uniforme em vez de um perfil totalmente desenvolvido, a absorção começa a uma distância menor da entrada.

3.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA COM ESPESSURA CONSTANTE

Para ideal compreensão do presente caso, necessário se faz que seja considerada a seguinte situação: o tubo horizontal onde a solução absorvente Brometo de Lítio (LiBr) escoar sobre o tubo com perfis de velocidade, temperatura e concentração constantes. Para tanto, buscar-se-á determinar as características hidrodinâmicas, térmicas e de concentração deste escoamento ao longo da região, por meio da determinação do perfil de temperatura e concentração.

A representação esquemática da distribuição dos fluidos de vapor d'água e da solução líquida água-Brometo de Lítio descendente sobre tubos horizontais é mostrada na Figura 13.

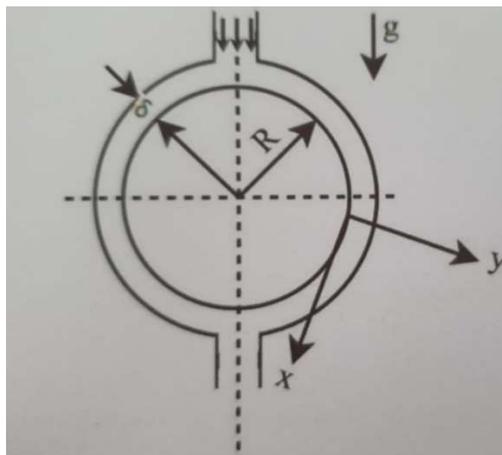


Figura 13 - Ilustração do Problema Proposto (ANDRADE, 2018).

A Figura 14 mostra o processo de absorção entre tubos e como o filme se comporta no escoamento, de três formas distintas, veja-se:

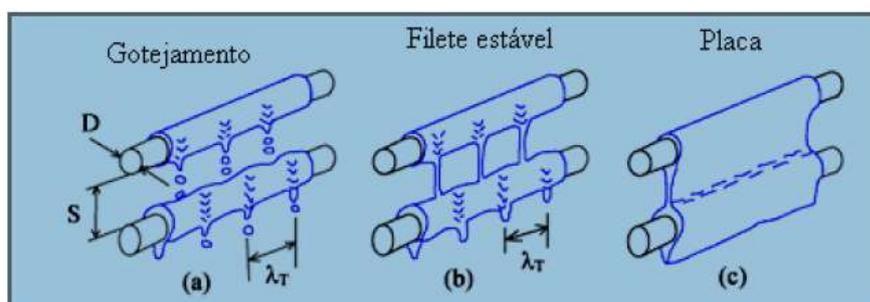


Figura 14 - Escoamento do filme líquido: (a) gotejamento, (b) filete estável, (c) placa (Adaptada de SILVA, 2010).

Para a modelagem do problema físico proposto, faz-se necessário assumir algumas hipóteses simplificadoras:

- O sistema está em regime permanente;
- O fluido é newtoniano e possui propriedades físicas constantes;
- Escoamento unidimensional na direção longitudinal;
- Perfil de velocidade constante completamente desenvolvido;
- Escoamento incompressível;
- A temperatura na parede e na superfície livre é imposta para obtenção dos resultados;
- Todo calor de absorção é liberado na interface;

- A transferência de calor do líquido para o vapor é considerada desprezível;
- A transferência de calor por radiação é considerada desprezível;
- A espessura do filme é extremamente pequena em relação ao raio do tubo, desta forma, pode-se usar a formulação em coordenadas retangulares.

Considerando as hipóteses simplificadoras descritas acima, as equações representativas das equações da energia e da concentração em variáveis primitivas na forma dimensional, são definidas abaixo:

Equação da Energia:

$$u \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} \quad 0 < y < \delta, \quad x > 0 \quad (3.1a)$$

Cuja condições inicial e de contorno são dadas como:

$$T(0, y) = T_0 \quad (3.1b)$$

$$-k \left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \bar{h} T(x, 0) \quad (3.1c)$$

$$k \left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} \right|_{y=\delta} = H_{abs} \rho \left. \frac{D}{c_s} \frac{\partial C(x,y)}{\partial y} \right|_{y=\delta} \quad (3.1d)$$

Equação da Concentração:

$$u(y) \frac{\partial C(x,y)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C(x,y)}{\partial y^2} \quad 0 < y < \delta, \quad x > 0 \quad (3.2a)$$

Cuja condições inicial e de contorno são dadas como:

$$C(0, y^*) = C_0 \quad (3.2b)$$

$$\left. \frac{\partial C(x,y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (3.2c)$$

$$T(x, \delta) = A \cdot C(x, \delta) + B \quad (3.2d)$$

Utilizando os grupos adimensionais abaixo:

$$X = \frac{1}{Re} \frac{x}{\delta} \quad ; \quad Y = \frac{y}{\delta} \quad ; \quad U(Y) = \frac{u(y)}{U_\infty} = \frac{3}{2} (2Y - Y^2) \quad (3.3a-c)$$

$$\theta(X, Y) = \frac{T(x, y) - T_0}{T_e - T_0} \quad ; \quad W(X, Y) = \frac{c(x, y) - c_0}{c_e - c_0} \quad (3.3d-e)$$

$$T_e = A W_0 + B \quad ; \quad T_0 = A W_e + B \quad (3.3f-g)$$

Sendo T_e representando a temperatura de uma solução de fração de massa W_0 em equilíbrio com o vapor; C_e representando a fração de massa de uma solução de temperatura T_0 em equilíbrio com o vapor.

Substituindo os grupos adimensionais no problema geral, obtém-se:

Equação da Energia:

$$U(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} = \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} \quad 0 < y < 1, \quad x > 0 \quad (3.4a)$$

Cujas condições inicial e de contorno são dadas como:

$$\theta(0, Y) = 0 \quad (3.4b)$$

$$\frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=0} + Bi \theta(X, 0) = 0 \quad (3.4c)$$

$$\frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=1} = f_{ac} \frac{\partial W(X, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=1} \quad (3.4d)$$

Na condição de contorno (3.4d) f_{ac} representa um fator de acoplamento na interface líquido-vapor determinado pela expressão:

$$f_{ac} = \frac{D}{\alpha} \frac{1}{C_{INT}} \frac{H_{abs}}{C_P} \frac{C_e - C_0}{T_e - T_0} \quad 0 < y < 1, \quad x > 0 \quad (3.5)$$

Equação da Concentração:

$$U(Y) \frac{\partial W(X,Y)}{\partial X} = \frac{1}{Le} \frac{\partial^2 W(X,Y)}{\partial Y^2} \quad 0 < y < 1, \quad x > 0 \quad (3.6a)$$

Cuja condições inicial e de contorno são dadas como:

$$W(0, Y) = 0 \quad (3.6b)$$

$$\left. \frac{\partial W(X,Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0 \quad (3.6c)$$

$$\theta(X, 1) + W(X, Y) = 1 \quad (3.6d)$$

As equações (3.4a) e (3.6a) formam um sistema linear de EDP's parabólicas de segunda ordem com um conjunto de condições de contorno apresentando não-homogeneidade nas interfaces. No sistema proposto utilizou-se balanço integral a fim de resolver o problema proposto, conforme será visto mais detalhadamente na próxima seção.

3.3 APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Com o objetivo de transformar o problema proposto em um sistema de equações diferenciais ordinárias faz-se necessário a utilização de um problema auxiliar com solução já conhecida, para eliminar uma dependência espacial, tornando-o um sistema de equações diferenciais ordinárias.

O problema de Autovalor Auxiliar para o campo térmico é definido como:

$$\frac{d^2 \Gamma_i(Y)}{dY^2} + \gamma_i^2 \Gamma_i(Y) = 0 \quad 0 < Y < 1 \quad (3.7)$$

$$\frac{d\Gamma_i(Y)}{dY} + Bi \Gamma_i(Y) = 0 \quad Y = 0 \quad (3.7a)$$

$$\frac{d\Gamma_i(Y)}{dY} = 0 \quad Y = 1 \quad (3.7b)$$

A qual é resolvida pelas autofunções, autovalores e norma, respectivamente, como:

$$\Gamma_i(Y) = \text{Cos}(\gamma_i (1 - Y)) \quad (3.7c)$$

$$-Bi \text{Cos}(\gamma_i) + \text{Sen}(\gamma_i) \gamma_i = 0, i = 1, 2, 3 \dots \quad (3.7d)$$

$$N_i = \int_0^1 \Gamma_i(Y)^2 dY \quad (3.7e)$$

A autofunção normalizada é dada por:

$$\tilde{\Gamma}_i(Y) = \frac{\Gamma_i(Y)}{\sqrt{N_i}} \quad (3.7f)$$

O problema de Autovalor Auxiliar para o campo de concentração é definido como:

$$\frac{d^2\Phi_i(Y)}{dY^2} + \varepsilon_i^2 \Phi_i(Y) = 0 \quad 0 < Y < 1 \quad (3.8)$$

$$\frac{d\Phi_i(Y)}{dY} = 0 \quad Y = 0 \quad (3.8a)$$

$$\Phi_i(Y) = 0 \quad Y = 1 \quad (3.8b)$$

A qual é resolvida pelas autofunções, autovalores e norma, respectivamente, como:

$$\Phi_i(Y) = \text{Cos}(\varepsilon_i Y) \quad (3.8c)$$

$$\varepsilon_i = \frac{(2i-1)\pi}{2}, i = 1, 2, 3 \dots \quad (3.8d)$$

$$NC_i = \int_0^1 \Phi_i(Y)^2 dY = \frac{1}{2} \quad (3.8e)$$

A autofunção normalizada é dada por:

$$\widetilde{\Phi}_i(Y) = \frac{\Phi_i(Y)}{\sqrt{NC_i}} = \sqrt{2} \text{Cos}(\varepsilon_i Y) \quad (3.8f)$$

Os problemas de Autovalores Auxiliares permitem a definição dos pares de transformada do campo térmico e de concentração, respectivamente:

$$\bar{\theta}_j(X) = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_j(Y) \theta(X, Y) dY \quad \text{Transformada} \quad (3.9)$$

$$\theta(X, Y) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_j(Y) \bar{\theta}_j(X) \quad \text{Inversa} \quad (3.10)$$

$$\bar{W}_j(X) = \int_0^1 \widetilde{\Phi}_j(Y) W(X, Y) dY \quad \text{Transformada} \quad (3.11)$$

$$W(X, Y) = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{\Phi}_j(Y) \bar{W}_j(X) \quad \text{Inversa} \quad (3.12)$$

Seguindo o formalismo da técnica, após aplicarem-se os operadores $\int_0^1 \Gamma_i(Y) dY$ e $\int_0^1 \theta(X, Y) dY$ nas Equações (3.4a) e (3.6a) respectivamente e somar os resultados, a equação resultante torna-se:

$$\int_0^1 U(Y) \Gamma_i(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} dY + \gamma_i^2 \int_0^1 \Gamma_i(Y) \theta(X, Y) dY = \int_0^1 \Gamma_i(Y) \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} dY - \int_0^1 \theta(X, Y) \frac{d^2 \Gamma_i(Y)}{dY^2} dY \quad (3.13)$$

O lado esquerdo da equação (3.13) representa um integral de volume que será transformado em uma integral de superfície através do uso da fórmula de Green (COTTA, 1993) tornando-se:

$$\int_0^1 U(Y) \Gamma_i(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} dY + \gamma_i^2 \bar{\theta}_i(X) = \Gamma_i(Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} - \theta(X, Y) \frac{d\Gamma_i(Y)}{dY} \Big|_0^1 \quad (3.14)$$

Aplicando as condições de contorno (3.4c), (3.4d), (3.7a) e (3.7b) no lado esquerdo da equação, obtém-se:

$$Y = 0 \rightarrow \Gamma_i(0) \frac{\partial \theta(X,0)}{\partial Y} - \theta(X,0) \frac{d\Gamma_i(0)}{dY} = 0 \quad (3.15)$$

$$Y = 1 \rightarrow \Gamma_i(1) \frac{\partial \theta(X,1)}{\partial Y} - \theta(X,1) \frac{d\Gamma_i(1)}{dY} = \Gamma_i(1) f_{ac} \left. \frac{\partial W(X,Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} \quad (3.16)$$

Inserindo os resultados (3.15) e (3.16) na equação (3.13), obtém-se:

$$\int_0^1 U(Y) \Gamma_i(Y) \frac{\partial \theta(X,Y)}{\partial X} dY + \gamma_i^2 \bar{\theta}_i(X) = \Gamma_i(1) f_{ac} \left. \frac{\partial W(X,Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} \quad (3.17)$$

Fazendo uso do balanço integral proposto por SILVA (2010), a derivada da concentração na posição $Y=1$ é dada por:

$$\left. \frac{\partial W(X,Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} = Le \int_0^1 U(Y) \frac{\partial W(X,Y)}{\partial X} dY \quad (3.18)$$

Substituindo a equação (3.18) na equação (3.17) tem-se:

$$\int_0^1 U(Y) \Gamma_i(Y) \frac{\partial \theta(X,Y)}{\partial X} dY + \gamma_i^2 \bar{\theta}_i(X) = \Gamma_i(1) f_{ac} Le \int_0^1 U(Y) \frac{\partial W(X,Y)}{\partial X} dY \quad (3.19)$$

De maneira similar é resolvido o problema de concentração obtendo-se a equação (3.20).

$$\int_0^1 U(Y) \widetilde{\Phi}_j(Y) \frac{\partial W(X,Y)}{\partial X} dY + \frac{\varepsilon_i^2}{Le} \bar{W}_i(X) = \frac{1}{Le} \frac{d\widetilde{\Phi}_j(1)}{dY} \theta(X,1) - \frac{1}{Le} \frac{d\widetilde{\Phi}_j(1)}{dY} \quad (3.20)$$

Para evitar o potencial transformado na fronteira é realizado um balanço integral sobre a equação (3.6a) resultando em:

$$\theta(X,1) = (Bi + 1) \theta(X,0) + \int_0^1 \left(\int_0^{Y'} U(Y') \frac{\partial \theta(X,Y')}{\partial X} dY' \right) dY \quad (3.21)$$

Introduzindo a equação (3.21) na equação (3.20) obtém-se:

$$\int_0^1 U(Y) \widetilde{\Phi}_j(Y) \frac{\partial W(X,Y)}{\partial X} dY + \frac{\varepsilon_i^2}{Le} \overline{W}_i(X) = \frac{1}{Le} \frac{d\widetilde{\Phi}_j(1)}{dY} \left((Bi + 1)\theta(X, 0) + \int_0^1 \left(\int_0^{Y'} U(Y') \frac{\partial \theta(X,Y')}{\partial X} dY' \right) dY \right) - \frac{1}{Le} \frac{d\widetilde{\Phi}_j(1)}{dY} \quad (3.22)$$

Aplicando-se as fórmulas das inversas (3.10) e (3.12) nas equações (3.19) e (3.22) respectivamente, obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias representativas dos potenciais desejados e que, escrito de forma completa, assumem a seguinte forma:

Energia

$$\sum_{j=1}^{\text{nauv}} \left(CT1_{ij} \frac{d\overline{\theta}_j(X)}{dX} - CT2_{ij} \frac{d\overline{W}_j(X)}{dX} \right) + \gamma_i^2 \overline{\theta}_i(X) = Bi \sum_{j=1}^{\text{nauv}} CT3_{ij} \overline{\theta}_j(X) \quad (3.23a)$$

$$\overline{\theta}_i(0) = 0 \quad (3.23b)$$

$$CT1_{ij} = \int_0^1 U(Y) \widetilde{\Gamma}_i(Y) \widetilde{\Gamma}_j(Y) dY \quad (3.23c)$$

$$CT2_{ij} = fac \ Le \ \widetilde{\Gamma}_j(1) \int_0^1 U(Y) \widetilde{\Phi}_j(Y) dY \quad (3.23d)$$

$$CT3_{ij} = \widetilde{\Gamma}_i(0) \widetilde{\Gamma}_j(0) \quad (3.23e)$$

Concentração

$$\sum_{j=1}^{\text{nauv}} \left(CC1_{ij} \frac{d\overline{W}_j(X)}{dX} - CC2_{ij} \overline{\theta}_j(X) - CC3_{ij} \frac{d\overline{\theta}_j(X)}{dX} \right) + \frac{\varepsilon_i^2}{Le} \overline{W}_i(X) + CC4_i = 0 \quad (3.24a)$$

$$\overline{W}_i(0) = 0 \quad (3.24b)$$

$$CC1_{ij} = \int_0^1 U(Y) \widetilde{\Phi}_i(Y) \widetilde{\Phi}_j(Y) dY \quad (3.24c)$$

$$CC2_{ij} = \frac{1}{Le} \frac{d\widetilde{\Phi}_i(1)}{dY} (Bi + 1) \widetilde{\Gamma}_j(0) \quad (3.24d)$$

$$CC3_{ij} = \frac{1}{Le} \frac{d\widetilde{\Phi}_i(1)}{dY} \int_0^1 \left(\int_0^{Y'} U(Y') \widetilde{\Gamma}_j(Y') dY' \right) dY \quad (3.24e)$$

$$CC4_i = \frac{1}{Le} \frac{d\widetilde{\Phi}_i(1)}{dY} \quad (3.24f)$$

3.4 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA COM ESPESSURA DE PELÍCULA VARIÁVEL

Considerando as hipóteses simplificadoras descritas no item 3.2, usando a espessura variável, as equações representativas das equações da energia e da concentração em variáveis primitivas na forma dimensional, são definidas abaixo:

Equação da Energia:

$$u(y) \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} \quad 0 < y < \delta_T(x), \quad x > 0 \quad (3.25a)$$

Cujas condições inicial e de contorno são dadas como:

$$T(0, y) = T_0 \quad (3.25b)$$

$$-k \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \bar{h} T(x, 0) \quad (3.25c)$$

$$k \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=\delta_T(x)} = H_{abs} \rho \frac{D}{c_s} \frac{\partial C(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=\delta_T(x)} \quad (3.25d)$$

Equação da Concentração:

$$u(y) \frac{\partial C(x,y)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C(x,y)}{\partial y^2} \quad 0 < y < \delta_C(x), \quad x > 0 \quad (3.26a)$$

Cuja condições inicial e de contorno são dadas como:

$$C(0, y^*) = C_0 \quad (3.26b)$$

$$\left. \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (3.26c)$$

$$T(x, \delta_C(x)) = A \cdot C(x, \delta_C(x)) + B \quad (3.26d)$$

Utilizando os grupos adimensionais abaixo:

$$X = \frac{1}{Re} \frac{x}{\delta_T(x)} \quad ; \quad \eta = \frac{y}{\delta_T(x)} \quad ; \quad U(\eta) = \frac{u(y)}{U_\infty} = \frac{3}{2} (2\eta - \eta^2) \quad (3.27a-c)$$

$$\theta(X, \eta) = \frac{T(x, y) - T_0}{T_e - T_0} \quad ; \quad W(X, \eta) = \frac{C(x, y) - C_0}{C_e - C_0} \quad (3.27d-e)$$

$$T_e = A W_0 + B \quad ; \quad T_0 = A W_e + B \quad (3.27f-g)$$

Onde: T_e representa a temperatura de uma solução de fração de massa W_0 em equilíbrio com o vapor;

C_e representa a fração de massa de uma solução de temperatura T_0 em equilíbrio com o vapor.

Substituindo os grupos adimensionais no problema geral, obtém-se:

Equação da Energia:

$$U(\eta) \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{1}{\delta_T(x)} \frac{d\delta_T(x)}{dx} \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\delta_T(x)^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad 0 < \eta < 1, \quad x > 0 \quad (3.28a)$$

Cuja condições inicial e de contorno são dadas como:

$$\theta(0, \eta) = 0 \quad (3.28b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} + Bi \theta(X, 0) = 0 \quad (3.28c)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = f_{ac} \left. \frac{\partial W(X, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} \quad (3.28d)$$

Na condição de contorno (3.28d) f_{ac} representa um fator de acoplamento na interface líquido-vapor determinado pela expressão:

$$f_{ac} = \frac{D}{\alpha} \frac{1}{C_{INT}} \frac{H_{abs}}{C_P} \frac{c_e - c_0}{T_e - T_0} \quad 0 < \eta < 1, \quad x > 0 \quad (3.29)$$

Equação da Concentração:

$$W(0, \eta) = 0 \quad (3.30b)$$

$$\left. \frac{\partial W(X, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (3.30c)$$

$$\theta(X, 1) + W(X, 1) = 1 \quad (3.30d)$$

As equações (3.28) e (3.30) formam um sistema linear de EDP's parabólicas de segunda ordem com um conjunto de condições de contorno apresentando não-homogeneidade nas interfaces. No sistema proposto utilizou-se balanço integral a fim de resolver o problema proposto, conforme será visto mais detalhadamente na próxima seção.

3.5 APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Com o objetivo de transformar o problema proposto em um sistema de equações diferenciais ordinárias faz-se necessário a utilização de um problema auxiliar com solução já conhecida, para eliminar uma dependência espacial, tornando-o um sistema de equações diferenciais ordinárias.

O problema de Autovalor Auxiliar para o campo térmico é definido como:

$$\frac{d^2\Gamma_i(\eta)}{d\eta^2} + \gamma_i^2 \Gamma_i(\eta) = 0 \quad 0 < \eta < 1 \quad (3.31)$$

$$\frac{d\Gamma_i(\eta)}{d\eta} + Bi \Gamma_i(\eta) = 0 \quad \eta = 0 \quad (3.31a)$$

$$\frac{d\Gamma_i(\eta)}{d\eta} = 0 \quad \eta = 1 \quad (3.31b)$$

A qual é resolvida pelas autofunções, autovalores e norma, respectivamente, como:

$$\Gamma_i(\eta) = \text{Cos}(\gamma_i(1 - \eta)) \quad (3.31c)$$

$$-Bi \text{Cos}(\gamma_i) + \text{Sen}(\gamma_i) \gamma_i = 0, i = 1, 2, 3 \dots \quad (3.31d)$$

$$N_i = \int_0^1 \Gamma_i(\eta)^2 d\eta \quad (3.31e)$$

A autofunção normalizada é dada por:

$$\tilde{\Gamma}_i(\eta) = \frac{\Gamma_i(\eta)}{\sqrt{N_i}} \quad (3.31f)$$

O problema de Autovalor Auxiliar para o campo de concentração é definido como:

$$\frac{d^2\Phi_i(\eta)}{d\eta^2} + \varepsilon_i^2 \Phi_i(\eta) = 0 \quad 0 < \eta < 1 \quad (3.32)$$

$$\frac{d\Phi_i(\eta)}{d\eta} = 0 \quad \eta = 0 \quad (3.32a)$$

$$\Phi_i(\eta) = 0 \quad \eta = 1 \quad (3.32b)$$

A qual é resolvida pelas autofunções, autovalores e norma, respectivamente, como:

$$\Phi_i(\eta) = \text{Cos}(\varepsilon_i \eta) \quad (3.32c)$$

$$\varepsilon_i = \frac{(2i-1)\pi}{2}, i = 1, 2, 3 \dots \quad (3.32d)$$

$$NC_i = \int_0^1 \Phi_i(\eta)^2 d\eta = \frac{1}{2} \quad (3.32e)$$

A autofunção normalizada é dada por:

$$\widetilde{\Phi}_i(\eta) = \frac{\Phi_i(\eta)}{\sqrt{NC_i}} = \sqrt{2} \text{Cos}(\varepsilon_i \eta) \quad (3.32f)$$

Os problemas de Autovalores Auxiliares permitem a definição dos pares de transformada do campo térmico e de concentração, respectivamente:

$$\bar{\theta}_j(X) = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_j(\eta) \theta(X, \eta) d\eta \quad \text{Transformada} \quad (3.33)$$

$$\theta(X, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_j(\eta) \bar{\theta}_j(X) \quad \text{Inversa} \quad (3.34)$$

$$\bar{W}_j(X) = \int_0^1 \widetilde{\Phi}_j(\eta) W(X, \eta) d\eta \quad \text{Transformada} \quad (3.35)$$

$$W(X, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{\Phi}_j(\eta) \bar{W}_j(X) \quad \text{Inversa} \quad (3.36)$$

Seguindo o formalismo da técnica, após aplicarem-se os operadores $\int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(\eta) d\eta$ e $\int_0^1 \theta(X, \eta) d\eta$ nas Equações (3.30a) e (3.32a) respectivamente e somar os resultados, a equação resultante torna-se:

$$\int_0^1 U(\eta) \tilde{\Gamma}_i(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial X} d\eta - \frac{1}{\delta_T(x)} \frac{d\delta_T(x)}{dx} \int_0^1 U(\eta) \tilde{\Gamma}_i(\eta) \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\eta + \gamma_i^2 \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(\eta) \theta(X, \eta) d\eta = \frac{1}{\delta_T(x)^2} \left(\int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(\eta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} d\eta - \int_0^1 \theta \frac{d^2 \tilde{\Gamma}_i(\eta)}{d\eta^2} d\eta \right) \quad (3.37)$$

O lado esquerdo da equação (3.37) representa um integral de volume que será transformado em uma integral de superfície através do uso da fórmula de Green (COTTA, 1993) tornando-se:

$$\int_0^1 U(\eta) \tilde{\Gamma}_i(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial X} d\eta - \frac{1}{\delta_T(x)} \frac{d\delta_T(x)}{dx} \int_0^1 U(\eta) \tilde{\Gamma}_i(\eta) \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\eta + \gamma_i^2 \bar{\theta}_i(X) = \frac{1}{\delta_T(x)^2} \left(\tilde{\Gamma}_i(\eta) \frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial \eta} - \theta(X, \eta) \frac{d\tilde{\Gamma}_i(\eta)}{d\eta} \Big|_0^1 \right) \quad (3.38)$$

Aplicando as condições de contorno (3.30c), (3.30d), (3.32a) e (3.32b) no lado esquerdo da equação, obtém-se:

$$\eta = 0 \rightarrow \tilde{\Gamma}_i(0) \frac{\partial \theta(X, 0)}{\partial \eta} - \theta(X, 0) \frac{d\tilde{\Gamma}_i(0)}{d\eta} = 0 \quad (3.39)$$

$$\eta = 1 \rightarrow \tilde{\Gamma}_i(1) \frac{\partial \theta(X, 1)}{\partial \eta} - \theta(X, 1) \frac{d\tilde{\Gamma}_i(1)}{d\eta} = \tilde{\Gamma}_i(1) f_{ac} \frac{\partial W(X, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} \quad (3.40)$$

Inserindo os resultados (3.39) e (3.40) na equação (3.37), obtém-se:

$$\int_0^1 U(\eta) \tilde{\Gamma}_i(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial X} d\eta - \frac{1}{\delta_T(x)} \frac{d\delta_T(x)}{dx} \int_0^1 U(\eta) \tilde{\Gamma}_i(\eta) \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\eta + \gamma_i^2 \bar{\theta}_i(X) = \frac{1}{\delta_T(x)^2} \tilde{\Gamma}_i(1) f_{ac} \frac{\partial W(X, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} \quad (3.41)$$

Fazendo uso do balanço integral proposto por SILVA (2010), a derivada da concentração na posição $\eta=1$ é dada por:

$$\frac{\partial W(X, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = Le \delta_C(x)^2 \left(\int_0^1 U(\eta) \frac{\partial W}{\partial X} d\eta - \frac{1}{\delta_C(x)} \frac{d\delta_C(x)}{dx} \int_0^1 U(\eta) \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} d\eta \right) \quad (3.42)$$

Substituindo a equação (3.42) na equação (3.41) tem-se:

$$\int_0^1 U(\eta) \tilde{\Gamma}_l(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial X} d\eta - \frac{1}{\delta_T(x)} \frac{d\delta_T(x)}{dx} \int_0^1 U(\eta) \tilde{\Gamma}_l(\eta) \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\eta + \gamma_i^2 \bar{\theta}_l(X) =$$

$$\tilde{\Gamma}_l(1) f_{ac} Le \delta_C(x)^2 \left(\int_0^1 U(\eta) \frac{\partial W}{\partial X} d\eta - \frac{1}{\delta_C(x)} \frac{d\delta_C(x)}{dx} \int_0^1 U(\eta) \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} d\eta \right)$$
(3.43)

De maneira similar é resolvido o problema de concentração obtendo-se a equação (3.44).

$$\int_0^1 \tilde{\Phi}_l(\eta) U(\eta) \frac{\partial W}{\partial X} d\eta - \frac{1}{\delta_C(x)} \frac{d\delta_C(x)}{dx} \int_0^1 \tilde{\Phi}_l(\eta) U(\eta) \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} d\eta + \frac{\varepsilon_i^2}{\delta_C(x) Le} \bar{W}_l(X) =$$

$$\frac{1}{\delta_C(x)^2 Le} \frac{d\tilde{\Phi}_j(1)}{d\eta} \theta(X, 1) - \frac{1}{\delta_C(x)^2 Le} \frac{d\tilde{\Phi}_j(1)}{d\eta}$$
(3.44)

Para evitar o potencial transformado na fronteira é realizado um balanço integral sobre a equação (3.32a) resultando em:

$$\theta(X, 1) = (Bi + 1) \theta(X, 0) - \delta_T(x)^2 \int_0^1 \left(\int_0^{\eta'} U(\eta') \frac{\partial \theta(X, \eta')}{\partial X} d\eta' \right) d\eta +$$

$$\delta_T(x) \frac{d\delta_T(x)}{dx} \int_0^1 \left(\int_0^{\eta'} U(\eta') \eta' \frac{\partial \theta(X, \eta')}{\partial \eta'} d\eta' \right) d\eta + \frac{1}{\delta_T(x)^2} f_{ac} \left. \frac{\partial W(X, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1}$$
(3.45)

Introduzindo a equação (3.45) na equação (3.44) obtém-se:

$$\int_0^1 \tilde{\Phi}_l(\eta) U(\eta) \frac{\partial W}{\partial X} d\eta - \frac{1}{\delta_C(x)} \frac{d\delta_C(x)}{dx} \int_0^1 \tilde{\Phi}_l(\eta) U(\eta) \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} d\eta + \frac{\varepsilon_i^2}{\delta_C(x) Le} \bar{W}_l(X) =$$

$$\frac{1}{\delta_C(x)^2 Le} \frac{d\tilde{\Phi}_j(1)}{d\eta} \left((Bi + 1) \theta(X, 0) - \delta_T(x)^2 \int_0^1 \left(\int_0^{\eta'} U(\eta') \frac{\partial \theta(X, \eta')}{\partial X} d\eta' \right) d\eta + \right.$$

$$\left. \delta_T(x) \frac{d\delta_T(x)}{dx} \int_0^1 \left(\int_0^{\eta'} U(\eta') \eta' \frac{\partial \theta(X, \eta')}{\partial \eta'} d\eta' \right) d\eta + \frac{1}{\delta_T(x)^2} f_{ac} \left. \frac{\partial W(X, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} \right) -$$

$$\frac{1}{\delta_C(x)^2 Le} \frac{d\tilde{\Phi}_j(1)}{d\eta}$$
(3.46)

Aplicando-se as fórmulas das inversas (3.34) e (3.36) nas equações (3.43) e (3.46) respectivamente, obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias representativas dos potenciais desejados e que, escrito de forma completa, assumem a seguinte forma:

Energia

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\text{nauv}} \text{CT1}_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j(X)}{dX} - \frac{1}{\delta_T(x)} \frac{d\delta_T(x)}{dx} \sum_{j=1}^{\text{nauv}} \text{CT2}_{ij} \bar{\theta}_j(X) + \frac{\gamma_i^2}{\delta_T(x)^2} \bar{\theta}_i(X) \\ = \frac{\delta_C(x)^2}{\delta_T(x)^2} \Gamma_i(1) f_{ac} Le \left(\sum_{j=1}^{\text{nauv}} \text{CT3}_j \frac{d\bar{W}_j(X)}{dX} \right. \\ \left. - \frac{1}{\delta_C(x)} \frac{d\delta_C(x)}{dx} \sum_{j=1}^{\text{nauv}} \text{CT4}_j \bar{W}_j(X) \right) \end{aligned} \quad (3.47a)$$

$$\bar{\theta}_i(0) = 0 \quad (3.47b)$$

$$\text{CT1}_{ij} = \int_0^1 U(\eta) \tilde{\Gamma}_i(\eta) \tilde{\Gamma}_j(\eta) d\eta \quad (3.47c)$$

$$\text{CT2}_{ij} = \int_0^1 U(\eta) \eta \tilde{\Gamma}_i(\eta) \frac{d\tilde{\Phi}_j(\eta)}{d\eta} d\eta \quad (3.47d)$$

$$\text{CT3}_j = \int_0^1 U(\eta) \tilde{\Phi}_j(\eta) d\eta \quad (3.47e)$$

$$\text{CT4}_j = \int_0^1 U(\eta) \eta \frac{d\tilde{\Phi}_j(\eta)}{d\eta} d\eta \quad (3.47f)$$

Na equação da energia, a espessura da película variável foi adotada como sendo a espessura de camada limite térmica utilizada no capítulo 2 na equação (2.28), dada por:

$$\frac{d\delta_T[\chi]}{d\chi} = 2.42048 Pr^{-1/3} \chi^{1/2} Re_\chi^{-1/2}$$

(3.48)

Concentração

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{nauv} CC1_{ij} \frac{d\bar{W}_j(X)}{dX} - \frac{1}{\delta_C(x)} \frac{d\delta_C(x)}{dx} \sum_{j=1}^{nauv} CC2_{ij} \bar{W}_j(X) + \frac{\varepsilon_i^2}{\delta_C(x)^2 Le} \bar{W}_i(X) \\ = \frac{1}{\delta_C(x)^2 Le} \frac{d\tilde{\Phi}_j(1)}{d\eta} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (Bi + 1) \tilde{\Gamma}_j(0) \bar{\theta}_j(X) \right. \\ \left. - \delta_T(x)^2 \sum_{j=1}^{\infty} CC3_j \frac{d\bar{\theta}_j(X)}{dX} + \delta_T(x) \frac{d\delta_T(x)}{dx} \sum_{j=1}^{nauv} CC4_j \bar{\theta}_j(X) \right. \\ \left. + f_{ac} \sum_{j=1}^{nauv} \frac{d\tilde{\Phi}_j(1)}{d\eta} \bar{W}_j(X) \right) - \frac{1}{\delta_C(x)^2 Le} \frac{d\tilde{\Phi}_i(1)}{d\eta} \end{aligned}$$

(3.49a)

$$\bar{W}_i(0) = 0$$

(3.49b)

$$CC1_{ij} = \int_0^1 U(\eta) \tilde{\Phi}_i(\eta) \tilde{\Phi}_j(\eta) d\eta$$

(3.49c)

$$CC2_{ij} = \int_0^1 \eta U(\eta) \tilde{\Phi}_i(\eta) \frac{d\tilde{\Phi}_j(\eta)}{d\eta} d\eta$$

(3.49d)

$$CC3_j = \int_0^1 \left(\int_0^{\eta'} U(\eta') \tilde{\Gamma}_j(\eta') d\eta' \right) d\eta$$

(3.49e)

$$CC4_i = \int_0^1 \left(\int_0^{\eta'} U(\eta') \eta \frac{d\tilde{\Gamma}_j(\eta')}{d\eta'} d\eta' \right) d\eta$$

(3.49f)

Na equação da concentração, a espessura da película variável foi adotada como sendo análoga a expressão usada na equação da energia, dada por:

$$\frac{d\delta_c[\chi]}{d\chi} = 2.42048 Sc^{-1/3} \chi^{1/2} Re_\chi^{-1/2} \quad (3.50)$$

3.6 RESULTADOS

Para validar os resultados deste trabalho, as concentrações e temperaturas médias, chamadas de grandezas de interesse prático, são determinadas através das expressões:

Concentração média adimensional e temperatura:

$$\theta_{med} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 U(Y) \tilde{\psi}_i(Y) dY \bar{\theta}_i(X) \quad (3.51)$$

$$W_{med} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 U(Y) \tilde{\Phi}_i(Y) dY \bar{W}_i(X) \quad (3.52)$$

Para determinar o número de Nusselt (coeficiente de transferência de calor) e o número de Sherwood (coeficiente de transferência de massa), da interface para o interior do filme, são utilizadas as seguintes expressões:

$$Nu_{int} = \frac{h_{int}\delta}{k} = \frac{1}{\theta_{int} - \theta_{med}} \left. \frac{\partial \theta(X,Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} \quad (3.53)$$

$$Sh_{int} = \frac{k\delta}{D} = \frac{1}{W_{int} - W_{med}} \left. \frac{\partial W(X,Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} \quad (3.54)$$

Na Tabela 6, o comportamento da convergência na expansão da autofunção foi ilustrado para a temperatura média adimensional em várias posições longitudinais diferentes. Foram usados 200 termos na série da temperatura para esta demonstração com excelentes características de convergência, obtendo quatro algarismos significativos já convergidos dentro do intervalo da variável analisada.

As soluções obtidas pelo presente trabalho totalmente convergentes com 200 termos foram comparadas com a solução de SILVA e SANTOS (2016) para temperatura de interface e da parede, conforme apresentado na Tabela 7 para diferentes posições

longitudinais. Pode-se observar a aderência de pelo menos três dígitos significativos entre as duas soluções, como esperado do controle de erros da técnica. Os desvios relativos são de 1,04 e 1,38% para a região próxima ao início da placa ($X=0,1$) e de 0,00 e 0,01%, para a borda ($X=1000$), respectivamente, proporcionando uma verificação mais direta do presente procedimento da solução híbrida.

Tabela 6 - Convergência de temperatura média adimensional ao longo da posição X para parede adiabática ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$).

X	Número de Autovalores						
	100	150	160	170	180	190	200
Temperatura Média Adimensional							
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,08666	0,09282	0,09358	0,09425	0,09484	0,09537	0,09584
0,2	0,12986	0,13584	0,13657	0,13722	0,13780	0,13832	0,13878
0,3	0,16234	0,16814	0,16886	0,16949	0,17005	0,17056	0,17101
0,4	0,18892	0,19454	0,19523	0,19584	0,19639	0,19688	0,19731
0,5	0,21155	0,21697	0,21764	0,21824	0,21876	0,21923	0,21965
0,6	0,23130	0,23653	0,237180	0,23775	0,23826	0,238709	0,23912
0,7	0,24885	0,25389	0,254519	0,25507	0,25556	0,255995	0,25639
0,8	0,26465	0,26952	0,270124	0,27066	0,27113	0,271550	0,27193
0,9	0,27903	0,28374	0,28432	0,28484	0,28529	0,28570	0,28607
1,0	0,29223	0,29678	0,29735	0,29785	0,29829	0,29868	0,29904
2,0	0,38584	0,38928	0,38972	0,39009	0,39043	0,39073	0,39099
5,0	0,51978	0,52178	0,52204	0,52226	0,52246	0,52263	0,52279
10,0	0,61896	0,62012	0,62026	0,62039	0,620505	0,62061	0,62069
20,0	0,70799	0,70858	0,70866	0,70872	0,708781	0,70883	0,70888
30,0	0,75328	0,75367	0,75372	0,75376	0,753795	0,75383	0,75386
40,0	0,78202	0,78230	0,78234	0,78237	0,782394	0,78242	0,78244
50,0	0,80234	0,80256	0,80258	0,80261	0,802628	0,80265	0,80266
60,0	0,81767	0,81785	0,81787	0,81789	0,817904	0,81792	0,81793
70,0	0,82976	0,82990	0,82992	0,82994	0,829950	0,82996	0,82997

X	Número de Autovalores						
	100	150	160	170	180	190	200
X	Temperatura Média Adimensional						
80,0	0,83958	0,83971	0,83972	0,83974	0,839751	0,839762	0,83977
90,0	0,84777	0,84788	0,84789	0,84790	0,847914	0,84792	0,84793
100	0,85470	0,85480	0,85482	0,85483	0,85484	0,85484	0,85485
200	0,89071	0,89078	0,89078	0,89079	0,89080	0,89080	0,89080
300	0,90251	0,90258	0,90259	0,90259	0,90260	0,90261	0,90261
400	0,90663	0,90670	0,90671	0,90672	0,90672	0,90673	0,90674
500	0,90807	0,90814	0,90816	0,90816	0,90817	0,90818	0,90818
600	0,90857	0,90865	0,90866	0,90867	0,908678	0,90868	0,90869
700	0,90875	0,90883	0,90884	0,90885	0,908856	0,90886	0,90887
800	0,90881	0,90889	0,90890	0,90891	0,908918	0,90893	0,90893
900	0,90883	0,90891	0,90892	0,90893	0,90894	0,90895	0,90895
1000	0,90884	0,90892	0,90893	0,90894	0,90895	0,90896	0,90896

Tabela 7 - Distribuição das temperaturas na parede e interface ao longo da posição X para parede adiabática ($Bi = 0,001$; $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$).

X	Parede (GITT)	SILVA e SANTOS	Erro relativo	Interface (GITT)	SILVA e SANTOS	Erro relativo
0,1	0,017524	0,018	2,64	0,229970	0,230	0,01
0,2	0,072054	0,072	0,08	0,238881	0,239	0,05
0,3	0,119235	0,119	0,20	0,248967	0,249	0,01
0,4	0,155972	0,156	0,02	0,260749	0,261	0,10
0,5	0,185361	0,185	0,20	0,273162	0,273	0,06
0,6	0,209773	0,210	0,11	0,285487	0,285	0,17
0,7	0,230684	0,231	0,14	0,297387	0,297	0,13
0,8	0,249016	0,249	0,01	0,308729	0,309	0,09
0,9	0,265369	0,265	0,14	0,319484	0,319	0,15
1,0	0,280147	0,280	0,05	0,329666	0,330	0,10
2,0	0,380830	0,381	0,04	0,407783	0,408	0,05

X	Parede (GITT)	SILVA e SANTOS	Erro relativo	Interface (GITT)	SILVA e SANTOS	Erro relativo
5,0	0,518668	0,519	0,06	0,529665	0,530	0,06
10,0	0,618785	0,619	0,03	0,623905	0,624	0,02
20,0	0,708056	0,708	0,01	0,710263	0,710	0,04
30,0	0,753372	0,753	0,05	0,754676	0,755	0,04
40,0	0,782110	0,782	0,01	0,782995	0,783	0,00
50,0	0,802421	0,802	0,05	0,803072	0,803	0,01
60,0	0,817744	0,818	0,03	0,818249	0,818	0,03
70,0	0,829823	0,830	0,02	0,830228	0,830	0,03
80,0	0,839647	0,840	0,04	0,839981	0,840	0,00
90,0	0,847827	0,848	0,02	0,848108	0,848	0,01
100,0	0,854761	0,855	0,03	0,855002	0,855	0,00
200,0	0,890778	0,891	0,02	0,89085	0,891	0,02
300,0	0,902601	0,903	0,04	0,902627	0,903	0,04
400,00	0,906733	0,907	0,03	0,906743	0,907	0,03
500,00	0,908182	0,908	0,02	0,908186	0,908	0,02
600,00	0,908690	0,909	0,03	0,908692	0,909	0,03
700,00	0,908869	0,909	0,01	0,90887	0,909	0,01
800,00	0,908931	0,909	0,01	0,908932	0,909	0,01
900,00	0,908953	0,909	0,01	0,908954	0,909	0,01
1000,00	0,908961	0,909	0,00	0,908962	0,909	0,00

A Figura 15 mostra o comportamento das temperaturas média (integração), na parede ($Y=0$) e na interface ($Y=1$) adimensionais ao longo da direção do escoamento do filme. Na região de entrada do filme descendente, a temperatura da solução próxima à interface vapor-solução aumenta devido à geração de calor durante o processo de absorção. A temperatura da solução próxima à parede cai extremamente devido à detecção das camadas limite térmicas adjacentes à parede; como resultado da diferença de temperatura entre a temperatura da parede e do filme. Pode-se verificar também que quando X cresce muito ($X > 4$), a temperatura de todo o filme atinge a temperatura da parede.

A Figura 16 mostra o comportamento das concentrações média, na parede e na interface adimensionais, que tem comportamento complementar à temperatura, na região de entrada há uma diferença entre as concentrações de interface e parede devido à influência da camada limite de concentração. Para uma posição X muito grande ($X > 100$), a concentração de todo o filme da solução atinge a concentração da interface vapor-solução.

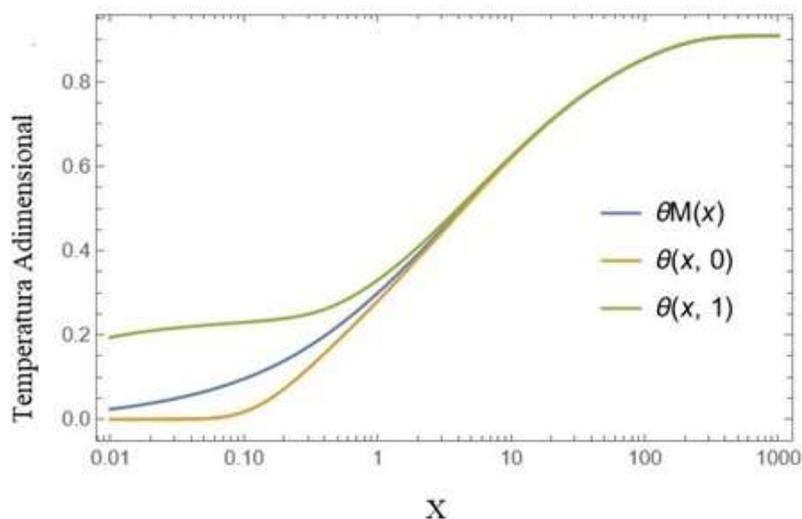


Figura 15 - Distribuição das temperaturas média, parede e interface para $LE = 1000$, $Fac = 0,01$, usando $Bi = 0,001$ e 200 autovalores.

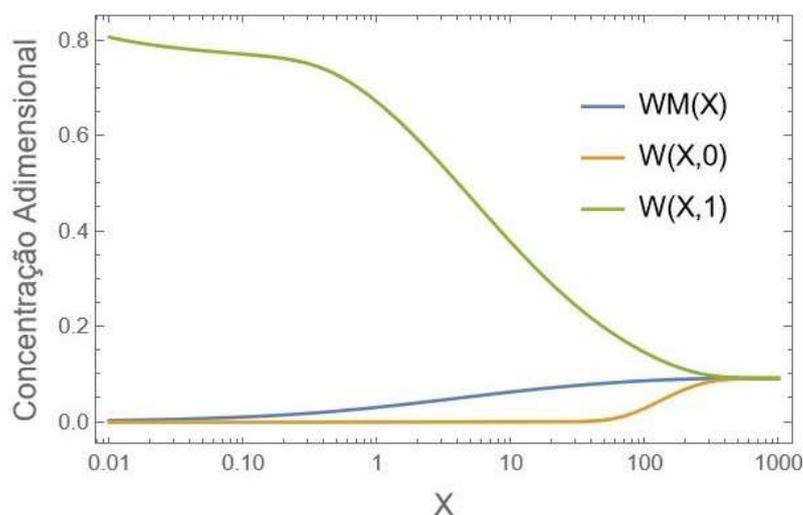


Figura 16 - Distribuição das concentrações média, parede e interface para $LE = 1000$, $Fac = 0,01$, usando $Bi = 0,001$ e 200 autovalores.

A Figura 17 analisa o número de Nusselt em função de X variando o fator de acoplamento (Fac) em quatro situações, onde pode-se observar que não houve muita variação para uma grande faixa desse parâmetro. Apenas para $\text{Fac} = 1$, na região de entrada, houve diferença em relação às demais situações.

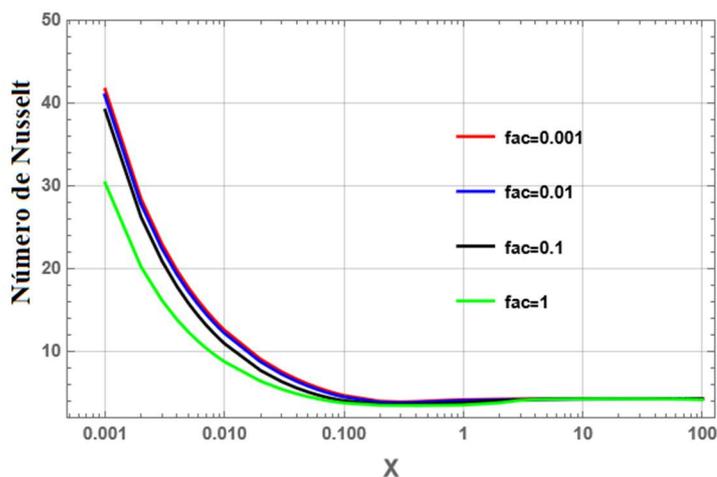


Figura 17 - Número de Nusselt ao longo do comprimento longitudinal para $LE = 1000$, $\text{Fac} = 0,01$, usando $Bi = 0,001$ e 200 autovalores.

Pode-se afirmar também que o mesmo comportamento ocorre para concentração, ver Figura 18. A única diferença é que o número de Nusselt tem um decaimento maior atingindo um valor constante de 4,30, enquanto o decaimento do número de Sherwood é menor atingindo um valor constante próximo a 0,00.

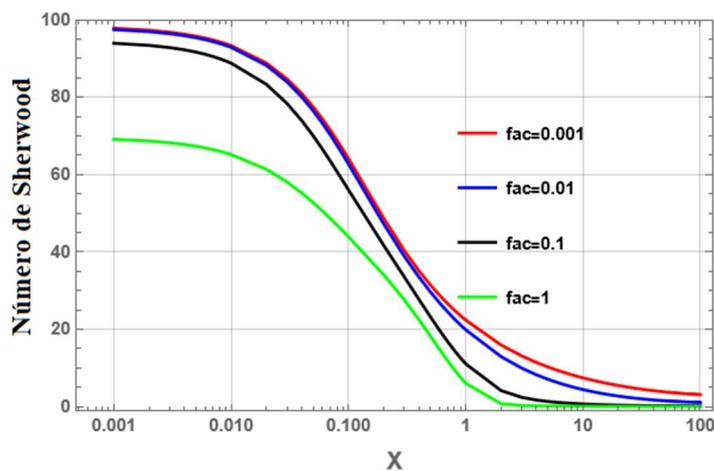


Figura 18 - Número de Sherwood ao longo do comprimento longitudinal para $LE = 1000$, $\text{Fac} = 0,01$, usando $Bi = 0,001$ e 200 autovalores.

Pode ser visto na Tabela 8 que, na região de entrada, a concentração na interface é máxima, enquanto na parede é zero, à medida que a posição X aumenta, a concentração na interface diminui chegando perto de zero e na parede torna-se igual à interface. O maior erro relativo concentração na parede e na interface é de 4,94 e 0,14% para a região da placa ($X=60$) e 0,13 e 0,04% para a borda ($X=1000$), respectivamente. Pode-se verificar também que a soma da concentração (Tabela 9) e da temperatura (Tabela 7) na interface conduz à unidade, fornecendo uma verificação direta do presente procedimento de solução híbrida.

A Tabela 9 mostra a convergência da concentração média adimensional ao longo da placa variando o número de termos de 100 a 200 autovalores para a parede isotérmica ($Bi = 1000$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$) com espessura constante, onde se verifica que na região de entrada, a concentração é mínima e à medida que avança na posição adimensional X , ela cresce. Pode-se verificar que com 200 termos na série da concentração obtém-se quatro algarismos significativos já convergidos dentro do intervalo da variável analisada.

Tabela 8 - Distribuição das concentrações na parede e interface ao longo da posição X para parede adiabática ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$).

X	Parede (GITT)	SILVA e SANTOS	Erro relativo	Interface (GITT)	SILVA e SANTOS	Erro relativo
0	0,000000	0,000	0,00	1,000000	1,000	0,00
0,1	0,000000	0,000	0,00	0,77003	0,770	0,00
0,2	0,000000	0,000	0,00	0,761119	0,761	0,02
0,3	0,000000	0,000	0,00	0,751033	0,751	0,00
0,4	0,000000	0,000	0,00	0,739251	0,739	0,03
0,5	0,000000	0,000	0,00	0,726838	0,727	0,02
0,6	0,000000	0,000	0,00	0,714513	0,715	0,07
0,7	0,000000	0,000	0,00	0,702613	0,703	0,06
0,8	0,000000	0,000	0,00	0,691271	0,691	0,04
0,9	0,000000	0,000	0,00	0,680516	0,681	0,07
1,0	0,000000	0,000	0,00	0,670334	0,670	0,05
2,0	0,000000	0,000	0,00	0,592217	0,592	0,04

X	Parede (GITT)	SILVA e SANTOS	Erro relativo	Interface (GITT)	SILVA e SANTOS	Erro relativo
5,0	0,000000	0,000	0,00	0,470335	0,470	0,07
10,0	0,000000	0,000	0,00	0,376095	0,376	0,03
20,0	0,000000	0,000	0,00	0,289737	0,290	0,09
30,0	0,000000	0,000	0,00	0,245324	0,245	0,13
40,0	0,000742	0,001	25,80	0,217005	0,217	0,00
50,0	0,003023	0,003	0,77	0,196928	0,197	0,04
60,0	0,006654	0,007	4,94	0,181751	0,182	0,14
70,0	0,011318	0,011	2,89	0,169772	0,170	0,13
80,0	0,016613	0,017	2,28	0,160019	0,160	0,01
90,0	0,022187	0,022	0,85	0,151892	0,152	0,07
100,0	0,027778	0,028	0,79	0,144998	0,145	0,00
200,0	0,067509	0,068	0,72	0,10915	0,122	10,53
300,0	0,082665	0,083	0,40	0,097373	0,109	10,67
400,00	0,088004	0,088	0,00	0,093257	0,097	3,86
500,00	0,089878	0,089	0,99	0,091814	0,093	1,28
600,00	0,090535	0,091	0,51	0,091308	0,091	0,34
700,00	0,090766	0,091	0,26	0,09113	0,091	0,14
800,00	0,090846	0,091	0,17	0,091068	0,091	0,07
900,00	0,090875	0,091	0,14	0,091046	0,091	0,05
1000,00	0,090885	0,091	0,13	0,091038	0,091	0,04

Tabela 9 - Convergência da Concentração Média ao longo da posição X na parede isotérmica ($Bi = 1000$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$).

X	Número de Autovalores						
	100	150	160	170	180	190	200
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,0088	0,0095	0,0096	0,0096	0,0097	0,0098	0,0098
0,2	0,0140	0,0148	0,0149	0,0150	0,0150	0,0151	0,0152
0,3	0,0184	0,0193	0,0194	0,0195	0,0195	0,0196	0,0197

X	Número de Autovalores						
	100	150	160	170	180	190	200
0,4	0,0223	0,0232	0,0233	0,0234	0,0235	0,0236	0,0236
0,5	0,0257	0,0267	0,0268	0,0269	0,0270	0,0271	0,0272
0,6	0,0289	0,0299	0,0300	0,0301	0,0302	0,0303	0,0304
0,7	0,0319	0,0329	0,0330	0,0331	0,0332	0,0333	0,0334
0,8	0,0346	0,0356	0,0357	0,0359	0,0360	0,0360	0,0361
0,9	0,0372	0,0382	0,0383	0,0384	0,0385	0,0386	0,0387
1,0	0,0396	0,0406	0,0407	0,0408	0,0409	0,0410	0,0411
2,0	0,0585	0,0596	0,0597	0,0598	0,0599	0,0600	0,0601
5,0	0,0946	0,0956	0,0957	0,0959	0,0960	0,0960	0,0961
10,0	0,1350	0,1360	0,1361	0,1362	0,1363	0,1364	0,1365
20,0	0,1919	0,1930	0,1931	0,1932	0,1933	0,1934	0,1935
30,0	0,2355	0,2365	0,2366	0,2367	0,2368	0,2369	0,2370
40,0	0,2721	0,2731	0,2732	0,2733	0,2734	0,2735	0,2736
50,0	0,3042	0,3052	0,3053	0,3054	0,3055	0,3056	0,3057
60,0	0,3331	0,3341	0,3342	0,3344	0,3345	0,3345	0,3346
70,0	0,3596	0,3606	0,3607	0,3608	0,3609	0,3610	0,3611
80,0	0,3841	0,3852	0,3853	0,3854	0,3855	0,3856	0,3857
90,0	0,4071	0,4081	0,4082	0,4084	0,4085	0,4085	0,4086
100,0	0,4287	0,4297	0,4299	0,4300	0,4301	0,4302	0,4302
200,0	0,5975	0,5985	0,5987	0,5988	0,5989	0,5990	0,5990
300,0	0,7134	0,7144	0,7145	0,7146	0,7147	0,7148	0,7149
400,0	0,7954	0,7964	0,7966	0,7967	0,7968	0,7969	0,7969
500,0	0,8537	0,8547	0,8549	0,8550	0,8551	0,8552	0,8552
600,0	0,8952	0,8962	0,8963	0,8964	0,8965	0,8966	0,8967
700,0	0,9246	0,9256	0,9257	0,9259	0,9260	0,9260	0,9261
800,0	0,9455	0,9465	0,9467	0,9468	0,9469	0,9470	0,9471
900,0	0,9604	0,9614	0,9615	0,9617	0,9618	0,9618	0,9619
1000,0	0,9710	0,9720	0,9721	0,9722	0,9723	0,9724	0,9725

Na Tabela 10 comparamos as temperaturas média, parede e interface com resultados obtidos por SILVA (2010), para parede isotérmica ($Bi = 1000$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$). Pode-se perceber que existe um aumento das temperaturas em virtude do calor de absorção, mas com o crescimento de X , a tendência é a diminuição da temperatura, considerando que a concentração aumenta no processo isotérmico.

Na Tabela 11 mostramos a distribuição da temperatura média ao longo da posição X variando o número de $Biot$ de 0.001 a 1000, ($Fac=0.01$ e $LE=1000$). Pode-se notar que à medida que $Biot$ cresce o problema passa de uma condição de parede adiabática até parede isotérmica. Na parte intermediária, denominamos de caso real ou prático. O que existe é uma combinação, a parede não é adiabática nem tampouco isotérmica.

Na Tabela 12 mostramos a distribuição da concentração média ao longo da posição X variando o número de $Biot$ de 0.001 a 1000, ($fac=0.01$ e $Le=1000$). Verifica-se que a concentração apresenta comportamento complementar a temperatura, só corroborando com o modelo proposto por meio da condição da interface que a soma da temperatura e concentração é igual a 1.

Tabela 10 - Distribuição das temperaturas média, parede e interface ao longo da posição X na parede isotérmica ($Bi = 1000$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$).

X	Temperatura Média	SILVA (2010)	Temperatura na Parede	SILVA (2010)	Temperatura na Interface	SILVA (2010)
0	0,000000	0,000	0,000000	0,000	0,000000	0,000
0,1	0,096700	0,097	8,76E-05	0,000	0,241512	0,242
0,2	0,138945	0,139	0,000251	0,000	0,273581	0,274
0,3	0,164358	0,164	0,000351	0,000	0,293328	0,293
0,4	0,179140	0,179	0,000411	0,000	0,303539	0,304
0,5	0,186858	0,187	0,000445	0,000	0,306881	0,307
0,6	0,189763	0,189	0,000463	0,000	0,305383	0,305
0,7	0,189366	0,189	0,000469	0,000	0,300546	0,300
0,8	0,186721	0,186	0,000468	0,000	0,293473	0,293
0,9	0,182575	0,182	0,000461	0,000	0,284973	0,285
1,0	0,177467	0,177	0,00045	0,000	0,275636	0,275

X	Temperatura Média	SILVA (2010)	Temperatura na Parede	SILVA (2010)	Temperatura na Interface	SILVA (2010)
2,0	0,122486	0,122	0,000313	0,000	0,189172	0,189
5,0	0,065393	0,065	0,000163	0,000	0,103254	0,103
10,0	0,044508	0,044	0,000111	0,000	0,070690	0,071
20,0	0,030890	0,031	7,66E-05	0,000	0,049184	0,049
30,0	0,025012	0,025	6,2E-05	0,000	0,039856	0,040
40,0	0,021531	0,021	5,33E-05	0,000	0,034323	0,034
50,0	0,019159	0,019	4,75E-05	0,000	0,030548	0,030
60,0	0,017406	0,017	4,31E-05	0,000	0,027757	0,028
70,0	0,016039	0,016	3,97E-05	0,000	0,025580	0,026
80,0	0,014933	0,015	3,7E-05	0,000	0,023818	0,024
90,0	0,014012	0,014	3,47E-05	0,000	0,022350	0,022
100,0	0,013227	0,013	3,27E-05	0,000	0,021099	0,021
200,0	0,008647	0,009	2,14E-05	0,000	0,013795	0,014
300,0	0,006093	0,006	1,51E-05	0,000	0,009721	0,010
400,0	0,004327	0,004	1,07E-05	0,000	0,006903	0,007
500,0	0,003075	0,003	7,61E-06	0,000	0,004906	0,005
600,0	0,002185	0,002	5,41E-06	0,000	0,003487	0,003
700,0	0,001553	0,002	3,84E-06	0,000	0,002478	0,002
800,0	0,001104	0,001	2,73E-06	0,000	0,001761	0,001
900,0	0,000785	0,001	1,94E-06	0,000	0,001252	0,001
1000,0	0,000558	0,001	1,38E-06	0,000	0,000890	0,001

Tabela 11 - Distribuição da temperatura média adimensionalizada ao longo da posição X variando Biot (Fac = 0,01 e LE = 1000).

Biot	0,001	0,1	1	2	5	10	1000
X	Temperatura Média Adimensionalizada						
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,09584	0,09584	0,09585	0,09585	0,09585	0,09588	0,0967
0,2	0,13878	0,13878	0,13879	0,13879	0,13882	0,13886	0,13895

<i>Biot</i>	0,001	0,1	1	2	5	10	1000
X	Temperatura Média Adimensionalizada						
0,3	0,17101	0,17101	0,17102	0,17102	0,17101	0,1709	0,16436
0,4	0,19731	0,19731	0,19732	0,19732	0,19721	0,19673	0,17914
0,5	0,21965	0,21966	0,21966	0,21964	0,21939	0,21837	0,18686
0,6	0,23912	0,23912	0,23913	0,23908	0,23864	0,23694	0,18976
0,7	0,25639	0,25639	0,25639	0,25632	0,25565	0,25316	0,18937
0,8	0,27193	0,27193	0,27193	0,27182	0,2709	0,26752	0,18672
0,9	0,28607	0,28607	0,28606	0,28591	0,28471	0,28037	0,18258
1,0	0,29904	0,29904	0,29902	0,29884	0,29733	0,29196	0,17747
2,0	0,391	0,39101	0,39084	0,39014	0,38485	0,36692	0,12249
5,0	0,52279	0,5228	0,52202	0,51925	0,49973	0,43895	0,06539
10,0	0,6207	0,62071	0,61875	0,61228	0,56865	0,4466	0,04451
20,0	0,70888	0,70888	0,70464	0,69123	0,60591	0,40398	0,03089
30,0	0,75386	0,75384	0,74753	0,72797	0,60879	0,36133	0,02501
40,0	0,78244	0,78241	0,7742	0,74911	0,60179	0,3271	0,02153
50,0	0,80266	0,80262	0,79265	0,76252	0,5913	0,29985	0,01916
60,0	0,81793	0,81787	0,80626	0,7715	0,5796	0,27778	0,01741
70,0	0,82997	0,8299	0,81675	0,77766	0,56764	0,25953	0,01604
80,0	0,83977	0,83969	0,82507	0,78194	0,55583	0,24416	0,01493
90,0	0,84793	0,84783	0,83182	0,78488	0,54438	0,23099	0,01401
100,0	0,85485	0,85474	0,8374	0,78684	0,53337	0,21956	0,01323
200,0	0,89081	0,89058	0,86207	0,78242	0,44465	0,15146	0,00865
300,0	0,90261	0,90229	0,86466	0,76275	0,37948	0,11406	0,00609
400,0	0,90674	0,90633	0,86043	0,73929	0,32623	0,08725	0,00433
500,0	0,90818	0,90769	0,8539	0,71515	0,28104	0,06692	0,00308
600,0	0,90869	0,90812	0,84662	0,69135	0,24226	0,05136	0,00219
700,0	0,90887	0,90821	0,83913	0,66819	0,20886	0,03941	0,00155
800,0	0,90893	0,90819	0,83161	0,64575	0,18008	0,03025	0,0011
900,0	0,90895	0,90813	0,82412	0,62405	0,15526	0,02321	0,00079
1000,0	0,90896	0,90805	0,81669	0,60308	0,13387	0,01782	0,00056

Tabela 12 - Distribuição da concentração média adimensionalizada ao longo da posição X variando $Biot$ ($Fac = 0,01$ e $LE = 1000$).

<i>Biot</i>	0,001	0,1	1	2	5	10	1000
X	Concentração média Adimensionalizada						
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,00958	0,00958	0,00959	0,00959	0,00959	0,00959	0,00982
0,2	0,01388	0,01388	0,01388	0,01388	0,01389	0,01393	0,01518
0,3	0,0171	0,0171	0,0171	0,01711	0,01714	0,01723	0,01969
0,4	0,01973	0,01973	0,01974	0,01974	0,01979	0,01995	0,02364
0,5	0,02197	0,02197	0,02197	0,02198	0,02205	0,02227	0,02718
0,6	0,02391	0,02391	0,02392	0,02394	0,02403	0,02432	0,0304
0,7	0,02564	0,02564	0,02565	0,02567	0,02578	0,02615	0,03337
0,8	0,02719	0,02719	0,0272	0,02723	0,02737	0,02781	0,03612
0,9	0,02861	0,02861	0,02862	0,02865	0,02881	0,02933	0,0387
1,0	0,0299	0,0299	0,02992	0,02995	0,03014	0,03075	0,04112
2,0	0,0391	0,0391	0,03914	0,03922	0,03972	0,0413	0,06007
5,0	0,05228	0,05228	0,05239	0,05268	0,05454	0,06012	0,09612
10,0	0,06207	0,06208	0,06236	0,06314	0,06813	0,08203	0,1365
20,0	0,07089	0,0709	0,07162	0,07369	0,08658	0,11819	0,19346
30,0	0,07539	0,0754	0,07665	0,08024	0,102	0,15011	0,23701
40,0	0,07824	0,07827	0,08009	0,08534	0,11637	0,17923	0,27359
50,0	0,08027	0,0803	0,08273	0,08974	0,13017	0,20615	0,3057
60,0	0,08179	0,08183	0,0849	0,09374	0,14357	0,23126	0,33462
70,0	0,083	0,08304	0,08677	0,09749	0,15664	0,25485	0,36111
80,0	0,08398	0,08403	0,08844	0,10107	0,16944	0,27713	0,38566
90,0	0,08479	0,08485	0,08995	0,10454	0,18198	0,29829	0,40862
100,0	0,08549	0,08555	0,09136	0,10791	0,19428	0,31846	0,43024
200,0	0,08908	0,08922	0,10247	0,1393	0,30636	0,48272	0,59905
300,0	0,09026	0,09049	0,1115	0,1686	0,40204	0,60346	0,7149
400,0	0,09067	0,09098	0,11982	0,19664	0,4843	0,69542	0,79695
500,0	0,09082	0,09121	0,12786	0,22364	0,55517	0,76591	0,85524

<i>Biot</i>	0,001	0,1	1	2	5	10	1000
X	Concentração média Adimensionalizada						
600,0	0,09087	0,09135	0,13576	0,2497	0,61626	0,81999	0,89667
700,0	0,09089	0,09145	0,14356	0,27488	0,66893	0,8615	0,92612
800,0	0,09089	0,09154	0,15128	0,2992	0,71435	0,89335	0,94705
900,0	0,0909	0,09162	0,15892	0,32271	0,7535	0,9178	0,96193
1000,0	0,0909	0,09171	0,1665	0,34543	0,78726	0,93656	0,9725

A Figura 19 mostra a evolução da temperatura média adimensional que o filme descendente da solução de LiBr-H₂O percorre ao longo do comprimento horizontal X. Pode-se observar que, à medida que o número de *Biot* aumenta, o comportamento da temperatura é inversamente proporcional. Verifica-se também que para *Biot* = 1000, a temperatura tende a 0,00, enquanto para *Bi* = 0,001, tende a se aproximar de 1,00, corroborando a validação do método proposto.

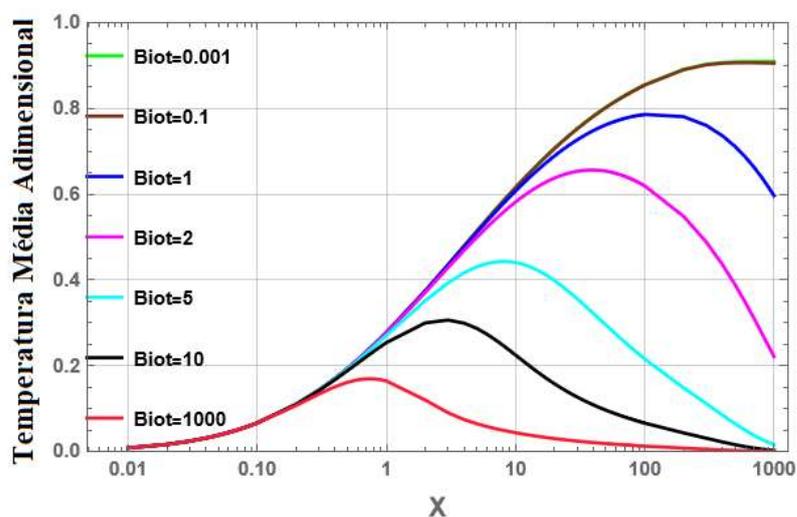


Figura 19 - Temperatura média adimensional em função da posição X, variando o número de Biot de 0,001 a 1000 ($LE = 1000$ e $Fac = 0,01$).

A Figura 20 mostra a evolução da concentração média adimensional que o filme descendente da solução de LiBr-H₂O percorre ao longo do comprimento horizontal X. Pode-se notar que ela apresenta comportamento complementar à temperatura, isso apenas

corrobora com o método aplicado, pois a condição de contorno da interface corresponde à soma da temperatura com a concentração levando a 1,00.

A Figura 21 mostra as temperaturas adimensionais versus o comprimento adimensional X e compara com os resultados obtidos por WASSENAAR (1994). Na região de entrada do filme descendente, a temperatura da solução próxima à interface vapor-solução aumenta devido à geração de calor durante o processo de absorção, enquanto em Wassenaar isso é constante. A partir dos picos de calor de absorção, as curvas se aproximam. A temperatura média se comporta de forma semelhante à temperatura de interface com deslocamento do pico de calor de absorção. A temperatura da solução próxima à parede permanece praticamente constante, próxima de zero. A influência da camada limite térmica, bem como a velocidade ainda em desenvolvimento, podem levar a essa diferença nos resultados iniciais.

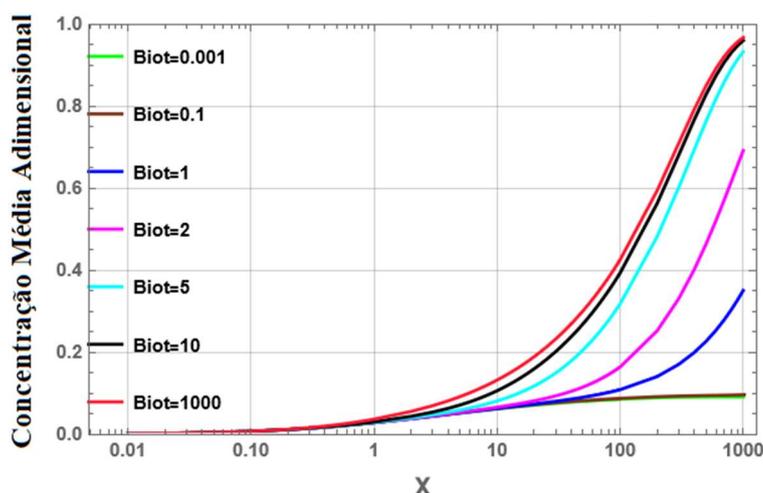


Figura 20 - Concentração média adimensional em função da posição X , variando o número de Biot de 0,001 a 1000 ($LE = 1000$ e $Fac = 0,01$).

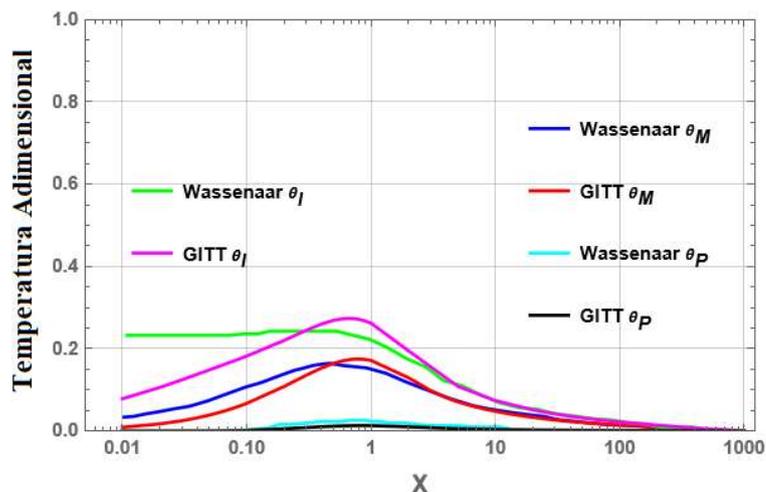


Figura 21 - Temperaturas adimensionais em função da posição X ($Bi = 10$, $LE = 1000$ e $Fac = 0,01$).

A Figura 22 mostra a evolução das concentrações adimensionais que o filme descendente da solução de LiBr-H₂O percorre ao longo do comprimento horizontal X . Pode-se notar que ele apresenta um comportamento complementar à temperatura; comparando com WASSENAAR (1994) verifica-se que a concentração na interface apresenta, principalmente na entrada, certa diferença, oriunda do modelo utilizado. A influência da camada limite térmica, bem como o perfil de velocidade utilizado no modelo proposto, é mais evidente quando comparado ao modelo adotado por WASSENAAR (1994).

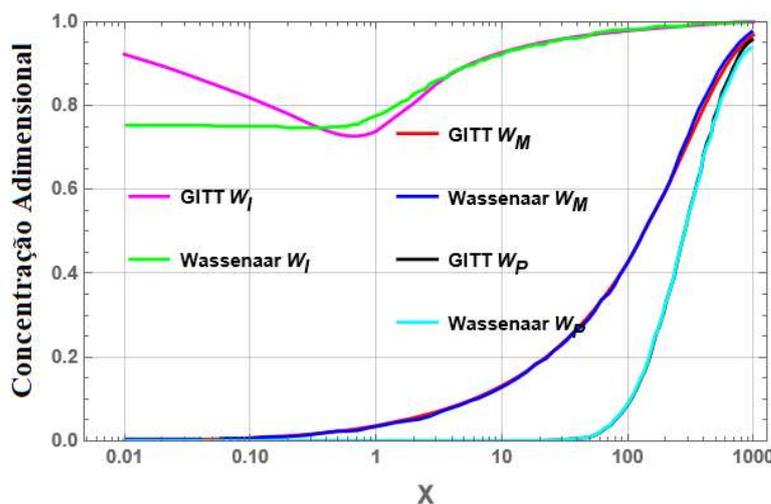


Figura 22 - Concentrações adimensionais em função da posição X ($Bi = 10$, $LE = 1000$ e $Fac = 0,01$).

Na Tabela 13 é mostrado a convergência da temperatura média ao longo da posição X variando o número de autovalores de 30 a 58. Pode-se notar que a partir de 55 autovalores, já se obtém uma convergência na quarta casa decimal, razão pela qual adota-se com 55 autovalores como convergido.

Na Tabela 14 é mostrado o comportamento da temperatura média, da parede e da interface, pode-se verificar que ambas as temperaturas se aproximam de 1, conforme previsto para a espessura constante calculado anteriormente e comparado com Silva (2010).

Na Tabela 15 é mostrado o comportamento da espessura da camada limite térmica e de concentração e comparado com a solução exata adotada na página 580 da referência CRESMASCO (1998), chegando à conclusão que o modelo proposto apresenta resultados satisfatórios.

Tabela 13 - Convergência da temperatura média adimensional ao longo da posição X ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$) com espessura variável.

X	Número de Autovalores						
	30	40	45	50	55	56	58
Temperatura Média Adimensional							
$1 \cdot 10^{-6}$	0	0	0	0	0	0	0
$2 \cdot 10^{-6}$	0,5498	0,6953	0,7060	0,8249	0,8174	0,8948	0,9166
$3 \cdot 10^{-6}$	0,7305	0,8629	0,8730	0,9532	0,9516	0,9889	0,9978
$4 \cdot 10^{-6}$	0,8127	0,9225	0,9305	0,9827	0,9826	1,0002	1,0036
$5 \cdot 10^{-5}$	0,8589	0,9502	0,9566	0,9922	0,9925	1,0015	1,0027
$6 \cdot 10^{-6}$	0,8879	0,9654	0,9704	0,996	0,9964	1,0013	1,0017
$7 \cdot 10^{-6}$	0,9078	0,9745	0,9787	0,9978	0,9981	1,0009	1,0011
$8 \cdot 10^{-6}$	0,9221	0,9805	0,9839	0,9987	0,999	1,0007	1,0007
$1 \cdot 10^{-5}$	0,9413	0,9875	0,9900	0,9995	0,9998	1,0004	1,0004
$2 \cdot 10^{-5}$	0,9755	0,9969	0,9978	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002
$4 \cdot 10^{-5}$	0,9898	0,9992	0,9996	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
$8 \cdot 10^{-5}$	0,9956	0,9998	1,0000	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
$1 \cdot 10^{-4}$	0,9967	0,9999	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
$2 \cdot 10^{-4}$	0,9985	1,0000	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002

X	Número de Autovalores						
	30	40	45	50	55	56	58
X	Temperatura Média Adimensional						
$4 \cdot 10^{-4}$	0,9993	1,0000	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
$8 \cdot 10^{-4}$	0,9996	1,0001	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
$1 \cdot 10^{-3}$	0,9997	1,0001	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
$2 \cdot 10^{-3}$	0,9998	1,0001	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
$4 \cdot 10^{-3}$	0,9999	1,0001	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
$8 \cdot 10^{-3}$	0,9999	1,0001	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
$1 \cdot 10^{-2}$	0,9999	1,0001	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
$2 \cdot 10^{-2}$	0,9999	1,0001	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
$4 \cdot 10^{-2}$	0,9999	1,0000	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
$8 \cdot 10^{-2}$	0,9999	1,0000	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
0,1	0,9999	1,0000	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
0,2	0,9999	1,0000	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
0,4	0,9999	1,0000	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
0,8	0,9999	1,0000	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
1	0,9999	1,0000	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
2	0,9999	1,0000	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
4	0,9999	1,0000	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002
8	0,9999	1,0000	1,0001	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002

Tabela 14 - Distribuição das temperaturas média, parede e interface adimensionais ao longo da posição X ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$) com espessura variável usando 55 autovalores.

X	Temperatura Média	Temperatura na Parede	Temperatura na Interface
$1 \cdot 10^{-6}$	0	0	0
$2 \cdot 10^{-6}$	0,817385	0,694453	0,983157
$3 \cdot 10^{-6}$	0,951555	0,911163	1,003487
$4 \cdot 10^{-6}$	0,982607	0,966153	1,003125

X	Temperatura Média	Temperatura na Parede	Temperatura na Interface
5 10 ⁻⁵	0,992512	0,984512	1,002153
6 10 ⁻⁶	0,996392	0,991925	1,001539
7 10 ⁻⁶	0,99814	0,995345	1,001179
8 10 ⁻⁶	0,999013	0,997086	1,000963
1 10 ⁻⁵	0,999752	0,998597	1,000744
2 10 ⁻⁵	1,000215	0,999591	1,000556
4 10 ⁻⁵	1,000234	0,999639	1,000541
8 10 ⁻⁵	1,000238	0,999644	1,000545
1 10 ⁻⁴	1,000239	0,999645	1,000545
2 10 ⁻⁴	1,000235	0,999643	1,000539
4 10 ⁻⁴	1,000231	0,999638	1,000535
8 10 ⁻⁴	1,00023	0,999636	1,000535
1 10 ⁻³	1,00023	0,999636	1,000536
2 10 ⁻³	1,000231	0,999637	1,000536
4 10 ⁻³	1,000232	0,999638	1,000537
8 10 ⁻³	1,000232	0,999639	1,000538
1 10 ⁻²	1,000232	0,999638	1,000538
2 10 ⁻²	1,000233	0,999639	1,000538
4 10 ⁻²	1,000233	0,999639	1,000538
8 10 ⁻²	1,000233	0,999639	1,000538
0,1	1,000233	0,999639	1,000538
0,2	1,000233	0,999639	1,000538
0,4	1,000233	0,999639	1,000538
0,8	1,000233	0,999639	1,000538
1	1,000233	0,999639	1,000538
2	1,000233	0,999639	1,000538
4	1,000233	0,999639	1,000538
8	1,000233	0,999639	1,000538

Tabela 15 - Distribuição das espessuras da camada limite térmica e de concentração ao longo da posição X ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$) com espessura variável usando 55 autovalores.

X	Presente trabalho	Solução exata	Erro (%)	Presente trabalho	Solução exata	Erro (%)
$1 \cdot 10^{-6}$	0,001119	0,001126	0,62	0,001260	0,001268	0,63
$2 \cdot 10^{-6}$	0,001582	0,001592	0,63	0,001782	0,001793	0,61
$3 \cdot 10^{-6}$	0,001938	0,001950	0,62	0,002182	0,002196	0,64
$4 \cdot 10^{-6}$	0,002238	0,002251	0,58	0,002520	0,002536	0,63
$5 \cdot 10^{-5}$	0,002502	0,002517	0,60	0,002817	0,002835	0,63
$6 \cdot 10^{-6}$	0,002740	0,002757	0,62	0,003086	0,003105	0,61
$7 \cdot 10^{-6}$	0,002960	0,002978	0,60	0,003334	0,003354	0,60
$8 \cdot 10^{-6}$	0,003164	0,003184	0,63	0,003564	0,003586	0,61
$1 \cdot 10^{-5}$	0,003538	0,003560	0,62	0,003985	0,004009	0,60
$2 \cdot 10^{-5}$	0,005003	0,005034	0,62	0,005635	0,00567	0,62
$4 \cdot 10^{-5}$	0,007076	0,007119	0,60	0,007969	0,008018	0,61
$8 \cdot 10^{-5}$	0,010007	0,010068	0,61	0,011270	0,011339	0,61
$1 \cdot 10^{-4}$	0,011188	0,011256	0,60	0,012600	0,012678	0,62
$2 \cdot 10^{-4}$	0,015822	0,015919	0,61	0,017819	0,017929	0,61
$4 \cdot 10^{-4}$	0,022375	0,022513	0,61	0,025200	0,025355	0,61
$8 \cdot 10^{-4}$	0,031644	0,031838	0,61	0,035639	0,035858	0,61
$1 \cdot 10^{-3}$	0,035379	0,035596	0,61	0,039845	0,04009	0,61
$2 \cdot 10^{-3}$	0,050033	0,050340	0,61	0,056349	0,056696	0,61
$4 \cdot 10^{-3}$	0,070757	0,071192	0,61	0,079690	0,08018	0,61
$8 \cdot 10^{-3}$	0,100066	0,100681	0,61	0,112699	0,113392	0,61
$1 \cdot 10^{-2}$	0,111877	0,112565	0,61	0,126001	0,126776	0,61
$2 \cdot 10^{-2}$	0,158218	0,159190	0,61	0,178193	0,179288	0,61
$4 \cdot 10^{-2}$	0,223754	0,225129	0,61	0,252002	0,253551	0,61
$8 \cdot 10^{-2}$	0,316436	0,318381	0,61	0,356385	0,358576	0,61
0,1	0,353786	0,355961	0,61	0,398451	0,4009	0,61
0,2	0,500329	0,503404	0,61	0,563494	0,566958	0,61

X	Presente trabalho	Solução exata	Erro (%)	Presente trabalho	Solução exata	Erro (%)
0,4	0,707572	0,711921	0,61	0,796901	0,8018	0,61
0,8	1,000657	1,006808	0,61	1,126988	1,133916	0,61
1	1,118768	1,125646	0,61	1,260011	1,267757	0,61
2	1,582177	1,591904	0,61	1,781924	1,792879	0,61
4	2,237537	2,251292	0,61	2,520021	2,535513	0,61
8	3,164355	3,183808	0,61	3,563848	3,585757	0,61

Na Tabela 16 é mostrado a distribuição de temperatura média adimensional ao longo da posição X variando o número de *Biot* de 0.001 a 1000. Pode-se notar que a temperatura tende para um, com exceção para *Biot* = 1000, que o valor chega a 1.64.

Tabela 16 - Distribuição da temperatura média adimensional ao longo da posição X variando Biot (Fac = 0,01 e LE = 1000) com espessura variável.

X	Número de <i>Biot</i>						
	0,001	0,1	1	2	5	10	1000
Temperatura Média Adimensional							
$1 \cdot 10^{-6}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$2 \cdot 10^{-6}$	0,8174	0,8175	0,8185	0,8199	0,8245	0,8334	0,8695
$3 \cdot 10^{-6}$	0,9515	0,9517	0,9542	0,9577	0,9718	1,0027	1,1528
$4 \cdot 10^{-6}$	0,9825	0,9828	0,9860	0,9907	1,0104	1,0554	1,2886
$5 \cdot 10^{-5}$	0,9923	0,9927	0,9963	1,0016	1,0244	1,0775	1,3676
$6 \cdot 10^{-6}$	0,9962	0,9965	1,0004	1,0060	1,0307	1,0887	1,4191
$7 \cdot 10^{-6}$	0,9979	0,9983	1,0023	1,0081	1,0338	1,0950	1,4551
$8 \cdot 10^{-6}$	0,9988	0,9992	1,0032	1,0092	1,0356	1,0988	1,4816
$1 \cdot 10^{-5}$	0,9995	0,9999	1,0040	1,0102	1,0373	1,1031	1,5181
$2 \cdot 10^{-5}$	1,0000	1,0004	1,0046	1,0108	1,0388	1,1080	1,5873
$4 \cdot 10^{-5}$	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1090	1,6193
$8 \cdot 10^{-5}$	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6340
$4 \cdot 10^{-4}$	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6445

X	Número de <i>Biot</i>						
	0,001	0,1	1	2	5	10	1000
	Temperatura Média Adimensional						
8 10 ⁻⁴	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6456
1 10 ⁻³	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6458
2 10 ⁻³	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6462
4 10 ⁻³	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6464
8 10 ⁻³	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6465
4 10 ⁻²	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6465
8 10 ⁻²	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6465
0,1	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6465
0,2	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6465
0,4	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6465
0,8	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6465
1	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6465
2	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6465
4	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6465
8	1,0000	1,0004	1,0046	1,0109	1,0390	1,1092	1,6465

A Figura 23 mostra o comportamento da espessura da camada limite térmica e de concentração e compara com a solução obtida por CREMASCO (1998) obtendo resultados com erro relativo da ordem de 0,6%, comprovando que o modelo proposto é satisfatório.

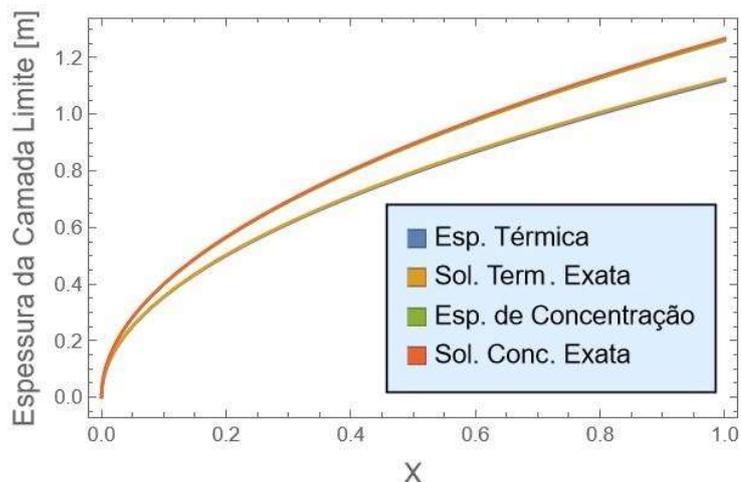


Figura 23 - Distribuição das espessuras de camada limite térmica e de concentração com espessura variável para $LE = 1000$, $Fac = 0,01$, usando $Bi = 0,001$ e 55 autovalores.

A Figura 24 mostra a distribuição das temperaturas média, parede e interface, onde se observa que as temperaturas tendem a 1 (um) conforme previsto na literatura.

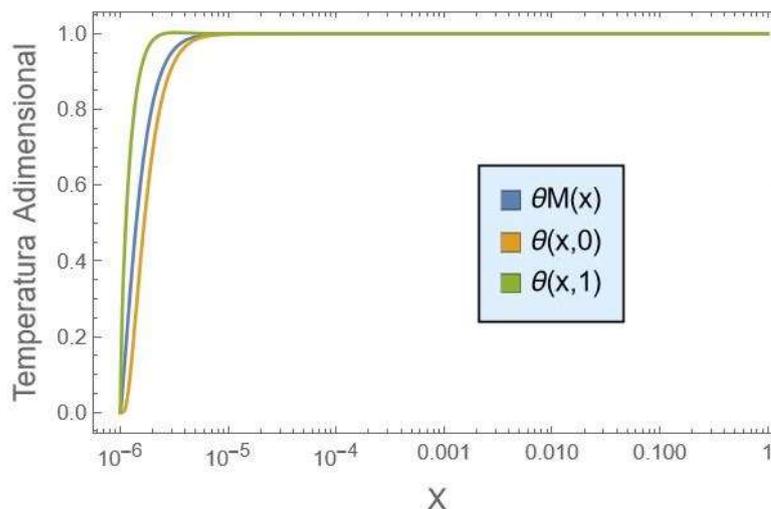


Figura 24 - Distribuição das temperaturas média, parede e interface com espessura variável para $LE = 1000$, $Fac = 0,01$, usando $Bi = 0,001$ e 55 autovalores.

A Figura 25 mostra a distribuição das concentrações média, parede e interface, onde se observa que as concentrações tendem a 0 (zero), conforme previsto na condição de contorno, onde a soma da temperatura e concentração tem que ser 1(um). Como as temperaturas tendem a 1(um), as concentrações devem tender a 0(zero).

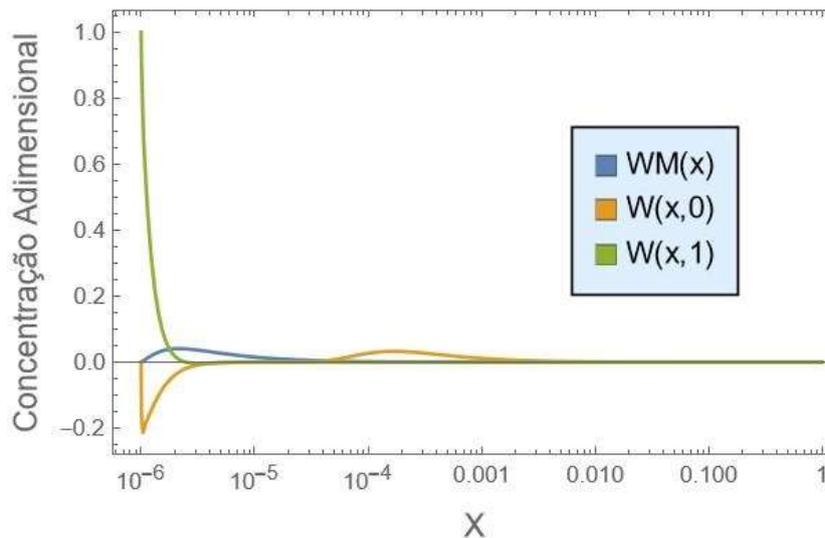


Figura 25 - Distribuição das concentrações média, parede e interface com espessura variável para $LE = 1000$, $Fac = 0,01$, usando $Bi = 0,001$ e 55 autovalores.

3.7 CONCLUSÕES

O presente estudo, neste capítulo, trata da aplicação da técnica de transformada integral generalizada (GITT) para resolver a transferência simultânea de calor e massa do processo de absorção de filme descendente da solução de refrigerante LiBr-H₂O usando a equação de transferência de calor sujeita à condição de contorno de Robin (terceiro tipo) e na equação de transferência de massa sujeita à condição de contorno de Neumann (segundo tipo). O absorvato do filme depende da soma da temperatura da parede e da concentração de massa.

O comportamento de convergência para ambos os campos de concentração e temperatura em posições prescritas foi investigado. Os resultados usando a GITT são totalmente convergentes para pelo menos três dígitos significativos em todos os casos.

Para validar o modelo proposto, foram utilizadas três situações: $Bi = 0,001$ (parede adiabática), $Bi = 10$ (caso prático) e $Bi = 1000$ (parede isotérmica). Além disso, os perfis de temperatura e concentração foram determinados e comparados com resultados disponíveis na literatura. O modelo foi validado com sucesso com dados de SILVA e SANTOS (2016), mostrando um erro relativo máximo de 1,38% para a parede adiabática ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$) e obteve um bom ajuste com perfis de temperatura e concentração de WASSENAAR (1994) para a condição de contorno Robin ($Bi = 10$, $Fac = 0,01$ e $LE = 1000$).

Foi realizado um estudo paramétrico com uma ferramenta de simulação baseada no modelo apresentado. Este estudo analisa o impacto da variação do número de *Biot* (Bi) e do fator de acoplamento (Fac) do absorvedor. Este estudo destaca que, variando o número de *Biot*, verifica-se que a influência no campo térmico é maior que no campo de concentração, enquanto variando o fator de acoplamento mostra que a influência no campo de concentração é maior que no campo de temperatura.

Os resultados desta análise podem ser usados para orientar o projeto do absorvedor de placa descendente.

Utilizando a espessura variável foi verificado que tanto o campo de temperatura como o de concentração se desenvolvem mais rápido, por isso, a posição X variou até 8.

O comportamento das espessuras da camada limite térmica e de concentração obtiveram boa harmonia com os resultados analíticos obtidos na literatura.

CAPÍTULO IV

SOLUÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURA E CONCENTRAÇÃO EM UM ABSORVEDOR VERTICAL VIA GITT

4.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é resolver o problema de transferência simultânea de calor e massa com formulação em variáveis primitivas, fazendo uso de uma mudança de variável para determinar o perfil de temperatura e de concentração, em um escoamento laminar, unidimensional em película sobre um tubo de um absorvedor vertical em coordenadas cilíndricas com perfil de velocidade completamente desenvolvido variando o número de *Biot*, usando a GITT, por meio do software Mathematica e comparando com o trabalho de Tese de ANDRADE (2018) que usou a GITT por meio do software FORTRAN e dados experimentais da tese de MEDRANO (2000).

A Figura 26 mostra o diagrama esquemático do processo de absorção modelado com o falling film (película descendente), vapor d'água e a mistura de trabalho, a solução aquosa de Brometo de Lítio que entra pela parte superior do duto. A solução flui para baixo como um filme que cai sobre a parede interna do tubo e absorve o vapor d'água formando uma película fina descendente. A solução é arrefecida por meio de um fluxo de água que flui em contracorrente através do espaço anular mostrado no desenho.

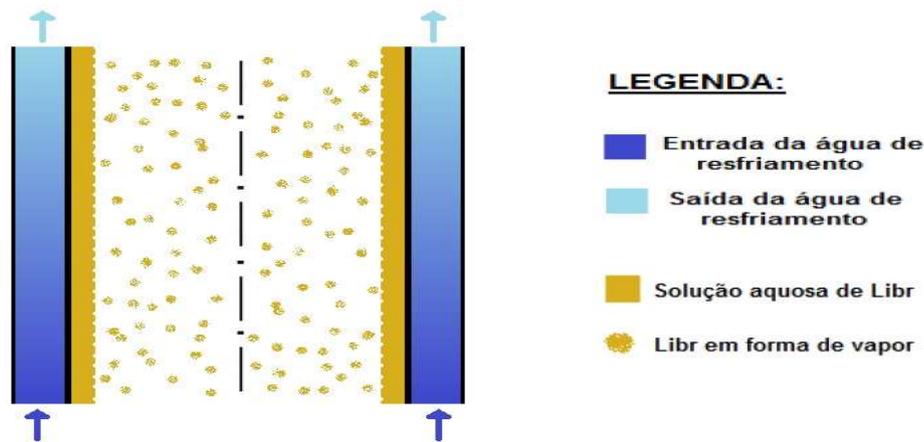


Figura 26 - Desenho Esquemático da distribuição dos fluidos de vapor d'água e da solução líquida BrLi-H₂O descendente do duto em estudo (ANDRADE, 2018).

A Figura 27 mostra o aparato experimental projetado e construído para simular as condições de trabalho presentes em um sistema de refrigeração por absorção utilizado na tese de MEDRANO (2000) analisando todos os componentes do sistema (absorvedor, gerador, bombas e tanques).

Vale salientar que a parte que nos interessa é a do absorvedor, considerado por muitos autores, como o coração do sistema. Este dispositivo foi construído em aço inoxidável, material recomendado devido ao uso da solução de Brometo de Lítio e água que é bastante corrosiva. São dois tubos verticais concêntricos, onde no interior do tubo interno circulam o vapor d'água e a solução aquosa, no tubo maior circula a água de arrefecimento. Na entrada é distribuída a solução aquosa na parte superior do tubo interno, que cai por gravidade formando uma película fina que é absorvida pelo vapor d'água, enquanto na parte anular entre os dois tubos circula a água de arrefecimento em contracorrente para aumentar a troca de calor.

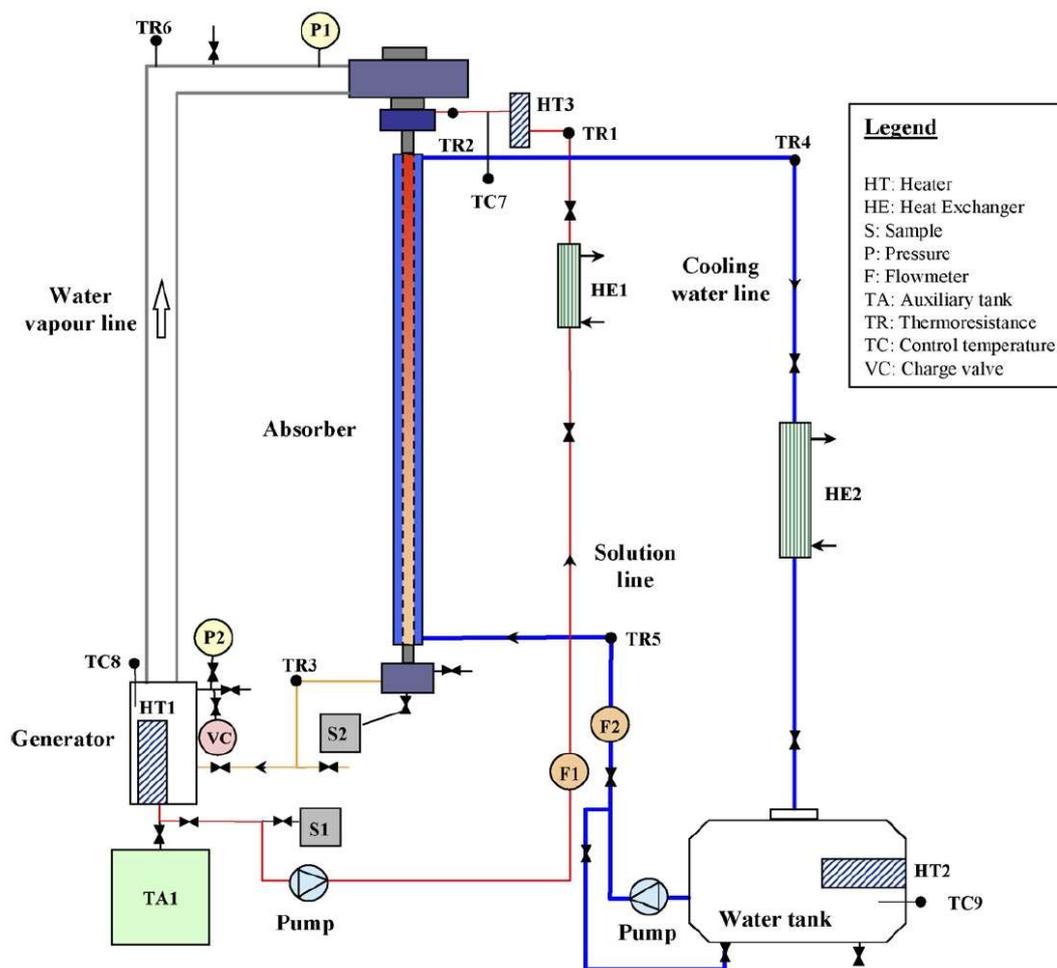


Figura 27 - Diagrama esquemático do set-up para estudo experimental do escoamento da película descendente no processo de absorção (Imagem Adaptada de MEDRANO, 2000).

MEDRANO, BOUROUIS e CORONAS (2002) realizaram um estudo experimental da absorção de vapor d'água sobre um escoamento em filme descendente laminar ondulado com a solução de Brometo de Lítio e água sobre a parede interna de um tubo liso vertical.

MEDRANO et al. (2003) descreveram a preocupação em remover os gases não absorvíveis que provocam uma redução na capacidade de arrefecimento. O modelo de refrigeração por absorção utilizado foi o filme descendente no interior do tubo vertical com a solução de Brometo de Lítio e água, sendo resolvido pelo método de Runge-Kutta-Verner de quinta ordem.

MEYER (2014) utilizou a transformada de Laplace para resolver o problema de transferência simultânea de calor e massa, na absorção de películas descendentes laminares

com velocidade de película constante, utilizando duas condições de fronteira: parede isotérmica e adiabática.

MEYER (2015) utilizou uma solução analítica com uma condição de contorno mais realista de uma resistência térmica constante da parede, incluindo a condição de contorno de parede isotérmica e adiabática, utilizando a transformada de Laplace para resolver o problema de transferência simultânea de calor e massa, na absorção de películas descendentes laminares com velocidade de película constante.

WU (2016) desenvolveu um modelo matemático para a evaporação do filme descendente, utilizando a transformada de Laplace nas equações diferenciais parciais para o problema de transferência simultânea de calor e massa em filmes descendentes laminar com espessura de filme uniforme. Como se trata de um tubo, o modelo foi desenvolvido em coordenadas cilíndricas. Os principais fatores que influenciam o desempenho da transferência de calor e massa foram calculados e analisados. Os resultados indicaram as taxas relativas nas quais os perfis de temperatura e concentração se desenvolvem e mostram a variação dos fluxos de calor e massa de interface com comprimento normalizado.

ANDRADE (2018) apresentou uma solução para o fenômeno da transferência simultânea de calor e massa em absorvedores verticais, em regime permanente, utilizando coordenadas cilíndricas através da técnica da transformada integral generalizada para duas situações: parede adiabática e isotérmica, obtendo boa harmonia com resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura.

4.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA COM ESPESSURA CONSTANTE

Considere o escoamento de um filme formado por uma solução líquida e vapor escoando em um tubo vertical. A espessura da película do líquido é muito fina comparada com o raio do espaço ocupado pelo vapor, levando a consideração um escoamento unidimensional na direção longitudinal do tubo. Vale salientar que o problema em questão apresenta vários desafios devido à dificuldade de resolver simultaneamente o processo de transferência de calor e massa por meio do acoplamento nas condições de contorno.

A formulação matemática do problema físico é obtida a partir das seguintes hipóteses simplificadoras:

- O sistema está em regime permanente;

- O fluido adotado é newtoniano;
- As propriedades termo físicas são consideradas constantes;
- Problema unidimensional com variação apenas na direção axial;
- Análise da região líquida, o vapor interage na interface, onde ocorre a reação e a liberação de calor;
- Escoamento unidimensional na direção longitudinal do duto vertical, afetado pela gravidade com perfil de velocidade completamente desenvolvido;
- O aumento no fluxo de massa da solução líquida devido à absorção do vapor é desprezível;
- A solução binária com um único componente presente na fase de vapor;
- Não existe transferência de calor do líquido para o vapor, nem transferência de calor por radiação, dissipação viscosa, gradientes de concentração (efeito Dufour), ou efeitos gravitacionais;
- Não existe difusão por causa de gradientes de pressão, de temperatura (efeito Soret), ou reações químicas;
- A difusão de calor e massa na direção do escoamento é considerada desprezível em relação à difusão perpendicular a direção do escoamento;
- Não existe tensão de cisalhamento entre as fases líquido e vapor na interface;
- A espessura média da película é considerada constante e o raio do tubo maior que a espessura da película.

Considerando as hipóteses simplificadoras descritas acima, as equações representativas da conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia em variáveis primitivas na forma dimensional, são definidas abaixo:

Equação da Energia:

$$v(r) \frac{\partial T(z,r)}{\partial z} = \alpha_l \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T(z,r)}{\partial r} \right) \right] \quad R_{int} < r < R_t, \quad z > 0 \quad (4.1a)$$

Cuja condições inicial e de contorno são dadas como:

$$T(0, r) = T_0 \quad (4.1b)$$

$$-k \left. \frac{\partial T(z,r)}{\partial r} \right|_{r=R_{int}} = H_{abs} \rho D \left. \frac{\partial C(z,r)}{\partial r} \right|_{r=R_{int}} \quad (4.1c)$$

$$-k \left. \frac{\partial T(z,r)}{\partial r} \right|_{r=R_t} = \bar{h} (T(z, R_t) - T_C) \quad (4.1d)$$

Onde: T_C representa a temperatura da água de arrefecimento.

Equação da Concentração:

$$v(r) \frac{\partial C(z,r)}{\partial z} = D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C(z,r)}{\partial r} \right) \right] \quad R_{int} < r < R_t, \quad z > 0 \quad (4.2a)$$

Cuja condições inicial e de contorno são dadas como:

$$C(0, r) = C_0 \quad (4.2b)$$

$$T(z, R_{int}) = A \cdot C(z, r) + B \quad (4.2c)$$

$$\left. \frac{\partial C(z,r)}{\partial r} \right|_{r=R_t} = 0 \quad (4.2d)$$

A condição de contorno (4.2d) representa que não existe fluxo de massa atravessando a parede, o que indica que a parede é impermeável.

Utilizando os grupos adimensionais abaixo:

$$\xi = \frac{1}{Pe} \frac{z}{R_t} \quad ; \quad \eta = \frac{r}{R_t} \quad ; \quad V(\eta) = \frac{v(r)}{v_{med}} \quad (4.3a-c)$$

$$\theta(\xi, \eta) = \frac{T(z,r) - T_0}{T_e - T_0} \quad ; \quad W(\xi, \eta) = \frac{C(z,r) - C_0}{C_e - C_0} \quad ; \quad Le = \frac{\alpha}{D} \quad (4.3d-e)$$

$$T_e = A C_0 + B \quad ; \quad T_0 = A C_e + B \quad ; \quad Re = \frac{v_{med} R_t}{\nu} \quad (4.3f-h)$$

Onde: T_e representa a temperatura de uma solução de fração de massa W_0 em equilíbrio com o vapor.

C_e representa a fração de massa de uma solução de temperatura T_0 em equilíbrio com o vapor.

Substituindo os grupos adimensionais no problema geral, obtém-se:

Equação da Energia:

$$V(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \right] \quad \eta_{int} < \eta < 1, \quad \xi > 0 \quad (4.4a)$$

Cujas condições inicial e de contorno são dadas como:

$$\theta(0, \eta) = 0 \quad (4.4b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_{int}} = f_{ac} \left. \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_{int}} \quad (4.4c)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} + Bi \theta(\xi, 1) = 0 \quad (4.4d)$$

Na condição de contorno (4.4c) f_{ac} representa um fator de acoplamento na interface líquido-vapor determinado pela expressão:

$$f_{ac} = \frac{H_{abs}}{C_p} \frac{D}{\alpha} \frac{C_e - C_0}{T_e - T_0} \quad \eta_{int} < \eta < 1, \quad \xi > 0 \quad (4.5)$$

Equação da Concentração:

$$V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \left[\frac{1}{Le} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \right] \right] \quad \eta_{int} < \eta < 1, \quad \xi > 0 \quad (4.6a)$$

Cuja condições inicial e de contorno são dadas como:

$$W(0, \eta) = 0 \quad (4.6b)$$

$$\theta(\xi, \eta_{int}) + W(\xi, \eta_{int}) = 1 \quad (4.6c)$$

$$\left. \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0 \quad (4.6d)$$

As equações (4.4a) e (4.6a) formam um sistema linear de EDP's parabólicas de segunda ordem com um conjunto de condições de contorno apresentando não-homogeneidade nas interfaces. No sistema proposto utilizou-se balanço integral a fim de resolver o problema proposto, conforme será visto mais detalhadamente na próxima seção.

4.3 APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Com o objetivo de transformar o problema proposto em um sistema de equações diferenciais ordinárias faz-se necessário a utilização de um problema auxiliar com solução já conhecida, para eliminar uma dependência espacial, tornando-o um sistema de equações diferenciais ordinárias.

O problema de Autovalor Auxiliar para o campo térmico é definido como:

$$\frac{d}{d\eta} \left[\eta \frac{d\psi_i(\eta)}{d\eta} \right] + \mu_i^2 \eta \psi_i(\eta) = 0 \quad \eta_{int} < \eta < 1 \quad (4.7)$$

$$\left. \frac{d\psi_i(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_{int}} = 0 \quad (4.7a)$$

$$\left. \frac{d\psi_i(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=1} + Bi \psi_i(1) = 0 \quad (4.7b)$$

A qual é resolvida pelas autofunções, autovalores e norma, respectivamente, como:

$$\psi_i(\eta) = Bi J_0(\mu_i \eta) Y_1(\mu_i) - Bi J_0(\mu_i) Y_1(\mu_i \eta) + \mu_i [J_1(\mu_i) Y_0(\mu_i \eta) - J_0(\mu_i \eta) Y_1(\mu_i)] \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (4.7c)$$

$$-Bi \mu_i [J_1(\mu_i \eta_{int}) Y_0(\mu_i) + Bi \mu_i J_0(\mu_i) Y_1(\mu_i \eta_{int})] + \mu_i^2 [J_1(\mu_i \eta_{int}) Y_1(\mu_i) - J_1(\mu_i) Y_1(\mu_i \eta_{int})] = 0 \quad (4.7d)$$

$$N_i = \int_{\eta_{int}}^1 \eta \psi_i(\eta)^2 d\eta \quad (4.7e)$$

A autofunção normalizada é dada por:

$$\widetilde{\Psi}_i(\eta) = \frac{\psi_i(\eta)}{\sqrt{N_i}} \quad (4.7f)$$

O problema de Autovalor Auxiliar para o campo de concentração é definido como:

$$\frac{d}{d\eta} \left[\eta \frac{d\phi_i(\eta)}{d\eta} \right] + \omega_i^2 \eta \phi_i(\eta) = 0 \quad \eta_{int} < \eta < 1 \quad (4.8)$$

$$\phi_i(\eta) = 0 \quad \eta = \eta_{int} \quad (4.8a)$$

$$\left. \frac{d\phi_i(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=1} = 0 \quad \eta = 1 \quad (4.8b)$$

A qual é resolvida pelas autofunções, autovalores e norma, respectivamente, como:

$$\phi_i(\eta) = \omega_i [J_1(\omega_i) Y_0(\omega_i \eta) - J_0(\omega_i \eta) Y_1(\omega_i)] \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (4.8c)$$

$$\omega_i [J_1(\omega_i) Y_0(\omega_i \eta_{int}) - J_0(\omega_i \eta_{int}) Y_1(\omega_i)] = 0 \quad (4.8d)$$

$$M_i = \int_{\eta_{int}}^1 \eta \phi_i(\eta)^2 d\eta \quad (4.8e)$$

A autofunção normalizada é dada por:

$$\widetilde{\Phi}_i(Y) = \frac{\Phi_i(Y)}{\sqrt{M_i}} \quad (4.8f)$$

Os problemas de Autovalores Auxiliares permitem a definição dos pares de transformada do campo térmico e de concentração, respectivamente:

$$\bar{\theta}_j(\xi) = \int_{\eta_{int}}^1 \eta \widetilde{\Psi}_j(\eta) \theta(\xi, \eta) d\eta \quad \text{Transformada} \quad (4.9)$$

$$\theta(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{\Psi}_j(\eta) \bar{\theta}_j(\xi) \quad \text{Inversa} \quad (4.10)$$

$$\bar{W}_j(\xi) = \int_{\eta_{int}}^1 \eta \widetilde{\Phi}_j(\eta) W(\xi, \eta) d\eta \quad \text{Transformada} \quad (4.11)$$

$$W(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{\Phi}_j(\eta) \bar{W}_j(\xi) \quad \text{Inversa} \quad (4.12)$$

Seguindo o formalismo da técnica, após aplicarem-se os operadores $\int_{\eta_{int}}^1 \eta \widetilde{\Psi}_i(\eta) d\eta$ e $\int_{\eta_{int}}^1 \theta(\xi, \eta) d\eta$ nas Equações (6.4a) e (6.6a) respectivamente e somar os resultados, a equação resultante torna-se:

$$\int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \eta \widetilde{\Psi}_i(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta + \mu_i^2 \int_{\eta_{int}}^1 \eta \widetilde{\Psi}_i(\eta) \theta(\xi, \eta) d\eta = \int_{\eta_{int}}^1 \widetilde{\Psi}_i(\eta) \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \right] d\eta - \int_{\eta_{int}}^1 \theta(\xi, \eta) \frac{d}{d\eta} \left[\eta \frac{d\Psi_i(\eta)}{d\eta} \right] d\eta \quad (4.13)$$

O lado esquerdo da equação (4.13) representa um integral de volume que será transformado em uma integral de superfície por meio do uso da fórmula de Green (COTTA, 1993) tornando-se:

$$\int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \eta \widetilde{\Psi}_i(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta + \mu_i^2 \int_{\eta_{int}}^1 \eta \widetilde{\Psi}_i(\eta) \theta(\xi, \eta) d\eta = \left(\widetilde{\Psi}_i(\eta) \left(\eta \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) - \theta(\xi, \eta) \eta \frac{d\Psi_i(\eta)}{d\eta} \right) \Big|_{\eta_{int}}^1 \quad (4.14)$$

Aplicando as condições de contorno (4.4c), (4.4d), (4.7a) e (4.7b) no lado esquerdo da equação, obtém-se:

$$\eta = \eta_{int} \rightarrow \widetilde{\Psi}_i(\eta_{int}) \left(\eta_{int} \frac{\partial \theta(\xi, \eta_{int})}{\partial \eta} \right) - \theta(\xi, \eta_{int}) \eta_{int} \frac{d\widetilde{\Psi}_i(\eta_{int})}{d\eta} = \widetilde{\Psi}_i(\eta_{int}) \eta_{int} f_{ac} \left. \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} \quad (4.15)$$

$$\eta = 1 \quad \widetilde{\Psi}_i(1) \frac{\partial \theta(\xi, 1)}{\partial \eta} - \theta(\xi, 1) \frac{d\widetilde{\Psi}_i(1)}{dY} = \widetilde{\Psi}_i(1) Bi \theta(\xi, 1) - \theta(\xi, 1) Bi \widetilde{\Psi}_i(1) = 0 \quad (4.16)$$

Inserindo os resultados (4.15) e (4.16) na equação (4.13), obtém-se:

$$\int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \eta \widetilde{\Psi}_i(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta + \mu_i^2 \int_{\eta_{int}}^1 \eta \widetilde{\Psi}_i(\eta) \theta(\xi, \eta) d\eta = \widetilde{\Psi}_i(\eta_{int}) f_{ac} \left. \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_{int}} \quad (4.17)$$

Fazendo uso do balanço integral proposto por ANDRADE (2018), a derivada da concentração na posição $\eta = \eta_{int}$ é dada por:

$$\left. \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_{int}} = - \frac{Le}{\eta_{int}} \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} d\eta \quad (4.18)$$

Substituindo a equação (4.18) na equação (4.17) tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \eta \widetilde{\Psi}_i(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(X) \\ = \widetilde{\Psi}_i(\eta_{int}) f_{ac} Le \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} d\eta \end{aligned} \quad (4.19)$$

De maneira similar é resolvido o problema de concentração obtendo-se a equação (4.20).

$$\int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \eta \widetilde{\Phi}_l(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta + \frac{\omega_l^2}{Le} \overline{W}_l(\xi) = - \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\widetilde{\Phi}_j(\eta_{int})}{d\eta} \theta(\xi, \eta_{int}) + \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\widetilde{\Phi}_j(\eta_{int})}{d\eta} \quad (4.20)$$

Para evitar o potencial transformado na fronteira é realizado um balanço integral sobre a equação (4.6a) resultando em:

$$\theta(\xi, 1) = - \int_{\eta_{int}}^1 \left(\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 \eta' V(\eta') \frac{\partial \theta(\xi, \eta')}{\partial \xi} d\eta' \right) d\eta + (Bi \log(\eta_{int}) + 1) \theta(\xi, \eta_{int}) \quad (4.21)$$

Introduzindo a equação (4.21) na equação (4.20) obtém-se:

$$\int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \eta \widetilde{\Phi}_j(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta + \frac{\omega_j^2}{Le} \overline{W}_j(\xi) = - \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\widetilde{\Phi}_j(\eta_{int})}{d\eta} \frac{\left(\theta(\xi, 1) + \int_{\eta_{int}}^1 \left(\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 \eta' V(\eta') \eta' \frac{\partial \theta(\xi, \eta')}{\partial \xi} d\eta' \right) d\eta \right)}{(Bi \log(\eta_{int}) + 1)} + \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\widetilde{\Phi}_j(\eta_{int})}{d\eta} \quad (4.22)$$

Aplicando-se as fórmulas das inversas (4.10) e (4.12) nas equações (4.19) e (4.22) respectivamente, obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias representativas dos potenciais desejados e que, escrito de forma completa, assumem a seguinte forma:

Energia

$$\sum_{j=1}^{nauv} \left(CT1_{ij} \frac{d\overline{\theta}_j(\xi)}{d\xi} \right) + \mu_i^2 \overline{\theta}_i(\xi) + \sum_{j=1}^{nauv} CT2_{ij} \frac{d\overline{W}_j(\xi)}{d\xi} = Bi \sum_{j=1}^{nauv} CT3_{ij} \overline{\theta}_j(\xi) \quad (4.23a)$$

$$\overline{\theta}_i(0) = 0 \quad (4.23b)$$

$$CT1_{ij} = \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \widetilde{\Psi}_i(\eta) \widetilde{\Psi}_j(\eta) d\eta \quad (4.23c)$$

$$CT2_{ij} = fac \ Le \widetilde{\Psi}_i(\eta_{int}) \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \widetilde{\Phi}_j(\eta) d\eta \quad (4.23d)$$

$$CT3_{ij} = \widetilde{\Psi}_i(1)\widetilde{\Psi}_j(1) \quad (4.23e)$$

Concentração

$$\sum_{j=1}^{nauv} \left(CC1_{ij} \frac{d\overline{W}_j(\xi)}{d\xi} \right) + \frac{\omega_i^2}{Le} \overline{W}_i(\xi) + \sum_{j=1}^{nauv} CC2_{ij} \overline{\theta}_j(\xi) = \sum_{j=1}^{nauv} CC3_{ij} \frac{d\overline{\theta}_j(\xi)}{d\xi} + CC4_i \quad (4.24a)$$

$$\overline{W}_i(0) = 0 \quad (4.24b)$$

$$CC1_{ij} = \int_0^1 \eta V(\eta) \widetilde{\Phi}_i(\eta) \widetilde{\Phi}_j(\eta) d\eta \quad (4.24c)$$

$$CC2_{ij} = \frac{\eta_{int}}{Le(Bi \log(\eta_{int})+1)} \frac{d\widetilde{\Phi}_j(\eta_{int})}{d\eta} \widetilde{\Psi}_i(1) \quad (4.24d)$$

$$CC3_{ij} = \frac{\eta_{int}}{Le(Bi \log(\eta_{int})+1)} \frac{d\widetilde{\Phi}_j(\eta_{int})}{dY} \int_{\eta_{int}}^1 \left(\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 V(\eta') \eta' \frac{\partial \theta(\xi, \eta')}{\partial \xi} d\eta' \right) d\eta \quad (4.24e)$$

$$CC4_i = \frac{\eta_{int}}{Le} \frac{d\widetilde{\Phi}_i(\eta_{int})}{d\eta} \quad (4.24f)$$

4.4 RESULTADOS

Para validar os resultados deste trabalho, as concentrações e temperaturas médias, chamadas de grandezas de interesse prático, são determinadas através das expressões:

Concentração média dimensional e temperatura:

$$\theta_{med} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \widetilde{\Psi}_i(\eta) d\eta \bar{\theta}_i(\xi) \quad (4.25)$$

$$W_{med} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\eta_{int}}^1 V(\eta) \tilde{\Phi}_i(\eta) d\eta \bar{W}_i(\xi) \quad (4.26)$$

Para determinar o número de Nusselt (coeficiente de transferência de calor) e o número de Sherwood (coeficiente de transferência de massa), da interface para o interior do filme, são utilizadas as seguintes expressões:

$$Nu_{int} = \frac{h_{int}\delta}{k} = \frac{1}{\theta_{int}-\theta_{med}} \left. \frac{\partial\theta(\xi,\eta)}{\partial\eta} \right|_{\eta=\eta_{int}} \quad (4.27)$$

$$Sh_{int} = \frac{k\delta}{D} = \frac{1}{W_{int}-W_{med}} \left. \frac{\partial W(\xi,\eta)}{\partial\eta} \right|_{\eta=\eta_{int}} \quad (4.28)$$

A Tabela 17 mostra a convergência da temperatura adimensional ao longo do duto ($D_{int} = 22.1\text{mm}$ e $D_{ext} = 26.6\text{mm}$) variando o número de autovalores de 10 a 60 autovalores, adotando $Bi = 0.001$ (parede adiabática), $Fac = 0.006506$ e $Lewis = 102.31$, obtendo três algarismos significativos já convergidos dentro do intervalo da variável analisada.

Tabela 17 - Convergência da temperatura média adimensional ao longo da posição ξ na parede adiabática ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,006506$ e $LE = 102,31$).

	Número de Autovalores							
	10	20	30	40	45	50	55	60
ξ	Temperatura Média Adimensional							
0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,01	0,008456	0,014167	0,017454	0,019025	0,019628	0,020127	0,020537	0,020880
0,02	0,016227	0,024639	0,028473	0,030311	0,030929	0,031426	0,031834	0,032174
0,03	0,023147	0,03284	0,036722	0,038597	0,039206	0,039694	0,040093	0,040427
0,04	0,029352	0,039667	0,04351	0,045371	0,045969	0,046449	0,046842	0,047171
0,05	0,034979	0,045594	0,049388	0,051226	0,051816	0,05229	0,052677	0,053001
0,06	0,040136	0,050884	0,054633	0,056448	0,057031	0,057499	0,057882	0,058202
0,07	0,044903	0,055694	0,059402	0,061197	0,061773	0,062236	0,062614	0,062931
0,08	0,049342	0,060127	0,063797	0,065574	0,066144	0,066602	0,066977	0,067290

	Número de Autovalores							
	10	20	30	40	45	50	55	60
ξ	Temperatura Média Adimensional							
0,09	0,053502	0,064253	0,067888	0,069648	0,070213	0,070666	0,071038	0,071348
0,1	0,057422	0,068122	0,071725	0,073469	0,074029	0,074479	0,074847	0,075155
0,2	0,088188	0,098262	0,101622	0,103249	0,103771	0,104191	0,104535	0,104822
0,3	0,110587	0,120156	0,123347	0,124892	0,125388	0,125787	0,126114	0,126386
0,4	0,128668	0,137835	0,140893	0,142373	0,142849	0,143231	0,143545	0,143806
0,5	0,144016	0,152847	0,155795	0,157221	0,15768	0,158048	0,15835	0,158602
0,6	0,157438	0,165981	0,168833	0,170214	0,170658	0,171014	0,171307	0,171551
0,7	0,169413	0,177703	0,180471	0,181811	0,182243	0,182589	0,182872	0,183109
0,8	0,180253	0,188315	0,191009	0,192313	0,192732	0,193069	0,193345	0,193576
0,9	0,190169	0,198027	0,200653	0,201924	0,202333	0,202661	0,202931	0,203156
1,0	0,199319	0,206989	0,209553	0,210795	0,211194	0,211515	0,211778	0,211997
1,1	0,207817	0,215316	0,217823	0,219037	0,219428	0,219741	0,219998	0,220213
1,2	0,215755	0,223095	0,225549	0,226737	0,227120	0,227427	0,227679	0,227889
1,3	0,223202	0,230394	0,232799	0,233964	0,234340	0,234640	0,234887	0,235093
1,4	0,230216	0,237270	0,239629	0,240773	0,241141	0,241436	0,241678	0,241880
1,5	0,236843	0,243768	0,246084	0,247207	0,247569	0,247858	0,248096	0,248295

Na Tabela 18 compara-se as temperaturas média, parede e interface adimensionais com resultados obtidos por ANDRADE (2018), adotando $Bi = 0.001$ (parede adiabática), $Fac = 0.006506$ e $Lewis = 102.31$ com 60 autovalores, obtendo-se boa harmonia com erro relativo da ordem de 2%.

Tabela 18 - Distribuição das temperaturas média, parede e interface adimensionais ao longo da posição ξ na parede adiabática ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,006506$ e $LE = 102,31$).

ξ	Parede	ANDRADE (2018)	Erro (%) relativo	Interface	ANDRADE (2018)	Erro (%) relativo
0,01	0,05229	0,053187	1,69	0,00138	0,001409	2,06
0,02	0,05808	0,059013	1,58	0,01029	0,010481	1,82

0,03	0,06119	0,062052	1,39	0,02101	0,021366	1,67
0,04	0,06414	0,064917	1,20	0,03043	0,030920	1,58
0,05	0,06726	0,067981	1,06	0,03835	0,038916	1,45
0,06	0,07050	0,071189	0,97	0,04507	0,045688	1,35
0,07	0,07377	0,074440	0,90	0,05093	0,051568	1,24
0,08	0,07700	0,077662	0,85	0,05615	0,056795	1,14
0,09	0,08016	0,080815	0,81	0,06088	0,061532	1,06
0,1	0,08323	0,083882	0,78	0,06523	0,065887	1,00
0,2	0,10923	0,109852	0,57	0,09764	0,098270	0,64
0,3	0,12933	0,129921	0,45	0,12037	0,120975	0,50
0,4	0,14593	0,146498	0,39	0,13850	0,139079	0,42
0,5	0,16020	0,160746	0,34	0,15379	0,154350	0,36
0,6	0,17278	0,173308	0,30	0,16712	0,167656	0,32
0,7	0,18407	0,184580	0,28	0,17898	0,179500	0,29
0,8	0,19433	0,194826	0,25	0,18970	0,190203	0,26
0,9	0,20375	0,204232	0,24	0,19949	0,199984	0,25
1,0	0,21246	0,212934	0,22	0,20852	0,209000	0,23
1,1	0,22058	0,221036	0,21	0,21691	0,217371	0,21
1,2	0,22817	0,228617	0,20	0,22473	0,225186	0,20
1,3	0,23531	0,235743	0,18	0,23208	0,232516	0,19
1,4	0,24204	0,242463	0,17	0,23899	0,239418	0,18
1,5	0,24841	0,248821	0,17	0,24552	0,24594	0,17

Na Tabela 19 mostra-se a convergência da concentração média adimensional ao longo da posição ξ variando o número de autovalores de 10 a 60 autovalores, adotando $Bi = 0.001$ (parede adiabática), $Fac = 0.006506$ e $Lewis = 102.31$, obtendo três algarismos significativos já convergidos dentro do intervalo da variável analisada.

Tabela 19 - Convergência da concentração média adimensional ao longo da posição ξ na parede adiabática ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,006506$ e $Lewis = 102,31$).

Número de Autovalores

	10	20	30	40	45	50	55	60
ξ	Concentração Média Adimensionalizada							
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,01	0,0116	0,0192	0,0234	0,0255	0,0263	0,0269	0,0274	0,0279
0,02	0,0218	0,0325	0,0373	0,0397	0,0404	0,0411	0,0416	0,0420
0,03	0,0307	0,0430	0,0478	0,0502	0,0509	0,0515	0,0520	0,0525
0,04	0,0388	0,0518	0,0566	0,0589	0,0596	0,0602	0,0607	0,0611
0,05	0,0462	0,0595	0,0642	0,0665	0,0673	0,0678	0,0683	0,0687
0,06	0,0530	0,0664	0,0711	0,0734	0,0741	0,0747	0,0752	0,0756
0,07	0,0593	0,0728	0,0774	0,0796	0,0804	0,0809	0,0814	0,0818
0,08	0,0652	0,0787	0,0832	0,0855	0,0862	0,0867	0,0872	0,0876
0,09	0,0708	0,0842	0,0887	0,0909	0,0916	0,0922	0,0926	0,0930
0,1	0,0760	0,0893	0,0938	0,0960	0,0967	0,0973	0,0977	0,0981
0,2	0,1180	0,1305	0,1347	0,1367	0,1373	0,1378	0,1383	0,1386
0,3	0,1494	0,1612	0,1652	0,1671	0,1677	0,1682	0,1686	0,1689
0,4	0,1753	0,1866	0,1903	0,1922	0,1928	0,1932	0,1936	0,1939
0,5	0,1976	0,2085	0,2121	0,2139	0,2144	0,2149	0,2153	0,2156
0,6	0,2175	0,2280	0,2315	0,2332	0,2337	0,2341	0,2345	0,2348
0,7	0,2355	0,2456	0,2490	0,2506	0,2512	0,2516	0,2519	0,2522
0,8	0,2520	0,2618	0,2651	0,2666	0,2672	0,2676	0,2679	0,2682
0,9	0,2672	0,2767	0,2799	0,2815	0,2820	0,2824	0,2827	0,2829
1,0	0,2814	0,2907	0,2938	0,2953	0,2957	0,2961	0,2964	0,2967
1,1	0,2947	0,3037	0,3067	0,3082	0,3087	0,3090	0,3093	0,3096
1,2	0,3072	0,3160	0,3189	0,3204	0,3208	0,3212	0,3215	0,3217
1,3	0,3190	0,3276	0,3305	0,3319	0,3323	0,3327	0,3330	0,3332
1,4	0,3302	0,3386	0,3414	0,3427	0,3432	0,3435	0,3438	0,3441
1,5	0,3408	0,3490	0,3517	0,3531	0,3535	0,3539	0,3541	0,3544

A Figura 28 mostra o comportamento das temperaturas média (integração), na interface ($\eta = \eta_{int}$) e na parede ($\eta = 1$) adimensionais ao longo da direção do escoamento do filme. Na região de entrada do filme descendente, a temperatura da solução próxima à interface vapor-solução aumenta devido à geração de calor durante o processo de absorção.

A temperatura da solução próxima à parede cai extremamente devido à detecção das camadas limite térmicas adjacentes à parede; como resultado da diferença de temperatura entre a temperatura da parede e do filme. Pode-se verificar também que quando ξ cresce muito ($\xi > 0.5$), a temperatura de todo o filme atinge a temperatura da parede.

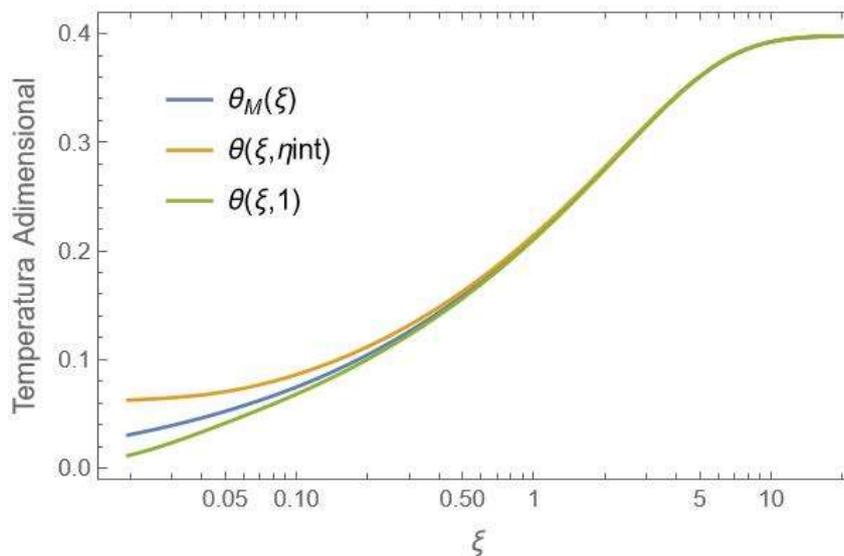


Figura 28 - Distribuição das temperaturas média, parede e interface adimensionais para $LE = 102,31$, $Fac = 0,006506$, usando $Bi = 0,001$ e 55 autovalores.

A Figura 29 mostra o comportamento das concentrações média, na parede e na interface adimensionais, que tem comportamento complementar à temperatura, na região de entrada há uma diferença entre as concentrações de interface e parede devido à influência da camada limite de concentração. Para uma posição ξ muito grande ($\xi > 10$), a concentração de todo o filme da solução atinge a concentração da interface vapor-solução.

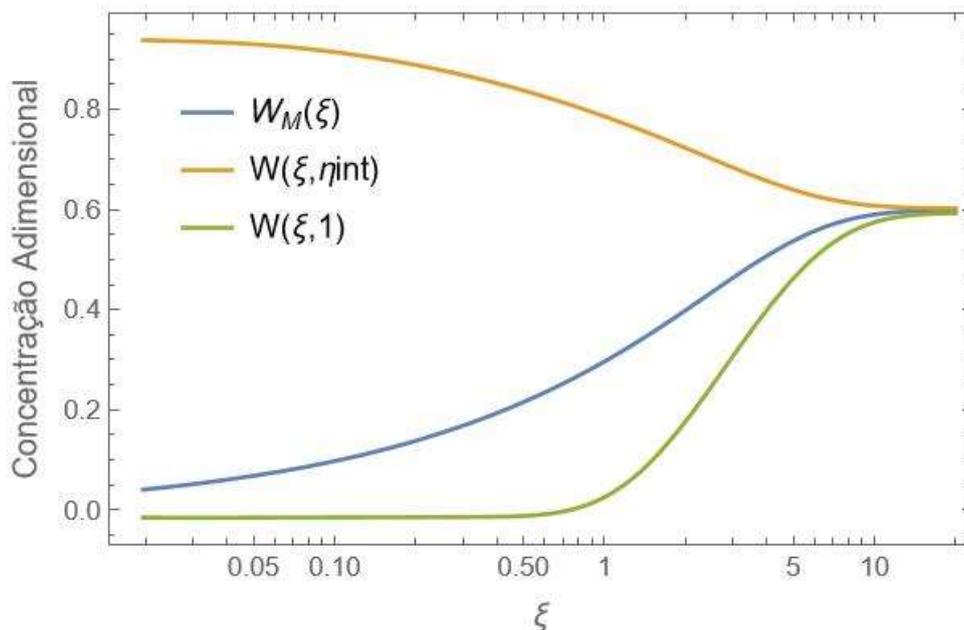


Figura 29 - Distribuição das concentrações média, parede e interface para $LE = 102,31$, $Fac = 0,006506$, usando $Bi = 0,001$ e 55 autovalores.

Na Tabela 20 comparamos as concentrações média, parede e interface adimensionais com resultados obtidos por ANDRADE (2018), adotando $Bi = 0.001$ (parede adiabática), $Fac = 0.006506$ e $Lewis = 102.31$ com 60 autovalores, obtendo-se boa harmonia com erro relativo da ordem de 1,71%.

Tabela 20 - Distribuição das concentrações média, parede e interface adimensionais ao longo da posição ξ na parede adiabática ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,006506$ e $Lewis = 102,31$).

ξ	Parede (GITT)	ANDRADE (2018)	Erro relativo	Interface (GITT)	ANDRADE (2018)	Erro relativo
0	0,0000	0,0000	1,71	1,0000	1,0000	0,00
0,01	0,0288	0,0293	1,56	0,9477	0,9468	0,10
0,02	0,0315	0,0320	1,25	0,9419	0,9410	0,10
0,03	0,0315	0,0319	0,95	0,9388	0,9379	0,10
0,04	0,0312	0,0315	0,96	0,9359	0,9351	0,09
0,05	0,0309	0,0312	0,65	0,9327	0,9320	0,08
0,06	0,0307	0,0309	0,98	0,9295	0,9288	0,08
0,07	0,0304	0,0307	0,66	0,9262	0,9256	0,06

ξ	Parede (GITT)	ANDRADE (2018)	Erro relativo	Interface (GITT)	ANDRADE (2018)	Erro relativo
0,08	0,0303	0,0305	0,66	0,9230	0,9223	0,08
0,09	0,0301	0,0303	0,66	0,9198	0,9192	0,07
0,1	0,0299	0,0301	0,34	0,9168	0,9161	0,08
0,2	0,0289	0,0290	0,35	0,8908	0,8901	0,08
0,3	0,0281	0,0282	0,00	0,8707	0,8701	0,07
0,4	0,0279	0,0279	0,35	0,8541	0,8535	0,07
0,5	0,0287	0,0288	0,32	0,8398	0,8393	0,06
0,6	0,0313	0,0314	0,28	0,8272	0,8267	0,06
0,7	0,0362	0,0363	0,46	0,8159	0,8154	0,06
0,8	0,0433	0,0435	0,38	0,8057	0,8052	0,06
0,9	0,0526	0,0528	0,31	0,7963	0,7958	0,06
1,0	0,0638	0,0640	0,39	0,7875	0,7871	0,05
1,1	0,0764	0,0767	0,44	0,7794	0,7790	0,05
1,2	0,0901	0,0905	0,38	0,7718	0,7714	0,05
1,3	0,1047	0,1051	0,33	0,7647	0,7643	0,05
1,4	0,1199	0,1203	0,37	0,7580	0,7575	0,07
1,5	0,1353	0,1358	1,71	0,7516	0,7512	0,05

Na Tabela 21 comparamos as temperaturas média, parede e interface adimensionais com resultados obtidos por ANDRADE (2018), adotando $Bi = 1000$ (parede isotérmica), $Fac = 0.006506$ e $Lewis = 102.31$ com 30 autovalores. Pode-se verificar que os valores obtidos da temperatura média quando comparados com ANDRADE (2018) têm grande concordância. De maneira análoga ocorre com os resultados da temperatura na interface e na parede.

Tabela 21 - Distribuição das temperaturas média, parede e interface adimensionais ao longo da posição ξ ($Bi = 1000$, $Fac = 0,00506$ e $Lewis = 102,31$).

ξ	Média	ANDRADE (2018)	Parede	ANDRADE (2018)	Interface	ANDRADE (2018)
0	0,00000	0,00000	0,0E+00	0,0E+00	0,00000	0,00000
0,01	0,01691	0,01631	1,5E-05	0,0E+00	0,05243	0,05110
0,02	0,02660	0,02609	1,0E-04	0,0E+00	0,05854	0,05794
0,03	0,03230	0,03192	1,7E-04	0,0E+00	0,06156	0,06121
0,04	0,03567	0,03539	2,1E-04	0,0E+00	0,06329	0,06307
0,05	0,03759	0,03739	2,3E-04	0,0E+00	0,06406	0,06394
0,06	0,03856	0,03843	2,5E-04	0,0E+00	0,06409	0,06404
0,07	0,03890	0,03882	2,5E-04	0,0E+00	0,06357	0,06358
0,08	0,03878	0,03874	2,6E-04	0,0E+00	0,06265	0,06270
0,09	0,03837	0,03835	2,6E-04	0,0E+00	0,06146	0,06154
0,1	0,03773	0,03774	2,5E-04	0,0E+00	0,06008	0,06018
0,2	0,02869	0,02872	2,0E-04	0,0E+00	0,04507	0,04516
0,3	0,02206	0,02205	1,5E-04	0,0E+00	0,03492	0,03493
0,4	0,01810	0,01807	1,2E-04	0,0E+00	0,02885	0,02883
0,5	0,01561	0,01558	1,0E-04	0,0E+00	0,02500	0,02496
0,6	0,01391	0,01387	9,3E-05	0,0E+00	0,02233	0,02230
0,7	0,01265	0,01262	8,4E-05	0,0E+00	0,02035	0,02033
0,8	0,01167	0,01165	7,8E-05	0,0E+00	0,01881	0,01878
0,9	0,01088	0,01086	7,2E-05	0,0E+00	0,01756	0,01753
1,0	0,01023	0,01020	6,8E-05	0,0E+00	0,01651	0,01649
1,1	0,00967	0,00965	6,4E-05	0,0E+00	0,01562	0,01559
1,2	0,00918	0,00916	6,1E-05	0,0E+00	0,01484	0,01482
1,3	0,00876	0,00874	5,8E-05	0,0E+00	0,01416	0,01414
1,4	0,00838	0,00836	5,6E-05	0,0E+00	0,01356	0,01354
1,5	0,00804	0,00802	5,3E-05	0,0E+00	0,01301	0,01299

Na Tabela 22 compara-se as concentrações média, parede e interface adimensionais com resultados obtidos por ANDRADE (2018), adotando $Bi = 1000$ (parede isotérmica), $Fac = 0.006506$ e $Lewis = 102.31$ com 30 autovalores. Pode-se verificar que os valores obtidos da concentração média quando comparados com ANDRADE (2018) têm grande

concordância. De maneira análoga ocorre com os resultados da concentração na interface que tendem a 1 (um). Só os valores da concentração na parede é que ocorre uma maior discrepância, talvez pelo fato da concentração está dando sinal negativo.

Tabela 22 - Distribuição das concentrações média, parede e interface adimensionais ao longo da posição ξ ($B_i = 1000$, $Fac = 0,006506$ e $Lewis = 102,31$).

ξ	Média	ANDRADE (2018)	Parede	ANDRADE (2018)	Interface	ANDRADE (2018)
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000	1,00000
0,01	0,02355	0,02273	0,02887	0,02807	0,94757	0,94890
0,02	0,03776	0,03702	0,03175	0,03144	0,94146	0,94206
0,03	0,04872	0,04808	0,03207	0,03193	0,93844	0,93879
0,04	0,05799	0,05743	0,03208	0,03201	0,93671	0,93693
0,05	0,06619	0,06570	0,03206	0,03203	0,93594	0,93606
0,06	0,07364	0,07320	0,03204	0,03203	0,93591	0,93596
0,07	0,08050	0,08012	0,03202	0,03204	0,93643	0,93642
0,08	0,08692	0,08658	0,03201	0,03204	0,93735	0,93730
0,09	0,09296	0,09266	0,03200	0,03204	0,93854	0,93846
0,1	0,09869	0,09843	0,03199	0,03204	0,93992	0,93982
0,2	0,14549	0,14543	0,03196	0,03200	0,95493	0,95484
0,3	0,18202	0,18202	0,03197	0,03200	0,96508	0,96507
0,4	0,21320	0,21322	0,03230	0,03231	0,97115	0,97117
0,5	0,24095	0,24097	0,03366	0,03366	0,97500	0,97504
0,6	0,26623	0,26626	0,03689	0,03688	0,97767	0,97770
0,7	0,28963	0,28966	0,04251	0,04249	0,97965	0,97967
0,8	0,31152	0,31155	0,05068	0,05066	0,98119	0,98122
0,9	0,33216	0,33219	0,06131	0,06128	0,98244	0,98247
1,0	0,35173	0,35177	0,07410	0,07407	0,98349	0,98351
1,1	0,37039	0,38826	0,08873	0,10480	0,98438	0,98518
1,2	0,38822	0,40536	0,10483	0,12207	0,98516	0,98586
1,3	0,40533	0,40536	0,12209	0,12207	0,98584	0,98586

ξ	Média	ANDRADE (2018)	Parede	ANDRADE (2018)	Interface	ANDRADE (2018)
1,4	0,42178	0,42181	0,14022	0,14020	0,98644	0,98646
1,5	0,43762	0,43766	0,15897	0,15895	0,98699	0,98701

Na Tabela 23 mostra-se a distribuição da temperatura média adimensional ao longo da posição ξ variando o número de *Biot* de 0,001 a 1000, usando 30 autovalores. Pode-se verificar que à medida que o número de *Biot* cresce a temperatura média tende a diminuir, tendendo a zero (0) para *Biot* infinito, característica de um processo isotérmico, só corroborando com resultados obtidos na literatura aberta.

Na Tabela 24 mostra-se a distribuição da concentração média adimensional ao longo da posição ξ variando o número de *Biot* de 0,001 a 1000, usando 30 autovalores, adotando $Fac = 0,006506$ e $Lewis = 102,31$. Pode-se verificar que à medida que o número de *Biot* cresce a concentração média tende a aumentar seu valor, ou seja, tem comportamento complementar ao da temperatura, só corroborando com resultados obtidos na literatura.

*Tabela 23 - Distribuição da temperatura média adimensional ao longo da posição ξ variando *Biot* ($Fac = 0,006506$ e $Lewis = 102,31$).*

ξ	Número de <i>Biot</i>						
	0,001	0,1	1	2	5	10	1000
ξ	Temperatura Média Adimensional						
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,01	0,01698	0,01698	0,01697	0,01697	0,01696	0,01694	0,01938
0,02	0,02793	0,02791	0,02778	0,02766	0,02741	0,02717	0,02836
0,03	0,03633	0,03627	0,03579	0,03537	0,03455	0,03384	0,03340
0,04	0,04328	0,04315	0,04212	0,04126	0,03964	0,03832	0,03634
0,05	0,04927	0,04905	0,04733	0,04592	0,04337	0,04138	0,03798
0,06	0,05460	0,05426	0,05173	0,04970	0,04613	0,04346	0,03877
0,07	0,05942	0,05895	0,05552	0,05282	0,04819	0,04482	0,03896
0,08	0,06386	0,06325	0,05883	0,05542	0,04970	0,04567	0,03874
0,09	0,06798	0,06721	0,06174	0,05759	0,05079	0,04611	0,03824

	Número de <i>Biot</i>						
	0,001	0,1	1	2	5	10	1000
ξ	Concentração Média Adimensional						
0,01	0,02351	0,02351	0,02351	0,02351	0,02351	0,02352	0,02355
0,02	0,03756	0,03756	0,03758	0,03760	0,03763	0,03767	0,03776
0,03	0,04818	0,04819	0,04825	0,04830	0,04841	0,04850	0,04872
0,04	0,05700	0,05701	0,05715	0,05726	0,05746	0,05763	0,05799
0,05	0,06469	0,06472	0,06494	0,06512	0,06544	0,06570	0,06619
0,06	0,07159	0,07163	0,07195	0,07221	0,07266	0,07300	0,07364
0,07	0,07790	0,07795	0,07839	0,07873	0,07932	0,07974	0,08050
0,08	0,08374	0,08381	0,08437	0,08480	0,08553	0,08604	0,08692
0,09	0,08920	0,08929	0,08999	0,09051	0,09137	0,09197	0,09296
0,1	0,09434	0,09446	0,09529	0,09592	0,09692	0,09760	0,09869
0,2	0,13515	0,13556	0,13826	0,14000	0,14237	0,14371	0,14549
0,3	0,16565	0,16650	0,17166	0,17462	0,17818	0,17993	0,18202
0,4	0,19081	0,19224	0,20032	0,20448	0,20896	0,21097	0,21320
0,5	0,21257	0,21471	0,22602	0,23129	0,23648	0,23864	0,24095
0,6	0,23192	0,23489	0,24966	0,25591	0,26162	0,26388	0,26623
0,7	0,24943	0,25335	0,27172	0,27883	0,28494	0,28725	0,28963
0,8	0,26548	0,27046	0,29252	0,30038	0,30677	0,30912	0,31152
0,9	0,28032	0,28647	0,31228	0,32076	0,32736	0,32975	0,33216
1,0	0,29416	0,30157	0,33112	0,34014	0,34691	0,34931	0,35173
1,1	0,30711	0,31589	0,34918	0,35865	0,36554	0,36795	0,37039
1,2	0,31931	0,32954	0,36653	0,37638	0,38336	0,38578	0,38822
1,3	0,33082	0,34259	0,38323	0,39341	0,40045	0,40289	0,40533
1,4	0,34173	0,35512	0,39935	0,40979	0,41689	0,41933	0,42178
1,5	0,35208	0,36718	0,41493	0,42559	0,43273	0,43518	0,43762
3,0	0,46247	0,51036	0,60061	0,61210	0,61913	0,62148	0,62385
4,5	0,52243	0,61063	0,72489	0,73545	0,74173	0,74380	0,74587
6,0	0,55568	0,68560	0,80939	0,81845	0,82371	0,82543	0,82715
7,5	0,57414	0,74367	0,86693	0,87436	0,87861	0,87998	0,88135
9,0	0,58439	0,78966	0,90613	0,91204	0,91536	0,91644	0,91750

ξ	Número de <i>Biot</i>						
	0,001	0,1	1	2	5	10	1000
	Concentração Média Adimensional						
12,0	0,59325	0,85649	0,95101	0,95453	0,95646	0,95707	0,95768

A Figura 30 mostra o comportamento das temperaturas média (integração), na interface ($\eta = \eta_{int}$) e na parede ($\eta = 1$) adimensionais ao longo da direção do escoamento do filme. Na região de entrada do filme descendente, a temperatura da solução próxima à interface vapor-solução aumenta devido à geração de calor durante o processo de absorção. A temperatura da solução próxima à parede cai extremamente devido à detecção das camadas limite térmicas adjacentes à parede; como resultado da diferença de temperatura entre a temperatura da parede e do filme. Pode-se verificar também que quando ξ cresce muito ($\xi > 10$), a temperatura de todo o filme atinge a temperatura da parede.

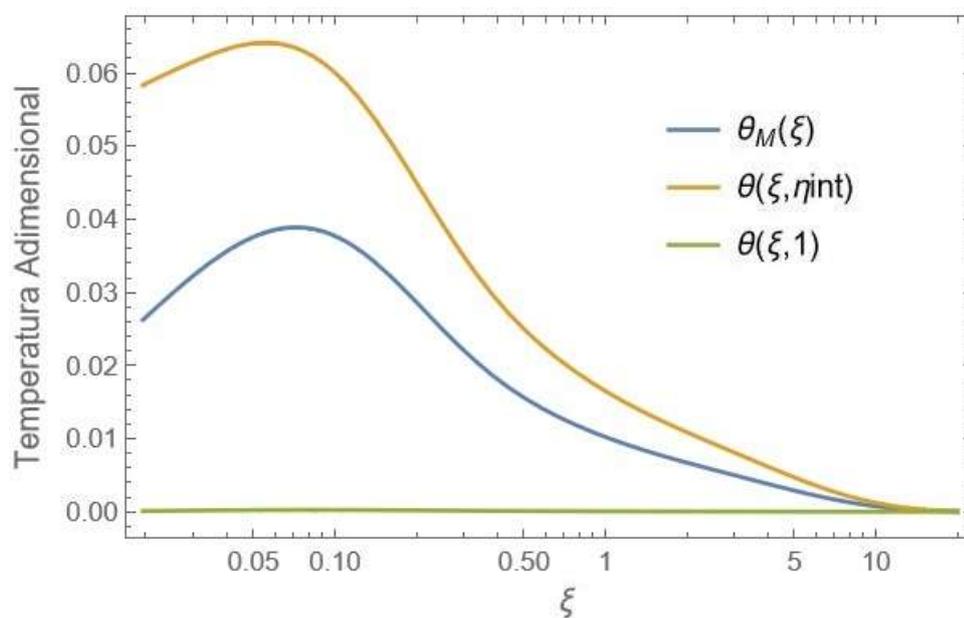


Figura 30 - Distribuição das temperaturas média, parede e interface adimensionais para $LE = 102,31$, $Fac = 0,006506$ usando $Bi = 1000$ e 30 autovalores.

A Figura 31 mostra o comportamento das concentrações média, na parede e na interface adimensionais, que tem comportamento complementar à temperatura, na região de entrada há uma diferença entre as concentrações de interface e parede devido à influência da

camada limite de concentração. Para uma posição ξ muito grande ($\xi > 20$), a concentração de todo o filme da solução atinge a concentração da interface vapor-solução.

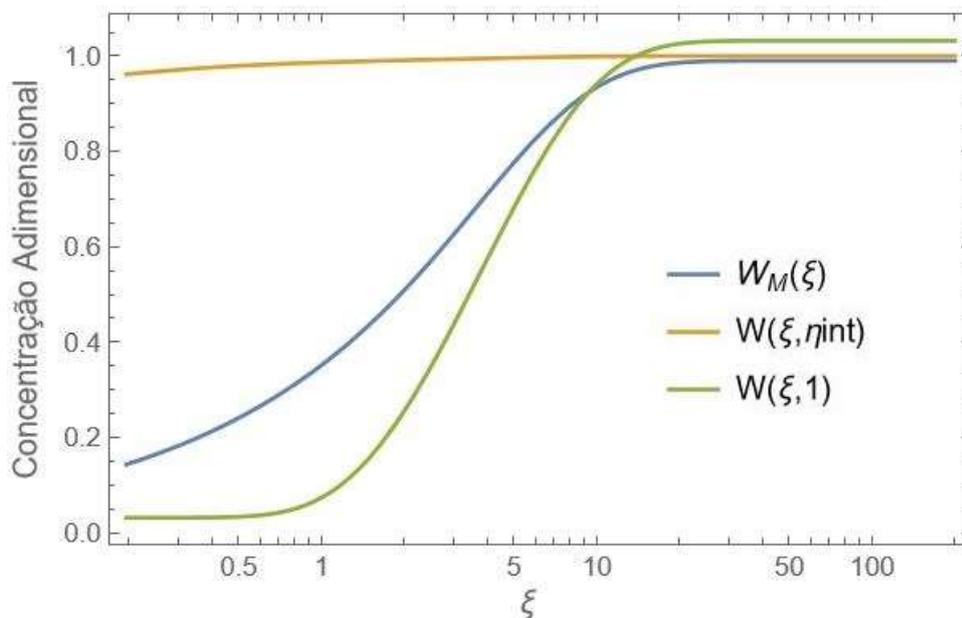


Figura 31 - Distribuição das concentrações média, parede e interface adimensionais para $LE = 102,31$, $Fac = 0,006506$ usando $Bi = 0,001$ e 30 autovalores.

4.5 CONCLUSÕES

O presente estudo nesse capítulo trata da aplicação da técnica de transformada integral generalizada (GITT) para resolver a transferência simultânea de calor e massa do processo de absorção de filme descendente da solução de refrigerante LiBr-H₂O usando a equação de transferência de calor sujeita à condição de contorno de Robin (terceiro tipo) e na equação de transferência de massa sujeita à condição de contorno de Neumann (segundo tipo) em coordenadas cilíndricas. O absorvato do filme depende da soma da temperatura da parede e da concentração de massa.

O comportamento de convergência para ambos os campos de concentração e temperatura em posições prescritas foi investigado. Os resultados usando a GITT são totalmente convergentes para pelo menos três dígitos significativos em todos os casos.

Para validar o modelo proposto, foram utilizadas duas situações: $Bi = 0,001$ (parede adiabática) e $Bi = 1000$ (parede isotérmica). Além disso, os perfis de temperatura e concentração foram determinados e comparados com resultados disponíveis na literatura. O

modelo foi validado com sucesso com dados de ANDRADE (2018), mostrando um erro relativo máximo de 1,71% para a parede adiabática ($Bi = 0,001$, $Fac = 0,006506$ e $Lewis = 102.31$).

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

No capítulo II, abordou-se a modelagem matemática de problemas de transferência em regime permanente contendo condução-convecção externa sobre uma placa plana de espessura finita enfocando a análise na metodologia de solução determinando tanto o campo hidrodinâmico como o térmico, fazendo uso da técnica da transformada integral generalizada (GITT), a qual apresentou uma boa harmonia com resultados obtidos por NAVEIRA (2006), SEYYEDI et al. (2019) e JAGUARIBE (2020).

O sistema resolvido de equações diferenciais parciais através da GITT obteve a determinação do perfil da camada limite hidrodinâmica e comparando com a solução de Blasius e com soluções aproximadas utilizando polinômios de 2^a e 3^a ordem, bem como, uma solução por meio da série de MacLaurin utilizada por JAGUARIBE (2020), chegando a valores muito próximos da solução exata e de Blasius. Além disso, foi determinado o perfil de camada limite térmica e comparado com os resultados obtidos por NAVEIRA (2006) e SEYYEDIET al. (2019) obtendo uma boa harmonia, validando assim o modelo.

Vale frisar que a determinação da espessura de camada limite hidrodinâmica e térmica, serviu de base para possibilitar a determinação do problema de transferência simultânea de calor e massa, considerando a espessura variável.

Ainda nesse capítulo abordou-se a modelagem matemática de problemas de transferência simultânea de calor e de massa com formulação em variáveis primitivas, fazendo uso da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), obtendo-se a determinação da espessura da camada limite hidrodinâmica, térmica e de concentração, a fim de servir de base para resolver o problema de problema de transferência simultânea de calor e massa, considerando a espessura variável.

No capítulo III abordou-se a modelagem matemática de problemas de transferência simultânea de calor e de massa com formulação em variáveis primitivas, considerando a espessura da camada limite constante e variável, para determinação do perfil de temperatura e de concentração, em um escoamento laminar, unidimensional em película sobre um tubo de um absorvedor horizontal em coordenadas retangulares com perfil de velocidade completamente desenvolvido variando o número de *Biot*, a fim de varrer a faixa de um processo adiabático até o processo isotérmico e comparado com resultados obtidos pelos trabalhos de Tese de WASSENAR (1994) e de SILVA (2010), chegando a uma boa harmonia.

Uma das contribuições deste trabalho é permitir obter resultados variando o número de *Biot*, a fim de comparar com resultados experimentais, bastando para isso identificar o valor de *Biot* utilizado no experimento. Além disso, conseguiu-se determinar o campo de temperatura e concentração, considerando dois casos para espessura da película: constante e variável, obtendo bons resultados.

Com relação à resolução da solução utilizando espessura variável, considerou que a espessura variável foi a espessura da camada limite, oportunidade em que o campo de temperatura e de concentração se desenvolveram de forma mais rápida.

No capítulo IV abordou-se a modelagem matemática de problemas de transferência simultânea de calor e de massa com formulação em variáveis primitivas, considerando a espessura da camada limite constante, para determinação do perfil de temperatura e de concentração, em um escoamento laminar, unidimensional em película sobre um tubo de um absorvedor vertical em coordenadas cilíndricas com perfil de velocidade completamente desenvolvido variando o número de *Biot*, a fim de varrer a faixa de um processo adiabático até o processo isotérmico e comparado com resultados obtidos pelo trabalho de Tese de ANDRADE (2018), chegando a uma boa harmonia.

Para trabalhos futuros propõem-se um estudo mais aprofundado na utilização da espessura da camada limite variável tanto em coordenadas retangulares como cilíndricas, variando as propriedades para verificar o comportamento da temperatura e da concentração.

REFERÊNCIAS

- ADEBISI, Adewoye Raphael. An Analysis of Boundary Layer Flow over a Flat Plate Using Modified Adomian Decomposition Method. *Sch. J. Eng. Tech.*, 3(4C):520-528, 2015.
- ANDBERG, J.W, Absorption of vapors into liquid films flowing over cooled horizontal tubes, PhD Thesis, Texas, Austin, 1986.
- ANDBERG, J.W. e VLIET, G. C., A simplified model absorption of vapors into liquid films flowing over cooled horizontal tubes, *ASHRAE Transaction* 93(Part 2), 2454–2466, 1987.
- ANDRADE, J.H. Estudo Teórico e Comparação Experimental dos Escoamentos Internos e Externos Descendentes da Película de Solução Água e Brometo de Lítio em Absorvedores de Tubos Horizontais e Verticais. Tese de Doutorado. UFPB. Julho, 2018.
- ANNAVARAPU, S.; APELIAN, D.; LAWLEY, A. Fundição por spray de tiras de aço: análise de processos. *Metalurgical Transactions A* , v. 21, n.º12, pág. 3237-3256, 1990.
- ARMOU, S., MIR, R. HAMMAMI, Y. El, HAMDAMI, S. El and ZINE-DINE, K., Numerical study of simultaneous heat and mass transfer in absorption of vapor in laminar liquid film, *International Journal of Enhanced Research in Science, Technolog & Engineering* 5(4), pp. 36–46, 2016.
- ARSHI, Banu PS; SUDHARSAN, N. M. Experimental heat and mass transfer studies on horizontal falling film absorber using water-lithium bromide. *Thermal Science*, v. 24, n. 3 Part B, p. 1923-1934, 2020.
- ASAITHAMBI, Asai. On Solving the Nonlinear Falkner–Skan Boundary-Value Problem: A Review. *Fluids*, v. 6, n. 4, p. 153, 2021.
- ASHOURI, Mahyar; BAHRAMI, Majid. Heat and mass transfer in laminar falling film absorption: A compact analytical model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 188, p. 122598, 2022.
- BABADI, F., FARHANIEH, B., Characteristics of Heat and Mass Transfer in Vapor Absorption of Falling Film Flow on a Horizontal Tube, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 32, n. 9, pp. 1253-1265, 2005.

BLASIUS, H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Druck von BG Teubner, 1908, encontrado em BLASIUS, H. The boundary layers in fluids with little friction, 1950.

BO, S., MA, X., LAN, Z., CHEN, J., CHEN, H., Numerical Simulation on the Falling Film Absorption Process in a Counter-Flow Absorber, *Chemical Engineering Journal*, v. 156, pp. 607- 612, 2010.

BOGNAR, Gabriella. Similarity Method for Boundary Layer Flow of a non-Newtonian Viscous Fluid at a Convectively Heated Surface. *Thermal Science*, v. 21, n. 6, p. 2795-2802, 2017.

BUSSMANN, M., MOSTAGHIMI, J., KIRK, D. W. e GRAYDON, J. W. A numerical study of steady flow and temperature fields within a melt spinning puddle. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 45, n. 19, p. 3997-4010, 2002.

CARPENTER, J. K.; STEEN, P. H. Planar-flow spin-casting of molten metals: process behaviour. *Journal of Materials Science*, v. 27, n. 1, p. 215-225, 1992.

ÇENGEL, Y. A. e BOLES, M. A., *Thermodynamics: an Engineering Approach*, McGraw-Hill Companies, 2006.

COLINSK, A. T., MAO, J., Nonisothermal Absorption on a Horizontal Cylindrical Tube-1. The Film Flow, *Chemical Engineering Science*, v.51, n. 8, pp. 1275-1285, 1996.

CONSENZA, F. and VLIET, G. C., Absorption in falling water/LiBr films on horizontal tubes, *ASHRAE Transaction* 96(Part 1), 693–701, 1990.

CHIDA, Kikuji. Surface temperature of a flat plate of finite thickness under conjugate laminar forced convection heat transfer condition. *International journal of heat and mass transfer*, v. 4, n. 43, p. 639-642, 2000.

COTTA, R. M. “Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow”. Boca Raton, FL.: CRC Press, 1993.

COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D. Integral transform method. *Applied Mathematical Modelling*, v. 17, n. 3, p. 156-161, 1993.

COTTA, R. M. The integral transform method in computational heat and fluid flow. In: *International Heat Transfer Conference Digital Library*. Begel House Inc, 1994.

COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D. Heat conduction: lumped analysis, integral transforms, symbolic computation. Chichester: Wiley, 1997.

COTTA, R. M. (Ed.). *The integral transform method in thermal and fluids sciences and engineering*. Begell House Publishers, 1998.

COTTA, R. M., E MIKHAILOV, M. D. “Hybrid Methods and Symbolic Computations”. W. Minkowycz, E. M. Sparrow, e J. Y. Murthy, Handbook of Numerical Heat Transfer, 2nd ed. New York: John Wiley, 2006.

COTTA, R. M.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; KNUPP, D. C. Nonlinear eigenvalue problem in the integral transforms solution of convection-diffusion with nonlinear boundary conditions. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 2016.

COTTA, R. M.; KNUPP, D. C.; QUARESMA, J. N. N. Analytical methods in heat transfer. Handbook of Thermal Science and Engineering, 2017.

COTTA, R. M., KNUPP, D. C., QUARESMA, J. N. N. “Analytical Methods in Heat Transfer”. In: Kulacki, F. A. (Ed.), Handbook of Thermal Science and Engineering, 1st ed., Springer International Publishing, p. 3054. ISBN: 978-3-319-28573-3, 2018.

CREMASCO, M.A. Fundamentos de transferência de massa, Editora da UNICAMP, Campinas, 1998.

DORGAN, C. B, LEIGHT, S. P. e DORGAN, C. E., Application Guide For Absorption Cooling/Refrigeration Using Recovered Heat, Atlanta, American Society of Heating, Refrigeration and Air-Conditioning Engineers, 1995.

EYO, A.E., OGBONNA, N. and EKPENYONG, M.E., “Comparison of the exact and approximate values of certain parameters in laminar boundary layer flow using some velocity profiles”. Journal of Mathematics Research, Vol. 4, No. 5, p. 17, 2012.

FAREO, A. G. A note on the transformation of boundary value problems to initial value problems: The iterative transformation method. Applied Mathematics and Computation, v. 415, p. 126692, 2022.

FAZIO, R. The non-iterative transformation method. International Journal of Non-Linear Mechanics, v. 114, p. 41-48, 2019.

FAZIO, R. A non-iterative transformation method for an extended Blasius problem. Mathematical Methods in the Applied Sciences, v. 44, n. 2, p. 1996-2001, 2021.

FRANCÉS, V. M. and OJER, J. M., Validation of a model for the absorption process of H₂O (vap) by a LiBr(aq) in a horizontal tube bundle, using a multi-factorial analysis, International Journal of Heat and Mass Transfer 46(17), 3299–3312, 2003.

FREIRE, Atila Pantaleao Silva. Teoria de Camada Limite. UFRJ. Rio de Janeiro, p. 41, 1990.

GRIGOR'EVA, N. I.; NAKORYAKOV, V. E. Exact solution of combined heat-and mass-transfer problem during film absorption. Journal of Engineering Physics, v. 33, n. 5, p. 1349-1353, 1977.

- GROSSMAN, G. Simultaneous Heat and Mass Transfer in Absorption of Gases in Laminar Liquid Films . ORNL/FFM-8366. Oak Ridge National Laboratory, TN (USA), 1982.
- GROSSMAN, G. Simultaneous heat and mass transfer in film absorption under laminar flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 26, n. 3, p. 357-371, 1983.
- HAVESTINI, A, R. Two-phase detailed numerical analysis of falling film absorption phenomena. Doctor of Philosophy, Department of Mechanical Engineering, University of Manitoba, Canada, 2021.
- HOFFMANN, L., GREITER, I., WAGNER, A. , WEISS, V. and ALEFELD, G., Experimental investigation of heat transfer in a horizontal tube falling film absorber with aqueous solutions of LiBr with and without surfactants, *International Journal of Refrigeration* 19(5), 331–341, 1996.
- ISLAM, Md. R., WIJEYSUNDERA, N. E., HO, J. C., Simplified Models for Coupled Heat and Mass Transfer in Falling-Film Absorbers, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 47, n. 2, pp. 395-406, 2004.
- ISLAM, Md. R., Absorption Process of a Falling Film on a Tubular Absorber: An Experimental and Numerical Study”, *Applied Thermal Engineering*, v. 28, n. 11- 12 (August), pp. 1386-1394, 2008.
- JAGUARIBE, E.F., 2020. “Conflicting aspects in the flat plate boundary layer conventional solution”. *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2020.
- JONES, H. The status of rapid solidification of alloys in research and application. *Journal of Materials Science*, v. 19, n. 4, p. 1043-1076, 1984.
- KILLION, J. D.; GARIMELLA, S. A critical review of models of coupled heat and mass transfer in falling-film absorption. *International Journal of Refrigeration*, v. 24, n. 8, p. 755-797, 2001.
- KILLION, J. D.; GARIMELLA, S. Simulation of pendant droplets and falling films in horizontal tube absorbers, *Journal of Heat Transfer* 126(6), 1003–1013, 2004.
- KIRBY, Mark J.; PEREZ-BLANCO, Horacio. Design model for horizontal tube water/lithium bromide absorbers. *International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. 1994.
- KYUNG, I., HEROLD, K. E. and KANG, Y. T., Model for absorption of water vapor into aqueous LiBr flowing over a horizontal smooth tube, *International Journal of Refrigeration* 30(4), 591–600, 2007.
- LACHI, M., POLIDORI, G., CHITOU, N. & PADET, J., “Theoretical Modelisation in Transient Convective Heat Transfer for a Laminar Boundary Layer Flow”, *Int. Center Heat Mass Transfer*, Begell House, Inc., New York, pp. 27-36. 1997.

LIU, H. et al. Numerical simulation of initial development of fluid flow and heat transfer in planar flow casting process. *Metallurgical and Materials Transactions B*, v. 40, n. 3, p. 411-429, 2009.

LIU, H. et al. Thermal Deformation Analysis of the Rotating Roller in Planar Flow Casting Process. *ISIJ International*, v. 50, n. 10, p. 1431-1440, 2010.

MADIREDDI, S. Effect of heat transfer between melt puddle and cooling wheel on amorphous ribbon formation. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 2020.

MATHEMATICA, 2019. Student Version 12.0. Champaign. Illinois.

MATTSON, Joseph William. on the production of crystalline and noncrystalline metals via the planar flow casting process. 2019.

MEDEIROS, M.J and SANTOS, C.A.C, “Theoretical Analysis and Determination of Hydrodynamic and Thermal Boundary Layers through of Generalized Integral Transform Technique”, *Anais 26 th International Congress of Mechanical Engineering, Virtual Congress*, November 2021.

MEDEIROS, M.J and SANTOS, C.A.C, “Theoretical Analysis of the Rapid Solidification of Metallic Materials in Planar Flow Casting Process through of GITT”, *Anais 26 th International Congress of Mechanical Engineering, Virtual Congress*, November 2021.

MEDRANO, M., Desarrollo de un Absorbedor Tubular Vertical Enfriado por aire para un Climatizador de Absorción de Agua-Bromuro de Litio. Tesis Doctoral. URV, Tarragona, Diciembre, 2000.

MEDRANO, M., BOUROUIS, M., CORONAS, A., Absorption of water vapour in the falling film of water-lithium bromide inside a vertical tube at air-cooling thermal conditions. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 41, pp. 891-898, 2002.

MEDRANO, M., BOUROUIS, M., PEREZ-BLANCO, H., CORONAS, A., A simple model for falling film absorption on vertical tubes in the presence of nonabsorbables. *International Journal of Refrigeration*, v. 26, pp 108-116, 2003.

MEYER, T., Analytical solution for combined heat and mass transfer in laminar falling film absorption with uniform film velocity – isothermal and adiabatic wall. *International Journal of Refrigeration*. v. 48, pp 74-86, 2014.

MEYER, T., Analytical solution for combined heat and mass transfer in laminarfalling film absorption with uniform film velocity - adiabatic wall boundary. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v. 80, pp 802-811, 2015.

MIN, J. K. and CHOI, D. H., Analysis of the absorption process on a horizontal tube using Navier-Stokes equations with surface-tension effects, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 42, 4567–4578, 1999.

MITTERMAIER, M., SCHULZE, P. and ZIEGLER, F., A numerical model for combined heat and mass transfer in a laminar liquid falling film with simplified hydrodynamics, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 70, pp. 990–1002, 2014.

MITTERMAIER, M and ZIEGLER, F., Impact of a developing velocity profile on heat and mass transfer in absorbing laminar falling films, *Chemie Ingenieur Technik* 88(1-2), pp. 139–146, 2016.

MONTEIRO, C.P., 2021. Difusão anômala de um fluido em conduto com superfícies planas via cálculo fracionário. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Física - Universidade Federal de São João del-Rei, Brasil, p. 106, 2021.

MONTEIRO, E.R., QUARESMA, J.N.N., COTTA, R.M. "Integral Transformation of Multidimensional Phase Change Problems: Computational and Physical Analysis", 21st International Congress of Mechanical Engineering, COBEM- 2011, ABCM, Natal, RN, Brazil, 2011.

MOSAAD, M. Laminar forced convection conjugate heat transfer over a flat plate. *Heat and mass transfer*, v. 35, n. 5, p. 371-375, 1999.

NAKORYAKOV, V. E.; GRIGOR'EVA, N. I. Combined heat and mass transfer during absorption in drops and films. *Journal of engineering physics*, v. 32, n. 3, p. 243-247, 1977.

NAPOLITANO, R. E.; MECO, H. The role of melt pool behaviour in free-jet melt spinning. *Transações Metalúrgicas e de Materiais A*, v. 35, nº 5, pág. 1539-1553, 2004.

NASCIMENTO, A.A. Estudo Teórico da Solidificação de Materiais Metálicos em Resfriamento Rápido através Técnica da Transformada Integral Generalizada. Tese de Doutorado. UFPB. Outubro, 2002.

NAVEIRA, C. P. “Soluções Híbridas para Problemas Conjugados Condução-Convecção Externa Transiente”, Dissertação de Msc, UFRJ/COPPE, Dezembro, 2006.

NAVEIRA, C. P. et al. Integral transform solution of transient forced convection in external flow. *International communications in heat and mass transfer*, v. 34, n. 6, p. 703-712, 2007.

NOMURA, T., NISHIMURA, N., WEI, S., YAMAGUCHI, S. and KAWAKAMI, R., Heat and mass transfer mechanism in the absorber of water/LiBr conventional absorption refrigerator: experimental examination by visualized model, Vol. 31, pp. 203–208, The Advanced Energy System Division, ASME, New Orleans, Louisiana, 1993.

ODUNFA, K. M.; ONWUKA, C. E.; AJUKA, L. O. Simulation of A Thin-Liquid smooth Falling-Film In An Absorption Cooling System. *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering (IOSR-JMCE)*, v. 15, n. 1, p. 45-50, 2018.

OLIVEIRA, A. C.; ALMEIDA, A. C. L. Numerical solution of Boundary Layer Equations based on optimization: The Ostrach and Blasius models. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 113, p. 103-111, 2019.

- OZISIK, M. N. Heat transfer: a basic approach. New York: McGraw-Hill, 1985.
- PAPAEFTHIMIOU, V. D, KARAMPINOS, D. C. and ROGDAKIS, E. D., A detailed analysis of watervapour absorption in LiBr–H₂O solution on a cooled horizontal tube, *Applied Thermal Engineering* 26(17), 2095–2102, 2006.
- PAPAEFTHIMIOU, V. D, KORONAKI, I. P., KARAMPINOS, D. C. and ROGDAKIS, E. D, A novel approach for modelling LiBr–H₂O falling film absorption on cooled horizontal bundle of tubes, *International Journal of Refrigeration* 35(4), 1115–1122, 2012.
- PARVEEN, S. Numerical solution of non linear differential equation by using shooting techniques. *International Journal of Mathematics And its Applications*, Volume 4, Issue 1–A, 93–100, 2016.
- PERELMAN, T. L. On conjugated problems of heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 3, n. 4, p. 293-303, 1961.
- ROSA, Licianne Pimentel Santa. Modelling of ammonia absorption process: falling film and packed column. Tese de Doutorado. UFBA. Escola Politécnica, 174f., 2021.
- SANDERS. M.P.J. The Boundary Layer over a Flat Plat. Bachelor Thesis. Engineering Fluid Dynamics. CTW-TS, 2014.
- SEYYEDI, S. M. et al. Improved velocity and temperature profiles for integral solution in the laminar boundary layer flow on a semi-infinite flat plate. *Heat Transfer—Asian Research*, v. 48, n. 1, p. 182-215, 2019.
- SEHGAL, Shitiz et al. A comprehensive review of recent developments in falling-film, spray, bubble and microchannel absorbers for absorption systems. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, v. 142, p. 110807, 2021.
- SEOL, S. S. and LEE, S. Y., Experimental study of film flow and heat/mass transfer in LiBr–H₂O solution flowing over a cooled horizontal tube, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 32(3), 445–453, 2005.
- SIAS, D. F.; RUPERTI JR, N. J.; COTTA, R. M. Integral Transform Solution of Ablation Problems with Pyrolysis. In: 20th International Congress of Mechanical Engineering, COBEM, 2009.
- SILVA, F.X., Análise da Transferência Simultânea de Calor e Massa nos Processos de Absorção de Vapor em Soluções Binárias via GITT. Tese de Doutorado. UFPB. Julho, 2010.
- SILVA, F. W. X.; SANTOS, C. A. C. Análise da transferência simultânea de calor e massa nos processos de absorção de vapor em soluções LiBr-H₂O via GITT. caso 1d. *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, v. 20, n. 1, p. 21, 2016.

- SU, Y.G., Chen, F., WU, C.Y., CHANG, M.H. and CHUNG, C.A., “Effects of manufacturing parameters in planar flow casting process on ribbon formation and puddle evolution of Fe–Si–B alloy”. *ISIJ International*, Vol. 55, No. 11, pp. 2383–2390, 2015.
- SU, Y.G., CHEN, F., WU, C.Y. and CHANG, M.H., “Effect of surface roughness of chill wheel on ribbon formation in the planar flow casting process”. *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 229, pp. 609–613, 2016.
- SWAROOPA, M. et al. Effect of crucible parameters on planar flow melt spinning process. *Transactions of the Indian Institute of Metals*, v. 68, n. 6, p. 1125-1129, 2015.
- SUNDEN, Bengt. Analysis of conjugated laminar and turbulent forced convection-conduction heat transfer of a plate fin. *International communications in heat and mass transfer*, v. 16, n. 6, p. 821-831, 1989.
- TELEKEN, Joel Gustavo et al. Modelagem matemática e análise fluidodinâmica do processo de destilação por filme líquido descendente. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Florianópolis, 2013.
- THEISEN, Eric A.; WEINSTEIN, Steven J. An overview of planar flow casting of thin metallic glasses and its relation to slot coating of liquid films. *Journal of Coatings Technology and Research*, p. 1-12, 2021.
- U.S. ENERGY INFORMATION ADMINISTRATION. International energy outlook 2016. Disponível em: <[https://www.eia.gov/outlooks/ieo/pdf/0484\(2016\).pdf](https://www.eia.gov/outlooks/ieo/pdf/0484(2016).pdf)>. Acesso em 17 de março de 2017.
- WANG, G.-X.; MATTHYS, E. F. Modelling of rapid solidification by melt spinning: effect of heat transfer in the cooling substrate. *Materials Science and Engineering: A*, v. 136, p. 85-97, 1991.
- WANG, G.-X.; MATTHYS, E. F. Numerical modelling of phase change and heat transfer during rapid solidification processes: use of control volume integrals with element subdivision. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 35, n. 1, p. 141-153, 1992.
- WANG, G. X.; MATTHYS, E. F. Mathematical simulation of melt flow, heat transfer and non-equilibrium solidification in planar flow casting. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, v. 10, n. 1, p. 35, 2001.
- WANG, G.; PRASAD, V. Rapid solidification: Fundamentals and modeling. *Annual Review of Heat Transfer*, v. 11, 2000.
- WASSENAAR, R. H., Simultaneous Heat and Mass Transfer in a Horizontal Tube Absorber – numerical tools for present and future absorber designs, Delft University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering and Marine Technology, 1994.
- WU, Yunyun. Simultaneous heat and mass transfer in laminar falling film on the outside of a circular tube. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 93, p. 1089-1099, 2016.

ZHANG, L., WANG, Y., FU, Y., XING, L. and JIN, L., Numerical simulation of H₂O/LiBr falling film absorption process, *Energy Procedia* 75, 3119–3126, 2015.

APÊNDICE A

PROBLEMAS DE SOLIDIFICAÇÃO RÁPIDA POR VAZAMENTO EM FLUXO PLANAR (PFC)

Os problemas de mudança de fase transitória envolvem o caminho seguido por um movimento da frente de solidificação, separando as fases líquida e sólida de uma substância. Dentro da fase líquida e da fase sólida o processo de transferência de calor é regido principalmente pela condução. A fundição por vazamento de fluxo planar (PFC) é um processo de solidificação complicado, onde a transferência de calor e massa, fluxo de fluido multifásico e solidificação ocorrem simultaneamente.

Durante o processo de PFC, a liga fundida é continuamente depositada em um substrato de uma roda de resfriamento através de uma ranhura de bico. Ao entrar em contato com o substrato da roda de resfriamento, a liga fundida solidifica rapidamente e a fita contínua é retirada da roda e enrolada por uma máquina de bobinagem.

Resultados experimentais têm demonstrado que a forma da fita depende do formato da base do cadinho, bem como da relação de aspecto do furo. Dada uma grande relação do aspecto da poça e sendo considerado que a velocidade axial é muito superior à velocidade normal, é razoável, aproximar a poça de metal de uma fita retangular de metal líquido.

No entanto, esta técnica viu uma adoção comercial limitada e virtualmente nenhuma portabilidade entre ligas devido a um entendimento incompleto de como os parâmetros do elenco se manifestam no final as propriedades da fita. A capacidade de prever e controlar essas propriedades, particularmente espessura do produto, é essencial para viabilizar um processo de uma única etapa.

A têmpera a partir do metal líquido é um processo de solidificação rápida que envolve o choque com o espalhamento e aparecimento da solidificação a partir da poça de metal líquido na superfície de um substrato. Ao contrário do processo tradicional de produção,

onde a têmpera é feita em amostra de material sólido, o resfriamento rápido a partir do metal líquido representa uma categoria separada da têmpera em que o estado inicial do metal é líquido (JONES, 1984; ANNAVARAPU et. al., 1990).

Isso leva a uma definição característica do método de resfriamento rápido a partir do metal líquido, que é imposto pelas velocidades de resfriamento do metal líquido, que são tipicamente muito mais rápidas do que os métodos convencionais de têmpera. Esta situação acontece quando o mecanismo de transferência de calor, principalmente a condução, pode remover muito mais rapidamente o calor que sai da camada de deposição do que o calor que é depositado pelo metal líquido. A dinâmica dos fluidos dos processos de solidificação rápida também tem sido o foco de muitos estudos, os efeitos da transferência de calor e mudança de fase em processos de vazamento de fluxo planar foram estudados numericamente por WANG e MATTHYS (1991, 1992) e CARPENTER e STEEN (1992).

Numerosos estudos investigaram as influências dos parâmetros de fundição e das condições de fundição na uniformidade da espessura da fita e na qualidade da superfície da fita descascada (WANG e PRASAD, 2000; WANG e MATTHYS, 2001; NASCIMENTO, 2002; BUSSMANN et al., 2002).

O controle do fluxo de metal fundido através do bico e a taxa de solidificação são essenciais para manter uma espessura de fita uniforme com as propriedades de material desejadas. A interação entre o fluxo de fluido, a transferência de calor e a solidificação que ocorre dentro da poça é uma área de pesquisa ativa, citado por NAPOLITANO e MECO (2004).

LIU et al. (2009) descreveram o desenvolvimento inicial de fluxo de fluido e transferência de calor em um processo de fundição por vazamento de fluxo planar para formação de fita amorfa usando um modelo bidimensional de fluxo de fluido com superfície livre e tensão superficial e transferência calor com transformação de fase resolvendo numericamente pelo método de volume de fluido (VOF) chegando a relacionar parâmetros variáveis associados à velocidade da roda, largura da fenda, distância da lacuna, raio da roda e espessura da camada da roda afetam a evolução temporal do fluxo e o comportamento térmico na poça e a distribuição da temperatura no rolo giratório.

LIU et al (2010) estudou o comportamento térmico e a deformação do rolo evidenciado que a deformação não é uniforme, embora como o comprimento da poça é muito curto, a deformação é considerada pequena. Reduzindo a velocidade do rolo, fortalecendo o resfriamento e aumentando o diâmetro do rolo irá reduzir a deformação do rolo. Aumentando

a velocidade de injeção de fusão, a temperatura de entrada e a largura da fenda do bico ocorrerá o aumento da expansão térmica do rolo.

SWAROOPA et al. (2015) descreveram o fluxo de fluido do cadinho para a roda e transferência de calor em um processo de fundição por vazamento de fluxo planar usando modelo bidimensional de fluxo de fluido com superfície livre e tensão superficial e transferência de calor com transformação de fase resolvendo numericamente pelo software CFD – Ansys Fluent em uma liga Fe-B-Si chegando à conclusão que a fixação do menisco na fenda do bocal na parte inferior produz fitas com defeitos e o aumento da pressão de ejeção ou/e uma maior distância da roda levam ao aumento da espessura da fita.

SU et al. (2015, 2016) estudaram a dependência da espessura da fita nos principais parâmetros do processo e desenvolveram uma formulação simples que prevê a espessura da fita no processo PFC controlado por gap.

MATTSON (2019) estudou ligas cristalinas e não cristalinas usando o processo PFC e descobriu que a espessura da fita depende das propriedades térmicas da liga e das características de transferência de calor da máquina usada para produzir a fita.

MADIREDDI (2020) analisou numericamente a transferência de calor na poça de fusão no contato da roda de fusão e sua influência na estrutura amorfa do produto final usando um modelo bidimensional. As equações de fluxo, energia e momentum junto com a equação de volume de fluido são empregadas para analisar a transferência de calor e o crescimento da fita na poça de derretimento. O esquema de reconstrução geométrica foi empregado para mostrar os limites de fusão e ar em um domínio de fluxo dois fluidos e análise numérica mostrou um gradiente de temperatura ao longo da espessura da fita. Com o aumento da espessura, observou-se que o gradiente aumentava. A investigação experimental mostrou um aumento na estrutura cristalina na fita com a espessura e mostrou uma diferença no difratômetro de raio x (DRX) feito em ambos os lados das fitas. O gradiente da temperatura ao longo da espessura da fita é responsável por este fenômeno. Como o modelo pode prever esse fenômeno, ele pode ser usado para prever o tipo de fita obtida em um conjunto de condições de processo antes do experimento, ajudando assim a evitar a produção de fitas cristalinas indesejáveis.

THEISEN e WEINSTEIN (2021) revisaram como os processos de PFC foram desenvolvidos, examinaram a faixa de operabilidade típica de PFC e revisaram os defeitos que comumente se formam.

MEDEIROS e SANTOS (2021) estudaram o comportamento da interface da solidificação rápida do alumínio no processo de fundição em fluxo planar utilizando a técnica da transformada integral generalizada.

O Planar Flow Casting (PFC) é uma técnica de solidificação rápida de estágio único para produzir fitas metálicas finas onde o metal líquido no cadinho é forçado através do furo e forma a poça de solidificação entre a base do cadinho e a superfície da roda. A fita é arrastada para fora da poça de fusão pelo movimento relativo do substrato, dependendo das características de transferência de calor, nucleação e crescimento do cristal.

Com o objetivo de tornar o modelo o mais simples possível, considera-se que não existe gradiente de velocidade na poça. Na prática, isso não acontece, e representa uma aproximação de um caso real. Para identificar tendências relativas e investigar parâmetros importantes no processo, adotaremos um modelo unidimensional (WANG e MATTHYS, 1991, 1992), onde as principais hipóteses simplificadoras adotadas foram: escoamento laminar; curso estável; equilíbrio termodinâmico local na interface sólido/líquido e massa específica constante para ambas as fases.

Com as hipóteses consideradas acima e assumindo que uma camada fina e imóvel de metal líquido é subitamente colocada em contato com o substrato de resfriamento, em um período muito curto, então o metal líquido solidifica. Se não houver movimento relativo entre o fluxo do fluido e a roda, e se a camada metálica depositada (poça) for fina, e, devido ao desacoplamento entre o processo de transferência de calor e a mecânica do fluxo do fluido, causado pela alta velocidade do substrato, podemos aproximar a transferência de calor na camada metálica depositada e no substrato, com condução apenas unidimensional.

Em seguida, são dadas as equações de energia e suas condições de contorno para a camada limite em cada região, tais como:

Região Sólida

$$V_w \frac{\partial T_S(y,t)}{\partial x} = \alpha_s \frac{\partial^2 T_S(y,t)}{\partial y^2}, \quad 0 < y < S(t); \quad t > t_0 \quad (\text{A.1})$$

Região Líquida

$$V_w \frac{\partial T_L(y,t)}{\partial t} = \alpha_L \frac{\partial^2 T_L(y,t)}{\partial y^2}, \quad S(t) < y < l; \quad t > t_0 \quad (\text{A.2})$$

Interface

$$K_s \frac{\partial T_s(y,t)}{\partial y} - K_L \frac{\partial T_L(y,t)}{\partial y} = \rho \Delta H \frac{dS(t)}{dt}, \quad y=S(t) \quad t > t_0 \quad (\text{A.3})$$

E suas condições de contorno:

$$K_s \left. \frac{\partial T_s(y,t)}{\partial y} \right|_{y=0} = h_w (T_s - T_\infty), \quad y=0 \quad t > t_0 \quad (\text{A.4})$$

$$T_s(y, t) = T_L(y, t) = T_m, \quad y= S(t) \quad t > t_0 \quad (\text{A.5})$$

$$T_l(y, t_0) = T_0(y, t_0), \quad y=0 \quad t > t_0 \quad (\text{A.6})$$

Onde: T_s , T_L , α_s , α_L , K_s , K_L são respectivamente, a temperatura, a difusividade térmica e a condutividade térmica das fases Sólida e Líquida. V_w é a velocidade da roda, h_w é o coeficiente de transferência de calor, T_∞ é a temperatura do ambiente, T_m é a temperatura de mudança de fase, T_0 é a temperatura inicial do metal, ρ é a massa específica do metal, ΔH é o calor latente de mudança de fase do metal e $S(t)$ é a posição frontal de solidificação na direção y .

Por causa da suposição de que não existe movimento relativo dentro do metal líquido na poça, o problema bidimensional para a camada limite em estado permanente pode ser reduzido a um problema de condução de calor unidimensional. Para isso faremos $x = V_w t$, onde V_w é a velocidade média do metal na roda. Considerando que a drenagem na poça está completamente desenvolvida, de forma que a velocidade da roda V_w é igual à velocidade média do metal na roda V_w , substituindo $x = V_w t$ na equação (A.1) pelos seguintes grupos adimensionais:

$$\theta_s(\eta_1, \tau) = \frac{T_s(y,t) - T_\infty}{T_m - T_\infty} \quad ; \quad \theta_L(\eta_2, \tau) = \frac{T_L(y,t) - T_0}{T_m - T_0} \quad (\text{A.7a-b})$$

$$\eta_1 = \frac{y}{S(t)} \quad ; \quad \eta_2 = \frac{y-l}{S(t)-l} \quad ; \quad Bi = \frac{h l}{K_s} \quad (\text{A.7c-e})$$

$$v = \left(\frac{\alpha_L}{\alpha_S}\right)^{\frac{1}{2}} ; \quad S(\tau) = \frac{S(t)}{l} ; \quad \tau = \frac{\alpha_L t}{l^2} \quad (\text{A.7f-h})$$

$$Ste_S = \frac{CP_S(T_m - T_\infty)}{\Delta H} ; \quad Ste_L = \frac{CP_L(T_m - T_0)}{\Delta H} \quad (\text{A.7i-j})$$

Onde as coordenadas adimensionais η_1 e η_2 foram adotadas para trabalhar com um domínio fixo para o problema. Porém, tal transformação acarretará o aparecimento do termo convectivo nas equações. Essas coordenadas η_1 e η_2 solicitam os seguintes operadores:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial t} \quad i = 1 \text{ ou } 2 \quad (\text{A.8a-b})$$

Portanto, as equações adimensionais para as fases sólida e líquida são apresentadas como:

Região Sólida

$$\frac{\partial \theta_s(\eta_1, \tau)}{\partial \tau} = \frac{S'(\tau)}{S(\tau)} \eta_1 \frac{\partial \theta_s(\eta_1, \tau)}{\partial \eta_1} + \frac{1}{v^2 S(\tau)^2} \frac{\partial^2 \theta_s(\eta_1, \tau)}{\partial \eta_1^2} \quad 0 < \eta_1 < 1 \quad (\text{A.9})$$

Região Líquida

$$\frac{\partial \theta_L(\eta_2, \tau)}{\partial \tau} = \frac{S'(\tau)}{S(\tau)-1} \eta_2 \frac{\partial \theta_L(\eta_2, \tau)}{\partial \eta_2} + \frac{1}{(S(\tau)-1)^2} \frac{\partial^2 \theta_L(\eta_2, \tau)}{\partial \eta_2^2} \quad 0 < \eta_2 < 1 \quad (\text{A.10})$$

Interface

$$\frac{dS(\tau)}{d\tau} = \frac{Ste_S}{v^2 S(\tau)} \left(\frac{\partial \theta_s(\eta_1, \tau)}{\partial \eta_1} + \frac{Bi S(\tau)}{1+Bi S(\tau)} \right) \Big|_{\eta_1=1} - \frac{Ste_L}{S(\tau)-1} \left(\frac{\partial \theta_L(\eta_2, \tau)}{\partial \eta_2} + 1 \right) \Big|_{\eta_2=1} \quad (\text{A.11})$$

E as condições de contorno:

$$-\frac{\partial \theta_s(\eta_1, \tau)}{\partial \eta_1} + Bi S(\tau) \theta_s(\eta_1, \tau) = 0 \quad \eta_1 = 0 ; \tau < \tau_0 \quad (\text{A.12a})$$

$$\theta_L(\eta_2, \tau) = 0 \quad \eta_2 = 0; \tau < \tau_0 \quad (\text{A.12b})$$

$$\theta_s(\eta_1, \tau) = \theta_L(\eta_2, \tau) = 1 \quad \eta_2 = \eta_1 = 1; \tau < \tau_0 \quad (\text{A.12c})$$

E as condições iniciais:

$$\theta_L(\eta_2, \tau) = \theta_2(\eta_2, \tau) \quad \tau = \tau_0 \quad (\text{A.12d})$$

$$\theta_s(\eta_1, \tau) = \theta_1(\eta_1, \tau) \quad \tau = \tau_0 \quad (\text{A.12e})$$

No intuito de melhorar a performance da GITT faz-se necessário tornar o problema homogêneo, utiliza-se dois filtros para região sólida e líquida para eliminar as condições de contorno não homogêneas, da seguinte forma:

$$\theta_s(\eta_1, \tau) = F_s(\eta_1, \tau) + \theta_s^*(\eta_1, \tau) \quad (\text{A.13a})$$

$$\theta_L(\eta_2, \tau) = F_L(\eta_2, \tau) + \theta_L^*(\eta_2, \tau) \quad (\text{A.13b})$$

Onde, o filtro para a região sólida com sua equação, condições de contorno e solução são dadas abaixo:

$$\frac{d^2 F_s(\eta_1, \tau)}{d\eta_1^2} = 0 \quad 0 < \eta_1 < 1 \quad (\text{A.14})$$

$$-\frac{\partial F_s(\eta_1, \tau)}{\partial \eta_1} + Bi F_s(\eta_1, \tau) = 0 \quad \eta_1 = 0 \quad (\text{A.14a})$$

$$F_s(\eta_1, \tau) = 1 \quad \eta_1 = 1 \quad (\text{A.14b})$$

$$F_s(\eta_1, \tau) = \frac{Bi S(\tau) \eta_1}{1 + Bi S(\tau)} \quad (\text{A.14c})$$

$$\frac{\partial F_s(\eta_1, \tau)}{\partial \eta_1} = \frac{Bi S(\tau)}{1 + Bi S(\tau)} = f(\tau) \quad (\text{A.14d})$$

$$\frac{\partial F_s(\eta_1, \tau)}{\partial \tau} = \frac{Bi(1-\eta_1)S'(\tau)}{(1+BiS(\tau))^2} = g(\eta_1, \tau) \quad (\text{A.14e})$$

Onde, o filtro para a região líquida com sua equação, condições de contorno e solução são dadas abaixo:

$$\frac{d^2 F_L(\eta_2, \tau)}{d\eta_2^2} = 0 \quad 0 < \eta_2 < 1 \quad (\text{A.15})$$

$$F_L(\eta_2, \tau) = 0 \quad \eta_2 = 0 \quad (\text{A.15a})$$

$$F_L(\eta_2, \tau) = 1 \quad \eta_2 = 1 \quad (\text{A.15b})$$

$$F_L(\eta_2, \tau) = \eta_2 \quad (\text{A.15c})$$

$$\frac{\partial F_L(\eta_2, \tau)}{\partial \eta_2} = 1 \quad (\text{A.15d})$$

$$\frac{\partial F_L(\eta_2, \tau)}{\partial \tau} = 0 \quad (\text{A.15e})$$

Inserindo os filtros nas equações da região sólida, líquida e Interface, obtemos:

Região Sólida com filtro

$$\frac{\partial \theta_s^*(\eta_1, \tau)}{\partial \tau} = \frac{S'(\tau)}{S(\tau)} \eta_1 \left[\frac{\partial \theta_s^*(\eta_1, \tau)}{\partial \eta_1} + f(\tau) \right] + \frac{1}{v^2 S(\tau)^2} \frac{\partial^2 \theta_s^*(\eta_1, \tau)}{\partial \eta_1^2} - g(\eta_1, \tau) \quad 0 < \eta_1 < 1 \quad (\text{A.16})$$

Região Líquida com filtro

$$\frac{\partial \theta_L^*(\eta_2, \tau)}{\partial \tau} = \frac{S'(\tau)}{S(\tau)-1} \eta_2 \left[\frac{\partial \theta_L^*(\eta_2, \tau)}{\partial \eta_2} + 1 \right] + \frac{1}{(S(\tau)-1)^2} \frac{\partial^2 \theta_L^*(\eta_2, \tau)}{\partial \eta_2^2} \quad 0 < \eta_2 < 1 \quad (\text{A.17})$$

Interface com filtro

$$\frac{dS(\tau)}{d\tau} = \frac{Ste_S}{v^2 S(\tau)} \left[\frac{\partial \theta_S^*(\eta_1, \tau)}{\partial \eta_1} + 1 \right] \Big|_{\eta_1=1} - \frac{Ste_L}{S(\tau)-1} \left[\frac{\partial \theta_L^*(\eta_2, \tau)}{\partial \eta_2} + 1 \right] \Big|_{\eta_2=1} \quad (\text{A.18})$$

E as condições de contorno:

$$-\frac{\partial \theta_S^*(\eta_1, \tau)}{\partial \eta_1} + Bi S(\tau) \theta_S^*(\eta_1, \tau) = 0 \quad \eta_1 = 0; \tau < \tau_0 \quad (\text{A.19a})$$

$$\theta_L^*(\eta_2, \tau) = 0 \quad \eta_2 = 0; \tau < \tau_0 \quad (\text{A.19b})$$

$$\theta_S^*(\eta_1, \tau) = \theta_L^*(\eta_2, \tau) = 0 \quad \eta_2 = \eta_1 = 1; \tau < \tau_0 \quad (\text{A.19c})$$

E as condições iniciais:

$$\theta_S^*(\eta_1, \tau) = \theta_L^*(\eta_2, \tau) = 0 \quad \eta_1 = 1, \eta_2 = 1 \quad (\text{A.19d-e})$$

Com o objetivo de transformar o problema proposto em um sistema de equações diferenciais ordinárias faz-se necessário a utilização de um problema auxiliar com solução já conhecida, para eliminar a dependência espacial e torná-lo um problema apenas com dependência temporal.

O problema de Autovalor Auxiliar para a Região Sólida é definido como:

$$\frac{d^2 \psi(\mu_i, \eta_1)}{d\eta_1^2} + \mu_i^2 \psi(\mu_i, \eta_1) = 0 \quad 0 < \eta_1 < 1 \quad (\text{A.20})$$

$$-\frac{d\psi(\mu_i, \eta_1)}{d\eta_1} + Bi S(\tau) \psi(\mu_i, \eta_1) = 0 \quad \eta_1 = 0 \quad (\text{A.20a})$$

$$\psi(\mu_i, \eta_1) = 0 \quad \eta_1 = 1 \quad (\text{A.20b})$$

A qual é resolvida pelas autofunções e norma, respectivamente, como:

$$\psi(\mu_i, \eta_1) = \text{Sen} [\mu_i (1 - \eta_1)] \quad (\text{A.20c})$$

$$N_i = \int_0^1 \psi(\mu_i, \eta_1) \psi(\mu_i, \eta_1) d\eta_1 = \frac{1}{2} \frac{(\mu_i^2 + (Bi S(\tau))^2) + Bi S(\tau)}{\mu_i^2 + (Bi S(\tau))^2} \quad (\text{A.20d})$$

A autofunção normalizada é dada por:

$$\tilde{\psi}(\mu_i, \eta_1) = \frac{\psi(\mu_i, \eta_1)}{\sqrt{N_i}} \quad (\text{A.20e})$$

Os autovalores da equação (A.20) são determinados pela auto condição proveniente da condição de contorno da equação (A.20a) por intermédio da rotina FindRoot do software Mathematica 12.3, versão estudante.

$$\mu_i \text{Cos}[\mu_i] = Bi S(\tau) \text{Sen}[\mu_i], \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.20f})$$

O problema de Autovalor Auxiliar para a Região Líquida é definido como:

$$\frac{d^2 \Gamma(\xi_i, \eta_2)}{d\eta_2^2} + \xi_i^2 \Gamma(\xi_i, \eta_2) = 0 \quad 0 < \eta_2 < 1 \quad (\text{A.21})$$

$$\Gamma(\xi_i, \eta_2) = 0 \quad \eta_2 = 0 \quad (\text{A.21a})$$

$$\Gamma(\xi_i, \eta_2) = 0 \quad \eta_2 = 1 \quad (\text{A.21b})$$

A qual é resolvida pelas autofunções, autovalores e norma, respectivamente, como:

$$\Gamma(\xi_i, \eta_2) = \text{Sen} [\xi_i \eta_2] \quad (\text{A.21c})$$

$$\xi_i = i\pi, \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{A.21d})$$

$$N_i = \int_0^1 \Gamma(\xi_i, \eta_2) \Gamma(\xi_i, \eta_2) d\eta_2 = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{A.21e})$$

A autofunção normalizada é dada por:

$$\tilde{r}(\xi_i, \eta_2) = \frac{r(\xi_i, \eta_2)}{\sqrt{N_i}} = \sqrt{2} \text{ Sen}[\xi_i \eta_2] \quad (\text{A.21f})$$

Os problemas de Autovalores Auxiliares permitem a definição dos pares de transformada da região sólida e líquida, respectivamente:

$$\overline{\theta_{S_j}}^*(\tau) = \int_0^1 \tilde{\psi}(\mu_j, \eta_1) \theta_{S_j}^*(\eta_1, \tau) d\eta_1 \quad \text{Transformada} \quad (\text{A.22})$$

$$\theta_{S_j}^*(\eta_1, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}(\mu_j, \eta_1) \overline{\theta_{S_j}}^*(\tau) \quad \text{Inversa} \quad (\text{A.23})$$

$$\overline{\theta_{L_j}}^*(\tau) = \int_0^1 \tilde{r}(\xi_j, \eta_2) \theta_{L_j}^*(\eta_2, \tau) d\eta_2 \quad \text{Transformada} \quad (\text{A.24})$$

$$\theta_{L_j}^*(\eta_2, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{r}(\xi_j, \eta_2) \overline{\theta_{L_j}}^*(\tau) \quad \text{Inversa} \quad (\text{A.25})$$

O processo de transformação integral do sistema de equações diferenciais parciais nas equações da energia na região sólida e líquida e na interface, é realizado utilizando operadores nos potenciais e em seguida, aplicando a inversa obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias, descrito abaixo.

Região Sólida

$$\frac{d\overline{\theta_{S_j}}^*(\tau)}{d\tau} = -\frac{\mu_i^2 \overline{\theta_{S_j}}^*(\tau)}{v^2 S(\tau)^2} + \frac{S'(\tau)}{S(\tau)} \sum_{j=1}^{NS} A_{ij} \overline{\theta_{S_j}}^*(\tau) + \frac{S'(\tau)}{S(\tau)} B_i - \frac{\text{Bi } S'(\tau)}{(1 + \text{Bi } S(\tau))^2} g_i \quad (\text{A.26a})$$

Região Líquida

$$\frac{d\overline{\theta_{L_j}}^*(\tau)}{d\tau} = -\frac{\xi_i^2 \overline{\theta_{L_j}}^*(\tau)}{(S(\tau) - 1)^2} + \frac{S'(\tau)}{S(\tau) - 1} \sum_{j=1}^{NL} C_{ij} \overline{\theta_{L_j}}^*(\tau) + \frac{S'(\tau)}{S(\tau) - 1} D_i$$

(A.26b)

Interface

$$\begin{aligned} \frac{dS(\tau)}{d\tau} = & \frac{Ste_S}{\nu^2 S(\tau)} \left(\sum_{j=1}^{NS} \frac{d\tilde{\psi}(\mu_j, 1)}{d\eta_1} \overline{\theta_{S_j}^*}(\tau) + f(\tau) \right) \\ & - \frac{Ste_L}{S(\tau) - 1} \left(\sum_{j=1}^{NL} \frac{d\tilde{\Gamma}(\xi_j, 1)}{d\eta_2} \overline{\theta_{L_j}^*}(\tau) + 1 \right) \end{aligned}$$

(A.26c)

Onde os coeficientes são definidos abaixo:

$$A_{ij} = \int_0^1 \eta_1 \tilde{\psi}(\mu_i, \eta_1) \frac{d\tilde{\psi}(\mu_j, \eta_1)}{d\eta_1} d\eta_1 \quad (\text{A.26d})$$

$$B_i = \int_0^1 \eta_1 \tilde{\psi}(\mu_i, \eta_1) d\eta_1 \quad (\text{A.26e})$$

$$C_{ij} = \int_0^1 \eta_2 \tilde{\Gamma}(\xi_i, \eta_2) \frac{d\tilde{\Gamma}(\xi_j, \eta_2)}{d\eta_2} d\eta_2 \quad (\text{A.26f})$$

$$D_i = \int_0^1 \eta_2 \tilde{\Gamma}(\xi_i, \eta_2) d\eta_2 \quad (\text{A.26g})$$

$$g_i = \int_0^1 \tilde{\psi}(\mu_i, \eta_1) (1 - \eta_1) d\eta_1 \quad (\text{A.26h})$$

As condições iniciais transformadas da região sólida são calculadas pela substituição da solução analítica para um tempo inicial de processo muito pequeno da ordem de 10^{-7} s.

$$\overline{\theta_{S_j}^*}(\tau_0) = \int_0^1 (\theta_{sAnalit}(\eta_1, \tau_0) - F_s(\eta_1, \tau_0)) \tilde{\psi}(\mu_j, \eta_1) d\eta_1 \quad (\text{A.26i})$$

$$\theta_{sAnalit}(\eta_1, \tau_0) = \frac{2\nu\gamma+B}{2\nu\gamma+B} \frac{\sqrt{\pi} \beta \operatorname{erf}(\nu \eta_1)}{\sqrt{\pi} \beta \operatorname{erf}(\nu \lambda)} \quad (\text{A.26j})$$

$$\lambda = \frac{Ste_S}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\lambda^2}}{erfc(\lambda)} + \frac{Bi \beta Ste_L e^{-(\nu \lambda)^2}}{2 \gamma \nu^2 Bi \beta \sqrt{\pi} \nu erfc(\nu \lambda)} \quad (\text{A.26l})$$

As condições iniciais transformadas da região líquida são calculadas pela substituição da solução analítica para um tempo inicial de processo muito pequeno da ordem de 10^{-7} s.

$$\overline{\theta_{L_j}}^*(\tau_0) = \int_0^1 (\theta_{L_{Analit}}(\eta_2, \tau_0) - F_L(\eta_2, \tau_0)) \tilde{\Gamma}(\xi_j, \eta_2) d\eta_2 \quad (\text{A.26m})$$

$$\theta_{L_{Analit}}(\eta_2, \tau_0) = \frac{erfc(\eta_2)}{erf(\lambda)} \quad (\text{A.26n})$$

Após a avaliação das integrais nas equações acima, os sistemas formados pelas equações (A.26a-c) são truncados e resolvidos numericamente, através da rotina NDSolve do software Mathematica 12.3, versão estudante, para um grande número de autovalores e autofunções suficientes para garantir a convergência. Com os potenciais transformados pode-se solicitar o inverso da fórmula para fornecer os campos de temperatura da região sólida e líquida, permitindo a identificação do desenvolvimento da temperatura.

A simulação do processo de fundição por vazamento em fluxo planar proporciona o controle e ajuste dos parâmetros envolvidos na produção de fitas metálicas. A relação desses parâmetros com os coeficientes de transferência de calor possibilita o ajuste do processo e utilização de diferentes materiais. Os principais parâmetros envolvidos são temperatura de ejeção, distância do cadinho ao substrato de resfriamento, temperatura do substrato, velocidade do substrato, altura e comprimento da poça. Para a realização das simulações foi utilizado alumínio puro, cujos parâmetros envolvidos nos processos de solidificação, têm influências importantes no monitoramento de processos reais e de projeto.

Para comparar os resultados, extraímos as propriedades obtidas por WANG e MATTHYS (1992), conforme mostrado na Tabela 25:

Tabela 25 - Dados extraídos do trabalho de WANG e MATTHYS (1992) e aplicados no estudo para comparação e validação do modelo.

Dados	
Calor latente de mudança de fase	$\Delta H = 3,95 \times 10^5 \left[\frac{J}{kg} \right]$
Condutividade térmica do sólido	$K_S = 200 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$
Condutividade térmica do líquido	$K_L = 100 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$
Calor específico do sólido	$C_{pS} = 1060 \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$
Calor específico do líquido	$C_{pL} = 1200 \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$
Massa específica do material	$\rho = 2520 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$
Temperatura de mudança de fase	$T_m = 933 [K]$
Temperatura inicial	$T_0 = T_m + 50 [K]$

Vale frisar que no caso clássico de solidificação o sub-resfriamento é muito pequeno, logo é razoável usar a suposição de equilíbrio termodinâmico local na interface sólido/líquido.

A interface move-se em direção ao líquido superaquecido e a energia é conduzida através da região já solidificada. A velocidade de interface é expressa matematicamente pela fixação da temperatura da interface, sendo a temperatura de fusão do material extraída do diagrama de fases.

Vale salientar que utilizamos a velocidade da roda igual a 23 m/s, bem como o tempo de permanência do metal na roda como sendo igual a 25 m/s, ambos utilizados em experimentos e citados em diversas literaturas com base nestes dois valores, encontramos a faixa de variação da posição x ao longo do processo como sendo de 0 a 5,75 mm.

Na Tabela 26, o comportamento da convergência na expansão dos autovalores foi ilustrado para a temperatura em 11 posições distintas em função da velocidade da roda, foram utilizados 400 termos na série de temperatura para esta demonstração com excelentes características de convergência, obtendo-se quatro dígitos significativos já convergidos dentro da variável analisada. Isso se deve à dificuldade em determinar a interface líquido/sólido considerando que o tempo de processo é muito curto. Além disso, a altura da poça é muito pequena, por isso é necessário usar muitos autovalores para alcançar a convergência.

Tabela 26 - Convergência da temperatura que se refere à distância de 114 μm da base da poça, com espessura da fita igual a 114 μm .

X(mm)	Número de Autovalores						
	10	50	100	200	300	350	400
0	983.000	983.000	983.000	983.000	983.000	983.000	983.000
0.575	949.013	948.978	949.031	949.129	949.215	949.256	949.296
1.150	949.004	948.977	949.034	949.137	949.228	949.272	949.314
1.725	948.595	948.582	948.646	948.762	948.866	948.915	948.963
2.300	947.678	947.669	947.742	947.874	947.991	948.047	948.102
2.875	946.256	946.236	946.314	946.459	946.588	946.650	946.711
3.450	944.362	944.324	944.402	944.550	944.685	944.750	944.814
4.025	942.030	941.988	942.059	942.197	942.326	942.389	942.451
4.600	939.304	939.285	939.341	939.453	939.560	939.612	939.665
5.175	936.257	936.271	936.304	936.370	936.435	936.468	936.500
5.750	933.000	933.000	933.000	933.000	933.000	933.000	933.000

A Tabela 27 mostra o comportamento da temperatura em função da posição x(mm), variando a posição Y em três situações (21, 68 e 114 μm). Pode-se notar que à medida que a distância da base da poça diminui a temperatura também diminui. Na distância de $y = 114$, apenas μm tem parte líquida porque na última posição de $x = 5,75$ mm a temperatura corresponde a 933 K, enquanto na distância de $y = 21$ μm tem parte líquida e sólida porque a temperatura de 933 K está na posição $x = 0,575$ mm.

Comparando os resultados pelo presente trabalho com os resultados obtidos por NASCIMENTO (2002), pode-se observar que ambos apresentam uma boa harmonia com erros aceitáveis na ordem de 1%, que permite comprovar que o modelo adotado usando a rotina NDSolve pode ser perfeitamente utilizado.

A queda da temperatura à medida que o metal se aproxima da roda de cobre só corrobora com o fenômeno físico, que corresponde a troca de calor por condução, contribuindo para garantir que o uso da técnica da transformada integral generalizada apresentando boa harmonia com resultados obtidos experimentalmente na literatura.

Tabela 27 - Comportamento das temperaturas da curva de referência à espessura da fita igual a 114 μm para as posições 21 μm , 68 μm e 114 μm , ao longo da posição $x(m)$.

X (mm)	T (x, y) [K]					
	y = 21 μm		y = 68 μm		y = 114 μm	
	Presente trabalho	NASCIMENTO (2002)	Presente trabalho	NASCIMENTO (2002)	Presente trabalho	NASCIMENTO (2002)
0	983.000	983.000	983.000	983.000	983.000	983.000
0.575	933.000	933.000	942.066	941.560	949.296	948.476
1.150	894.925	896.991	941.056	940.976	949.314	948.387
1.725	861.865	865.677	939.098	939.326	948.963	948.232
2.300	833.010	838.216	936.363	936.609	948.102	947.700
2.875	807.543	813.991	933.000	933.000	946.711	946.651
3.450	784.825	792.468	908.385	908.948	944.814	945.021
4.025	764.362	773.202	885.522	887.453	942.451	942.802
4.600	745.773	755.876	864.398	867.951	939.665	940.014
5.175	728.756	740.171	844.776	850.106	936.500	936.706
5.750	713.073	725.886	826.526	833.653	933.000	933.000

A Figura 32 mostra o comportamento das curvas de temperatura em função da distância ao menisco superior, onde se inicia a solidificação, para o metal alumínio no volante de cobre. Ao final do processo, a fita atingiu uma espessura de 114 μm , a temperatura está acima da temperatura de solidificação, ou seja, nesta espessura tudo é líquido. À medida que se move na posição vertical (y) há uma mudança de fase, na espessura de 4 μm há apenas sólido, a posição mais próxima da roda de cobre. Você também pode ver que à medida que você se move na posição horizontal (x), a temperatura cai consideravelmente, especialmente perto da roda de cobre. A menor temperatura atingida foi de aproximadamente 700 K devido ao alto coeficiente de transferência de calor ($h_w=1,0 \times 10^6 \text{ W/m}^2 \text{ K}$, $YD = 350 \text{ mm}$, $V_w=23 \text{ m/s}$, $T_o - T_m = 50 \text{ K}$, $T_\infty = 300\text{K}$, $XD = 5,75 \text{ mm}$, espessura da fita = 114 μm).

A frente de solidificação se desenvolve em relação às direções de posição de x e y, de acordo com as variáveis do processo. Nesta situação, as forças de inércia são muito maiores que as forças viscosas do fluido e a espessura da fita é limitada da poça à altura da frente de solidificação, no final do comprimento da poça metálica.

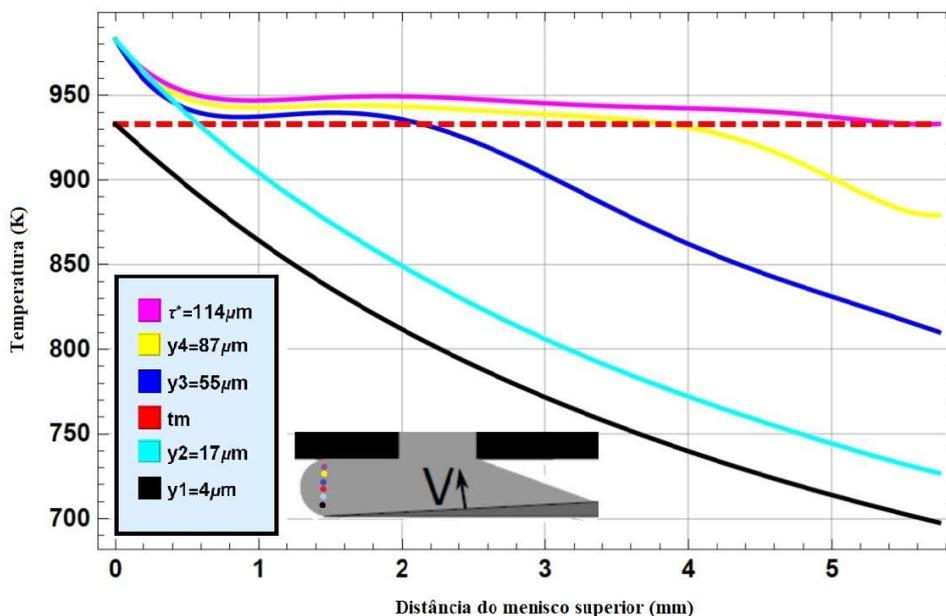


Figura 32 - Temperatura em função da distância do menisco superior, para alumínio sobre o volante de cobre, sendo as posições de 4, 17, 55, 87 e 114 μm (topo da fita).

A Figura 33 mostra a posição calculada da interface sólido/líquido em função da distância do menisco superior para três coeficientes de transferência de calor da poça/roda. Esses resultados consideram a transferência de calor dentro da própria roda. A distância de desprendimento do cadinho (X) é definida como a distância do menisco superior até o ponto onde o fundido se desprende da superfície do fundo do cadinho e constitui o limite inferior destes cálculos. Pode ser visto neste gráfico que a espessura calculada da camada solidificada é aproximadamente igual à espessura final da fita medida (68 μm) na distância de desprendimento para $h_w=1,0 \times 10^6 \text{ W/m}^2 \text{ K}$. Isso implica que a fita já estaria completamente solidificada dentro dos limites da poça para esta condição de contato térmico. Além disso, à medida que aumentamos o coeficiente de transferência de calor, há um aumento na evolução da interface, isso só corrobora com o significado físico, pois estamos aumentando a convecção no processo. Ao comparar a solução obtida pelo presente trabalho com os resultados obtidos numericamente por WANG e MATTHYS (1992), as curvas são muito próximas, exceto para $h_w=2,0 \times 10^5 \text{ W/m}^2 \text{ K}$. Outra observação é que à medida que o coeficiente de transferência de calor diminui as curvas de localização da interface se tornam mais lineares.

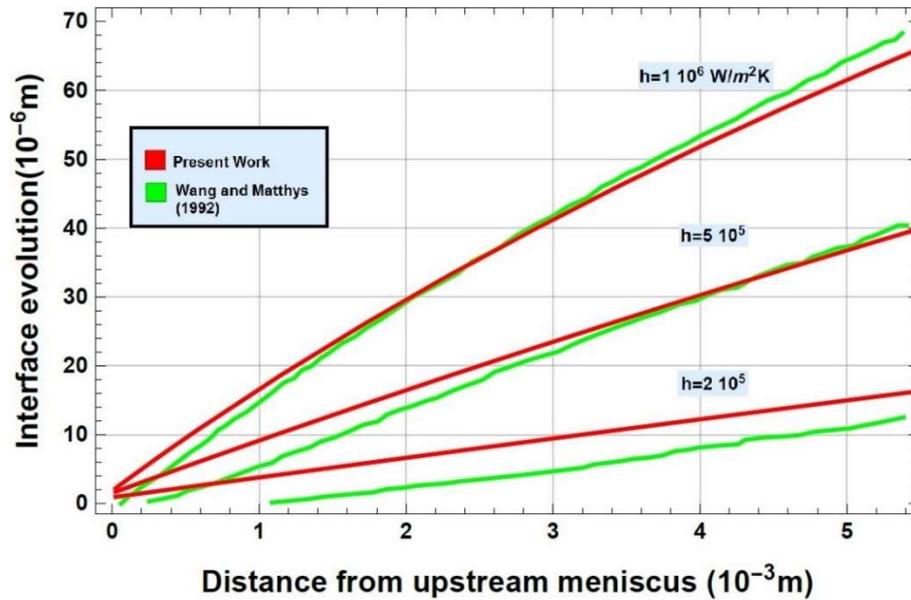


Figura 33 - Localização vertical da interface como função da distância do menisco superior, para alumínio sobre volante de cobre com variação do coeficiente de transferência de calor.

É preciso considerar os seguintes dados: $YD = 350$ mm, $V_w = 23$ m/s, $T_o - T_m = 50$ K, $T_\infty = 300$ K, $XD = 5,75$ mm, espessura da fita = 68 mm.

A Figura 34 mostra a evolução da interface em função da velocidade da interface (m/s) variando o coeficiente de transferência de calor com três valores. Como esperado, a figura ilustra o fato de que a velocidade de interface é alcançada para um valor mais alto do coeficiente de transferência de calor. Tanto a velocidade da interface quanto a taxa de resfriamento da interface em altos coeficientes de transferência de calor diminuem significativamente à medida que a interface se afasta da roda. Esta diminuição resulta da resistência adicional à transferência de calor introduzida pela crescente camada sólida através da qual o calor latente liberado deve ser conduzido. Essa resistência desempenha um papel proporcionalmente maior para grandes coeficientes de transferência de calor na roda, o que explica a diminuição mais rápida da taxa de resfriamento neste caso. Além disso, comparamos com os resultados obtidos por WANG e MATTHYS (1992) obtendo um comportamento aproximado, cuja diferença é atribuída à diferença do modelo.

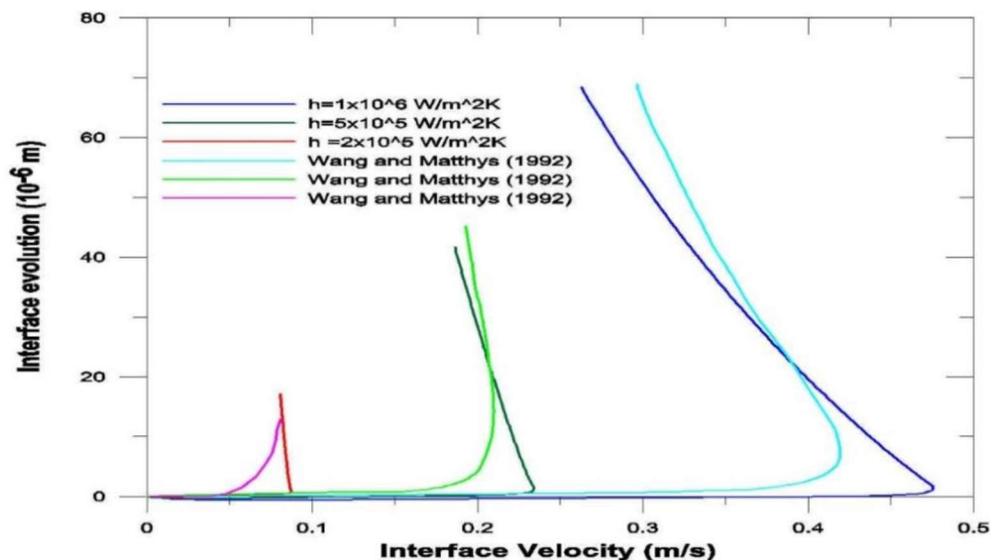


Figura 34 - Velocidade da interface como função da distância do menisco superior, para alumínio sobre volante de cobre.

O gráfico retratado na figura acima considera três coeficientes de transferência de calor: ($YD = 350$ mm, $V_w = 23$ m/s, $T_o - T_m = 50$ K, $T_\infty = 300$ K, $XD = 5,75$ mm, espessura da fita = 68 mm).

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) mostrou-se uma ferramenta capaz de resolver o problema de fundição por vazamento em fluxo planar com que pode estudar a solidificação rápida de metais ou ligas e obter fitas de espessura controlada pela velocidade da roda e pelo coeficiente de transferência de calor. Considerando que a altura da poça é muito pequena, e o tempo de processo é muito curto, há a necessidade de utilizar muitos autovalores para obter a convergência da solução.

A influência do coeficiente de transferência de calor na superfície da roda na taxa de resfriamento da interface e na velocidade da interface foi quantificada. A velocidade da interface e a taxa de resfriamento da interface diminuíram significativamente quando longe da superfície da roda. Observou-se também que a velocidade da interface apresenta um máximo próximo à superfície da roda, provavelmente devido à superposição dos efeitos de superaquecimento e resistência à condução.

A velocidade da interface também foi calculada e mostrou variações muito grandes ao longo do resfriamento por *splat* que são, em geral, fortes funções do coeficiente de transferência de calor do substrato, exceto imediatamente próximo ao substrato, onde esta velocidade parece ser controlada principalmente pela cinética.

Os resultados da distribuição de temperatura ao longo do comprimento da poça e a evolução da frente de solidificação foram comparados com os resultados obtidos por WANG e MATTHYS (1992); NASCIMENTO (2002) apresentou excelente harmonia.

A solução para a representação do processo PFC permite a obtenção de resultados que podem ser utilizados a nível de engenharia. A influência dos parâmetros envolvidos no processo e a relação desses parâmetros com o coeficiente de transferência de calor permite ajustar o processo e utilizar diferentes materiais.

APÊNDICE B

BALANÇO INTEGRAL PARA OS POTENCIAIS NA INTERFACE DE UM ABSORVEDOR HORIZONTAL – ESPESSURA CONSTANTE

Neste apêndice é mostrado as operações matemáticas feitas com a aplicação do balanço integral nas equações da energia e da concentração, para o escoamento externo de película descendente sobre tubos horizontais, tratado no capítulo V, com o objetivo de melhorar a eficiência e resolver o problema da não homogeneização das condições de contorno acopladas na interface.

Energia

Seja a equação da energia a Eq. (5.4a):

$$U(Y) \frac{\partial \theta(X,Y)}{\partial X} = \frac{\partial^2 \theta(X,Y)}{\partial Y^2} \quad (\text{B.1})$$

Fazendo a integração para os limites de integração 0 e Y, obtém-se:

$$\int_0^Y U(Y) \frac{\partial \theta(X,Y)}{\partial X} dY = \int_0^Y \frac{\partial^2 \theta(X,Y)}{\partial Y^2} dY \quad (\text{B.2})$$

$$\int_0^Y U(Y) \frac{\partial \theta(X,Y)}{\partial X} dY = \frac{\partial \theta(X,Y)}{\partial Y} \Big|_0^Y \quad (\text{B.3})$$

$$\int_0^Y U(Y) \frac{\partial \theta(X,Y)}{\partial X} dY = \frac{\partial \theta(X,Y)}{\partial Y} - \frac{\partial \theta(X,0)}{\partial Y} \quad (\text{B.4})$$

Aplicando a condição de contorno na parede (5.4c), a equação (B.4) resulta em:

$$\int_0^Y U(Y) \frac{\partial \theta(X,Y)}{\partial X} dY = \frac{\partial \theta(X,Y)}{\partial X} - Bi \theta(X,0) \quad (B.5)$$

Integrando novamente a Equação (A.5) para os limites 0 e 1.

$$\int_0^1 \left(\int_0^{Y'} U(Y') \frac{\partial \theta(X,Y')}{\partial X} dY' \right) dY = \int_0^1 \frac{\partial \theta(X,Y')}{\partial Y} dY' - Bi \int_0^1 \theta(X,0) dY' \quad (B.6)$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{Y'} U(Y') \frac{\partial \theta(X,Y')}{\partial X} dY' \right) dY = \theta(X,1) - (Bi + 1) \theta(X,0) \quad (B.7)$$

Organizando a Equação (B.7) o potencial da energia na interface é representado como mostra a Equação (B.8)

$$\theta(X,1) = \int_0^1 \left(\int_0^{Y'} U(Y') \frac{\partial \theta(X,Y')}{\partial X} dY' \right) dY + (Bi + 1) \theta(X,0) \quad (B.8)$$

Concentração

Seja a equação da concentração a Eq. (5.6a)

$$U(Y) \frac{\partial W(X,Y)}{\partial X} = \frac{1}{Le} \frac{\partial^2 W(X,Y)}{\partial Y^2} \quad (B.9)$$

Fazendo a integração para os limites 0 e 1, temos:

$$\int_0^1 U(Y) \frac{\partial W(X,Y)}{\partial X} dY = \frac{1}{Le} \int_0^1 \frac{\partial^2 W(X,Y)}{\partial Y^2} dY \quad (B.10)$$

$$\int_0^1 U(Y) \frac{\partial W(X,Y)}{\partial X} dY = \frac{1}{Le} \left. \frac{\partial W(X,Y)}{\partial Y} \right|_0^1 \quad (B.11)$$

$$Le \int_0^1 U(Y) \frac{\partial W(X,Y)}{\partial X} dY = \frac{\partial W(X,Y)}{\partial Y} \Big|_0^1 \quad (\text{B.12})$$

$$Le \int_0^1 U(Y) \frac{\partial W(X,Y)}{\partial X} dY = \frac{\partial W(X,1)}{\partial Y} - \frac{\partial W(X,0)}{\partial Y} \quad (\text{B.13})$$

Aplicando a condição de contorno (5.6c), a Equação (B.13) assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial W(X,1)}{\partial Y} = Le \int_0^1 U(Y) \frac{\partial W(X,Y)}{\partial X} dY \quad (\text{B.14})$$

As Equações (B.8) e (B.14) formam o sistema representado pelas equações do balanço integral dos potenciais da energia e do fluxo de concentração na interface, de um escoamento externo em absorvedor horizontal.

APÊNDICE C

BALANÇO INTEGRAL PARA OS POTENCIAIS NA INTERFACE DE UM ABSORVEDOR HORIZONTAL – ESPESSURA VARIÁVEL

Neste apêndice é mostrado as operações matemáticas feitas com a aplicação do balanço integral nas equações da energia e da concentração, para o escoamento externo de película descendente sobre tubos horizontais, tratado no capítulo V usando a espessura variável com o objetivo de melhorar a eficiência e resolver o problema da não homogeneização das condições de contorno acopladas na interface.

Energia

Seja a equação da energia a Eq. (5.28a):

$$U(\eta) \left(\frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial X} - \frac{1}{\delta_T(X)} \frac{d\delta_T(X)}{dX} \eta \frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\delta_T(X)^2} \frac{\partial^2 \theta(X, \eta)}{\partial \eta^2} \quad (C.1)$$

Fazendo a integração para os limites de integração η e 1, obtém-se:

$$\int_{\eta}^1 U(\eta) \left(\frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial X} - \frac{1}{\delta_T(X)} \frac{d\delta_T(X)}{dX} \eta \frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial \eta} \right) d\eta = \frac{1}{\delta_T(X)^2} \int_{\eta}^1 \frac{\partial^2 \theta(X, \eta)}{\partial \eta^2} d\eta \quad (C.2)$$

$$\int_{\eta}^1 U(\eta) \frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial X} d\eta - \frac{1}{\delta_T(X)} \frac{d\delta_T(X)}{dX} \int_{\eta}^1 U(\eta) \eta \frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial \eta} d\eta = \frac{1}{\delta_T(X)^2} \frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta}^1 \quad (C.3)$$

$$\int_{\eta}^1 U(\eta) \frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial X} d\eta - \frac{1}{\delta_T(X)} \frac{d\delta_T(X)}{dX} \int_{\eta}^1 U(\eta) \eta \frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial \eta} d\eta = \frac{1}{\delta_T(X)^2} \left(\frac{\partial \theta(X, 1)}{\partial \eta} - \frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial \eta} \right) \quad (C.4)$$

Aplicando a condição de contorno na parede (5.28d), a equação (C.4) resulta em:

$$\int_{\eta}^1 U(\eta) \frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial X} d\eta - \frac{1}{\delta_T(X)} \frac{d\delta_T(X)}{dX} \int_{\eta}^1 U(\eta) \eta \frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial \eta} d\eta = \frac{1}{\delta_T(X)^2} \left(fac \frac{\partial W(X, 1)}{\partial \eta} - \frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial \eta} \right) \quad (C.5)$$

Integrando novamente a Equação (C.5) para os limites 0 e 1.

$$\int_0^1 \left(\int_{\eta'}^1 U(\eta') \frac{\partial \theta(X, \eta')}{\partial X} d\eta' - \frac{1}{\delta_T(X)} \frac{d\delta_T(X)}{dX} \int_{\eta'}^1 U(\eta') \eta' \frac{\partial \theta(X, \eta')}{\partial \eta'} d\eta' \right) d\eta = \frac{fac}{\delta_T(X)^2} \int_0^1 \frac{\partial W(X, 1)}{\partial \eta} d\eta' - \frac{1}{\delta_T(X)^2} \int_0^1 \frac{\partial \theta(X, \eta)}{\partial \eta} d\eta' \quad (C.6)$$

$$\int_0^1 \left(\int_{\eta'}^1 U(\eta') \frac{\partial \theta(X, \eta')}{\partial X} d\eta' - \frac{1}{\delta_T(X)} \frac{d\delta_T(X)}{dX} \int_{\eta'}^1 U(\eta') \eta' \frac{\partial \theta(X, \eta')}{\partial \eta'} d\eta' \right) d\eta = \frac{fac}{\delta_T(X)^2} \frac{\partial W(X, 1)}{\partial \eta} - \frac{1}{\delta_T(X)^2} (\theta(X, 1) - \theta(X, 0)) \quad (C.7)$$

Organizando a Equação (C.7) o potencial da energia na interface é representado como mostra a Equação (C.8)

$$\theta(X, 1) = -\delta_T(X)^2 \int_0^1 \left(\int_{\eta'}^1 U(\eta') \frac{\partial \theta(X, \eta')}{\partial X} d\eta' - \frac{1}{\delta_T(X)} \frac{d\delta_T(X)}{dX} \int_{\eta'}^1 U(\eta') \eta' \frac{\partial \theta(X, \eta')}{\partial \eta'} d\eta' \right) d\eta + fac \frac{\partial W(X, 1)}{\partial \eta} + \theta(X, 0) \quad (C.8)$$

Concentração

Seja a equação da concentração a Eq. (5.30a)

$$U(\eta) \left(\frac{\partial W}{\partial X} - \frac{1}{\delta_C(x)} \frac{d\delta_C(x)}{dx} \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\delta_C(x)^2} \frac{1}{Le} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \quad (\text{C.9})$$

Fazendo a integração para os limites 0 e 1, temos:

$$\int_0^1 U(\eta) \left(\frac{\partial W}{\partial X} - \frac{1}{\delta_C(x)} \frac{d\delta_C(x)}{dx} \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) d\eta = \frac{1}{\delta_C(x)^2} \frac{1}{Le} \int_0^1 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} d\eta \quad (\text{C.10})$$

$$\int_0^1 U(\eta) \left(\frac{\partial W}{\partial X} - \frac{1}{\delta_C(x)} \frac{d\delta_C(x)}{dx} \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) d\eta = \frac{1}{\delta_C(x)^2} \frac{1}{Le} \frac{\partial W(X,\eta)}{\partial \eta} \Big|_0^1 \quad (\text{C.11})$$

$$Le \delta_C(x)^2 \int_0^1 U(\eta) \left(\frac{\partial W}{\partial X} - \frac{1}{\delta_C(x)} \frac{d\delta_C(x)}{dx} \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) d\eta = \frac{\partial W(X,Y)}{\partial \eta} \Big|_0^1 \quad (\text{C.12})$$

$$Le \delta_C(x)^2 \int_0^1 U(\eta) \left(\frac{\partial W}{\partial X} - \frac{1}{\delta_C(x)} \frac{d\delta_C(x)}{dx} \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) d\eta = \frac{\partial W(X,1)}{\partial \eta} - \frac{\partial W(X,0)}{\partial \eta} \quad (\text{C.13})$$

Aplicando a condição de contorno (5.30c), a Equação (C.13) assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial W(X,1)}{\partial \eta} = Le \delta_C(x)^2 \int_0^1 U(\eta) \frac{\partial W}{\partial X} d\eta - \frac{1}{\delta_C(x)} \frac{d\delta_C(x)}{dx} \int_0^1 U(\eta) \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} d\eta \quad (\text{C.14})$$

As Equações (C.8) e (C.14) formam o sistema representado pelas equações do balanço integral dos potenciais da energia e do fluxo de concentração na interface, de um escoamento externo em absorvedor horizontal.

APÊNDICE D

BALANÇO INTEGRAL PARA OS POTENCIAIS NO ESCOAMENTO INTERNO EM UM ABSORVEDOR VERTICAL

Neste apêndice é mostrado as operações matemáticas feitas com a aplicação do balanço integral nas equações da energia e da concentração, para o escoamento externo de película descendente sobre tubos horizontais, tratado no capítulo VI, com o objetivo de melhorar a eficiência e resolver o problema da não homogeneização das condições de contorno acopladas na interface.

Energia

Seja a equação da energia a Eq. (4.4a):

$$V(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \right] \quad (\text{D.1})$$

Fazendo a integração para os limites de integração η e 1, obtém-se:

$$\int_{\eta}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = \int_{\eta}^1 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) d\eta \quad (\text{D.2})$$

$$\int_{\eta}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = \eta \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta}^1 \quad (\text{D.3})$$

$$\int_{\eta}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = \frac{\partial \theta(\xi, 1)}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (\text{D.4})$$

Aplicando a condição de contorno na parede (6.4d), a equação (C.4) resulta em:

$$\int_{\eta}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = -\eta \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} - Bi \theta(\xi, 1) \quad (D.5)$$

Integrando novamente a Equação (D.5) para os limites η_{int} e 1.

$$\begin{aligned} - \int_{\eta_{int}}^1 \left(\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 \eta' V(\eta') \frac{\partial \theta(\xi, \eta')}{\partial \xi} d\eta' \right) d\eta &= \int_{\eta_{int}}^1 \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} d\eta + \\ Bi \int_{\eta_{int}}^1 \frac{1}{\eta} \theta(\xi, 1) d\eta & \end{aligned} \quad (D.6)$$

$$\begin{aligned} - \int_{\eta_{int}}^1 \left(\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 \eta' V(\eta') \frac{\partial \theta(\xi, \eta')}{\partial \xi} d\eta' \right) d\eta & \\ = \theta(\xi, 1) - \theta(X, \eta_{int}) - (Bi \log \eta_{int}) \theta(X, \eta_{int}) & \end{aligned} \quad (D.7)$$

Organizando a Equação (6.7) o potencial da energia na interface é representado como mostra a Equação (D.8)

$$\begin{aligned} \theta(\xi, 1) &= - \int_{\eta_{int}}^1 \left(\frac{1}{\eta'} \int_{\eta'}^1 \eta' V(\eta') \frac{\partial \theta(\xi, \eta')}{\partial \xi} d\eta' \right) d\eta + (Bi \log(\eta_{int}) + \\ 1) \theta(X, \eta_{int}) & \end{aligned} \quad (D.8)$$

Concentração

Seja a equação da concentração a Eq. (6.6a)

$$V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \left[\frac{1}{Le} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \right] \right] \quad (D.9)$$

Fazendo a integração para os limites η_{int} e 1, temos:

$$\int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = \frac{1}{Le} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) d\eta \quad (D.10)$$

$$\int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = \frac{1}{Le} \eta \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta_{int}}^1 \quad (D.11)$$

$$Le \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = \eta \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta_{int}}^1 \quad (D.12)$$

$$Le \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta = \frac{\partial W(\xi, 1)}{\partial \eta} - \eta_{int} \frac{\partial W(\xi, \eta_{int})}{\partial \eta} \quad (D.13)$$

Aplicando a condição de contorno (6.6c), a Equação (D.13) assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial W(\xi, \eta_{int})}{\partial \eta} = \frac{Le}{\eta_{int}} \int_{\eta_{int}}^1 \eta V(\eta) \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} d\eta \quad (D.14)$$

As Equações (D.8) e (D.14) formam o sistema representado pelas equações do balanço integral dos potenciais da energia e do fluxo de concentração na interface, de um escoamento externo em absorvedor horizontal.

APÊNDICE E

DETERMINAÇÃO DO PERFIL DE VELOCIDADE PARA COORDENADAS RETANGULARES

Neste apêndice é mostrado as operações matemáticas realizadas na equação da quantidade de movimento na direção longitudinal com a aplicação das condições de contorno, para o escoamento externo de película descendente sobre tubos horizontais, tratado no capítulo III, com o objetivo de encontrar o campo de velocidade completamente desenvolvido.

Da equação da quantidade de movimento na direção longitudinal tem-se:

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial x} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \quad (\text{E.1})$$

Observando as hipóteses do problema e eliminando os termos desprezados na equação (E.1) obtém-se:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho g \quad (\text{E.2})$$

Para determinar o perfil de velocidade, deve-se efetuar a integração indefinida em y :

$$\int \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = - \int \frac{\rho g}{\mu} dy \quad (\text{E.3})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho g}{\mu} y + C_1 \quad (\text{E.4})$$

Usando as condições de contorno na interface da película, determina-se o valor da constante C_1 .

$$y = \delta \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{\rho g}{\mu} \delta + C_1 = 0 \quad (\text{E.5})$$

$$C_1 = \frac{\rho g}{\mu} \delta \quad (\text{E.6})$$

Substituindo a constante na equação (E.4), obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho g}{\mu} (\delta - y) \quad (\text{E.7})$$

Integrando novamente a equação anterior em y tem-se:

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = -\int \frac{\rho g}{\mu} (\delta - y) dy \quad (\text{E.8})$$

$$u = \frac{\rho g}{\mu} \left(\delta y - \frac{y^2}{2} \right) + C_2 \quad (\text{E.9})$$

Usando a condição de contorno na parede, obtém-se:

$$y = 0 \quad e \quad u = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0 \quad (\text{E.10})$$

Substituindo os valores na equação, o perfil de velocidade na direção do escoamento é:

$$u(y) = \frac{\rho g}{\mu} \left(\delta y - \frac{y^2}{2} \right) \quad (\text{E.11})$$

Organizando os termos, obtém-se:

$$u(y) = \frac{\rho g \delta^2}{2 \mu} \left(2 \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right) \quad (\text{E.12})$$

O cálculo da velocidade média u_{med} na direção do escoamento é determinado integrando o perfil de velocidade $u(y)$ no intervalo de $0 < y < \delta$, obtendo-se:

$$u_{med} = \frac{\int_0^\delta u(y) dy}{\int_0^\delta dy} = \frac{\int_0^\delta \frac{\rho g \delta^2}{2 \mu} \left(2 \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right) dy}{\delta} \quad (\text{E.13})$$

$$u_{med} = \frac{\rho g \delta^2 \left(\frac{2}{\delta} \frac{\delta^2}{2} - \frac{1}{\delta^2} \frac{\delta^3}{3} \right)}{2 \mu \delta} \quad (\text{E.14})$$

O resultado final da velocidade máxima é:

$$u_{med} = \frac{\rho g \delta^2}{3 \mu} \quad (\text{E.15})$$

Substituindo a equação (E.15) na equação (E.12), obtém-se:

$$u(y) = \frac{3}{2} u_{med} \left(2 \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right) \quad (\text{E.16})$$

Onde $u(y)$ representa o campo de velocidade completamente desenvolvido para coordenadas retangulares.

APÊNDICE F

DETERMINAÇÃO DO PERFIL DE VELOCIDADE PARA COORDENADAS CILÍNDRICAS

Neste apêndice é mostrado as operações matemáticas realizadas na equação da quantidade de movimento na direção longitudinal com a aplicação das condições de contorno, para o escoamento externo de película descendente sobre dutos circulares, tratado no capítulo IV, com o objetivo de encontrar o campo de velocidade completamente desenvolvido.

Da equação da quantidade de movimento na direção longitudinal tem-se:

$$\rho_l \left[u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] + \rho_l g \quad (\text{F.1})$$

Com gradiente de pressão imposto sobre a película, obtém-se:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_v g \quad (\text{F.2})$$

Substituindo a equação (F.2) na equação (F.1), obtém-se:

$$\rho_l \left[u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right] = - \rho_v g + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] + \rho_l g \quad (\text{F.3})$$

Organizando os termos, obtém-se:

$$\rho_l \left[u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right] = g (\rho_l - \rho_v) + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{F.4})$$

Desprezando os efeitos das forças inerciais, que corresponde a considerar o escoamento completamente desenvolvido, obtém-se:

$$0 = g (\rho_l - \rho_v) + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] \quad (\text{F.5})$$

Neste caso, pode-se reescrever a equação como:

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] = -g (\rho_l - \rho_v) \quad (\text{F.6})$$

Onde: ρ_l → representa a massa específica da solução.

ρ_v → representa a massa específica do vapor saturado para a temperatura da solução líquida.

O desenvolvimento do perfil da velocidade é determinado fazendo algumas manipulações matemáticas na equação (F.6):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{g (\rho_l - \rho_v)}{\mu} \quad (\text{F.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{g (\rho_l - \rho_v)}{\mu} r \quad (\text{F.8})$$

Integrando a equação (F.8) em função de r, obtém-se:

$$\int \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr = -\frac{g (\rho_l - \rho_v)}{\mu} \int r dr \quad (\text{F.9})$$

$$r \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{g (\rho_l - \rho_v)}{\mu} \frac{r^2}{2} + C_1 \quad (\text{F.10})$$

Organizando os termos, obtém-se:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu} \frac{r^2}{2r} + \frac{C_1}{r} \quad (\text{F.11})$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu} \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \quad (\text{F.12})$$

Integrando novamente a equação (F.12) em função de r, obtém-se:

$$\int \frac{\partial v}{\partial r} dr = -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{2\mu} \int r dr + C_1 \int \frac{1}{r} dr \quad (\text{F.13})$$

$$v(r) = -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{2\mu} \frac{r^2}{2} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (\text{F.14})$$

Substituindo as condições de contorno com o objetivo de determinar as constantes C1 e C2:

$$\text{Para } r = R_{int} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad ; \quad -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu} \frac{R_{int}}{2} + \frac{C_1}{R_{int}} = 0$$

(F.15)

$$C_1 = \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu} \frac{R_{int}^2}{2} \quad (\text{F.16})$$

$$\text{Para } r = R_t \rightarrow v(R_t) = 0 \quad ; \quad -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{2\mu} \frac{R_t^2}{2} + \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu} \frac{R_{int}^2}{2} \ln(R_t) + C_2 = 0 \quad (\text{F.17})$$

$$C_2 = \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{2\mu} \frac{R_t^2}{2} - \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\mu} \frac{R_{int}^2}{2} \ln(R_t) \quad (\text{F.18})$$

Substituindo as constantes C1 e C2 e reorganizando os termos, obtém-se:

$$v(r) = -\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{2\mu} \frac{r^2}{2} + \frac{g(\rho_l - \rho_v) R_{int}^2}{\mu} \frac{1}{2} \ln(r) + \frac{g(\rho_l - \rho_v) R_t^2}{2\mu} - \frac{g(\rho_l - \rho_v) R_{int}^2}{\mu} \frac{1}{2} \ln(R_t) \quad (\text{F.19})$$

$$v(r) = \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{4\mu} (-r^2 + 2 R_{int}^2 \ln(r) + R_t^2 - 2 R_{int}^2 \ln(R_t)) \quad (\text{F.20})$$

$$v(r) = \frac{g(\rho_l - \rho_v) R_t^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R_t}\right)^2 + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t}\right)^2 \ln(r) - 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t}\right)^2 \ln(R_t) \right) \quad (\text{F.21})$$

O perfil da velocidade $v(r)$ na direção do escoamento é:

$$v(r) = \frac{g(\rho_l - \rho_v) R_t^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R_t}\right)^2 + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R_t}\right) \right) \quad (\text{F.22})$$

O cálculo da velocidade média v_{med} na direção do escoamento é determinado integrando o perfil de velocidade $v(r)$ no intervalo de $R_{int} < r < R_t$, obtendo-se:

$$\begin{aligned} v_{med} &= \frac{\int_{R_{int}}^{R_t} v(r) dr}{\int_{R_{int}}^{R_t} r dr} \\ &= \frac{\int_{R_{int}}^{R_t} \frac{g(\rho_l - \rho_v) R_t^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R_t}\right)^2 + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R_t}\right) \right) dr}{\int_{R_{int}}^{R_t} r dr} \\ &= \frac{g(\rho_l - \rho_v) R_t^2}{4\mu} \left(\frac{\int_{R_{int}}^{R_t} \left(r - r \left(\frac{r}{R_t}\right)^2 + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t}\right)^2 r \ln\left(\frac{r}{R_t}\right) \right) dr}{\frac{R_t^2}{2} - \frac{R_{int}^2}{2}} \right) \quad (\text{F.23}) \end{aligned}$$

v_{med}

$$= \frac{g (\rho_l - \rho_v) R_t^2 \left(\int_{R_{int}}^{R_t} r dr - \frac{1}{R_t^2} \int_{R_{int}}^{R_t} r^3 dr + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 \int_{R_{int}}^{R_t} r \ln \left(\frac{r}{R_t} \right) dr \right)}{4 \mu \left(\frac{R_t^2}{2} - \frac{R_{int}^2}{2} \right)} \quad (F.24)$$

v_{med}

$$= \frac{g (\rho_l - \rho_v) R_t^2 \left(\frac{r^2}{2} \Big|_{R_{int}}^{R_t} - \frac{1}{R_t^2} \frac{r^4}{4} \Big|_{R_{int}}^{R_t} + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 \int_{R_{int}}^{R_t} r \ln \left(\frac{r}{R_t} \right) dr \right)}{4 \mu \left(\frac{R_t^2}{2} - \frac{R_{int}^2}{2} \right)} \quad (F.25)$$

v_{med}

$$= \frac{g (\rho_l - \rho_v) R_t^2 \left(\frac{R_t^2}{2} - \frac{R_{int}^2}{2} - \frac{1}{R_t^2} \frac{R_t^4}{4} + \frac{1}{R_t^2} \frac{R_{int}^4}{4} + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 R_t^2 \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 \ln \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{R_{int}}{R_t} \right)^2 \right) \right)}{4 \mu \left(\frac{R_t^2}{2} - \frac{R_{int}^2}{2} \right)} \quad (F.26)$$

Substituindo os seguintes grupos adimensionais:

$$\eta = \frac{r}{R_t} \quad , \quad \eta_{int} = \frac{R_{int}}{R_t} \quad e \quad \eta_t = \frac{R_t}{R_t} = 1$$

Determina-se a velocidade média:

$$v_{med} = \frac{g (\rho_l - \rho_v) R_t^2 (1 - 4 \eta_{int}^2 + 3 \eta_{int}^4 - 4 \eta_{int}^4 \ln (\eta_{int}))}{8 \mu (1 - \eta_{int}^2)} \quad (F.27)$$

Substituindo os grupos adimensionais em $v(r)$, obtém-se:

$$v(r) = \frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R_t}\right)^2 + 2 \left(\frac{R_{int}}{R_t}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R_t}\right) \right) \quad (\text{F.28})$$

$$v(\eta) = \frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{4\mu} (1 - \eta^2 + 2\eta_{int}^2 \ln(\eta)) \quad (\text{F.29})$$

Para determinar a adimensionalização do perfil de velocidade faz necessário a divisão entre o perfil de velocidade e a velocidade média, obtendo-se:

$$v(\eta) = \frac{v(r)}{v_{med}} = \frac{\frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{4\mu} (1 - \eta^2 + 2\eta_{int}^2 \ln(\eta))}{\frac{g(\rho_l - \rho_v)R_t^2}{8\mu} \frac{(1 - 4\eta_{int}^2 + 3\eta_{int}^4 - 4\eta_{int}^4 \ln(\eta_{int}))}{1 - \eta_{int}^2}} \quad (\text{F.30})$$

Simplificando os termos, obtém-se:

$$v(\eta) = \frac{2(1 - \eta_{int}^2)(1 - \eta^2 + 2\eta_{int}^2 \ln(\eta))}{(1 - 4\eta_{int}^2 + 3\eta_{int}^4 - 4\eta_{int}^4 \ln(\eta_{int}))} \quad (\text{F.31})$$

Reescrevendo o perfil determinado, obtém-se:

$$v(\eta) = \zeta (1 - \eta^2 + 2\eta_{int}^2 \ln(\eta)) \quad (\text{F.32})$$

Sabendo que ζ é uma constante determinada após a adimensionalização, sendo:

$$\zeta = \frac{2(1 - \eta_{int}^2)}{(1 - 4\eta_{int}^2 + 3\eta_{int}^4 - 4\eta_{int}^4 \ln(\eta_{int}))} \quad (\text{F.33})$$