Máquina de Turing como transdutor de Operações Aritméticas Fundamentais[1]

Daniel de Moura Santos

2

RESUMO

Este trabalho apresenta Máquinas de Turing implementadas como transdutores de operações aritméticas fundamentais, realizando as quatro operações aritméticas básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão, a partir da sua forma mais simples com números de um dígito, até a composição mais elaborada de algoritmos envolvendo números com vários dígitos.

A questão de maior destaque é demonstrar como uma estrutura eminentemente simbólica, pode vir a realizar operações matemáticas fundamentais, que podem ser extrapoladas para resolver questões ainda mais complexas.

Dessa maneira, demonstra-se como uma máquina com a capacidade limitada à leitura, reconhecimento e impressão de símbolos, pode ser utilizada para realizar operações aritméticas, como se observa em máquinas que são consideradas mais poderosas, como as calculadoras e computadores atuais.

Espera-se que o conteúdo desse trabalho venha a estabelecer uma ponte entre os conceitos teóricos das MTs e seus descendentes históricos, os computadores digitais, na resolução dos mais diversos problemas.

Palavras-chave: Máquina de Turing, Operações aritméticas Fundamentais.

ABSTRACT

The Turing Machine is recognized as the main theoretical foundation responsible for the development of digital computers; it is a formal framework that models the way problems could be solved by a person.

This work presents Turing Machines implemented as transducers of fundamental arithmetic operations, performing the four basic arithmetic operations of addition, subtraction, multiplication and division, from their simplest form with one-digit numbers, to the most elaborate composition of algorithms involving multi-digit numbers.

---

[1] Trabalho de Conclusão de Curso – TCC, orientado pelo prof. Dr. Joelson Nogueira de Carvalho, exigido para conclusão do curso de Licenciatura em Ciências da Computação do Departamento de Ciências Exatas do CCAE/ UFPB.

[2] E-mail:daniel.moura@dcx.ufpb.br

The most important issue is to demonstrate how, from an eminently symbolic structure, it can be constructed in order to perform fundamental mathematical operations, which can be extrapolated to solve even more complex issues.

In this way, it is demonstrated how a machine with limited capacity to read, recognize and print symbols can be used to perform arithmetic operations, as seen in machines that are considered more powerful, such as current calculators and computers.

It is hoped that the content of this work will establish a bridge between the theoretical concepts of TMs and their historical descendants, digital computers, in solving the most diverse problems.

Keywords: Turing Machine, Fundamental Arithmetic Operations.

1 Introdução

1.1 Motivação do artigo

Este artigo é motivado por duas questões principais, a primeira é a escassez de produção de materiais teóricos na área da computação e o segundo é a importância da teoria da computação para compreensão da computação em si. J. J. Neto (2022) explica em A Teoria da Computação e o profissional de informática, não faltam argumentos para o esvaziamento de conteúdo teórico da área, restando poucos que se interessam.

Pode-se levar em consideração a complexidade dos conteúdos como parte do motivo, porém é nítido que a área de tecnologia está em constante crescimento atraindo a atenção de vários para o desenvolvimento de tecnologias como produto, o que deixa a produção científica teórica em segundo plano.

Este fenômeno cria a escassez de conteúdo teórico que tem uma importância sem precedentes, uma que se pode observar é a computação em si. O fundamento da computação é a matemática, isto significa que o objetivo de uma máquina é resolver problemas e, para tal propósito ser atingido, o problema proposto tem que ser computável; uma forma de verificar se um problema é computável é verificar se é possível representá-lo e resolvê-lo por meio da máquina de Turing que, por sua vez é estudada pela área da teoria da computação.

Como J.J. Neto (2022) também explica em seu texto

“ *[...]a Teoria da Computação propõe, estuda e compara modelos de computação, as classes de problemas que cada um deles consegue resolver e os limites a que cada qual está sujeito.*”

Por fim, este artigo tenta minimizar esta escassez propondo uma máquina de Turing como transdutor de operações aritméticas fundamentais e incentivando o aprofundamento no conteúdo proposto para mais produções nesta linha de pesquisa, não só para operações mais complexas, mas também para outros problemas de diferentes áreas.

1.2 Máquinas Abstratas

Uma máquina pode ser definida como qualquer equipamento que resolve um problema através da execução de operação ou tarefas pré-definidas, segundo a maneira que ela foi projetada.

Uma máquina abstrata é uma máquina puramente teórica, sem existência física, com descrição simbólica, capaz de executar tarefas pré-definidas, dentro de um conjunto de regras gramaticais formais (Makula, 2022).

A Máquina de Turing é uma máquina abstrata, ou seja, representa um modelo teórico funcional de um sistema computacional. Esse modelo é puramente simbólico e por isso, tem a capacidade básica de manipulação de símbolos, sendo capaz de ler, escrever e reconhecer a igualdade ou a diferença entre dois símbolos quaisquer. Sendo assim, não é possível realizar qualquer operação matemática, por exemplo, entre dois números quaisquer, já que cada número é interpretado pela máquina apenas em termos de sua expressão simbólica, sem qualquer valor numérico adstrito à mesma.

Na teoria da computação, as máquinas abstratas são geralmente usadas em experimentos mentais relacionados à computabilidade (possibilidade de executar uma função algorítmica finita ou parcial) ou para analisar a complexidade de algoritmos (Contagem das demandas de tempo e espaço; é uma medida de eficiência), já que através das máquinas abstratas é possível estipular a quantidade de recursos de tempo e espaço de armazenamento necessários para realizar uma tarefa (Sipser, 2005).

Uma máquina abstrata típica consiste em uma entrada, uma saída, e um conjunto de operações que se transformam uma em outra.

Máquinas podem variar em suas definições e portanto, algumas podem ser mais limitadas do que outras pelo simples motivo de que algumas máquinas podem ser criadas para resolver um problema específico, sendo então projetada para lidar apenas com os elementos relevantes para obter a solução. Evidentemente, máquinas mais complexas podem ser criadas para resolver um grande leque de problemas, compostas por conjuntos mais ricos de instruções, registradores e modelos de memória. Isso remete à ideia de máquinas de propósito geral, capazes de resolver uma gama de problemas.

Tal conceito pode então envolver a ideia de microprocessadores virtuais, ainda não implementados em hardware. Uma máquina abstrata implementada como uma simulação de software, ou interpretada de alguma forma, pode ainda ser denominada "Máquina Virtual".

Assim, as máquinas abstratas são verdadeiros computadores definidos em papel, sendo equivalentes, do ponto de vista lógico, a qualquer computador eletrônico digital. são simultaneamente simples e poderosas, constituindo-se em importante instrumento de apoio à pesquisa na teoria da computação, pois embora não sejam modelos de simples construção por exigência do formalismo exigido e tenham velocidade de execução bastante reduzida, possuem grande utilidade pedagógica; através delas, o aluno pode e aprender como funciona um computador de maneira interativa, compreendendo suas capacidades e limitações.

A máquina de Turing foi proposta por Alan Turing em 1936, tratando-se de uma máquina teórica com a capacidade de reconhecer linguagens e fazer cálculos. Ela contém uma ou mais fitas, uma unidade de controle e um programa. A fita funciona como uma folha de papel onde a máquina escreve, lê e apaga de acordo com o que o programa descreve, a unidade de controle é responsável por controlar a posição do ponteiro que determina qual posição da fita deve ser usada, e por fim o programa que determina o que deve ser escrito, lido e apagado para atingir o resultado da operação. Por ser uma máquina teórica, ela contém quantos recursos forem necessários, seja o tamanho e quantidade de fitas, seja a quantidade de células de armazenamento ou capacidade de processamento.

Alan Turing ao idealizar a máquina de Turing (MT) pensou em uma forma de representar uma pessoa com uma folha de papel ou fita, organizada em quadrados, um instrumento de escrita e um apagador, como mostra a Figura 1. Supondo que a pessoa teria uma fita com os dados iniciais do problema, podemos entender que as operações básicas a máquina pode realizar (Menezes;Diverio, 2011):

- Ler o símbolo de um quadrado
- Alterar o símbolo em um quadrado
- Mover os olhos para outro quadrado

Quando a pessoa encontrar um resultado satisfatório, os cálculos são encerrados. Para entender e definir melhor o procedimento, vamos aceitar as seguintes hipóteses:

- A fita é infinita e organizada em quadrados, não é necessário visualizar a fita como uma folha de papel finita.
- O conjunto de símbolos devem ser finitos, se for necessário representar informações mais complexas, deve ser usada sequências de símbolos.
- O conjunto de estados possíveis da mente da pessoa deve ser finito, tendo pelo menos um estado inicial para o início do processo e o estado final para o fim dos cálculos.
- A pessoa terá a cada momento apenas o estado presente e um símbolo que estará observando.
- A pessoa poderá alterar apenas um símbolo por vez e mover sua atenção para um quadrado adjacente por vez.

Observando estas definições e regras, podemos observar o comportamento da pessoa como uma máquina com as partes definidas como mostra a figura 1.

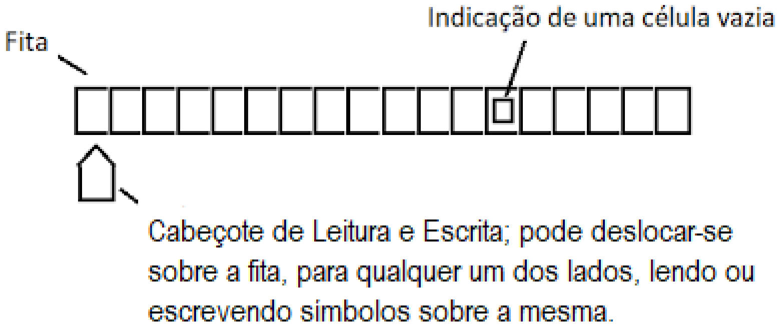

Figura 1 - Abstração de uma Máquina de Turing. Fonte: Autor.

- Fita: Usada para leitura, escrita e memória de trabalho
- Unidade de Controle: Determina o estado da máquina, contendo uma unidade de leitura e escrita que se desloca uma célula por vez chamada de cabeça da fita.
- Programa: também chamado de função de transição, é a função que determina os estados da máquina, comanda as leituras, escritas e o sentido da movimentação da cabeça da fita.

Como já determinamos anteriormente, a fita é infinita, mas apenas no sentido de leitura (a direita do início), iniciando assim na primeira célula. Cada célula contém um símbolo pertencente ao alfabeto de entrada, ao alfabeto auxiliar, contém o símbolo de "branco" ou contém o símbolo de início da fita. A unidade de controle contém um número finito e pré-determinado de estados possíveis e a cabeça de leitura lê, escreve ou se move de acordo com o que o programa descreve (Menezes;Diverio, 2011):.

A definição formal da MT é definida pela 8-upla:

$$(Q,\sum,\Gamma,\delta,q_o,q_{aceita}, q_{rejeita})$$

onde:

- Q = Conjunto de estados
- $\sum$ = Alfabeto de entrada (não contém o símbolo branco "•")
- Γ = O alfabeto da fita, onde $\{\bullet\} \in \Gamma$ e $\sum \subseteq \Gamma$
- $\delta = Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \Delta$
- q_o = Estado inicial $q_o \in Q$
- q_{aceita} = Estado de rejeição $\in Q$
- $q_{rejeita}$ = Estado de aceitação $\in Q$
- $\Delta = \{\leftarrow, - , \rightarrow;\}$ indica os sentidos de movimentação da cabeça da fita, sendo para esquerda, sem movimento e direita respectivamente.

O símbolo de início da fita sempre ocorre apenas uma vez e na primeira célula (mais à esquerda da fita), a função programa irá considerar o estado corrente da fita e o símbolo lido da fita para determinar um novo estado da máquina, símbolo a ser gravado e o sentido de movimento da cabeça da fita. Sendo assim observamos que:

(Estado corrente, símbolo lido) = (Novo estado, Símbolo gravado, Sentido do movimento)

O processamento de uma MT para uma palavra de entrada w consiste na aplicação da função programa repetitivamente até atingir a condição de parada ou entrar em loop. Na sua parada pode-se obter como resultado do processamento o estado da máquina ou o que está escrito na fita, no caso do estado, pode-se chegar numa parada aceitando a palavra w ou rejeitando-a. as condições de parada são:

- Estado final: a máquina chega ao seu estado final e a palavra é aceita.
- Função indefinida: o programa não tem uma ação para o símbolo lido, a máquina para e a palavra é rejeitada.
- Movimento invalido: A ação do programa define um deslocamento à esquerda quando a cabeça da fita está na célula mais à esquerda, a máquina para e a palavra é rejeitada.

1.3 Tabuada

A palavra "tabuada" deriva de "tábua"; na Grécia antiga, tábuas de argila ou pedra eram utilizadas para fazer cálculos.

A tabuada é uma representação em forma tabular utilizada para efetuar cálculos das operações matemáticas básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Ela manipula os dez algarismos: 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, distribuídos em colunas e linhas, segundo com o tipo de cálculo a ser realizado. Geralmente, costuma-se referenciar o nome da operação ao número de base envolvido no cálculo, desde que esse é feito a partir do número que será utilizado em todas as operações, como por exemplo: "tabuada de três", "tabuada de cinco", etc (Oliveira, 202).

Nesse trabalho, a tabuada da soma será implementada em Máquinas de Turing; as demais operações básicas não serão incluídas, amas a metodologia de desenvolvimento é muito similar e pode ser extrapolada a partir das definidas para a adição

1.3.1 Tabuada – Adição

A adição é a operação matemática mais básica e pode ser feita com qualquer tipo de número. Porém, em um primeiro momento, são usados apenas números inteiros e maiores que zero. As demais operações algébricas básicas podem ser definidas a partir da adição. (Novaes, 2022)

A operação de adição tem a finalidade de obter um número através de outros dois ou mais números. Por isso, quando somamos dois números, na verdade, estamos procurando um terceiro.

A adição consiste em adicionar dois ou mais números naturais, conhecido como parcelas, que produz em todos os casos um único resultado que chamamos soma ou total.

O sinal indicativo é o sinal mais (+). Este é o operador aritmético da adição.

Na adição, os números antes do sinal de igual são denominam-se parcelas, enquanto o número depois da igualdade é a soma ou o total da adição; exemplo:

7 + 2 = 9

O número 7 e 2 no exemplo acima são as parcelas**,** o sinal de mais (+) de adição, e o número 9 de soma ou total.

A tabuada de adição pode ser representada pelas 10 tabelas da figura 2; elas apresentam o resultado da soma entre dois números naturais de 1 dígito. O resultado pode ter 1 ou 2 dígitos.

Tabuada da Adição				
0 + 0 = 0	1 + 0 = 1	2 + 0 = 2	3 + 0 = 3	4 + 0 = 4
0 + 1 = 1	1 + 1 = 2	2 + 1 = 3	3 + 1 = 4	4 + 1 = 5
0 + 2 = 2	1 + 2 = 3	2 + 2 = 4	3 + 2 = 5	4 + 2 = 6
0 + 3 = 3	1 + 3 = 4	2 + 3 = 5	3 + 3 = 6	4 + 3 = 7
0 + 4 = 4	1 + 4 = 5	2 + 4 = 6	3 + 4 = 7	4 + 4 = 8
0 + 5 = 5	1 + 5 = 6	2 + 5 = 7	3 + 5 = 8	4 + 5 = 9
0 + 6 = 6	1 + 6 = 7	2 + 6 = 8	3 + 6 = 9	4 + 6 = 10
0 + 7 = 7	1 + 7 = 8	2 + 7 = 9	3 + 7 = 10	4 + 7 = 11
0 + 8 = 8	1 + 8 = 9	2 + 8 = 10	3 + 8 = 11	4 + 8 = 12
0 + 9 = 9	1 + 9 = 10	2 + 9 = 11	3 + 9 = 12	4 + 9 = 13
5 + 0 = 5	6 + 0 = 6	7 + 0 = 7	8 + 0 = 8	9 + 0 = 9
5 + 1 = 6	6 + 1 = 7	7 + 1 = 8	8 + 1 = 9	9 + 1 = 10
5 + 2 = 7	6 + 2 = 8	7 + 2 = 9	8 + 2 = 10	9 + 2 = 11
5 + 3 = 8	6 + 3 = 9	7 + 3 = 10	8 + 3 = 11	9 + 3 = 12
5 + 4 = 9	6 + 4 = 10	7 + 4 = 11	8 + 4 = 12	9 + 4 = 13
5 + 5 = 10	6 + 5 = 11	7 + 5 = 12	8 + 5 = 13	9 + 5 = 14
5 + 6 = 11	6 + 6 = 12	7 + 6 = 13	8 + 6 = 14	9 + 6 = 15
5 + 7 = 12	6 + 7 = 13	7 + 7 = 14	8 + 7 = 15	9 + 7 = 16
5 + 8 = 13	6 + 8 = 14	7 + 8 = 15	8 + 8 = 16	9 + 8 = 17
5 + 9 = 14	6 + 9 = 15	7 + 9 = 16	8 + 9 = 17	9 + 9 = 18

Figura 2 - Tabuada de Adição Fonte: Cláudia Martins em https://atividadesprofessores.com.br/tabuada-para-imprimir/amp/

1.4 Objetivos do Trabalho

O Objetivo geral é a construção de uma Máquina de Turing para realizar operações algébricas básicas;

Objetivos específicos:

- Construir Máquinas de Turing para emular a tabuada, para a operação de soma.
- Construir uma MT capaz de realizar o algoritmo da soma, envolvendo números de vários dígitos.

2 Desenvolvimento

2.1 Metodologia de desenvolvimento

A hipótese subjacente deste trabalho é mostrar que é possível construir uma Máquina de Turing que pode ser utilizada para executar algoritmos algébricos como a soma de dois números inteiros positivos quaisquer, usando para isso outras Máquina de

Turing para resolver operações mais simples, emulando a forma clássica de soma de dois números aprendida nos cursos fundamentais.

O desenvolvimento deste trabalho está dividido nas seguintes fases:

3 Propor uma arquitetura de MT denominada **MT_TabS** para efetuar operações aritméticas básicas, no caso, a soma de dois números naturais (tabuada da soma).
4 Propor uma arquitetura de MT denominada **MT_S** capaz de somar dois números de n dígitos, utilizando para isso, somas realizadas pela **MT_TabS**.
5 Definir o funcionamento dessas estruturas a partir de exemplos.

5.1 Estrutura de uma MT para cálculos aritméticos simples – MT_TabS.

Seja MT_TabS (Máquina de Turing da Tabuada da Soma), uma MT capaz de emular a tabuada de soma, conforme mostram as tabelas da figura 2. A estrutura mostrada na figura 3 é idealizada para suportar essas operações:

D_1	D_2	S_2	S_1	□	□	□	□	□	....

Figura 3 - Configuração da Fita da MT_TabS

Onde:

- D_1 – Primeiro dígito da soma;
- D_2 – Segundo dígito da soma;
- S_2 – Resultado da soma - dígito de mais alta ordem (vai-um);
- S_1 – Resultado da soma - dígito de mais baixa ordem.

A figura 4 apresenta o conteúdo final da fita da MT_TabS, após a operação 7+9.

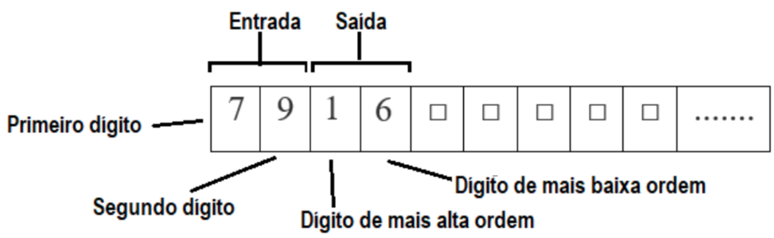

Figura 4 - Configuração da MT_TabS para a entrada 7,9

5.2 Definição das tabuadas de soma MT_TabS.

A descrição tabular de uma MT somadora simples (tabuada), denominada MT_TabS é como apresentada na Tabela 1, onde são mostradas as funções programas que definem as dez MTs necessárias para a soma de dois números de um dígito.

Para efeito de economia de espaço, apresenta-se na figura apenas quatro MTabS,a as da soma dos dígitos 0,1,8 e 9; as duas iniciais e as duas finais. As demais podem ser facilmente desenvolvidas a partir dessas, por similaridade.

As MT_TabS podem ser invocadas a partir de instruções de chamada, cujo formato é apresentado na seção 2.3.

MT para soma de 0 + {0..9}						
Entrada			Saída			msg
Q	Γ		Q	Γ	Δ	
q_0	0		q_1	0	→	Li 0
q_1	0		q_2	0	→	Li 00(soma 0+0)
q_1	1		q_3	1	→	Li 01 (soma 0+1)
q_1	2		q_4	2	→	Li 02 (soma 0+2)
q_1	3		q_5	3	→	Li 03 (soma 0+3)
q_1	4		q_6	4	→	Li 04 (soma 0+4)
q_1	5		q_7	5	→	Li 05 (soma 0+5)
q_1	6		q_8	6	→	Li 06 (soma 0+6)
q_1	7		q_9	7	→	Li 07 (soma 0+7)
q_1	8		q_{10}	8	→	Li 08 (soma 0+8)
q_1	9		q_{11}	9	→	Li 09 (soma 0+9)
q_2	□		q_{2a}	0	→	(0+0) Imprime 00
q_{2a}	□		q_f	0	→	
q_3	□		q_{3a}	0	→	(0+1) Imprime 01
q_{3a}	□		q_f	1	-	
q_4	□		q_{3a}	0	→	(0+2) Imprime 02
q_{4a}	□	→	q_f	2	-	
q_5	□		q_{5a}	0	→	(0+3) Imprime 03
q_{5a}	□		q_f	3	-	
q_6	□		q_{6a}	0	→	(0+4) Imprime 04
q_{6a}	□		q_f	4	-	
q_7	□		q_{7a}	0	→	(0+5) Imprime 05
q_{7a}	□		q_f	5	-	
q_8	□		q_{8a}	0	→	(0+6) Imprime 06
q_{8a}	□		q_f	6	-	
q_9	□		q_{9a}	0	→	(0+7) Imprime 07
q_{9a}	□		q_f	7	-	
q_{10}	□		q_{10a}	0	→	(0+8) Imprime 08
q_{10a}	□		q_f	8	-	
q_{10}	□		q_{10a}	0	→	(0+9) Imprime 09
q_{10a}	□		q_f	9	-	

MT para soma de 1 + {0..9}						
Entrada			Saída			msg
Q	Γ		Q	Γ	Δ	
q_0	1		q_1	1	→	Li 1
q_1	0		q_2	0	→	Li 10(soma 1+0)
q_1	1		q_3	1	→	Li 11 (soma 1+1)
q_1	2		q_4	2	→	Li 12 (soma 1+2)
q_1	3		q_5	3	→	Li 13 (soma 1+3)
q_1	4		q_6	4	→	Li 14 (soma 1+4)
q_1	5		q_7	5	→	Li 15 (soma 1+5)
q_1	6		q_8	6	→	Li 16 (soma 1+6)
q_1	7		q_9	7	→	Li 17 (soma 1+7)
q_1	8		q_{10}	8	→	Li 18 (soma 1+8)
q_1	9		q_{11}	9	→	Li 19 (soma 1+9)
q_2	□		q_{2a}	0	→	(1+0) Imprime 01
q_{2a}	□		q_f	1	-	
q_3	□		q_{3a}	0	→	(1+1) Imprime 02
q_{3a}	□		q_f	2	-	
q_4	□		q_{3a}	0	→	(1+2) Imprime 03
q_{4a}	□	→	q_f	3	-	
q_5	□		q_{5a}	0	→	(1+3) Imprime 04
q_{5a}	□		q_f	4	-	
q_6	□		q_{6a}	0	→	(1+4) Imprime 05
q_{6a}	□		q_f	5	-	
q_7	□		q_{7a}	0	→	(1+5) Imprime 06
q_{7a}	□		q_f	6	-	
q_8	□		q_{8a}	0	→	(1+6) Imprime 07
q_{8a}	□		q_f	7	-	
q_9	□		q_{9a}	0	→	(1+7) Imprime 08
q_{9a}	□		q_f	8	-	
q_{10}	□		q_{10a}	0	→	(1+8) Imprime 09
q_{10a}	□		q_f	9	-	
q_{10}	□		q_{10a}	1	→	(1+9) Imprime 10
q_{10a}	□		q_f	0	-	

MT para soma de 8 + {0..9}						
Entrada			Saída			Msg
Q	Γ		Q	Γ	Δ	
q_0	8		q_1	8	→	Li 8
q_1	0		q_2	0	→	Li 80 (soma 8+0)
q_1	1		q_3	1	→	Li 81 (soma 8+1)
q_1	2		q_4	2	→	Li 82 (soma 8+2)
q_1	3		q_5	3	→	Li 83 (soma 8+3)
q_1	4		q_6	4	→	Li 84 (soma 8+4)
q_1	5		q_7	5	→	Li 85 (soma 8+5)
q_1	6		q_8	6	→	Li 86 (soma 8+6)
q_1	7		q_9	7	→	Li 87 (soma 8+7)
q_1	8		q_{10}	8	→	Li 88 (soma 8+8)
q_1	9		q_{11}	9	→	Li 89 (soma 8+9)
q_2	□		q_{2a}	0	→	(8+0) Imprime 08
q_{2a}	□		q_f	8	-	
q_3	□		q_{3a}	0	→	(8+1) Imprime 09
q_{3a}	□		q_f	9	-	
q_4	□		q_{3a}	1	→	(8+2) Imprime 10
q_{4a}	□	→	q_f	0	-	
q_5	□		q_{5a}	1	→	(8+3) Imprime 11
q_{5a}	□		q_f	1	-	
q_6	□		q_{6a}	1	→	(8+4) Imprime 12
q_{6a}	□		q_f	2	-	
q_7	□		q_{7a}	1	→	(8+5) Imprime 13
q_{7a}	□		q_f	3	-	
q_8	□		q_{8a}	1	→	(8+6) Imprime 14
q_{8a}	□		q_f	4	-	
q_9	□		q_{9a}	1	→	(8+7) Imprime 15
q_{9a}	□		q_f	5	-	
q_{10}	□		q_{10a}	1	→	(8+8) Imprime 16
q_{10a}	□		q_f	6	-	
q_{10}	□		q_{10a}	1	→	(8+9) Imprime 17
q_{10a}	□		q_f	7	-	

MT para soma de 9 + {0..9}						
Entrada			Saída			Msg
Q	Γ		Q	Γ	Δ	
q_0	9		q_1	9	→	Li 9
q_1	0		q_2	0	→	Li 90(soma 9+0)
q_1	1		q_3	1	→	Li 91 (soma 9+1)
q_1	2		q_4	2	→	Li 92 (soma 9+2)
q_1	3		q_5	3	→	Li 93 (soma 9+3)
q_1	4		q_6	4	→	Li 94 (soma 9+4)
q_1	5		q_7	5	→	Li 95 (soma 9+5)
q_1	6		q_8	6	→	Li 96 (soma 9+6)
q_1	7		q_9	7	→	Li 97 (soma 9+7)
q_1	8		q_{10}	8	→	Li 98 (soma 9+8)
q_1	9		q_{11}	9	→	Li 99 (soma 9+9)
q_2	□		q_{2a}	0	→	(9+0) Imprime 09
q_{2a}	□		q_f	9	-	
q_3	□		q_{3a}	1	→	(9+1) Imprime 10
q_{3a}	□		q_f	0	-	
q_4	□		q_{3a}	1	→	(9+2) Imprime 11
q_{4a}	□	→	q_f	1	-	
q_5	□		q_{5a}	1	→	(9+3) Imprime 12
q_{5a}	□		q_f	2	-	
q_6	□		q_{6a}	1	→	(9+4) Imprime 13
q_{6a}	□		q_f	3	-	
q_7	□		q_{7a}	1	→	(9+5) Imprime 14
q_{7a}	□		q_f	4	-	
q_8	□		q_{8a}	1	→	(9+6) Imprime 15
q_{8a}	□		q_f	5	-	
q_9	□		q_{9a}	1	→	(9+7) Imprime 16
q_{9a}	□		q_f	6	-	
q_{10}	□		q_{10a}	1	→	(9+8) Imprime 17
q_{10a}	□		q_f	7	-	
q_{10}	□		q_{10a}	1	→	(9+9) Imprime 18
q_{10a}	□		q_f	8	-	

Tabela 1 - MTs para tabuadas de soma simples (MTabS)

5.3 Chamadas às tabuadas (MT_TabS):

As chamadas às MT tabuadas são ativadas como resultado da entrada de um estado; quanto a MT Somadora entra em um determinado estado q_i, uma MT Tabuada é ativada, e o conteúdo das respectivas fitas é trocado como uma passagem de parâmetros. A função de chamada possui o seguinte aspecto:

MT_TabS(A,B,X,Y).

Onde:

- A – Primeira Parcela a somar, indica qual dentre as 10 MTabS será chamada.
- B – Segunda Parcela a somar
- X – Variável que será instanciada com o dígito mais significativo (Carry_Out) da soma A + B, retornado pela tabuada MT_TabS.
- Y - Variável que será instanciada com o dígito menos significativo da soma A + B, retornado pela tabuada MT_TabS.

Exemplo: Suponha que se queira efetuar 9+5; usando uma chamada às MT_TabS:

MT_TabS(9,5,X,Y)

Instâncias resultantes:

- X Dígito mais significativo do resultado

Y Dígito menos significativo do resultado

A seguir será mostrado o funcionamento de uma máquina de Turing Multifitas.

5.4 Máquinas de Turing Multifitas Somadora (MT-S):

Para realizar a soma de duas parcelas, uma Máquina de Turing com 5 fitas foi sugerida (figura 5); esta máquina não realizará funções aritméticas, mas utilizará a sua estrutura para facilitar a aplicação do algoritmo de soma de dois números inseridos nas suas duas primeiras fitas, que se realiza com as somas simples de cada dois últimos dígitos desses números através de chamadas às MTs tabuadas descritas acima. Assim, esta MT somadora tem a função de invocar as MTs Tabuadas de soma (MT-TabS) e se tornam muito parecidas com uma máquina de registros.

5.4.1 Configuração da MT-S:

A MT_S apresenta a seguinte configuração:

Sendo i={1,2,3,4,5}...

- Γ_i, são as fitas; o símbolo “□” nas células representam espaços vazios.
- Δ, representa o deslocamento síncrono dos cabeçotes; todos se movimentam em conjunto.

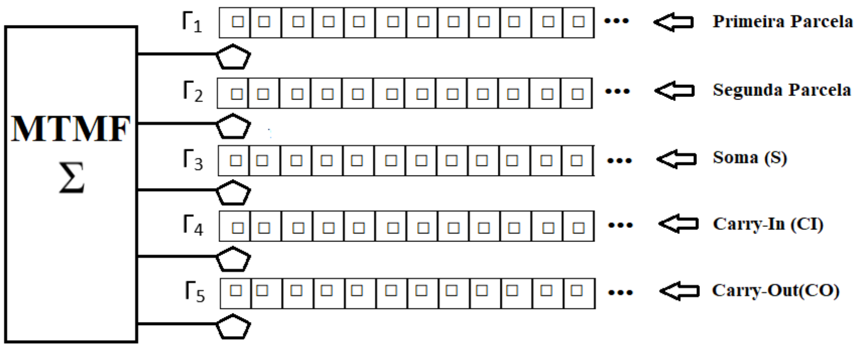

Figura 5 - MT MultiFitas sugerida para a Somadora – Fonte: Autor

A carga da fita é uma operação realizada pelo operador da seguinte forma:

- Sendo P1 e P2 as parcelas a serem somadas, o número de dígitos de P1 será sempre igual ou maior ao do P2; ou seja: $|P1| \geq |P2|$.
- Ao inserir P1 em Γ_1, a célula inicial deverá ser deslocada em uma posição para a direita.
- Ao inserir P2 em Γ_2, o último dígito (o de menor significância) deverá estar alinhado justamente abaixo do último dígito de P1.
- Na célula de mesma altura dos dígitos menos significativos Γ_4, a fita deverá receber o valor 0, indicando que na primeira soma, inexiste o Carry-In.
- Na primeira célula de cada fita, um marcador de início (#) é inserido.

A função programa da MT-S é:

$$\boldsymbol{\delta = Q \text{ X } [\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5] \quad Q \text{ X } [\ \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5\ ], \Delta.}$$

5.4.2 Interpretação da MT-S:

Para cada estado Q, com os valores da fita lidos em $\{[\boldsymbol{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5}\}$, Muda-se para um novo estado Q (que pode ser o mesmo) e movimenta-se os cabeçotes $\boldsymbol{\Delta}$: $\{\rightarrow, \_ , \leftarrow\}$; ou seja, uma posição à esquerda, Não move, uma posição à direita, respectivamente.

Uma vez definida a configuração da máquina, pode ser descrita a sua operação, que se realiza inicialmente, deslocando os cabeçotes para o dígito menos significativo.

Para exemplificar uma carga inicial da MT-S, considere a soma das parcelas P1= 98 e P2 = 77. O aspecto da MT-S será então:

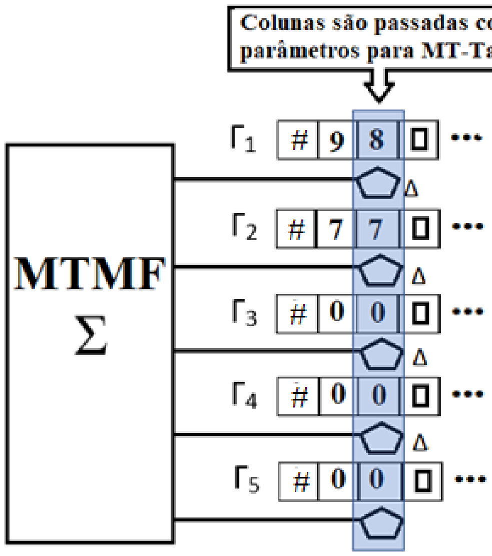

Figura 6 - As MT Tabuadas recebem como entrada, valores das colunas da MT Multifita Somadora - Fonte: Autor.

O algoritmo de soma se dará tomando os valores das colunas (figura 6), a partir daquela que contém os dígitos menos significativos das parcelas, invocando as MT-Tabas (Máquinas de Turing para Tabuada de Soma) da seguinte maneira:

Considerando uma MT-S desenhada para somar números de 2 dígitos, com um dígito extra para o Carry-out, teríamos após a carga dos números, o aspecto mostrado na tabela 2:

ENTRADA								**SAÍDA**	**MT_TabS(P1,P2,X,Y)**							
Q	**X**	**Γ_1**	**Γ_2**	**Γ_3**	**Γ_4**	**Γ_5**		**Q**	**X**	**Γ_1**	**Γ_2**	**Γ_3**	**Γ_4**	**Γ_5**	**Δ**
		#	#	#	#	#									
q_i		**9**	**7**	**0**	**0**	**0**									
		8	**7**	**0**	**0**	**0**									
:	:	:						:	:	:					:

Tabela 2 - MT Somadora

Estamos considerando que o estado inicial da MT_S já é iniciado com os cabeçotes apontando para a coluna de dígitos menos significativos.

C_2	C_1	C_0	Fita	Vlr
#	**9**	**8**	Γ_1	P1
#	**7**	**7**	Γ_2	P2
#	0	0	Γ_3	S
#	0	0	Γ_4	Carry_in
#	0	0	Γ_5	Carry_out

Tabela 3 - Valores na MTs (tabela simplificada)

A tabela 3 reduz a notação da MT_S para realçar o efeito que simula o algoritmo da soma

No estado inicial, a última coluna (realçada) será trabalhada; a primeira soma deve considerar o Carry_in, mesmo para o valor inicial, que sabemos ser (zero), para efeito procedimental. Assim, esta chamada inicial seria:

$$q_i \quad \mathbf{MT\_TabS(\Gamma_1, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_1);}$$

Deve ser observado que o valor passado para a tabuada de soma é inicialmente P1 ($\Gamma_{1)}$ + Carry_in (Γ_4), com o resultado (dígito menos significativo) sobrescrito em Γ_1 e havendo Carry_out, este irá para Γ_5.

ENTRADA								**SAÍDA** **MT_TabS(P1,P2,X,Y)**							
Q	**X**	**Γ_1**	**Γ_2**	**Γ_3**	**Γ_4**	**Γ_5**		**Q**	**X**	**Γ_1**	**Γ_2**	**Γ_3**	**Γ_4**	**Γ_5**	**Δ**
q_i		#	#	#	#	#		**q_{i+1}**		#	#	#	#	#	
		9	7	0	0	0				9	7	0	0	0	←
		8	7	0	0	0				8	7	0	0	0	
q_{i+1}		#	#	#	#	#									
		9	7	0	0	0									
		8	7	0	0	0									
:	:	:						:	:	:					:

Tabela 4 - MT Somadora - Aspecto incial

No exemplo, não haverá nenhuma modificação, pois os valores retornados foram os mesmos; as células referenciadas na operação estão em vermelho (tabelas 4 e 5)

C_2	C_1	C_0	Fita	Vlr
#	**9**	**8**	Γ_1	P1
#	**7**	**7**	Γ_2	P2
#	0	0	Γ_3	S
#	0	**0**	Γ_4	Carry_in
#	0	**0**	Γ_5	Carry_out

Tabela 5 - Efeito da primeira soma.

Agora, uma segunda soma na mesma coluna, envolverá os valore de P1($\Gamma_{1)}$ e P2($\Gamma_{2)}$, da seguinte maneira:

$$q_{i+1} \quad \mathbf{MT\_TabS(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_5, \Gamma_3);}$$

Quando o Carry_out recebe o símbolo “1”, uma operação adicional é realizada no final, mudando o apontador do cabeçote para a coluna imediatamente anterior e inserindo “1” no Carry_in.

A MT somadora apresentará agora o aspecto mostrado na tabela 6.

ENTRADA							SAÍDA	MT_TabS(P1,P2,X,Y)						
Q	X	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5	Q	X	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5	Δ
q_i		# 9 8	# 7 7	# 0 0	# 0 0	# 0 0	q_{i+1}		# 9 8	# 7 7	# 0 0	# 0 0	# 0 0	←
q_{i+1}		# 9 8	# 7 7	# 0 0	# 0 0	# 0 0	q_{i+2}		# 9 8	# 7 7	# 0 5	# 0 0	# 0 1	←
:	:	:					:	:	:					:

Tabela 6 - Efeito resultante da segunda operação

Nesse ponto, as parcelas foram somadas considerando o "vem_um"; o resultado da soma é colocado da seguinte forma: O dígito menos significativo é $S(\Gamma_3)$ e se houver um Carry_out,, o valor vai para Γ_5. Observe a mudança no exemplo na tabela 7:

C_2	C_1	C_0	Fita	Vlr
#	**9**	**8**	Γ_1	P1
#	**7**	**7**	Γ_2	P2
#	0	**5**	Γ_3	S
#	0	**0**	Γ_4	Carry_in
#	0	**1**	Γ_5	Carry_out

Tabela 7 - Tabela reduzida da MT somadora após a operação da soma na coluna C0

A tabela 8 apresenta a sequência de ativação de estados para a MT-S; nela, cada estado abrange todas as fitas. Cada estado diferente indica a soma de uma das colunas da MT-S.

ENTRADA							SAÍDA	MT_TabS(P1,P2,X,Y)						
Q	X	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5	Q	X	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5	Δ
q_i		# 9 8	# 7 7	# 0 0	# 0 0	# 0 0	q_{i+1}		# 9 8	# 7 7	# 0 0	# 0 0	# 0 0	←
q_{i+1}		# 9 8	# 7 7	# 0 0	# 0 0	# 0 0	q_{i+2}		# 9 8	# 7 7	# 0 5	# 0 0	# 0 1	←
q_{i+2}		# 9 8	# 7 7	# 0 5	# 1 0	# 0 1	q_{i+2}							
:	:	:					:	:	:					:

Tabela 8 - MT Somadora registrando a soma dos dígitos menos significativos.

O aspecto das colunas da soma é mostrado na tabela 9:

C_2	C_1	C_0	Fita	Vlr
#	**9**	**8**	Γ_1	P1
#	**7**	**7**	Γ_2	P2
#	0	**5**	Γ_3	S

#	1	**0**	Γ_4	Carry_in
#	0	**1**	Γ_5	Carry_out

Tabela 9 - Resultado da soma dos Dígitos Menos Significativos com Vai-um (Carry-Out).

A partir de então, inicia-se uma nova chamada à MT_TabS, como feita anteriormente, e o processo se repete até que a MT_S encontre Γ_1= #. Em seguida, apenas as colunas da soma são apresentadas (tabelas 10 e 11):

MT_TabS (Γ_1, Γ_4, Γ_5, Γ_1);

C_2	C_1	C_0	Fita	Vlr
#	**9**	**8**	Γ_1	P1
#	**7**	**7**	Γ_2	P2
#	**0**	**5**	Γ_3	S
#	1	**0**	Γ_4	Carry_in
#	0	**1**	Γ_5	Carry_out

Tabela 10 - Sequência da soma na coluna C1.

MT_TabS(Γ_1, Γ_2, Γ_5, Γ_3);

C_2	C_1	C_0	Fita	Vlr
#	**0**	**8**	Γ_1	P1
#	**7**	**7**	Γ_2	P2
#	**7**	**5**	Γ_3	S
#	1	**0**	Γ_4	Carry_in
#	1	**1**	Γ_5	Carry_out

Tabela 11 - Sequência da soma na coluna C1.

Finalmente, ao deslocar os cabeçotes à esquerda mais uma vez, encontra-se **Γ_1=** #; o carry_in é deslocado diretamente para o $\Gamma_{3,}$ terminando a soma, cujo resultado reside agora nessa fita (tabela 12).

C_2	C_1	C_0	Fita	Vlr
#	**0**	**8**	Γ_1	P1
#	**7**	**7**	Γ_2	P2
1	**7**	**5**	Γ_3	S
1	1	**0**	Γ_4	Carry_in
#	1	**1**	Γ_5	Carry_out

Tabela 12 - Aspecto final das colunas da Somadora.

Observando as alternâncias das funções de chamadas às tabuadas, percebe-se na tabela 13 que surge um padrão de funcionamento cíclico:

Ciclo	Q	Função	Descrição
1	q_i	MT_TabS(Γ_1, Γ_4, Γ_5, Γ_1);	Soma P1 ao Carry_in
	q_{i+1}	MT_TabS(Γ_1, Γ_2, Γ_5, Γ_3);	Soma P1 a P2, Atualiza Cary_Out
	q_{i+2}	(Γ_5 =1 ← Γ_5 =1)	Se Carry_Out = 1, Desloca e faz Carry_In = 1
2	q_{i+2}	MT_TabS(Γ_1, Γ_4, Γ_5, Γ_1);	Soma P1 ao Carry_in
	q_{i+3}	MT_TabS(Γ_1, Γ_2, Γ_5, Γ_3);	Soma P1 a P2, Atualiza Cary_Out
	q_{i+4}	(Γ_5 =1 ← Γ_5 =1)	Se Carry_Out = 1, Desloca e faz Carry_In = 1
3	q_{i+5}	Γ_1 = #,	faz Γ_3 = Carry_in, TERMINA A EXECUÇÃO

Tabela 13 - Resumo das operações da MT Somadora;

6 Conclusão

Como podemos observar, a máquina de Turing é capaz de traduzir a operação de soma com múltiplos números. Tendo em mente que a soma é a operação mais básica, podemos concluir que é possível utilizar uma máquina de Turing para calcular operações mais complexas com um alfabeto composto por mais símbolos.

Contudo, devemos lembrar que as MTs não efetivamente "calculam" a partir dos dos números na entrada, na verdade as MTs identificam símbolos determinados pelo alfabeto e mudam de estado de acordo com o que a função programa determinar. Dito isto, podemos representar diversas operações matemáticas, desde que ela seja representada seguindo as regras de funcionamento de uma MT.

Portanto, podemos ter estas MTs definidas neste artigo como uma base para criação de MTs que efetuem diferentes operações e tenham funcionalidades mais complexas, podendo ou não chamar algumas das MTs definidas aqui como parte das suas operações.

7 Bibliografia

MACURA, Wiktor K. **Abstract Machine**. *Wolfram MathWorld* (em inglês). Wolfram Research, Inc. Disponível na URL https://mathworld.wolfram.com /AbstractMachine.html, acessado em 15 de Abril de 2022.

MENEZES, Paulo Blauth; DIVERIO, Taiarajú Asmuz: **Teoria da Computação - Máquinas Universais e Computabilidade:** Volume 5 Bookman; 3ª edição – 2011.

NETO, João José: **A Teoria da Computação e o profissional de informática.** Revista de Computação e Tecnologia da PUC-SP Disponível na URL: https://revistas.pucsp.br/index.php/ReCET/issue/view/223, acessada em 28 de Abril de 2022.

NOVAES, Jean Carlos: **Matemática Básica**, Disponível na URL: https://matematicabasica.net/tabuada/ Acesso em 04 de abril de 2022.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. "**Tabuada**"; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/tabuada.htm. Acesso em 11 de abril de 2022.

SIPSER, Michael: **Introdução à Teoria da Computação**. Cengage Learning; 1ª edição - dezembro 2005.