UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Daniel de Abreu Gadelha

O uso do Círculo Trigonométrico como ferramenta didática no ensino da Trigonometria

Rio Tinto – PB

2023

Daniel de Abreu Gadelha

O uso do Círculo Trigonométrico como ferramenta didática no ensino da Trigonometria

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Claudilene Gomes da Costa

Rio Tinto – PB
2023

Catalogação na publicação

Seção de Catalogação e Classificação

G124u Gadelha, Daniel de Abreu.

O uso do Círculo Trigonométrico como ferramenta didática no ensino da Trigonometria / Daniel de Abreu Gadelha. - Rio Tinto, 2023.

53 f. : il.

Orientação: Claudilene Gomes da Costa.

TCC (Graduação) - UFPB/CCAE.

1. Ensino da Trigonometria. 2. Ciclo Trigonométrico. I. Gomes da Costa, Claudilene. II. Título.

UFPB/CCAE CDU 514.12

Daniel de Abreu Gadelha

O uso do Círculo Trigonométrico como ferramenta didática no ensino da Trigonometria

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Claudilene Gomes da Costa

Aprovado em: 31/10/2023

BANCA EXAMINADORA

Claudilene Gomes da Costa

Profa. Dra. Claudilene Gomes da Costa (Orientadora) – UFPB/DCX

Agnes Liliane L. Soares de Santana

Profa. Ma. Agnes Liliane Lima Soares de Santana – UFPB/DCX

Prof. Dr. José Fabrício de Souza – UFPB/DCX

Aos meus familiares e amigos, pelo incentivo, carinho e apoio irrestrito, propiciando vitória nesta minha caminhada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer a Deus, pelo seu cuidado e provisão em minha vida.

À minha mãe Carmen, minha inspiração de vida, por não ter me deixado desistir, pelo incentivo, carinho e amor incondicional, enfim, por ser a base na minha vida.

Agradeço também aos outros familiares, que me apoiaram e ficaram na expectativa, torcendo durante minha trajetória.

À minha orientadora Claudilene Gomes da Costa, que aceitou ficar comigo para que caminhássemos juntos e podermos entregar o resultado dessa pesquisa. Professora, eu dei trabalho à senhora, mas acredito que tenha conseguido!

Agradeço também à professora Agnes Liliane Lima Soares de Santana e ao professor José Fabrício de Souza, por terem aceitado a participação na banca.

Agradeço também a todos (as) docentes do curso de Licenciatura em Matemática.

Aos meus colegas da Residência Universitária, que acabamos nos tornando mais próximos, uma segunda família durante nossa convivência.

Aos colegas do curso que eu pude trocar vivências e ensinamentos juntos.

Aos meus colegas do Programa Residência Pedagógica - PRP, das duas vezes que eu pude participar, onde pudemos trocar experiências e aprendizados. Agradeço em especial às professoras Cristiane Souza, e Jussara Patrícia que muitas vezes davam aquele puxão de orelha para que fizéssemos as coisas do PRP da melhor forma possível. Agradeço também aos professores preceptores Francisco Guimarães e Thiago Florêncio, que acolheram a mim e aos meus colegas residentes em suas turmas, onde acredito termos contribuído no processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

Educação é um ato político. Se algum professor julga que sua ação é politicamente neutra, não entendeu nada de sua profissão.

Ubiratan D’Ambrosio

RESUMO

A Trigonometria é um ramo da matemática que estuda as relações entre ângulos e lados em triângulos. Ela é fundamental para áreas do conhecimento. Sua complexidade reside devido as fórmulas, conceitos abstratos e necessidade de visualização espacial, tornando-a desafiadora para muitos estudantes. O presente trabalho teve como objetivo geral analisar uma proposta didática para o ensino da Trigonometria, utilizando o ciclo trigonométrico. O estudo foi realizado com 40 alunos do 2° ano, da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Frederico Lundgren, localizada na cidade de Rio Tinto/PB. A metodologia utilizada no desenvolvimento da pesquisa foi caracterizada, em relação aos objetivos, como exploratória. Quanto aos procedimentos técnicos empregados, foi classificada como estudo de caso. Em relação ao método de abordagem, foi definida como pesquisa qualitativa. Os instrumentos de coleta de dados foram as atividades realizadas na sala de aula, durante os meses de setembro e outubro de 2023, utilizando-se para isso o quadro branco e o auxílio do software de geometria dinâmica GeoGebra para visualizações de situações que envolviam o processo de construção do ciclo trigonométrico. Ainda como instrumentos de coleta de dados, utilizou-se a observação participante e a aplicação de um questionário diagnóstico, como forma de analisar o ensino e aprendizagem da turma. O questionário contou com 14 questões, fechadas e abertas, envolvendo conceitos e propriedades da Trigonometria. Ao final da pesquisa, os resultados indicam que a utilização do ciclo trigonométrico como ferramenta didática contribuiu de forma satisfatória para o processo de ensino e aprendizagem, permitindo que os alunos participassem ativamente na construção desse ciclo e, assim, diminuíssem as dúvidas que surgem ao longo do processo de aprendizagem. Portanto, essa abordagem pedagógica mostrou-se eficaz na promoção do entendimento da Trigonometria, destacando a importância de estratégias inovadoras no ensino da matemática para tornar conceitos complexos mais acessíveis e envolventes para os estudantes.

Palavras-chave: Ensino da Trigonometria. Ciclo Trigonométrico. Proposta didática.

ABSTRACT

Trigonometry is a branch of mathematics that studies the relationships between angles and sides in triangles. It's fundamental to areas of knowledge. Its complexity lies due to formulas, abstract concepts and the need for spatial visualization, making it challenging for many students. The general objective of this work was to analyze a didactic proposal for teaching Trigonometry, using the trigonometric cycle. The study was carried out with 40 2nd year students from the Frederico Lundgren State School of Elementary and Secondary Education, located in the city of Rio Tinto/PB. The methodology used in developing the research was characterized, in relation to the objectives, as exploratory. Regarding the technical procedures used, it was classified as case study. Regarding the approach method, it was defined as qualitative research. The data collection instruments were the activities carried out in the classroom, during the months of September and October 2023, using the whiteboard and the help of the dynamic geometry software GeoGebra to visualize situations involving the process. construction of the trigonometric cycle. Still as data collection instruments, participant observation and the application of a diagnostic questionnaire were used, as a way of analyzing the teaching and learning of the class. The questionnaire had 14 questions, closed and open, involving concepts and properties of Trigonometry. At the end of the research, the results indicate that the use of the trigonometric cycle as a teaching tool contributed satisfactorily to the teaching and learning process, allowing students to actively participate in the construction of this cycle and, thus, reducing doubts that arise throughout of the learning process. Therefore, this pedagogical approach proved to be effective in promoting the understanding of Trigonometry, highlighting the importance of innovative strategies in teaching mathematics to make complex concepts more accessible and engaging for students.

Keywords: Teaching Trigonometry. Trigonometric Cycle. Didactic proposal.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do tema

Ao se abordar a Trigonometria no ambiente de sala de aula, questionamentos por parte dos alunos podem surgir: para que serve, onde utilizar, como contextualizá-la, entre outros. Com isso, dúvidas, possíveis dificuldades na compreensão, no processo de ensino e aprendizagem, podem aparecer.

Dependendo da forma como a Trigonometria é apresentada, ela pode ou não se tornar um empecilho em seu ensino. Um(a) professor(a) pode simplesmente colocar as fórmulas e dizer aos seus alunos como proceder. Já um(a) outro(a) pode mostrar como chegar a essas fórmulas, incentivando a criatividade de seus alunos, fazendo com que esses construam ideias a partir de uma ideia inicial e, com isso, tenham a possibilidade de compreender e associar os conceitos, teorias e demonstrações, de acordo com uma metodologia adotada.

A Trigonometria é uma área ampla da Matemática, que estuda desde o cálculo de uma sombra de um edifício ou mesmo sua altura, até a distância da Terra ao Sol, por exemplo. Seu uso pode ir além da sala de aula: na Astronomia, na Física, Química etc. A partir das relações fundamentais (seno, cosseno e tangente) podem-se trabalhar com distâncias inacessíveis e cálculos de ângulos e lados. Um exemplo prático é seu uso pela Engenharia, em que se buscam construir estruturas, como criar projetos de pontes, além de poder ser utilizada para se encontrarem alternativas para soluções em um projeto científico.

O ensino da trigonometria precisa ir além da exposição de fórmulas e aplicações diretas em exercícios ou avaliações. O pouco interesse por parte dos alunos pode ser superado, procurando associações ao cotidiano destes. É fazer com que eles possam descrever, analisar, usar da imaginação, sem que esses percam o interesse no assunto e, com isso, possam apresentar resultados que venham a contribuir em seus processos de ensino e aprendizagem.

Diante disso, essa pesquisa pretende responder a seguinte questão: *o uso do ciclo trigonométrico pode ser utilizado como uma ferramenta didática para o ensino da Trigonometria?*

1.2 Problemática e justificativa

A Matemática e suas aplicações têm sido utilizadas há muito, desde as civilizações antigas - que, possivelmente não a conheciam com esse nome -, em plantações, no comércio, na astronomia, em medições de terrenos, cálculo de alturas, entre outros, até nossos momentos atuais. Direta ou indiretamente, consciente ou inconscientemente, temos contato com essa Ciência. Estudantes do Ensino Básico - em especial os dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio - começam a ter contato com objetos de conhecimento mais desafiadores, que podem exigir mais esforço e dedicação, em que se pode criar um pensamento abstrato das coisas, como é caso da Trigonometria.

A forma como se compartilha conhecimento pode ser determinante para o ensino, pois se faz necessário também que a aprendizagem ocorra. Em se tratando do ensino da Matemática, de forma geral, há a possibilidade dos alunos se sentirem desmotivados, onde a falta de interesse pode surgir, além de poder causar um desempenho aquém do esperado em sala de aula. Ao se questionar os estudantes acerca do ensino da Matemática, boa parte pode responder que a Matemática é considerada chata e difícil ou que não existe um contexto, uma aplicação direta. Ao se mostrar apenas fórmulas e aplicações diretas, o interesse pode reduzir consideravelmente. Nesse sentido,

> Estudos sobre o ensino da trigonometria apontam uma grande deficiência dos alunos no tocante aos conceitos básicos, como as definições de seno, cosseno e tangente, redução de arcos ao primeiro quadrante, entre outros. Tal deficiência pode ser atribuída à falta de conhecimentos prévios ou por ser ensinado de modo abstrato sem nenhuma aplicação prática, baseado apenas na transmissão de fórmulas e regras, não apresentando nenhum significado para a maioria dos alunos. (Maia; Pereira, 2015, p.402)

Como ponto de partida, teremos um contexto histórico, onde são citados os principais pensadores de cada época sobre a Trigonometria. Focaremos nas relações fundamentais (seno, cosseno e tangente) através do ciclo trigonométrico, onde será mostrado o comportamento de cada uma delas.

No âmbito da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), um documento de caráter normativo, abordaremos as habilidades na área da Matemática, buscando identificar entre elas às relacionadas com a trigonometria. A BNCC ainda destaca a necessidade de desenvolver habilidades que possam ser aplicadas em suas vidas cotidianas, seja de maneira individual ou coletiva. Ou seja,

> os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere

> apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho (Brasil, 2018, p. 535).

Neste contexto, é importante reconhecer que a Matemática muitas vezes enfrenta uma imagem negativa, sendo vista por muitos como uma disciplina complexa, desprovida de contexto e distante da realidade de muitos alunos. Esse estigma resulta frequentemente em desinteresse, taxas de reprovação elevadas, abandono da matéria, entre outros problemas. Isso ocorre devido às queixas dos alunos sobre a forma como a Matemática é ensinada, frequentemente percebida como excessivamente rebuscada, repleta de termos complicados, linguagem obscura e aparentemente sem significado prático.

No que diz respeito à Trigonometria, o tema central desta pesquisa, é comum que seja considerado de difícil compreensão, sobretudo pelos alunos, em contraste com a percepção dos próprios professores. Conforme, Demir & Heck (2013, p.2, apud Feijó, Rachel, 2018, p.21), "a natureza complexa da trigonometria torna desafiador para o aluno compreender o tema de forma profunda e conceitual.".

A compreensão da trigonometria pode se tornar desafiadora para muitos estudantes, pois pode causar efeitos negativos no aprendizado desses estudantes. Muitas vezes os conceitos são abstratos, complexos de fórmulas enormes e "sem sentido" para se decorar. Juntando-se a isso, vêm com exercícios sem contextualização e de difícil compreensão e visualização, fazendo com que os estudantes não demonstrem interesse e, com isso, barreiras, lacunas vão surgindo, que, além de não promoverem o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem e a compreensão por parte dos estudantes devido a teoria e a prática não estarem conectadas, podem influenciar no desestímulo por parte desses estudantes.

Diante isso, como justificativa para o estudo da Trigonometria, com enfoque no ciclo trigonométrico, através de uma busca por procedimentos de ensino que podem ser eficazes, aos quais levem a uma compreensão e desenvolvimento de práticas que venham a contribuir no processo de ensino e aprendizagem da Trigonometria, este trabalho sugere uma proposta de ensino através do uso de tecnologias, como o software de geometria dinâmica *GeoGebra*, que pode fazer simulações interativas com o usuário, podendo promover estratégias, que venham contribuir no aprendizado dos estudantes.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral

Analisar uma proposta didática acerca dos conceitos de Trigonometria por meio do uso do círculo trigonométrico.

1.3.2 Objetivos específicos

- Introduzir o círculo trigonométrico como uma representação gráfica dos ângulos e suas medidas trigonométricas (seno, cosseno, tangente);
- Explorar a relação entre as medidas dos ângulos e os valores das funções trigonométricas no círculo trigonométrico;
- Estimular os alunos a resolverem problemas trigonométricos usando o círculo trigonométrico como suporte visual e conceitual;
- Discutir os resultados da coleta de dados referentes as atividades realizadas com a turma e o questionário diagnóstico.

1.4 Estrutura do Trabalho

Este estudo está dividido em cinco capítulos, complementados por uma lista de referências bibliográficas utilizadas na pesquisa e apêndices contendo os materiais empregados na oficina pedagógica, aplicada em uma turma da 2ª série do Ensino Médio, da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Frederico Lundgren, localizada na cidade de Rio Tinto/PB.

O primeiro capítulo explora a introdução da pesquisa, delineando o tópico central, sua justificativa e os objetivos gerais e específicos.

O segundo capítulo abrange o embasamento teórico, no qual sustentou a investigação, abordando visões de diversos autores e documentos oficiais sobre a Trigonometria. Será abordada uma contextualização histórica da Trigonometria, em que autores como BOYER (2010) citam contribuições relacionadas à Trigonometria, de alguns estudiosos gregos, como Hiparco de Niceia e Ptolomeu, além de outras civilizações que trouxeram outras colaborações, como hindus e árabes.

Documentos de caráter normativo, como a Base Nacional Comum Curricular, servirá como fundamento para apresentar conhecimentos, competências e habilidades que os alunos devem desenvolver que, no caso, será na área da matemática, onde se buscará relacionar à Trigonometria.

Será falado sobre a importância da Trigonometria no cotidiano, ou seja, o papel que ela desempenha de forma significativa, destacando-se como uma área da matemática fundamental, pois com ela podemos calcular distâncias, ângulos, medidas de triângulos e cálculos de razões trigonométricas, como seno, cosseno e tangente, através do ciclo trigonométrico. Um tópico com enfoque da trigonometria na circunferência será abordado, onde poderemos explorar essas razões trigonométricas.

Atividades pedagógicas, com enfoque no ciclo trigonométrico serão aplicadas, em uma turma do Ensino Médio em uma escola na cidade de Rio Tinto/PB, onde se destacará a construção do círculo trigonométrico, explorando tanto ângulos agudos quanto não agudos, na qual a representação do seno, cosseno e tangente terá destaque, observando o comportamento de cada uma delas nesse ciclo trigonométrico. Para essa construção, será utilizado tanto o software de geometria dinâmica GeoGebra, como feito à mão pelos alunos da turma escolhida.

O terceiro capítulo detalha os pressupostos metodológicos, abrangendo a escolha dos métodos de pesquisa e os instrumentos empregados na coleta de dados.

No quarto capítulo apresenta os resultados derivados das atividades realizadas, bem como as discussões à luz da teoria estudada. Inclui também a análise dos dados provenientes do questionário respondido pelos alunos.

O quinto capítulo, engloba as considerações finais da pesquisa.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Contextualização histórica da Trigonometria

A trigonometria é um ramo da Matemática que estuda as relações entre os lados e os ângulos de um triângulo. Essas relações são expressas por meio das identidades trigonométricas, como o seno, o cosseno e a tangente e suas inversas (cossecante, secante e cotangente).

Tem uma origem antiga e diversificada. De acordo com Boyer (2010), a evolução da geometria não se deve a um único indivíduo ou nação, mas sim a contribuições de diversas civilizações ao longo da história. Acredita-se que os babilônios foram pioneiros no uso de triângulos e medidas angulares para resolver questões de geometria, incluindo a determinação de distâncias e ângulos em terrenos e construções.

Os egípcios também tinham conhecimento de trigonometria, especialmente na construção de pirâmides. Eles usaram técnicas de medição de ângulos e distâncias para garantir que os lados das pirâmides fossem precisamente orientados para os pontos cardeais.

> Na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces e pode ter sido essa preocupação a levar os egípcios a introduzirem um conceito equivalente ao de cotangente de um ângulo. (Boyer, 2010, p.13)

Os gregos antigos, particularmente os estudiosos da escola pitagórica, também fizeram importantes contribuições para a trigonometria. Eles estabeleceram relações entre os lados de triângulos retângulos e descobriram as razões trigonométricas básicas, como o seno, o cosseno e a tangente. Além disso, Boyer (2010, p.108) complementa "com os gregos pela primeira vez encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem."

Entre os estudiosos gregos, destacamos:

Erastóstenes (276 a.C - 194 a.C), matemático, astrônomo, geógrafo e bibliotecário. Ele contribuiu com a Trigonometria principalmente no que se refere na invenção da técnica de medição da circunferência da Terra. Ele descobriu que a Terra era uma esfera, e usou os ângulos formados pelos raios solares em duas cidades diferentes para determinar a distância entre elas e a circunferência da Terra. Boyer (2010, p.110) diz que Erastóstenes "é lembrado especialmente por sua medida da Terra - não a primeira nem a última de tais avaliações na antiguidade, mas em tudo a de mais sucesso."

Hiparco de Niceia (180 a.C - 125 a.C): Uma das principais contribuições de Hiparco para a trigonometria foi a criação da tabela de cordas. Ele usou essa tabela para calcular as posições dos corpos celestes, bem como para resolver problemas trigonométricos em geral.:

> [...] foi compilada a que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica pelo astrônomo Hiparco de Niceia [...], que assim ganhou o direito de ser chamado 'o pai da trigonometria'. (Boyer, 2010, p. 110)

Ptolomeu (acredita-se que entre 90 d.C. e 168 d.C.): foi um matemático, astrônomo e geógrafo grego que viveu no século II d.C. Ele é conhecido por seus trabalhos em astronomia e geografia, incluindo a obra "Almagesto", que é uma das principais fontes de conhecimento sobre a astronomia antiga, além de descrever um sistema de trigonometria que envolveu a utilização de tabelas de valores trigonométricos para calcular as posições dos planetas. Essas tabelas foram baseadas em observações astronômicas precisas e foram usadas por muitos séculos para fins astronômicos e de navegação.

> O Almagesto de Ptolomeu, ao que se supõe, deve muito quanto a seus métodos ao *Cordas num círculo* de Hiparco, mas a extensão da dívida não pode ser calculada com segurança. [...] Ptolomeu fez uso do catálogo de posições estelares legado por Hiparco, mas se as tabelas trigonométricas [...] derivaram ou não [...] de seu reputado predecessor não se pode saber. (Boyer, 2010, p.112)

Os hindus também contribuíram para a trigonometria. Os hindus desenvolveram tabelas trigonométricas e descobriram novas identidades trigonométricas. Segundo Boyer (2010, p.147), “[...] uma das contribuições da Índia de maior influência na história da matemática [...] foi a introdução de um equivalente da função seno na trigonometria para substituir a tabela de cordas.”

Os árabes traduziram e preservaram o conhecimento matemático antigo, a exemplo dos indianos e gregos, e acrescentaram suas próprias contribuições, como técnicas para resolver problemas trigonométricos. Segundo Boyer (2010, p.162), “[...] quase toda a trigonometria árabe finalmente se baseou na função seno. [...] Foi também através dos árabes [...] que essa trigonometria do seno chegou à Europa.”. Os árabes também desenvolveram a função trigonométrica tangente, que não era conhecida pelos gregos. Além disso, eles introduziram a ideia de funções trigonométricas como entidades independentes que poderiam ser manipuladas separadamente.

Ao longo dos séculos, a trigonometria evoluiu e se tornou uma ferramenta essencial em muitos campos, incluindo, entre outros: astronomia, geologia, navegação, física, engenharia, arquitetura, ciência da computação, sendo essencial para o estudo de áreas da matemática, como a geometria, análise complexa e teoria dos números.

A trigonometria também é fundamental para a compreensão de diversos fenômenos naturais, como a oscilação de um pêndulo, as ondas sonoras e as ondas eletromagnéticas. Além disso, a trigonometria é útil para o estudo de fenômenos sociais, como o comportamento do mercado financeiro e a análise de pesquisas de opinião.

2.2 Habilidades e competências da Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece os principais conhecimentos, competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Essas aprendizagens essenciais definidas na BNCC "devem concorrer para assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais [...]" (Brasil, 2018, p.8). Tendo como principal objetivo formar cidadãos conscientes do seu papel na sociedade e que saibam agir de maneira justa. Essas competências se desdobram na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades, valores e atitudes, para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Entre as dez competências gerais da Educação Básica presentes no documento, destacamos a 2ª, 4ª e 5ª, que nos dizem, respectivamente:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas;
>
> Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo;
>
> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (Brasil, 2018, p. 9)

Por outro lado, para que os alunos desenvolvam as competências gerais é preciso, primeiramente, adquirirem as aprendizagens essenciais de cada área, por meio das habilidades, desenvolvendo, também, os princípios das competências específicas. Estes princípios possibilitam dois tipos de articulação: uma horizontal entre as áreas, em que se perpassam todos os componentes curriculares e, uma vertical, em que existe uma progressão entre os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental.

As habilidades específicas surgem para cada componente curricular, garantindo o desenvolvimento de competências. Elas se relacionam a objetos de conhecimento organizados em unidades temáticas. A BNCC, embora não defina unidades temáticas específicas para a Trigonometria, estabelece competências gerais para o ensino de Matemática em diferentes etapas da educação básica, permitindo sua incorporação em contextos como geometria, medidas de ângulos, triângulos e aplicações práticas em diversas disciplinas e áreas do conhecimento, promovendo uma abordagem interdisciplinar e flexível.

2.3 A importância da Trigonometria no cotidiano

A Trigonometria, que investiga as relações entre os lados e ângulos de triângulos, desempenha um papel vital na vida cotidiana, abrangendo diversas áreas do conhecimento, como na navegação, na engenharia, na eletrônica, no ensino e várias outras. No entanto, sua aprendizagem muitas vezes carece de relevância devido à desconexão percebida entre teoria e prática.

Klein e Costa (2008) constataram que, em geral, o estudo da Trigonometria, frequentemente negligencia-se a exploração das situações cotidianas dos alunos, embora a presença dessa disciplina em nossas vidas seja evidente. A Trigonometria desempenha um papel crucial em cálculos simples para resolver problemas comuns, exigindo um entendimento prático de suas funções, que podem ser aplicadas diariamente.

Ramos et al. (2014) em seus trabalhos, ressaltam que a inserção da trigonometria em situações reais é fundamental para tornar o aprendizado da Trigonometria mais relevante e acessível aos alunos. Ao aplicar a trigonometria em contextos práticos, os estudantes podem perceber sua importância e utilidade no cotidiano, promovendo uma compreensão mais profunda e duradoura do assunto.

Silva (2005) argumenta que a contextualização se torna essencial, uma vez que pode motivar os alunos ao incorporar elementos diversos, como mídia, cultura, questões sociais e econômicas, entre outros, muitas vezes interligados de maneira complexa.

Mendes (2009) enfatiza que os professores devem envolver os alunos em investigações para (re)descobrirem o conhecimento. Essa abordagem visa promover a compreensão do "o quê" e "porquê" das ações, incentivando a criatividade, pensamento crítico e uso eficaz do conhecimento na solução de problemas do cotidiano, permitindo a construção ativa do aprendizado.

Desta forma, destaca-se o valor de se trabalhar as dificuldades dos alunos é uma oportunidade para o aprimoramento profissional do professor. Isso implica em remodelar a forma de ensino, estimulando estratégias que superem as barreiras de aprendizado. É crucial repensar a abordagem da Trigonometria, explorando múltiplas representações e conectando o conteúdo à vida cotidiana dos estudantes, incentivando a busca por conhecimento e descobertas.

2.4 O uso da tecnologia no ensino da Trigonometria

O uso de tecnologias digitais para o desenvolvimento da Matemática, que nesse trabalho é direcionado para a área da Trigonometria, se utilizado de forma a contribuir no aprendizado do aluno, pode ser considerado uma ferramenta poderosa para o ensino da matemática. Andrade (2021, p. 30) destaca que o uso dessas tecnologias de forma didática não garante eficácia no aprendizado, pois necessita também da orientação de um orientador: ‘Destacamos ainda que o uso didático dos recursos tecnológicos tem suas vantagens e limitações e que existe também a necessidade de direcionamento dado pelos professores.”

Conforme consta em Homa & Santos (2018), O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2015, p. 126), Conselho Nacional de Professores de Matemática (tradução nossa), fala de os profissionais ligados à educação, como professores, utilizarem em suas aulas essas tecnologias, “[...] como se fossem parte da Matemática cotidiana que se estuda na escola [...]”.

Andrade (2021) fala ainda que, apesar dessas limitações, o uso dessas tecnologias em sala de aula pelos professores tem importância (p. 31), onde destaca o software de geometria dinâmica *GeoGebra*, que possui uma forma simples para o manuseio e que possui várias ferramentas para o desenvolvimento de objetos de conhecimento relacionados à matemática:

> A facilidade de manipulação e visualização dos objetos, proporcionados pelo GeoGebra permite que as aulas de matemática e se tratando em específico do conteúdo de trigonometria se tornem mais dinâmicas e atrativas, pois [...] o aplicativo auxilia no entendimento do aluno por meio da possibilidade de construção e manipulação (Andrade, 2021, p. 31)

Conforme consta em Lopes (2012), o processo de ensino e de aprendizagem permeado pelas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) está intimamente ligado à abordagem pedagógica adotada. Quanto a se dominar essas TIC, Lopes (2012),

“Ponte (2003) destaca a relevância dos professores de Matemática, em sua prática, dominarem as ferramentas das TIC em suas salas de aula, incluindo softwares educacionais próprios da sua disciplina ou de educação no âmbito geral.” (Lopes, 2012, p. 3, apud Ponte, 2003)

2.5 O Círculo Trigonométrico

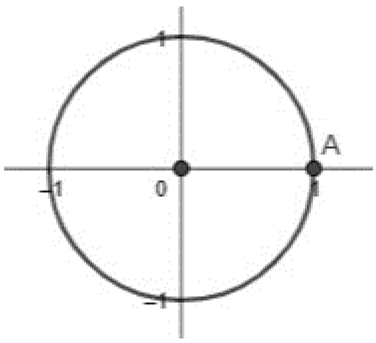
Segundo o site Toda Matéria, “o círculo trigonométrico, também conhecido como ciclo trigonométrico ou circunferência trigonométrica, é uma representação gráfica que auxilia no cálculo das razões trigonométricas.”

Definição e Estrutura

O círculo trigonométrico é definido como sendo uma circunferência com centro na origem do plano cartesiano e raio unitário, ou seja, vale um.

Tomando-se um ponto A como origem dos arcos, cujas coordenadas são (1,0), tem-se uma circunferência, como observado na figura a seguir:

Figura 1 - Origem da Circunferência



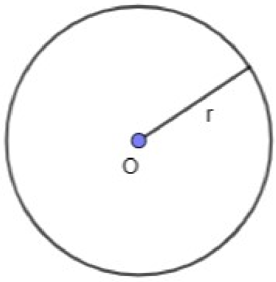
Fonte: *Geogebra*, o autor

Medida dos Ângulos

A medida de um arco no círculo trigonométrico pode ser expressa em graus (°) ou radianos (rad). Um ângulo de 1º corresponde a 1/360 da circunferência. Paiva (2009, p. 42) traz a definição de um radiano (1 rad) como sendo a “medida de um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência que o contém.”

Pode-se encontrar essa medida em radiano, através de uma relação entre o grau e o radiano. Considerando uma circunferência com centro em O e raio r, conforme a figura abaixo:

Figura 2 - Circunferência de centro O e raio r



Fonte: GeoGebra, o autor

Como o comprimento de uma circunferência é 2πr, pode-se obter a sua medida, x, em radiano, por meio de uma regra de três simples (Paiva, 2009, p. 43):

Medida do arco (rad)	Comprimento do arco
1	r
x	2πr

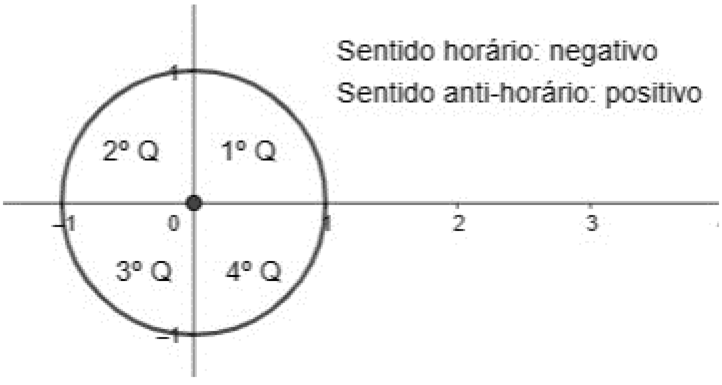
Logo, $x = \frac{2\pi r}{r}$ rad, ou seja, x = 2π rad

Assim, conclui-se que a medida de uma circunferência é 2π rad.

Quadrantes

O círculo trigonométrico é dividido em quatro partes iguais, chamadas de quadrantes, onde o sentido anti-horário é adotado como sendo positivo e o sentido horário como negativo, conforme figura abaixo:

Figura 3 – Quadrantes em uma Circunferência



Fonte: *Geogebra*, o autor

Quanto às medidas dadas em grau, no 1º quadrante os ângulos variam entre 0° e 90°; no 2º quadrante, os ângulos variam entre 90° e 180°; no 3º quadrante: os ângulos variam entre 180° e 270° e, no 4º quadrante, os ângulos variam entre 270° e 360°.

Em relação às medidas dadas em radianos, tem-se: no 1º quadrante os ângulos variam entre 0 radiano e $\frac{\pi}{2}$ radianos; no 2º quadrante, os ângulos variam entre $\frac{\pi}{2}$ e π radianos; no 3º quadrante, os ângulos variam entre π radiano e $\frac{3\pi}{2}$ radianos; no 4º quadrante, os ângulos variam entre $\frac{3\pi}{2}$ radianos e 2π.

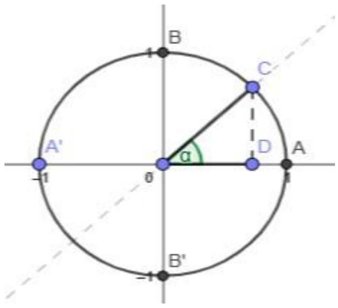
Razões Trigonométricas

As razões trigonométricas estão associadas aos ângulos de um triângulo retângulo. As principais razões são: seno cosseno e tangente, detalhadas a seguir.

Seno

Observe a figura 4 a seguir:

Figura 4 - Cálculo do seno na circunferência de centro O e raio unitário



Fonte: *GeoGebra*, o autor

Chamamos seno do ângulo α (denotaremos por $sin\ \alpha$) ao quociente

$$\frac{CD}{OC}$$

Mas, a medida OC corresponde à medida do raio, ou seja,

$$sin\alpha\ =\ \frac{CD}{1} = CD$$

$$\sin\alpha = CD$$

A partir disso, pode-se concluir que o eixo y corresponde ao eixo dos senos

Estudo dos sinais do Seno:

- Se α está no 1º quadrante ou no 2º quadrante, então $sin\ \alpha$ é positivo;
- Se está no 3º quadrante ou no 4º quadrante, então $sin\ \alpha$ é negativo.

Cosseno

Observe novamente a figura 4.

Chamamos de cosseno do ângulo α (denotaremos por $\cos\alpha$) ao quociente

$$\frac{OD}{OC}$$

Mas, a medida OC corresponde à medida do raio, ou seja,

$$\cos\alpha = \frac{OD}{1} = OD$$

$$\cos\alpha = OD$$

A partir disso, pode-se concluir que o eixo x corresponde ao eixo dos cossenos

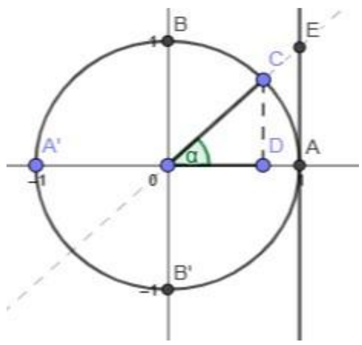
Estudo dos sinais do Cosseno:

- Se α é do 1º quadrante ou do 4º quadrante, então $cos\alpha$ é positivo;
- Se α é do 2º quadrante ou do 3º quadrante, então $cos\alpha$ é negativo.

Tangente

Observe a figura:

Figura 5 - Cálculo da tangente no círculo de centro O e raio unitário



Fonte: *GeoGebra*, o autor

Chama-se tangente do ângulo α (Denotaremos por $\tan\alpha$) a medida algébrica do segmento AE, equivalente ao quociente

$$\frac{CD}{OD}$$

Ou seja,

$$\tan\alpha = \frac{CD}{OD}$$

Mas, dos resultados anteriores, tem-se que CD corresponde ao seno do ângulo α e OD corresponde ao cosseno do ângulo α. Assim:

$$\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$

Estudo dos sinais da Tangente:

- Se α está no 1º ou 3º quadrantes, então $\tan\alpha$ é positiva;
- Se α está no 2º ou 4º quadrantes, então $\tan\alpha$ é negativa.

3 CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Conforme Gil (2022, p. 26), pode-se definir pesquisa como o processo formal e sistemático de desenvolvimento do método científico. O objetivo fundamental da pesquisa é descobrir respostas para problemas mediante o emprego de procedimentos científicos.

Ainda segundo Gil (2022, p. 8) método é caminho para se chegar a um determinado fim. Ou seja, refere-se a um conjunto de procedimentos para se realizar uma tarefa ou alcançar um objetivo específico.

3.1 Tipo de Estudo

A classificação da pesquisa em relação aos objetivos caracteriza-se como exploratória, segundo Gil (2022) este tipo de pesquisa "têm como propósito proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses" (Gil, 2022, p. 41). Portanto, optamos pela pesquisa exploratória para aprofundar nossa compreensão da trigonometria, elaborando atividades destinadas a enriquecer e simplificar a assimilação dos conceitos e propriedades relacionados a esse conteúdo.

A forma como o problema é abordado nesta pesquisa, ou seja, a natureza dos dados, é considerada qualitativa. Segundo Gil (2022), as pesquisas qualitativas apresentam resultados por descrições verbais, destacando a compreensão do mundo a partir da perspectiva dos envolvidos, considerando o objeto de pesquisa como uma construção social. Nesta pesquisa, foi utilizada a abordagem qualitativa, por objetivar verificar o desempenho dos alunos em relação a aprendizagem da trigonometria

Quanto aos procedimentos técnicos utilizados, a pesquisa classifica-se como estudo de caso, segundo Gil (2022, p. 44) tem como propósito "proporcionar uma visão global do problema ou de identificar possíveis fatores que o influenciam ou são por ele influenciados". Nesta pesquisa foi utilizado o estudo de caso, por buscar apresentar um estudo detalhado sobre a Trigonometria partir da utilização de uma sequência didática e de um questionário aplicados em uma turma específica da escola pesquisada.

3.2 Local de Estudo

Para esta pesquisa, o local escolhido foi a Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Frederico Lundgren, localizada na cidade de Rio Tinto/PB.

Em relação à estrutura da escola, essa possui seis salas de aulas, uma cozinha, um pátio com mesas distribuídas para a refeição, dois banheiros de uso comum para alunos, professores e toda equipe da escola, uma sala para professores, que também está funcionando como local para guardar os livros didáticos e outros materiais, pois a escola não possui uma biblioteca. A escola também não possui uma sala de informática. Existe um espaço localizado no pátio criado por alguns alunos e professores, destinado à doação de livros e/ou leituras de obras, sejam literárias ou de outros tipos, como Ciências. Tem uma sala para a gestão e outra que funciona como secretaria.

3.3 População e Amostra

Segundo Prodanov e Freitas (2013 p. 98), universo da pesquisa "é a totalidade de indivíduos que possuem as mesmas características definidas para um determinado estudo".

Portanto, a pesquisa foi conduzida na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Frederico Lundgren, situada em Rio Tinto, Paraíba. A escolha se baseou no fato de que essa instituição abrigava indivíduos com características essenciais para nossa pesquisa, proporcionando-nos a amostra necessária.

Conforme Gil (2008, p. 90), amostra é um “subconjunto do universo ou da população, por meio do qual se estabelecem ou se estimam as características desse universo ou população”. A amostra consistiu de 40 alunos da turma da 2ª Série do Ensino Médio. Assim, optou-se por utilizar esse tipo de amostra na pesquisa, por acreditar que esta amostra selecionada seja representativa do contexto da pesquisa, permitindo uma abordagem abrangente na coleta e análise dos dados.

3.4 Instrumento de coleta de dados

Através da execução de aulas na turma citada sobre Trigonometria, com destaque para o Ciclo Trigonométrico, foi desenvolvido o processo para construção desse ciclo. Foi utilizado o mês de setembro e a primeira semana de outubro de 2023 para realização de uma sequência didática para o ensino da Trigonometria.

Entre os instrumentos de coletas dos dados, foi utilizado a observação participante, pois se pode fazer considerações acerca da abordagem da coleta na turma. Outro instrumento para se coletar os dados foi através de um questionário, em que se pretendia analisar acerca o nível de aprendizado na turma, referente à abordagem dessa pesquisa. O questionário possuiu desde questões simples, podendo serem respondidas com *sim* ou *não*, *verdadeiro* ou *falso*, *escolher uma das alternativas ou múltiplas escolhas*, podendo ocorrer outras formas, como *questões abertas*.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Para a análise e discussão referentes aos resultados desta pesquisa, foram desenvolvidos dois momentos: no primeiro momento, uma análise qualitativa foi realizada, onde foram utilizadas aulas expositivas durante o mês de setembro de 2023 na turma da 2ª Série, turma A, turno da manhã, na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Frederico Lundgren, localizada na cidade de Rio Tinto, Paraíba, para que fossem feitas atividades relativas à construção do ciclo trigonométrico, onde esse foi utilizado como ferramenta para se investigar sua contribuição no processo de ensino e aprendizagem da Trigonometria. E, para o segundo momento, foi aplicado um questionário, baseado nas aulas expostas, para seja uma análise quantitativa relativa aos dados da pesquisa.

4.1 Atividades realizadas em sala de aula

As aulas realizadas durante o mês de setembro na 2ª Série A, turno da manhã, da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio, localizada na cidade de Rio Tinto/PB, a qual faz parte do Programa Residência Pedagógica, Núcleo de Matemática/Campus IV da Universidade Federal da Paraíba.

Como recursos didáticos, foram utilizados o quadro branco, pincel e a ferramenta de geometria dinâmica *GeoGebra* para auxiliar na explicação e visualização. Para cada aula, foram desenvolvidas atividades, divididas em cinco partes, onde serão destacados os resultados.

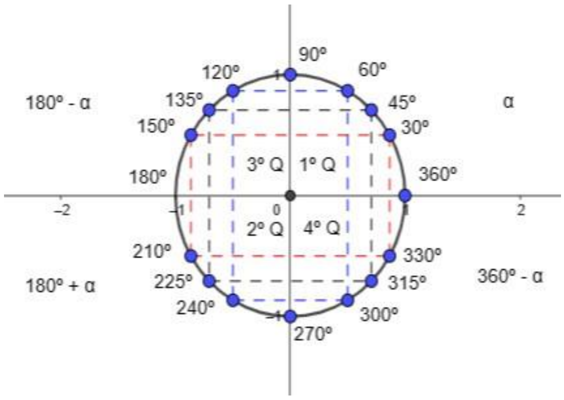
Na primeira parte da atividade, onde foi construído uma circunferência em um plano cartesiano, foi retomado a ideia do sistema cartesiano, para depois chegar à construção do ciclo trigonométrico.

Os alunos, de início, apresentaram dificuldade em relacionar as coordenadas de pontos e os quadrantes aos quais pertenciam esses pontos, destacando também a dificuldade em reconhecer onde as coordenadas eram positivas ou negativas. Os alunos também apresentaram dificuldade em diferenciar a origem do sistema cartesiano e a origem do ciclo trigonométrico

A segunda parte, cálculo e inserção de ângulos no Ciclo Trigonométrico, foi realizada no quadro branco e, em paralelo, utilizou-se o *Geogebra*. A turma aprendeu transformações de unidades de grau para radianos. A dificuldade maior encontrada foi em encontrar os valores dos ângulos em radianos.

Para a terceira parte, redução dos 2º, 3º e 4º quadrantes para o 1º quadrante, a turma não apresentou dificuldade em encontrar os ângulos correspondentes trabalhados. Chegou-se ao seguinte resultado, apresentado no *GeoGebra*:

Figura 6 - Redução ao 1º Q



Fonte: *GeoGebra* – O autor, 2023

Para a quarta parte, construindo um triângulo retângulo na circunferência, foram construídos segmentos de retas e atribuindo pontos estratégicos para se chegar ao resultado. Boa parte da turma desenvolveu corretamente essa atividade. A dificuldade maior foi saber onde cada ângulo agudo deveria ficar posicionado no retângulo.

Por fim, na quinta parte, determinação do seno, cosseno e tangente de um ângulo α do triângulo retângulo inscrito na circunferência, a atividade foi desenvolvida no quadro. Ao final, pôde-se constatar que o eixo das ordenadas, ou seja, eixo y, é o eixo dos senos e, o eixo das abscissas, ou seja, eixo x, é o eixo dos cossenos.

Em relação aos sinais do seno, cosseno e tangente, foi feito uma ligação com os sinais em cada quadrante no sistema cartesiano e o sistema trigonométrico, chegando ao seguinte:

Quadro 1 - Sinais do seno, cosseno e tangente

α	1º quadrante	2º quadrante	3º quadrante	4º quadrante
sen α	positivo	positivo	negativo	negativo
cos α	positivo	negativo	negativo	positivo
tan α	positivo	negativo	positivo	negativo

Fonte: O autor, 2023

Em relação aos sinais do seno, do cosseno e da tangente, a turma teve dificuldade em assimilar a regra dos sinais na operação da divisão, onde foi preciso retomar ao objeto de conhecimento para que as dúvidas fossem sanadas.

4.2 Questionário realizado em sala de aula

Um questionário, contendo 14 questões sobre plano cartesiano e ciclo trigonométrico, foi aplicado nos dias 02 e 05 de outubro de outubro de 2023, com o intuito de analisar o aprendizado da turma quanto ao uso do Ciclo Trigonométrico para o ensino da Trigonometria.

Em relação ao plano cartesiano, foram cinco questões, que perguntavam sobre a ideia de um ponto, localização de pontos nos quadrantes, origem do sistema cartesiano e sinais das coordenadas de pontos aleatórios em cada quadrante. Foram apresentados pontos tanto no plano cartesiano quanto sem a inserção do plano cartesiano.

As nove questões restantes, relacionadas à circunferência trigonométrica, foi abordado o seguinte:

- A origem do sistema trigonométrico;
- pontos estratégicos para se descobrir as coordenadas;
- Qual sentido era o positivo e qual era negativo na circunferência;
- Identificar os quadrantes;
- Identificar pontos nos quadrantes;
- Identificar entre quais ângulos cada quadrante estava inserido;
- Identificar os ângulos notáveis na circunferência;
- Redução ao 1° quadrante;
- Encontrar o seno, cosseno e a tangente dos ângulos;
- Identificar onde o seno, cosseno e tangente era positivo ou negativo.

Algumas considerações:

- A turma não identificou de imediato a diferença entre a origem do sistema cartesiano e a origem do sistema trigonométrico;
- Em relação a um ponto inserido em um dos eixos, ou seja, ou (x,0) ou (0,y), a turma apresentou dificuldade;
- A identificação dos quadrantes foi feita corretamente. Porém, o intervalo ao qual cada quadrante pertencia geraram dúvidas, às quais foram sanadas;

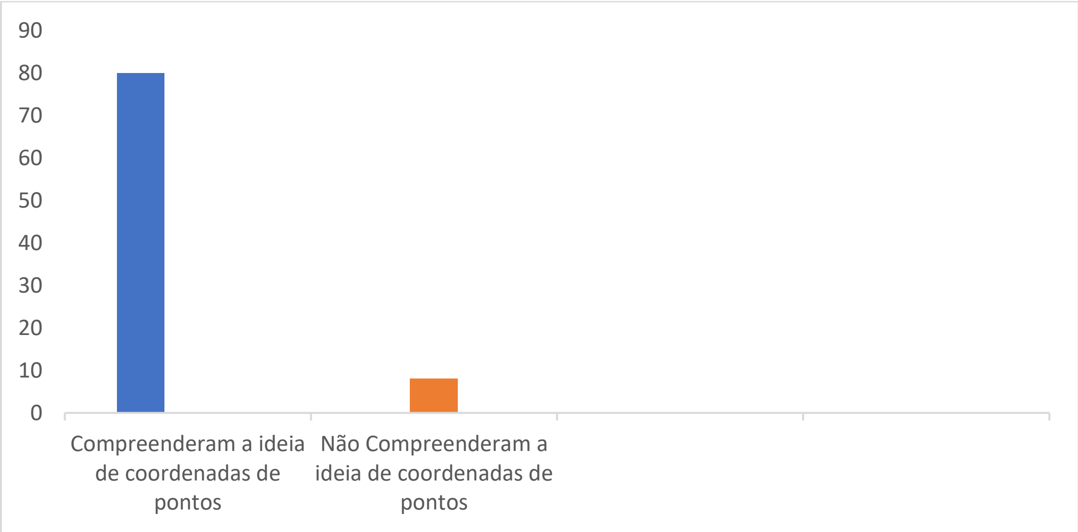
- Em relação aos sinais do seno, cosseno e da tangente, a dificuldade encontrada foi mais em relação à tangente, onde foi preciso retomar à regra dos sinais. Após isso, a turma desenvolveu de forma correta o raciocínio.

  Em relação às questões sobre o plano cartesiano, pontos e quadrantes, a maior dificuldade, de início, observou-se que a turma teve em relação aos sinais das coordenadas dos pontos, que, consequentemente, teve dificuldade também em relacionar a qual quadrante cada ponto pertencia.

  No decorrer do questionário em relação ao plano cartesiano, a turma tornou-se mais proativa, participando mais e procurando tirar as dúvidas.

O gráfico a seguir interpreta as respostas de um questionamento acerca da compreensão da ideia de um ponto qualquer inserido em um plano cartesiano.

Gráfico 1 – Porcentagem dos alunos que compreenderam a ideia de coordenadas de pontos

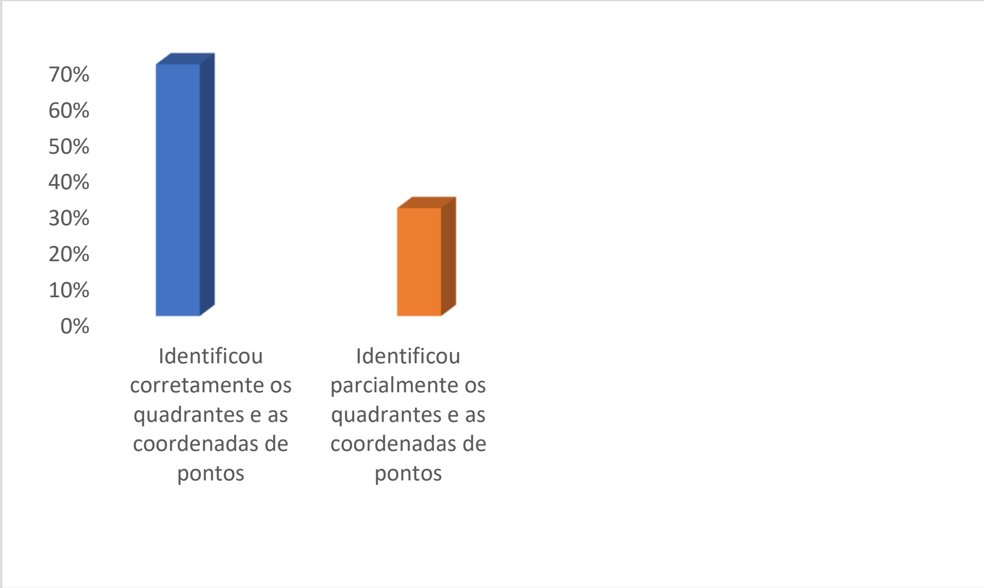


Fonte: o autor, 2023

A partir da análise do gráfico 1, podemos concluir que, dos 40 alunos presentes, 32 compreenderam a ideia de um ponto e 8 não compreenderam. Em relação a esses 8 alunos que não compreenderam, alegaram que quando um ponto é representado pelas coordenadas algébricas, a exemplo de um ponto P, de coordenadas x e y, era difícil enxergar um ponto, mas que um ponto representado numericamente era mais fácil de se compreender. Ainda em relação a essa dificuldade em identificar um ponto, quando foi questionado acerca dos pontos de coordenadas (x,0) e (0,y) em sala de aula, não identificaram de imediato que pontos desse tipo são aqueles que estão exatamente nos eixos cartesianos x e y respectivamente, ou seja, que no eixo x a coordenada y vale zero e, no eixo y, a coordenada x é que vale zero.

O gráfico a seguir indica a porcentagem dos alunos que conseguiram identificar corretamente ou parcialmente os quadrantes e os pontos inseridos nesses.

Gráfico 2 – Porcentagem de identificação dos quadrantes e enumeração das coordenadas de pontos

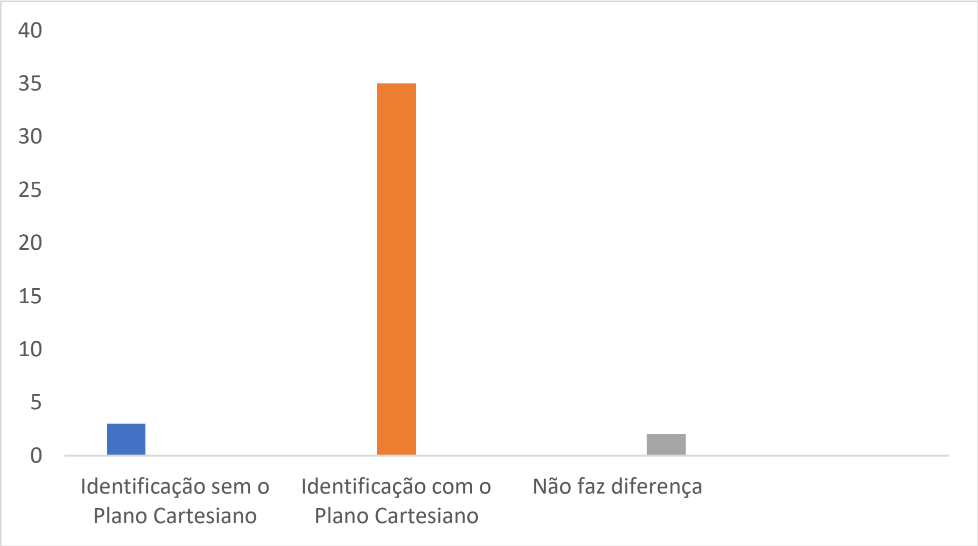


Fonte: o autor, 2023

A partir do gráfico 2 podemos observar que, dos 40 alunos, 28 (70%) deles identificou corretamente os quadrantes e soube enumerar os pontos, enquanto 12 (30%) alunos, identificaram parcialmente os quadrantes e os pontos. Isso se deve, segundo esse quantitativo de 12 alunos, a não terem visto ou lembrado dos conteúdos abordados no Ensino Fundamental envolvendo plano cartesiano, dificultando o aprendizado e compreensão.

No gráfico a seguir, tem-se o quantitativo da forma como os alunos conseguiam visualizar melhor pontos, ou seja, alguns alunos acham que só um ponto sem a representação em um plano cartesiano era suficiente a visualização, enquanto a maioria achou melhor a visualização quando os pontos estão inseridos em um plano cartesiano e, por último, aqueles alunos que disseram não fazer diferença, pois não interferia na visualização e compreensão.

Gráfico 3 - Melhor visualização das coordenadas de pontos de acordo com os alunos

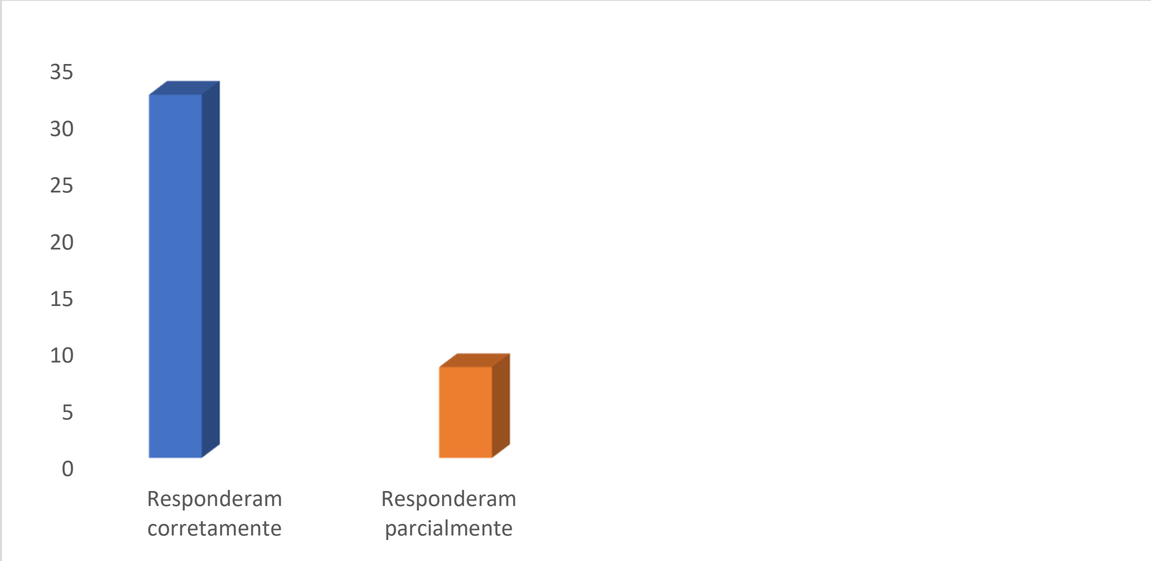


Fonte: o autor, 2023

A partir da análise do gráfico 3 é possível observar que dos 40 alunos presentes, 3 disseram que a identificação dos pontos sem o plano cartesiano é melhor, 35 disseram que a compreensão dos pontos com o auxílio do plano cartesiano ficou melhor e apenas 2 disseram que não faz diferença. No questionário realizado em sala de aula, tem uma questão que questionou sobre a visualização de pontos, a partir de duas questões anteriores, onde uma foram apresentados somente os pontos e a outra pontos inseridos no plano cartesiano. Daí esse resultado.

O gráfico a seguir representa o quantitativo das respostas corretas e parcialmente corretas dos alunos quanto à identificação de pontos inseridos em uma circunferência trigonométrica com centro em O e raio unitário.

Gráfico 4 – Identificação das coordenadas de pontos na circunferência trigonométrica



Fonte: o autor, 2023

A partir da análise do gráfico 4, é possível concluir que dos 40 alunos, 32 deles (80%) responderam corretamente quanto à identificação dos pontos na circunferência trigonométrica, enquanto 8 deles responderam parcialmente quanto à identificação de pontos na circunferência. Em relação a esses 8 alunos, esse resultado se deve principalmente ao fato de não terem identificados os pontos de forma correta na circunferência mostrada no questionário.

Em relação às coordenadas dos pontos quanto aos sinais dessas na circunferência trigonométrica, após identificarem corretamente os quadrantes e os sinais em cada um deles, todos os 40 alunos conseguiram responder corretamente ao que se pedia quanto aos sinais desses pontos.

No que se refere aos quadrantes e variação dos ângulos nesses, a turma desenvolveu corretamente o raciocínio.

Em relação aos ângulos notáveis, a turma pôde verificar que esses pertencem ao 1º quadrante.

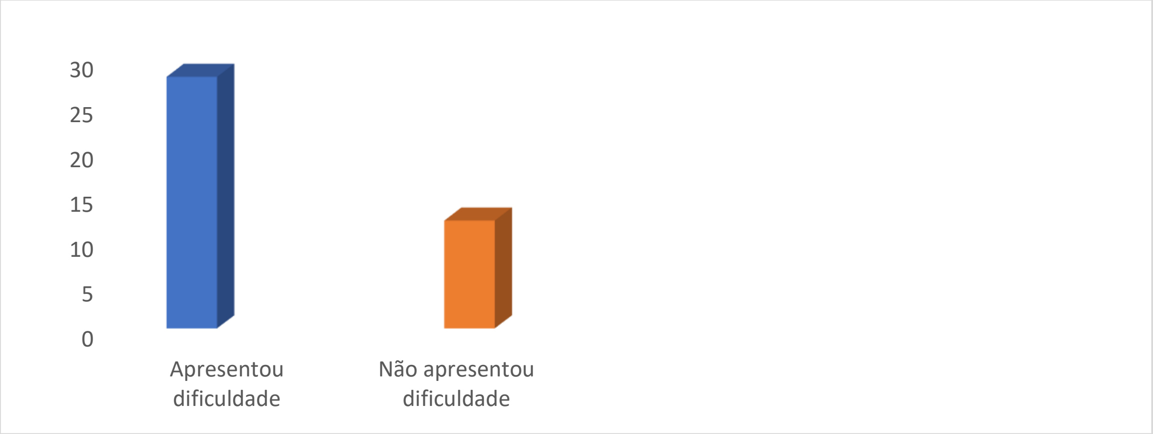
No tocante à redução aos quadrantes ao 1º quadrante, a turma desenvolveu corretamente ao que era pedido, ao serem desenvolvidas e mostradas como proceder no caso dessas reduções ao 1º quadrante.

Em relação à construção de um triângulo retângulo na circunferência, a turma seguiu os passos corretamente e compreendeu o desenvolvimento feito no quadro e visualizado com o auxílio do *GeoGebra*. Quanto à utilização do *GeoGebra*, Lopes (2013, p. 12) fala das potencialidades do *GeoGebra*, citando entre essas a visualização, que para essa pesquisa foi considerado positivo.

Quanto ao desenvolvimento das fórmulas para o cálculo das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, a turma não apresentou dificuldade.

O gráfico a seguir representa o quantitativo de alunos que apresentarem dificuldades relacionadas aos sinais das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo qualquer.

Gráfico 5 - Dificuldade quanto aos sinais do seno, cosseno e tangente



Fonte: o autor, 2023

Observando o gráfico 5, percebe-se que, dos 40 alunos 28 deles, apresentaram dificuldades quanto aos sinais dessas funções trigonométricas em seus respectivos quadrantes.

Segundo Feijó (2018),

> [...] os erros cometidos [..] estão em todos os ramos da trigonometria, desde definições e conceitos até manipulações, inferências e generalizações. Os problemas no aprendizado são observados desde a base, desde os fundamentos da trigonometria. (Feijó, 2018, p. 52)

No tocante ao uso do Ciclo Trigonométrico para o ensino da Trigonometria, a turma obteve um resultado significativo quanto o aprendizado. Através das atividades e do questionário realizados envolvendo o processo de construção do ciclo trigonométrico, utilizando também o *GeoGebra* como auxílio para visualização de situações envolvendo Trigonometria, partindo-se inicialmente das representações de pontos e quadrantes em um plano cartesiano, observou-se que a turma conseguiu desenvolver de forma positiva as atividades e melhorar o raciocínio a partir do momento que se teve a oportunidade de participar e contribuir mais das aulas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse trabalho foi de promover uma aprendizagem significativa dos conceitos de Trigonometria por meio do uso do círculo trigonométrico como recurso didático.

Boyer (2010) trouxe informações acerca das contribuições dos povos antigos, como os babilônios e egípcios, relacionadas ao conhecimento da Trigonometria. A BNCC, documento de caráter normativo, trouxe algumas informações relacionadas às suas competências e habilidades que puderam contribuir de forma positiva com esse trabalho. Homa & Santos (2018) falam da importância do uso da tecnologia pelo professor em sala de aula, onde aqui teve-se a utilização do *GeoGebra*, que auxiliou nas aulas expositivas. Gil (2022) trouxe informações que puderam contribuir na forma de organizar a metodologia desse trabalho, onde foi fundamental para o resultado e conclusão final dessa pesquisa.

Para atingir o nosso objetivo, foram utilizadas duas etapas: a primeira etapa foi uma atividade dividida em cinco partes, envolvendo desde a criação de um plano cartesiano até a construção da Circunferência Trigonométrica, também chamada de Ciclo Trigonométrico, apresentando entre outras coisas, pontos, quadrantes, sinais em quadrantes e o cálculo de seno, cosseno e da tangente; na segunda etapa, foi desenvolvido um questionário, como forma de verificar o aprendizado da turma quanto ao uso do Ciclo Trigonométrico para o ensino da Trigonometria.

De início, a Trigonometria não foi "bem-vista" pela turma, pois foi considerada muito complexa.

No decorrer das atividades e do questionário, a turma conseguiu desenvolver o aprendizado de forma satisfatória, pois, além das atividades realizadas no quadro, foi também apresentado o *GeoGebra*, um recurso que trabalha a Geometria de forma dinâmica e auxilia no desenvolvimento de atividades relacionadas à construção de figuras, como a Circunferência Trigonométrica e tópicos relacionados a essa.

O uso do *GeoGebra* como uma forma para auxiliar na aprendizagem da Trigonometria foi considerado viável, pois a turma pôde observar outra forma de desenvolver um objeto de conhecimento específico, como a Trigonometria, além do apresentado no quadro. A turma pôde verificar as mudanças causadas em uma figura através, por exemplo, de uma animação gerada no *GeoGebra*, de tal forma que auxiliou no desenvolvimento do aprendizado individual e coletivo da turma.

A dinâmica utilizada entre as atividades realizadas em quadro, de uma forma ainda tradicional, pôde ser complementada de forma satisfatória com o uso do *Geogebra*, pois a visualização de uma situação colocada no quadro também foi observada pelo *GeoGebra*. Ainda que o *GeoGebra* tenha sido utilizado mais para visualização e não como um recurso utilizado direto pelos alunos, foi percebido que a turma conseguiu se envolver mais nas atividades, interagindo durante as aulas de um jeito mais "leve".

Sendo assim, através dessa pesquisa, pode-se concluir que o objetivo de utilizar como recurso didático o ciclo trigonométrico para o ensino da trigonometria foi realizado de forma significativa, pois, ao se realizar o processo de construção desse ciclo trigonométrico, em que não foi só mostrado direto no quadro como encontrar medidas de ângulos ou das funções trigonométricas, como o seno, o cosseno e a tangente e sim o passo a passo, além do uso do *GeoGebra* para melhor visualização, havendo mais envolvimento da turma através de uma participação mais ativa, protagonista.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Débora Caroline Azevedo de. **Análise de Recursos do GeoGebra Para o Ensino e Aprendizagem de Trigonometria:** possibilidades e limites dos aplicativos sobre o Ciclo Trigonométrico. 2021. 82 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal de Pernambuco. Caruaru.

ASTH, Rafael. Círculo Trigonométrico. **Toda Matéria**, *[s.d.]*. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/circulo-trigonometrico/. Acesso em: 8 nov. 2023

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**, 3. ed., São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC, 2018.

FEIJÓ, Rachel Saffir Araújo Alves. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria**: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. 2018. 108 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, 2018.

GIL, Antonio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. [Atlas]: Grupo GEN, 2022. E-book. ISBN 9786559771653. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9786559771653/. Acesso em: 02 out. 2023.

HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokiti, SANTOS, Jonata Souza dos. Tecnologias Digitais no Estudo de Trigonometria no Ensino Médio. **EMR** – ANO 19, RS, v. 1, n. 19, p. 125-137, 2018.

KLEIN, M. E. Z.; COSTA, S. S. C. **O Ensino da Trigonometria subsidiado pelas teorias dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e da Aprendizagem significativa de David Ausubel.** In: Mostra de Pesquisa da pós-graduação PUCRS, 3., Porto Alegre: PUCRS, 2008.

LOPES, Maria Maroni. Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o Software GeoGebra. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 631-644, ago. 2013.

MAIA, Jorge, PEREIRA, Marcelo Gomes. (2015). **O Software GeoGebra:** Uma Estratégia de Aprendizagem Aplicada no Estudo de Funções Trigonométricas. **Ciência e Natura**, Santa Maria (RS), v. 37, n. Especial, p. 401–410, 2015.

PAIVA, Manoel. **Matemática - Paiva**. 1. ed. São Paulo. Moderna. cap. 3, p. 41-52, 69, 2009.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RAMOS, Rita et al. **Oficina de ensino de trigonometria para a educação básica – construção e análise de materiais**. Disponível em: https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/MC_RAMOS_94689598053.pdf Acesso em 04 de out. 2023.

APÊNDICES

APÊNCICE A – Atividades em sala de aula sobre a construção do Ciclo Trigonométrico

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO
CAMPUS IV – LITORAL NORTE – RIO TINTO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
Orientando: Daniel de Abreu Gadelha
Orientadora: Claudilene Gomes da Costa

1ª parte: construindo uma circunferência em um plano cartesiano

- em seu caderno, construir um plano cartesiano xOy, identificando onde as coordenadas x e y são positivas ou negativas
- construir uma circunferência com centro em O e raio r = 1 nesse plano cartesiano

Essa estrutura, com as convenções a seguir, constitui a **circunferência trigonométrica**:

- O ponto A (1, 0) é a **origem** de todos os arcos a serem medidos na circunferência. Identificar e inserir o ponto A
- Se um arco for medido no sentido **horário**, então a essa medida será atribuído o sinal **negativo (-)**;
- Se um arco for medido no sentido **anti-horário**, então a essa medida será atribuído o sinal **positivo (+)**;
- Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas **Quadrantes (Q)** e numeradas no sentido anti-horário, a partir do ponto A;
- Os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum dos quadrantes

2ª parte: inserindo os arcos trigonométricos na circunferência

Ao transformarmos a medida de ângulos de grau para radiano e de radiano para grau, de alguns ângulos, agudos ou não, encontramos alguns valores, onde utilizamos o seguinte: 360º equivale a 2π radianos ou 180º equivale a π radianos. Sabendo disso, encontre as medidas que estão faltando no quadro a seguir:

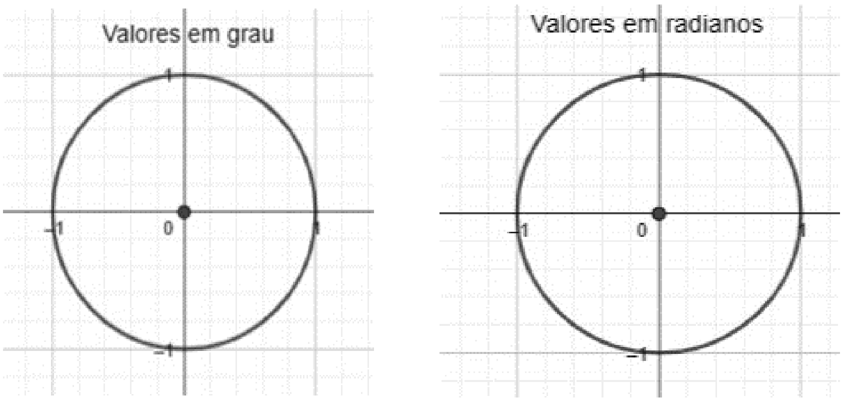
Quadro 1 – Transformação de medidas dos ângulos em grau e em radiano

Medida do ângulo em grau	**Medida do ângulo em radiano**
30º	${}^{\mu}/_{6}$
45º	${}^{\mu}/_{4}$
60º	${}^{\mu}/_{3}$
90º	${}^{\pi}/_{2}$
120º	
135º	
150º	
180º	π
210º	
225º	
240º	
270º	$\frac{3\pi}{2}$
300º	
315º	
330º	
360º	2π

Fonte: o autor, 2023

A partir dos dados da tabela, insira os ângulos nas circunferências abaixo:

Figura 1 – Representação de duas circunferências



Fonte: *GeoGebra* – o autor, 2023

3ª parte: Redução ao 1º Quadrante (Q)

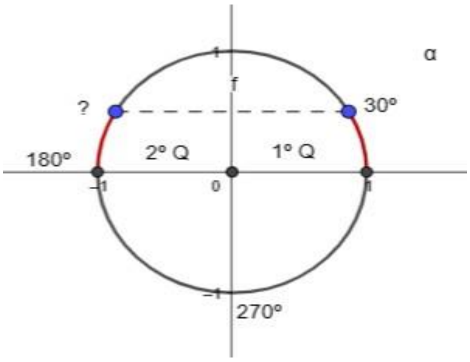
Reduzindo do 2º Q para o 1º Q

Atividade realizada no quadro e acompanhada pelo *GeoGebra*.

- Considere uma circunferência com centro em O e raio igual a 1
- Considere um ângulo α pertencente ao 1º Q
- A partir do ângulo α = 30º, insira um segmento de reta paralelo ao eixo x até o 2º Q.

Queremos encontrar o ângulo no 2º Q que seja correspondente ao de 30º. Observe a figura abaixo:

Figura 2 – Redução do 2º quadrante para o 1º quadrante



Fonte: *GeoGebra* – o autor, 2023

Observe que a medida do ângulo que queremos no 2º Q tem uma distância de 30º em relação ao ângulo de 180º, ou seja: 180º - 30º = 150º

Assim, para encontrarmos um ângulo no 2º Q que seja correspondente a um do 1º Q, fazemos:

$$180^{\circ} - \alpha$$

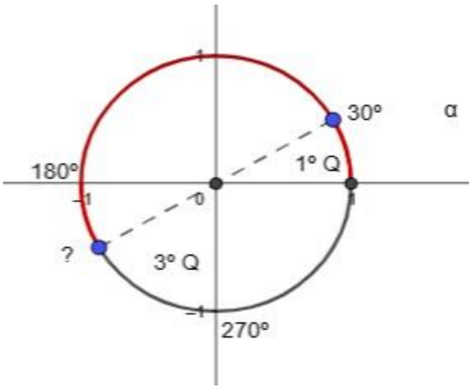
onde α pertence ao 1º Q

Fazendo esse mesmo procedimento, podemos encontrar os correspondentes de 45º e 60º Assim, calcule os ângulos equivalentes aos ângulos notáveis no 2º Q.

Redução do 3º Q para o 1º Q

Tomaremos novamente α = 30º e, após isso, chegaremos em resultado semelhante para os ângulos de 45º e 60º. Observe afigura a seguir, mostrada pelo *GeoGebra:*

Figura 3 - Redução do 3º quadrante para o 1º quadrante



Fonte: *GeoGebra* – o autor, 2023

Nesse caso, o ângulo que queremos encontrar ultrapassa em 30º o ângulo de 180º, ou seja, 180º + 30º = 210º

Assim, para encontrarmos um ângulo no 3º Q que seja correspondente a um do 1º Q, fazemos:

$$180^{\circ} + \alpha$$

Onde α pertence ao 1º Q

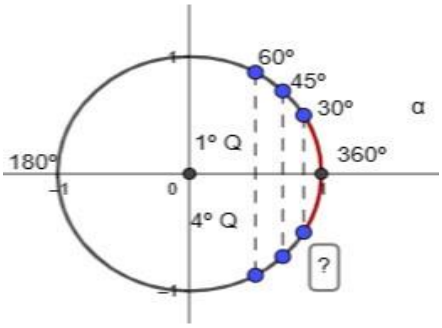
Fazendo esse mesmo procedimento, podemos encontrar os correspondentes de 45º e 60º.

A partir disso, calcule os ângulos equivalentes aos ângulos notáveis no 3º Q.

Redução do 4º Q para o 1º Q

Vamos observar o seguinte:

Figura 4 - Redução do 4º quadrante para o 1º quadrante



Fonte: *GeoGebra* – o autor, 2023

Tomando novamente o ângulo de 30º, observamos que o ângulo do 4º Q correspondente tem sua medida de 30º em relação ao ângulo de 360º, ou seja, 360º - 30º = 330º, o que acontece da mesma forma com os ângulos de 45º e 60º.

Ou seja, para encontrarmos um ângulo no 4º Q que seja correspondente a um do 1º Q, fazemos:

$$360º - \alpha$$

Onde α pertence ao 1º Q.

A partir disso, calcule os ângulos equivalentes aos ângulos notáveis no 4º Q

4ª parte: construindo um triângulo retângulo na circunferência

Atividade realizada no quadro e acompanhada pelo *GeoGebra*.

- Considere uma circunferência de centro em O e raio igual a 1.
- determinar um ponto C na circunferência no 1º quadrante
- determinar um segmento de reta que vai do centro O até o ponto C
- determinar um segmento de reta que vai de C até um ponto D no eixo x, formando um ângulo reto
- determinar um segmento de reta que vai do centro O até o ponto D
- denominar o ângulo entre os segmentos OC e OD de α
- denominar o ângulo entre os segmentos OC e CD de β

5ª parte: encontrando o seno, cosseno e tangente do ângulo α a partir do triângulo retângulo encontrado na 4ª parte

Atividade realizada no quadro.

Dado um ângulo α, temos que:

- O seno de um ângulo é dado pelo quociente entre o cateto oposto e a hipotenusa
- O cosseno de um ângulo é dado pelo quociente entre o cateto adjacente e a hipotenusa
- A tangente de um ângulo é dada pelo quociente entre o cateto oposto e o cateto adjacente, resultando no quociente entre seno e o cosseno.

A partir disso, encontre o seno, o cosseno e a tangente, de acordo com as informações.

APÊNDICE B – Questionário sobre plano cartesiano e Ciclo Trigonométrico

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO

CAMPUS IV – LITORAL NORTE – RIO TINTO

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Orientando: Daniel de Abreu Gadelha

Orientadora: Claudilene Gomes da Costa

1. Ao se identificar em um plano cartesiano um ponto P, que tem coordenadas x e y, representado por P (x, y), você consegue compreender a ideia de um ponto?

( ) Sim ( ) Não

2 No plano cartesiano temos quatro quadrantes. Se forem dados pontos e, de acordo com as coordenadas desses pontos, você consegue identificar em qual quadrante cada ponto se encontra?

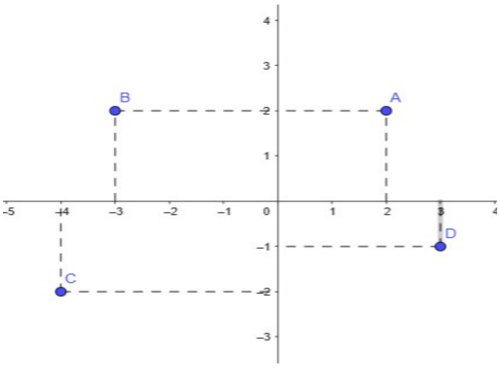
( ) Sim ( ) Não

3 De acordo com a questão 2, em quais quadrantes os seguintes pontos se encontram?

a) (1 , 3) b) (-2 , 4) c) (-3 , -2) d) (5 , -6)

4 Agora, vamos observar quatro pontos no plano cartesiano a seguir:

Figura 1 – Pontos inseridos no Plano Cartesiano



Fonte: GeoGebra - o autor, 2023

Em relação aos pontos dados, responda:

a) Em qual quadrante cada ponto se encontra?

____

b) Enumere cada ponto de acordo com a legenda a seguir:

(1) (+ +) (2) (+ -) (3) (- -) (4) (- +)

Ponto A ( ) Ponto B ( ) Ponto C ( ) Ponto D ( )

5 Escolha uma das alternativas a seguir. Observando as formas abordadas nas questões 3 e 4, a compreensão ficou melhor através:

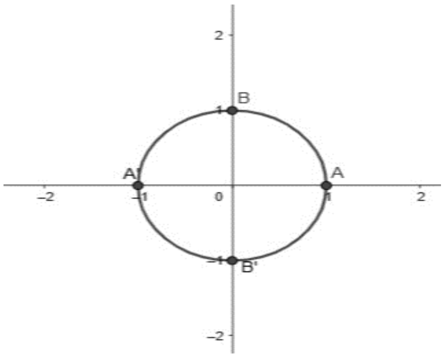
( ) da apresentação somente dos pontos sem o plano cartesiano.

( ) da apresentação dos pontos em um plano cartesiano.

( ) não faz diferença

6 Considere uma circunferência com centro na origem de um sistema cartesiano, ou seja, no ponto (0 , 0), e o comprimento de seu raio igual a 1, e considere os pontos A, B, A’ e B’, mostrados a seguir:

Figura 2 – Circunferência com centro na origem e raio igual a 1 e alguns pontos específicos



Fonte: *GeoGebra* – o autor, 2023

Para cada alternativa verifique se é verdadeira ou falsa:

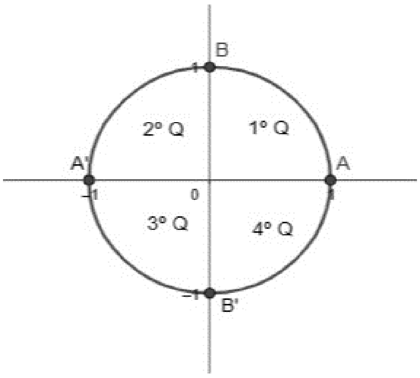
Quadro 1 – Coordenadas de pontos no eixo cartesiano

	Verdadeiro	Falso
Um ponto no eixo x tem as coordenadas do tipo (x, 0)		
Um ponto no eixo y tem as coordenadas do tipo (0, y)		
No eixo x, a coordenada y vale zero		
No eixo y, a coordenada x vale zero		
As coordenadas do ponto A são x = 1 e y = 0		
As coordenadas do ponto A são x = 0 e y = 1		
As coordenadas do ponto B são x = 0 e y = 1		
As coordenadas do ponto B são x = 1 e y = 0		
As coordenadas do ponto A’ são x = 0 e y = 1		
As coordenadas do ponto A’ são x = -1 e y = 0		
As coordenadas do ponto B’ são x = 0 e y = -1		
As coordenadas do ponto B’ são x = -1 e y = 0		

Fonte: o autor, 2023

7 Para cada item, escolha uma das alternativas. Para isso, observe a seguinte circunferência trigonométrica:

Figura 3 – Circunferência Trigonométrica



Fonte: *GeoGebra* – o autor, 2023

I. O ponto A (1,0) é a origem do sistema trigonométrico. V ( ) F( )

II. As quatro regiões da circunferência são chamadas quadrantes. V ( ) F( )

III. Na circunferência, o sentido horário é o sentido negativo V ( ) F ( )

IV. Na circunferência, o sentido anti-horário é o sentido positivo V ( ) F ( )

V. No 1º quadrante os valores de x são: Positivos ( ) Negativos ( )

VI. No 1º quadrante os valores de y são: Positivos ( ) Negativos ( )

VII. No 2º quadrante os valores de x são: Positivos ( ) Negativos ( )

VIII. No 2º quadrante os valores de y são: Positivos ( ) Negativos ( )

IX. No 3º quadrante os valores de x são: Positivos ( ) Negativos ( )

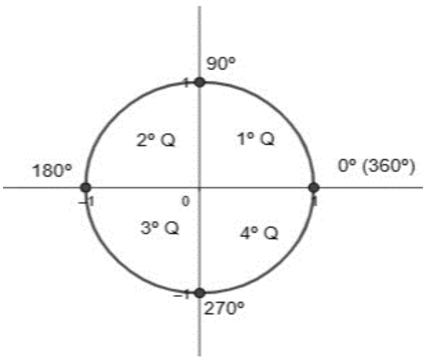
X. No 3º quadrante os valores de y são: Positivos ( ) Negativos ( )

XI. No 4º quadrante os valores de x são: Positivos ( ) Negativos ( )

XII. No 4º quadrante os valores de y são: Positivos ( ) Negativos ( )

8 Observe a circunferência trigonométrica na figura a seguir:

Figura 4 – Circunferência Trigonométrica e seus quadrantes



Fonte: *GeoGebra* – o autor, 2023

Enumere a coluna da direita de acordo com a da esquerda, conforme o quadro a seguir:

Quadro 2 – Variação dos ângulos nos quadrantes

(1) no 1º Q os ângulos variam entre	( ) 270º e 360º
(2) no 2º Q os ângulos variam entre	( ) 0º e 90º
(3) no 3º Q os ângulos variam entre	( ) 90º e 180º
(4) no 4º Q os ângulos variam entre	( ) 180º e 270º

Fonte: o autor, 2023

9 Os ângulos de 30º, 45º e 60º são chamados ângulos notáveis, por aparecerem com mais frequência em questões ou outras situações envolvendo Trigonometria.

Esses ângulos pertencem a qual quadrante?

( ) 1º quadrante ( ) 2º quadrante ( ) 3º quadrante ( ) 4º quadrante

Ângulos que têm medidas entre 0º e 90º, como os ângulos notáveis, são chamados agudos.

10 Ângulos que têm medidas entre 90º e 180º são chamados de obtusos e pertencem ao 2º quadrante. Exemplos desses ângulos estão na(s) alternativa(s) (pode conter mais de uma resposta)

a) 120º, 150º, 200º b) 120º, 135º, 150º c)120º, 135º, 210º d) 91º, 140º, 179º

11 Ângulos entre 180º e 270º pertencem ao 3º quadrante. Exemplos desses ângulos encontramos na(s) alternativa(s) (pode conter mais de uma resposta):

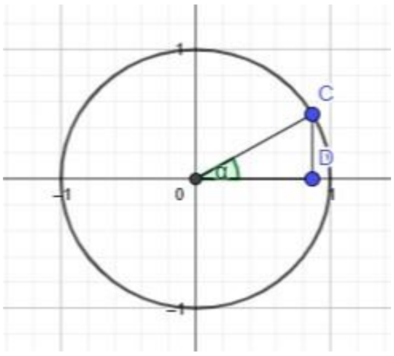
a) 210º, 250º, 280º b) 150º, 210º, 240º c)210º, 225º, 240º d) 200º, 230º, 260º

12 Ângulos entre 270º e 360º pertencem ao 4º quadrante. Exemplos desses ângulos encontramos na(s) alternativa(s) (pode conter mais de uma resposta):

a) 300º, 315º, 330º b) 260º, 300º, 330º c) 280º, 300º, 350º d) 90º, 180º, 315º

13 Observe a seguinte figura e calcule o que se pede:

Figura 5 – Triângulo retângulo inserido em uma circunferência trigonométrica



Fonte: *GeoGebra* – o autor, 2023

a) $\sin\alpha$ b) $\cos\alpha$ c)$\tan\alpha$

14 Observe o quadro a seguir:

Quadro 3 – sinais do seno, cosseno e tangente

α	1º quadrante	2º quadrante	3º quadrante	4º quadrante
sen α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tan α	+	-	+	-

Fonte: o autor, 2023

a) De acordo com as informações na questão, determine o sinal de cada ângulo, inserido no quadro a seguir:

Quadro 4 – Determinação dos sinais de ângulos

	120º	135º	150º	210º	225º	240º	300º	315º	330º
Seno									
cosseno									
tangente									

Fonte: o autor, 2023

b) Considere o seno, o cosseno e tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º, conforme quadro abaixo:

Quadro 5 - Seno, cosseno e tangente dos Ângulos Notáveis

	30º	45º	60º
seno	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cosseno	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tangente	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: o autor, 2023

Observe também o quadro a seguir:

Quadro 6 – Representação e equivalência dos ângulos em cada quadrante

1º quadrante	Equivalente no 2º Q	Equivalente no 3º Q	Equivalente no 4º Q
30º	150º	210º	330º
45º	135º	225º	315º
60º	120º	240º	300º

Fonte: o autor, 2023

Calcule o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos inseridos no quadro a seguir:

Quadro 7 – Cálculo do seno, cosseno e tangente

	120º	135º	150º	210º	225º	240º	300º	315º	330º
cos									
sen									
tan									

Fonte: o autor, 2023