



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU EM FÍSICA

Ramires Nascimento da Silva

Métricas Tipo-Gödel na Gravitação Modificada $f(R, Q, P)$

João Pessoa/PB

2023

MÉTRICAS TIPO-GÖDEL NA GRAVITAÇÃO MODIFICADA $f(R, Q, P)$

Ramires Nascimento da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, na área de concentração: Teoria de Campos e Partículas.

Orientador: Prof. Albert Petrov

Co-orientador: Prof. Paulo José Ferreira Porfírio da Silva

João Pessoa/PB

2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586m Silva, Ramires Nascimento da.
Métricas tipo-Gödel na gravitação modificada
 $f(R,Q,P)$ / Ramires Nascimento da Silva. - João Pessoa,
2023.
76 f. : il.

Orientação: Albert Petrov.
Coorientação: Paulo José Ferreira Porfírio da Silva.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Relatividade geral. 2. Métricas tipo-Gödel. 3.
Teorias alternativas da gravitação. 4. Teorias de altas
curvaturas. I. Petrov, Albert. II. Silva, Paulo José
Ferreira Porfírio da. III. Título.

UFPB/BC

CDU 530.12(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de dissertação de **Mestrado** do aluno **Ramires Nascimento da Silva**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Física de Partículas Elementares e Campos.

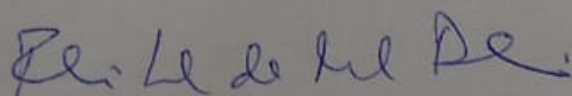
Aos vinte e um dias do mês de junho do ano de dois mil e vinte e três, às 14:00, nas dependências do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a dissertação de Mestrado, na área de Física de Partículas Elementares e Campos, de **Ramires Nascimento da Silva**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Albert Petrov (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Paulo José Ferreira Porfírio da Silva (UFPB), coorientador, Fábio Leal de Melo Dahia (UFPB) e Tiago Homero Mariz do Nascimento (UFAL). Dando início aos trabalhos, o Prof. Albert Petrov comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de dissertação intitulada "*Métricas tipo-Gödel na Gravitação Modificada $f(R,Q,P)$* ". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **21 de junho de 2023**.



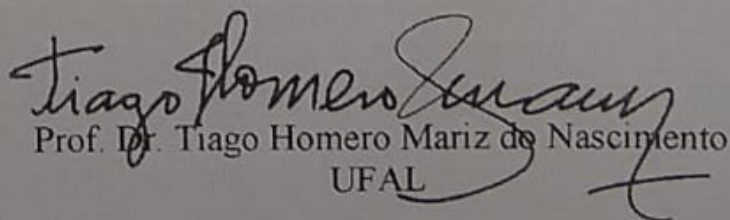
Prof. Dr. Albert Petrov
Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br
PAULO JOSE FERREIRA PORFIRIO DA SILVA
Data: 22/06/2023 09:39:55-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Paulo José Ferreira Porfírio da Silva
Coorientador - UFPB



Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
PPGF/UFPB



Prof. Dr. Tiago Homero Mariz do Nascimento
UFAL

À minha esposa, filhos, papai e mamãe, professores, amigos, aos meus orientadores.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais, pela proteção, pelo zelo e amor a mim dedicados em todos os momentos da minha vida. Agradeço aos meus professores, pela partilha de conhecimento, aos colegas de turma e aos colegas de trabalho, pela ajuda dispensada, quando necessitei, a todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

A minha extrema gratidão é ofertada à minha esposa e a meus três filhos pela blandície, pela lealdade e pelo cuidado, sempre presentes, pela aceitação à minha dedicação aos estudos em detrimento do meu companheirismo.

Meu agradecimento especial é para os meus competentes Professores, Albert Petrov e Paulo Porfírio, pelo sustentáculo incondicional, em todo e qualquer momento. Exalto a esses dedicados profissionais que, através do convívio, sempre harmonioso e respeitoso, por meio das suas altruístas orientações, dos seus desprendidos conselhos, das suas críticas construtivas e dos seus ensinamentos, resultaram na formulação desta dissertação.

In memoriam, meu penhorado grato respeito aos Professores Ivon Palmeira Fitipaldi e Luiz Guimarães Ferreira, meus primeiros orientadores, quando eu ainda era estudante de graduação em Física, na estimada Universidade Federal de Pernambuco, e estudante de pós-graduação em Física, em São Paulo, na Universidade de Campinas, respectivamente.

Sem tergiversar, minha excelsa gratidão é inteiramente dedicada ao meu Deus por me conceder vida, saúde e sabedoria.

**"He stretcheth out the north over the empty
place, and hangeth the earth upon nothing."**

(Job 27:2, King James Version Bible)

Resumo

Nesta dissertação, discorremos sobre a teoria da gravidade de Einstein e teorias modificadas da gravitação. Explanamos sobre os aspectos históricos, princípios teóricos e fundamentos matemáticos da relatividade geral (RG), com alusão à solução de Schwarzschild, à métrica de Friedmann-Robertson-Walker e às métricas tipo-Gödel. Apresentamos as motivações que deram surgimento as teorias modificadas da gravidade de Einstein. Focamos nosso estudo na verificação da consistência das métricas tipo-Gödel homogêneas no espaço-tempo, em um modelo específico da gravidade modificada conhecido por $f(R, Q, P)$ e na presença de um dado conteúdo de matéria. Ressalta-se que f é uma função dos invariantes de curvatura: R , escalar de Ricci, Q a contração de dois tensores de Ricci e P a contração de dois tensores de Riemann. As geometrias tipo-Gödel possuem a interessante propriedade de permitir a violação de causalidade (global), a depender de como os parâmetros da métrica se relacionam entre si. Comparamos esta teoria com a RG usual, verificamos a consistência das soluções tipo-Gödel dentro da gravidade $f(R, Q, P)$ e discutimos as questões relacionadas a causalidade. Explicitamente, mostramos que na gravidade $f(R, Q, P)$ existem novas soluções completamente causais tipo-Gödel não tendo análogo na RG. Em particular, uma notável solução tipo-Gödel correspondente ao espaço conformalmente plano e maximalmente simétrico para fontes de matéria fisicamente bem motivadas, sem necessidade de introduzir a constante cosmológica Λ . Tomamos alguns modelos específicos, por exemplo: $f(R, Q, P) = R - \frac{\mu^{4n+2}}{(aR^2 + bQ + cP)^n}$, para ilustrar tais resultados gerais. Notavelmente, também encontramos uma solução incomum de vácuo completamente causal na presença de uma constante cosmológica não trivial que corresponde ao caso $m^2 = 4\omega^2$.

keywords: Relatividade geral. Métricas tipo-Gödel. Gravidade $f(R, Q, P)$. Teorias de altas curvaturas.

Abstract

In this dissertation, we review the most relevant properties of Einstein's theory of gravity and modified theories of gravity. We address the fundamental principles and mathematical tools on which general relativity (GR) is based. In particular, we study the Schwarzschild solution and Gödel-type universes and Friedmann-Robertson-Walker metric in the GR framework. Next we discuss the motivations that gave rise to Einstein's modified theories of GR. We focus our study on verifying the consistency of spacetime-homogeneous Gödel-type metrics within the particular of gravity, $f(R, Q, P)$, for well-motivated matter sources. It is worth stressing that f is an arbitrary function of curvature invariants: R is the Ricci scalar, Q is the contraction of two Ricci tensors and P is the contraction of two Riemann tensors. As it is well known, such geometries allow for global causality violation. We compare this theory with standard GR, we check the consistency of Gödel-type solutions within the $f(R, Q, P)$ gravity and we discuss issues related to causality. Explicitly, we find new completely causal Gödel-type solutions without any analogue in GR. In particular, a remarkable Gödel-type solution corresponding to the conformally flat space and maximally symmetric space, with no need for cosmological constant Λ , has been found. We provide general conditions to engender completely causal solutions in a manner utterly different from general relativity. We take some specific models, for instance, $f(R, Q, P) = R - \frac{\mu^{4n+2}}{(aR^2 + bQ + cP)^n}$, to illustrate the general results. Notably, we also find an unusual completely causal vacuum solution in the presence of a non-trivial cosmological constant which corresponds to the case $m^2 = 4\omega^2$

Keywords: General relativity. Gödel-type metrics. $f(R, Q, P)$ gravity. Higher-curvature theories.

Lista de Publicações

1) Nascimento, J. R. and Petrov, A. Yu. and Porfirio, P. J. and da Silva, Ramires N. *Gödel-type solutions within the $f(R, Q, P)$ gravity*, European Physical Journal C, 83: 331 (2023). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11521-y>.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagramas da gravidade de Leonardo da Vinci. Crédito da figura: Gharib, M.; Roh, C.; Noca, F. <i>Leonardo da Vinci's Visualization of Gravity as a Form of Acceleration</i> . Leonardo, MIT Press, v. 56, n. 1, p. 21–27, 2023 [44].	6
Figura 2 – Experimento mental de Einstein do elevador em queda livre. Crédito da figura: D’Inverno, R.; Vickers, J. <i>Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding</i> . Oxford University Press, 2022 [47].	9
Figura 3 – Homeomorfismo inverso: sistema de coordenadas locais na variedade $\mathcal{M}$. Crédito da figura: Lima, E. L. <i>Variedades Diferenciáveis</i> . [S.l.:s.n.], 2007 [48].	13
Figura 4 – Homeomorfismo de mudança de coordenadas. Crédito da figura: Lima, E. L. <i>Variedades Diferenciáveis</i> . [S.l.:s.n.], 2007 [48].	14
Figura 5 – $T_p\mathcal{M}$ espaço tangente em um ponto p da variedade $\mathcal{M}$. Crédito da figura: página da internet da wikipedia, https://pt.wikipedia.org/wiki/Espaço_tangente	15
Figura 6 – Viagem no tempo no universo de Gödel. Crédito da figura: Malament, D. B. <i>Time Travel in the Gödel Universe</i> . v. 1984, n. 2, p. 91–100, 1984. [57]	26

Lista de abreviaturas e siglas

RG: Relatividade Geral

RR: Relatividade Restrita

RE: Relatividade Especial

CTC: Closed Time-like Curve

LIGO: Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory

CMB: Cosmic Microwave Background

CDM: Cold Dark Matter

CCP: Cosmological Coincidence Problem

FOG: Fourth Order Gravity

FRW: Friedmann-Robertson-Walker

HL: Horava-Lifshitz

SME: Standard Model Extension

CPT: Carga-Paridade-Tempo

GHY: Gibbons-Hawking-York

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	RELATIVIDADE GERAL	6
2.1	Aspectos Históricos do Estudo da Gravitação	6
2.2	Princípios da Relatividade Geral	8
2.3	Fundamentos Matemáticos da Relatividade Geral	12
2.4	Equações de Einstein na Descrição Lagrangiana	17
2.5	Solução de Schwarzschild	21
2.6	Métricas Tipo-Gödel	24
3	TEORIAS ALTERNATIVAS DA GRAVITAÇÃO	28
3.1	Constante Cosmológica	28
3.2	Modificação no Setor Gravitacional Puro	31
3.3	Outros Modelos da Gravitação Modificada	32
3.4	Formalismo de Tetradas	34
4	SOLUÇÕES TIPO-GÖDEL NA GRAVIDADE $f(R, Q, P)$	37
4.1	Soluções no Vácuo	40
4.1.1	$f(R, Q, P) = R + \alpha R^2 + \beta Q + \gamma P$	41
4.1.2	$f(R, Q, P) = R + g(aR^2 + bQ + cP)$	42
4.2	Soluções na Presença de Fontes de Matéria	43
4.3	Soluções Completamente Causais	45
5	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS	47
	APÊNDICE A – VARIAÇÃO DA AÇÃO $f(R, Q, P)$	49
	APÊNDICE B – TEORIAS MÉTRICO-AFINS	55
	REFERÊNCIAS	60

1 Introdução

A relatividade geral (RG) introduzida por Albert Einstein é considerada uma das mais belas teorias da física e uma das maiores conquistas da ciência. Nela a gravidade é tratada como uma distorção da estrutura do espaço-tempo causada pela presença de matéria e energia, e as trajetórias das partículas de matéria e energia são influenciadas pela própria curvatura do espaço-tempo [1].

Logo em seu início, a RG consolidou-se ser uma teoria científica, após suas predições estarem em concordância com os resultados obtidos nos testes realizados no sistema solar, os chamados testes clássicos, sendo eles: o desvio na precessão do periélio de Mercúrio, deflexão da luz, *redshift* gravitacional, efeito da dilatação temporal devido à gravidade e o *time delay* (atraso temporal). E, mais recentemente, as detecções das ondas gravitacionais de origem cósmica pelo LIGO¹ [2, 3, 4], a obtenção da primeira imagem da sombra de um buraco negro supermassivo [5] e da sombra de um buraco negro no centro da nossa Via Láctea [6] ratificaram ser a RG uma consagrada teoria científica.

Porém, as primeiras tentativas de modificar a RG surgiram logo após sua publicação, aparentemente desencadeadas principalmente pelo simples desejo de questionar a recém-criada teoria. Todavia, rapidamente, apareceram motivações teóricas e fenomenológicas na busca de acrescentar novos termos a ação de Einstein-Hilbert [7].

Em 1918, apenas três anos após a publicação da teoria da RG, o eminente matemático alemão Hermann Weyl (1885-1955), na intenção de geometrizar o campo eletromagnético, que unificasse a gravitação ao eletromagnetismo, formulou uma generalização da geometria (pseudo) riemanniana, acrescentou um grau de liberdade a mais à geometria (pseudo) riemanniana, dotou o espaço-tempo de uma nova grandeza geométrica, além do tensor métrico [8]. Essa nova grandeza aparece no modo de um campo de 1-forma, estritamente relacionado com a lei de transporte paralelo de vetores, ao longo de uma curva fechada, no espaço-tempo, cujas propriedades muito se assemelham com as propriedades do 4-potencial eletromagnético da teoria de Maxwell. Weyl abandonou sua ideia, após Einstein apontar falhas em sua teoria, mais especificamente quando se buscava certas interpretações relativas a definição de tempo próprio [9].

Em 1923, Arthur Stanley Eddington (1882-1944), conhecido pela primeira verificação experimental da RG durante um eclipse solar ocorrido em 1919, começou a considerar modificações da teoria pela inclusão de invariantes de ordem superior na ação

¹ Observatório de ondas gravitacionais por interferômetro laser. Do inglês: *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* - LIGO.

de Einstein-Hilbert [10].

Em 1933, Fritz Zwicky (1898-1974), e em 1959, Kahn e Woltjer, publicaram artigos sobre observações astrofísicas que demonstravam haver anomalia nos movimentos das galáxias dentro dos seus aglomerados. A massa dos aglomerados, deduzida a partir da observação da luz por eles emitidos, era insuficiente para explicar por que as galáxias mais afastadas do centro permaneciam ligadas aos aglomerados [11, 12].

Em 1965, Vera Cooper Rubin (1928-2016) estudando as curvas de rotação de galáxias espirais também encontrou discrepância na velocidade de rotação das estrelas afastadas do centro galáctico [13]. Diante disto, estes astrônomos apresentaram a hipótese de que grande parte da massa dos aglomerados e das galáxias era constituída por matéria escura, um novo tipo de matéria exótica que deveria ser diferente da usual, exercendo atração gravitacional sobre outros corpos mas não interagindo com eles de nenhuma outra forma [14].

No campo teórico, a não renormalização da RG, por conseguinte, não ser ela convencionalmente quantizada, manifestou ainda mais as limitações da tão bem sucedida teoria de Einstein. Utiyama e De Witt, em 1962, mostraram que implementando termos de curvatura de ordem superior na ação de Einstein-Hilbert conduz a renormalização em um loop [15, 16]. Mais tarde, Stelle mostrou que as atribuições de ordem superior são de fato renormalizáveis, mas não unitárias [17]. Resultados mais recentes mostram que quando correções quânticas ou advindas da teoria das cordas são levadas em conta, na ação gravitacional efetiva ou a baixas energias, surgem naturalmente invariantes de curvatura de ordem superior [18].

Sob outra perspectiva, a radiação cósmica de fundo em Microondas (*Cosmic Microwave Background* - CMB) e levantamentos de supernovas, produziram dados observacionais recentes indicando ser o balanço de energia do universo composto de aproximadamente 6% de matéria bariônica comum, 26% de matéria escura, 68% de energia escura e mais uma contribuição quase desprezível de radiação $\sim 10^{-3}\%$ [19, 20]. Deste modo, apenas aproximadamente 6% da composição da matéria e energia do universo é explicada de maneira plausível.

Em 1998, foi observado através dos dados fornecidos pelo CMB que o universo se apresenta em processo de expansão acelerada, ao contrário das expectativas anteriores [21]. O modelo mais simples que se ajusta adequadamente aos dados observacionais cosmológicos e astrofísicos é o modelo Λ CDM (Λ -Cold Dark Matter), complementado por algum cenário inflacionário, geralmente baseado em algum campo escalar chamado *inflaton*. Além de não explicar a origem do *inflaton* ou a natureza do setor escuro do universo, o modelo Λ CDM está sobrecarregado com os conhecidos problemas da constante cosmológica, segundo o qual o valor observado da constante cosmológica é extravagantemente pequeno a ser

comparado com o seu valor teórico, atribuído ao ajuste fino (*fine-tuning*), à energia do vácuo dos campos de matéria² [22].

Curiosamente, a teoria quântica de campos interpreta a constante cosmológica Λ como sendo a densidade de energia do vácuo associada à flutuação dos campos quânticos e definida em função de três constantes fundamentais da natureza, quais sejam: a velocidade da luz no vácuo c , a constante de Planck h e a constante gravitacional de Newton G . A propósito, se caso interpretássemos Λ como sendo uma nova constante da natureza, isso poderia implicar no nascimento de uma nova física.

Infelizmente, as várias tentativas de motivar diretamente a presença de uma constante cosmológica ou propor dinâmicas alternativas à energia escura não é livre de problemas. Por exemplo, o chamado princípio antrópico para a magnitude de Λ [23], mesmo quando colocados em terrenos mais firmes através da ideia da paisagem antrópica ou de cordas [24], ainda faz com que muitos físicos se sintam desconfortáveis devido à sua natureza probabilística. Ademais, cenários simples para a dinâmica da energia escura, como quintessência [25, 20] não parecem estar tão bem motivados teoricamente como seria de desejar.

Além do mais, o problema da coincidência cosmológica³ faz-nos perguntar o porquê de estarmos presentes no exato momento no qual estamos observando o fato da densidade de energia da constante cosmológica ser comparável com a densidade da matéria escura do universo. Uma vez que há apenas um período extremamente curto de tempo na evolução do universo que isto acontece [26, 27]. Esses problemas tornam o atual modelo cosmológico padrão, Λ CDM, mais um ajuste empírico aos dados cuja motivação teórica pode ser considerada bastante pobre.

Desta maneira, o interesse ao estudo das teorias alternativas da gravidade tem ganhado cada vez mais destaque, objetivando solucionar os problemas que surgem em face da aceleração cósmica e da ausência de uma consistente teoria quântica da gravitação⁴. Há um vasto e variado campo a ser explorado nas muitas teorias tentativas, citamos como exemplo, aquelas com modificações na ação de Einstein-Hilbert que inclui invariantes de curvatura de ordem superior. A relevância de tais termos acrescidos na ação de Einstein-Hilbert foi considerada restrita a regimes de gravidade muito forte e esperava-se que eles fossem suprimidos por pequenos acoplamentos, como seria de se esperar quando considerações simples da teoria de campos efetiva são levadas em conta.

Portanto, as correções quânticas para a RG se tornam importantes apenas em escalas próximas à escala de Planck e, conseqüentemente, no universo primitivo ou perto

² Os valores previstos para a constante cosmológica excede aos valores observados experimentalmente em cerca de 121 ordens de magnitude.

³ Do inglês: *Cosmological Coincidence Problem* - CCP.

⁴ Existem propostas como a teoria de cordas e *loop quantum gravity*.

de singularidades de buracos negros. Existem estudos relevantes de Starobinsky, como o do bem conhecido cenário inflacionário impulsionado por curvatura [28], e trabalhos realizados por Brandenberger e Gao na tentativa de evitar singularidades cosmológicas e de buracos negros [29, 30]. Logo, não foi esperado que tais correções pudessem afetar a fenomenologia gravitacional em baixas energias e, conseqüentemente, em grandes escalas como, por exemplo, a aceleração tardia do universo.

Sendo assim, no caso específico da gravidade modificada $f(R, Q)$, vários estudos detalhados já foram realizados tanto na formulação métrica [31], quanto na formulação métrico-afim⁵ (Palatini) [32]. Desta maneira, a extensão natural do estudo deste modelo constitui-se em tratar a teoria $f(R, Q, P)$, com $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $Q = R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ e $P = R^\alpha_{\beta\mu\nu} R^\beta_{\alpha}{}^{\mu\nu}$. Sendo esta uma teoria genérica da gravidade de quarta ordem⁶, encarada como uma generalização de outros modelos gravitacionais, como por exemplo: a própria RG, gravidade de Starobinsky, gravidade $f(R)$, gravidade $f(R, Q)$ e gravidade $f(R, \mathcal{G})$, onde $\mathcal{G}$ é o invariante de Gauss-Bonnet.

Originalmente, esta classe de teoria $f(R, Q, P)$ foi proposta em [33], com exposição e discussão de suas aplicações dentro do contexto das ondas gravitacionais e contendo análises circunstanciadas destas teorias, especialmente, na derivação da forma específica da gravidade $f(R, \mathcal{G})$ no cenário cosmológico [34]. Portanto, é relevante o estudo da consistência de outras soluções conhecidas da RG dentro da conjuntura das teorias da gravidade estendidas.

Por essa razão, nesta dissertação daremos ênfase à abordagem da gravidade estendida $f(R, Q, P)$. Sendo esta uma espécie de paradigma no estudo da interação gravitacional consistindo, essencialmente, em modificar a estrutura puramente métrica do lagrangiano gravitacional, adicionando invariantes de curvatura na ação de Einstein-Hilbert ou campos escalares como fonte de matéria para dinâmicas que surgem da ação efetiva, na tentativa de encontrar uma explicação para a aceleração cósmica, sem a necessidade de introduzir o conceito de matéria e energia escuras [35], gravidade quântica ou alguma outra teoria unificada [36].

Em particular, as métricas tipo-Gödel são conhecidas por gerarem curvas tipo-tempo fechadas⁷ para determinados valores de seus parâmetros [37]. O estudo dessas métricas fora verificada, além da RG, com a análise da possibilidade de soluções causais, dentro da gravidade modificada de Chern-Simons [38, 39], gravidade de Brans-Dicke [40], gravidade $f(R, Q)$ [31], e alguns outros modelos da gravidade modificada.

À vista disto, no presente trabalho, verificaremos a validade das soluções tipo-Gödel

⁵ Alguns autores consideram não equivalentes os formalismos métrico-afim e Palatini.

⁶ Do inglês: *Fourth Order Gravity* - FOG.

⁷ Do inglês: *Closed Time-like Curves* - CTCs.

na gravidade $f(R, Q, P)$ [36], generalizaremos, em certo sentido, os resultados encontrados em [31, 41]. Sendo que aqui, consideraremos todas as três classes das métricas tipo-Gödel e não somente a classe hiperbólica como foi considerada lá. Ademais, derivaremos expressões para o raio crítico para a classe hiperbólica de métricas tipo-Gödel.

Nesse contexto, a estrutura desta dissertação pauta o seguinte caminho: no capítulo 2 discorreremos os aspectos históricos do estudo da gravitação, revisaremos os conceitos e formulação da teoria da RG, seu arcabouço teórico e seu formalismo matemático. Apresentaremos as equações de Einstein como resultado do princípio variacional da mínima ação. E, após a exposição da solução de Schwarzschild, finalizaremos o segundo capítulo apresentando uma concisa análise sobre as métricas tipo-Gödel.

No capítulo 3 discutiremos sobre a constante cosmológica Λ e o modelo cosmológico padrão. Abordaremos um breve estudo sobre as teorias estendidas da gravitação, que podem ser vistas como modificações ou generalizações da RG. E, após a exposição dos vários modelos destas teorias, finalizaremos o capítulo apresentando o formalismo de tetradas.

No capítulo 4 apresentaremos os resultados originais dos cálculos das soluções tipo-Gödel, correspondentes ao espaço conformalmente plano e maximalmente simétrico, para fontes de matéria: fluido perfeito e campo escalar sem massa, sem necessidade da constante cosmológica Λ , para o modelo de gravidade modificada $f(R, Q, P)$. Com o intuito de comparar os resultados obtidos com aqueles da RG, verificaremos a consistência das soluções para as métricas tipo-Gödel e discutiremos as questões de causalidade relacionadas as suas três classes.

Explicitamente, mostraremos que na gravidade $f(R, Q, P)$ existem novas soluções completamente causais tipo-Gödel sem análogo com a RG, especificamente obtidas para duas escolhas particulares de $f(R, Q, P)$. Nomeadamente, demonstraremos que em contraste com a estrutura da RG, as métricas tipo-Gödel na gravidade $f(R, Q, P)$ suporta soluções para o vácuo com a exigência de que a constante cosmológica Λ seja diferente de zero [36].

Por último, no capítulo 5 forneceremos algumas considerações gerais sobre os temas discutidos neste trabalho. Especialmente, analisaremos os nossos resultados apresentados, no capítulo 4, aplicados às métricas tipo-Gödel inseridas na gravidade estendida $f(R, Q, P)$. Concluiremos a dissertação expondo nossas perspectivas futuras sobre as possíveis pesquisas no campo das teorias modificadas da gravitação.

2 Relatividade Geral

2.1 Aspectos Históricos do Estudo da Gravitação

As investigações e questionamentos sobre a dinâmica dos corpos celeste e gravitação, oriundos da arte, ciência, filosofia e religião, surgiram desde os primórdios. Podemos citar, como exemplo, os registros de quase 4 mil anos, encontrados nas páginas do livro histórico da vida de Jó¹. Aristóteles (384-322 a.C.), sem recursos matemáticos, descreveu qualitativamente o sistema solar e conjecturou a existência do éter como substância que comporia os corpos celestes. Aristarco de Samos (310-230 a.C.) foi o primeiro filósofo a propor que a terra se movia em torno do sol, quase 2 mil anos antes de Copérnico.

No entanto, o proeminente Cláudio Ptolemeu (ou Ptolomeu) (90-168), sendo considerado o primeiro cientista celeste, publicou um tratado de astronomia, baseado no sistema cosmológico geocêntrico aristotélico e no modelo usado por Hiparco (190-120 a.C.) desenvolvido aproximadamente 250 anos antes. Em sua obra *Almagesto*, escrita no século II, Ptolemeu [42] descreve um modelo geométrico do sistema solar, cuja representação, com círculos, epiciclos e equantes permitia prever o movimento dos planetas com considerável precisão. Suas ideias sobre o universo foram adotadas durante toda a idade média, chegando até o renascimento no século XVI [43].



Figura 1 – Diagramas da gravidade de Leonardo da Vinci. Crédito da figura: Gharib, M.; Roh, C.; Noca, F. *Leonardo da Vinci's Visualization of Gravity as a Form of Acceleration*. Leonardo, MIT Press, v. 56, n. 1, p. 21–27, 2023 [44].

Leonardo da Vinci (1452-1519), cem anos antes de Isaac Newton, mostrou ser conhecedor de aspectos fundamentais sobre atração gravitacional. Em suas anotações ele descreve um experimento que demonstra ser a gravidade uma forma de aceleração, no qual um jarro seria movido ao longo de um caminho reto paralelo ao solo, despejando água ou material granular de modo acelerado Fig.-1. Por cálculos modernos, o modelo

¹ Dentre vários registros, temos: "Ou poderás tu atar as cadeias do Sete-estrela ou soltar os laços do Órion? Ou fazer aparecer os signos do Zodíaco ou guiar a Ursa com seus filhos? Sabes tu as ordenanças dos céus, podes estabelecer a sua influência sobre a terra?"(Jó 38:31-33, Bíblia versão ARA)

esboçado deste polímata produziu um valor para a constante gravitacional G com 97% de precisão [44].

Nicolau Copérnico (1473-1543), abandonou a visão geocêntrica e formulou o primeiro modelo matemático capaz de prever as órbitas planetárias com precisão, posteriormente melhorado pelas precisas observações astronômicas do dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601). Em 1599, Johannes Kepler (1571-1630) revolucionou a mecânica celeste quando enunciou três leis que regem as órbitas planetárias, descrevendo-as como elipses.

Galileo di Vincenzo Bonaiuti de Galilei (1564-1642), no século XVI, realizando experimentos com um pêndulo, observou que o tempo de balanço de um objeto não muda de acordo com seu tamanho ou peso, mas com a extensão de sua trajetória e, também, que todos os corpos caem na mesma velocidade, proporcional ao tempo da queda e independente da massa desses corpos.

Galileo, autor da teoria heliocêntrica, inseriu na ciência moderna o princípio da relatividade, afirmando que quaisquer dois observadores se movendo com velocidades constantes, em quaisquer direção e sentido, um em relação ao outro, obterão os mesmos resultados físicos para todos os experimentos mecânicos realizados. Portanto, não há sistema de referência absoluto pelo qual todos os outros movimentos possam ser medidos, tendo o movimento retilíneo uniforme, algum significado só quando comparado com algum ponto de um outro referencial.

Posteriormente, Isaac Newton (1642-1727) aprimorou o conceito de referencial, definindo referencial inercial como sendo aquele livre da ação de forças, ou em equilíbrio. Em 1687, Newton publica em seu livro *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* a primeira interação da natureza descrita matematicamente de forma detalhada [45].

A gravitação de Newton é formulada por uma força atrativa entre quaisquer dois corpos de massas, m_1 e m_2 , cujo módulo é proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os centros de massa destes corpos, r^2 , tendo a seguinte forma

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.1)$$

em que $G = 6.67410^{-11} m^3 K g^{-1} s^{-2}$ é a constante universal da gravitação de Newton².

Acertadamente, a gravitação newtoniana descreve a propriedade de todos os corpos caírem com a mesma aceleração quando em queda livre à superfície da terra, e, com certa precisão, o movimento planetário. Fundamentado na gravitação newtoniana (2.1), em 1845, o matemático e astrônomo francês Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811-1877) previu a existência e a posição do planeta Netuno. Tal previsão fora confirmada, no ano seguinte,

² A primeira medição do seu valor foi efetuada por Henry Cavendish, na sua obra *Philosophical Translations*, de 1798.

em 1846, mediante a descoberta do planeta Netuno pelo astrônomo Johann Gottfried Galle (1812-1910) no observatório de Berlim [46].

Porém, foi no final do século XIX, com o progressivo interesse nas pesquisas sobre fenômenos eletromagnéticos, que surgiram novos fundamentos teóricos dando provimento a elaboração das contemporâneas teorias da física do início do século XX, dentre elas, a teoria da relatividade especial (RE), ou relatividade restrita (RR), elaborada, em 1905, por Albert Einstein (1879-1955). Tal teoria, baseada na covariância de Lorentz em que todos os observadores inerciais são equivalentes e à constância da velocidade da luz no vácuo em todos os referenciais inerciais.

As transformações de Lorentz substituí os conceitos independentes de espaço e tempo da teoria de Newton pela ideia de espaço-tempo como uma única entidade geométrica, uma variedade diferenciável de 4 dimensões, três espaciais e uma temporal, munida de uma métrica pseudo-riemanniana. Einstein demonstrou através de experimentos imaginários as limitações da teoria clássica de Newton quando aplicada ao conceito de simultaneidade [47].

Dando continuidade as suas pesquisas, Einstein acrescenta os efeitos da gravitação, incluindo os referenciais não-inerciais na sua teoria da RR, e, em 25 de novembro de 1915, publica a teoria da RG, onde a gravitação é tratada numa perspectiva inteiramente geométrica, inerente ao próprio espaço-tempo, associando o potencial gravitacional ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$, cuja dinâmica é determinada por um sistema de equações de campo, diferentemente das demais forças da natureza que são representadas por campos definidos no espaço-tempo [47]. Nas próximas seções veremos os princípios e formalismos matemáticos desta elegante teoria.

2.2 Princípios da Relatividade Geral

Tem sido fonte de muita controvérsia as considerações alusivas aos princípios que, explicitamente ou implicitamente, guiaram Einstein na sua pesquisa e formulação da RG [47]. Alguns destes princípios são de natureza filosófica, por isso, não é tão surpreendente que uma fonte de confusão emerge do fato que sua formulação difere bastante de autor para autor. Por exemplo, alguns autores consideram vazio o princípio da covariância, enquanto outros acreditam ser possível derivar a RG quase exclusivamente a partir desse princípio. Já no caso do princípio da equivalência, há um consenso bastante geral de que ele seja o princípio chave da RG [47]. A seguir discutiremos cinco princípios da RG.

Princípio da Equivalência: a RG foi construída no princípio em que o movimento de uma partícula de teste (partícula que experimenta um campo gravitacional sem alterá-lo) em um campo gravitacional é independente de sua massa e composição. Como resultado

empírico das experiências de Galileo na torre de Pisa, dados experimentais confirmam este princípio com uma precisão superior de 1 em 10^{12} . Observa-se, a teoria newtoniana não seria abalada, caso diferentes corpos possuísem diferentes acelerações quando submetidos a um mesmo campo gravitacional. Diferentemente, a RG não se consolidaria, pois ela está alicerçada nesta conhecida forma forte do princípio de equivalência [47].

Tem-se, também, a dita forma fraca do princípio de equivalência, onde afirma-se que o campo gravitacional está acoplado a tudo, tanto matéria como energia. Assim, nenhum corpo pode ser blindado dos efeitos provenientes de um campo gravitacional. No entanto, é possível remover efeitos gravitacionais localmente recuperando o conceito da relatividade especial, considerando um sistema de referência em queda livre, ou seja, (co)movendo-se com uma partícula de teste gravitacional. Se, em particular, escolhemos um referencial em queda livre que não esteja girando, então recuperamos o conceito de referencial inercial, pelo menos localmente. Queremos dizer aqui por 'localmente' que as observações estão confinadas a uma região sobre a qual a variação do campo gravitacional é inobservavelmente, extremamente pequena [47].

Em tais sistemas inerciais, as partículas testes permanecem em repouso ou se movem em linhas retas com velocidade uniforme. Isso leva à seguinte declaração do princípio da equivalência: não há experimentos que localmente possam distinguir a queda livre, sem rotação, em um campo gravitacional, de movimento uniforme no espaço na ausência de campo gravitacional. Ao deduzir que não existe campo gravitacional para

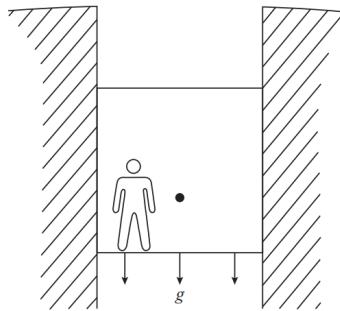


Figura 2 – Experimento mental de Einstein do elevador em queda livre. Crédito da figura: D’Inverno, R.; Vickers, J. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. Oxford University Press, 2022 [47].

um observador caindo livremente do telhado de uma casa, ou para alguém dentro de um elevador em queda livre Fig.-2, Einstein conclui afirmando ter tido o pensamento mais feliz da sua vida. Percebeu ele uma outra coincidência na teoria newtoniana que provou ser de grande importância na formulação de uma declaração do princípio da equivalência. Todas as forças inerciais são proporcionais à massa do corpo sujeita à força, assim, como a força gravitacional é proporcional à massa do corpo que está inserida no campo gravitacional.

Essa coincidência sugeriu a Einstein que os dois efeitos devem ser considerados como provenientes da mesma origem. Desta forma, ele iguala os efeitos da gravitação aos dos referenciais não-inerciais; um referencial linearmente acelerado em relação a um referencial inercial na RR é localmente idêntico a um referencial em repouso em um campo gravitacional [47].

Princípio da Covariância: expandido o conceito da RR, onde todos os observadores inerciais são equivalentes, Einstein afirma que para a RG todos os observadores são equivalentes, ou numa linguagem matemática, as leis da física têm sua forma tensorial, sabendo que a teoria deve ser invariante sob uma transformação de coordenadas [47].

Os observadores estão intimamente ligados aos seus sistemas de referência ou sistemas de coordenadas. Então, se qualquer observador pode descobrir as leis da física, então qualquer outro observador, em um outro sistema de coordenadas, também pode fazê-lo. O cerne deste princípio é que as coordenadas não existem a priori na natureza, mas são apenas artifícios usados para descrever a natureza, e, portanto, devem desempenhar nenhum papel nos fundamentos das leis físicas [47].

Diferentemente da relatividade restrita, com métrica plana e um sistema de coordenadas canônico ou preferencial, as coordenadas de Minkowski, a RG com espaço-tempo curvo e uma variedade com uma métrica não plana, não detém sistema de coordenadas canônicas, ou seja, não existe um observador inercial global. No entanto, sabemos que haverá sistemas de coordenadas preferenciais em muitos problemas que possuem simetrias, onde adota-se sistema de coordenadas à simetria subjacente [47].

Princípio de Mach: em 1893, Ernst Waldfried Josef Wenzel Mach (1838-1916) questionou o conceito de movimento ao afirmar que a inércia de qualquer sistema é o resultado da interação desse sistema com o resto do universo. A ideia subjacente no princípio de Mach é que a origem da inércia ou da massa de uma partícula é uma quantidade dinâmica determinada pelo ambiente, em particular o resto da matéria no universo. Em outras palavras, as leis físicas locais são determinadas pela estrutura em grande escala do universo, cada partícula no universo, em última análise, tem um efeito sobre todas as outras partículas.

Para March o movimento só tem significado quando analisado de forma relativa, logo, um referencial inercial é determinado sempre em relação ao movimento médio de estrelas fixas, onde se tem a maioria da matéria do nosso universo. Nessa linha, não se pode afirmar que um corpo está ou não em movimento em um universo vazio, pois não existe outro objeto que seja um ponto de referência. A essência deste princípio está no entendimento mais preciso das leis de Newton quando aplicadas nos referenciais inerciais [47].

Nesse tema, Newton percebeu que a questão principal era saber como detectar um referencial inercial e tentou respondê-la criando um engenhoso experimento mental, conhecido hoje como o experimento do balde de Newton, cujo desígnio é detectar se um sistema está ou não em rotação absoluta em relação ao espaço absoluto. Para isto, Newton, postulou a existência do espaço absoluto, que em sua própria natureza, sem relação com nada externo, permanece sempre semelhante e imóvel. Assim, ele vê o espaço absoluto como o pano de fundo contra o qual todo movimento é observado. Um observador inercial torna-se então um observador em repouso ou em movimento uniforme relativo ao espaço absoluto. As forças inerciais surgem da maneira descrita pela lei de Newton, apenas, quando um observador está em aceleração absoluta em relação ao espaço absoluto [47].

Princípio do Acoplamento Mínimo: afirma como obter sistemas de equações de campo na RG quando são conhecidas as correspondentes equações na RR. O princípio do acoplamento gravitacional mínimo se utiliza do princípio de Guilherme de Ockham (1288–1347), que estabelece uma investigação heurística advindo da escolástica que, para a formação de hipóteses explicativas, exige a maior parcimônia em termos de complexidade³ [47].

Na prática o princípio nos diz que não devemos adicionar termos desnecessários ao fazer a transição da RR para a RG. Por exemplo, a generalização mais simples da lei de conservação de momento-energia da RR para a RG seria

$$(\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0)_{RR} \implies (\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0)_{RG} \quad (2.2)$$

Em outras palavras, podemos dizer que, se quisermos levar em conta todos os efeitos da gravidade em qualquer processo físico local, descrito por equações correspondentes, escritas na estrutura da RR, deve-se substituir todas as derivadas parciais ∂_ν , por derivadas covariantes ∇_ν e substituir a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ pela métrica $g_{\mu\nu}$, nestas equações. Em suma, nenhum termo contendo explicitamente o tensor de curvatura deve ser adicionado ao fazer a transição da RR para a RG. Este princípio utilizado implicitamente por Einstein, é bastante vago e ambíguo e precisa ser usado com cuidado [47].

Princípio da Correspondência: em 1913, Niels Henrik David Bohr (1885-1962) utilizou o princípio da correspondência para determinar a relação correta entre a frequência mecânica da rotação do elétron em torno do núcleo, e a frequência da radiação eletromagnética emitida. No desenvolvimento de seu modelo atômico, em 1920, Niels Bohr publicou seu artigo sobre a série de espectros dos elementos onde formula o princípio da correspondência [47].

³ Invoca que de múltiplas explicações adequadas e possíveis para o mesmo conjunto de fatos, deve-se optar pela mais simples daquelas. Por “simples” entende-se aquela que contiver o menor número possível de variáveis e hipóteses com relações lógicas entre si, das quais o fato a ser explicado segue logicamente.

Tal princípio impõe concordância entre a RG e a RR quando ausentes os efeitos da gravidade, e com a gravitação Newtoniana para campos fracos e baixas velocidades comparadas à velocidade da luz. Pois, sabe-se que toda teoria tem seu limite de aplicabilidade, sendo a nova teoria consistente com quaisquer teorias anteriores aceitáveis dentro de suas fronteiras de validade. Desse modo, a RG deve concordar, por um lado, com a RR na ausência de gravitação e, por outro lado, com a mecânica newtoniana, no limite de campos gravitacionais fracos e baixas velocidades em comparação com a velocidade da luz [47].

2.3 Fundamentos Matemáticos da Relatividade Geral

2.3.1 - Geometria Diferencial⁴

Por seu conceito, a RG é uma teoria essencialmente geométrica, sua ideia chave consiste no fato de que o campo gravitacional se manifesta através de modificações da geometria do espaço-tempo. Nesse contexto, Einstein fundamentou sua fascinante teoria nos conceitos advindos da geometria diferencial, sendo a variedade diferenciável $\mathcal{M}$ o modelador do espaço-tempo. De modo simplório, uma variedade $\mathcal{M}$ é um espaço topológico como uma superfície que não precisa estar contida em um espaço euclidiano [48]. Intuitivamente, uma variedade m -dimensional é um “espaço” $\mathcal{M}$ que localmente pode ser colocado em correspondência biunívoca com abertos de $\mathbb{R}^m$.

Portanto, os pontos de $\mathcal{M}$ são parametrizados por coordenadas x^i ($i = 1, \dots, m$) que, conjuntamente, lhes associam pontos em determinados abertos de $\mathbb{R}^m$. Contudo, tal parametrização ou associação está longe de ser única. Além disso, nem sempre é possível encontrar coordenadas para todos os pontos de $\mathcal{M}$ ao mesmo tempo, sendo que geralmente, as funções coordenadas são definidas apenas sobre subconjuntos de $\mathcal{M}$. Por isso, se faz necessário uma breve revisão de algumas noções básicas relacionadas com o conceito de variedade $\mathcal{M}$, no intuito de fixar a notação que será empregada e facilitar a compreensão das definições e conceitos construídos na RG.

Um sistema de coordenadas locais ou carta local em um espaço topológico $\mathcal{M}$ é um homeomorfismo $x : U \rightarrow x(U)$ de um subconjunto aberto $U \subset \mathcal{M}$ sobre um aberto $x(U) \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que m é a dimensão de $x : U \rightarrow x(U)$. Para cada $p \in U$ tem-se $x(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$. Os números $x^i = x^i(p)$, $i = 1, \dots, m$ são chamados as coordenadas do ponto $p \in \mathcal{M}$ no sistema x [48].

Seja $\varphi : U_0 \rightarrow U$ uma parametrização do subconjunto aberto U , contido na superfície $\mathcal{M}^m \subset \mathbb{R}^n$. O homeomorfismo inverso $x = \varphi^{-1} : U \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^m$ é um sistema de coordenadas locais em $\mathcal{M}$, ver Fig.-3.

Um atlas de dimensão m sobre um espaço topológico $\mathcal{M}$ é uma coleção $\mathfrak{A}$ de

⁴ Grande parte desta seção fora retirada da referência [48].

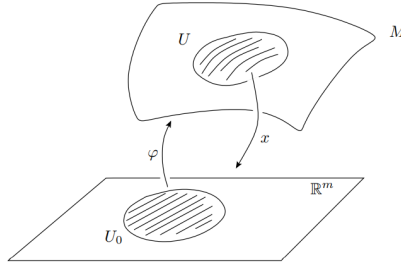


Figura 3 – Homeomorfismo inverso: sistema de coordenadas locais na variedade $\mathcal{M}$. Crédito da figura: Lima, E. L. Variedades Diferenciáveis. [S.l.:s.n.], 2007 [48].

sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em $\mathcal{M}$, cujos domínios U cobrem $\mathcal{M}$. Os domínios U dos sistemas de coordenadas $x \in \mathfrak{A}$ são chamados as vizinhanças coordenadas de $\mathfrak{A}$. Por exemplo, os sistemas de coordenadas que são os inversos das parametrizações em uma superfície $\mathcal{M}^m \subset \mathbb{R}^n$ formam um atlas de dimensão m sobre $\mathcal{M}$.

Um espaço topológico $\mathcal{M}$ no qual existe um atlas de dimensão m chama-se uma variedade topológica de dimensão m . Em outras palavras, $\mathcal{M}$ é uma variedade topológica de dimensão m se, e somente se, cada ponto de $\mathcal{M}$ tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^m$. Dois espaços topológicos dizem-se homeomorfos se existir uma aplicação entre esses espaços que seja contínua, invertível e a sua inversa seja contínua [48]. Sendo assim, toda superfície $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade topológica de dimensão m .

Note que, sejam $\mathcal{M}$ um espaço topológico e $\mathfrak{A}$ uma coleção de cartas $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^{m(x)}$, cujos domínios U formam uma cobertura aberta de $\mathcal{M}$. É possível provar, teorema da invariância da dimensão [48], que a dimensão m das cartas locais é constante em cada componente conexa de $\mathcal{M}$. Na definição que demos a constância de $\mathcal{M}$ é postulada [48]. Em todos os casos que consideraremos a seguir, (variedades diferenciáveis) o fato de $\mathcal{M}$ ser constante decorre imediatamente do teorema da função inversa [48].

Dados os sistemas de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ no espaço topológico $\mathcal{M}$, tais que $U \cap V \neq \emptyset$, cada ponto $p \in U \cap V$ tem coordenadas $x^i = x^i(p)$ no sistema x e coordenadas $y^i = y^i(p)$ relativamente ao sistema y .

A correspondência $(x^1(p), \dots, x^m(p)) \longleftrightarrow (y^1(p), \dots, y^m(p))$, estabelece um homeomorfismo $\varphi_{xy} = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ que é chamado mudança de coordenadas Fig.-4.

Se $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ é outro sistema de coordenadas locais tal que $U \cap V \cap W \neq \emptyset$ então

$$\varphi_{xz} = \varphi_{yz} \circ \varphi_{xy} : x(U \cap V \cap W) \rightarrow z(U \cap V \cap W)$$

$$\text{Tem-se } \varphi_{xx} = \text{id}_{x(U)} \quad \text{e} \quad \varphi_{xy} = (\varphi_{yx})^{-1}$$

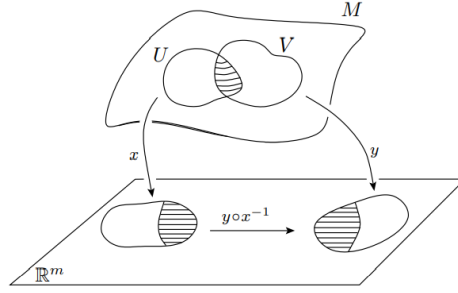


Figura 4 – Homeomorfismo de mudança de coordenadas. Crédito da figura: Lima, E. L. Variedades Diferenciáveis. [S.l.:s.n.], 2007 [48].

Um atlas $\mathfrak{A}$ sobre um espaço topológico $\mathcal{M}$ diz ser diferenciável, de classe C^k ($k \geq 1$), se todas as mudanças de coordenadas φ_{xy} , $x, y \in \mathfrak{A}$ são aplicações de classe C^k . Escreve-se então $\mathfrak{A} \in C^k$. Como $\varphi_{yx} = (\varphi_{xy})^{-1}$, segue-se que os φ_{xy} são, de fato, difeomorfismos de classe C^k . Em particular, se escrevemos $\varphi_{xy} : (x^1, \dots, x^m) \mapsto (y^1, \dots, y^m)$, então o determinante jacobiano $\det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)$ é não-nulo em todo ponto de $x(U \cap V)$.

Seja $\mathfrak{A}$ um atlas de dimensão m e classe C^k num espaço topológico $\mathcal{M}$. Um sistema de coordenadas $z : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ em $\mathcal{M}$ diz-se admissível relativamente ao atlas $\mathfrak{A}$ se, para todo sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, pertencente a $\mathfrak{A}$, com $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas φ_{xz} e φ_{zx} são de classe C^k . Em outras palavras, se $\mathfrak{A} \cup \{z\}$ é ainda um atlas de classe C^k em $\mathcal{M}$.

A RG utiliza-se das variedades diferenciais quadridimensionais $\mathcal{M}^4$, onde cada ponto p nessa variedade é assinalado por um evento no espaço-tempo euclidiano de dimensão 4. Como visto acima, a estrutura diferenciável de uma variedade $\mathcal{M}^4$ permite-nos definir quantidades de grandezas físicas e entidades matemáticas essenciais, entre elas: vetores, tensores e formas diferenciais.

Consideremos, então, uma curva suave γ , parametrizada pelo parâmetro afim t , definida como o mapeamento em um intervalo $I \subset \mathbb{R}^4$ na variedade $\mathcal{M}^4$ Fig.-5. Assim $\gamma(t) : t \in I \rightarrow \mathcal{M}^4$, onde $x^\mu = f(p) = f \circ \gamma(t)$ descreve os pontos sobre uma carta (U, f) contidos na curva $\gamma(t)$. Sendo $\phi : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ o mapeamento de um ponto p sobre a variedade $\mathcal{M}^4$, cuja a taxa de variação do escalar ϕ sobre a curva $\gamma(t)$ em termos das coordenadas da carta (U, f)

$$\frac{d\phi(x^\mu(t))}{dt} = \frac{dx^\mu(t)}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = X^\mu(t) \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}. \quad (2.3)$$

Podemos definir este vetor tangente a curva, com componentes $X^\mu = \frac{dx^\mu(t)}{dt}$, como sendo o operador diferencial $X = X^\mu \partial_\mu$ que atua sobre as funções escalares ϕ . O espaço vetorial ou espaço tangente, $(T_p \mathcal{M}^4)$, no ponto p em $\mathcal{M}^4$ é formado pelo conjunto de todos os vetores tangentes no ponto p , $x \dots X_n$. qualquer vetor de $(T_p \mathcal{M}^4)$ poderá ser expandido

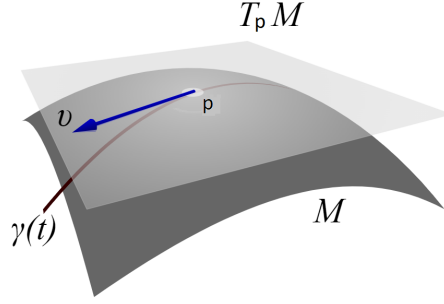


Figura 5 – $T_p \mathcal{M}$ espaço tangente em um ponto p da variedade $\mathcal{M}$. Crédito da figura: página da internet da wikipedia, <https://pt.wikipedia.org/wiki/Espaço-tangente>.

na base coordenada do espaço tangente $\{\partial_\mu\}$, para um certo sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ em $\mathcal{M}^4$. Sendo tais vetores independentes de uma particular escolha de coordenadas, ou seja, $v = v^\mu \partial_\mu = v'^\mu \partial'_\mu$, onde x^μ e x'^μ são dois sistemas de coordenadas. As componentes contravariantes do vetor v são

$$v'^\mu = v^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (2.4)$$

De igual modo, o respectivo espaço vetorial dual ou espaço cotangente ($T_p^* \mathcal{M}^4$) é construído na base do conjunto de 1-forma (co-vetor) $\{dx^\mu\}$ definido da forma $dx^\mu (\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu$. Evidentemente, uma 1-forma (co-vetor) v pode ser expresso em termos da base de 1-forma $\{dx^\mu\}$ por $v = v_\mu dx^\mu$, onde v_μ são as componentes covariantes de v . Sendo assim, o produto de v e u é definido por $v(u) = v_\mu u^\mu$. Sob transformação geral de coordenadas as componentes covariantes estão relacionadas pela regra

$$v'_\mu = v_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}. \quad (2.5)$$

Podemos generalizar tais definições acima para objetos abstratos de maior grau, conhecidos como tensores, construídos a partir de produtos tensoriais ($\otimes$) dos vetores da base do espaço tangente ou de co-vetores da base do espaço cotangente,

$$X = X_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} \partial_{\mu_1} \otimes \partial_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_p} \otimes dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_q}, \quad (2.6)$$

onde as componentes sob transformação geral de coordenadas satisfazem a regra

$$X_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} = X_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\alpha_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\nu_2}} \dots \frac{\partial x^{\beta_q}}{\partial x'^{\nu_q}}. \quad (2.7)$$

2.3.2 - Estrutura Métrica

Uma variedade diferenciável $\mathcal{M}^4$ é chamada de espaço riemanniano V^4 , quando a métrica é definida nele, ou seja, quando um campo tensorial suave $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$, tal que $g_{\mu\nu}(x^\alpha) = g_{\nu\mu}(x^\alpha)$, introduz as relações de metricidade na variedade: para quaisquer dois pontos infinitamente próximos x e $x + dx$, o intervalo (distância) entre eles é definido por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (2.8)$$

Através do mapeamento $g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}$, a métrica define um produto escalar na variedade atribuindo a quaisquer dois vetores A e B um número real $AB = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu$, e assim introduz para cada vetor V seu comprimento $l^2(V) = g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu$. Por definição, a métrica é assumida como não degenerada no sentido de que o determinante $g = \det g_{\mu\nu} \neq 0$. Isso permite determinar a matriz $g^{\mu\nu}(x^\alpha)$ inversa a $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ tal que $g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = \delta^\mu_\alpha$, estabelecendo assim um isomorfismo entre os espaços tensoriais covariante e contravariante. Em coordenadas locais, esse isomorfismo é descrito pela operação de subida e descida de índices. A estrutura métrica lorentziana forma a base da teoria da RG, cuja assinatura é ± 2 , ou seja, $(\mp, \pm, \pm, \pm)$.

Portanto, em uma geometria riemanniana $(\mathcal{M}, g)$, ou pseudo-riemanniana, no caso da RG, o único grau de liberdade geométrico é a métrica, isto é, todas as quantidades geométricas relevantes são determinadas pela métrica. Ademais, na RG, o produto interno de vetores transportados paralelamente de um ponto a outro da variedade ao longo de uma curva é invariante, ou seja, o comprimento do vetor permanece inalterado durante o transporte paralelo. Matematicamente, isso pode ser expresso pela condição de compatibilidade métrica $\nabla_\mu g_{\nu\alpha} = 0$. Como veremos a seguir, além da estrutura métrica, pode-se estabelecer estruturas de outros objetos geométricos na variedade (pseudo) riemanniana $\mathcal{M}^4$.

2.3.3 - Estrutura da Conexão

Agora, iremos introduzir o conceito de conexão afim na variedade riemanniana $\mathcal{M}^4$. Ela, a conexão linear (afim) Γ introduz o isomorfismo local de espaços tangentes em diferentes pontos na variedade $x \in \mathcal{M}^4$, especificando uma regra que mapeia um vetor V (um elemento do espaço tangente) em um ponto x em um vetor V' em um ponto infinitamente próximo $x + dx$. Nas coordenadas locais, esta lei é escrita como

$$\delta V^\mu = V'^\mu - V^\mu = -\Gamma_{\nu\alpha}^\mu V^\nu dx^\alpha. \quad (2.9)$$

Assim, equivalentemente, dizemos que a conexão afim Γ é introduzida na variedade $\mathcal{M}^4$, quando o campo global (ou seja, dado em cada gráfico do atlas da variedade) $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu(x)$ é definido nele. Ao mudar um gráfico de coordenadas $\{x\}$ para outro $\{x'\}$, as quantidades $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu(x)$, que são chamados de coeficientes da conexão linear (afim), são transformados como

$$\Gamma_{\beta\mu}^{\prime\alpha}(x') = \left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\beta} \Gamma_{\sigma\nu}^\rho(x) + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\beta} \right) \right] \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (2.10)$$

Definindo a estrutura de conexão, pode-se introduzir a noção de derivada covariante de um tensor. A derivada covariante em relação a uma conexão arbitrária Γ é denotada por ∇ , ou por ponto e vírgula (;), e é definida da seguinte forma. Suponha que nas

coordenadas locais, o campo tensorial tenha componentes $X^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}$. Então

$$\begin{aligned} \nabla_\mu X^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} = & \partial_\mu X^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} + \Gamma^{\alpha_1}_{\rho\mu} X^{\rho \alpha_2 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \dots + \Gamma^{\alpha_p}_{\rho\mu} X^{\alpha_1 \dots \rho}_{\beta_1 \dots \beta_q} \\ & - \Gamma^{\sigma}_{\beta_1\mu} X^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\sigma \dots \beta_q} \dots - \Gamma^{\sigma}_{\beta_q\mu} X^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \sigma} \end{aligned} \quad (2.11)$$

A conexão também define a noção de transporte paralelo de vetores. Seja $\gamma(t)$ uma curva suave em $\mathcal{M}^4$, especificada pelas equações paramétricas $\gamma = \{x^\mu(t)\}$. Em seguida, definimos a derivada covariante de um campo tensorial X ao longo desta curva, DX/dt . Nas coordenadas locais, é igual a $DX/dt = \frac{dx^\mu}{dt} \nabla_\mu X$.

A variedade $\mathcal{M}^4$ com a estrutura de conexão definida nela é chamada de espaço conectado afim, denotado por L^4 , e é caracterizado por uma série de objetos geométricos. Tais objetos geométricos, permitirão descrever o campo gravitacional através de teorias cuja classificação depende de estruturas geométricas definidas na própria variedade. Para uma discussão mais detalhada ver Apêndice-B.

2.4 Equações de Einstein na Descrição Lagrangiana

Sabemos que em boa parte das teorias fundamentais da física, as equações que descrevem a dinâmica de um sistema físico podem ser obtidas a partir do princípio variacional, o qual se expressa através de um formalismo provido de um potente ferramental matemático, teve sua primeira aplicação na mecânica clássica, a partir dos trabalhos pioneiros de Euler, Lagrange e Hamilton [49]. A extensão desse formalismo à mecânica relativística e à eletrodinâmica, particularmente em sua forma covariante, mostrou-se extremamente profícua [50], e rapidamente conduziu à generalização de sua aplicação às teorias de campo em geral, onde se revelou de importância fundamental no processo de quantização de campos [51].

Curiosamente, a aplicação do princípio variacional, pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1943), à RG fora concebida antes do advento da teoria quântica de campos [52]. Hilbert, em sua tentativa, de encontrar as equações do campo gravitacional, independentemente de Einstein, aplicou em 1915, pela primeira vez, o princípio variacional à RG e propôs a ação estacionária que produz as equações de campo de Einstein. O termo gravitacional da ação é dada por

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.12)$$

onde S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert, um funcional da métrica $g_{\mu\nu}$, e $g = \det(g_{\mu\nu})$ é o seu determinante, R é o escalar de curvatura de Ricci, definido como $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, sendo $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci que surge da contração do primeiro e terceiro índices do tensor de Riemann⁵, $\kappa^2 = 8\pi G c^{-4}$ é a constante gravitacional de Einstein, G é a constante

⁵ Ver definição na Eq.-2.18

gravitacional de Newton, $d^4x\sqrt{-g}$ é o elemento de volume do espaço-tempo. Doravante, usaremos $c = 1$ para a velocidade da luz no vácuo.

A derivação das equações de Einstein a partir de primeiros princípios possui grande vantagem, pois a lagrangiana ou ação é uma quantidade mais fundamental. Logo, possibilita uma fácil unificação da teoria da RG com outras teorias clássicas de campo também formulada em termos da ação, como por exemplo a equações de Maxwell. Neste processo a derivação de uma ação identifica um candidato natural para o termo de acoplamento fonte da métrica de campos. Ademais, através do teorema de Noether podemos fazer uma análise direta da simetria da ação, possibilitando fácil identificação das entidades físicas conservadas no sistema em estudo [49, 50, 51].

Na RG a ação é normalmente definida como uma função do campo, sendo a conexão dada pela conexão de Levi-Civita. O formalismo de Cartan da RG define a métrica e a conexão como sendo independentes, o que torna possível de se incluir campos de matéria fermiônica com spin não inteiros.

A derivação das equações de campo de Einstein vem da suposição que toda ação da teoria seja dada pelo termo de Einstein-Hilbert mais um termo $\mathcal{L}_m[g_{\mu\nu}, \psi]$, função da métrica e do campo de matéria⁶.

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R + \mathcal{L}_m[g_{\mu\nu}, \psi] \right]. \quad (2.13)$$

O princípio de Hamilton então indica que a variação destas ações com respeito à métrica, ou de sua inversa, é zero, ou seja $\delta S = 0$, tal que

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa^2} \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Já que estas equações devem obedecer qualquer variação $\delta g^{\mu\nu}$, isto implica que as equações de movimento serão

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -2\kappa^2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.15)$$

através da fórmula de Jacobi, chegamos a conhecida expressão para a variação de $\sqrt{-g}$.

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}), \quad (2.16)$$

e o tensor momento-energia para campos de matéria tem a definição dada por

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_m, \quad (2.17)$$

⁶ Os cálculos realizados nesta seção estão mais detalhadamente demonstrados no Apêndice-A, para a derivação das equações de campo da gravidade modificada $f(R, Q, P)$.

sendo o tensor de Riemann $R^\alpha_{\mu\beta\nu}$, o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, os símbolos de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$, a sua variação $\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, a derivada covariante na variação da métrica $\nabla_\nu\delta g_{\mu\sigma}$, definidos como:

$$R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\beta} - \Gamma^\sigma_{\mu\beta}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu} ; \quad (2.18)$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\sigma,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\nu} ; \quad (2.19)$$

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}(\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) ; \quad (2.20)$$

$$\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(\nabla_\mu\delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu\delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu}) ; \quad (2.21)$$

$$\nabla_\nu\delta g_{\mu\sigma} = \delta g_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\delta g_{\alpha\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\delta g_{\mu\alpha} . \quad (2.22)$$

Utilizando as Eqs.(2.18, 2.21, 2.22), chegaremos facilmente a importante equação de Palatini

$$\delta R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \nabla_\beta(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\beta}) . \quad (2.23)$$

Substituindo a Eq.(2.21) na equação de Palatini Eq.(2.23)

$$\delta R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \nabla_\beta\nabla_\nu\delta g^\alpha_\mu - \nabla_\nu\nabla_\beta\delta g^\alpha_\mu + \nabla^\alpha\nabla_\nu\delta g_{\mu\beta} , \quad (2.24)$$

consequentemente contraindo os índices α e β na equação de Palatini Eq.(2.23), encontraremos a variação do tensor de Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}) . \quad (2.25)$$

Substituindo a Eq.(2.21) na Eq.(2.25) teremos

$$\delta R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}(\nabla_\mu\nabla_\alpha\delta g_{\nu\beta} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g_{\alpha\beta}) , \quad (2.26)$$

e o escalar de Ricci R .

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^\mu_\mu = g^{\nu\alpha}\partial_\mu\Gamma^\mu_{\nu\alpha} - g^{\nu\alpha}\partial_\alpha\Gamma^\mu_{\nu\mu} + g^{\nu\alpha}\Gamma^\mu_{\nu\alpha}\Gamma^\rho_{\mu\rho} - g^{\nu\alpha}\Gamma^\rho_{\nu\mu}\Gamma^\mu_{\alpha\rho} , \quad (2.27)$$

fazendo uso da Eq.(2.26) encontraremos a expressão para a variação do escalar de Ricci $\delta R = \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})$

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\nabla_\mu\nabla_\alpha\delta g_{\nu\beta} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g_{\alpha\beta}) . \quad (2.28)$$

Por fim, substituindo as Eqs.(2.16, 2.17, 2.26) na variação da parte geométrica da ação de Einstein-Hilbert Eq.(2.12), teremos

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\nabla_\mu\nabla_\alpha\delta g_{\nu\beta} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g_{\alpha\beta}) \right] \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[\sqrt{-g}G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha\delta g_{\nu\beta} - \nabla_\nu\delta g_{\alpha\beta})) \right] , \end{aligned} \quad (2.29)$$

aqui $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein definido como $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$. Vamos agora calcular o último termo da Eq.(2.29), para isso definiremos $V^\mu = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha\delta g_{\nu\beta} - \nabla_\nu\delta g_{\alpha\beta})$

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(\sqrt{-g}V^\mu) &= \sqrt{-g}\nabla_\mu V^\mu = \sqrt{-g}(\partial_\mu V^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\mu V^\nu) \\ &= \sqrt{-g}(\partial_\mu V^\mu + \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}\partial_\nu g_{\mu\alpha}V^\nu) = \partial_\mu(\sqrt{-g}V^\mu),\end{aligned}$$

logo, a Eq.(2.29) torna-se em

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[\sqrt{-g}G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha\delta g_{\nu\beta} - \nabla_\nu\delta g_{\alpha\beta})) \right]. \quad (2.30)$$

O último termo de (2.30) é conhecido como termo de fronteira e não contribui para o valor da variação total, pois, por hipótese, assumimos apropriadamente condições de contorno no qual asseguram que o termo de fronteira desapareça.

Não é tão trivial nem imediatamente claro a análise deste termo de fronteira, pois seu valor depende do tipo de espaço na ação considerada. No caso de variedades com contorno, onde tais termos de fronteira não se anulam, ver discussão no Apêndice-A e referência [53]. Finalmente chegaremos ao resultado da variação da parte geométrica do lagrangiano de Einstein-Hilbert

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.31)$$

Desta forma, quando incluído o termo de matéria no lagrangiano Eq.(2.13), a equação de movimento (2.15) se reduz as conhecidas equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

Em algumas situações de interesse a constante cosmológica Λ é incluída na função lagrangiano de Einstein-Hilbert, dando efeito a uma nova ação Einstein-Hilbert- Λ :

$$S_{EH}^{(\Lambda)}[g_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_m[g_{\mu\nu}, \psi] \right], \quad (2.33)$$

resultando de forma direta as seguintes equações de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (2.34)$$

O lado direito de (2.34) na figura do tensor momento-energia expressa o conteúdo (densidade e pressão) de matéria-energia e o lado esquerdo é puramente geometria, onde a gravidade se dá em termos de um tensor métrico, uma quantidade que descreve as propriedades geométricas do espaço-tempo. A força de acoplamento entre a matéria e a gravidade é determinada pela constante gravitacional κ^2 . As equações de campo de Einstein descrevem como a matéria gera gravidade e, inversamente, como a gravidade afeta a matéria. Elas se reduzem à lei da gravidade de Newton no limite de baixas velocidades e campos gravitacionais pouco intensos e, por serem equações não lineares, são de difícil solução. No entanto, apresentaremos a seguir duas soluções exatas para (2.34).

2.5 Solução de Schwarzschild

Em 1916, Karl Schwarzschild (1873-1916), astrônomo e físico alemão e um dos fundadores da astrofísica moderna, apresentou a primeira solução analítica para as equações de campo de Einstein, para um objeto compacto e estático⁷. A solução de Schwarzschild possibilitou confirmar a RG como sendo uma teoria da gravitação de corpo científico, além do mais, previu objetos astrofísicos exóticos, os buracos negros.

O elemento de linha de Schwarzschild em coordenadas esféricas é⁸

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - C(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.35)$$

As funções genéricas $A(r)$, $B(r)$ e $C(r)$ são funções a serem determinadas. Para facilitar os cálculos faremos uma transformação de coordenadas, sem perda de generalidade, estabeleceremos a seguinte substituição: a função $C(r)r^2$ será incorporada numa nova variável $\bar{r}^2$. Desse modo, o elemento de linha torna-se

$$d\bar{s}^2 = A(\bar{r})dt^2 - B(\bar{r})d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.36)$$

Agora podemos definir famílias de funções monotonamente crescentes, para $A(\bar{r}) = e^{a(\bar{r})}$ e para $B(\bar{r}) = e^{b(\bar{r})}$, onde $a(\bar{r})$ e $b(\bar{r})$ são funções positivas a serem determinadas, garantindo assim a não inversão da natureza das coordenadas, ou seja, após a definição das referidas famílias de funções, a coordenada de tipo-tempo continua sendo coordenada tipo-tempo, e as coordenadas tipo-espaco continuam sendo coordenadas tipo-espaco.

Objetivando simplificar a notação, vamos suprimir o sinal da barra de cima das novas coordenadas. Dessa forma, o elemento de linha passa a ter a seguinte forma

$$ds^2 = e^{a(r)}dt^2 - e^{b(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (2.37)$$

e o tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{a(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{b(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

Isto posto, agora temos condição de resolver as equações de Einstein Eq.(2.32) para o vácuo ($T_{\mu\nu} = 0 \implies R_{\mu\nu} = 0$). Para tanto, devemos encontrar as componentes do tensor de Ricci Eq.(2.19).

⁷ Nas trincheiras da primeira guerra mundial, Schwarzschild resolveu as equações de Einstein.

⁸ Para a assinatura $(+, -, -, -)$.

Mas, para início, devemos calcular as componentes dos símbolos de Christoffel do segundo tipo, estes são os coeficientes de conexão Levi-Civita em base coordenada Eq.(2.20). Uma vez que esta conexão não possui torção, os coeficientes de conexão serão simétricos nos índices inferiores, reduzindo assim os cálculos, sem a necessidade de computar todas as 64 componentes. Após realizados os devidos cálculos, encontraremos a componente R_{00} do tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2} [a'' + a' (a' - b')] e^{(a-b)} + \frac{1}{2} a' \left(\frac{a'}{2} + \frac{b'}{2} + \frac{2}{r} \right) e^{(a+b)} - \frac{a'^2}{2} e^{(b-a)} \\ &= [a'' + a' (a' - b')] + a' \left(\frac{a'}{2} + \frac{b'}{2} + \frac{2}{r} \right) - a'^2 \\ &= \frac{a''}{2} + \frac{a'^2}{4} - \frac{a'b'}{4} + \frac{a'}{r}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

aqui a plica (') indica a derivada em relação à coordenada radial r . Procederemos de igual modo para encontrarmos as demais componentes do tensor de Ricci, R_{11} , R_{22} e R_{33} , então teremos:

$$R_{11} = \frac{a''}{2} + \frac{a'^2}{4} - \frac{a'b'}{4} - \frac{b'}{r} = 0; \quad (2.39)$$

$$R_{22} = e^{-b} \left[1 + \frac{1}{2} r (a' - b') \right] - 1 = 0; \quad (2.40)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta = 0. \quad (2.41)$$

Agora devemos solucionar esse conjunto de equações acopladas não lineares. Combinando a Eq. (2.38) com a Eq.(2.39), chegaremos ao seguinte resultado

$$a' + b' = (a + b)' = 0 \rightarrow a + b = \text{constante}. \quad (2.42)$$

Sabendo que a métrica de Schwarzschild tenderá a métrica de Minkowski as grandes distâncias da fonte de matéria, podemos chegar apropriadamente a seguinte dedução

$$r \rightarrow \infty \implies b = a = 0 \implies a + b = 0. \quad (2.43)$$

Utilizando-se dos resultados obtidos da Eq.(2.42) e Eq.(2.43) podemos concluir que $a = -b$ para qualquer ponto do espaço externo a fonte da matéria, não somente no infinito. Consequentemente, aplicando o resultado da Eq.(2.43) na Eq.(2.40)

$$e^{-b} \left[1 + \frac{1}{2} r (a' - b') \right] - 1 = e^a (1 + r a') - 1 = (e^a r)' - 1 = 0, \quad (2.44)$$

integrando o último resultado da Eq.(2.44), teremos

$$e^a = 1 - \frac{C}{r} = e^{-b}, \quad (2.45)$$

onde C é a constante de integração a ser determinada. Substituindo os resultados da Eq.(2.45) no elemento de linha (2.37)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{C}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.46)$$

O teorema de George David Birkhoff (1884 - 1944) [54] estabelece que qualquer solução esfericamente simétrica das equações de campo do vácuo deve ser estática e assintoticamente plana, isto é, a solução exterior deve ser dada pela métrica de Schwarzschild.

Pelo teorema de Birkhoff, se uma fonte esfericamente simétrica muda sua forma, mas sempre permanece esfericamente simétrica, então esta fonte não pode propagar quaisquer perturbações no espaço envolvente, logo, uma estrela pulsante e esfericamente simétrica não pode emitir ondas gravitacionais [47]. Na teoria newtoniana, a simetria esférica não tem nada a ver com a dependência temporal, por conseguinte, a estaticidade é uma propriedade inesperada. Por sua vez, a RG destaca o caráter peculiar das suas equações diferenciais parciais não lineares e as soluções que elas apresentam.

Outra interessante consequência do teorema de Birkhoff é que para uma casca fina, a solução interior deve ser dada pela métrica de Minkowski; em outras palavras, o campo gravitacional deve desaparecer dentro de uma casca esfericamente simétrica. Isto concorda com o que acontece na gravitação newtoniana.

Posto isto, pela imposição do limite newtoniano, para a aproximação de campo fraco, a métrica de Schwarzschild tenderá a métrica de Minkowski, o que nos leva a definir o valor $2m$ para a constante de integração C . Por fim, chegaremos ao elemento de linha infinitesimal de um espaço quadrimensional curvado por um objeto de massa gravitacional M , esfericamente simétrico e estático, proposto por Schwarzschild.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.47)$$

onde, $m = GM/c^2$ é massa geométrica e M é a massa gravitacional da fonte de matéria. Observe que na Eq.(2.47) temos duas singularidades, a singularidade física para $r = 0$ e a singularidade matemática para $r = 2m$. Portanto, seja uma fonte esfericamente simétrica restrita à região $r \leq a$ para algum $a > 2m$, então a solução para $r > a$ deve ser a solução de Schwarzschild. Não obstante, o inverso não é verdade: uma fonte que dá origem a uma solução exterior de Schwarzschild não é necessariamente esfericamente simétrica. Para o caso de uma fonte esfericamente simétrica e carregada, a geometria exterior deve ser dada pela métrica de Reissner-Nordström [47].

Como dito, a solução de Schwarzschild previu a existência dos buracos negros. Não obstante, no século XVIII, John Michell e Pierre-Simon Laplace, numa abordagem newtoniana para a natureza corpúscular da luz, propuseram a existência de estrelas negras

(invisíveis) cuja atração gravitacional não permitiria escapar a luz gerada por elas mesmas. Embora o conceito moderno para buraco negro como uma região do espaço da qual nada possa escapar tenha sido publicada pela primeira vez por David Finkelstein em 1958 [55]. A descoberta de estrelas de nêutrons por Jocelyn Bell Burnell em 1967 despertou o interesse em objetos compactos em colapso gravitacional como uma possível realidade astrofísica [55].

Em 11 de fevereiro de 2016, em pesquisas colaborativas, a LIGO anunciou a primeira detecção direta de ondas gravitacionais, o que também representou a primeira observação de uma fusão de buracos negros [2, 3, 4]. Em dezembro de 2018, foram observados onze ondas gravitacionais originadas de dez buracos negros em fusão, junto com uma fusão binária de estrelas de nêutrons. Em 10 de abril de 2019, a primeira imagem direta da sombra de um buraco negro e sua vizinhança foi publicada, após observações feitas pelo *Event Horizon Telescope* em 2017 da sombra do buraco negro supercompacto no centro galáctico de Messier 87 [55].

2.6 Métricas Tipo-Gödel

Nesta seção forneceremos uma breve revisão das métricas tipo-Gödel, em particular, aquelas que atendem às condições de homogeneidade espaço-temporal (ST-homogêneo). Sendo elas uma generalização da métrica apresentada, em 1949, por Kurt Friedrich Gödel (1906-1978) [56], como primeira solução para as equações de Einstein com poeira⁹ como fonte de matéria, com constante cosmológica não nula, no espaço-tempo homogêneo, estacionário, cuja forma explícita de elemento de linha no espaço-tempo em coordenadas cartesianas é

$$ds^2 = a^2 \left[dt^2 - dx^2 + \frac{e^{2x}}{2} dy^2 - dz^2 + 2e^x dt dy \right], \quad (2.48)$$

em que $a = 1/\omega$, onde $\omega = \sqrt{2\pi G\rho}$ é a vorticidade da matéria, G é a constante gravitacional de Newton e ρ é a densidade de matéria. Os símbolos de Christoffel podem ser facilmente calculados

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2} g^{02} (\partial_1 g_{02}) = 1; \\ \Gamma_{12}^0 &= \frac{1}{2} [g^{00} (\partial_1 g_{20}) + g^{02} (\partial_1 g_{22})] = \frac{e^x}{2}; \\ \Gamma_{02}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (-\partial_1 g_{02}) = -\frac{e^x}{2}; \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (-\partial_1 g_{22}) = -\frac{e^{2x}}{2}; \\ \Gamma_{01}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{02}) = -e^{-x}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

⁹ Um fluido perfeito com densidade de massa positiva e pressão desprezível é geralmente chamado de poeira. Neste modelo cosmológico de poeira, as galáxias, aglomerados ou superaglomerados se movem localmente em conjunto e interagem umas com as outras apenas gravitacionalmente.

Os cálculos para se obter o tensor de Ricci $R_{\mu\rho} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\nu - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\nu - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\nu$ serão simplificados pelo fato de que $\Gamma_{\nu\rho}^\nu = \delta_\rho^0$ produzirá valores não nulos somente para os termos da ∂_1 . Portanto, teremos $R_{\mu\rho} = \partial_1 \Gamma_{\mu\rho}^1 + \Gamma_{\mu\rho}^1 - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\nu$, ou seja

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\Gamma_{10}^2 \Gamma_{20}^1 - \Gamma_{20}^1 \Gamma_{10}^2 = 1; \\ R_{02} &= \partial_1 \Gamma_{02}^1 + \Gamma_{02}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^2 - \Gamma_{02}^1 \Gamma_{10}^0 = e^x; \\ R_{22} &= \partial_1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{02}^1 \Gamma_{12}^0 - \Gamma_{12}^0 \Gamma_{02}^1 = e^{2x}, \text{ resultando em,} \\ R &= R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = a^{-2}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

O tensor momento-energia do fluido perfeito¹⁰ é dado por $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}$, onde a pressão $p = p_1 = p_2 = p_3$. No caso de poeira ($p = 0$), teremos $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu = \rho a^2 R_{\mu\nu}$, com a quadrivelocidade $u^\mu = (1/a, 0, 0, 0)$ e $u_\mu = u^\nu g_{\mu\nu} = (a, 0, a e^x, 0)$.

Realizando as devidas transformações, conforme consta na referência [56], poderemos reescrever o elemento de linha (2.48) em coordenadas cilíndricas¹¹

$$ds^2 = 4a^2[dt^2 - dr^2 - dz^2 + (\sinh^4 r - \sinh^2 r) d\theta^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2 r d\theta dt]. \quad (2.51)$$

Para o caso de uma curva definida em que todas as coordenadas são constantes, exceto a coordenada azimutal, teremos:

$$ds^2 = 4a^2 \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1) d\theta^2, \quad (2.52)$$

este resultado denota uma trajetória circular fechada e será tipo-tempo quando $ds^2 > 0$, ou seja, para $\sinh^2 r > 1$. Desse modo, para regiões além do raio crítico, $r_c = \sinh^{-1}(1)$, a causalidade é violada, propriedade esta imposta nos eventos clássicos. Diferentemente da RR, na RG a causalidade é obedecida só localmente (onde as linhas de mundo permanecem no interior do cone de luz), pois globalmente a curvatura do espaço-tempo pode inclinar o cone de luz a ponto de criar linhas de mundo fechadas, conforme mostra a Fig.-6 [57].

Vários estudos surgiram em relação a métrica proposta por Gödel. Em 1980, Raychaudhuri e Thakurta [58] investigaram a homogeneidade da métrica de Gödel. Sendo destacado os trabalhos de Rebouças e Tiomno [37, 59, 60, 61, 62, 63], verificando as condições de homogeneidade para a métrica de Gödel, obteve a solução das equações diferenciais resultantes dos vetores de Killing surgindo a generalização da métrica de Gödel, conhecida como métricas tipo-Gödel.

Desta forma, podemos generalizar o elemento de linha de Gödel em coordenadas cilíndricas, reescrendo-o da seguinte forma [37, 59]

$$ds^2 = [dt + H(r)d\theta]^2 - D^2(r)d\theta^2 - dr^2 - dz^2, \quad (2.53)$$

¹⁰ Podemos defini-lo num formalismo geral caracterizado pela evolução das congruências geodésicas em termos do parâmetro de expansão, do tensor de deformação (shear) e da rotação.

¹¹ Para a assinatura $(+, -, -, -)$.

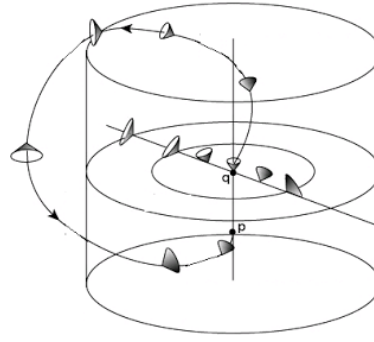


Figura 6 – Viagem no tempo no universo de Gödel. Crédito da figura: Malament, D. B. *Time Travel in the Gödel Universe*. v. 1984, n. 2, p. 91–100, 1984. [57]

em que $H(r)$ e $D(r)$ são funções arbitrárias na coordenada radial. Deste modo, está demonstrado em [37] que para alcançar as métricas tipo-Gödel ST-homogêneo¹², as funções métricas devem satisfazer as seguintes, necessárias e suficientes, condições

$$\frac{H'(r)}{D(r)} = 2\omega, \quad \frac{D''(r)}{D(r)} = m^2, \quad (2.54)$$

onde a plica (') indica a derivada em relação à coordenada radial r . O par (m^2, ω) caracteriza completamente todas as métricas tipo-Gödel ST-homogênea.

É permitido o parâmetro m assumir qualquer valor real, $-\infty \leq m^2 \leq \infty$, não tendo este uma interpretação física. Doravante, devemos restringir nossa análise apenas as métricas tipo-Gödel ST-homogênea e vamos referi-las simplesmente por métricas tipo-Gödel.

As soluções da Eq.(2.54) definem três classes diferentes de métricas tipo-Gödel para $\omega \neq 0$, dependendo do sinal do parâmetro m^2 . Nomeadamente,

i) *classe hiperbólica*, onde $m^2 > 0$ e

$$H(r) = \frac{2\omega}{m^2} [\cosh(mr) - 1], \quad D(r) = \frac{1}{m} \sinh(mr); \quad (2.55)$$

ii) *classe trigonométrica*, onde $m^2 = -\mu^2 < 0$ e

$$H(r) = \frac{2\omega}{\mu^2} [1 - \cos(\mu r)], \quad D(r) = \frac{1}{\mu} \sin(\mu r); \quad (2.56)$$

iii) *classe linear*, onde $m^2 = 0$ e

$$H(r) = \omega r^2, \quad D(r) = r.$$

O caso correspondente a $\omega = 0$ é a classe degenerada e não será considerada aqui. A métrica de Gödel é uma solução das equações de Einstein com uma constante cosmológica

¹² ST: abreviação do inglês *space-time*

Λ suportada por uma poeira de densidade ρ , obtida tomando $m^2 = 2\omega^2 = -2\Lambda = \kappa^2\rho$. Dessa maneira, a métrica Gödel está inserida na classe hiperbólica. As métricas tipo-Gödel admitem diferentes grupos de isometrias dependendo das relações entre m^2 e ω^2 . Por exemplo, a classe especial $m^2 = 4\omega^2$ admite G_7 como grupo de isometria, que é o maior grupo.

De igual modo a métrica de Gödel (2.52), as métricas tipo-Gödel apresentam a presença de curvas tipo tempo fechadas (do inglês: *Closed Time-like Curves* - CTCs) que são definidas por círculos $C = \{(t, r, \theta, z); t, r, z = \text{const}, \theta \in [0, 2\pi]\}$, em uma região restrita pelo intervalo $r_1 < r < r_2$, onde a função $G(r) = D^2(r) - H^2(r)$ deve ser negativa nesta região.

Para a **classe linear** $m = 0$, existe uma região não causal $r > r_c$ com curvas temporais fechadas, onde o raio crítico é

$$r_c = 1/\omega. \quad (2.57)$$

Para a **classe trigonométrica** $m^2 = -\mu^2 < 0$, existe uma sequência infinita de regiões causais e não causais alternadas. Para a **classe hiperbólica** de tais espaços-tempo, existe uma região não causal $r > r_c$, onde o raio crítico r_c , quando $0 < m^2 < 4\omega^2$, é dado por

$$\sinh^2\left(\frac{mr_c}{2}\right) = \left(\frac{4\omega^2}{m^2} - 1\right)^{-1} \quad (2.58)$$

Note que da equação acima, quando $m^2 \geq 4\omega^2$, a presença de CTCs é totalmente evitável, isto é, não há violação de causalidade. Neste caso especial $m^2 = 4\omega^2$, o raio crítico $r_c \rightarrow \infty$ [37].

O estudo das métricas tipo-Gödel na gravitação $f(R)$ pode ser visto em [63, 64], na gravitação $f(R, T)$ para fluido perfeito, deixando a violação da causalidade em aberto em [65], na gravitação Horava-Lifshitz, a referência [66, 67], na gravitação modificada pelo termo Chern-Simons [68].

3 Teorias Alternativas da Gravitação

3.1 Constante Cosmológica

Como já mencionado, a gravidade de Einstein se depara com duas maiores dificuldades ainda não resolvidas. A primeira está relacionada com a **descrição quântica da gravidade**. De fato, a constante gravitacional κ^2 tem dimensão negativa de massa, precisamente $2 - D$ para um espaço-tempo D -dimensional. Dessa forma, a gravidade de Einstein-Hilbert é não renormalizável, ou seja, sua sólida descrição deve envolver um número infinito de contra-termos. Uma excelente revisão sobre cálculos quânticos em gravidade é apresentada na referência [69].

A segunda dificuldade constitui-se no fato da RG não admitir explicações plausíveis para a **aceleração cósmica**, primeiramente anunciada em [21]. Neste caso, a tentativa mais simples de resolver o problema é baseada na introdução da constante cosmológica¹ Λ , ou seja, adicionarmos à ação (2.13) o termo extra

$$S_{(\Lambda)} = -\frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \Lambda, \quad (3.1)$$

resultando na ação (2.33), dando surgimento no lado esquerdo das equações de Einstein (2.32) ao termo aditivo $\Lambda g_{\mu\nu}$, produzindo assim a equação proposta por Einstein em 1917 (2.34), em sua tentativa de explicar o não colapso do universo.

Como é bem sabido, originalmente Λ foi introduzido por Einstein para fornecer uma solução para um universo estático, enquanto posteriormente de Sitter provou para o espaço vazio com Λ negativo ele se expandirá exponencialmente. Não obstante, mais ultimamente, após a descoberta da aceleração cósmica, a ideia da constante cosmológica foi novamente abraçada, mas sem o objetivo de resolver o problema da renormalizabilidade da gravidade.

Além das soluções de Schwarzschild e Gödel apresentadas na seção anterior, temos a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)², uma solução exata das equações de campo de Einstein que descreve um universo homogêneo e isotrópico em expansão ou contração, dada por:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right), \quad (3.2)$$

¹ Λ é um parâmetro dimensional com unidade de (comprimento)⁻².

² Também chamado de métrica FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) ou modelo FRW. Sendo esta a métrica do modelo cosmológico padrão.

em que $a(t)$ é um fator de escala e $k = 1, 0, -1$, são valores para curvatura positiva, sem curvatura e curvatura negativa, respectivamente. Neste caso, a matéria é dada pelo fluido relativístico

$$\kappa^2 T_{\mu\nu} = (\rho + p)v_\mu v_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

onde ρ é a densidade de matéria e p é a pressão, em muitos casos aplica-se a equação de estado $p = \omega\rho$, com ω sendo a constante característica do tipo de matéria. É fácil de ver que para a métrica FRW, as componentes do tensor de Ricci e o escalar curvatura são

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{3\ddot{a}}{a}; \\ R_{ij} &= \delta_{ij}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2); \\ R &= 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

A equação de Einstein para a componente (00), juntamente com a equação obtida pela diferença entre as equações (ii) e (00), fazendo $c = 1$ e $\kappa^2 = 8\pi G$, produz as seguintes equações

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= \frac{1}{3}(8\pi G\rho + \Lambda); \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Embora o modelo FRW se ajuste razoavelmente bem aos dados observacionais disponíveis, ele contém o inapropriado **problema da presença da singularidade**³ (ponto este onde não é possível aplicar as leis conhecidas da física) e dois problemas relacionados ao ajuste fino nas condições iniciais do sobrejacente modelo cosmológico padrão. Primeiro, o **problema da constante cosmológica**, sendo Λ interpretada pela física das partículas como a densidade de energia do vácuo, cuja contribuição para o vácuo quântico do estado fundamental de todos os campos de matéria conhecidos na escala de Planck, $\rho_\Lambda^{(v\u00e1cuo)} = 10^{74}(GeV)^4$, é 121 ordens de grandeza maior que a densidade de energia obtida por meio de dados observacionais, $\rho_\Lambda^{(observ.)} = 10^{-47}(GeV)^4$ [70].

Segundo, o conhecido **problema da coincidência cósmica**, no qual questiona-se o porquê de ser a época atual, o período de tempo em que estamos medindo, a densidade de energia da matéria escura ser da mesma ordem da densidade de energia da energia escura [26, 27]. De acordo com os dados observacionais, a igualdade ocorreu “recentemente”, em um desvio para o vermelho $z \approx 0,55$. Portanto, dentro do modelo, tal fato observacional parece indicar que estamos atualmente vivendo em um período único da história cósmica, uma enorme coincidência, pois requer muitas condições iniciais especiais para o início do universo [70].

³ Pelo teorema da singularidade FRW, quando assumido a condição de energia forte, ou seja, se $\Lambda = 0$ e $\rho + 3p > 0$, então $\dot{a}(t_0) > 0$, implica que houve uma singularidade inicial (*big bang*) em algum tempo finito no passado.

Cálculos extraídos do próprio modelo mostra que os valores iniciais das densidades de energia associadas à matéria e a constante cosmológica provavelmente não seriam fixados por processos aleatórios. No tempo de Planck, as condições iniciais são fortemente ajustadas em 95 ordens de magnitude [71].

Os problemas que surgem das condições iniciais no modelo FRW levou ao estudo de diferentes modelos alternativos para a constante cosmológica, como por exemplo, fonte de corrente no período de expansão acelerada do universo, campos escalares com diferentes equações de estado, denominados quintessência se $\omega_d > -1$ e *phantom* se $\omega_d < -1$, *k-essence*, campo escalar com valor não canônico para o termo de energia cinética, gás de Chaplygin, dentre outros. No entanto, os modelos FRW alternativos sofrem problemas semelhantes de ajuste fino e não se encaixam melhor as observações que o modelo FRW [70].

Sendo assim, as teorias alternativas da gravitação surgem motivadas pela busca de uma explicação consistente para aceleração cósmica e, também, pela elaboração de uma robusta teoria da gravitação quântica. Existem duas maneiras de estender a gravidade de Einstein. Na primeira abordagem, introduzimos termos aditivos a ação de Einstein-Hilbert. Na segunda abordagem, sugere-se que a descrição completa da gravidade envolva, além do campo métrico, alguns campos extras, escalares ou vetoriais, sendo estes campos tratados como ingredientes da própria gravidade, portanto, não sendo eles confundidos com termos de matéria.

Isto posto, os resultados usuais da gravidade de Einstein devem ser recuperados, por exemplo, quando esses campos são constantes. Como exemplo típico temos a gravidade de Brans-Dicke, que abordaremos aqui de uma maneira rápida. Deve-se notar que entre essas abordagens, um papel importante é desempenhado pela adição de novos termos, e/ou campos, voltados para a quebra a simetria Lorentz/CPT ou para introduzir uma extensão supersimétrica à gravidade [35].

O estudo de modelos que possibilitam a quebra da simetria de Lorentz é motivado principalmente pela cosmologia. Sua base principal é o modelo padrão estendido⁴ que envolve termos aditivos para ações de vários campos, tais que campos escalar e espinorial, campos de calibre e campo gravitacional. Cujos efeitos clássicos são não triviais, tais como birrefringência das ondas e rotação do plano da polarização no vácuo e, no caso das correções quânticas, especialmente temos a obtenção dos termos de Carroll-Field-Jackiw e termo de éter [35].

⁴ Do inglês: *Standard Model Extension - SME*

3.2 Modificação no Setor Gravitacional Puro

Na esteira do que foi dito na seção anterior, uma das formas de modificar a gravidade consiste em introduzir termos adicionais ao setor gravitacional. Tais termos são dados por escalares construído na base do tensor métrico, ou seja, esses escalares são funções do tensor de Riemann, tensor de Ricci, suas derivadas covariantes e do escalar de curvatura. No caso mais simples, o lagrangiano depende de uma função sujeita apenas da curvatura escalar $f(R)$, logo, a ação fica sendo a seguinte

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (3.6)$$

Sendo a gravidade de Einstein muito bem confirmada observacionalmente em seus limites, e a curvatura do universo conhecida por ser pequena, é natural sugerir que $f(R) = R + \gamma R^n$, com $n \geq 2$, com o termo de Einstein-Hilbert dominante. Dentro deste contexto a escolha mais simples é dada pelo modelo de Starobinsky, cuja forma funcional é $f(R) = R + \alpha R^2$. Tal modelo ganhou grande interesse nos últimos anos porque, além de renormalizar a teoria, suas previsões inflacionárias estão de acordo com as medições anisotrópicas das radiações cósmicas de fundo em micro-ondas [28] do satélite Planck, realizadas em 2018 [34].

No entanto, qualquer teoria da gravidade deve ser bem compatível com a evidência observacional não apenas em uma escala cosmológica primordial, e mais, deve a teoria ser submetida aos testes locais e astrofísicos como no caso de estrelas compactas. A esse respeito, foi demonstrado que as extensões de RG produzem modificações significativas no regime de gravidade de campo forte [35]. Na última década, estrelas compactas foram estudadas em teorias da gravidade $f(R)$ no formalismo métrico e Palatini.

Dentro do formalismo métrico, as equações da estrutura estelar são resolvidas perturbativamente, ou seja, $f(R)$ considerado como uma pequena perturbação de RG; e também não perturbativamente, onde as completas equações diferenciais de quarta ordem devem ser resolvidas auto-consistentemente para a região interior e exterior da estrela com adequadas condições de contorno. Além disso, de acordo com esse método, a principal consequência do termo αR^2 é um aumento nos valores de massa máxima (ou seja, o massa assintótica medida no infinito) de estrelas compactas para valores positivos de α . Observe que existem definições inequivalentes de massa na gravidade $f(R)$. No entanto, os resultados usados na abordagem perturbativa indica que a massa máxima diminui à medida que α aumenta. A razão para tal discrepância é que no método não perturbativo uma contribuição de massa extra aparece na região externa da estrela devido a R ser diferente de zero [35].

Evidentemente, o natural desenvolvimento da ideia da gravidade- R^2 foi na direção

de incorporar outros valores de n inclusive também os negativos⁵, envolvendo termos de qualquer grau no escalar de curvatura na ação. Assim, foi introduzido o conceito de gravidade- $f(R)$, com a ação dada por (3.6).

Neste caminho, surgiu a implementação na ação clássica de Einstein-Hilbert de funções com outros invariantes escalares, não somente com termos de escalar de curvatura [35]. Como exemplo, podemos citar os modelos: gravidade Lovelock, gravidade Gauss-Bonnet, gravidade $f(R, Q)$ e gravidade $f(R, Q, P)$, com $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $Q = R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ e $P = R^\alpha_{\beta\mu\nu} R^\beta_{\alpha}{}^{\mu\nu}$. O exemplo paradigmático é a gravidade de Weyl, onde o lagrangiano é dado pelo quadrado do tensor de Weyl.

3.3 Outros Modelos da Gravitação Modificada

Existem muitos outros modelos de teoria modificada da gravitação, a gravidade de Chern-Simons, Brans-Dicke e Galileon estão entre os que se utilizam da motivação da gravidade tensor-escalar. Eles surgem do modelo da cosmologia que envolvem um campo escalar muito leve chamado campo de quintessência e são conhecidos por explicar a expansão acelerada do universo, bem como sua implicação da constante cosmológica. Deste modo, tendo uma ativa aplicação do campo de quintessência dentro do contexto de sistema inflacionário [35].

Os modelos da gravidade tensor-escalar apresentam um fato bastante interessante, a possibilidade de introduzir a quebra de simetria de Lorentz dentro do contexto gravitacional, para uma forma especial do coeficiente Chern-Simons. No entanto, é claro que, neste contexto, uma extensão da gravidade através da introdução de campo de vetores parece ser mais promissora, uma vez que as expectativas de campos vetoriais no vácuo podem produzir vetores constantes necessários para introduzir direções privilegiadas de espaço-tempo quebrando assim a simetria de Lorentz [72].

A gravidade tensorial-vetor adiciona campo, neste caso o vetorial, que é tratado não como um campo de matéria, mas como um ingrediente de uma descrição completa da própria gravidade. O aspecto mais importante desses modelos forma-se no fato de alguns deles, nomeadamente os que envolvem termos potenciais para o campo vetorial, pode ser extremamente útil no contexto da quebra espontânea de simetria de Lorentz [73]. Os exemplos conhecidos dessas teorias são a gravidade Einstein-aether e a gravidade bumblebee.

A gravidade Horava-Lifshitz (HL) tem como ideia principal a usual covariância geral não sendo uma característica fundamental da natureza, mas uma característica essencialmente de fenômenos de baixa energia. Em certo sentido, pode-se dizer que o

⁵ Para n fracionário teremos as teorias exóticas.

conceito HL foi desenvolvido para sacrificar a covariância geral a fim de conciliar a desejada renormalizabilidade com ausência de fantasmas. Neste contexto, deve-se notar que a quebra da covariância geral na gravidade também é discutida na quebra de Lorentz usual nos modelos da gravidade sem forte assimetria espaço-tempo. A gravidade HL é um bom candidato para resolver o problema da energia escura e, provavelmente, para o estudo dos buracos negros, pois existem soluções de buracos negros que se comportam como buracos negros de Schwarzschild a grandes distâncias, ou ainda tratar simetria de Lorentz como efeito de baixas energias [74].

Além disso, as soluções do tipo-Gödel consistentes dentro da gravidade HL são não-causais, mas deve-se notar que a própria solução de Gödel é não-causal. No entanto, a descrição quântica da gravidade HL é bastante problemática. Uma das razões é esta possuir uma estrutura muito complicada da sua ação clássica, potencialmente implicando em um número muito grande de contribuições divergentes. Portanto, enquanto a gravidade HL tem uma contagem de potência renormalizável, ainda não podemos ter certeza de que é renormalizável multiplicativamente. Outra dificuldade é a questão dela adquirir um grau extra de liberdade. Embora nesse caso tenha sido em princípio resolvido em, onde a “extensão saudável” da gravidade HL foi introduzida, o problema agora compõe-se em obter resultados fisicamente aceitáveis com base nessa extensão [75]. Desta forma, mesmo neste caso, temos mais perguntas do que respostas.

A gravidade não-local cria a possibilidade de alcançar finitude ultravioleta para uma escolha apropriada para fatores de forma não locais. No entanto, cálculos quânticos aparentemente explícitos em modelos da gravidade não locais seria extremamente complicados do ponto de vista técnico. Por isto, até agora, todos os estudos dessas teorias são completamente clássicos. Ademais, a maioria dos artigos sobre gravidade não-locais são dedicados aos aspectos cosmológicos dessas teorias, e os resultados encontrados permitem concluir que extensões não locais da gravidade podem ser tratados como soluções aceitáveis para o problema da energia escura. Ao mesmo tempo, as teorias não locais, inclusive as gravitacionais, apresentam certas dificuldades. O principal problema é da unitariedade e causalidade que ainda requer atenção especial [76].

Assim, será importante verificar a consistência de diferentes soluções conhecidas na RG, especialmente, vários buracos negros, incluindo, por exemplo, os não singulares e os em rotação. Ademais, vários fatores de forma não locais, não apenas na forma gaussiana, devem ser introduzidos na teoria, e seu impacto deve ser testado dentro do contexto da gravidade. E mais ainda, estudar também os efeitos quânticos em modelos da gravidade não locais, uma vez que as principais vantagens dessas teorias é a possibilidade de termos consistências no regime ultravioleta, uma descrição adequada para uma gravitação quântica em quatro dimensões que seja renormalizável e unitária.

3.4 Formalismo de Tetradas

As tetradas (*Vierbein*⁶) foram introduzidas pela primeira vez por Albert Einstein em 1928, na tentativa de unificar o eletromagnetismo a gravitação [77]. Em 1929, o formalismo de tetradas fora empregado por Eugene Paul Wigner (1902-1995) e Weyl para incorporar spinores à teoria gravitacional [78, 79] e, posteriormente, mostrou-se útil também como uma forma de derivar leis de conservação e realizar medidas em espaços curvos.

O formalismo de tetradas inseriu o conceito de paralelismo absoluto⁷, surgindo assim as teorias teleparalelas da gravidade modificada, teorias de calibre baseadas na geometria de Weitzenböck P^4 , onde o tensor de curvatura é anulado e a torção desempenha o papel da força gravitacional, com o campo fundamental representado por um não trivial campo de tetradas, dando origem à métrica como um subproduto. Opostamente a variedade Riemann V^4 onde a torção é considerada nula, não a curvatura (ver Tabela-B), a variedade Weitzenböck P^4 , desenvolvida em 1923 [80] a partir da variedade Riemann-Cartan U^4 (equipada com uma métrica e uma conexão com propriedades, curvatura e torção, não nulas), tem sua geometria estudada em termos de tetradas e não a partir da métrica e da conexão.

Dessarte, sabemos que em cada ponto p de $\mathcal{M}^4$ existe uma infinidade de bases que pode ser escolhida. Sendo o fibrado de base a estrutura construída das várias escolhas de bases possíveis em todos os pontos p da variedade. Para expandir um vetor v no espaço tangente $T_p\mathcal{M}^4$, geralmente é escolhida a base coordenada, $\{\partial_\mu\}$. Mas, quando medidas estão envolvidas nos cálculos na RG, frequentemente eles são feitas numa base ortonormal local $\{e_a\}$, denominada base não coordenada ou tetradas.

Assim sendo, as tetradas define em cada ponto do espaço-tempo um sistema de “coordenadas” não holônomas de Minkowski, como um referencial inercial local que podem ser construídos através dos vetores da base de coordenadas, como um campo de conjunto de 4 vetores ortonormais, um tipo tempo e 3 do tipo espaço que são definidos em uma variedade lorentziana no intuito de modelar o espaço-tempo na RG. Logo, um vetor v na base $\{\partial_\mu\}$ do espaço tangente $T_p\mathcal{M}$, poderá ser expandido em termos de uma nova base $\{e_a\}$

$$v = v^a e_a = v^\mu \partial_\mu, \quad (3.7)$$

as letras do alfabeto latino e do alfabeto grego são índices específicos que rotulam a base não holonômica e base coordenada, respectivamente. De modo semelhante, um co-vetor u expandido na base das 1-forma $\{dx^\mu\}$ do espaço cotangente $T_p^*\mathcal{M}$, poderá, também, ser

⁶ Do alemão a palavra significa quatro pernas e *Vielbein* significa muitas pernas.

⁷ Estabelece que as tetradas devem ser transportadas paralelamente ao longo da variedade espaço-temporal garantindo a anulação da sua curvatura.

expandido em termos de uma nova base 1-forma $\{e^a\}$,

$$u = u_a w^a = u_\mu dx^\mu, \quad (3.8)$$

por definição $e^a(e_b) = \delta_b^a$. A relação de mudança de base será dado pelas seguintes equações: $e^a = e_\mu^a(x) dx^\mu$, e sua inversa, $e_a = e_\mu^a(x) \partial_\mu$, onde $e_\mu^a(x)$ é a tetrada, uma matriz de ordem n dependente da coordenada x^μ no ponto p do espaço tangente $T_p \mathcal{M}^4$. Tendo como inversa a matriz $e_\mu^a(x)$ que geram as consequentes relações

$$e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu; \quad e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a; \quad v^a = e_\mu^a v^\mu \quad \text{e} \quad u_a = e_a^\mu u_\mu, \quad (3.9)$$

cuja relação das componentes da métrica da nova base com a antiga base é

$$g_{ab} = g(e_a, e_b) = g(e_\mu^a \partial_\mu, e_\nu^b \partial_\nu) = e_\mu^a e_\nu^b g(\partial_\mu, \partial_\nu) = e_\mu^a e_\nu^b g_{\mu\nu} \quad (3.10)$$

$$\therefore g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b g_{ab} \implies g = g_{ab} e^a e^b, \quad (3.11)$$

onde g está expressado em termos das 1-forma $\{e^a\}$.

Das inúmeras possibilidades de bases possíveis, podemos escolher aquela onde as componentes de vetores ou tensores em $T_p \mathcal{M}^4$ da variedade se transformam de maneira similar às tranformações de Lorentz da RR, $g_{ab} = \eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Esta é a base ortonormal que corresponde ao caso onde a métrica, com assinatura lorentziana $(+, -, -, -)$ é dada pela métrica de Minkowski.

Utilizando-se do formalismo de tetradas poderemos reescrever a ação (2.33), por conseguinte, reescrever as equações de Einstein-Hilbert- Λ Eq.(2.34). Para isso, basta substituímos a métrica pelos campos de tetrada e_μ^a , onde e é o determinante da tetrada que se relaciona com o determinante da métrica pela seguinte relação $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$ implicando em $\sqrt{-g} = e$.

Para o escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ nos campos de tetrada teremos

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\beta\gamma}^\alpha \delta_\alpha^{[\beta} \delta_\nu^{\gamma]} = \frac{1}{4} R^{\alpha\nu}{}_{\beta\gamma} \epsilon^{\beta\gamma\delta\sigma} \epsilon_{\alpha\nu\delta\sigma} = \frac{1}{4} e_a^\alpha e_b^\nu R_{\beta\gamma}^{ab} \epsilon^{\beta\gamma\delta\sigma} \epsilon_{\alpha\nu\delta\sigma} = e_a^\alpha e_b^\nu R_{\alpha\nu}^{ab}, \quad (3.12)$$

e para o elemento de volume, teremos

$$d^4 x \sqrt{-g} = d^4 x e = e^{(0)} \wedge e^{(1)} \wedge e^{(2)} \wedge e^{(3)} = -\frac{1}{4!} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d, \quad (3.13)$$

aqui o símbolo $\wedge$ representa o produto exterior, o produto dos elementos da base coordenada em todas as combinações antissimétricas, ou seja

$$dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} = dx^{[\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_n]}, \quad (3.14)$$

onde os índices entre colchetes explicitam a propriedade de antissimetria dos mesmos. Utilizando a Eq.(3.13) e a sua equivalente $\varepsilon^{abcd} d^4 x \sqrt{-g} = e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d$, o termo de

matéria da ação (2.33) nos campos de tetradas fica sendo $\int d^4x e \mathcal{L}_m[e_\mu^a, \psi]$ e seu termo gravitacional:

$$\begin{aligned}
S_{EH}^{(\Lambda)}[e_\mu^a] &= \int d^4x \frac{e}{2\kappa^2} \left(e_a^\alpha e_b^\nu R_{\alpha\nu}^{ab} - 2\Lambda \right) \\
&= \int d^4x \frac{e}{2\kappa^2} \left(\frac{1}{4} e_a^\alpha e_b^\nu R_{\beta\gamma}^{ab} \epsilon^{\beta\gamma\delta\sigma} \epsilon_{\alpha\nu\delta\sigma} - 2\Lambda \right) \\
&= \int d^4x \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\nu\delta\sigma} \epsilon^{\beta\gamma\delta\sigma} e_a^\alpha e_b^\nu R_{\beta\gamma}^{ab} - 2\Lambda e \right) \\
&= \int d^4x \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{1}{4} \epsilon_{abcd} e_a^a e_b^b e_c^c e_d^d \epsilon^{\beta\gamma\delta\sigma} e_c^\alpha e_d^\nu R_{\beta\gamma}^{cd} - 2\Lambda e \right) \\
&= \int d^4x \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{1}{4} \epsilon_{abcd} \epsilon^{\beta\gamma\delta\sigma} e_\delta^a e_\sigma^b R_{\beta\gamma}^{cd} - 2\Lambda e \right) \\
&= \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{4\kappa^2} \epsilon_{abcd} \left(e^a \wedge e^b \wedge R^{cd} + \frac{\Lambda}{3} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d \right),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Agora, para obtermos a variação da ação em relação a e_μ^a , devemos fazer uso das seguintes relações: $g^{\alpha\nu} = e_c^\alpha e_b^\nu \eta^{cb} \implies \delta g^{\alpha\nu} = 2 \delta e_c^{(\alpha} e^{\nu)c}$, como também

$$\delta e = \frac{-e}{2} e_\alpha^a e_{\nu a} \delta g^{\alpha\nu} = e e_a^\mu \delta e_\mu^a. \tag{3.16}$$

Mas, primeiramente vamos encontrar o tensor momento-energia para campos de matéria (2.17), na representação de tetradas $T_a^\mu = T_{\alpha\nu} g^{\mu\alpha} e^\nu_a \equiv \frac{\delta S_m}{\delta e_\mu^a}$

$$\begin{aligned}
T_a^\mu &= \frac{-2}{e} \frac{\delta(e \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\alpha\nu}} g^{\alpha\mu} e_a^\nu = \frac{-2}{e} \left[\frac{\delta e}{\delta g^{\alpha\nu}} \mathcal{L}_m + e \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\alpha\nu}} \right] e_c^\alpha e^{\mu c} e_a^\nu \\
&= \left[e_\alpha^d e_\nu^e \eta_{ed} \mathcal{L}_m + \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta e} e e_\alpha^d e_\nu^e \eta_{ed} \right] e_c^\alpha e^{\mu c} e_a^\nu = \left[\mathcal{L}_m + \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta e} e \right] e_a^\mu = \mathcal{L}_m e_a^\mu + \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta e_\mu^a}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Portanto, a variação da ação (3.15) resultará na seguinte forma

$$\delta S_{EH}^{(\Lambda)}[e_\mu^a] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[e \left(R_a^\mu - \frac{1}{2} \delta_a^\mu R + \Lambda \delta_a^\mu - \kappa^2 T_a^\mu \right) \delta e_\mu^a + \nabla_\mu \left(e e_a^\mu e_b^\nu \delta \omega^{ab} \right) \right], \tag{3.18}$$

o último termo do lado direito desta equação é um termo de contorno que não contribui para as equações de movimento. Multiplicando o primeiro termo do lado direito por $e_{\mu b}$, encontraremos as equações de Einstein-Hilbert- Λ (2.34) na base ortonormal

$$R_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} R + \Lambda \eta_{ab} = \kappa^2 T_{ab}. \tag{3.19}$$

O formalismo de tetradas está em concordância com o princípio da covariância geral, pois as equações que descrevem as leis da física independem da base ou do sistema de referência, sendo elas exibidas matematicamente na forma tensorial (ver Seção-2.2). No capítulo seguinte, recorreremos ao formalismo de tetradas para descrever as equações de movimento na base ortonormal para a ação da teoria modificada da gravitação de altas curvaturas $f(R, Q, P)$.

4 Soluções tipo-Gödel na Gravidade

$f(R, Q, P)$

Fundamentado no artigo recentemente publicado [36], examinaremos a consistência das métricas tipo-Gödel do espaço-tempo homogêneo dentro da teoria da gravidade $f(R, Q, P)$ para fontes de matéria: fluido perfeito e campo escalar sem massa. Como é bem conhecido, tais geometrias permitem a violação da causalidade global. Forneceremos condições gerais para conceber soluções completamente causais de uma forma totalmente distinta da RG.

A ação da gravidade $f(R, Q, P)$ (ver referência [33]) tem a seguinte forma:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R, Q, P) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (4.1)$$

onde $\kappa^2 = 8\pi G$ está relacionado com a constante de Newton G , g é o determinante da métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$, $f(R, Q, P)$ é a função genérica dos seguintes invariantes escalares geométricos: escalar de Ricci, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, contração do tensor de Ricci $Q = R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ e contração do tensor de Riemann $P = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} R^\beta{}_{\alpha}{}^{\mu\nu}$. Ademais, $\mathcal{L}_m$ é o lagrangiano da fonte de matéria representada pelos campos de matéria arbitrários ψ .

As equações de campo são obtidas pela variação da ação (4.1) com respeito a métrica¹, sendo elas:

$$f_R R_{\mu\nu} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} + 2f_Q R_{(\mu}{}^\beta{}_{\nu)} R_{\beta)} + g_{\mu\nu} \square f_R - \nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} f_R + \square(f_Q R_{\mu\nu}) - 2\nabla_\lambda \left[\nabla_{(\mu} (f_Q R_{\nu)}^\lambda) \right] + g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\sigma (f_Q R^{\alpha\sigma}) + 2f_P R_{\alpha\beta\sigma\mu} R^{\alpha\beta\sigma}{}_\nu - 4\nabla_\alpha \nabla_\beta [f_P R^\alpha{}_{(\mu\nu)}{}^\beta] = \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(m)}, \quad (4.2)$$

em que o operador covariante d'Alembertiano é definido usualmente como $\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ e as outras quantidades são definidas da seguinte forma: $f_R \equiv \frac{\partial f}{\partial R}$, $f_Q \equiv \frac{\partial f}{\partial Q}$ e $f_P \equiv \frac{\partial f}{\partial P}$. No lado direito da Eq.(4.2), o tensor momento-energia vem da contribuição das fontes de matéria e é explicitamente dado por $T_{\mu\nu}^{(m)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}$.

As equações de campo acima podem ser convenientemente reescritas numa forma compacta, isto é,

$$G_{\mu\nu} = \kappa_{\text{eff}}^2 T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{\text{eff}}, \quad (4.3)$$

¹ No Apêndice-A encontram-se os nossos esmiuçados cálculos realizados onde obtivemos as equações de campo (4.2).

com $\kappa_{\text{eff}}^2 \equiv \frac{\kappa^2}{f_R}$ e

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = \frac{1}{f_R} & \left(-\frac{1}{2} R g_{\mu\nu} f_R + \frac{f}{2} g_{\mu\nu} - 2f_Q R_{(\mu}^{\beta} R_{\nu)\beta} - g_{\mu\nu} \square f_R + \nabla_{(\mu} \nabla_{\nu)} f_R - \square (f_Q R_{\mu\nu}) + \right. \\
& + 2\nabla_{\lambda} \left[\nabla_{(\mu} (f_Q R_{\nu)}^{\lambda}) \right] - g_{\mu\nu} \nabla_{\alpha} \nabla_{\sigma} (f_Q R^{\alpha\sigma}) - 2f_P R_{\alpha\beta\sigma\mu} R^{\alpha\beta\sigma}_{\nu} + \\
& \left. + 4\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} [f_P R^{\alpha}_{(\mu\nu)}{}^{\beta}] \right).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Agora, tomando o traço da Eq.(4.3), ela se torna

$$R = - \left(\kappa_{\text{eff}}^2 T^{(m)} + T^{\text{eff}} \right), \tag{4.5}$$

onde a notação abreviada $T^{(m)} = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{(m)}$ e $T^{\text{eff}} = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{\text{eff}}$ tem sido usada. Substituindo isto na Eq.(4.3), chegaremos as equações de campo na forma do traço-reverso,

$$R_{\mu\nu} = \kappa_{\text{eff}}^2 \left(T_{\mu\nu}^{(m)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{(m)} \right) + \left(T_{\mu\nu}^{\text{eff}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\text{eff}} \right). \tag{4.6}$$

É fácil notar que as equações de campo gravitacional (4.2) contêm termos de derivadas de ordem superior, mais precisamente, de quarta ordem. A este respeito, é sabido que no regime quântico estes modelos podem apresentar um comportamento patológico desagradável, tal como o surgimento de instabilidades fantasmagóricas², conduzindo então à quebra da unitariedade, ver referência [81]. No regime clássico, a teoria não é limitada por baixo, ou seja, não existe um estado fundamental definido como sendo o de menor energia. Para evitar este problema, seguiremos a metodologia das **teorias de campo efetiva** [82] o que significa que os efeitos dos termos de alta curvatura são suprimidos por uma escala típica de alta energia; assim, até certo ponto, tais instabilidades podem ser desprezadas no limite de baixa energia.

Tendo encontrada as equações de campo (4.2), vamos averiguar as métricas tipo-Gödel na gravidade $f(R, Q, P)$. Para tanto, é conveniente adotarmos o **formalismo de tetradas**. Vamos definir um co-frame local de Lorentz $\theta^A = e^A_{\mu} dx^{\mu}$, descrito na Seção-3.4. Aqui os índices latinos em sua forma maiúscula se referem a índices do grupo $SO(3, 1)$, enquanto os índices gregos em sua forma minúscula representam as coordenadas espaço-tempo usuais. Para as métricas tipo-Gödel em coordenadas cilíndricas (2.53), escolheremos em particular a seguinte forma

$$(\theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \theta^{(3)}) = (dt + H(r)d\theta, dr, D(r)d\theta, dz), \tag{4.7}$$

que conduz ao seguinte elemento de linha: $ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B$. Onde $\eta_{AB} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ é a métrica de Minkowski. As funções $H(r)$ e $D(r)$ e o par (m^2, ω) que caracteriza completamente todas as métricas tipo-Gödel ST-homogênea estão definidos na Seção-2.6.

² Fantasma de Boulware-Deser

No (co)-frame local de Lorentz Eqs.(4.7), as equações de campo Eq.(4.6) se tornam

$$R_{AB} = \kappa_{\text{eff}}^2 \left(T_{AB}^{(m)} - \frac{1}{2} \eta_{AB} T^{(m)} \right) + \left(T_{AB}^{\text{eff}} - \frac{1}{2} \eta_{AB} T^{\text{eff}} \right), \quad (4.8)$$

onde os índices local de Lorentz se transformam para aqueles do espaço-tempo através do vierbein e^A_μ ou de seu inverso e_A^μ . Por exemplo, a regra para se obter o tensor de Ricci na base co-frame Eqs.(4.7) é $R_{AB} = e_A^\mu e_B^\nu R_{\mu\nu}$. A específica escolha (4.7) é útil desde que as componentes não nulas do tensor de Ricci, neste sistema referencial, seja,

$$R_{(0)(0)} = 2\omega^2, \quad R_{(1)(1)} = R_{(2)(2)} = 2\omega^2 - m^2, \quad (4.9)$$

que, por sua vez, são quantidades constantes. Além disso, as quantidades escalares também são constantes, como podemos verificar por cálculo direto³

$$R = 2(m^2 - \omega^2); \quad (4.10)$$

$$Q = 2m^2(m^2 - 4\omega^2) + 12\omega^4; \quad (4.11)$$

$$P = 4m^2(m^2 - 6\omega^2) + 44\omega^4. \quad (4.12)$$

Levando isso em consideração, o tensor efetivo momento-energia se reduz a

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = \frac{1}{f_R} \left(-\frac{1}{2} R g_{\mu\nu} f_R + \frac{f}{2} g_{\mu\nu} - 2f_Q R_{(\mu}^{\beta} R_{\nu)\beta} - f_Q \square R_{\mu\nu} + 2f_Q \nabla_\lambda [\nabla_{(\mu} R_{\nu)}^\lambda] - \right. \\ \left. - f_Q g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\sigma R^{\alpha\sigma} - 2f_P R_{\alpha\beta\sigma\mu} R^{\alpha\beta\sigma}_\nu + 4f_P \nabla_\alpha \nabla_\beta R^{\alpha\beta}_{(\mu\nu)} \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Podendo ser simplificado ainda mais usando as seguintes identidades

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \nabla_\nu R^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \square R; \\ \nabla_\rho \nabla_\nu R^\rho_\mu &= \frac{1}{2} \nabla_\nu \nabla_\mu R + R_{\mu\lambda\theta\nu} R^{\lambda\theta} + R^\lambda_\mu R_{\nu\lambda}; \\ \nabla_\beta \nabla_\alpha R_\mu^{\alpha\beta} &= -\square R_{\mu\nu} + \nabla_\beta \nabla_\nu R_\mu^\beta, \end{aligned} \quad (4.14)$$

tal que, obtemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = \frac{1}{f_R} \left(-\frac{1}{2} R g_{\mu\nu} f_R + \frac{f}{2} g_{\mu\nu} - (f_Q + 4f_P) \square R_{\mu\nu} + 2(f_Q + 2f_P) R_{(\nu}^{\lambda\theta} R_{\lambda\theta)} - \right. \\ \left. - 2f_P R_{\alpha\beta\sigma(\mu} R^{\alpha\beta\sigma}_{\nu)} + 4f_P R^\lambda_{(\mu} R_{\nu)\lambda} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Esta equação corresponde ao tensor momento-energia encontrado em [31] para a gravidade $f(R, Q)$ definindo $P = 0$. Observe, no entanto, que a última equação ainda carrega um termo na derivada de quarta ordem, ou seja, $Y_{\mu\nu} = -(f_Q + 4f_P) \square R_{\mu\nu}$, ao contrário do que é afirmado em [41].

³ Utilizando o software GRTensorII Version 1.79 (R4), 2001.

Por outro lado, todos as componentes de tal termo de derivada superior desaparecem completamente no co-frame Eqs.(4.7) para a classe especial tipo-Gödel correspondente a $m^2 = 4\omega^2$, como podemos ver explicitamente abaixo

$$Y_{(0)(0)} = 4(f_Q + 4f_P)(4\omega^2 - m^2)\omega^2, \quad Y_{(1)(1)} = Y_{(2)(2)} = 2(f_Q + 4f_P)(4\omega^2 - m^2)\omega^2 \quad (4.16)$$

Assim, para este caso específico, as equações de campo se reduzem a um par de equações diferenciais parciais de segunda ordem. Outra possibilidade seria aplicar a restrição $f_Q = -4f_P$. Antes de prosseguir, vale ressaltar que examinaremos soluções tipo-Gödel pertencentes às três classes – hiperbólica, linear e trigonométrica, diferentemente de [41], onde os autores exploraram somente a classe hiperbólica.

4.1 Soluções no Vácuo

Aqui estaremos interessados em investigar as soluções das equações de campo gravitacional na ausência de fontes de matéria, $T_{\mu\nu}^{(m)} = 0$, impulsionados em parte pelos resultados encontrados em [31] no contexto da gravidade $f(R, Q)$. Como primeiro passo, vamos proceder com o deslocamento em f , ou seja, $f(R, Q, P) = f(R, Q, P) - 2\Lambda$, objetivando implementar a constante cosmológica para fins de completude. Formalmente, a inserção de uma constante cosmológica pode ser vista como uma contribuição no lado direito das equações de campo (4.3), mais explicitamente, tal contribuição gera um tensor momento-energia dado por $T_{AB}^{(\Lambda)} = -\Lambda\eta_{AB}$.

Tomando isto em conta, as equações de campo (4.6) na base local de Lorentz Eqs.(4.7) será

$$0 = 4\omega^2 f_R - f + 2\Lambda - 16f_Q\omega^2(3\omega^2 - m^2) + 16f_P\omega^2(3m^2 - 11\omega^2); \quad (4.17)$$

$$0 = 2f_R(2\omega^2 - m^2) + f - 2\Lambda - 4f_Q(m^4 - 6\omega^2 m^2 + 12\omega^4) - 8f_P(m^4 - 9\omega^2 m^2 + 22\omega^4); \quad (4.18)$$

$$2\Lambda = f, \quad (4.19)$$

em adição, temos a equação de vínculo (4.5), assim teremos

$$f_R R + 2f_Q Q + 2f_P P - 2f + 4\Lambda = 0, \quad (4.20)$$

ao combinar as Eqs.(4.17, 4.18, 4.19, 4.20), encontraremos a relação

$$f_R - 4f_Q(3\omega^2 - m^2) + 4f_P(3m^2 - 11\omega^2) = 0, \quad (4.21)$$

desta equação podemos extrair algumas importantes conclusões. Primeiro, assumindo $f_Q = f_P = 0$, obteremos que $f_R = 0$; ou seja, as soluções da teoria $f(R)$ devem satisfazer restrições nos parâmetros da métrica para admitirem soluções tipo-Gödel na ausência de

fontes de matéria. Neste caso, a RG ($f_R = 1$) não admite solução. Segundo, assumindo $f_P = 0$, em outras palavras, $f = f(R, Q, P) = f(R, Q)$, recuperamos os resultados encontrados em [31]. Outro ponto importante a ser mencionado é que nossos resultados discordam dos encontrados em [41] para a classe hiperbólica das métricas tipo-Gödel na ausência de fontes de matéria.

Por outro lado, como apontamos anteriormente, nossos resultados estão de acordo com aqueles encontrados em [31, 62, 63, 64] para teoria de gravidade $f(R, Q)$ e $f(R)$, respectivamente. Pode-se obter alguns resultados gerais explorando mais a Eq.(4.21). Por exemplo, para termos métricas completamente causais tipo-Gödel (sem a presença de CTCs), que corresponde a $m^2 \geq 4\omega^2 > 0$, a Eq.(4.21) deve satisfazer a seguinte desigualdade entre f_R, f_Q e f_P , isto é,

$$f_R \leq -4\omega^2 (f_Q + f_P). \quad (4.22)$$

Assim, conclui-se que as teorias que cumprem a desigualdade anterior não apresentam CTCs. Para a classe linear ($m^2 = 0$), a relação entre f_R, f_Q e f_P deve satisfazer

$$f_R = 4\omega^2 (3f_Q + 11f_P). \quad (4.23)$$

Com o raio crítico (2.57) dado por

$$r_c = 2\sqrt{\frac{3(f_Q + 11f_P)}{f_R}}. \quad (4.24)$$

Do outro lado, a classe trigonométrica ($m^2 = -\mu^2$) é alcançada quando

$$\frac{12f_Q\omega^2 + 44f_P\omega^2 - f_R}{4(f_Q + 3f_P)} < 0. \quad (4.25)$$

Para esclarecer melhor as soluções do vácuo (4.21), deve-se exigir o conhecimento explícito da função f . Para tanto, a seguir trataremos algumas formas funcionais particulares de f a seguir.

4.1.1 $f(R, Q, P) = R + \alpha R^2 + \beta Q + \gamma P$

Neste particular caso, a Eq.(4.21) reduz a

$$4m^2 = \frac{4\omega^2 (\alpha + 3\beta + 11\gamma) - 1}{\alpha + \beta + 3\gamma}, \quad (4.26)$$

onde α, β e γ são parâmetros constantes. Naturalmente, como esperado, está excluído o caso $\alpha = \beta = \gamma = 0$ correspondente a RG. Interessante é analisar o caso $\alpha \neq 0$ e $\beta = \gamma = 0$, assim (4.26) se torna $m^2 = \omega^2 - (4\alpha)^{-1}$, onde serão obtidas soluções para a

teoria $f(R) = R + \alpha R^2$ com restrições aos parâmetros da métrica, conforme conclusão anteriormente extraída da análise de (4.21).

Portanto, pela introdução do invariante escalar de Gauss-Bonnet, $\mathcal{G} = R^2 - 4Q + P$, no qual é um invariante topológico (derivada total) em quatro dimensões, este particular modelo $f(R, Q, P) = R + \alpha R^2 + \beta Q + \gamma P$ pode ser mapeado em $f(R, Q) = R + \alpha' R^2 + \beta' Q$ por meio de uma redefinição de seus parâmetros. Tal teoria já foi explorada em [83] e soluções de vácuo completamente causal foram encontradas lá, além de outros resultados.

Outra possibilidade plausível seria considerar $f(R, Q, P) = R + f(\mathcal{G})$, onde $f(\mathcal{G})$ corresponde a uma função arbitrária do invariante escalar de Gauss-Bonnet [84]. Nesta situação, temos $f_R = 1 + 2f_{\mathcal{G}}R$, $f_Q = -4f_{\mathcal{G}}$ e $f_P = f_{\mathcal{G}}$. Colocando essas identidades na Eq.(4.21), encontra-se uma inconsistência que implica que esse modelo não admite soluções tipo-Gödel.

Claro, este resultado também vale para modelos da gravidade generalizada de Gauss-Bonnet $f(R, Q, P) = F(R, \mathcal{G})$, desde que substituindo $f_R = F_R + 2F_{\mathcal{G}}R$, $f_Q = -4F_{\mathcal{G}}$ e $f_P = F_{\mathcal{G}}$ na Eq.(4.21), encontraremos resultados incoerentes, exceto para $F_R = 0$, que não é um caso realista porque não recupera a RG no limite de baixa energia. Esses modelos foram usados recentemente para explicar a aceleração cósmica [34].

4.1.2 $f(R, Q, P) = R + g(aR^2 + bQ + cP)$

Este modelo generaliza o caso anterior considerando uma função genérica dos invariantes de curvatura de ordem superior, $g(aR^2 + bQ + cP)$. Na verdade, tal classe de teorias gerais tem sido explorada em diversos contextos [85]. Para termos resultados mais explícitos e por conveniência, trataremos da classe particular de teorias definida por

$$g(aR^2 + bQ + cP) = -\frac{\mu^{4n+2}}{(aR^2 + bQ + cP)^n}, \quad (4.27)$$

onde a, b e c são parâmetros constantes e adimensionais, n é um número inteiro positivo e μ é uma constante na escala de massa. Em particular, a escolha da Eq.(4.27) é útil para estudar modificações na ação de Einstein-Hilbert no regime infravermelho que significa que tais modificações manifesta relevância em baixas curvaturas. Este cenário é importante em cosmologia, por exemplo, para investigar a expansão cósmica acelerada tardia [85].

Todas as três classes das métricas tipo-Gödel são possíveis para esta classe específica de teoria. Observamos que a primeira solução completamente causal ($m^2 = 4\omega^2$) deve satisfazer

$$\omega^{4n} = -\frac{2n\mu^{4n+2}}{12^n(3a + b + c)^n}. \quad (4.28)$$

Com as condições adicionais: n sendo um número ímpar positivo e $3a + b + c < 0$

para assegurar a positividade da vorticidade. A classe linear também é uma solução se

$$\omega^{4n} = -\frac{2n\mu^{4n+2}}{4^n (a + 3b + 11c)^n}, \quad (4.29)$$

suportar tanto se $a + 3b + 11c > 0$ ou se $a + 3b + 11c < 0$, quando n for um número par positivo. E, quando n for um número ímpar positivo, a solução anterior deve satisfazer a seguinte condição: $a + 3b + 11c > 0$. Outro interessante modelo consiste em fazer $b = -4c$ na Eq.(4.27). Neste caso

$$g(aR^2 + bQ + cP) = g((a - c)R^2 + c\mathcal{G}) = -\frac{\mu^{4n+2}}{((a - c)R^2 + c\mathcal{G})^n}, \quad (4.30)$$

leva à seguinte solução completamente causal ($m^2 = 4\omega^2$)

$$\omega^{4n+2} = \frac{n\mu^{4n+2}}{12^n \cdot 3^{n+1}(a - c)^n}, \quad (4.31)$$

com as seguintes condições: n sendo um número ímpar positivo e $a - c < 0$, similarmente ao caso geral mencionado. Para a classe linear, obtemos a seguinte solução

$$\omega^{4n+2} = \frac{n\mu^{4n+2}}{4^n (a - c)^n}, \quad (4.32)$$

neste caso, para garantir a positividade da vorticidade, devem ser cumpridos os seguintes requisitos: se n é ímpar então $a - c > 0$ e se n é par, $a - c > 0$ ou $a - c < 0$.

4.2 Soluções na Presença de Fontes de Matéria

Aqui apresentamos um novo ingrediente: as fontes de matéria. Ao todo, consideremos um fluido perfeito e um campo escalar sem massa como conteúdo de matéria, da mesma forma que [31]. O tensor momento-energia de um fluido perfeito é definido por $T_{AB}^{(pf)} = (p + \rho)u_A u_B - p\eta_{AB}$, na base tétrada Eqs.(4.7), onde p e ρ são a pressão e a densidade do fluido perfeito, respectivamente. A 4-velocidade de uma partícula pontual particular deste fluido perfeito é caracterizada por $u^A = \delta_0^A$. Juntando todas essas informações, chegamos aos únicos componentes do tensor momento-energia diferentes de zero, que são

$$T_{(0)(0)}^{(pf)} = \rho, \quad T_{(1)(1)}^{(pf)} = T_{(2)(2)}^{(pf)} = T_{(3)(3)}^{(pf)} = p. \quad (4.33)$$

A segunda fonte de matéria é um campo escalar sem massa (ψ) no qual seu tensor momento-energia, no co-frame Lorentz local Eqs.(4.7), $T_{AB}^{(sf)} = \nabla_A \psi \nabla_B \psi - \frac{1}{2}\eta_{AB}\eta^{CD}\nabla_C \psi \nabla_D \psi$, onde $\nabla_A \psi = e_A^\mu \nabla_\mu \psi$ como usualmente.

Ademais, o campo escalar deve satisfazer a equação de Klein-Gordon, $\square\psi = \eta^{AB}(\nabla_A \nabla_B \psi + \omega_{BA}^C \nabla_C \psi) = 0$, onde ω_{BA}^C são os coeficientes não-holonômicos. Usando a simetria das métricas tipo-Gödel, é razoável restringir o campo escalar para ser apenas

dependente de z . Neste caso, resolvendo a equação de Klein-Gordon, obtemos $\psi = bz + b_0$, onde b e b_0 são constantes.

Vale chamar a atenção para o fato de que o gradiente do campo escalar, $\nabla_A \psi = [0, 0, 0, b]$, está alinhado na mesma direção, em cada ponto do espaço-tempo, com a velocidade angular, $\omega^A = \frac{1}{2}\epsilon^{ABCD}\omega_{BCD} = [0, 0, 0, \omega]$. Assim, as componentes diferentes de zero do tensor momento-energia desse campo escalar são dadas por

$$T_{(0)(0)}^{(sf)} = T_{(3)(3)}^{(sf)} = \frac{1}{2}b^2, \quad T_{(1)(1)}^{(sf)} = T_{(2)(2)}^{(sf)} = -\frac{1}{2}b^2. \quad (4.34)$$

Juntando as duas fontes de matéria, temos $T_{AB}^{(m)} = T_{AB}^{(pf)} + T_{AB}^{(sf)}$ cujas componentes não nulas no co-frame não-local de Lorentz (4.7) são dados por

$$T_{(0)(0)}^{(m)} = \rho + \frac{1}{2}b^2, \quad T_{(1)(1)}^{(m)} = T_{(2)(2)}^{(m)} = p - \frac{1}{2}b^2, \quad T_{(3)(3)}^{(m)} = p + \frac{1}{2}b^2. \quad (4.35)$$

As componentes não nulas das equações do campo gravitacional, Eq.(4.6), na presença do conteúdo de matérias acima mencionadas, são

$$\begin{aligned} 0 &= 4\omega^2 f_R - f - 16f_Q\omega^2 (3\omega^2 - m^2) + 16f_P\omega^2 (3m^2 - 11\omega^2) - \\ &\quad - 2\kappa^2 \rho - \kappa^2 b^2; \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2f_R (2\omega^2 - m^2) + f - 4f_Q (m^4 - 6\omega^2 m^2 + 12\omega^4) - \\ &\quad - 8f_P (m^4 - 9\omega^2 m^2 + 22\omega^4) - 2\kappa^2 p + \kappa^2 b^2; \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$0 = f - 2\kappa^2 p - \kappa^2 b^2. \quad (4.38)$$

Resolvendo o conjunto anterior de equações algébricas em termos das fontes de matéria, descobrimos que

$$\begin{aligned} \kappa^2 b^2 &= (m^2 - 2\omega^2)f_R + 2(m^4 - 6\omega^2 m^2 + 12\omega^2)f_Q + \\ &\quad + 4(m^4 + 9\omega^2 m^2 - 22\omega^4)f_P; \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \kappa^2 p &= \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}(m^2 - 2\omega^2)f_R - (m^4 - 6\omega^2 m^2 + 12\omega^2)f_Q - \\ &\quad - 2(m^4 + 9\omega^2 m^2 - 22\omega^2)f_P; \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \kappa^2 \rho &= -\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}(m^2 - 6\omega^2)f_R - (m^4 - 14\omega^2 m^2 + 36\omega^2)f_Q - \\ &\quad - 2(m^4 - 3\omega^2 m^2 + 22\omega^2)f_P. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Fazendo uso das equações acima pode-se obter informações sobre as propriedades de causalidade das métricas tipo-Gödel. Primeiro, percebe-se que tomando $f_P = 0$, que corresponde a $f(R, Q, P) = f(R, Q)$, recuperamos os resultados encontrados em [31] e, particularmente, aqueles encontrados em [83] para $f(R, Q) = \alpha R + \beta Q$.

Por outro lado, vamos escolher a classe particular da métrica Gödel ($m^2 = 2\omega^2$), que apresenta CTCs, para ilustrar as propriedades de causalidade do caso geral, ou seja,

quando $f_P \neq 0$. Neste cenário, o raio crítico, cuja forma explícita é dada pela Eq.(2.58), será $r_c = \frac{2}{m} \sinh^{-1}(1)$. Mais especificamente, utilizando-se das Eqs.(4.39, 4.40, 4.41) encontraremos o valor de m , então teremos

$$r_c = 4\sqrt{5} \sinh^{-1}(1) \sqrt{\frac{f_P}{\left(f_R + \sqrt{f_R^2 - 40\kappa^2(2b^2 + p + \rho)f_P}\right)}}, \quad (4.42)$$

Lembrando que devemos assumir os seguintes requisitos: $f_R^2 \geq 40\kappa^2(2b^2 + p + \rho)f_P$ e $f_P > 0$, de modo que a equação do raio crítico (4.42) seja válida. Da mesma forma, pode-se calcular o raio crítico para a classe linear ($m^2 = 0$), usando as Eqs.(4.39, 4.40, 4.41) além da Eq.(2.57), assim

$$r_c = 22 \left[\frac{f_P}{\kappa^2(2b^2 + p + \rho)} \right]^{1/4}, \quad (4.43)$$

com as seguintes condições sendo satisfeitas: $f_P > 0$ e $2b^2 + p + \rho < 0$ ou com $f_P < 0$ e $2b^2 + p + \rho > 0$.

4.3 Soluções Completamente Causais

Conforme discutido anteriormente, os parâmetros da métrica devem satisfazer a desigualdade $m^2 \geq 4\omega^2$ para contornar o surgimento de CTCs. Aqui analisaremos as condições das equações do campo gravitacional na presença de fontes de matéria (um fluido perfeito e um campo escalar) para engendrar soluções completamente causais.

Nosso ponto de partida é reescrever as equações de campo (4.36, 4.37, 4.38) de uma forma mais conveniente, ou seja,

$$\begin{aligned} 2f_R &= \frac{8(264\omega^6 + 41m^4\omega^2 - 200m^2\omega^4 - m^6)f_P}{m^2(4\omega^2 - m^2)} + \frac{\kappa^2(m^4 - 6\omega^2m^2 + 12\omega^4)(p + \rho)}{\omega^2m^2(4\omega^2 - m^2)} \\ &+ \frac{\kappa^2(6\omega^2 - m^2)b^2}{\omega^2m^2} \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$4f_Q = \frac{16(2\omega^2 - m^2)(11\omega^2 - m^2)f_P}{m^2(4\omega^2 - m^2)} + \frac{\kappa^2(2\omega^2 - m^2)(\rho + p)}{\omega^2m^2(4\omega^2 - m^2)} + \frac{\kappa^2b^2}{\omega^2m^2} \quad (4.45)$$

$$f = \kappa^2(2p + b^2), \quad (4.46)$$

com $m^2 \neq 4\omega^2$, $m^2 \neq 0$ e, é claro, $\omega^2 \neq 0$. No entanto, para a classe $m^2 = 4\omega^2$, que corresponde a primeira solução completamente causal, temos

$$\kappa^2(p + \rho) = -112\omega^4f_P \quad (4.47)$$

$$\kappa^2b^2 = 120\omega^4f_P + 8\omega^4f_Q + 2\omega^2f_R \quad (4.48)$$

$$\kappa^2(b^2 + 2p) = f \quad (4.49)$$

Percebe-se pelas equações acima que o caso de um campo escalar (sem a presença de um fluido perfeito) não pode gerar a classe $m^2 = 4\omega^2$ se $f_P \neq 0$. Com $f_P = 0$ recuperam-se os mesmos resultados obtidos em [31]. Por outro lado, o caso de termos só o fluido perfeito, sem o campo escalar, teremos restrição na forma funcional de $f(R, Q, P)$, como podemos ver que (4.48) se reduz a

$$f_R = -60\omega^2 f_P - 4\omega^2 f_Q. \quad (4.50)$$

Isso sugere que o caso genérico permite novas soluções completamente causais dentro do intervalo $m^2 > 4\omega^2$ e também uma arbitrariedade adicional na forma funcional de $f(R, Q, R)$. Para investigar tais soluções livres de CTC, vamos assumir $m^2 > 4\omega^2$ nas Eqs. (4.44, 4.45). Observe ainda que essas soluções podem ser divididas em dois casos distintos:

- $p + \rho > 0$ e $b^2 > 0$. Este caso é alcançado se as condições abaixo forem satisfeitas:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_Q > 0, & \text{se } 4\omega^2 < m^2 < 11\omega^2 \text{ e } f_P > 0 \\ & \text{ou } m^2 > 11\omega^2 \text{ e } f_P < 0, \\ f_R < 0, & \text{se } 6\omega^2 \leq m^2 \lesssim 35.5887\omega^2 \text{ e } f_P > 0 \\ & \text{ou } m^2 \gtrsim 35.5887\omega^2 \text{ e } f_P < 0. \end{array} \right.$$

- $p + \rho < 0$ e $b^2 > 0$,

neste último cenário, concluímos das Eqs.(4.44, 4.45) que f_R e f_Q podem assumir ambos os sinais independentemente do sinal de f_P . Para ilustrar a discussão acima, vamos considerar novamente a teoria particular

$$f(R, Q, P) = R - \frac{\mu^{4n+2}}{(aR^2 + bQ + cP)^n} \quad (4.51)$$

Por conveniência e sem perda de generalidade, vamos concentrar nossos esforços no caso simples $n = 1$ (a análise é similar para n genérico). É direto da Eq.(4.50) que os parâmetros do modelo devem cumprir a condição abaixo

$$\left(\frac{\omega}{\mu}\right)^6 = -\frac{1}{4} \frac{3a + 15c + b}{(9a + b + 3c)^2} \implies 3(a + 5c) + b < 0 \quad (4.52)$$

Para assim admitir a primeira solução completamente causal ($m^2 = 4\omega^2$) suportada por um fluido perfeito, sem a presença de um campo escalar sem massa.

5 Conclusão e Perspectivas Futuras

A RG é claramente uma das teorias físicas de maior sucesso, sendo naturalmente formulada da extensão da RR. Tendo um pouco mais de 100 anos de história, fez ela uma série de previsões que foram confirmadas, logo em seu início e ainda nos dias atuais. No entanto, as teorias da gravitação modificadas surgem como modelos alternativos construídos através de modificações na ação de Einstein-Hilbert com o objetivo de encontrar soluções aos problemas advindos da cosmologia e astrofísica e na formulação de uma consistente teoria quântica da gravitação.

Neste aspecto, investigamos nesta dissertação condições particulares para se obter soluções completamente causais tipo-Gödel dentro da teoria da gravidade modificada $f(R, Q, P)$, para um fluido perfeito e para um campo escalar sem massa. Como primeiro passo, demonstramos que as equações de campo para $f(R, Q, P)$ não se reduzem a um conjunto de equações diferenciais parciais de segunda ordem para métricas tipo-Gödel, em desacordo com [41]. Na verdade, isso só acontece para a classe especial $m^2 = 4\omega^2$, o que corresponde a um resultado importante e não trivial, pois evita o potencial surgimento de CTCs.

Apesar desses modelos apresentarem essa solução livre de CTC, em particular, conseguimos gerar outras soluções causais dentro do intervalo $m^2 > 4\omega^2$. Além disso, foram obtidas as três classes de métricas tipo-Gödel, generalizando-se então os resultados encontrados em [41], que leva em conta apenas a classe hiperbólica.

Encontramos muitas soluções sem paralelo com a RG. Por exemplo, mostramos que a gravidade $f(R, Q, P)$ com uma constante cosmológica admite soluções não triviais tipo-Gödel para o vácuo, para todas as três classes, em particular, soluções completamente causais. Neste contexto, tratamos de dois modelos particulares, a saber:

$$f(R, Q, P) = R + \alpha R^2 + \beta Q + \gamma P, \quad (5.1)$$

neste primeiro caso, este modelo é equivalente a

$$f(R, Q) = R + \alpha' R^2 + \beta' Q, \quad (5.2)$$

onde as métricas tipo-Gödel foram estudadas em [83, 41]. E no segundo caso, onde temos o seguinte modelo

$$f(R, Q, P) = R - \frac{\mu^{4n+2}}{(aR^2 + bQ + cP)^n} \quad (5.3)$$

Neste último caso, no entanto, foram fornecidas as condições nos parâmetros constantes para realizar a primeira solução livre de CTC ($m^2 = 4\omega^2$).

Ao incluir fontes de matéria, um fluido perfeito e/ou um campo escalar, calculamos explicitamente o raio crítico r_c para a classe Gödel ($m^2 = 2\omega^2$) e também para a classe linear ($m^2 = 0$). Também obtivemos as condições necessárias para alcançar soluções completamente causais na presença de um fluido perfeito e/ou um campo escalar. Como exemplo específico, consideramos o modelo

$$f(R, Q, P) = R - \frac{\mu^6}{(aR^2 + bQ + cP)} \quad (5.4)$$

Em particular, esta teoria apresenta uma solução completamente causal tipo-Gödel se a Eq.(4.52) for válida.

Desta forma, com metodologia relativamente simples à generalização da RG, a adesão às métricas tipo-Gödel no estudo da gravidade estendida $f(R, Q, P)$ aponta para alguns resultados úteis e atrativos, sendo uma alternativa interessante na busca de respostas ainda não encontradas na cosmologia, astrofísica e gravitação quântica. Todavia, em um contexto geral, sabemos que as teorias da gravidade modificada são teorias tentativas com amplo e variado campo de pesquisa ainda a ser explorado.

Em continuação ao presente trabalho, temos a possibilidade de estudar a gravidade modificada por um termo de Gauss-Bonnet regularizado e um termo de Chern-Simons (não) dinâmico, também conhecido como termo de Chern-Pontryagin [38, 39]. Tal teoria abrangeria soluções além das obtidas na RG, com efeitos de quebra de simetria de Lorentz e violação de CPT, princípio segundo o qual os sistemas físicos são invariantes para transformações que envolvem, concomitantemente, as operações de conjugação de cargas, paridade (inversão dos eixos espaciais) e inversão temporal.

Uma outra possibilidade seria o estudo das teorias vetor-tensoriais no formalismo métrico-afim (Palatini), em que a métrica e a conexão são tratados como entes geométricos independentes, a priori, conforme descrito no Apêndice-B. Um caso de bastante sucesso é o modelo bumblebee métrico-afim [86], no qual pretendemos estudá-lo no contexto de soluções de buracos negros na presença de quebra espontânea de simetria de Lorentz. Ainda mais, em vista de aplicações cosmológicas, poderemos também estudar vários aspectos principais de teorias da gravidade contendo termos não-locais e soluções solitônicas em teorias de supergravidade aplicadas no contexto de teorias fundamentais da natureza.

APÊNDICE A – Variação da ação

$$f(R, Q, P)$$

No formalismo métrico, as equações de movimento surgem quando aplicamos o princípio variacional na ação em relação a variável dinâmica, a métrica $g_{\mu\nu}$ ou de sua inversa $g^{\mu\nu}$.

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} f(R, Q, P) + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m[g_{\mu\nu}, \psi], \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathcal{M}$ é a variedade topológica do espaço-tempo, $\kappa^2 = 8\pi G$ está relacionada com a constante de Newton G , g é o determinante da métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$, $f(R, Q, P)$ é a função genérica dos seguintes invariantes escalares geométricos: o escalar de Ricci, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, a contração do tensor de Ricci $Q = R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ e a contração do tensor de Riemann $P = R^\alpha_{\beta\mu\nu} R^\beta_{\alpha}{}^{\mu\nu}$. Ademais, $\mathcal{L}_m$ é o Lagrangiano da fonte de matéria representada abaixo pelos campos arbitrários ψ . Aqui definiremos a velocidade da luz ser igual a um ($c = 1$). Por definição, o tensor momento-energia vem da contribuição das fontes de matéria e é explicitamente dado por

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (\text{A.2})$$

Seja M uma matriz quadrada de determinante diferente de zero, encontraremos a expressão para a variação do determinante desta matriz M

$$\begin{aligned} \delta(\det M) &= \det(M + \delta M) - \det(M) \\ &= \det(M(I + M^{-1}\delta M)) - \det(M) \\ &= \det(M) \det(I + M^{-1}\delta M) - \det(M) \\ &= \det(M) [1 + \text{tr}(M^{-1}\delta M) + \dots] - \det(M) \\ &= \det(M) \text{tr}(M^{-1}\delta M) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Esta é a célebre **fórmula de Jacobi**. Agora, fazendo a matriz quadrada M ser a própria métrica g , então obteremos a equação da variação da métrica g

$$\begin{aligned} \delta g &= \delta \det(g_{\mu\nu}) = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ \therefore \delta \sqrt{-g} &= \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \delta g = \frac{-1}{2\sqrt{-g}} (g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Sabendo que a métrica $g_{\mu\nu}$ e a sua inversa $g^{\mu\nu}$ satisfazem a condição $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$, iremos agora encontrar o valor da variação do inverso da métrica $\delta g^{\mu\nu}$

$$\delta(g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu}) = \delta(\delta^\mu_\nu) = \delta g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha} \delta g_{\alpha\nu} = \delta g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} g^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma} g^{\mu\alpha} \delta g_{\alpha\nu} = 0$$

$$\therefore \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta} \implies g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \text{ ou } \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta} \quad (\text{A.5})$$

Necessitamos agora encontrar a variação dos símbolos de Christoffel $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\delta g_{\mu\sigma,\nu} + \delta g_{\nu\sigma,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\sigma}) - \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \delta g_{\rho\beta} g^{\beta\sigma} (\delta g_{\mu\sigma,\nu} + \delta g_{\nu\sigma,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\sigma}) \\ \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\delta g_{\mu\sigma,\nu} + \delta g_{\nu\sigma,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\sigma}) - \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \delta g_{\rho\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Mas antes, devemos apresentar o conceito de derivada covariante, denotada pelo símbolo nabla ∇ , ou pela notação do sinal ortográfico do ponto e vírgula (;)¹. Suponha um campo tensorial cujas componentes são $X_{\dots\beta_1\dots\beta_q}^{\alpha_1\dots\alpha_p}$, então, a derivada covariante em relação a uma conexão arbitrária Γ é definida como sendo

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} X_{\beta_1\dots\beta_q}^{\alpha_1\dots\alpha_p} &= \partial_{\mu} X_{\beta_1\dots\beta_q}^{\alpha_1\dots\alpha_p} + \Gamma_{\rho\mu}^{\alpha_1} X_{\beta_1\dots\beta_q}^{\rho\alpha_2\dots\alpha_p} \dots + \Gamma_{\rho\mu}^{\alpha_p} X_{\beta_1\dots\beta_q}^{\alpha_1\dots\rho} \\ &\quad - \Gamma_{\beta_1\mu}^{\sigma} X_{\sigma\dots\beta_q}^{\alpha_1\dots\alpha_p} \dots - \Gamma_{\beta_q\mu}^{\sigma} X_{\beta_1\dots\sigma}^{\alpha_1\dots\alpha_p} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

assim sendo, aplicaremos a seguir a definição de derivada covariante na variação da métrica

$$\nabla_{\nu} \delta g_{\mu\sigma} = \delta g_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} \delta g_{\alpha\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha} \delta g_{\mu\alpha} \quad (\text{A.8})$$

Isolando o primeiro termo do lado direito da Eq. (A.8) e utilizando-a para todos os três termos referentes a variação da métrica δg contidos na Eq.(A.6) (evidentemente levando em consideração os respectivos índices para cada um dos termos), após cancelados todos os termos proporcionais aos símbolos de Christoffel, encontraremos o seguinte resultado

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\delta g_{\nu\sigma;\mu} + \delta g_{\mu\sigma;\nu} - \delta g_{\mu\nu;\sigma}), \quad (\text{A.9})$$

utilizando a derivada covariante da variação dos símbolos de Christoffel Eq.(A.6), teremos a seguinte expressão

$$\delta\Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\alpha} = \delta\Gamma_{\mu\nu;\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\sigma}^{\alpha} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma} \delta\Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} \delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}. \quad (\text{A.10})$$

Para o tensor de Riemann, $R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\sigma}$, temos:

$$\delta R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} = \delta\Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\alpha} - \delta\Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \delta\Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha} - \delta\Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \delta\Gamma_{\mu\beta}^{\sigma}, \quad (\text{A.11})$$

obedecendo as seguintes identidades de Bianchi (contraídas e não contraídas):

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu;\delta} + R_{\alpha\beta\delta\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\delta;\mu} &= 0 \\ R_{\alpha\beta\mu\nu}{}^{;\alpha} + R_{\beta\mu;\nu} - R_{\beta\nu;\mu} &= 0 \\ 2R_{\mu\nu}{}^{;\mu} - R_{;\nu} &= 0 \\ 2R_{\mu\nu}{}^{;\mu\nu} - \square R &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

¹ A vírgula quando sozinha (,) representa a derivada parcial

Substituindo a Eq.(A.10) para os dois primeiros termos da Eq.(A.11) (tendo em consideração seus respectivos índices), veremos que todos os termos quadráticos em Γ serão cancelados, resultando na renomada **equação de Palatini**:

$$\delta R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu;\beta} - \delta\Gamma^\alpha_{\mu\beta;\nu} \quad (\text{A.13})$$

Por questão de completeza, demonstraremos agora um método alternativo e menos trabalhoso para dedução da equação de Palatini, utilizando-se da técnica das coordenadas geodésicas², onde a escolha de um arbitrário ponto P na qual todos os símbolos de Christoffel se anulam ($\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \doteq 0$)³. Dessarte, em particular, a derivada covariante se reduz a derivada ordinária no ponto P e o tensor de Riemann se reduz a

$$R^\alpha_{\mu\beta\nu} \doteq \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \quad (\text{A.14})$$

Faremos assim a variação da conexão $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, para uma nova conexão $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \quad (\text{A.15})$$

onde $\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ é a diferença entre duas conexões, sendo tal diferença um tensor do tipo (1,2). Esta variação resulta em uma mudança no tensor de Riemann

$$R^\alpha_{\mu\beta\nu} \longrightarrow \tilde{R}^\alpha_{\mu\beta\nu} = R^\alpha_{\mu\beta\nu} + \delta R^\alpha_{\mu\beta\nu} \quad (\text{A.16})$$

onde

$$\begin{aligned} \delta R^\alpha_{\mu\beta\nu} &\doteq \partial_\beta(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \partial_\nu(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\beta}) \\ &\doteq \nabla_\beta(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\beta}) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Agora, vamos substituir a Eq.(A.9) na equação de Palatini (A.13) ou (A.17)

$$\begin{aligned} \delta R^\alpha_{\mu\beta\nu} &= \nabla_\beta \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\delta g_{\nu\sigma;\mu} + \delta g_{\mu\sigma;\nu} - \delta g_{\mu\nu;\sigma}) \right] - \nabla_\nu \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\delta g_{\beta\sigma;\mu} + \delta g_{\mu\sigma;\beta} - \delta g_{\mu\beta;\sigma}) \right] \\ &= \delta g^\alpha_{\nu;\mu\beta} + \delta g^\alpha_{\mu;\nu\beta} - \delta g^\alpha_{\mu\nu;\beta} - \delta g^\alpha_{\beta;\mu\nu} - \delta g^\alpha_{\mu;\beta\nu} + \delta g^\alpha_{\mu\beta;\nu} \\ &= \delta g^\alpha_{(\mu;\nu)\beta} - \delta g^\alpha_{(\mu;\beta)\nu} + \delta g^\alpha_{\mu[\beta;\nu]} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

De modo direto, contraindo os índices α e β na equação de Palatini (A.13) ou (A.17), encontraremos a variação do tensor de Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu;\alpha} - \delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha;\nu} \quad (\text{A.19})$$

² A essência dessa técnica está no princípio da equivalência.

³ O símbolo $\doteq$ representa ser válida a igualdade quando assumido as coordenadas geodésicas.

Substituindo a Eq.(A.9) na Eq.(A.19) teremos

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \nabla_\alpha [g^{\alpha\sigma} (\delta g_{\nu\sigma;\mu} + \delta g_{\mu\sigma;\nu} - \delta g_{\mu\nu;\sigma})] - \frac{1}{2} \nabla_\nu [g^{\alpha\sigma} (\delta g_{\alpha\sigma;\mu} - \delta g_{\mu\sigma;\alpha} + \delta g_{\mu\alpha;\sigma})] \\
&= \frac{1}{2} \delta g_{\nu}{}^\alpha{}_{;\mu\alpha} + \frac{1}{2} \delta g_{\mu}{}^\alpha{}_{;\nu\alpha} - \frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu;\sigma}{}^\sigma - \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \delta g_{\alpha\sigma;\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \delta g_{\mu\sigma;\alpha\nu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \delta g_{\mu\alpha;\sigma\nu} \\
&= \delta g^\rho{}_{(\mu;\nu)\rho} - \frac{1}{2} \square \delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \delta g_{\rho\sigma;\mu\nu},
\end{aligned} \tag{A.20}$$

e o escalar de Ricci R fica sendo conhecido como escalar de curvatura de $g_{\mu\nu}$.

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_\mu{}^\mu = g^{\nu\alpha} \Gamma_{\nu\alpha,\mu}^\mu - g^{\nu\alpha} \Gamma_{\nu\mu,\alpha}^\mu + g^{\nu\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \Gamma_{\mu\rho}^\rho - g^{\nu\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\rho \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \tag{A.21}$$

Agora, utilizando a Eq.(A.20) iremos encontrar a expressão para a variação do escalar de Ricci $\delta R = \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})$

$$\begin{aligned}
\delta R &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \left(\delta g^\rho{}_{(\mu;\nu)\rho} - \frac{1}{2} \square \delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \delta g_{\rho\sigma;\mu\nu} \right) \\
&= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \delta g^{\nu\rho}{}_{;\nu\rho} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \square g^{\alpha\sigma} \delta g_{\alpha\sigma} \\
&= (R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \square) \delta g^{\mu\nu} = (-R^{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \square) \delta g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Nas passagens acima, utilizamos (A.5) e (A.20) além da manipulação dos índices. Agora iremos encontrar a variação de $\delta Q = \delta(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu})$

$$\begin{aligned}
\delta Q &= \delta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta R^{\mu\nu} \\
&= \delta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} [\delta g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta} + g^{\mu\alpha} \delta g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta R_{\alpha\beta}] \\
&= \delta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\nu\beta} R_{\mu\alpha} + g^{\beta\alpha} \delta g^{\nu\mu} R_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta R_{\alpha\beta} R_{\mu\nu} \\
&= \delta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} R^\alpha{}_\nu R_{\mu\alpha} + \delta g^{\mu\nu} R^\beta{}_\mu R_{\nu\beta} + \delta R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} \\
&= 2R^\mu{}_\alpha R_{\mu\beta} \delta g^{\alpha\beta} + 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Da mesma forma, podemos encontrar a variação da contração do tensor de Riemann $R_{\mu\beta\gamma\delta} R^{\mu\beta\gamma\delta}$, conhecido como invariante quadrático de Kretschmann,

$$\begin{aligned}
\delta P &= \delta R_{\mu\beta\gamma\delta} R^{\mu\beta\gamma\delta} + R_{\mu\beta\gamma\delta} \delta R^{\mu\beta\gamma\delta} \\
&= [\delta g_{\mu\nu} R^\nu{}_{\beta\gamma\delta} + g_{\mu\nu} \delta R^\nu{}_{\beta\gamma\delta}] R^{\mu\beta\gamma\delta} + \\
&\quad R_{\mu\beta\gamma\delta} [\delta g^{\beta\nu} g^{\gamma\rho} g^{\delta\sigma} R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + g^{\beta\nu} \delta g^{\gamma\rho} g^{\delta\sigma} R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + g^{\beta\nu} g^{\gamma\rho} \delta g^{\delta\sigma} R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + \\
&\quad + g^{\beta\nu} g^{\gamma\rho} g^{\delta\sigma} \delta R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}] \\
&= \delta g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R_{\mu\beta\gamma\delta} g^{\mu\nu} R_{\nu}{}^{\beta\gamma\delta} + \delta R_{\mu\beta\gamma\delta} R^{\mu\beta\gamma\delta} + R_{\mu\beta\gamma\delta} \delta g^{\beta\nu} R^\mu{}_{\nu}{}^{\gamma\delta} + \\
&\quad R_{\mu\beta\gamma\delta} \delta g^{\gamma\rho} R^{\mu\beta}{}_{\rho}{}^{\delta} + R_{\mu\beta\gamma\delta} \delta g^{\delta\sigma} R^{\mu\beta\gamma}{}_{\sigma} + R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} \delta R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \\
&= \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\beta\gamma\delta} R_{\nu}{}^{\beta\gamma\delta} + \delta R_{\mu\beta\gamma\delta} R^{\mu\beta\gamma\delta} + R_{\beta\mu\gamma\delta} \delta g^{\beta\nu} R_{\nu}{}^{\mu\gamma\delta} + \\
&\quad R_{\gamma\mu\beta\delta} \delta g^{\gamma\rho} R_{\rho}{}^{\mu\beta\delta} + R_{\delta\mu\beta\gamma} \delta g^{\delta\sigma} R_{\sigma}{}^{\mu\beta\gamma} + R^{\mu\nu\rho\sigma} \delta R_{\mu\nu\rho\sigma} \\
&= 4R_{\mu\alpha\beta\gamma} R_{\nu}{}^{\alpha\beta\gamma} \delta g^{\mu\nu} + 2R^{\alpha\beta\gamma\delta} \delta R_{\alpha\beta\gamma\delta}
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Utilizando as Equações (A.2, A.4, A.5, A.18, A.20, A.22, A.23, A.24) podemos encontrar δS , a variação da ação (A.1). Por simplicidade de notação, utilizaremos as definições $f = f(R, Q, P)$, $f_R = \frac{\partial f}{\partial R}$, $f_Q = \frac{\partial f}{\partial Q}$, $f_P = \frac{\partial f}{\partial P}$ e $\mathcal{L}_m[g_{\mu\nu}, \psi] = \mathcal{L}_m$.

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta(\sqrt{-g}f) + \int d^4x \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m) \\
&= \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[\sqrt{-g} (\delta f) + f (\delta\sqrt{-g}) \right] + \int d^4x \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m) \\
&= \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left(f_R R_{\mu\nu} + 2f_Q R_{\mu}^{\alpha} R_{\alpha\nu} + 4f_P R_{\mu\alpha\beta\gamma} R_{\nu}^{\alpha\beta\gamma} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} - \kappa^2 T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[(g^{\mu\nu} f_R + 2f_Q R^{\mu\nu}) \delta R_{\mu\nu} + 2f_P R^{\alpha\beta\gamma\delta} \delta R_{\alpha\beta\gamma\delta} \right] \\
&= \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left(f_R R_{\mu\nu} + 2f_Q R_{\mu}^{\alpha} R_{\alpha\nu} + 4f_P R_{\mu\alpha\beta\gamma} R_{\nu}^{\alpha\beta\gamma} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} - \kappa^2 T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} f_R \left[-(\delta g^{\mu\nu})_{;\mu\nu} - \square(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} f_Q R^{\mu\nu} [2\delta g^{\rho}_{(\mu;\nu)\rho} - \square\delta g_{\mu\nu} - g^{\rho\sigma} \delta g_{\rho\sigma;\mu\nu}] \\
&\quad + \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} 2f_P R^{\alpha\beta\gamma\delta} [\delta g_{\alpha(\beta;\delta)\gamma} - \delta g_{\alpha(\beta;\gamma)\delta} + \delta g_{\beta[\gamma;\alpha\delta]}] ,
\end{aligned}$$

finalmente chegaremos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left\{ f_R R_{\mu\nu} + 2f_Q R_{\mu}^{\alpha} R_{\alpha\nu} + 2f_P R_{\mu\alpha\beta\gamma} R_{\nu}^{\alpha\beta\gamma} \right\} \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{f}{2} g_{\mu\nu} - \kappa^2 T_{\mu\nu} - f_{R;\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left\{ g_{\mu\nu} \square f_R - 2[f_Q R^{\alpha}_{(\mu;\nu)\alpha} + \square[f_Q R_{\mu\nu}] \right\} \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{2\kappa^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left\{ [f_Q R_{\alpha\beta}]^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - 4[f_P R_{\mu}^{\alpha\beta}{}_{\nu;\alpha\beta}] \right\} \delta g^{\mu\nu} + (\dots) ,
\end{aligned} \tag{A.25}$$

onde (...) retrata os termos de contorno que não contribuem em nada para o resultado final das equações de movimento.

Para variedades fechadas (compacta e sem contorno), os termos de contorno são identicamente nulos. Por outro lado, quando estamos tratando de variedades com contorno a situação se modifica. Nesse caso os termos de contorno não são identicamente nulos e, portanto, para se ter um princípio variacional bem definido se faz necessário adicionar um termo de contorno à ação de Einstein-Hilbert. Tal termo é a bem conhecida ação de Gibbons-Hawking-York, S_{GHY} , cujo papel principal é cancelar os termos de contorno não triviais advindos da ação de Einstein-Hilbert [87]

$$S_{GHY} = \frac{1}{\kappa^2} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \epsilon \sqrt{h} K , \tag{A.26}$$

onde $\partial\mathcal{M}$ é o contorno da variedade $\mathcal{M}$, h é o determinante da métrica induzida no contorno $h_{\mu\nu}$, K é o traço do tensor de curvatura extrínseco, ϵ é igual -1 quando o vetor

normal ao contorno é tipo-espaço e $+1$ quando o vetor normal ao contorno é do tipo-tempo, para a assinatura $(+, -, -, -)$, y^a são as coordenadas no contorno.

O tensor de curvatura extrínseco, também conhecido como segunda forma fundamental, é uma forma quadrática no plano tangente de uma superfície lisa no espaço euclidiano tridimensional, que juntamente com a primeira forma fundamental, serve para definir invariantes extrínsecos da superfície, suas curvaturas principais. Geralmente, tal forma quadrática é definida para uma subvariedade suave imersa em uma variedade (pseuda)riemanniana.

Como foi dito, tal procedimento de adicionar o termo (A.26) à ação de Einstein-Hilbert assegura a validade do princípio variacional, que leva às equações de Einstein. Na Seção-2.4 encontra-se o cálculo detalhado para um termo de contorno na variação da ação de Einstein-Hilbert.

Todavia, para a nossa proposta aqui, devido a natureza arbitrária da variação e o espaço-tempo assumido na ação (A.1), podemos considerar sem nenhum prejuízo que tais termos (...) não contribuem para as equações de movimento. A contento, podemos extrair de (A.25) as equações de campo da gravidade $f(R, Q, P)$, como sendo

$$\begin{aligned} f_R R_{\mu\nu} + 2f_Q R_{\mu}{}^{\alpha} R_{\alpha\nu} + 2f_P R_{\mu\alpha\beta\gamma} R_{\nu}{}^{\alpha\beta\gamma} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} - \kappa^2 T_{\mu\nu} - f_{R;\mu\nu} + \\ + g_{\mu\nu} \square f_R - 2[f_Q R^{\alpha}{}_{(\mu};{}_{\nu)\alpha} + \square[f_Q R_{\mu\nu}] + [f_Q R_{\alpha\beta}]^{;\alpha\beta} g_{\mu\nu} - 4[f_P R_{\mu}{}^{\alpha\beta}{}_{\nu};{}_{\alpha\beta} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

estas são as equações de movimento da teoria $f(R, Q, P)$, mais especificamente são equações diferenciais de 4a. ordem em relação às suas derivadas, cuja variável dinâmica é a métrica $g_{\mu\nu}$, advindas do princípio variacional no formalismo métrico aplicado à ação (A.1). As equações (A.27) são consideradas como sendo uma generalização das equações de movimento de outras teorias da gravidade. Por exemplo, é de fácil verificação que quando definimos $P = 0$, (A.27) se tornarão equações de movimento para os modelos das teorias de gravidade $f(R, Q)$. E, ao avocarmos $f(R, Q, P) = R$, recuperaremos as equações de Einstein (2.32).

APÊNDICE B – Teorias Métrico-Afins

Aqui apresentaremos objetos geométricos que permitirão descrever o campo gravitacional através de teorias cuja classificação depende de estruturas geométricas definidas na própria variedade $\mathcal{M}^4$, cuja estrutura de conexão definida nela é chamada de espaço conectado afim, denotado por L^4 .

Na estrutura da abordagem geometrodinâmica, modelamos o espaço-tempo como uma variedade quadridimensional suave $\mathcal{M}^4$. Neste último, pode-se introduzir várias estruturas geométricas para descrever o campo gravitacional. Aqui, apresentamos uma breve visão geral das mais importantes, assumiremos que ambas as estruturas: a métrica e a conexão afim, são introduzidas na variedade e que por definição, elas são independentes¹. Chamamos assim esse espaço de espaço-tempo métrico-afim generalizado G^4 . O resumo das principais noções, definições e métodos da moderna geometria diferencial pode ser encontrado numa exposição mais detalhada em [89].

Consideremos o transporte paralelo de um vetor V de um ponto $x \in G^4$ ao longo de alguma curva fechada $\gamma \subset G^4$. Ao voltar para x , descobre-se que, em geral, o vetor final, transportado paralelamente, V' não coincide com o V original. A diferença se manifesta nos três efeitos: o vetor V' é girado em relação a V , seu comprimento é alterado e a imagem do contorno γ no espaço tangente resulta em ser alterado por um vetor diferente de zero.

Esses efeitos são determinados pelos seguintes objetos geométricos básicos de G^4 : O tensor de curvatura da conexão Γ

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \partial_{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\rho\mu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\rho} - \Gamma_{\rho\nu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\rho} \quad (\text{B.1})$$

O tensor de curvatura homotético

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\cdot\nu} - \partial_{\nu}\Gamma_{\cdot\mu} \quad (\text{B.2})$$

onde $\Gamma_{\cdot\mu} := \Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha}$. E o tensor torção sendo

$$Q_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{[\mu\nu]}^{\alpha} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}) \quad (\text{B.3})$$

Nas coordenadas locais, os efeitos acima mencionados do transporte paralelo ao longo de um caminho fechado são lidos como segue:

- A rotação de um vetor:

$$\delta V^{\alpha} \approx R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} V^{\beta} ds^{\mu\nu} \quad (\text{B.4})$$

¹ O conteúdo apresentado nesta seção de apêndice fora retirado da referência [88].

- A mudança do comprimento:

$$\delta l \approx l(V)\Omega_{\mu\nu}ds^{\mu\nu} \quad (\text{B.5})$$

- A imagem do contorno no espaço tangente é alterada pelo vetor:

$$\xi^\alpha \approx 2Q_{\mu\nu}^\alpha ds^{\mu\nu} \quad (\text{B.6})$$

Aqui $ds^{\mu\nu}$ é o elemento de superfície abrangido pelo contorno fechado γ . Introduzimos agora outro tensor fundamental que é uma característica importante da variedade G^4 , mesmo não sendo totalmente independente dos tensores apresentados acima. Este é o tensor de não metricidade que mede a (in)compatibilidade da métrica independente e da conexão. É igual à derivada covariante da métrica $g_{\alpha\beta}$:

$$K_{\mu\alpha\beta} = \nabla_\mu g_{\alpha\beta} \quad (\text{B.7})$$

Dizemos que a métrica e a conexão são compatíveis quando $K_{\mu\alpha\beta} = 0$ desaparece em $\mathcal{M}^4$, ou seja, quando a condição de metricidade é satisfeita

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Vamos considerar algumas propriedades dos tensores fundamentais. Uma inspeção mais detalhada dos efeitos não integráveis mencionados acima Eqs.(B.4, B.5 e B.6) mostram que eles se devem ao fato de que as derivadas covariantes ∇ não comutam entre si. Para qualquer vetor V encontramos

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) V^\alpha = R_{\beta\mu\nu}^\alpha V^\beta + 2Q_{\mu\nu}^\beta \nabla_\beta V^\alpha \quad (\text{B.9})$$

Este resultado pode ser generalizado para tensores arbitrários. Em particular, considerando o comutador de derivadas covariantes da métrica, obtemos as identidades úteis relacionando os tensores de curvatura Eq.(B.1) e a não metricidade Eq.(B.7):

$$2\nabla_{[\mu} K_{\nu]\alpha\beta} = 2\nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]} g_{\alpha\beta} = -2R_{(\alpha\beta)\mu\nu} + 2Q_{\mu\nu}^\rho K_{\rho\alpha\beta} \quad (\text{B.10})$$

Como resultado, descobrimos que a parte simétrica do tensor de curvatura no primeiro par de índices $R_{(\alpha\beta)\mu\nu}$ não é trivial quando $K_{\alpha\mu\nu} \neq 0$. Contraindo a Eq.(B.10) com $g^{\alpha\beta}$, recuperamos a curvatura homotética

$$g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\mu\nu}^\alpha = \Omega_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu K_\nu - \partial_\nu K_\mu) \quad (\text{B.11})$$

aqui $K_\mu = K_{\mu\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ é o vetor de não-metricidade, ou de outra forma, o campo vetorial de Weyl.

A equação (B.7) pode ser resolvida em relação à conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ de forma que esta última seja expressa em termos de métrica, torção e não metricidade:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\nu \end{array} \right\} + D_{\mu\nu}^\alpha \quad (\text{B.12})$$

Aqui

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\nu \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (\text{B.13})$$

é o símbolo de Christoffel, e

$$D_{\mu\nu}^\alpha = Q_{\mu\nu}^\alpha + Q_{\nu\mu}^\alpha + Q_{\nu\mu}^\alpha - \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} (K_{\nu\mu\rho} + K_{\mu\nu\rho} - K_{\rho\mu\nu}) \quad (\text{B.14})$$

é o tensor de defeito de conexão (também chamado de tensor de distorção). A conexão $\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\nu \end{array} \right\}$ é a única conexão sem torção compatível com a estrutura métrica. É chamada de conexão riemanniana ou métrica.

Uma conexão arbitrária com uma torção diferente de zero, mas compatível com métrica, é chamada de conexão Riemann-Cartan. Sua estrutura explícita é obtida da Eq.(B.12) se colocarmos $K_{\alpha\mu\nu} = 0$:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\nu \end{array} \right\} + Q_{\mu\nu}^\alpha + Q_{\mu\nu}^\alpha + Q_{\nu\mu}^\alpha = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\nu \end{array} \right\} + T_{\mu\nu}^\alpha, \quad (\text{B.15})$$

a combinação

$$T_{\mu\nu}^\alpha = Q_{\mu\nu}^\alpha + Q_{\mu\nu}^\alpha + Q_{\nu\mu}^\alpha, \quad (\text{B.16})$$

é geralmente chamado de tensor de contorção. A partir de agora nos limitaremos ao espaço-tempo Riemann-Cartan U^4 com a métrica e a conexão Riemann-Cartan Eq.(B.15).

Os tensores fundamentais em U^4 possuem um grande número de componentes independentes (24 para a torção e 36 para a curvatura), e é conveniente decompor esses objetos geométricos nas partes L_6 -irredutíveis (onde $L_6 = SO(3,1)$ é o grupo de Lorentz). A decomposição do tensor de torção nas três partes L_6 -irredutíveis é a seguinte:

$$Q_{\mu\nu}^\alpha = \bar{Q}_{\mu\nu}^\alpha + \frac{2}{3} \delta_{[\nu}^\alpha Q_{\mu]} + g^{\alpha\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \check{Q}^\rho. \quad (\text{B.17})$$

Aqui $\bar{Q}_{\mu\nu}^\alpha$ é a parte sem traço do tensor de torção, com as propriedades: $\bar{Q}_{\mu\alpha}^\alpha = 0$ e $\varepsilon^{\alpha\mu\nu\rho} \bar{Q}_{\mu\nu\rho} = 0$; o traço do vetor torção é $Q_\mu := Q_{\mu\alpha}^\alpha$; e $\check{Q}_\mu = \frac{1}{6} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\sigma} Q^{\nu\alpha\sigma}$ é o traço do pseudo vetor torção. E $\varepsilon_{\alpha\mu\nu\chi}$ é o tensor de Levi-Civita totalmente antissimétrico: $\varepsilon_{\alpha\mu\nu\chi} = \varepsilon_{[\alpha\mu\nu\chi]}$. De maneira semelhante, pode-se decompor o tensor de curvatura no

espaço-tempo U^4 nas 6 partes irredutíveis:

$$\begin{aligned}
 R_{\alpha\beta\mu\nu}(\Gamma) = & C_{\alpha\beta\mu\nu}(\Gamma) + \frac{1}{2} \{g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu}(\Gamma) - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu}(\Gamma) - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu}(\Gamma) \\
 & + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu}(\Gamma)\} - \frac{1}{6} (g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) R(\Gamma) \\
 & + \frac{1}{12} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} D(\Gamma) + \frac{1}{4} \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta\mu}{}^\lambda D_{(\lambda\nu)}(\Gamma) - \varepsilon_{\alpha\beta\nu}{}^\lambda D_{(\lambda\mu)}(\Gamma) \right. \\
 & \left. + \varepsilon_{\mu\nu\beta}{}^\lambda D_{(\lambda\alpha)}(\Gamma) - \varepsilon_{\mu\nu\alpha}{}^\lambda D_{(\lambda\beta)}(\Gamma) \right\}
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

Aqui $C_{\mu\lambda\nu\chi}(\Gamma)$ é o análogo não Riemanniano do tensor de Weyl com as mesmas propriedades algébricas

$$\begin{aligned}
 C_{\lambda\mu\nu\chi}(\Gamma) &= C_{\nu\chi\lambda\mu}(\Gamma), \quad C_{\mu\lambda\nu}^\lambda(\Gamma) = 0, \quad C_{[\lambda\mu\nu]\chi}(\Gamma) = 0, \\
 C_{\lambda\mu\nu\chi}(\Gamma) &= C_{[\lambda\mu]\nu\chi}(\Gamma) = C_{\lambda\mu[\nu\chi]}(\Gamma),
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

$R_{\mu\nu}(\Gamma) = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda(\Gamma)$ é o generalizado tensor de Ricci, $R(\Gamma) = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma)$ é o escalar de curvatura, e $D_\nu^\mu(\Gamma) = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\lambda}R_{\alpha\beta\lambda\nu}(\Gamma)$ tal que $D(\Gamma) = D_\mu^\mu(\Gamma)$. A lista das 6 partes de curvatura irredutível inclui o tensor de Weyl generalizado, a curvatura escalar, a curvatura pseudo-escalar, a parte simétrica do tensor de Ricci e os dois tensores simétricos sem traço:

$$\begin{aligned}
 & C_{\alpha\beta\mu\nu}(\Gamma), \quad R(\Gamma), \quad R_{(\mu\nu)}(\Gamma) - \frac{1}{4}R(\Gamma)g_{\mu\nu}, \\
 & R_{[\mu\nu]}(\Gamma), \quad D(\Gamma), \quad D_{(\mu\nu)}(\Gamma) - \frac{1}{4}D(\Gamma)g_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{B.20}$$

O número total de componentes é, como esperado: $36 = 20 + 1 + 9 + 6$. A segunda linha representa as partes irredutíveis essencialmente não riemannianas. Quando a torção Eq.(B.3) desaparece, a Eq.(B.18) reduz à decomposição padrão para o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel nas três partes mostradas na primeira linha.

Vale a pena notar que o tensor assimétrico $D_{[\alpha\beta]}(\Gamma)$ não representa uma parte independente. É expresso em termos da parte antissimétrica do tensor de Ricci:

$$D_{[\mu\nu]}(\Gamma) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}R^{[\alpha\beta]}(\Gamma). \tag{B.21}$$

A curvatura de Riemann-Cartan Eq.(B.15) é antissimétrica no primeiro par de índices, como fica claro na Eq.(B.10), e satisfaz as seguintes identidades:

$$R_{[\mu\nu]\lambda}^\alpha(\Gamma) = -2\nabla_{[\mu}Q_{\nu\lambda]}^\alpha + 4Q_{\beta[\mu}^\alpha Q_{\nu\lambda]}^\beta \tag{B.22}$$

- A identidade de Ricci generalizada;

$$\begin{aligned}
 R_{\alpha\beta\mu\nu}(\Gamma) - R_{\mu\nu\alpha\beta}(\Gamma) = & \frac{3}{2} \left\{ R_{[\alpha\beta\mu]\nu}(\Gamma) - R_{[\alpha\beta\nu]\mu}(\Gamma) \right. \\
 & \left. - R_{[\mu\nu\alpha]\beta}(\Gamma) + R_{[\mu\nu\beta]\alpha}(\Gamma) \right\}
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

- A identidade comutador de pares de índices;

$$\nabla_{[\mu}R_{\nu\lambda]}^{\alpha\beta}(\Gamma) = 2R_{\sigma[\mu}^{\alpha\beta}(\Gamma)Q_{\nu\lambda]}^\sigma \tag{B.24}$$

- A identidade de Bianchi generalizada. Contraindo um par de índices (superior e inferior) em Eq.(B.22), derivamos a chamada identidade de Ricci contraída

$$R_{[\mu\nu]} = (\nabla_\lambda - 2Q_\lambda) (Q_{\mu\nu}^\lambda + 2\delta_{[\mu}^\lambda Q_{\nu]}) \quad (\text{B.25})$$

Da mesma forma, contraindo os dois pares de índices em Eq.(B.24), encontramos as identidades de Bianchi contraídas

$$(\nabla_\sigma - 2Q_\sigma) G_\mu^\sigma(\Gamma) + 2Q_{\mu\sigma}^\rho G_\rho^\sigma(\Gamma) + (Q_{\alpha\beta}^\sigma + 2\delta_{[\alpha}^\sigma Q_{\beta]}) R_{\sigma\mu}^{\alpha\beta}(\Gamma) = 0 \quad (\text{B.26})$$

onde, o tensor de Einstein generalizado torna-se

$$G_{\lambda\nu}(\Gamma) = R_{\lambda\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2}g_{\lambda\nu}R(\Gamma) \quad (\text{B.27})$$

A tabela-B, creditada à referência [88], destaca uma classificação geométrica natural às variedades de acordo com suas estruturas métrica-afins subjacentes: o tensor de curvatura da conexão $R_{\beta\mu\nu}^\alpha \equiv R$, tensor torção $Q_{\mu\nu}^\alpha \equiv Q$ e o tensor de curvatura homotético $\Omega_{\mu\nu} \equiv \Omega$.

Tabela-B: Classificação geométrica das teorias métrico-afins.

Objetos geométricos			Tipo de espaço	Teoria
$R = 0$	$Q = 0$	$\Omega = 0$	M^4 –Minkowski	Relatividade Especial
$R = 0$	$Q \neq 0$	$\Omega = 0$	P^4 –Weitzenböck (Paralelismo absoluto)	Gravidade Gauge Translacional
$R = 0$	$Q = 0$	$\Omega \neq 0$	s.n.	s.n.
$R = 0$	$Q \neq 0$	$\Omega \neq 0$	s.n.	s.n.
$R \neq 0$	$Q = 0$	$\Omega = 0$	V^4 –Riemann	Relatividade Geral
$R \neq 0$	$Q = 0$	$\Omega \neq 0$	W^4 –Weyl	Gravidade de Weyl
$R \neq 0$	$Q \neq 0$	$\Omega = 0$	U^4 –Riemann-Cartan	Gravidade Einstein-Cartan
$R \neq 0$	$Q \neq 0$	$\Omega \neq 0$	G^4 –Métrico-afim	Campo Assimétrico (Einstein-Schrödinger)

Onde s.n. é a abreviação da expressão latina *sine nomine*, que significa "sem nome", ou seja, se refere a dizer que para o terceiro e quarto caso apresentados na tabela acima o tipo de espaço e sua correspondente teoria não possuem um nome específico.

Referências

- 1 MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2017.
- 2 ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ABERNATHY, M.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- 3 ABBOTT, B. P. et al. Gw151226: Observation of gravitational waves from a 22-solar-mass binary black hole coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, v. 116, n. 24, p. 241103, 2016.
- 4 ABBOTT, B. P.; ABBOTT, R.; ABBOTT, T.; ABERNATHY, M.; ACERNESE, F.; ACKLEY, K.; ADAMS, C.; ADAMS, T.; ADDESSO, P.; ADHIKARI, R. et al. Binary black hole mergers in the first advanced ligo observing run. *Physical Review X*, APS, v. 6, n. 4, p. 041015, 2016.
- 5 COLLABORATION, E. H. T. et al. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *arXiv preprint arXiv:1906.11238*, 2019.
- 6 AKIYAMA, K.; ALBERDI, A.; ALEF, W.; ALGABA, J. C.; ANANTUA, R.; ASADA, K.; AZULAY, R.; BACH, U.; BACZKO, A.-K.; BALL, D. et al. First sagittarius a* event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole in the center of the milky way. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 930, n. 2, p. L12, 2022.
- 7 SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. $f(R)$ theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 82, n. 1, p. 451, 2010.
- 8 WEYL, H. A new extension of relativity theory. *Annalen Phys.*, v. 59, p. 101–133, 1919.
- 9 ROMERO, C.; FONSECA-NETO, J. B.; PUCHEU, M. L. General relativity and weyl geometry. *Class. Quant. Grav.*, v. 29, p. 155015, 2012.
- 10 EDDINGTON, A. S. *The mathematical theory of relativity*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1924.
- 11 ZWICKY, F. Die rotverschiebung von extragalaktischen nebeln. *Helv. Phys. Acta*, v. 6, p. 110–127, 1933.
- 12 KAHN, F. D.; WOLTJER, L. Intergalactic matter and the galaxy. *The Astrophysical Journal*, v. 130, p. 705, 1959.
- 13 RUBIN, V. C.; FORD JR., W. K. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *Astrophys. J.*, v. 159, p. 379–403, 1970.
- 14 BERTONE, G.; HOOPER, D. History of dark matter. *Rev. Mod. Phys.*, v. 90, n. 4, p. 045002, 2018.

- 15 UTIYAMA, R.; DEWITT, B. S. Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields. *J. Math. Phys.*, v. 3, p. 608–618, 1962.
- 16 HOOFT G.; VELTMAN, M. 't. One-loop divergencies in the theory of gravitation. v. 20, n. 1, p. 69–94, 1974.
- 17 STELLE, K. S. Renormalization of higher derivative quantum gravity. *Phys. Rev. D*, v. 16, p. 953–969, 1977.
- 18 VILKOVISKY, G. A. Effective action in quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, v. 9, p. 895–903, 1992.
- 19 ASTIER, P. et al. The supernova legacy survey: Measurement of ω_M , ω_Λ and w from the first year data set. *Astron. Astrophys.*, v. 447, p. 31–48, 2005.
- 20 HINSHAW, G.; LARSON, D.; KOMATSU, E.; SPERGEL, D. N.; BENNETT, C.; DUNKLEY, J.; NOLTA, M.; HALPERN, M.; HILL, R.; ODEGARD, N. et al. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: cosmological parameter results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 208, n. 2, p. 19, 2013.
- 21 RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, v. 116, p. 1009–1038, 1998.
- 22 CARROLL, S. M. The cosmological constant. *Living reviews in relativity*, Springer, v. 4, n. 1, p. 1–56, 2001.
- 23 BARROW, J. D.; GALLOWAY, G. J.; TIPLER, F. J. The closed-universe recollapse conjecture. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press Oxford, UK, v. 223, n. 4, p. 835–844, 1986.
- 24 SUSSKIND, L. The anthropic landscape of string theory. p. 247–266, 2 2003.
- 25 KISSLINGER, L. S.; DAS, D. A brief review of dark matter. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 34, n. 27, p. 1930013, 2019.
- 26 FITCH, V. L.; MARLOW, D. R.; DEMENTI, M. A. E. (Ed.). *Critical problems in physics*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1997. (Princeton Series in Physics).
- 27 SAMI, M. A primer on problems and prospects of dark energy. *Curr. Sci.*, v. 97, p. 887, 2009.
- 28 STAROBINSKY, A. A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 91, n. 1, p. 99–102, 1980.
- 29 BRANDENBERGER, R. H. *Beyond Standard Inflationary Cosmology*. [S.l.: s.n.], 2020. 79–104 p.
- 30 GAO, C. Generalized modified gravity with the second order acceleration equation. *Phys. Rev. D*, v. 86, p. 103512, 2012.
- 31 GAMA, F.; NASCIMENTO, J.; PETROV, A. Y.; PORFIRIO, P.; SANTOS, A. Gödel-type solutions within the $f(R, Q)$ gravity. *Physical Review D*, APS, v. 96, n. 6, p. 064020, 2017.

- 32 AES, R. B. M.; CRISPINO, L. C. B.; OLMO, G. J. Compact objects in quadratic palatini gravity generated by a free scalar field. *Phys Rev. D*, v. 105, n. 6, p. 064007, 2022.
- 33 BOGDANOS, C.; CAPOZZIELLO, S.; LAURENTIS, M. D.; NESSERIS, S. Massive, massless and ghost modes of gravitational waves from higher-order gravity. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 236–244, 2010.
- 34 ODINTSOV, S.; OIKONOMOU, V.; BANERJEE, S. Dynamics of inflation and dark energy from $f(R, \mathcal{G})$ gravity. *arXiv preprint arXiv:1807.00335*, 2018.
- 35 PETROV, A. *Introduction to Modified Gravity*. [S.l.]: Springer Nature, 2020.
- 36 NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y.; PORFIRIO, P. J.; SILVA, R. N. da. Gödel-type solutions within the $f(R, Q, P)$ gravity. *Eur. Phys. J. C*, v. 83, p. 331, 2023.
- 37 REBOUÇAS, M.; TIOMNO, J. Homogeneity of riemannian space-times of gödel type. *Physical Review D*, APS, v. 28, n. 6, p. 1251, 1983.
- 38 PORFIRIO, P.; FONSECA-NETO, J.; NASCIMENTO, J.; PETROV, A. Y.; RICARDO, J.; SANTOS, A. Chern-simons modified gravity and closed timelike curves. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 4, p. 044044, 2016.
- 39 PORFIRIO, P.; FONSECA-NETO, J.; NASCIMENTO, J.; PETROV, A. Y. Causality aspects of the dynamical chern-simons modified gravity. *Physical Review D*, APS, v. 94, n. 10, p. 104057, 2016.
- 40 AGUDELO, J.; NASCIMENTO, J.; PETROV, A. Y.; PORFÍRIO, P.; SANTOS, A. Gödel and gödel-type universes in brans-dicke theory. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 762, p. 96–101, 2016.
- 41 CLIFTON, T.; BARROW, J. D. The existence of gödel, einstein, and de sitter universes. *Physical Review D*, APS, v. 72, n. 12, p. 123003, 2005.
- 42 PTOLOMEO, C.; MONTES, L. A. S. *Almagesto Sobre las Medidas de las Lineas Rectas*. [S.l.]: Editorial Maxtor, 2003.
- 43 BRITO, R. Pinto de. O tetrabiblos de ptolomeu: tradução comentada dos capítulos filosóficos e estudo sobre o texto e seu conteúdo cosmológico. *CODEx – Rev. Estud. Cláss.*, Codex - Revista de Estudos Classicos, v. 10, n. 2, p. e1022206, 2022.
- 44 GHARIB, M.; ROH, C.; NOCA, F. Leonardo da vinci’s visualization of gravity as a form of acceleration. *Leonardo*, MIT Press, v. 56, n. 1, p. 21–27, 2023.
- 45 NEWTON, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. [S.l.]: E-Kitap Projesi E Cheapest Books, 2020.
- 46 LEQUEUX, J. *Le Verrier: savant magnifique et détesté*. [S.l.]: L’Editeur : EDP Sciences, 2009.
- 47 D’INVERNO, R.; VICKERS, J. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. [S.l.]: Oxford University Press, 2022.
- 48 LIMA, E. L. *Variedades diferenciáveis*. [S.l.: s.n.], 2007.

- 49 LANCZOS, C. *The variational principles of mechanics*. Mineola, NY: Dover Publications, 1986. (Dover Books on Physics).
- 50 LANDAU, L. D.; LIFSHITS, E. M. *The Classical Theory of Fields*. Oxford: Pergamon Press, 1975. Volume 2. (Course of Theoretical Physics, Volume 2). ISBN 978-0-08-018176-9.
- 51 RYDER, L. H. *Quantum Field Theory*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- 52 ROMERO, C. Notas de aula: Relatividade geral ii. *review de Notas de Aula*, v. 1, p. 7, 2022.
- 53 CARROLL, S. *Spacetime and geometry*. Philadelphia, PA: Pearson Education, 2003.
- 54 CHAPTER xi. Dynamics, hydrodynamics, elasticity. Cambridge, MA and London, England: Harvard University Press, 1927. 167–185 p.
- 55 CLEGG, B. *Gravitational waves*. [S.l.]: Dreamscape Media, 2021.
- 56 GÖDEL, K. An example of a new type of cosmological solutions of einstein's field equations of gravitation. *Reviews of modern physics*, APS, v. 21, n. 3, p. 447, 1949.
- 57 MALAMENT, D. B. Time travel in the gödel universe. v. 1984, n. 2, p. 91–100, 1984.
- 58 RAYCHAUDHURI, A. K.; THAKURTA, S. N. G. Homogeneous space-times of the gödel type. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 22, p. 802–806, Aug 1980. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.22.802>>.
- 59 TEIXEIRA, A.; REBOUÇAS, M.; ÂMAN, J. Isometries of homogeneous gödel-type spacetimes. *Physical Review D*, APS, v. 32, n. 12, p. 3309, 1985.
- 60 REBOUÇAS, M.; ÂMAN, J.; TEIXEIRA, A. A note on gödel-type space-times. *Journal of mathematical physics*, American Institute of Physics, v. 27, n. 5, p. 1370–1372, 1986.
- 61 CALVAO, M.; REBOUÇAS, M.; TEIXEIRA, A.; JR, W. S. Notes on a class of homogeneous space-times. *Journal of mathematical physics*, American Institute of Physics, v. 29, n. 5, p. 1127–1129, 1988.
- 62 CARRION, H.; REBOUÇAS, M.; TEIXEIRA, A. Gödel-type space-times in induced matter gravity theory. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 40, n. 8, p. 4011–4027, 1999.
- 63 REBOUÇAS, M.; SANTOS, J. Gödel-type universes in $f(R)$ gravity. *arXiv preprint arXiv:0906.5354*, 2009.
- 64 SANTOS, J.; REBOUÇAS, M.; OLIVEIRA, T. Gödel-type universes in palatini $f(R)$ gravity. *arXiv preprint arXiv:1004.2501*, 2010.
- 65 SANTOS, A. F. Gödel solution in $f(R, T)$ gravity. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 28, p. 1350141.
- 66 FURTADO, C.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y.; SANTOS, A. F. Horava-lifshitz gravity and gödel universe. *Phys. Rev. D*, v. 84, p. 047702, 2011. Erratum: *Phys.Rev.D* 84, 069904 (2011).

- 67 FONSECA-NETO, J.; PETROV, A. Y.; REBOUÇAS, M. Gödel-type universes and chronology protection in hořava–lifshitz gravity. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 725, n. 4-5, p. 412–418, 2013.
- 68 FURTADO, C.; MARIZ, T.; NASCIMENTO, J. R.; PETROV, A. Y.; SANTOS, A. F. The godel metric in the chern-simons modified gravity. *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.*, v. 18, p. 145–149, 2012.
- 69 BUCHBINDER, I. L.; ODINTSOV, S. D.; SHAPIRO, I. L. *Renormalization and renormalization group equations in curved space-time*. London/New York: Routledge, 2017. 99–148 p.
- 70 WANG, B.; ABDALLA, E.; ATRIO-BARANDELA, F.; PAVON, D. Dark matter and dark energy interactions: Theoretical challenges, cosmological implications and observational signatures. *Rept. Prog. Phys.*, v. 79, n. 9, p. 096901, 2016.
- 71 ZLATEV, I.; WANG, L.-M.; STEINHARDT, P. J. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Phys. Rev. Lett.*, v. 82, p. 896–899, 1999.
- 72 BELICH JR., H.; FERREIRA JR., M. M.; HELAYEL-NETO, J. A.; ORLANDO, M. T. D. Dimensional reduction of a lorentz and cpt violating chern-simons model. *Phys. Rev. D*, v. 67, p. 125011, 2003.
- 73 EXIRIFARD, Q. Gravitomagnetic field in tensor-vector-scalar theory. *JCAP*, v. 04, p. 034, 2013.
- 74 WEINFURTNER, S.; SOTIRIOU, T. P.; VISSER, M. Projectable horava-lifshitz gravity in a nutshell. *J. Phys. Conf. Ser.*, v. 222, 2010.
- 75 WANG, A. Hořava gravity at a lifshitz point: A progress report. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 26, n. 07, p. 1730014, 2017.
- 76 EFIMOV, G. V. Non-local quantum theory of the scalar field. *Commun. Math. Phys.*, v. 5, n. 1, p. 42–56, 1967.
- 77 EINSTEIN, A. “sitzungsber. preuss. akad. wiss. berlin, 217”. *Math. Phys.*, p. 778–844, 1928.
- 78 WIGNER, E. P. Eine bemerkung zu einsteins neuer formulierung des allgemeinen relativitätsprinzips. *Zeitschrift für Physik*, v. 53, p. 592–596, 1929.
- 79 WEYL, H. Electron and gravitation. 1. (in german). *Zeitschrift für Physik*, v. 56, p. 330–331, 1929.
- 80 WEITZENBÖCK, R. Invariantentheorie. von dr. roland weitzenböck. *Groningen: P. Noordhoff*, 1923.
- 81 HAWKING, S. W.; HERTOOG, T. Living with ghosts. *Physical Review D*, APS, v. 65, n. 10, p. 103515, 2002.
- 82 GEORGI, H. Effective field theory. *Annual review of nuclear and particle science*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 43, n. 1, p. 209–252, 1993.

- 83 ACCIOLY, A.; GONÇALVES, A. Homogeneous space-times of gödel-type in higher-derivative gravity. *Journal of mathematical physics*, American Institute of Physics, v. 28, n. 7, p. 1547–1552, 1987.
- 84 GARCÍA, N. M.; LOBO, F. S.; MIMOSO, J. P.; HARKO, T. $f(\mathcal{G})$ modified gravity and the energy conditions. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2011. v. 314, n. 1, p. 012056.
- 85 CARROLL, S. M.; FELICE, A. D.; DUVVURI, V.; EASSON, D. A.; TRODDEN, M.; TURNER, M. S. Cosmology of generalized modified gravity models. *Physical Review D*, APS, v. 71, n. 6, p. 063513, 2005.
- 86 SANTOS, A. F.; PETROV, A. Y.; JESUS, W. D. R.; NASCIMENTO, J. R. Gödel solution in the bumblebee gravity. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 30, n. 02, p. 1550011, 2015.
- 87 ERDMENGER, J.; HESS, B.; MATTHAIKAKIS, I.; MEYER, R. Universal gibbons-hawking-york term for theories with curvature, torsion and non-metricity. 11 2022.
- 88 PONOMAREV, V. N.; BARVINSKY, A. O.; OBUKHOV, Y. N.; BARVINSKY, A. O. *Gauge approach and quantization methods in gravity theory*. [S.l.]: Nuclear Safety Institute of the Russian Academy of Sciences, 2017.
- 89 DUBROVIN, B. A.; FOMENKO, A. T.; NOVIKOV, S. P. *Modern geometry - methods and applications*. 2. ed. New York, NY: Springer, 2011. (Graduate Texts in Mathematics).