



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Graduação em Matemática

O Teorema de Hahn-Banach

Renan Silva Santos

JOÃO PESSOA – PB
2022



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Graduação em Matemática

O Teorema de Hahn Banach

por

Renan Silva Santos

sob a orientação do

Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo

*Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Departamento Matemática da Universidade
Federal da Paraíba como requisito para a ob-
tenção do título de graduado em Licenciatura
em Matemática.*

João Pessoa – PB
2022

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S237t Santos, Renan Silva.

O teorema de Hahn Banach / Renan Silva Santos. -
João Pessoa, 2022.
89 p. : il.

Orientação: Damião Júnio Gonçalves Araújo.
TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Matemática - análise clássica. 2. Teorema de
Hahn-Banach. 3. Teoria da análise funcional. I. Araújo,
Damião Júnio Gonçalves. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

O Teorema de Hahn-Banach

por

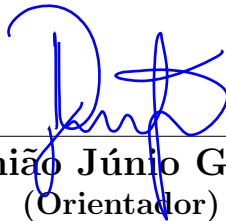
Renan Silva Santos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para a obtenção do título de graduado em Licenciatura em Matemática.

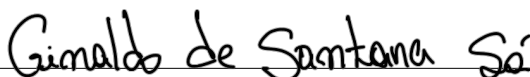
Área de Concentração: Análise Funcional

Aprovada em

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo
(Orientador)



Ginaldo Santana de Sá
(Examinador 1)



Anselmo Baganha Raposo Junior
(Examinador 2)

Dedicatória

*A Ynajara, que é o amor da minha vida, e à
minha mãe, que é a maior responsável pelo
homem que me tornei.*

Agradecimentos

A aquele que está sempre em primeiro lugar na minha vida, Deus. Agradeço a Deus pelo dom da vida e por todas as vitórias a mim proporcionadas ao longo da minha vida.

Ao amor da minha vida, Ynajara Lima, a mulher que Deus me deu, o presente surpresa de Deus na minha vida. Uma mulher que está sempre ao meu lado, que em vários momentos da graduação e na vida particular era o meu único motivo de sorrir. Obrigado meu amor por você existir.

À minha mãe, que, apesar das tribulações e dificuldades, nunca me abandonou. Houveram momentos de dificuldades financeiras extremas, que não tínhamos dinheiro para comprar um pedaço de pão, mas ela nunca me abandonou. Houveram tempos que ela chegou a pedir para alimentar a mim e ao meu irmão, mas ela jamais cogitou a possibilidade de nos deixar. Minha mãe é uma heroína. Dou graças a Deus pela mãe que ele me deu.

Ao meu pai por me ensinar como enfrentar as dificuldades e não desistir. Por me mostrar que o mundo não é um lugar lindo e maravilhoso, mas um lugar difícil que só vencemos com muito sacrifício e trabalho duro.

Ao meu orientador, professor Damião Júnio, pela paciência, incentivo e colaboração para todo o conhecimento que adquiri. Aprendi muito na universidade e grande parte desse aprendizado devo ao professor Damião.

A Ginaldo de Santana Sá, que me ajudou muito na construção desse TCC, além de ter me dado conselhos valiosíssimos que levarei para toda minha vida.

A Elizeu Rocha, que foi o maior incentivador da ideia de eu entrar na universidade, que, com seu coração gigante, viu em mim um rapaz pobre e sem recursos, porem esforçado, e resolveu ajudar. Estudei muito para tirar as melhores notas possíveis, pensando em fazer valer todo o esforço que Elizeu fez por mim.

A irmã Luciene, que, se eu contasse aqui tudo que ela fez por mim, os agradecimentos iriam ficar maiores que o corpo do TCC. Deixei de passar fome graças a ela.

Ao meu irmão Ramon, que amo muito e só a sua existência já é uma benção.

Aos meus grandes amigos, Vinícius, Lucas e Henrique, que sempre me incentivaram a não desistir de estudar.

À Anselmo Baganha Raposo Júnio que participou da banca examinadora.

À todas as pessoas que não mencionei, mas me ajudou de alguma maneira ao longo dessa jornada.

Epígrafe:

*A matemática é o alfabeto pelo qual Deus
escreveu o universo.*

Galileu Galilei

Resumo

Este trabalho consiste no estudo de um dos teoremas mais importantes da Análise Funcional, o Teorema de Hahn-Banach. Aqui, além de abordarmos o teorema nas suas versões clássicas encontradas nos livros de Introdução a Análise Funcional, a forma analítica e a forma geométrica, também veremos maneiras alternativas de demonstrá-lo, bem como resultados equivalentes. Abordaremos a sua origem apresentando sua versão rudimentar. Além disso, como ilustração, veremos inúmeras aplicações do Teorema de Hahn-Banach em abordagens que são o alicerce no desenvolvimento da teoria da Análise Funcional.

Palavras-chave: Teorema de Hahn-Banach, Análise Funcional, Eduard Helly

Abstract

This work consists of the study of one of the most important theorems of Functional Analysis, the Hahn-Banach Theorem. Here, in addition to approaching the theorem in its classic versions found in the Introduction to Functional Analysis books, the analytical form and the geometric form, we will also see alternative ways to prove it, as well as equivalent results. We will approach its origin presenting its rudimentary version. Furthermore, as an illustration, we will see numerous applications of the Hahn-Banach Theorem in approaches that are the foundation in the development of the theory of Functional Analysis.

Keywords: Hahn-Banach Theorem, Functional Analysis, Eduard Helly

Sumário

Introdução	17
1 Preliminares	21
1.1 Espaços de Banach	21
1.1.1 Espaços ℓ^p	26
1.2 Aplicações Lineares	31
1.3 O Lema de Zorn	39
2 O Teorema de Hanh-Banach	41
2.1 Biografias	41
2.1.1 Eduard Helly	41
2.1.2 Hans Hahn	43
2.1.3 Stefan Banach	44
2.2 O Teorema de Hanh-Banach	47
2.3 Teorema de Mazur-Orlicz	56
2.4 Funcionais Lineares Minimais	59
2.5 Formas Geométricas	64
3 Algumas Aplicações do Teorema de Hahn-Banach	75
3.1 Operadores Adjuntos	75
3.2 Anulador	76
3.3 Espaços Reflexivos	77
3.4 Espaços Separáveis	82
Referências Bibliográficas	86

Introdução

A Análise Funcional é um ramo abstrato da matemática que se originou da análise clássica, nas primeiras décadas do século 20. Hoje em dia, métodos e resultados de Análise Funcional são importantes em vários campos da matemática e suas aplicações. Como parte do desenvolvimento dessa teoria, o Teorema de Hahn-Banach surge como um dos seus pilares e, por este motivo, foi chamado de “joia da Análise Funcional”. Por mais que esteja muito ligado a Análise Funcional, sua importância não se limita apenas a esta. Entre suas aplicações, estão a prova da existência das funções de Green e Neumann, O Teorema da Integral de Cauchy para álgebras de Banach, a prova da existência de medidas finitamente aditivas definidas em todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$, dentre outras. Além disso, têm diversas aplicações fora da matemática. Por exemplo, Feinberg e Lavine [7] desenvolveram a termodinâmica usando o teorema de Hahn-Banach.

O Teorema de Hahn-Banach possui este nome em homenagem aos matemáticos Hans Hahn, que era alemão, e Stefan Banach, que era polonês. Embora o destaque tenha ficado para os dois, o primeiro matemático a desenvolver este resultado se chama Eduard Helly. Este último mostrou o teorema para alguns subespaços normados de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ [10], que é o conjunto das sequências de números complexos. Alguns anos depois Hahn [9] cria o conceito de espaço de Banach e, usando a técnica de Helly, estabelece o resultado em um contexto mais geral. Sem ter conhecimento do trabalho de Hahn e, portanto, usando apenas a técnica usada por Helly, Banach [1] generalizou ainda mais o resultado, mostrando que era válido para qualquer espaço vetorial, normado ou não.

Em 1933, o matemático polonês Mazur [14] deduziu a forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach, utilizando a forma analítica desenvolvida por Helly, Hahn e Banach, mas não mencionou a sua equivalência. Em 1941 Dieudonne referiu-se em [6] ao Teorema desenvolvido por Mazur como o Teorema de Hahn-Banach, o que nos leva a pensar que ele aparentemente tinha noção da relação entre os dois resultados.

O Teorema mostrado por Mazur foi chamado de forma geométrica pela primeira vez por Bourbaki.

Helly, Hahn e Banach são personagens centrais na Análise Funcional e aqui, neste trabalho. É interessante notar que “geneologicamente”, eles possuem importantes e célebres ancestrais. A simbologia $A \rightarrow B$ será utilizada para indicar que A orientou B.

- **Helly**

Gauss $\rightarrow$ Bessel $\rightarrow$ Scherk $\rightarrow$ Kummer $\rightarrow$ Mertens $\rightarrow$ Helly

- **Hahn**

Bolzano $\rightarrow$ Moth $\rightarrow$ Frischanf $\rightarrow$ Escherich $\rightarrow$ Hahn

- **Banach**

Leibniz $\rightarrow$ J. Bernoulli $\rightarrow$ Jacob Bernoulli $\rightarrow$ Euler $\rightarrow$ Lagrange $\rightarrow$ Fourier $\rightarrow$ Dirichlet $\rightarrow$ Lipschitz $\rightarrow$ Klein $\rightarrow$ Lindemann $\rightarrow$ Hilbert $\rightarrow$ Steinhaus $\rightarrow$ Banach.

É interessante, também, ver alguns descendentes de Banach, observe:

Banach $\rightarrow$ Mazur $\rightarrow$ Schauder.

Este trabalho está dividido em três capítulos. O capítulo 1 é dedicado a assuntos preliminares. Nele serão estabelecidos conceitos, fixadas notações e apresentados alguns resultados de fundamental importância para o desenvolvimento e compreensão da teoria. Tratamos de assuntos como espaços de Banach, aplicações lineares e espaços de Banach. que serão de suma importância para a total compreensão do desenvolvimento deste trabalho.

O capítulo 2 está dividido em 5 seções. A primeira seção é dedicada a contar um pouco da história de Eduard Helly, que, como foi dito, foi de suma importância para o desenvolvimento do teorema cujo nome é o título deste trabalho. Nas seções seguintes serão trabalhados o desenvolvimento matemático do Teorema de Hahn-Banach. Na seção 2, mostraremos a demonstração, tradicionalmente, encontrada nos livros de Introdução à Análise Funcional, do Teorema de Hahn-Banach na forma analítica.

A partir da terceira seção, serão mostradas formas alternativas de enunciar o Teorema de Hahn-Banach. Mais precisamente, mostramos a equivalência entre o Teorema de Hahn-Banach e o Teorema de Mazur, demonstramos a versão da seção 2.2 utilizando um argumento que se baseia no fato de que todo funcional linear é um

elemento minimal da classe dos funcionais sublineares definidos sobre mesmo espaço e suas formas geométricas.

O terceiro capítulo apresenta várias aplicações do Teorema de Hahn-Banach no início do desenvolvimento da Análise Funcional clássica com o objetivo de ilustrar a importância deste teorema neste ramo da matemática, além de enfatizar a sua posição como um dos principais pilares da área. Apresentamos aplicações do Teorema de Hahn-Banach no âmbito dos operadores lineares, anuladores, espaços reflexivos e espaços separáveis.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, algumas definições e resultados preliminares são apresentadas no intuito de tornar o texto mais autossuficiente, servindo como base teórica para os capítulos subsequentes.

1.1 Espaços de Banach

Definição 1.1. *Seja C um conjunto não-vazio. A função $d : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de métrica se possui as seguintes propriedades:*

- i) $d(x, y) \geq 0$, para todo $x, y \in C$;*
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in C$;*
- iii) $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;*
- iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, v, z \in C$.*

O par (C, d) é chamado de espaço métrico.

Além dos exemplos clássicos, como a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$, observe no exemplo abaixo que uma métrica pode ser construída com ingredientes relativamente simples.

Exemplo 1.1. *Seja C um conjunto não-vazio. A função $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

é uma métrica em C . Mostremos que f possui as propriedades i), ii), iii) e iv).

- i) Note que 0 e 1 são os únicos valores possíveis para $f(x, y)$. Logo, $f(x, y) \geq 0$, para todo $x, y \in C$.*

ii) Se $x \neq y$, $f(x, y) = 1 = f(y, x)$. Da mesma forma, se $x = y$, $f(x, y) = 0 = f(y, x)$. Em ambos os casos, $f(x, y) = f(y, x)$.

iii) Pela definição de f , se $x = y$, então $f(x, y) = 0$. Por outro lado, note que, por definição, se $x \neq y$, então $f(x, y) = 1 \neq 0$, isto é, se $f(x, y) = 0$, então $x = y$. Conclui-se, portanto, que $f(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

iv) Dados x, y e $z \in C$, temos 5 possibilidades: $x = y \neq z$, $x \neq y = z$, $x = z \neq y$, $x = y = z$, ou x, y e z são diferentes dois a dois. Em todos os casos, a desigualdade

$$f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y)$$

é verdadeira.

Definição 1.2. Sejam (C, d) um espaço métrico qualquer e (x_n) uma sequência de pontos de C . Dizemos que a sequência (x_n) converge para $x_0 \in C$, se dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que

$$d(x_n, x_0) < \epsilon,$$

isto é, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0.$$

Notação 1.1. Na definição acima, x_0 é chamado de limite da sequência (x_n) e denotamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

ou, de modo alternativo,

$$x_n \longrightarrow x_0.$$

Definição 1.3 (Sequência de Cauchy). Uma sequência (x_n) , em um espaço métrico (C, d) , é dita de Cauchy se, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Exemplo 1.2. Toda sequência convergente é de Cauchy.

Seja (C, d) um espaço métrico e (x_n) uma sequência de pontos de C que converge para $x_0 \in C$. Daí, pela definição de convergência, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica que

$$d(x_n, x_0) < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } d(x_m, x_0) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, (x_n) é de Cauchy. Portanto

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) = \frac{\epsilon}{2} + d(x_m, x_0) < \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Definição 1.4. Um espaço métrico (C, d) é chamado de completo se toda sequência de Cauchy de pontos de C converge para um ponto de C .

Note que o espaço métrico (C, f) do **Exemplo 1.1** é completo, pois, se (x_n) é uma sequência de Cauchy de pontos de C , então tomando $\epsilon < 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica que $f(x_n, x_m) < 1$. Como a imagem de f é o conjunto $\{0, 1\}$, temos que $f(x_n, x_m) = 0$, ou seja, a partir de x_{n_0+1} , a sequência é constante, logo (x_n) converge para $x_{n_0+1} \in C$, isto é, (C, f) é completo.

Definição 1.5. Seja U um espaço vetorial $\mathbb{F}$, onde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. A função $\|\cdot\| : U \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de norma se obedece as seguintes propriedades:

- i) $\|u\| \geq 0$ para todo $u \in U$;
- ii) $\|u\| = 0$ se, e somente se, $u = 0$;
- iii) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ e todo $u \in U$;
- iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para todo $u, v \in U$.

Um espaço vetorial U munido de uma norma $\|\cdot\|$ é chamado de espaço vetorial normado e denotado por $(U, \|\cdot\|)$.

Observação 1.1. Os itens iii) e iv), da definição acima, são chamados de homogeneidade e desigualdade triangular, respectivamente.

Exemplo 1.3. Seja $(U, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. A função definida por $d(x, y) = \|x - y\|$, é uma métrica.

- i) O resultado é uma implicação direta da definição da norma.
- ii) Note que

$$d(u, v) = \|u - v\| = \|(-1)(v - u)\| = |(-1)| \|v - u\| = \|v - u\| = d(v, u).$$

- iii) Para todo $u, v \in U$,

$$d(u, v) = \|u - v\| = 0,$$

portanto

$$u - v = 0,$$

isto é,

$$u = v$$

iv) Pela definição da norma,

$$d(u, v) = \|u - v\| = \|u - z + z - v\| \leq \|u - z\| + \|z - v\| = d(u, z) + d(z, v)$$

para todo $u, v, z \in U$.

A métrica do exemplo acima é chamada métrica induzida pela norma. Segue deste mesmo exemplo que, todo espaço vetorial normado também é um espaço métrico com a métrica induzida pela norma.

Exemplo 1.4. O conjunto $\mathbb{R}$ munido do módulo, que é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é um espaço vetorial normado.

Mostremos que o módulo possui as propriedades i) à iv) da definição acima.

i) Dado $x \in \mathbb{R}$, se $x \geq 0$, então $|x| = x \geq 0$, mas, se $x < 0$, $|x| = -x > 0$. Em ambos os casos, $|x| \geq 0$.

ii) Pela definição de módulo, $|0| = 0$, o que mostra a ida. Para mostrar a recíproca, note que, se $x \neq 0$, então $x > 0$ ou $x < 0$, em ambos os casos $|x| > 0$, portanto, se $|x| = 0$, então $x = 0$.

iii) Dados x e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos quatro casos:

- Se $\alpha \geq 0$ e $x \geq 0$, então $|\alpha x| = \alpha x = |\alpha||x|$;
- Se $\alpha < 0$ e $x \geq 0$, então $|\alpha x| = -\alpha x = |\alpha||x|$;
- Se $\alpha \geq 0$ e $x < 0$, então $|\alpha x| = -\alpha x = \alpha(-x) = |\alpha||x|$;
- Se $\alpha < 0$ e $x < 0$, então $|\alpha x| = \alpha x = (-\alpha)(-x) = |\alpha||x|$.

iv) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, como $x \leq |x|$, $y \leq |y|$, $-x \leq |x|$ e $-y \leq |y|$, então

$$x + y \leq |x| + |y| \text{ e } -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|.$$

Portanto, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Definição 1.6. Seja $(U, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Dizemos que U é um espaço de Banach se U é completo com a métrica induzida pela norma.

Exemplo 1.5. $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, onde $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números inteiros, e $|\cdot|$ é o módulo do **Exemplo 1.4**, não é um espaço de Banach.

Note que tomando (x_n) uma sequência, cujos pontos x_n é o número 1 seguido das $n - 1$ casas decimais de $\sqrt{2} = 1,4142135 \dots$, ou seja,

$$x_1 = 1; x_2 = 1,4; x_3 = 1,41; \dots; x_6 = 1,414213; \dots$$

esta forma, temos uma sequência de pontos de números racionais que convergem para $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Como (x_n) converge nos reais, pelo **Exemplo 1.2**, (x_n) é uma sequência de Cauchy nos reais, e, portanto, é uma sequência de Cauchy nos racionais, pois todos os elementos da sequência são números racionais. Temos, assim, uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não converge para nenhum número racional. Isso mostra que $\mathbb{Q}$ não é completo.

Exemplo 1.6. *Abaixo são apresentados espaços de Banach canônicos que não serão mostrados, mas, se você deseja se aprofundar no assunto, ver [11].*

i) O espaço vetorial normado $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, onde $|\cdot|$ é o módulo mostrado no **Exemplo 1.4**, é um espaço de Banach.

ii) O espaço vetorial normado $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, onde $|\cdot|$ é definido por

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

para todo $x + iy \in \mathbb{C}$, é um espaço de Banach.

iii) O espaço vetorial normado $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, onde $\|\cdot\|$ é definido por

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

para todo $x = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$, é um espaço de Banach.

Exemplo 1.7. *Seja $p \in [1, \infty)$. O conjunto*

$$\ell^p = \left\{ x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$$

com a norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

é chamado de o espaço das sequências reais p -somáveis. Este espaço é um espaço de Banach.

Exemplo 1.8. *O conjunto*

$$\ell^\infty = \left\{ x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty \right\}$$

com a norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$$

é um espaço de Banach. Este espaço é chamado de espaço das sequências reais limitadas.

As afirmações feitas nos dois últimos exemplos acima serão verificadas pelas **Proposições 1.3, 1.4, 1.5, 1.6**. Antes, mostraremos as desigualdades de Hölder e Minkowski, respectivamente.

1.1.1 Espaços ℓ^p

Agora nos aprofundaremos um pouco nos espaços ℓ^p , espaços esses que se diferenciam dos canônicos de dimensão finita e podem ilustrar toda a teoria da Análise Funcional.

Proposição 1.1 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $(x_n), (y_n) \in \mathbb{R}^n$, $p > 1$ e q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Vale a seguinte desigualdade:*

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Demonstração. Inicialmente, considere a função $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}x$. Como

$$f'(x) = \frac{1}{p}(x^{\frac{1}{p}-1} - 1),$$

percebe-se que f é crescente no intervalo $[0, 1)$ e decrescente no intervalo $(1, \infty)$. Logo 1 é o ponto de máximo global da f . Portanto,

$$f(x) = x^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}x \leq f(1) = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q},$$

para todo $x \in [0, \infty)$. Logo, para a e b números reais não-negativos com $b \neq 0$, tem-se

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p} \cdot \frac{a}{b} \leq \frac{1}{q}.$$

Assim,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p} \cdot \frac{a}{b} \leq \frac{1}{q},$$

o que implica que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot b - \frac{1}{p} \cdot \frac{a}{b} \cdot b \leq \frac{1}{q} \cdot b,$$

donde

$$a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Portanto, temos a desigualdade

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \quad (1.1)$$

Agora, considere

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad \beta = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Fazendo

$$a = \left| \frac{x_i}{\alpha} \right|^p \quad \text{e} \quad b = \left| \frac{y_i}{\beta} \right|^q,$$

na desigualdade (1.1) temos, para cada índice i ,

$$\frac{|x_i y_i|}{\alpha \beta} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\alpha^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\beta^q}$$

Logo,

$$\frac{1}{\alpha \beta} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\alpha^p} \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\beta^q} \cdot \sum_{i=1}^n |y_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

e, consequentemente,

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \alpha \beta = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Proposição 1.2 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$. Então*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Fixado $n \in \mathbb{N}$, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1} \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos o resultado. $\square$

Proposição 1.3. $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado.

Demonstração. Mostremos as quatro condições da **Definição 1.5**.

(i) Não há o que mostrar.

(ii) Seja $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$. Se $\|x\|_p = 0$, então

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

e, conseqüentemente, $|x_i| = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, ou seja, $x = 0$.

(iii) Sejam $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha|^p |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|x\|_p.$$

(iv) Sejam $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, pela desigualdade de Minkowski, temos

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

$\square$

Por motivos de simplificação de notação, daqui em diante, quando tratarmos de um espaço vetorial normado $(U, \|\cdot\|)$, escreveremos apenas "espaço vetorial normado U " ou simplesmente U , sendo usada apenas a notação $(U, \|\cdot\|)$ quando a norma não estiver clara.

Proposição 1.4. *Seja $1 \leq p < \infty$. Então $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ é completo.*

Demonstração. Considere (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço ℓ^p . Denotando $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k, \dots)$, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m > n_0$, então

$$\|x_n - x_m\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_n^i - x_m^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon. \quad (1.2)$$

Note que, para todo $n, m > n_0$,

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_n^i - x_m^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon,$$

assim

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_n^i - x_m^i|^p < \epsilon^p,$$

por isso

$$|x_n^i - x_m^i|^p < \epsilon^p,$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Logo,

$$|x_n^i - x_m^i| < \epsilon, \text{ para cada } i \in \mathbb{N}.$$

e, sendo assim, para cada i fixado a sequência $(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i, \dots)$ é uma sequência de Cauchy no conjunto dos números reais. Como $\mathbb{R}$ é completo, existe $x^i \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = x^i.$$

Defina $x = (x^1, x^2, \dots, x^k, \dots)$. Mostremos que

$$x \in \ell^p \quad \text{e que} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

De fato, segue da desigualdade (1.2) que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^k |x_n^i - x_m^i|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_n^i - x_m^i|^p < \epsilon^p$$

sempre que $n, m > n_0$. Fazendo $m \rightarrow \infty$ obtemos

$$\sum_{i=1}^k |x_n^i - x^i|^p \leq \epsilon^p$$

sempre que $n > n_0$. Fazendo agora $k \rightarrow \infty$, obtemos

$$n > n_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |x_n^i - x^i|^p \leq \epsilon^p \quad (1.3)$$

Portanto $x - x_n \in \ell^p$. Como ℓ^p é um espaço vetorial e $x_n \in \ell^p$, concluímos que

$$x = (x - x_n) + x_n \in \ell^p.$$

Além disso, segue de (1.3) que

$$n > n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| \leq \epsilon,$$

isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

□

Proposição 1.5. $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço vetorial normado.

Demonstração. Mostremos as quatro condições da **Definição 1.5**.

- (i) Não há o que mostrar.
- (ii) Seja $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$, tal que $\|x\|_\infty = 0$. Neste caso,

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| = 0$$

e, portanto, $0 \leq |x_i| \leq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, ou seja, $x = 0$.

- (iii) Sejam $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$\|\alpha x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\alpha x_i| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\alpha| |x_i| = |\alpha| \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| = |\alpha| \|x\|_\infty.$$

(iv) Sejam $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Da desigualdade triangular do módulo, bem como das propriedades do supremo, temos

$$\|x + y\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} (|x_i| + |y_i|) \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| + \sup_{i \in \mathbb{N}} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

□

Proposição 1.6. $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ é completo.

Demonstração. Considere (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço ℓ^∞ . Fazendo $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k, \dots)$, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n, m > n_0$, então

$$\|x_n - x_m\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_n^i - x_m^i| < \epsilon.$$

Note que, para quaisquer $i, m, n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n^i - x_m^i| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_n^i - x_m^i|.$$

Logo, se $m, n > n_0$, então

$$|x_n^i - x_m^i| < \epsilon, \quad (1.4)$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Logo para cada i fixado a sequência $(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i, \dots)$ é uma sequência de Cauchy no conjunto dos números reais. Como $\mathbb{R}$ é completo, existe $x^i \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = x^i.$$

Defina $x = (x^1, x^2, \dots, x^k, \dots)$. Mostremos que $x \in \ell^\infty$ e que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (1.4) concluímos que

$$|x_n^i - x^i| \leq \epsilon,$$

sempre que $n > n_0$. Agora, tomando o supremo, teremos

$$\|x - x_n\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_n^i - x^i| < \epsilon \quad (1.5)$$

Portanto $x - x_n \in \ell^\infty$. Como ℓ^∞ é um espaço vetorial e $x_n \in \ell^\infty$, inferimos que

$$x = (x - x_n) + x_n \in \ell^\infty.$$

Além disso, segue de (1.5) que, se $n > n_0$, então

$$\|x_n - x\|_\infty \leq \epsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

□

1.2 Aplicações Lineares

Definição 1.7. *Sejam (A, d_A) e (B, d_B) espaços métricos. Uma função $f : A \rightarrow B$ é contínua em $x_0 \in A$ se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que*

$$x \in A \text{ e } d_A(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_B(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

A função f será chamada de contínua se for contínua em todos os pontos de A .

Exemplo 1.9. *Sejam U e V espaços vetoriais normados. Uma função $f : U \rightarrow V$ é chamada de lipschitziana se existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$\|f(u) - f(v)\| \leq K\|u - v\|$$

para todo $u, v \in U$. O fato de f ser lipschitziana é condição suficiente para garantir a continuidade. De fato, dados $u_0 \in U$ e $\epsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\epsilon}{K}$. Logo, para todo $u \in U$ tal que $\|u - u_0\| < \frac{\epsilon}{K}$, temos

$$\|f(u) - f(u_0)\| \leq K\|u - u_0\| < K \cdot \frac{\epsilon}{K} = \epsilon.$$

Por outro lado, nem toda função contínua é lipschitziana. Dado $K > 0$, podemos encontrar $x, y \in (0, +\infty)$ tal que

$$\frac{1}{xy} > K,$$

daí

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{y - x}{xy} \right| = \frac{|x - y|}{xy} > K|x - y|.$$

Portanto, a função contínua $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ não é lipschitziana.

Definição 1.8. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dizemos que uma função $T : U \rightarrow V$ é uma transformação linear, ou aplicação linear, se, para quaisquer $u, v \in U$ e $a \in \mathbb{F}$, vale*

$$T(u + av) = T(u) + aT(v).$$

Se $V = \mathbb{F}$, T é chamado de funcional linear.

Exemplo 1.10. *Sejam U e V espaços vetoriais. A aplicação $T : U \rightarrow V$, definida por $T(u) = 0$, para todo $u \in U$, é uma transformação linear. Dizemos que T é a transformação linear nula, ou que T se anula em U .*

Exemplo 1.11. *Seja U um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Fixado $u \in U$, seja $W = \mathbb{F}u = \{tu : t \in \mathbb{F}\}$. Defina $f_0 : W \rightarrow \mathbb{F}$, por $f_0(au) = a\|u\|$, para todo $a \in \mathbb{F}$. f_0 é um funcional linear. De fato, note que, dado $v = au$ e $w = bu \in W$ e $t \in \mathbb{F}$,*

$$f_0(au + tbu) = f_0((a + tb)u) = (a + tb)\|u\| = a\|u\| + tb\|u\| = f_0(au) + tf_0(bu),$$

ou seja, $f_0(v + tw) = f_0(v) + tf_0(w)$.

Definição 1.9. Sejam A e B conjuntos, C um subconjunto de A , e $F : A \rightarrow B$ e $f : C \rightarrow B$ funções. Dizemos que F é uma extensão de f ao conjunto A , ou ainda, que f é uma restrição de F ao conjunto C se $f(x) = F(x)$ para todo $x \in C$. Denotamos

$$F|_C = f.$$

Observação 1.2. Na definição acima, quando as funções são transformações lineares, também chamamos F de extensão linear de f .

Exemplo 1.12. Sejam W um subespaço vetorial real de um espaço vetorial U , $u_0 \notin W$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear. Então $F : W + \mathbb{R}u_0 \rightarrow \mathbb{R}$, onde $W + \mathbb{R}u_0 = \{w + \beta u_0 \in U; w \in W \text{ e } \beta \in \mathbb{R}\}$, definido por

$$F(w + \beta u_0) = f(w) + \beta \alpha$$

para todo $\beta \in \mathbb{R}$, é uma extensão linear de f . De fato, Sejam $a \in \mathbb{R}$, e $w_1 + \beta_1 u_0, w_2 + \beta_2 u_0 \in W + \mathbb{R}u_0$. Note que

$$\begin{aligned} F(w_1 + \beta_1 u_0 + a(w_2 + \beta_2 u_0)) &= F(w_1 + \beta_1 u_0 + aw_2 + a\beta_2 u_0) \\ &= F(w_1 + aw_2 + (\beta_1 + a\beta_2)u_0) \\ &= f(w_1 + aw_2) + (\beta_1 + a\beta_2)\alpha \\ &= f(w_1) + af(w_2) + \beta_1\alpha + a\beta_2\alpha \\ &= (f(w_1) + \beta_1\alpha) + a(f(w_2) + \beta_2\alpha) \\ &= F(w_1 + \beta_1 u_0) + aF(w_2 + \beta_2 u_0). \end{aligned}$$

Isso prova que F é linear. Além disso, para todo $w \in W$,

$$F(w) = F(w + 0 \cdot u_0) = f(w) + 0 \cdot \alpha = f(w),$$

isto é, F é uma extensão linear de f ao espaço $W + \mathbb{R}u_0$.

Definição 1.10. Sejam $(U, \|\cdot\|_U)$ e $(V, \|\cdot\|_V)$ espaços vetoriais normados. Uma aplicação linear $T : U \rightarrow V$ é dita limitada se existe $K > 0$ tal que

$$\|T(u)\|_V \leq K\|u\|_U$$

para todo $u \in U$.

Observação 1.3. Em geral, serão omitidos os subscritos quando for claro qual norma é de qual espaço vetorial.

Teorema 1.1. Sejam U e V espaços vetoriais normados e $T : U \rightarrow V$ uma aplicação linear. São equivalentes as seguintes afirmações:

i) T é contínua.

ii) T é contínua em algum ponto.

iii) T é contínua na origem

iv) T é limitada.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Não há o que provar.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Suponhamos que T seja contínua em $u_0 \in U$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(u) - T(u_0)\| < \epsilon \text{ sempre que } \|u - u_0\| < \delta.$$

Seja $u \in U$ tal que $\|u\| < \delta$. Neste caso,

$$\|(u + u) - u_0\| = \|u\| < \delta$$

e, conseqüentemente,

$$\|T(u)\| = \|T(u + u) - T(u_0)\| < \epsilon$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Como T é contínua na origem, para $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que $\|u\| \leq \delta \Rightarrow \|T(u)\| \leq 1$. Daí, para todo $v \in U$,

$$\left\| T\left(\frac{\delta v}{\|v\|}\right) \right\| \leq 1$$

o que implica que

$$\|T(v)\| \leq \frac{1}{\delta} \|v\|$$

para todo $v \in U$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Se T é limitada, então existe $K > 0$ tal que $\|T(u)\| \leq K\|u\|$. Logo, para todos $u, v \in U$,

$$\|T(u) - T(v)\| = \|T(u - v)\| \leq K\|u - v\|,$$

ou seja, T lipschitziana e, portanto, é contínua. $\square$

Proposição 1.7. *Toda transformação linear definida em um espaço de dimensão finita é contínua.*

Demonstração. Sejam U e V espaços vetoriais normados, onde U tem dimensão finita, e $T : U \rightarrow V$ uma aplicação linear. Como U tem dimensão finita, todas as normas em U são equivalentes, deste modo, basta provarmos a proposição para

apenas uma norma. Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base de Hamel para U . Desta forma, para cada $u \in U$, existem $a_1, a_2, \dots, a_n$, escalares, tais que

$$u = \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

Considere a seguinte norma em U :

$$\|u\| = \max_i |a_i|,$$

Daí, tomando $K = \sum_{i=1}^n \|T(e_i)\|$, tem-se

$$\|T(u)\| = \left\| T \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i T(e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \|T(e_i)\|,$$

que implica em

$$\|T(u)\| \leq \sum_{i=1}^n \|u\| \|T(e_i)\| = \|u\| \sum_{i=1}^n \|T(e_i)\| = K \|u\|.$$

□

Notação 1.2. *Sejam U e V espaços vetoriais normados. Denotaremos por $\mathcal{L}(U, V)$ o espaço das aplicações lineares limitadas $T : U \rightarrow V$.*

Definição 1.11. *Defina a função $\|\cdot\| : \mathcal{L}(U, V) \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$\|T\| = \inf\{K \in \mathbb{R} : \|T(u)\| \leq K \|u\|, \text{ para todo } u \in U\}.$$

Logo após a próxima proposição, iremos mostrar que essa é a norma do espaço $\mathcal{L}(U, V)$.

Proposição 1.8. *$\mathcal{L}(U, V)$ é um espaço vetorial.*

Demonstração. Dados $T, S \in \mathcal{L}(U, V)$ e α um escalar, temos

$$\|(T + \alpha S)(u)\| = \|T(u) + \alpha S(u)\| \leq \|T(u)\| + |\alpha| \|S(u)\| \leq \|T\| \|u\| + |\alpha| \|S\| \|u\|,$$

logo

$$\|(T + \alpha S)(u)\| \leq (\|T\| + |\alpha| \|S\|) \|u\|.$$

□

Proposição 1.9. *A função $\|\cdot\| : \mathcal{L}(U, V) \rightarrow \mathbb{R}$ da **Definição 1.11** é uma norma sobre o espaço $\mathcal{L}(U, V)$.*

Demonstração. Mostremos que (i), (ii), (iii) e (iv) da **Definição 1.5** valem.

(i) Observe que, se $K \in \mathbb{R}$ é tal que $\|T(u)\| \leq K\|u\|$ para todo $u \in U$, então, fixado $u \neq 0$, concluímos que

$$K \geq \frac{\|T(u)\|}{\|u\|} \geq 0.$$

Portanto

$$\|T\| = \inf_{u \in U} \{K \in \mathbb{R} : \|T(u)\| \leq K\|u\|\} \geq 0.$$

(ii) Observemos que o conjunto

$$A = \{K \in \mathbb{R} : \|T(u)\| \leq K\|u\|, \text{ para todo } u \in U\}$$

é fechado quando T é limitado. De fato, seja k_0 no fecho deste conjunto. Seja (k_n) uma sequência em A que converge para k_0 . Fixado $u \in U$, temos

$$\|T(u)\| \leq k_n\|u\| \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad (1.6)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (1.6), concluímos que

$$\|T(u)\| \leq k_0\|u\|$$

a arbitrariedade de u segue então que

$$\|T(u)\| \leq k_0\|u\| \text{ para todo } u \in U,$$

ou seja, $k_0 \in A$. Isso prova a afirmação feita a respeito do conjunto A . Segue daqui que, em particular, $\|T\| \in A$, ou seja

$$\|T\| = \min A = \inf A = 0.$$

Nessas condições é imediato que $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$.

(iii) Sejam $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} \|\alpha T\| &= \inf_{u \in U} \{K \in \mathbb{R} : \|\alpha T(u)\| \leq K\|u\|\} \\ &= \inf_{u \in U} \left\{ K \in \mathbb{R} : \|T(u)\| \leq \frac{K}{|\alpha|}\|u\| \right\} \\ &= \inf_{u \in U} \{|\alpha|K \in \mathbb{R} : \|T(u)\| \leq K\|u\|\} \\ &= |\alpha| \inf_{u \in U} \{K \in \mathbb{R} : \|T(u)\| \leq K\|u\|\} = |\alpha|\|T\| \end{aligned}$$

(iv) Sejam $T, S \in \mathcal{L}(U, V)$. Temos

$$\begin{aligned}
\|T + S\| &= \inf_{u \in U} \{K \in \mathbb{R} : \|(T + S)(u)\| \leq K\|u\|\} \\
&= \inf_{u \in U} \{K \in \mathbb{R} : \|T(u) + S(u)\| \leq K\|u\|\} \\
&\leq \inf_{u \in U} \{K \in \mathbb{R} : \|T(u)\| + \|S(u)\| \leq K\|u\|\} \\
&\leq \inf_{u \in U} \{K \in \mathbb{R} : \|T(u)\| \leq K\|u\|\} \\
&\quad + \inf_{u \in U} \{K \in \mathbb{R} : \|S(u)\| \leq K\|u\|\} \\
&= \|T\| + \|S\|.
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.10. *Sejam U e V espaços vetoriais normados e $T : U \rightarrow V$ uma aplicação linear contínua. Então*

$$\|T\| = \sup_{u \in U \setminus \{0\}} \frac{\|T(u)\|}{\|u\|} = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\|=1}} \|T(u)\|$$

Demonstração. Seja $L = \sup_{u \in U \setminus \{0\}} \frac{\|T(u)\|}{\|u\|}$. Logo

$$\frac{\|T(u)\|}{\|u\|} \leq L \text{ para todo } u \in U \setminus \{0\},$$

isto é,

$$\|T(u)\| \leq L\|u\| \text{ para todo } u \in U \setminus \{0\}.$$

Como esta desigualdade é trivialmente verificada para $u = 0$,

$$\|T(u)\| \leq L\|u\| \text{ para todo } u \in U.$$

Portanto,

$$L \geq \inf\{K \in \mathbb{R} : \|T(u)\| \leq K\|u\| \text{ para todo } u \in U\} = \|T\|.$$

Por outro lado, note que, pela definição da norma, $\|T(u)\| \leq \|T\|\|u\|$ e, portanto, se $u \in U \setminus \{0\}$, então

$$\frac{\|T(u)\|}{\|u\|} \leq \|T\|$$

o que implica que

$$\sup_{u \in U \setminus \{0\}} \frac{\|T(u)\|}{\|u\|} \leq \|T\|.$$

Para a segunda identidade, note que

$$\sup_{u \in U \setminus \{0\}} \frac{\|T(u)\|}{\|u\|} = \sup_{u \in U \setminus \{0\}} \left\| T \left(\frac{u}{\|u\|} \right) \right\| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\|=1}} \|T(u)\|$$

□

Definição 1.12. *Seja U um espaço vetorial normado. Denotamos por U^* o espaço dos funcionais lineares contínuos definidos em U , ou seja, $U^* = \mathcal{L}(U, \mathbb{F})$. U^* é chamado de espaço dual de U .*

Proposição 1.11. *Sejam U um espaço vetorial normado e V um espaço de Banach. Então $\mathcal{L}(U, V)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja (T_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(U, V)$. Mostremos que (T_n) converge para alguma aplicação linear em $\mathcal{L}(U, V)$. Como (T_n) é de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $m, n > n_0$, então

$$\|T_m - T_n\| < \epsilon.$$

Note que, para cada $u \in U$, $(T_n(u))$ também é de Cauchy, pois

$$m, n > n_0 \Rightarrow \|T_m(u) - T_n(u)\| = \|(T_m - T_n)(u)\| \leq \|T_m - T_n\| \|u\| < \epsilon \|u\|.$$

Logo, como V é um espaço de Banach, $(T_n(u))$ é convergente. Para cada $u \in U$, defina $T : U \rightarrow V$ por

$$T(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(u).$$

Mostremos que $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$. Primeiramente, note que, dados $u, v \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(\alpha u + v) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha u + v) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha T_n(u) + T_n(v)] \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(u) + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(v) = \alpha T(u) + T(v) \end{aligned}$$

Isso prova a linearidade de T . Além disso, sabemos que, se $m, n > n_0$, então

$$\|T_m(u) - T_n(u)\| < \epsilon \|u\|.$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ temos que, se $n > n_0$, então

$$\|(T - T_n)(u)\| \leq \epsilon \|u\|.$$

Daí $T - T_n \in \mathcal{L}(U, V)$, logo $T = (T - T_n) + T_n \in \mathcal{L}(U, V)$ e

$$n > n_0 \Rightarrow \|T - T_n\| \leq \epsilon.$$

Consequentemente $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(U, V)$.

□

A recíproca desse resultado é verdadeira e veremos sua demonstração mais a frente como uma consequência do Teorema de Hahn-Banach.

Corolário 1.2. *Seja U um espaço vetorial normado. Então U^* é um espaço de Banach.*

Demonstração. O resultado segue da **Proposição 1.11** e do fato de que $\mathbb{R}$ é um espaço de Banach. $\square$

1.3 O Lema de Zorn

Nesta seção, falaremos sobre o Lema de Zorn. Este resultado será de grande importância na demonstração do **Teorema 2.1**, que é o Teorema de Hahn-Banach para os espaços vetoriais sobre o corpo dos reais.

Definição 1.13. *Seja C um conjunto qualquer e R uma relação de C em C . Dizemos que R é uma relação de ordem se R obedece as seguintes propriedades:*

- i) aRa , para todo $a \in C$; (reflexividade)*
- ii) Se aRb e bRa , então $a = b$, para todo $a, b \in C$; (anti-simetria)*
- iii) Se aRb e bRc , então aRc , para todo $a, b, c \in C$. (transitividade)*

O par (C, R) é chamado de conjunto parcialmente ordenado.

Definição 1.14. *Seja (C, R) um conjunto parcialmente ordenado. Se para todo a e $b \in C$, tenhamos que aRb ou bRa , então (C, R) é chamado de conjunto totalmente ordenado.*

Exemplo 1.13. *O par $(\mathbb{R}, \leq)$, onde $\leq$ é a desigualdade usual, é um conjunto totalmente ordenado.*

Observação 1.4. *As relações de ordem, serão denotadas livremente por $\leq$ em vez de R como na **Definição 1.13**.*

Exemplo 1.14. *Sejam U um espaço vetorial e $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de funcionais lineares $g_\lambda : D(g_\lambda) \rightarrow \mathbb{R}$, onde, para cada $\lambda \in \Lambda$, $D(g_\lambda)$ é subespaço de U . Considere a relação $\leq$ definida por*

$$g_\lambda \leq g_\gamma \Leftrightarrow D(g_\lambda) \subset D(g_\gamma) \text{ e } g_\lambda(u) = g_\gamma(u),$$

para todo $u \in D(g_\lambda)$, isto é, $g_\lambda \leq g_\gamma$ se, e somente se, g_γ for uma extensão de g_λ . A relação definida é uma relação de ordem sobre $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. De fato, mostremos as três propriedades:

(i) A primeira propriedade segue direto do fato de que todo conjunto está contido nele mesmo e da reflexividade da ordem usual em $\mathbb{R}$.

(ii) Para mostrar a segunda propriedade, note que, se $g_\lambda \leq g_\gamma$ e $g_\gamma \leq g_\lambda$, então, pela definição da igualdade de conjuntos e pela anti-simetria da ordem em $\mathbb{R}$, temos $D(g_\lambda) = D(g_\gamma)$ e $g_\lambda(u) = g_\gamma(u)$, para todo $u \in D(g_\lambda) = D(g_\gamma)$. Portanto $g_\lambda = g_\gamma$.

(iii) Suponha agora que $g_\lambda \leq g_\xi$ e $g_\xi \leq g_\gamma$. Logo, $D(g_\lambda) \subset D(g_\xi) \subset D(g_\gamma)$ e $g_\lambda(u) \leq g_\xi(u) \leq g_\gamma(u)$, para todo $u \in D(g_\lambda)$. Portanto $g_\lambda \leq g_\gamma$. Isto prova a terceira propriedade.

Definição 1.15. Sejam $(C, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e S um subconjunto de C . Um elemento $x \in C$ é chamado de cota superior (inferior) de S , se $t \leq x$ ($x \leq t$), para todo $t \in S$.

Definição 1.16. Seja $(C, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Um elemento $M \in C$ é dito elemento maximal (minimal) de C se, para todo $x \in C$, com $M \leq x$ ($M \geq x$), tenhamos $M = x$.

Lema de Zorn: Se $(C, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado no qual todo subconjunto totalmente ordenado possui uma cota superior, então $(C, \leq)$ possui um elemento maximal.

Agora, estamos prontos para enunciar um dos mais importantes resultados deste trabalho. Para mais detalhes veja [21].

Capítulo 2

O Teorema de Hahn-Banach

Neste capítulo, serão desenvolvidos as formas clássicas do Teorema de Hahn-Banach, chamadas de formas analítica e forma geométrica, além do Teorema do Mazur-Orlicz, que é um teorema equivalente ao Teorema de Hahn-Banach. Veremos também uma maneira alternativa de demonstrar a forma analítica do teorema de Hahn-Banach, através da noção de que todo funcional linear é um elemento minimal da classe dos funcionais sublineares. Antes disso, na seção a seguir, veremos um pouco da biografia dos matemáticos Eduard Helly, Hans Hahn e Stefan Banach.

2.1 Biografias

2.1.1 Eduard Helly



Figura 2.1: Eduard Helly

Eduard Helly nasceu em 1884 em Viena e obteve seu doutorado em 1907 na Universidade de Viena. Em 1914, Helly começou a servir no exercito austriaco e

foi a combate em 1915 contra a Rússia, combate este em que Helly foi ferido nos pulmões.

Helly passou mais de quatro anos como prisioneiro de guerra em um campo perto de Tobolsk, na Sibéria, junto com um estudante universitário húngaro, cujo nome era Tibor Rado (1895 - 1965), Rado estudava engenharia civil. Durante a prisão, Helly ensinou matemática para Rado, o que o fez mudar de área, e após escapar da prisão dedicou-se a pesquisar matemática e teve sua relevância na área. Um dos seus trabalhos mais famosos é a solução para o problema de Plateu sobre contornos delimitadores para superfícies mínimas [8]. A Primeira Guerra Mundial chegou ao fim, mas o conflito continuou na Rússia, onde as forças brancas enfrentaram os exercitos vermelhos. O Japão, os Estados Unidos, a Inglaterra e alguns outros países, visando ganhar algum território, também entraram no conflito.

Nesse tempo, Helly consegue escapar da Sibéria, passando pelo Japão, Oriente Médio e Egito até chegar em Viena em novembro de 1920. Para ensinar na Áustria, Helly precisou escrever uma trabalho de pós-doutorado, que lhe daria uma habilitação para orientar alunos do doutorado. Assim como uma tese do doutorado, ela é revisada e defendida por um comitê acadêmico. Ele apresentou sua tese com sucesso, conseguindo sua habilitação, mas isso ainda não trazia uma remuneração. Por isso Helly se candidatou a uma cadeira de professor titular na Universidade de Viena, porem ele não obteve exito devido ao preconceito, por ele ser judeu, e a ferrenha oposição de Hahn. A Dra. Elise Bloc, esposa de Helly, também matemática, acreditava que a oposição de Hahn se dava porque Helly já possuia 37 anos. Sem um salário para se sustentar, Helly precisou dividir seu tempo dedicados a pesquisa e aos seus orientandos com um emprego em um banco. Em 1929, o banco faliu e Helly foi obrigado procurar outro emprego no departamento atuarial de uma companhia de seguros, onde também trabalhavam os matemáticos Eugene Lukacs e Z. W. Birnbaum.

Em 12 de março de 1938, a Alemanha se une com a Áustria e se inicia a perseguição aos judeus. Em Maio de 1938, os nazistas promulgaram as leis raciais de Nuremberg, que proibiu Helly de frequentar a universidade provocando sua demissão da companhia de seguros. Nessa epoca, os judeus escapavam, que era pagando uma taxa de emigração. Assim, Helly, ainda em 1938, conseguiu passagem para os Estados Unidos para ele, sua esposa e seu filho, Walter Sigmund, de apenas oito anos. Por causa do grande número de emigrantes qualificados, Helly não conseguiu um cargo universitário, mesmo tendo cartas de recomendação de grandes nomes como Einstein, por exemplo. Helly se sustentou dando aulas no ensino médio e em algumas faculdades.

Em 1943, Helly finalmente conseguiu um cargo de professor visitante no Illinois Institute of Technology, em Chicago. Em 28 de novembro de 1943 Helly veio a falecer devido a um ataque cardíaco causado pelo ferimento no pulmão na Primeira Guerra Mundial. Mesmo após sua morte, o teorema que é motivo de estudo deste trabalho não ganhou seu nome.

2.1.2 Hans Hahn



Figura 2.2: Hans Hahn

Filho de Ludwig Benedikt Hahn e Emma Blümel, Hans Hahn nasceu em 27 de setembro de 1879 em Vienna, na Áustria. Hahn foi um matemático e filósofo austríaco que fez contribuições para a análise funcional, topologia, teoria dos conjuntos, cálculo de variações, análise real e teoria da ordem. Na filosofia, ele estava entre os principais positivistas lógicos do Círculo de Viena.

Em 1898, Hahn tornou-se estudante na Universität Wien, onde começou seus estudos em direito. Em 1899, ele mudou para a matemática e passou algum tempo nas universidades de Estrasburgo, Munique e Göttingen. Doutorou-se na Universidade de Viena, sob orientação de Gustav Ritter Von Escherich em 1902 com a tese “Zur Theorie der Zweiten Variation Einfacher Integrale”. Enquanto morou em Viena, ele formou uma estreita amizade com três outros estudantes de matemática, Paul Ehrenfest, Heinrich Tietze e Herglotz. Eles eram conhecidos como os ‘quatro inseparáveis’.

Em 1905, Hahn foi nomeado docente em Viena. Posteriormente, no período de 1909-1914, lecionou em Czernowitz na Áustria - Hungria como professor extraordinário. Czernowitz foi rebatizado como Cernauti quando se tornou parte da Roménia após a Primeira Guerra Mundial, e como Chernovtsy depois que se tornou parte da URSS em 1940. Hahn serviu no exército Austro-Húngaro na Primeira

Guerra Mundial e foi gravemente ferido. Em 1916 mudou-se para Bonn, onde foi nomeado como professor extraordinário até 1920. Ele retornou a uma cadeira em Viena, em 1921. Seus três alunos mais famosos em Viena foram Karl Menger em 1924, Witold Hurewicz em 1926, e Kurt Gödel em 1929.

Os primeiros resultados de Hahn foram contribuições para o clássico Cálculo das Variações, os espaços abstratos de Fréchet e muitas outras teorias. No entanto, para muitos matemáticos ele é mais lembrado pelo Teorema de Hahn-Banach. Hahn faleceu em 24 de julho de 1934, aos 54 anos em Viena na Áustria.

2.1.3 Stefan Banach



Figura 2.3: Stefan Banach

Stefan Banach nasceu em 30 de março de 1892 em Cracóvia, Império Austríaco, atual Polônia. Filho de Stefan Greczek, Banach não carrega o sobrenome de seu pai, apenas recebeu o primeiro nome. Stefan Greczek era um fiscal que não era casado com a mãe de Banach, que desapareceu de cena depois que Stefan foi batizado, quando ele tinha apenas quatro dias de idade, e nada mais se sabe sobre ela. O nome dado como mãe de Stefan em sua certidão de nascimento é Katarzyna Banach. Ela é considerada por alguns como serva da mãe de Stefan, enquanto outros afirmam que ela era uma lavadeira que cuidou de Stefan quando ele era muito jovem. Mais tarde, Banach tentou descobrir quem era sua mãe, mas seu pai se recusou a dizer qualquer coisa, exceto que ele havia jurado manter segredo sobre sua identidade.

Banach frequentou a escola primária em Cracóvia, deixando a escola em 1902 para iniciar o ensino secundário no Ginásio Henryk Sienkiewicz nº 4 em Cracóvia. Por uma feliz coincidência, um dos alunos da classe de Banach era Witold Wilkosz, que se tornou professor de matemática. A escola não parece ter sido particularmente

boa e em 1906 Wilkosz partiu para se mudar para um ginásio melhor. Banach, no entanto, permaneceu no Henryk Sienkiewicz Gymnasium nº 4, embora tenha mantido contato com Wilkosz.

Banach deixou Cracóvia e foi para Lemberg, agora Lviv na Ucrânia, onde se matriculou na Faculdade de Engenharia da Universidade Técnica de Lemberg. É quase certo que Banach, sem nenhum apoio financeiro, teve que se sustentar com aulas particulares. Isso deve ter ocupado muito do seu tempo e, quando se formou em 1914, levou mais tempo para concluir o curso do que o normal. Ele havia retornado a Cracóvia com frequência durante o período de seus estudos em Lemberg de 1910 a 1914. Não está totalmente claro quais eram os planos de Banach em 1914, mas a eclosão da Primeira Guerra Mundial em agosto, logo após sua formatura, viu Banach deixar Lemberg.

Lemberg estava, na época em que Banach estudou lá, sob controle austríaco, como tinha sido desde a divisão da Polônia em 1772. Na juventude de Banach, a Polônia, em certo sentido, não existia e a Rússia controlava grande parte do país. Varsóvia tinha apenas uma universidade de língua russa e estava situada na chamada "Terra do Vístula". Com a eclosão da Primeira Guerra Mundial, as tropas russas ocuparam a cidade de Lemberg. Banach não estava fisicamente apto para o serviço militar, tendo problemas de visão no olho esquerdo. Durante a guerra trabalhou na construção de estradas, mas também passou algum tempo em Cracóvia, onde ganhou dinheiro ensinando nas escolas locais.

Um evento casual ocorreu na primavera de 1916 que teria um grande impacto na vida de Banach. Steinhaus, que estava prestando serviço militar, estava prestes a assumir um cargo na Universidade Jan Kazimierz em Lemberg. No entanto, ele estava morando em Cracóvia na primavera de 1916, esperando para assumir o cargo. Steinhaus contou a Banach sobre um problema no qual estava trabalhando sem sucesso. Depois de alguns dias, Banach teve a ideia principal para o contra exemplo necessário e Steinhaus e Banach escreveram um artigo conjunto, que apresentaram a Zaremba para publicação. A guerra atrasou a publicação, mas o artigo, o primeiro de Banach, apareceu no Boletim da Academia de Cracóvia em 1918. A partir do momento em que produziu esses primeiros resultados com Steinhaus, Banach começou a produzir trabalhos matemáticos importantes em ritmo acelerado. Foi também através de Steinhaus que Banach conheceu sua futura esposa Lucja Braus. Eles se casaram no resort de montanha de Zakopane em 1920.

Banach recebeu uma oferta de assistente de Lomnicki na Universidade Técnica de Lwów (no que hoje é Lviv na Ucrânia) em 1920. Ele lecionou matemática lá e apresentou a tese de doutorado sob a supervisão de Lomnicki. Obviamente, esse

não era o caminho padrão para o doutorado, pois Banach não tinha qualificações universitárias em matemática. No entanto, uma exceção foi feita para permitir que ele submetesse “On Operations on Abstract Sets and their Application to Integral Equations”.

Em 1924, Banach foi promovido a professor titular e passou o ano letivo de 1924-25 em Paris. Os anos entre as guerras foram extremamente ocupados para Banach. Além de continuar a produzir uma série de artigos importantes, ele escreveu textos de aritmética, geometria e álgebra para o ensino médio. Ele também estava muito envolvido com a publicação de matemática. Em 1929, junto com Steinhaus, ele começou uma nova revista *Studia Mathematica* e Banach e Steinhaus se tornaram os primeiros editores.

Outro empreendimento editorial importante, iniciado em 1931, foi uma nova série de Monografias Matemáticas. Estes foram criados sob a direção de Banach e Steinhaus de Lwów e Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz e Sierpiński de Varsóvia. O primeiro volume da série *Théorie des Opérations linéaires* foi escrito por Banach e apareceu em 1932. Era uma versão francesa de um volume que ele publicou originalmente em polonês em 1931 e rapidamente se tornou um clássico. Em 1936, Banach fez um discurso em plenário no Congresso Internacional de Matemáticos em Oslo. Neste discurso, ele descreveu o trabalho de toda a escola de Lwów, e também falou dos planos que eles tinham para desenvolver suas ideias.

Outra influência importante sobre Banach foi o fato de que Kuratowski foi nomeado para a Universidade Técnica de Lwów em 1927 e trabalhou lá até 1934. Banach colaborou com Kuratowski e eles escreveram alguns trabalhos conjuntos durante este período.

Em 1939, pouco antes do início da Segunda Guerra Mundial, Banach foi eleito presidente da Sociedade Matemática Polonesa. No início da guerra, as tropas soviéticas ocuparam Lwów. Banach tinha boas relações com os matemáticos soviéticos antes do início da guerra, visitando Moscou várias vezes, e foi bem tratado pela nova administração soviética. Ele foi autorizado a continuar a ocupar sua cadeira na universidade e tornou-se o reitor da Faculdade de Ciências da universidade, agora renomeada Universidade Ivan Franko. A vida nesta fase pouco mudou para Banach, que continuou sua pesquisa, a redação de livros didáticos, palestras e sessões nos cafés. Sobolev e Aleksandrov visitaram Banach em Lwów em 1940, enquanto Banach participou de conferências na União Soviética. Ele estava em Kiev quando a Alemanha invadiu a União Soviética e voltou imediatamente para sua família em Lwów.

A ocupação nazista de Lwów em junho de 1941 fez com que Banach vivesse em

condições muito difíceis. Ele foi preso sob suspeita de tráfico de moeda alemã, mas liberado após algumas semanas. Ele sobreviveu a um período em que acadêmicos poloneses foram assassinados, seu orientador de doutorado Lomnicki morreu na trágica noite de 3 de julho de 1941, quando ocorreram muitos massacres. No final de 1941, Banach trabalhava alimentando piolhos em um instituto alemão que lidava com doenças infecciosas. Alimentar piolhos seria sua vida durante o restante da ocupação nazista de Lwów até julho de 1944. Banach planejava ir para Cracóvia depois da guerra para assumir a cadeira de matemática na Universidade Jaguelônica, mas morreu em Lwów em 1945 de câncer de pulmão.

2.2 O Teorema de Hahn-Banach

Definição 2.1. *Seja U um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$. Uma função $p : U \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada funcional sublinear se ela possui as seguintes propriedades:*

- i) $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$, para todo $u, v \in U$;*
- ii) $p(\alpha u) = \alpha p(u)$, para todo $u \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.2. *Seja U um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$. Uma função $p : U \rightarrow [0, +\infty)$ é chamada seminorma se ela possui as seguintes propriedades:*

- i) $p(u + v) \leq p(u) + p(v)$, para todo $u, v \in U$;*
- ii) $p(\alpha u) = |\alpha|p(u)$, para todo $u \in U$ e $\alpha \in \mathbb{F}$.*

No lema à seguir, será demonstrado a extensão de um funcional linear em uma dimensão, mostrado por Helly, em 1912, apenas para $C[a, b]$, o espaço das funções contínuas definidas no intervalo $[a, b]$. Graças a ele, a técnica foi desenvolvida e se tornou crucial para o sucesso dos trabalhos de Hahn e Banach.

Lema 2.1. *Sejam W um subespaço vetorial de um espaço vetorial real U , $u_0 \notin W$, p um funcional sublinear definido em U e $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $f(u) \leq p(u)$, para todo $u \in W$. Então existe um funcional linear F definido em $W + \mathbb{R}u_0$, que estende f , tal que $F(u) \leq p(u)$, para todo $u \in W + \mathbb{R}u_0$.*

Demonstração. Note que, como $f(u) \leq p(u)$, para todo $u \in W$, quaisquer que sejam $u, v \in W$ temos

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) &= f(u - v) \leq p(u + u_0 - u_0 - v) \\ &\leq p(u + u_0) + p(-u_0 - v) \end{aligned}$$

o que implica que

$$-p(-u_0 - v) - f(v) \leq p(u_0 + u) - f(u)$$

e, desta forma,

$$\sup_{v \in W} [-p(-u_0 - v) - f(v)] \leq \inf_{u \in W} [p(u_0 + u) - f(u)]$$

Portanto existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$-p(-u_0 - v) - f(v) \leq \alpha \leq p(u_0 + u) - f(u), \quad (2.1)$$

para todo $u \in W$.

Seja $F : W + \mathbb{R}u_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(u + \beta u_0) = f(u) + \beta \alpha,$$

para todo $\beta \in \mathbb{R}$. Pelo **Exemplo 1.12**, F é uma extensão linear de f . Mostremos que $F(z) \leq p(z)$ para todo $z \in W + \mathbb{R}u_0$. Se $\beta = 0$, não há o que provar. Se $\beta > 0$, substituindo u por u/β no membro direito da desigualdade (2.1), obtemos

$$\alpha \leq p(u_0 + u/\beta) - f(u/\beta). \quad (2.2)$$

Daí, como p é sublinear e f é linear, somando $f(u/\beta)$ e, em seguida, multiplicando por β ambos os membros da desigualdade (2.2) obtemos

$$F(u + \beta u_0) = f(u) + \beta \alpha \leq p(u + \beta u_0).$$

Se, por outro lado, $\beta < 0$, substituindo v por v/β no membro esquerdo da desigualdade (2.1), temos

$$-p(-u_0 - v/\beta) - f(v/\beta) \leq \alpha. \quad (2.3)$$

Somando $f(v/\beta)$ e, em seguida, multiplicando por β ambos os membros da inequação (2.3) obtemos

$$F(v + \beta u_0) = f(v) + \beta \alpha \leq p(v + \beta u_0).$$

□

O Teorema de Hahn-Banach na sua forma analítica foi dividido em dois casos. No primeiro, consideramos funcionais lineares definidos sobre espaços vetoriais reais e, no segundo, funcionais definidos sobre espaços vetoriais complexos.

Teorema 2.1 (Teorema de Hahn-Banach forma analítica (Real)). *Sejam W um subespaço vetorial de um espaço vetorial real U , p um funcional sublinear definido em U e $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $f(w) \leq p(w)$, para todo $w \in W$. Então existe um funcional linear $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, que estende f , tal que $F(u) \leq p(u)$, para todo $u \in U$.*

Demonstração. Sejam f e p como no enunciado e $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as extensões $g : D(g) \rightarrow \mathbb{R}$ de f para um subespaço vetorial $D(g)$, onde $W \subset D(g) \subset U$, tais que $g(u) \leq p(u)$, para todo $u \in D(g)$. Note que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pois $f \in \mathcal{F}$. Considere a relação $\leq$ no conjunto $\mathcal{F}$ definida por

$$g \leq h \Leftrightarrow D(g) \subseteq D(h) \text{ e } g(u) = h(u),$$

para todo $u \in D(g)$. Pelo **Exemplo 1.14**, $\leq$ denota uma relação de ordem. Mostremos que $(\mathcal{F}, \leq)$ satisfaz as hipóteses do Lema de Zorn. Seja $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ um subconjunto totalmente ordenado. Considere a função

$$G : \bigcup_{g \in \mathcal{S}} D(g) \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que $G(u) = g(u)$, para todo $g \in \mathcal{S}$ e todo $u \in D(g)$. Note que G está bem definida, pois, se $u \in D(g)$ e $D(h)$, como $\mathcal{S}$ é totalmente ordenada, podemos supor, sem perda de generalidade, que $g \leq h$, logo $G(u) = g(u) = h(u)$. Mostremos que $\bigcup_{g \in \mathcal{S}} D(g)$ é subespaço vetorial de U e que G é linear. Dados u_1 e $u_2 \in \bigcup_{g \in \mathcal{S}} D(g)$ e $a \in \mathbb{R}$, existem h_1 e $h_2 \in \mathcal{S}$, onde $h_1 \leq h_2$, tais que $u_1 \in D(h_1) \subset D(h_2)$ e $u_2 \in D(h_2)$. Portanto $u_1 + u_2$ e $au_2 \in D(h_2) \subset \bigcup_{g \in \mathcal{S}} D(g)$, o que mostra que $\bigcup_{g \in \mathcal{S}} D(g)$ é subespaço vetorial. Para mostrar que G é linear, note que

$$G(u_1 + au_2) = h_2(u_1 + au_2) = h_2(u_1) + ah_2(u_2) = G(u_1) + aG(u_2).$$

Fica provado, então, que G é uma cota superior de $\mathcal{S}$ e, desta forma, $\mathcal{F}$ satisfaz as hipóteses do Lema de Zorn. Segue-se, pois, que $(\mathcal{F}, \leq)$ possui um elemento maximal. Seja $F : D(F) \rightarrow \mathbb{R}$ um elemento maximal de $\mathcal{F}$. Para completar a demonstração, mostremos que $D(F) = U$. Suponha, por absurdo, que $U \setminus D(F) \neq \emptyset$ e seja $u_0 \in U \setminus D(F)$, pelo **Lema 2.1**, existe uma função $F_2 : D(F) + \mathbb{R}u_0 \rightarrow \mathbb{R}$ que estende F e, por conseguinte, f . Logo, $F_2 \in \mathcal{F}$ e $F \leq F_2$, contrariando a maximalidade de F . $\square$

Lema 2.2. *Seja U um espaço vetorial complexo.*

- i) *Se $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear real então $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, definido por $f(u) = h(u) - ih(iu)$ é um funcional linear complexo.*
- ii) *Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear complexo então existe $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, funcional linear real, tal que $f(u) = h(u) - ih(iu)$.*

Demonstração. Como h é um funcional linear real, para mostrarmos (i), basta mostrarmos que $f(iu) = if(u)$. Assim,

$$f(iu) = h(iu) - ih(-u) = h(iu) + ih(u) = i[h(u) - ih(iu)] = if(u).$$

Para mostrarmos (ii), note primeiramente que, se $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ é um funcional linear complexo e $u \in U$, então

$$g(iu) = \operatorname{Re} g(iu) + i \operatorname{Im} g(iu) = ig(u) = i \operatorname{Re} g(u) - \operatorname{Im} g(u),$$

logo segue a igualdade

$$-\operatorname{Im} g(u) = \operatorname{Re} g(iu). \quad (2.4)$$

Dado um funcional linear complexo $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, defina $h = \operatorname{Re} f$. Pela igualdade (2.4) temos

$$\operatorname{Im} f(u) = -\operatorname{Re} f(iu) = -h(iu).$$

Portanto,

$$f(u) = h(u) - ih(iu).$$

□

Teorema 2.2 (Teorema de Hahn-Banach forma analítica (Complexo)). *Sejam W um subespaço vetorial de um espaço vetorial complexo U , p uma seminorma em U e $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear tal que $|f(u)| \leq p(u)$, para todo $u \in W$. Então existe um funcional linear $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ definido em U que estende f .*

Demonstração. Enxergando U como um espaço vetorial real, pelo **Lema 2.2**,

$$|\operatorname{Re} f(u) - i \operatorname{Re} f(iu)| \leq p(u),$$

para todo $u \in W$. Como $\operatorname{Re} f(u) \leq |f(u)|$, temos que $\operatorname{Re} f(u) \leq p(u)$ em W . Pelo **Teorema 2.1**, existe um funcional linear real $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ com $H \leq p$ que estende $\operatorname{Re} f$. Seja $F(u) = H(u) - iH(iu)$, que pelo **Lema 2.2**, é um funcional linear. Note que

$$F(u) = H(u) - iH(iu) = \operatorname{Re} f(u) - i \operatorname{Re} f(iu) = \operatorname{Re} f(u) + i \operatorname{Im} f(u) = f(u).$$

Logo F é uma extensão de f . Para mostrar que $|F| \leq p$, suponha $F(u) = re^{i\theta}$. Daí, note que $|F(u)| = r = F(e^{-i\theta}u)$. Logo

$$|F(u)| = F(e^{-i\theta}u) = H(e^{-i\theta}u) \leq p(e^{-i\theta}u) = |e^{-i\theta}|p(u) = p(u).$$

□

Teorema 2.3. *Seja U um espaço vetorial real e $p : U \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear. Para cada $w \in U$, existe um funcional linear $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

$$i) \quad F(w) = p(w);$$

ii) $-p(-u) \leq F(u) \leq p(u)$, para todo $u \in U$;

iii) Se p é uma seminorma, então $|F| \leq p$.

Demonstração. Sejam $w \in U$ e $W = \mathbb{R}w$. Defina $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(tw) = tp(w),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Claramente f é linear. Mostremos que $f(u) \leq p(u)$, para todo $u \in W$. Note que, se $t \geq 0$, então $f(tw) = tp(w) = p(tw)$. Se, por outro lado, $t < 0$, como $0 = p(w - w) \leq p(w) + p(-w)$, temos $-p(-w) \leq p(w)$. Logo

$$f(tw) = tp(w) \leq -tp(-w) = p(tw).$$

Daí, pelo **Teorema 2.1**, existe um funcional linear $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, que estende f , com $F \leq p$. Observe que $F(w) = f(w) = p(w)$, o que prova (i). Para provar (ii), notemos que $-F(u) = F(-u) \leq p(-u)$, o que implica que $-p(-u) \leq F(u) = -F(-u)$. Agora, supondo que p é seminorma, como $p(u) = p(-u)$, temos de (ii), que

$$-p(u) \leq F(u) \leq p(u),$$

o que prova (iii). □

Teorema 2.4 (Teorema da preservação da norma de Hahn-Banach). *Sejam U um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, W um subespaço de U e $f : W \rightarrow \mathbb{F}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $F : U \rightarrow \mathbb{F}$ que estende f e satisfaz*

$$\|f\| = \|F\|.$$

Demonstração. Defina $p : U \rightarrow \mathbb{F}$, como $p(u) = \|f\| \cdot \|u\|$, para todo $u \in U$. Claramente, p é uma seminorma e $|f(w)| \leq p(w)$, para todo $w \in W$. Pelo **Teorema 2.2**, existe um funcional linear $F : U \rightarrow \mathbb{F}$, extensão de f tal que

$$|F(u)| \leq p(u) = \|f\| \cdot \|u\|,$$

para todo $u \in U$. Portanto, se $u \neq 0$, então

$$\frac{|F(u)|}{\|u\|} \leq \|f\|.$$

Logo,

$$\|F\| = \sup_{u \in U \setminus \{0\}} \frac{|F(u)|}{\|u\|} \leq \|f\|.$$

O que prova a continuidade de F e a primeira desigualdade. Vamos mostrar agora o outro lado da desigualdade. Como $W \subset U$,

$$\|f\| = \sup_{w \in W \setminus \{0\}} \frac{|f(w)|}{\|w\|} = \sup_{w \in W \setminus \{0\}} \frac{|F(w)|}{\|w\|} \leq \sup_{u \in U \setminus \{0\}} \frac{|F(u)|}{\|u\|} = \|F\|.$$

□

Corolário 2.5. *Seja U um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Para cada $u_0 \in U$ não-nulo, existe um funcional linear contínuo $f : U \rightarrow \mathbb{F}$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(u_0) = \|u_0\|$.*

Demonstração. Para $u_0 = 0$, o resultado é óbvio. Fixado $u_0 \neq 0$, seja $W = \mathbb{F}u_0$. Defina $f_0(au_0) = a\|u_0\|$ para todo $a \in \mathbb{F}$. Pelo **Exemplo 1.11**, f_0 é um funcional linear e além disso,

$$\frac{|f_0(au_0)|}{\|au_0\|} = 1,$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. Daí

$$\|f_0\| = \sup_{w \in W \setminus \{0\}} \frac{|f_0(w)|}{\|w\|} = 1.$$

Pelo **Teorema 2.4**, existe $f \in U^*$, que estende f_0 , tal que $\|f_0\| = \|f\|$. Portanto

$$\|f\| = \|f_0\| = 1 \text{ e } f(u) = f_0(u) = \|u\|.$$

□

Note também que segue diretamente do **Corolário 2.5** que todos funcionais lineares contínuos se anulam em um certo u_0 se, e somente se, $u = 0$. De fato, suponha que $u_0 \neq 0$. Pelo corolário acima, existe um funcional linear contínuo f tal que $f(u_0) = \|u_0\|$. Como f se anula em u_0 , segue que $\|u_0\| = 0$, donde $u_0 = 0$.

Corolário 2.6. *Seja U um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Para todo $u \in U$,*

$$\|u\| = \sup_{f \in U^* \setminus \{0\}} \frac{|f(u)|}{\|f\|}.$$

Demonstração. Para cada $u \in U$ fixado e para todo $f \in U^* \setminus \{0\}$, temos

$$|f(u)| \leq \|f\| \cdot \|u\|,$$

daí

$$\frac{|f(u)|}{\|f\|} \leq \|u\|,$$

logo

$$\sup_{f \in U^* \setminus \{0\}} \frac{|f(u)|}{\|f\|} \leq \|u\|.$$

E, pelo **Corolário 2.5**, existe um funcional linear $g \in U^*$ tal que $g(u) = \|u\|$ e $\|g\| = 1$. Daí

$$\frac{|g(u)|}{\|g\|} = \frac{\|u\|}{1} = \|u\|.$$

Portanto,

$$\|f\| = \|u\|.$$

□

Definição 2.3. *Sejam U um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e W subespaço de U . A função*

$$d(u_0, W) = \inf_{w \in W} \|u_0 - w\|$$

é chamada de distância do elemento u ao subespaço W .

Corolário 2.7. *Sejam U um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, W subespaço de U e $u_0 \in U$ tal que $u_0 \notin \overline{W}$. Existe um funcional linear contínuo $f : U \rightarrow \mathbb{F}$, com $\|f\| = 1$ que se anula em W e $f(u_0) = d(u_0, W)$.*

Demonstração. Inicialmente, note que $d = d(u_0, W) > 0$. De fato, se $d < 0$, pela propriedade o ínfimo, existiria $w_0 \in W$ tal que $\|u_0 - w_0\| < 0$, o que contradiz a definição da norma. Por outro lado, se $d = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, seria possível obter um $w_n \in W$ tal que

$$\|u_0 - w_n\| < \frac{1}{n},$$

isto é, teríamos uma sequência de elementos de W convergindo para u_0 , ou seja, $u_0 \in \overline{W}$, o que também é uma contradição.

Defina $f : W + \mathbb{F}u_0 \rightarrow \mathbb{F}$ por

$$f(w + au_0) = ad.$$

É fácil ver que f é linear, se anula em W e $f(u_0) = d$. Note que para todo $a \in \mathbb{F}$ e $w \in W$,

$$|a|d = |a| \inf_{w \in W} \|u_0 - w\| \leq |a| \|u_0 - w\| = \|au_0 - aw\|$$

e, consequentemente, para todo $a \in \mathbb{F}$ e $w \in W$,

$$|f(w + au_0)| = |a|d \leq \|au_0 + w\|. \quad (2.5)$$

Portanto, f é contínua e

$$\|f\| \leq 1.$$

Por outro lado, fixando $\epsilon > 0$, tome $w_0 \in W$, de forma que $\|u_0 - w_0\| < d + \epsilon$. Daí

$$\frac{f(u_0 - w_0)}{\|u_0 - w_0\|} > \frac{d}{d + \epsilon}.$$

o que implica que $\|f\| \geq 1$ e, portanto, $\|f\| = 1$. Agora usando o **Teorema 2.4** para estender f , está provado o resultado. $\square$

Exemplo 2.1. No **Corolário 2.7**, se tivéssemos $u \in \overline{W}$, teríamos que $f(u_0) = 0$, para todo funcional linear contínuo f que se anula em W . Note que, se $u_0 \in W$, então existe uma sequência (w_n) de elementos de W que converge para u_0 . Se f é um funcional linear contínuo que se anula em W , como $f(w_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(w_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n\right) = f(u_0).$$

Corolário 2.8. Sejam U um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, W subespaço de U e $u_0 \in U$ tal que $u_0 \notin \overline{W}$. Então existe um funcional linear contínuo g que se anula em W , $g(u_0) = 1$ e

$$\|g\| = \frac{1}{d}.$$

Demonstração. Basta tomar $g = \frac{1}{d}f$, onde f é o funcional do **Corolário 2.7**. $\square$

Teorema 2.9. Sejam U um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, W um subespaço fechado próprio de U e f um funcional linear contínuo definido em W . Então existe um funcional linear contínuo F que estende f em U tal que $\|F\| > \|f\|$.

Demonstração. Sejam $u_0 \notin \overline{W}$ um vetor unitário, $d = d(u_0, W)$ e um escalar $b > \|f\|$. Defina $g : W + \mathbb{F}u_0 \rightarrow \mathbb{F}$, por $g(w + au_0) = f(w) + ab$, para todo $w \in W$ e todo $a \in \mathbb{F}$. É fácil ver que g é linear. Note que, para todo $a \in \mathbb{F}$ e $w \in W$, temos

$$|a|d = |a| \inf_{w \in W} \|u_0 - w\| \leq |a| \|u_0 - w\| = \|au_0 - aw\|.$$

Como W é subespaço vetorial, podemos reescrever da seguinte forma: Para todo $a \in \mathbb{F}$ e $w \in W$,

$$|a|d \leq \|au_0 + w\|. \quad (2.6)$$

Mostremos agora que g é contínua. Sejam (w_n) e (a_n) sequências de W e $\mathbb{F}$, respectivamente, tais que $w_n + a_n u_0 \rightarrow 0$. Segue da desigualdade (2.6) que

$$|a_n|d \leq \|a_n u_0 + w_n\|.$$

Como $d > 0$ e $\|a_n u_0 + w_n\| \rightarrow 0$, então $a_n \rightarrow 0$, e como

$$\|w_n\| - \|a_n u_0\| \leq \|w_n + a_n u_0\|,$$

então $w_n \rightarrow 0$. Logo

$$g(w_n + a_n u_0) = f(w_n) + a_n b \rightarrow 0 = g(0)$$

O que prova que g é contínua. Como $g(u_0) = b > \|f\|$, temos $\|g\| > \|f\|$. Pelo **Teorema 2.4**, existe um funcional linear contínuo F que estende g tal que

$$\|F\| = \|g\| > \|f\|.$$

□

A proposição a seguir é a recíproca da **Proposição 1.11** e para sua demonstração é indispensável o uso do Teorema de Hahn-Banach.

Proposição 2.1. *Sejam U e V espaços vetoriais normados. Se $\mathcal{L}(U, V)$ é um espaço de Banach, então V também é.*

Demonstração. Inicialmente, Mostremos que se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo e $v \in V$ é um elemento qualquer, então a aplicação $T : U \rightarrow V$ definida por

$$T(u) = f(u)v$$

é linear e contínua.

Para mostrar que T é linear, tome $u_1, u_2 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, daí

$$\begin{aligned} T(\alpha u_1 + u_2) &= f(\alpha u_1 + u_2)v \\ &= [\alpha f(u_1) + f(u_2)]v \\ &= \alpha f(u_1)v + f(u_2)v \\ &= \alpha T(u_1) + T(u_2). \end{aligned}$$

Note também que, para todo $u \in U$,

$$\|T(u)\| = \sup_{\|u\|=1} \|T(u)\| = \sup_{\|u\|=1} \|f(u)v\| \leq \sup_{\|u\|=1} |f(u)| \cdot \|v\| = \left(\sup_{\|u\|=1} |f(u)| \right) \|v\|,$$

isto é,

$$\|T(u)\| \leq \|f\| \cdot \|u\|.$$

O que prova a continuidade de T .

Agora, considere (v_n) uma sequência de Cauchy de pontos de V e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo tal que $\|f\| = 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $T_n : U \rightarrow V$ por

$$T_n(u) = f(u)v_n.$$

Note que

$$\|T_n\| \leq \|f\|\|v_n\| = \|v_n\|,$$

logo a sequência (T_n) é de Cauchy. Como $\mathcal{L}(U, V)$ é um espaço de Banach, existe $T \in \mathcal{L}(U, V)$ tal que $T_n \rightarrow T$ e, em particular, para cada $u \in U$, $T_n(u) \rightarrow T(u)$. Tomando $u_0 \in U$, de forma que $f(u_0) = 1$, temos

$$v_n = T_n(u_0) \rightarrow T(u_0) \in V$$

O que prova que V é um espaço de Banach. □

2.3 Teorema de Mazur-Orlicz

Agora será apresentado o Teorema de Mazur-Orlicz [13], que é equivalente ao Teorema de Hahn-Banach. A demonstração aqui apresentada será uma versão simplificada mostrada por Ptak's [19]. Por motivos de simplificação, o teorema será mostrado para espaços vetoriais reais.

Teorema 2.10 (Teorema Mazur-Orlicz). *Sejam U um espaço vetorial, $p : U \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear e T um conjunto qualquer. Sejam também $q : T \rightarrow U$ e $r : T \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções quaisquer. Então existe um funcional linear $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F \leq p$ e $r \leq F \circ q$ se, e somente se, para toda n -upla $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de números reais não-negativos e todo $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in T^n$,*

$$\sum_{i=1}^n a_i r(t_i) \leq p \left(\sum_{i=1}^n a_i q(t_i) \right).$$

Demonstração. ($\Rightarrow$). Dados $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ com $a_i \geq 0$ e $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in T^n$, como $r \leq F \circ q$, temos $a_i r(t_i) \leq a_i F(q(t_i))$. Como F é linear e $F \leq p$, temos

$$\sum_{i=1}^n a_i r(t_i) \leq \sum_{i=1}^n a_i F(q(t_i)) = F \left(\sum_{i=1}^n a_i q(t_i) \right) \leq p \left(\sum_{i=1}^n a_i q(t_i) \right).$$

($\Leftarrow$). Vamos construir F tal que $F \leq p$ e $r \leq F \circ q$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $u \in U$, considere o conjunto

$$L_n(u) = \left\{ p \left(u + \sum_{i=1}^n a_i q(t_i) \right) - \sum_{i=1}^n a_i r(t_i) : a_i \geq 0 \text{ e } t_i \in T \right\}.$$

Mostremos, primeiramente, que $\{L_n(u); n \in \mathbb{N}\}$ é limitada inferiormente. Fixando u , para todo $a_i \geq 0$ e todo $t_i \in T$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i r(t_i) &\leq p \left(\sum_{i=1}^n a_i q(t_i) \right) \\ &= p \left(u + \sum_{i=1}^n a_i q(t_i) - u \right) \\ &\leq p \left(u + \sum_{i=1}^n a_i q(t_i) \right) + p(-u) \end{aligned}$$

assim

$$-p(-u) \leq p \left(u + \sum_{i=1}^n a_i q(t_i) \right) - \sum_{i=1}^n a_i r(t_i).$$

Portanto, $L_n(u)$ é limitada inferiormente. Por essa razão a função

$$L(u) = \inf_{n \in \mathbb{N}} L_n(u),$$

está bem definida.

Mostraremos agora que L é sublinear. Dados $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \dots, b_m)$, onde a_i e b_i são números reais não-negativos e $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in T^n$, $(s_1, s_2, \dots, s_m) \in T^m$, façamos $(c_1, c_2, \dots, c_{n+m})$, onde $c_1 = a_1, \dots, c_n = a_n, c_{n+1} = b_1, \dots, c_{n+m} = b_m$, e $(z_1, z_2, \dots, z_{n+m})$, onde $z_1 = t_1, \dots, z_n = t_n, z_{n+1} = s_1, \dots, z_{n+m} = s_m$. Sejam $u, v \in U$ e $n, m \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned} L(u+v) &\leq p \left(u+v + \sum_{i=1}^{n+m} c_i q(t_i) \right) - \sum_{i=1}^{n+m} z_i r(t_i) \\ &\leq p \left(u+v + \sum_{i=1}^n c_i q(t_i) + \sum_{i=n+1}^{n+m} c_i q(t_i) \right) - \sum_{i=1}^n z_i r(t_i) - \sum_{i=n+1}^{n+m} z_i r(t_i) \\ &\leq p \left(u+v + \sum_{i=1}^n a_i q(t_i) + \sum_{i=1}^m b_i q(t_i) \right) - \sum_{i=1}^n a_i r(t_i) - \sum_{i=1}^m b_i r(t_i) \\ &\leq p \left(u + \sum_{i=1}^n a_i q(t_i) \right) - \sum_{i=1}^n a_i r(t_i) + p \left(v + \sum_{i=1}^m b_i q(t_i) \right) - \sum_{i=1}^m b_i r(t_i). \end{aligned}$$

Da arbitrariedade das seqüências $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, \dots, b_m)$, $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ e $(s_1, s_2, \dots, s_m)$ concluimos que

$$L(u+v) \leq L(u) + L(v).$$

Já para mostrar que L é positiva homogênea, tome $a \geq 0$ e $u \in U$. Daí

$$\begin{aligned} L(au) &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ p \left(au + \sum_{i=1}^n a_i q(t_i) \right) - \sum_{i=1}^n a_i r(t_i) \right\} \\ &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ p \left(au + \sum_{i=1}^n aa_i q(t_i) \right) - \sum_{i=1}^n aa_i r(t_i) \right\} \\ &= a \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ p \left(au + \sum_{i=1}^n a_i q(t_i) \right) - \sum_{i=1}^n a_i r(t_i) \right\} \\ &= aL(u). \end{aligned}$$

Agora, note que, dado $u \in U$, como

$$L(u) \leq p \left(u + \sum_{i=1}^n a_i q(t_i) \right) - \sum_{i=1}^n a_i r(t_i),$$

tomando $n = 1$ e $a_1 = 0$, teremos $L(u) \leq p(u)$. Pelo **Teorema 2.3**, existe um funcional linear $F \leq L \leq p$. Pela definição de L , para todo $t \in T$,

$$L(-q(t)) \leq p(-q(t) + q(t)) - r(t) = -r(t).$$

Por, ultimo, Como $F \leq L$, então $F(-q(t)) \leq L(-q(t)) \leq -r(t)$, ou seja, $F \circ q \geq r$. $\square$

Proposição 2.2. *O Teorema de Hahn-Banach e o Teorema de Mazur-Orlicz são equivalentes.*

Demonstração. Na demonstração do Teorema de Mazur-Orlicz, vimos que ele é consequência do Teorema de Hanh-Banach, mas observe que a recíproca também é verdadeira. Supondo que o Teorema de Mazur-Orlicz seja válido, tome T o subespaço W e r o funcional f do Teorema de Hanh-Banach. Tome também q como a função identidade $I : W \rightarrow U$, $n = 1$, $a_1 = 1$ e $t_1 = u$. Sabendo que a composição de uma função com a função identidade é a própria função, teremos a seguinte consequência do Teorema do Mazur-Orlicz:

Sejam U um espaço vetorial, w um subespaço de U , $p : U \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear, e $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear. Então existe um funcional linear $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F \leq p$ e $f \leq F$ se, e somente, para todo $w \in W$, $f(w) \leq p(w)$.

Note que, se $f(w) \leq F(w)$ para todo $w \in W$,

$$f(-w) \leq F(-w) \Rightarrow f(w) \geq F(w),$$

o que implica que $f(w) = F(w)$ para todo $w \in W$. Portanto, temos a equivalência. $\square$

2.4 Funcionais Lineares Minimais

Nesta seção será mostrada uma maneira alternativa de provar o Teorema de Hahn-Banach (**Teorema 2.1**) [15]. Aqui, em vez de usar a tecnica de Helly, usado na demonstração do **Teorema 2.1**, usaremos o fato de que todo funcional linear é um elemento minimal da classe dos funcionais sublineares. Denotaremos a classe dos funcionais sublineares definidos em um espaço vetorial U , por $U^\#$. $U^\#$ não é um espaço vetorial, mas é fechado sob as operações de adição e multiplicação por números maiores ou iguais a zero. Ordenamos $U^\#$ da seguinte maneira: Dados p e $q \in U^\#$,

$$p \leq q \Leftrightarrow p(u) \leq q(u),$$

para todo $u \in U$.

O Teorema de Hahn-Banach, aqui, será provado estabelecendo-se primeiramente duas coisas:

1. Os elementos minimais de $U^\#$ são funcionais lineares (**Teorema 2.13**).
2. Dado qualquer funcional sublinear p , existe um funcional linear f , tal que $f \leq p$ (**Teorema 2.14**).

O teorema a seguir estabelece critérios elementares para a linearidade de um funcional sublinear.

Teorema 2.11. *Sejam U um espaço vetorial real e $p : U \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional sublinear. São equivalentes as seguintes afirmações:*

- i) *Para todo $u \in U$, $p(u) + p(-u) \leq 0$.*
- ii) *Para todo $u \in U$, $p(u) + p(-u) = 0$.*
- iii) *p é um funcional linear.*

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii)

Como $p(u) + p(-u) \leq 0$, temos $0 = p(0) = p(u - u) \leq p(u) + p(-u) \leq 0$, o que implica que $p(u) + p(-u) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Se $p(u) + p(-u) = 0$, então $-p(u) = p(-u)$, logo $p(au) = ap(u)$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Agora, note que para todo $u, v \in U$,

$$p(u) = p(u + v - v) \leq p(u + v) + p(-v) = p(u + v) - p(v),$$

portanto $p(u) + p(v) \leq p(u + v)$. Como a desigualdade oposta também é conhecida, inferimos que $p(u) + p(v) = p(u + v)$ e p é linear.

portanto p é linear.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

É imediato. □

Teorema 2.12. *Sejam U um espaço vetorial real. Se $p : U \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional sublinear então $q : U \rightarrow \mathbb{R}$, definido por*

$$q(u) = \inf\{p(u + tv) - tp(v) : t \geq 0 \text{ e } v \in U\}$$

é um funcional sublinear e $q \leq p$.

Demonstração. Dado p como a hipótese, para todo $u, v \in U$ e $t \geq 0$, note que

$$p(tv) = p(tv + u - u) \leq p(tv + u) + p(-u) \Rightarrow -p(-u) \leq p(tv + u) - p(tv),$$

portanto, para cada $u \in U$ podemos definir

$$q(u) = \inf\{p(u + tv) - tp(v) : t \geq 0 \text{ e } v \in U\}.$$

Observe que, tomando $t = 0$, é fácil ver que $q \leq p$. Mostremos agora que q é sublinear. Vamos começar mostrando que q é positiva homogênea. Para $a = 0$,

$$p(au + tv) - tp(v) = p(tv) - tp(v) = 0,$$

para todo $v \in U$ e todo $t \geq 0$, o que implica que $q(0u) = q(0) = 0$. Por outro lado, para $a > 0$,

$$\begin{aligned} q(au) &= \inf\{p(au + tv) - tp(v) : t \geq 0 \text{ e } v \in U\} \\ &= \inf\left\{a \left[p\left(u + \frac{t}{a}v\right) - \frac{t}{a}p(v)\right] : t \geq 0 \text{ e } v \in U\right\} \\ &= a \inf\left\{p\left(u + \frac{t}{a}v\right) - \frac{t}{a}p(v) : t \geq 0 \text{ e } v \in U\right\} \\ &= a \inf\{p(u + tv) - tp(v) : t \geq 0 \text{ e } v \in U\} \\ &= aq(u). \end{aligned}$$

Mostremos que q possui a propriedade da subaditividade. Sejam $u_1, u_2, v \in U$ e t_1, t_2 não-negativos. Então

$$\begin{aligned} q(u_1 + u_2) &= \inf\{p((u_1 + u_2) + tv) - tp(v) : t \geq 0 \text{ e } v \in U\} \\ &= p((u_1 + u_2) + (t_1 + t_2)v) - (t_1 + t_2)p(v) \\ &\leq p(u_1 + t_1v + u_2 + t_2v) - t_1p(v) - t_2p(v) \\ &\leq [p(u_1 + t_1v) - t_1p(v)] + [p(u_2 + t_2v) - t_2p(v)]. \end{aligned}$$

Portanto $q(u_1 + u_2) \leq q(u_1) + q(u_2)$. □

Teorema 2.13. *Sejam U um espaço vetorial real e p um funcional sublinear definido em U . p é elemento minimal de $U^\#$ se, e somente se, p é linear.*

Demonstração. Suponha, primeiramente, que $p : U \rightarrow \mathbb{R}$ seja um funcional linear, $q \in U^\#$ tal que $q \leq p$ e $u \in U$. Como q é sublinear,

$$0 = q(u - u) \leq q(u) + q(-u) \Rightarrow -q(-u) \leq q(u).$$

E como $q(-u) \leq p(-u) = -p(u)$, temos que $p(u) \leq -q(-u) \leq q(u)$, ou seja, $p \leq q$. Portanto $p = q$, o que prova que p é um elemento minimal de $U^\#$.

Reciprocamente, suponha que p seja um elemento minimal de $U^\#$ e defina $q : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde, para todo $u \in U$,

$$q(u) = \inf\{p(u + tv) - tp(v) : t \geq 0 \text{ e } v \in U\}.$$

Pelo **Teorema 2.12**, $q \leq p$ e como p é um elemento minimal de $U^\#$, temos que $q = p$. Tome $t = 1$, $u = -v$. Daí, pela definição de q ,

$$p(-v) = q(-v) \leq p(v - v) - p(v) = -p(v) \Rightarrow p(v) + p(-v) \leq 0.$$

Portanto, pelo **Teorema 2.11**, p é linear. □

Teorema 2.14. *Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Se p é um funcional sublinear definido em U então existe um funcional linear f em U tal que $f \leq p$.*

Demonstração. Seja $p \in U^\#$ e considere $Q = \{q \in U^\# : q \leq p\}$. Note que $Q \neq \emptyset$, pois $p \in Q$. Seja P um conjunto totalmente ordenado de Q e fixado $u \in U$ considere $\{q(u) : q \in P\}$.

Afirmção: $\{q(u) : q \in P\}$ é limitado inferiormente.

Suponha, por absurdo, que a afirmação seja falsa. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $p_n \in P$ tal que $p_n(u) \leq -n$. Uma vez que P é totalmente ordenado, podemos definir, para cada $n \in \mathbb{N}$, $q_n = \min(p_1, p_2, \dots, p_n) \in P$. Claramente, a sequência de funcionais sublineares (q_n) é decrescente e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $q_n(u) \leq -n$. Note que

$$0 = q_n(0) = q_n(u - u) \leq q_n(u) + q_n(-u) \leq -n + q_n(-u),$$

logo $n \leq q_n(-u) \leq q_1(-u)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo pois $\mathbb{N}$ não possui cota superior. Está provada a afirmação.

Pela afirmação, p_0 definida por $p_0(v) = \inf\{q(v) : q \in P\}$ para todo $v \in U$, está bem definida. Daí, para todo $q \in P$, $p_0 \leq q \leq p$, ou seja, basta provarmos que p_0 é um funcional sublinear para mostrarmos que $p_0 \in Q$ e que é cota inferior de P .

Mostremos que p_0 é positivo homogêneo. Para todo $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} p_0(tv) &= \inf\{q(tv) : q \in P\} \\ &= \inf\{tq(v) : q \in P\} \\ &= t \inf\{q(v) : q \in P\} \\ &= tp_0(v). \end{aligned}$$

Para mostrar a subaditividade, tome q_1 e $q_2 \in P$. Como P é totalmente ordenado, podemos supor, sem perda de generalidade, que $q_1 \leq q_2$, logo, para todo $v, w \in U$,

$$p_0(v + w) \leq q_1(v + w) \leq q_1(v) + q_1(w) \leq q_1(v) + q_2(w)$$

e da mesma forma mostramos que $p_0(v + w) \leq q_2(v) + q_1(w)$. Portanto

$$p_0(v + w) \leq q_1(v) + q_2(w) \leq \inf_{q_1 \in P} [q_1(v) + q_2(w)] = p_0(v) + q_2(w) \leq p_0(v) + p_0(w).$$

Segue do Lema de Zorn que existe $f \leq p$ elemento minimal de Q . Note que f também é elemento minimal de $U^\#$. Assim, pelo **Teorema 2.13**, f é linear e está provado o teorema. $\square$

Teorema 2.15 (Teorema de Hahn-Banach forma analítica (Real)). *Sejam W um subespaço vetorial de um espaço vetorial real U , p um funcional sublinear definido em U e $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $f(w) \leq p(w)$, para todo $w \in W$. Então existe um funcional linear $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, que estende f , tal que $F(u) \leq p(u)$, para todo $u \in U$.*

Demonstração. Inicialmente, observe que para todo $w \in W$, $f(-w) \leq p(-w)$, e, dado $u \in U$, somando à ambos os membros dessa desigualdade $-p(-u) - f(-w)$, temos

$$-p(-u) \leq -p(-u) + p(-w) - f(-w) \tag{2.7}$$

e, como $p(-w) = p(u - w - u) \leq p(u - w) + p(-u)$, temos

$$-p(-u) + p(-w) \leq p(u - w). \tag{2.8}$$

Usando (2.7) e (2.8) obtemos

$$-p(-u) \leq p(u - w) + f(w). \tag{2.9}$$

Considere a função $q : U \rightarrow \mathbb{R}$, onde, para todo $u \in U$,

$$q(u) = \inf\{p(u - w) + f(w) : w \in W\}$$

Segue de (2.9) que q está bem definida. Note que $q \leq f$ em W pois, tomando $w = u$ na definição de q , $q(u) \leq p(u - u) + f(u) = f(u)$ e, além disso, tomando $w = 0$ na definição de q , resulta em $q(u) \leq p(u - 0) + f(0) = p(u)$, portanto $q \leq p$ em U . Mostremos que q é sublinear. Para cada $w \in W$, $f(-w) \leq p(-w)$, ou seja, $p(0 - w) + f(w) = f(w) + p(-w) \geq 0$, logo $q(0) \geq 0$. Por outro lado, tomando $w = 0$ em $p(0 - w) + f(w)$, temos que $q(0) \leq p(0 - 0) + f(0) \leq 0$. e consequentemente $q(0) = 0$. Para $a > 0$,

$$\begin{aligned}
q(au) &= \inf \{ p(au - w) + f(w) : w \in W \} \\
&= \inf \left\{ ap \left(u - \frac{w}{a} \right) + af \left(\frac{w}{a} \right) : w \in W \right\} \\
&= \inf \left\{ a \left[p \left(u - \frac{w}{a} \right) + f \left(\frac{w}{a} \right) \right] : w \in W \right\} \\
&= a \inf \left\{ p \left(u - \frac{w}{a} \right) + f \left(\frac{w}{a} \right) : w \in W \right\} \\
&= a \inf \{ p(u - w) + f(w) : w \in W \} \\
&= aq(u)
\end{aligned}$$

Então q é positiva homogênea.

Mostremos agora a subaditividade. Dados $u_1, u_2 \in U$ e $\epsilon > 0$, existem $w_1, w_2 \in W$, tais que

$$p(u_1 - w_1) + f(w_1) < q(u_1) + \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$p(u_2 - w_2) + f(w_2) < q(u_2) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Daí

$$\begin{aligned}
q(u_1) + q(u_2) &> p(u_1 - w_1) + f(w_1) - \frac{\epsilon}{2} + p(u_2 - w_2) + f(w_2) - \frac{\epsilon}{2} \\
&= p(u_1 - w_1) + p(u_2 - w_2) + f(w_1) + f(w_2) - \epsilon \\
&\geq p(u_1 + u_2 - (w_1 + w_2)) + f(w_1 + w_2) - \epsilon \\
&\geq q(u_1 + u_2) - \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos que $q(u_1 + u_2) \leq q(u_1) + q(u_2)$, e está provado que q é um funcional sublinear. Pelo **Teorema 2.14** existe um funcional linear F , definido em U , tal que $F \leq q \leq p$ e, em particular, $F \leq q \leq f$ em W . Como pelo **Teorema 2.13**, f é elemento minimal de $W^\#$, $F = f$ em W . Como queríamos demonstrar. $\square$

2.5 Formas Geométricas

Nesta seção será mostrado uma interpretação essencialmente geométrica do Teorema de Hahn Banach, desenvolvida pelo matemático polonês, Stanislaw Mazur.

Definição 2.4. Um conjunto qualquer C é chamado de convexo se, para todo $a, b \in C$ e todo $t \in [0, 1]$, temos

$$(1 - t)a + tb \in C.$$

Note que, para o t variando no intervalo $[0, 1]$, $(1 - t)a + tb$ descreve um segmento de reta com extremidades em a e b . Por isso a definição acima também pode ser lida da seguinte forma: Um conjunto C é convexo se, dados dois elementos de C , a reta que liga esses dois elementos está completamente contido em C .

Exemplo 2.2. Seja U um espaço vetorial normado. A bola aberta

$$B_r(u_0) = \{u \in U; \|u - u_0\| < r\}$$

de centro em u_0 e raio r é um conjunto convexo. Dados $u, v \in B_r(u_0)$ e $t \in [0, 1]$, como $\|u - u_0\| < r$ e $\|v - u_0\| < r$, temos

$$\begin{aligned} \|(1 - t)u + tv - u_0\| &= \|(1 - t)u + tv - u_0 + tu_0 - tu_0\| \\ &= \|(1 - t)u - (1 - t)u_0 + tv - tu_0\| \\ &= \|(1 - t)(u - u_0) + t(v - u_0)\| \\ &\leq \|(1 - t)(u - u_0)\| + \|t(v - u_0)\| \\ &= (1 - t)\|u - u_0\| + t\|v - u_0\| \\ &< (1 - t)r + tr = r \end{aligned}$$

Portanto, o segmento de reta de extremidades u e v pertencem à bola $B_r(u_0)$.

Proposição 2.3. Sejam $f : U$ um funcional linear não-nulo definido num espaço vetorial real U , e $N(f)$ o núcleo de f , isto é, $N(f) = f^{-1}(0)$. Então $N(f)$ é um subespaço vetorial de U e, dado $u_0 \in U \setminus N(f)$,

$$U = N(f) + \mathbb{R}u_0.$$

Demonstração. Como $f(0) = 0$, logo $0 \in N(f)$ e, portanto $N(f) \neq \emptyset$. Dados $u_1, u_2 \in N(f)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$f(u_1 + \alpha u_2) = f(u_1) + f(\alpha u_2) = f(u_1) + \alpha f(u_2) = 0 + \alpha 0 = 0,$$

isto é, $u_1 + \alpha u_2 \in N(f)$. O que prova que $N(f)$ é um subespaço vetorial.

É evidente que $N(f) + \mathbb{R}u_0 \subset U$, Mostremos o outro lado da inclusão. Seja $u \in U$. Note que

$$n = u - \frac{f(u)}{f(u_0)}u_0 \in N(f),$$

pois

$$f(n) = f\left(u - \frac{f(u)}{f(u_0)}u_0\right) = f(u) - \frac{f(u)}{f(u_0)}f(u_0) = f(u) - f(u) = 0.$$

Portanto

$$u = n + \frac{f(u)}{f(u_0)}u_0 \in N(f) + \mathbb{R}u_0.$$

□

A proposição acima nos mostra que o núcleo de um funcional linear, definido num espaço vetorial U , é um subespaço de U com codimensão igual a 1, isto é, o núcleo de f tem uma dimensão a menos que U . Para melhor visualização, tome $U = \mathbb{R}^2$. Temos então um espaço vetorial com dimensão igual a 2. Como $N(f)$ é um subespaço com uma dimensão a menos, $N(f)$ é uma reta sobre o plano que passa pela origem, como mostra a imagem a seguir.

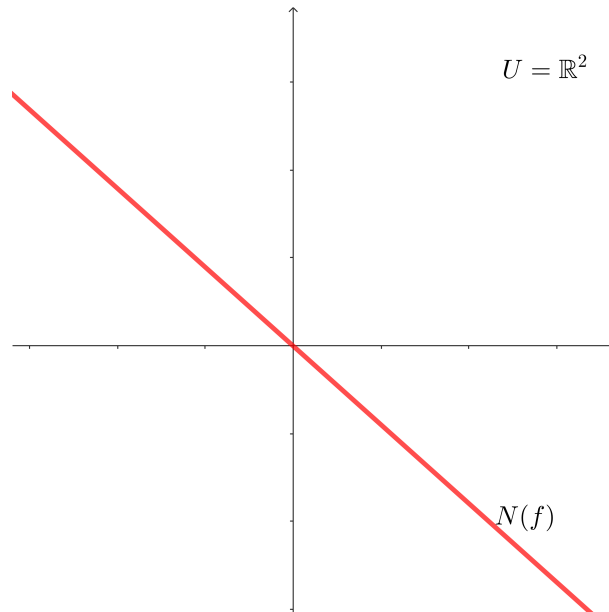


Figura 2.4: O núcleo de um funcional linear definido no $\mathbb{R}^2$

Definição 2.5. *Sejam U um espaço vetorial, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear não-nulo e $\alpha \in \mathbb{R}$. O conjunto da forma*

$$H = f^{-1}(\alpha) = \{u \in U : f(u) = \alpha\}$$

é chamado hiperplano afim,

Proposição 2.4. *Sejam $f : U$ um funcional linear não-nulo definido num espaço vetorial real U , $\alpha \in \mathbb{R}$, $N(f)$ o núcleo de f e $H = \{u \in U : f(u) = \alpha\}$ um hiperplano. Então, para todo $u_0 \in H$,*

$$H = N(f) + u_0,$$

onde $N(f) + u_0 = \{n + u_0; n \in N(f)\}$.

Demonstração. Seja $u \in H$. Como $u = (u - u_0) + u_0$, para mostrar que $u \in N(f) + u_0$, basta mostrar que $u - u_0 \in N(f)$. Note que

$$f(u - u_0) = f(u) - f(u_0) = \alpha - \alpha = 0.$$

Isso mostra que $H \subset N(f) + u_0$. Agora note que, para todo $n + u_0 \in N(f) + u_0$, temos

$$f(n + u_0) = f(n) + f(u_0) = 0 + \alpha = \alpha.$$

Logo $N(f) + u_0 \subset H$ e está provada a igualdade. $\square$

Concluimos, portanto, da definição e da proposição acima, que um hiperplano é o resultado do deslocamento de $N(f)$ da origem. Esse deslocamento acontece ao adicionarmos u_0 a todos os elementos de $N(f)$. Para melhor visualização, veja, na imagem a seguir, um exemplo de um hiperplano tomando, mais uma vez, $U = \mathbb{R}^2$.

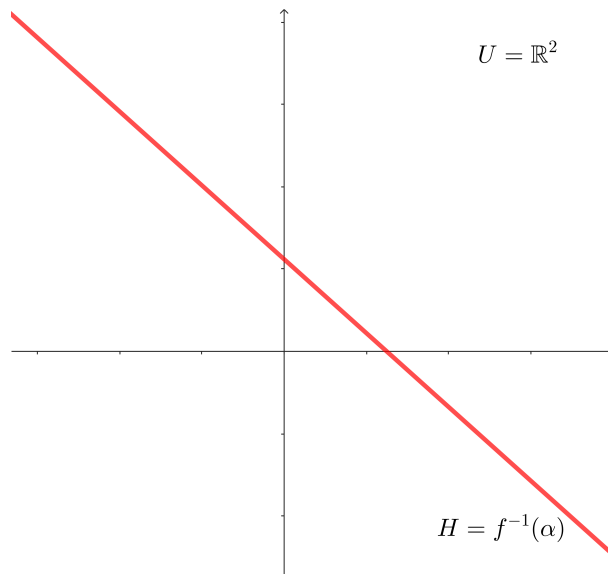


Figura 2.5: Um hiperplano H no $\mathbb{R}^2$

Teorema 2.16. *Sejam U um espaço vetorial normado, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear não nulo e $\alpha \in \mathbb{R}$. O hiperplano $H = f^{-1}(\alpha)$ é fechado se, e somente se, f é contínua.*

Demonstração. Supondo que H é fechado e como f é não-nulo, $U \setminus H$ é aberto e diferente de vazio. Escolha $u_0 \in U \setminus H$ tal que $f(u_0) < \alpha$, e temos que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(u_0) \subset U \setminus H$. Afirimo que $f(u) < \alpha$, para todo $u \in B_\epsilon(u_0)$. Suponha, por absurdo que essa afirmação é falsa, ou seja, que existe $u_1 \in B_\epsilon(u_0)$ tal que $f(u_1) \geq \alpha$. Desta forma, como a bola é convexa,

$$\{(1-t)u_1 + tu_0 : 0 \leq t \leq 1\} \subset B_\epsilon(u_0) \subset U \setminus H.$$

Tomando $t = \frac{f(u_1) - \alpha}{f(u_1) - f(u_0)}$ temos que

$$\begin{aligned} f((1-t)u_1 + tu_0) &= (1-t)f(u_1) + tf(u_0) \\ &= \left(1 - \frac{f(u_1) - \alpha}{f(u_1) - f(u_0)}\right) f(u_1) + \left(\frac{f(u_1) - \alpha}{f(u_1) - f(u_0)}\right) f(u_0) \\ &= \frac{[\alpha - f(u_0)]f(u_1) + [f(u_1) - \alpha]f(u_0)}{f(u_1) - f(u_0)} \\ &= \frac{\alpha f(u_1) - f(u_0)f(u_1) + f(u_1)f(u_0) - \alpha f(u_0)}{f(u_1) - f(u_0)} \\ &= \frac{\alpha f(u_1) - \alpha f(u_0)}{f(u_1) - f(u_0)} \\ &= \alpha \cdot \frac{f(u_1) - f(u_0)}{f(u_1) - f(u_0)} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

O que é um absurdo pois $B_\epsilon(u_0) \subset U \setminus H$. Note que

$$B_\epsilon(u_0) = \{u_0 + \epsilon v \in U; v \in B_1(0)\}.$$

Portanto,

$$f(u_0 + \epsilon v) < \alpha$$

para todo $v \in B_1(0)$, logo $f(u_0) + \epsilon f(v) < \alpha$, donde

$$f(v) < \frac{\alpha - f(u_0)}{\epsilon},$$

para todo $v \in B_1(0)$. Pela simetria da bola, temos

$$|f(v)| < \frac{\alpha - f(u_0)}{\epsilon}$$

para todo $v \in B_1(0)$. Portanto

$$\|f\| = \sup_{v \in B_1(0)} |f(v)| \leq \frac{\alpha - f(u_0)}{\epsilon}.$$

Suponha agora que f é contínua e mostremos que H é fechado. Para isso, basta notar que $\{\alpha\}$ é um conjunto fechado. Como f é contínua, então $f^{-1}(\{\alpha\}) = H$ é um conjunto fechado. $\square$

Definição 2.6. *Sejam U um espaço vetorial e $A, B \subset U$, subconjuntos. Dizemos que o hiperplano $H = f^{-1}(\alpha)$ separa A e B no sentido amplo, se $f(u) \leq \alpha$, para todo $u \in A$ e $f(u) \geq \alpha$, para todo $u \in B$.*

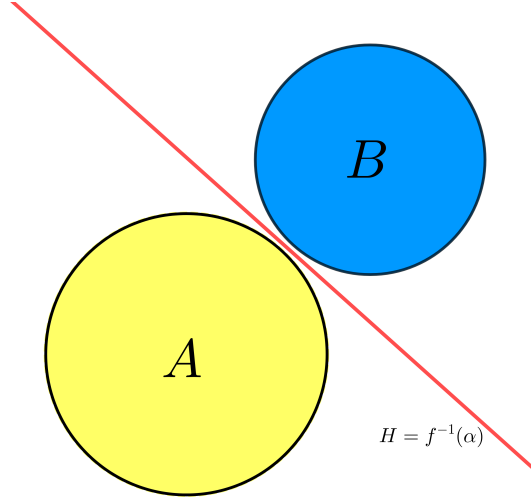


Figura 2.6: O hiperplano H separa A e B no sentido amplo.

Definição 2.7. *Sejam U um espaço vetorial e $A, B \subset U$, subconjuntos. Dizemos que o hiperplano $H = f^{-1}(\alpha)$ separa A e B no sentido estrito, se existe $\epsilon > 0$, tal que $f(u) \leq \alpha - \epsilon$, para todo $u \in A$ e $f(u) \geq \alpha + \epsilon$, para todo $u \in B$.*

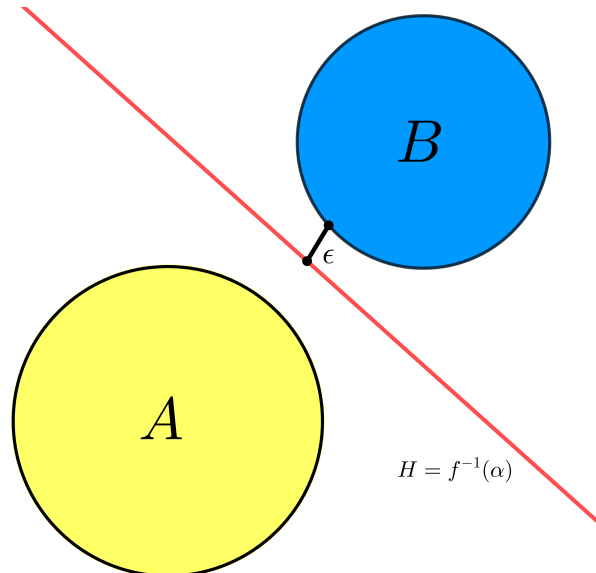


Figura 2.7: O hiperplano H separa A e B no sentido estrito.

Lema 2.3 (Funcional de Minkowski). *Sejam U um espaço vetorial normado e $C \subset U$, um subconjunto aberto e convexo que contém a origem. Defina $p_C : U \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$p_C(u) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{u}{\alpha} \in C \right\}.$$

Então p_C é um funcional sublinear com as seguintes propriedades:

- i) Existe $K > 0$ tal que $0 \leq p_C(u) \leq K\|u\|$.*
- ii) O conjunto $C = \{u \in U : p_C(u) < 1\}$.*

Demonstração. (i): Como C é aberto, existe um $\epsilon > 0$ tal que a bola fechada $B_\epsilon[0] \subset C$. Daí, note que, para todo $u \in U$, $\epsilon \frac{u}{\|u\|} \in B_\epsilon[0] \subset C$ e desta forma $p_C(\epsilon \frac{u}{\|u\|}) \leq 1$, assim

$$0 \leq p_C(u) \leq \frac{1}{\epsilon} \|u\|$$

(ii): Mostremos primeiro que $C \subset \{u \in U : p_C(u) < 1\}$. Seja $u \in C$. Como C é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(1 + \epsilon)u \in C$. Daí

$$p_C((1 + \epsilon)u) \leq 1,$$

o que implica que

$$p_C(u) = \frac{1}{1 + \epsilon} < 1.$$

Mostremos agora que $\{u \in U : p_C(u) < 1\} \subset C$. Seja $u \in \{u \in U : p_C(u) < 1\}$, logo $p_C(u) < 1$. Pela definição de p_C , existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\frac{u}{\alpha} \in C$. Como C é convexo e contém a origem,

$$u = \alpha \frac{u}{\alpha} + (1 - \alpha)0 \in C.$$

Desta forma, está mostrada a igualdade.

Por fim, mostremos que p_C é sublinear. Para mostrar que p_C é positivo-homogêneo, sejam $b \geq 0$ e $u \in U$. Se $b = 0$, então

$$\begin{aligned} p_C(bu) &= \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{bu}{\alpha} \in C \right\} \\ &= \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{0}{\alpha} \in C \right\} \\ &= 0 = 0 \cdot p_C(u). \end{aligned}$$

Se $b > 0$, temos

$$\begin{aligned}
p_C(bu) &= \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{bu}{\alpha} \in C \right\} \\
&= \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{u}{\frac{\alpha}{b}} \in C \right\} \\
&= \inf \left\{ b\alpha > 0 : \frac{u}{\alpha} \in C \right\} \\
&= b \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{u}{\alpha} \in C \right\} \\
&= bp_C(u).
\end{aligned}$$

Para verificar a subaditividade, sejam $u, v \in U$ e $\epsilon > 0$. Pela definição de p_C , temos

$$\frac{u}{p_C(u) + \epsilon}, \frac{v}{p_C(v) + \epsilon} \in C.$$

Como C é convexo, para todo $t \in [0, 1]$,

$$t \frac{u}{p_C(u) + \epsilon} + (1 - t) \frac{v}{p_C(v) + \epsilon} \in C.$$

Tomando $t = \frac{p_C(u) + \epsilon}{p_C(u) + p_C(v) + 2\epsilon}$, obtemos

$$\frac{u + v}{p_C(u) + p_C(v) + 2\epsilon} \in C.$$

Logo, por (ii),

$$p_C \left(\frac{u + v}{p_C(u) + p_C(v) + 2\epsilon} \right) < 1$$

e como P_C é positivo homogênia, temos

$$p_C(u + v) < p_C(u) + p_C(v) + 2\epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, temos

$$p_C(u + v) \leq p_C(u) + p_C(v).$$

□

Lema 2.4. *Sejam U um espaço vetorial normado, C um subconjunto aberto, convexo, não-vazio e próprio de U e $u_0 \in U \setminus C$. Então existe um funcional linear contínuo f definido em U tal que $f(u) < f(u_0)$ para todo $u \in C$.*

Demonstração. Seja $D = z + C$, onde z é tal que $-z \in C$. Logo, D é convexo, $0 \in D$ e $v_0 = z + u_0 \notin D$. Considere P_D , o funcional de Minkowski de D , e $W = \mathbb{R}v_0$. Defina $f_0 : W \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_0(tv_0) = t,$$

onde $t \in \mathbb{R}$. Por (ii) do **Lema 2.3**, como $v_0 \notin D$, $p_D(v_0) \geq 1$, e daí, se $t \geq 0$, temos

$$p_D(tv_0) = tp_D(v_0) \geq t = f_0(tv_0)$$

e se $t < 0$, como $p_D(v) \geq 0$, para todo $v \in U$, temos

$$p_D(tv_0) \geq 0 > t = f_0(tv_0),$$

portanto $f_0(w) \leq p_D(w)$, para todo $w \in W$. Segue do **Teorema 2.1** que existe um funcional linear $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, que estende f_0 , tal que $f \leq p_D$. Note que, por (i) do **Lema 2.3**, existe $K > 0$, tal que, para todo $v \in U$,

$$-f(v) = f(-v) \leq p_D(-v) \leq K\|-v\| = K\|v\|$$

e

$$f(v) \leq p_D(v) \leq K\|v\|,$$

ou seja, f é contínua. Como $p_D(v) < 1$ para todo $v \in D$, temos

$$f(v) < 1 = f(v_0), \quad (2.10)$$

para todo $v \in D$. Por fim, observe que podemos reescrever (2.10) da seguinte forma:

$$f(z + u) < f(z + u_0),$$

para todo $u \in C$, o que implica que pela linearidade de f , obtemos

$$f(u) < f(u_0),$$

para todo $u \in C$. □

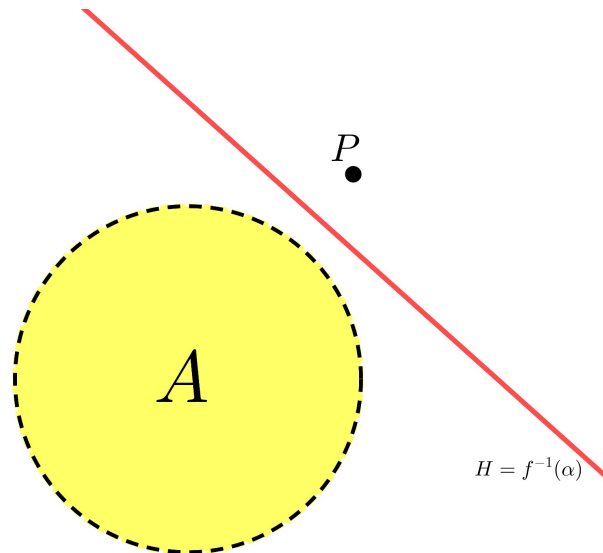


Figura 2.8: O hiperplano H separa o conjunto convexo A e o ponto P .

O **Lema 2.4** nos dá uma prévia da forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach separando um ponto $u_0 \in U$ de C . Note que, como C e $\{u_0\}$ são conjuntos convexos e C é aberto, recaímos na primeira forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach que será demonstrado no teorema a seguir. Observe também que na separação dos conjuntos no sentido amplo, o hiperplano pode ter pontos em comum com um dos conjuntos, basta um deles não ser aberto. Portanto, se um dos conjuntos é formado por apenas um ponto que está na fronteira do conjunto aberto, o conjunto unitário estará completamente contido no hiperplano.

Teorema 2.17 (Primeira forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach). *Sejam U um espaço vetorial normado e $A, B \subset U$ subconjuntos convexos não-vazios e disjuntos, onde A é aberto. Então existe um hiperplano fechado $H = f^{-1}(\alpha)$ que separa A e B no sentido amplo.*

Demonstração. Seja

$$C = A - B = \{u - v : u \in A \text{ e } v \in B\}.$$

Note que C é convexo, pois se $u_1 - v_1, u_2 - v_2 \in C$ então

$$t(u_1 - v_1) + (1 - t)(u_2 - v_2) = tu_1 + (1 - t)u_2 - [tv_1 + (1 - t)v_2] \in C.$$

Como A é aberto temos que para todo $v \in B$, a translação $A - v$ também é aberto e como a união arbitrária de abertos é aberto temos que

$$C = \bigcup_{v \in B} (A - v)$$

é aberto. Além disso, $0 \notin C$ pois A e B são disjuntos. Tomando $u_0 = 0$, pelo **Lema 2.4**, existe $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(u - v) < 0$ para todo $u - v \in C$, ou seja, $f(u) < f(v)$ para todo $u \in A$ e todo $v \in B$. Segue que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$a = \sup_{u \in A} f(u) \leq \inf_{v \in B} f(v) = b.$$

Por fim, escolhendo $\alpha \in [a, b]$, concluímos que

$$f(u) \leq \alpha \leq f(v)$$

para todo $u \in A$ e todo $v \in B$, ou seja, o hiperplano $H = f^{-1}(\alpha)$ separa A e B no sentido amplo. $\square$

Teorema 2.18 (Segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach). *Sejam U um espaço vetorial normado e $A, B \subset U$ subconjuntos convexos não-vazios e disjuntos, onde A é fechado e B é compacto. Então existe um hiperplano fechado $H = f^{-1}(\alpha)$ que separa A e B no sentido estrito.*

Demonstração. Inicialmente, note que para todo $\epsilon > 0$, os conjuntos

$$A_\epsilon = A + B_\epsilon(0) = \bigcup_{u \in A} (u + B_\epsilon(0))$$

e

$$B_\epsilon = B + B_\epsilon(0) = \bigcup_{v \in B} (v + B_\epsilon(0))$$

são convexos, abertos e não-vazios.

Afirmção: A_ϵ e B_ϵ são disjuntos para todo ϵ suficientemente pequeno.

Suponha, por absurdo, que a afirmação seja falsa, então existe uma sequência (ϵ_n) , tal que $\epsilon_n \rightarrow 0$, e $A_{\epsilon_n} \cap B_{\epsilon_n} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in A_{\epsilon_n} \cap B_{\epsilon_n}$, onde

$$z_n = u_n + a_n = v_n + b_n,$$

com $a_n \in A$, $b_n \in B$ e $u_n, v_n \in B_{\epsilon_n}(0)$. Logo

$$\begin{aligned} \|a_n - b_n\| &= \|a_n - z_n + z_n - b_n\| \\ &\leq \|a_n - z_n\| + \|z_n - b_n\| \\ &\leq \|u_n\| + \|v_n\| < 2\epsilon_n. \end{aligned}$$

Como B é compacto, (b_n) possui uma subsequência (b_{n_k}) que converge para um certo $b \in B$. Daí note que

$$\|a_{n_k} - b\| = \|a_{n_k} - b_{n_k} + b_{n_k} - b\| \leq \|a_{n_k} - b_{n_k}\| + \|b_{n_k} - b\|,$$

ou seja, $a_{n_k} \rightarrow b$ e como A é fechado, $b \in A$ o que implica que $b \in A \cap B$, o que, por hipótese, é um absurdo e está provada a afirmação.

Seja $\epsilon > 0$, tal que A_ϵ e B_ϵ sejam disjuntos. Pelo **Teorema 2.18**, existe um hiperplano $H = f^{-1}(\alpha)$ que separa A_ϵ e B_ϵ no sentido amplo, portanto

$$f(u + \epsilon z) \leq \alpha \leq f(v + \epsilon z)$$

para todo $u \in A$, todo $v \in B$ e todo $z \in B_1(0)$. Daí,

$$f(x) + \epsilon\|f\| \leq \alpha \leq f(y) + \epsilon\|f\|.$$

Portanto f separa A e B no sentido estrito. □

Exemplo 2.3. Considere os conjuntos

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}; x \geq 0 \text{ e } y \geq \frac{1}{x} \right\}$$

e

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}; x \geq 0 \text{ e } y \geq -\frac{1}{x} \right\}.$$

Note que A e B são fechados, contudo nenhum dos conjuntos é compacto. Observe que a única reta (hiperplano) que separa A e B no sentido amplo é a reta $x = 0$. Como a reta é assíntota vertical de $\frac{1}{x}$ e de $-\frac{1}{x}$, então não podemos separar A e B no sentido estrito.

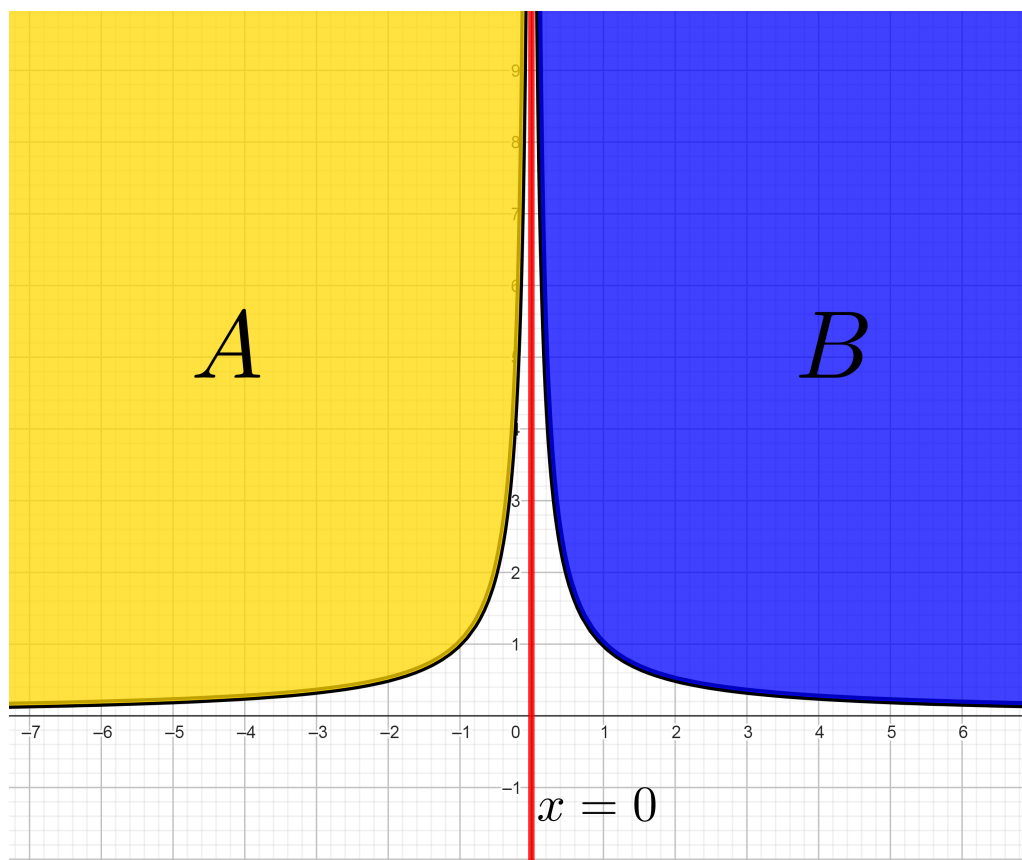


Figura 2.9: Conjuntos A e B do **Exemplo 2.3**

Algumas Aplicações do Teorema de Hahn-Banach

Com o objetivo de ilustrar a importância do Teorema de Hahn Banach no desenvolvimento da Análise Funcional, neste capítulo, apresentamos algumas aplicações valentes so ponto de vista teórico.

3.1 Operadores Adjuntos

Definição 3.1. *Sejam U e V espaços vetoriais normados e $A : U \rightarrow V$ uma aplicação linear limitada não-nula. A aplicação $A^* : V^* \rightarrow U^*$, definida por*

$$A^*(f) = f \circ A$$

para todo $f \in V^$, é chamada operador adjunto.*

Teorema 3.1. *O operador é uma aplicação linear limitada e*

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Demonstração. Sejam $f, g \in V^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Para todo $u \in U$

$$\begin{aligned} A^*(\alpha f + g)(u) &= (\alpha f + g)(A(u)) \\ &= \alpha f(A(u)) + g(A(u)) \\ &= \alpha A^*(f)(u) + A^*(g)(u) \end{aligned}$$

O que prova a linearidade de A^* . Agora, observe que para todo $u \in U$ e $f \in V^*$, temos

$$\|A^*(f)(u)\| = \|f(A(u))\| \leq \|f\| \|A(u)\| \leq \|f\| \|A\| \|u\|,$$

logo

$$\|A^*(f)\| \leq \|A\| \|f\|,$$

isto é, A^* é limitada e

$$\frac{\|A^*(f)\|}{\|f\|} \leq \|A\| \Rightarrow \|A^*\| = \sup_{f \in V^* \setminus \{0\}} \frac{\|A^*(f)\|}{\|f\|} \leq \|A\|.$$

Pelo **Corolário 2.5**, dado um $u_0 \in U$ tal que $\|u_0\| = 1$ e $A(u_0) \neq 0$, existe $f_0 \in V^*$ tal que $\|f_0\| = 1$ e $f_0(A(u_0)) = \|A(u_0)\|$. Daí

$$\|A^*\| = \|A^*(f_0)\| \geq |A^*(f_0)(u_0)| = |f_0(A(u_0))| = \|A(u_0)\|$$

para todo $u_0 \in U$ com $\|u_0\| = 1$. Portanto, concluímos que

$$\|A^*\| \geq \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\|=1}} \|A(u)\|,$$

o que prova que

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Como desejado. □

3.2 Anulador

Definição 3.2. *Seja U um espaço vetorial normado. Para cada subespaço vetorial W de U define*

$$W^\perp = \{f \in U^* : f(w) = 0 \text{ para todo } w \in W\}$$

e para cada F , subespaço vetorial de U^* , define

$$F^\perp = \{u \in U : f(u) = 0 \text{ para todo } f \in F\}.$$

$W^\perp$ e $F^\perp$ são chamados de anuladores de W e F , respectivamente.

Proposição 3.1. *Sejam U um espaço vetorial, W um subespaço vetorial de U e F um subespaço vetorial de U^* . Então $W^\perp$ e $F^\perp$ são fechados.*

Demonstração. Mostremos o resultado para $W^\perp$. Seja $f \in \overline{W^\perp}$, logo existe uma sequência (f_n) de pontos de $W^\perp$, tal que $f_n \rightarrow f$. Note que para cada $w \in W$, $f_n(w) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica que para cada $w \in W$

$$f(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = 0,$$

ou seja, $f \in W^\perp$ provando a afirmação. A demonstração para $F^\perp$ é análoga. □

Proposição 3.2. *Sejam U um espaço vetorial, W um subespaço vetorial de U e F um subespaço vetorial de U^* . Então*

$$(W^\perp)^\perp = \overline{W} \text{ e } (F^\perp)^\perp \supseteq \overline{F}.$$

Demonstração. Seja $u \in W$. Pela definição de $W^\perp$, $f(u) = 0$, para todo $f \in W^\perp$. Tomando $F = W^\perp$, segue da definição de $F^\perp$, que $u \in F^\perp = (W^\perp)^\perp$, ou seja, $W \subseteq (W^\perp)^\perp$. Como, pela proposição anterior, $(W^\perp)^\perp$ é fechado, temos que

$$\overline{W} \subseteq \overline{(W^\perp)^\perp} = (W^\perp)^\perp.$$

Agora, suponha, por absurdo, que a recíproca não seja verdadeira, isto é, que $(W^\perp)^\perp \setminus \overline{W} \neq \emptyset$ e seja $u_0 \in (W^\perp)^\perp \setminus \overline{W}$. Como $\overline{W}$ é fechado e $\{u_0\}$ é compacto, segue da segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach que existe $f_0 \in U^*$ que separa $\overline{W}$ e $\{u_0\}$ tal que

$$f_0(w) < \alpha < f_0(u_0), \quad (3.1)$$

para todo $w \in W$ e algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Da primeira desigualdade, segue que f_0 se anula em W e, portanto, $f_0 \in W^\perp$. Daí, como $u_0 \in (W^\perp)^\perp$, $f_0(u_0) = 0$. Logo, por (3.1),

$$0 = f_0(w) < \alpha < f_0(u_0) = 0,$$

o que é um absurdo. Portanto $(W^\perp)^\perp = \overline{W}$.

Para mostrarmos que $(F^\perp)^\perp \supseteq \overline{F}$, tome $f \in F$. Pela definição de $F^\perp$, $f(u) = 0$, para todo $u \in F^\perp$. Tomando $W = F^\perp$, temos, pela definição de $W^\perp$, que $f \in W^\perp = (F^\perp)^\perp$, ou seja, $F \subseteq (F^\perp)^\perp$. Como, pela proposição anterior, $(F^\perp)^\perp$ é fechado, temos

$$\overline{F} \subseteq \overline{(F^\perp)^\perp} = (F^\perp)^\perp.$$

□

3.3 Espaços Reflexivos

Definição 3.3. *Sejam U e V espaços vetoriais normados. Se uma aplicação $T : U \rightarrow V$ é linear, limitada, bijetiva e, para todo $u \in U$,*

$$\|T(u)\| = \|u\|,$$

então T é chamada de isomorfismo isométrico e U e V são ditos isométricamente isomorfos.

Definição 3.4. *Seja U um espaço vetorial normado. O espaço*

$$U^{**} = (U^*)^* = \{f : U^* \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é linear e contínua}\}$$

é chamado de espaço bidual de U .

Proposição 3.3. *Seja U um espaço vetorial normado e defina*

$$\begin{aligned} J : U &\rightarrow U^{**} \\ u &\mapsto Ju \end{aligned}$$

onde $Ju : U^ \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $Ju(f) = f(u)$. Então J é uma aplicação linear limitada e, além disso, J define uma isometria entre U e Ju .*

Demonstração. É fácil ver que Ju é linear. Mostremos que J é linear. Sejam $u, v \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Para cada $f \in U^*$

$$J(\alpha u + v)(f) = f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v) = \alpha Ju(f) + Jv(f),$$

Portanto $J(\alpha u + v) = \alpha Ju + Jv$ o que prova sua linearidade. Agora, note que para todo $u \in U$ e todo $f \in U^*$

$$\|Ju(f)\| = |f(u)| \leq \|f\|\|u\| = \|u\|\|f\|, \quad (3.2)$$

provando que Ju é limitada. Segue, portanto de (3.2)

$$\|Ju\| \leq \|u\|,$$

ou seja, J é limitado. Para mostrar que J é uma isometria, note que, pelo **Corolário 2.5** (Corolário do Teorema de Hahn-Banach), para cada $u \in U$ existe um funcional linear $f_0 \in U^*$ tal que $\|f_0\| = 1$ e $f_0(u) = \|u\|$, daí

$$\|Ju\| = \sup_{\substack{f \in U^* \\ \|f\|=1}} |Ju(f)| \geq |Ju(f_0)| = |f_0(u)| = \|u\|,$$

Portanto

$$\|Ju\| = \|u\|$$

para todo $u \in U$. Como queríamos mostrar. □

Observe que se $u \neq v$,

$$\|Ju - Jv\| = \|J(u - v)\| = \|u - v\| > 0,$$

o que implica que $Ju \neq Jv$, ou seja, J é injetiva.

Definição 3.5. Dizemos que um espaço de Banach U é reflexivo, se o operador J da **Proposição 3.3** é sobrejetiva.

Teorema 3.2. Seja U um espaço vetorial reflexivo. Se W é um subespaço vetorial fechado de U , então W é reflexivo.

Demonstração. Seja $f^* \in W^{**}$. Defina

$$\begin{aligned} I : U^* &\rightarrow W^* \\ f &\mapsto f|_W. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Hahn-Banach I é sobrejetiva. Agora, note que para todo $f \in U^*$ temos

$$\begin{aligned} \|I(f)\| &= \|f|_W\| \\ &= \sup_{w \in W \setminus \{0\}} \frac{|f|_W(w)|}{\|w\|} \\ &= \sup_{w \in W \setminus \{0\}} \frac{|f(w)|}{\|w\|} \\ &\leq \sup_{u \in U \setminus \{0\}} \frac{|f(u)|}{\|u\|} = \|f\|. \end{aligned}$$

logo

$$\|I\| = \sup_{f \in U^* \setminus \{0\}} \frac{\|I(f)\|}{\|f\|} \leq 1.$$

Portanto I é contínua e desta forma $g^* = f^* \circ I \in U^{**}$. Como U é reflexivo, existe $u_0 \in U$ tal que $Ju_0 = g^*$.

Afirmção: $u_0 \in W$.

Suponha, por absurdo, que $u_0 \notin W$. Como W é fechado, pelo teorema de Hahn-Banach, existe $f_0 \in U^*$ tal que $W \subset N(f_0)$ e $f_0(u_0) = 1$. Daí

$$0 = f^*(f_0|_W) = (f^* \circ I)(f_0) = g^*(f_0) = Ju_0(f_0) = f_0(u_0) = 1,$$

o que é um absurdo.

Portanto W é reflexivo e está provado o teorema. □

Mostraremos, agora, que, na **Proposição 3.2**, se U é reflexivo, então em $(F^\perp)^\perp \supseteq \overline{F}$, valendo, como consequência, a igualdade. Essa proposição também é uma consequência do teorema de Hahn-Banach.

Teorema 3.3. *Sejam U um espaço vetorial, W um subespaço vetorial de U e F um subespaço vetorial de U^* . Se U é reflexivo, então*

$$(F^\perp)^\perp = \overline{F}.$$

Demonstração. Mostremos que $(F^\perp)^\perp \subseteq \overline{F}$. Suponha, por absurdo, que $(F^\perp)^\perp \not\subseteq \overline{F}$, logo $(F^\perp)^\perp \setminus \overline{F} \neq \emptyset$. Seja $f_0 \in (F^\perp)^\perp \setminus \overline{F}$. Como $\overline{F}$ é fechado e $\{f_0\}$ é compacto, segue da segunda forma geométrica do teorema de Hahn-Banach que existe $f^* \in U^{**}$ que separa $\overline{F}$ e $\{f_0\}$ no sentido estrito, isto é,

$$f^*(f) < \alpha < f^*(f_0) \quad (3.3)$$

para todo $f \in F$ e algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Da primeira desigualdade, segue que f^* se anula em F . Como U é reflexivo, existe $u \in U$ tal que

$$Ju = f^*.$$

Logo

$$Ju(f) = f^*(f) = f(u) = 0$$

para todo $f \in F$, isto é, $u \in F^\perp$. Como $(f_0 \in F^\perp)^\perp$, $f_0(u) = 0$. Segue, portanto, de (3.3) que

$$0 = f(u) = f^*(f) < \alpha < f^*(f_0) = f_0(u) = 0,$$

que é um absurdo. Portanto $(F^\perp)^\perp \subseteq \overline{F}$ e, pela **Proposição 3.2**, segue-se o resultado. $\square$

Teorema 3.4. *Seja U um espaço de Banach. Então U é um espaço reflexivo se, e somente se, U^* também é.*

Demonstração. Considere $J : U \rightarrow U^{**}$ e $J^* : U^* \rightarrow U^{***}$, definidas, respectivamente, por

$$J(u)(f) = f(u)$$

e

$$J^*(f)(f^*) = f^*(f).$$

($\Rightarrow$) Supondo que U é reflexivo, queremos mostrar que para cada $f^{**} \in U^{***}$, existe um $f \in U^*$, tal que $J^*(f) = f^{**}$. Dessa forma, seja $f^{**} \in U^{***}$ e defina

$$f = f^{**} \circ J \in U^*.$$

Como U é reflexivo, dado $f^* \in U^{**}$ existe $u \in U$ tal que $f^* = J(u)$. Daí,

$$\begin{aligned} J^*(f)(f^*) &= J^*(f)(J(u)) \\ &= J(u)(f) \\ &= f(u) \\ &= (f^{**} \circ J)(u) \\ &= f^{**}(J(u)) = f^{**}(f^*). \end{aligned}$$

Portanto U^* é reflexivo.

($\Leftarrow$) Supondo, agora, que U^* é reflexivo, mostremos que U é reflexivo. Inicialmente, mostremos que a imagem de J é fechada. Seja $f^* \in U^{**}$ e $(J(u_n))$ uma sequência de pontos de $J(U)$ tal que $J(u_n) \rightarrow f^*$. Em particular, $J(u_n)$ é de Cauchy e, portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|J(u_m) - J(u_n)\| < \epsilon. \quad (3.4)$$

Sempre que $n, m > n_0$. Como

$$\|J(u_m) - J(u_n)\| = \|J(u_m - u_n)\| = \|u_m - u_n\|,$$

observamos que

$$\|u_m - u_n\| < \epsilon$$

sempre que $n, m > n_0$, ou seja, $(u_n) \subset U$ é de Cauchy. Como U é um espaço de Banach, existe $u \in U$ tal que $u_n \rightarrow u$. Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (3.4), temos

$$\|u - u_n\| = \|J(u) - J(u_n)\| \leq \epsilon.$$

para $n > n_0$. Pela unicidade do limite, $f^* = J(u) \in J(U)$ e $J(U)$ é fechado.

Mostremos, agora, que J é sobrejetiva. Suponha, por absurdo, que exista $f_0^* \in U^{**} \setminus J(U)$. Pela segunda forma geométrica do teorema de Hahn-Banach, existe $f_0^{**} \in U^{***}$ que separa $\{f_0^*\}$ e $J(U)$, isto é,

$$f_0^{**}(f^*) < \alpha < f_0^{**}(f_0^*) \quad (3.5)$$

para todo $f^* \in J(U)$ e algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Deste modo $f_0^{**}(f^*)$ se anula em $J(U)$. Note também que, como U^* é reflexivo, existe $f_0 \in U^*$ tal que $J^*(f_0) = f_0^{**}$. Daí, para todo $u \in U$,

$$f_0(u) = J(u)(f_0) = J^*(f_0)(J(u)) = f_0^{**}(J(u)) = 0$$

e por (3.5),

$$0 = f_0^{**}(f^*) < \alpha < f_0^{**}(f_0^*) = f_0^{**}(0) = 0$$

para todo $f^* \in J(U)$, o que é um absurdo. Portanto $U^{**} = J(U)$ e U é reflexivo. $\square$

3.4 Espaços Separáveis

Definição 3.6. *Sejam C um espaço métrico e S um subconjunto de C . S é dito denso em C se*

$$\overline{S} = C.$$

Exemplo 3.1. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$. Mostremos que, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, existe um número racional no intervalo (a, b) . Seja $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que*

$$b - a > \frac{1}{n_0}. \quad (3.6)$$

Se $b \in \mathbb{Q}$, então, por 3.6,

$$a < b - \frac{1}{n_0},$$

isto é, $b - \frac{1}{n_0} \in (a, b)$. Se por outro lado, $b \notin \mathbb{Q}$, observe que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left[\frac{m}{n_0}, \frac{m+1}{n_0} \right]$$

e defina

$$m_0 = \min \left\{ m \in \mathbb{Z}; b < \frac{m}{n_0} \right\}.$$

Logo $\frac{m_0 - 1}{n_0} < b$.

Mostremos que $a < \frac{m_0 - 1}{n_0}$. Suponha, por absurdo, que $a > \frac{m_0 - 1}{n_0}$, daí

$$b - a < \frac{m_0}{n_0} - \frac{m_0 - 1}{n_0} = \frac{1}{n_0},$$

o que contradiz (3.6). Portanto

$$a < \frac{m_0 - 1}{n_0} < b.$$

Definição 3.7. *Seja um U espaço vetorial normado. Dizemos que U é separável, se existir um subconjunto enumerável de U que é denso em U .*

Exemplo 3.2. *Para todo $1 < p < \infty$, ℓ^p é separável.*

Seja

$$Q_n = \{(q_1, q_2, \dots, q_n, 0, 0, 0, \dots) : q_i \in \mathbb{Q}\}.$$

Como Q_n está claramente em correspondência biunívoca com $\mathbb{Q}^n$, observamos que Q_n é enumerável e, portanto,

$$Q_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$$

também é.

Mostremos que Q_0 é denso em ℓ^p . Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^p$. Então dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\epsilon^p}{2},$$

pois $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} |x_i|^p$ é o resto de uma série convergente. Segue do fato de que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ que existe $q = (q_1, q_2, \dots, q_{n_0}, 0, 0, 0, \dots) \in Q_0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n_0} |x_i - q_i|^p < \frac{\epsilon^p}{2},$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \|x - q\| &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - q_i|^p \\ &= \sum_{i=1}^{n_0} |x_i - q_i|^p + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} |x_i|^p \\ &< \frac{\epsilon^p}{2} + \frac{\epsilon^p}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto Q_0 é denso em ℓ^p e ℓ^p é separável.

□

Exemplo 3.3. ℓ^∞ não é separável.

Considere o subconjunto não-enumerável $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subset \ell^\infty$, que é o conjunto das sequência de coordenadas zeros e uns. Note que se $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, com $x \neq y$, então $\|x - y\| = 1$. Seja $\mathcal{B}$ a coleção de bolas de centro em $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subset \ell^p$ e raio $\frac{1}{2}$. Observe que as bolas de $\mathcal{B}$ não se interceptam. De fato, dados $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, mostremos que, se $B_{\frac{1}{2}}(x) \cap B_{\frac{1}{2}}(y) \neq \emptyset$, então $B_{\frac{1}{2}}(x) = B_{\frac{1}{2}}(y)$. Seja $a \in B_{\frac{1}{2}}(x) \cap B_{\frac{1}{2}}(y)$, logo

$$\|x - y\| = \|x - a - (y - a)\| = \|x - a\| + \|y - a\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Daí $x = y$ e, por consequência, $B_{\frac{1}{2}}(x) = B_{\frac{1}{2}}(y)$. Em vista disso, $\mathcal{B}$ está em correspondência biunívoca com $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Logo $\mathcal{B}$ é não enumerável. Portanto se um conjunto Q é denso em ℓ^p toda bola de $\mathcal{B}$ possui um elemento de Q , e aí Q é não enumerável e, portanto, ℓ^p não pode ser separável.

Teorema 3.5. *Seja U um espaço vetorial normado. Se U^* é separável, então U também é.*

Demonstração. Seja $\{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$ um subconjunto enumerável e denso em U^* . Como

$$\|f_n\| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\|=1}} |f_n(u)|,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $u_n \in U$, onde $\|u_n\| = 1$ tal que

$$|f_n(u_n)| \geq \frac{\|f_n\|}{2}.$$

Obtemos, então, a sequência (u_n) . Seja W o fecho do conjunto

$$\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i u_i : \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Afirmção: W é separável.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$Q_n = \left\{ \sum_{i=0}^n q_i u_i : q_i \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Note que Q_n é isomorfo a $\mathbb{Q}^n$ que é enumerável. Logo Q_n é enumerável e, portanto,

$$Q = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$$

também é. Daí é fácil ver que

$$W = \overline{\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i u_i : \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}} = \overline{Q}.$$

Portanto W é separável e está provada a afirmação.

Mostremos, agora, que $W = U$. Suponha, por absurdo, que existe $u_0 \in U \setminus W$, então, pela segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach, existe $f_0 \in U^*$, com $\|f_0\| = 1$, que se anula em W e $f_0(u_0) \neq 0$. Como $u_n \in W$, $f_0(u_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\|f_n\|}{2} &\leq |f_n(u_n)| \\ &= |f_n(u_n) - f_0(u_n)| \\ &\leq \|f_n - f_0\| \|u_n\| \\ &= \|f_n - f_0\|, \end{aligned}$$

o que implica que

$$1 = \|f_0\| \leq \|f_0 - f_n\| + \|f_n\| \leq \|f_0 - f_n\| + 2\|f_n - f_0\| = 3\|f_n - f_0\|,$$

isto é,

$$\|f_n - f_0\| \geq \frac{1}{3}.$$

O que contradiz o fato de $\{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$ ser denso. $\square$

Corolário 3.6. *Seja U um espaço reflexivo e separável. Então U^* é separável.*

Demonstração. Sejam $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ um subconjunto enumerável e denso em U e $f^* \in U^{**}$. Como U é reflexivo, existe $u \in U$ tal que $J(u) = f^*$ e como $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ é denso em U , dado $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$, onde $\|u_n - u\| < \epsilon$. Daí

$$\begin{aligned} \|J(u_n) - f^{**}\| &= \|J(u_n) - J(u)\| \\ &= \|J(u_n - u)\| \\ &= \|u_n - u\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto $\{J(u_1), J(u_2), \dots, J(u_n), \dots\}$ é denso em U^{**} , ou seja, U^{**} é separável. Pelo **Teorema 3.5** que U^* é separável. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] Banach, S. *Sur les fonctionelles linéaires I e II*, Studia Mathematica, **1** (1929), 212-213.
- [2] Biezuner, R., J. *Notas de Aula Análise Funcional*. Departamento de Matemática, ICEX, UFMG, (2009).
- [3] Brazis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, (2010).
- [4] César, R. *Introdução a Análise Funcional*. Springer, IMPA (Coleção Projeto Euclides), Rio de Janeiro, (2012).
- [5] De Queiroz, O. *NOTAS DE AULA DE ANÁLISE FUNCIONAL*. Departamento de Matemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas (2013).
- [6] Dieudonné, J. *Choix d'oeuvres mathématiques I*, Hermann, Paris (1981).
- [7] Feinberg, M.; Lavine, R *Thermodynamics based on the Hahn-Banach theorem: the Clausius inequality*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **82** (1983), 203-293.
- [8] Gray, J. ; Micallé, M. *About the cover: The work of Jesse Douglas on minimal surfaces*, Bull. Amer. Math, **45** (2008), 293-302.
- [9] Hahn, H. *Über linearer Gleichungssysteme in linearer Räume*, J. Reine Angew. Math, **157** (1927), 216-217.
- [10] Helly, E. *Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Monatsh. für Math. Phys. **32** (1921), 60-91.
- [11] Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, **1** (1978), 1-33.

- [12] Lima, E., L. *Analise Real Volume 1*, Funções de uma variável. **8.ed.** Rio de Janeiro. IMPA (2006), 15-19.
- [13] Mazur, S. ; Orlicz, W. *Sur les espaces métriques linéaires II*, Studia Mathematica, **13** (1953), 137-179.
- [14] Mazur, S. *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Mathematica, **4** (1933), 70-84.
- [15] Narici, Lawrence; Beckenstein, E. *Topological Vector Spaces Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics*, CRC Press, **2** (2010).
- [16] O'Connor, J., J. ; Robertson, E., F. *Eduard Helly*. MacTutor. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Helly/>. Acesso em: 10 de mar. 2022.
- [17] O'Connor, J., J. ; Robertson, E., F. *Hans Hahn*. MacTutor. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hahn/>. Acesso em: 1 de jun. 2022.
- [18] O'Connor, J., J. ; Robertson, E., F. *Stefan Banach*. MacTutor. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Banach/>. Acesso em: 1 de jun. 2022.
- [19] Pták, V. *On a Theorem of Mazur and Orlicz*, Studia Mathematica, **15** (1956), 365-366.
- [20] Pellegrino, D. ; Teixeira, E. ; Botelho, G. *Fundamentos de Análise Funcional*. Rio de Janeiro SBM, (2012).
- [21] Sanchis, R, P. *O Axioma de Escolha, o Lema de Zorn e o Teorema de Zermelo 2010*, Notas de Aula-Universidade Federal de Viçosa, (2010).