

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Pontos Fechados no Esquema de Hilbert de
Curvas $\text{Hilb}^{at+b}\mathbb{P}^3$ com
 $(a, b) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

Everson Silva Cabral

João Pessoa – PB
Janeiro de 2023

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Pontos Fechados no Esquema de Hilbert de
Curvas $\text{Hilb}^{at+b}\mathbb{P}^3$ com
 $(a, b) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

por

Everson Silva Cabral

sob a orientação de

Prof^ª. Dr^ª. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

João Pessoa – PB
Julho de 2022

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C117p Cabral, Everson Silva.

Pontos fechados no esquema de Hilbert de curvas Hilb
 $at+bP^3$ com (a,b) em $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ /
Everson Silva Cabral. - João Pessoa, 2023.
92 f. : il.

Orientação: Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Esquemas. 3. Teorema de
Hilbert-Serre. 4. Espaços projetivos. I. Arancibia,
Jacqueline Fabiola Rojas. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Pontos Fechados no Esquema de Hilbert de Curvas

$$\text{Hilb}^{at+b}\mathbb{P}^3 \text{ com} \\ (a, b) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

por

Everson Silva Cabral

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em: 28 de fevereiro de 2023

Banca Examinadora:



Documento assinado digitalmente

JACQUELINE FABIOLA ROJAS ARANCIBIA

Data: 20/06/2023 09:34:52-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof^a. Dr^a. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia – UFPB
(Orientadora)

Documento assinado digitalmente



CLETO BRASILEIRO MIRANDA NETO

Data: 14/06/2023 10:58:25-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto – UFPB
(Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente



RODRIGO JOSE GONDIM NEVES

Data: 20/06/2023 08:49:02-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Rodrigo José Gondim Neves – UFRPE
(Examinador Externo)

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é fazer uma descrição explícita dos pontos fechados nos esquemas de Hilbert de Curvas $\text{Hilb}^{at+b}\mathbb{P}^3$ com $(a, b) \in \{(1, i), (2, i)\}_{i=1}^2$. Para isso, fazemos uma breve revisão teórica sobre módulos, módulos graduados e conceitos afins, para demonstrarmos o Teorema de Hilbert-Serre, obtendo como corolário a existência do polinômio de Hilbert. A seguir, damos umas pinceladas na teoria de esquemas, passando logo para o conceito de representação de Gotzmann (e número de Gotzmann), que utilizamos para indicar como visualizar os esquemas de Hilbert, como fechados em certas grassmannianas (cf. Proposição 2.9). Na parte final do texto, incluímos alguns resultados envolvendo grau de variedades e cálculo de polinômio de Hilbert para certas uniões esquemáticas, que utilizamos para atingir nosso objetivo principal.

Palavras-chave: Esquemas. Teorema de Hilbert-Serre. Espaços Projetivos.

Abstract

The main objective of this work is to make an explicit description of the closed points in the Hilbert schemes of $\text{Hilb}^{at+b}\mathbb{P}^3$ Curves with $(a, b) \in \{(1, i), (2, i)\}_{i=1}^2$. For this, we make a brief theoretical review about modules, graduated modules and related concepts, to demonstrate the Hilbert-Serre Theorem, obtaining as a corollary the existence of the Hilbert polynomial. Next, we touch on schema theory, moving on to the concept of Gotzmann representation (and Gotzmann number), which we use to indicate how to visualize Hilbert schemata, as closed in certain grassmannians (cf. Proposition 2.9). In the final part of the text, we include some results involving degree of varieties and the Hilbert polynomial calculus for certain schematic unions, which we use to achieve our main objective.

Keywords: Schemes. Hilbert-Serre Theorem. Projective Spaces.

Sumário

Introdução	2
1 Teorema de Hilbert-Serre	4
1.1 Módulos Graduados e conceitos afins	4
1.2 Teorema de Hilbert-Serre	12
1.3 Função de Hilbert e polinômio de Hilbert	22
1.4 Ideais homogêneos & polinômio de Hilbert	28
2 Esquema de Hilbert	30
2.1 $\text{Proj}(S)$ como espaço topológico	30
2.2 Conexão entre o espaço projetivo clássico $\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n := \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n])$	31
2.3 $\text{Proj}(S)$ como esquema	33
2.3.1 O feixe das funções regulares $\mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}$ sobre $\text{Proj}(S)$. .	42
2.3.2 Subesquemas fechados de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$	43
2.3.3 $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n$ como conjunto	43
2.4 Construção do Esquema de Hilbert via regularidade de Gotzmann	44
2.4.1 Representação de Gotzmann	45
2.4.2 Equações para o Esquema de Hilbert	47
3 Pontos fechados em certos esquemas de Hilbert de curvas	50
3.1 Resultados preliminares	50
3.1.1 União Esquemática	54
3.2 Descrição do Espaço $\mathbb{H}_{p(t)}$ com $p(t) = t + 1$	61
3.3 Descrição do Espaço $\mathbb{H}_{p(t)}$ com $p(t) = t + 2$	62
3.4 Descrição do Espaço $\mathbb{H}_{p(t)}$ com $p(t) = 2t + 1$	67
3.5 Descrição do Espaço $\mathbb{H}_{p(t)}$ com $p(t) = 2t + 2$	75
A Alguns conceitos de geometria algébrica	80
A.1 $\mathbb{P}^n$: O Espaço Projetivo Clássico	80

Introdução

Podemos dizer que a palavra “*esquema*” foi utilizada pela primeira vez em Paris, em 1954/1955 num Seminário organizado por H. Cartan e C. Chevalley. Resultado desses seminários dos quais o matemático Alexander Grothendieck (1928-2014) participava, Grothendieck publicou entre 1960 e 1967 a obra *Éléments de géométrie algébrique* (EGA) [7], considerada hoje a pedra fundamental da geometria algébrica moderna.

Entre os esquemas, que cativaram o interesse da comunidade matemática, podemos citar o *Esquema de Hilbert*, que foi introduzido pela primeira vez por Alexander Grothendieck durante uma série de palestras dadas no Séminaire Bourbaki entre 1957 e 1962 (as quais foram coletadas sob o nome de *Fondements de la Géométrie Algébrique*, conhecido como FGA).

Os esquemas de Hilbert recebem o nome de David Hilbert (1862 - 1943), pois uma das ferramentas fundamentais para defini-los, como veremos, é o polinômio de Hilbert, introduzido pelo próprio Hilbert com técnicas provenientes tanto da álgebra comutativa (estudo dos módulos graduados) e análise complexa (o estudo dos zeros e pólos de uma função).

Após essa revolução, muitos matemáticos voltaram sua atenção para o esquema de Hilbert. R. Hartshorne em 1966 provou que $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n$ é conexo (veja [12]). No que se refere aos esquemas de Hilbert de pontos (isto é, $p(t) = d$ polinômio constante) no espaço projetivo $\mathbb{P}^n$, J. Forgy em 1968 (em [4]) provou que $\text{Hilb}^d\mathbb{P}^2$ é irredutível, liso e possui dimensão $2d$, e conjecturou que $\text{Hilb}^d\mathbb{P}^n$ é uma variedade reduzida e irredutível para todo $n \geq 3$. Entretanto, foi provado em 2009 que $\text{Hilb}^8\mathbb{P}^4$ é uma variedade redutível (cf. [2]).

No caso de esquemas de Hilbert de curvas, ou seja, $p(t) = dt + 1 - g$ existem poucos resultados (ainda no caso de curvas no espaço projetivo $\mathbb{P}^3$) por exemplo sobre a quantidade de componentes irredutíveis desses esquemas. De fato, apenas em 1985 foi dada uma descrição das componentes irredutíveis do esquema $\text{Hilb}^{3t+1}\mathbb{P}^3$ ([16]). Uma revisão interessante no caso curvas de grau $d \geq 3$ em $\mathbb{P}^3$, encontra-se no texto [13].

O objetivo deste trabalho é dar uma descrição dos pontos fechados no esquema de Hilbert de Curvas $\text{Hilb}^{at+b}\mathbb{P}^3$ com $(a, b) \in \{(1, i), (2, i)\}_{i=1}^2$.

O trabalho foi dividido em três capítulos. No Capítulo 1, nosso foco é a demonstração do Teorema de Hilbert-Serre, o que nos permite estabelecer a existência do polinômio de Hilbert para os módulos graduados do tipo $\frac{S}{I}$ sendo $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ e I um ideal homogêneo em S , via a função de Hilbert h_I .

No Capítulo 2, fazemos uma breve revisão dos conceitos necessários para apresentar a noção de esquema e subesquema fechado. Logo, a seguir nosso foco nesse capítulo é dar um esboço, da construção do esquema de Hilbert $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n$ como um subesquema fechado da Grassmanniana $G(N_0 - p(m_0), S_{m_0})$ sendo $N_0 = \dim S_{m_0}$ e m_0 o número de Gotzmann associado ao polinômio $p(t)$.

No último capítulo, damos uma descrição dos pontos fechados no esquema de Hilbert de Curvas $\text{Hilb}^{a+b}\mathbb{P}^3$ com $(a, b) \in \{(1, i), (2, i)\}_{i=1}^2$. Salientamos que alguns desses casos, se faz necessário fazer uma implementação computacional, para utilizar a teoria exposta no Capítulo 2 (que lá denominamos de equações para o esquema de Hilbert).

Capítulo 1

Teorema de Hilbert-Serre

O teorema de Hilbert-Serre é um resultado fundamental na teoria dos anéis comutativos e na geometria algébrica. Ele estabelece uma relação entre o ideal homogêneo de um anel polinomial e o comportamento assintótico de sua função de Hilbert correspondente. Para entender esse teorema, é necessário primeiro compreender os conceitos de módulos graduados e ideais homogêneos. Neste capítulo, discutiremos esses conceitos básicos e apresentaremos o teorema de Hilbert-Serre em sua forma mais simples, utilizando a referência [1] como guia.

1.1 Módulos Graduados e conceitos afins

Vamos começar esta parte revisando a definição de A -módulo e A -módulo finitamente gerado. Segundo [15], temos a definição a seguir:

Definição 1.1. Seja A um anel comutativo com unidade. Um grupo abeliano aditivo $(M, +)$ dotado da multiplicação escalar:

$$\begin{aligned} A \times M &\longrightarrow M \\ (a, m) &\longmapsto am \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes condições para quaisquer $a_1, a_2 \in A$ e $m_1, m_2 \in M$

1. $1 \cdot m_1 = m_1$
2. $(a_1 a_2) m_1 = a_1 (a_2 m_1)$
3. $(a_1 + a_2) m_1 = a_1 m_1 + a_2 m_1$
4. $a_1 (m_1 + m_2) = a_1 m_1 + a_1 m_2$

é chamado de A -módulo.

Módulo finitamente gerado é um importante conceito para nossa pesquisa, sendo recorrente os pontos onde o utilizamos. Assim o abordaremos a continuação.

Definição 1.2. Seja M um A -módulo. M é dito *finitamente gerado* (f.g.) se, e somente se, existem $m_1, \dots, m_k \in M$ tais que para todo $m \in M$, existem $a_1, \dots, a_k \in A$ de modo que $m = a_1m_1 + \dots + a_km_k$.

A seguir vamos introduzir um dos elementos que fazem parte da definição da série de Poincaré associada a um A -módulo graduado.

Função aditiva

Seja A um anel comutativo com unidade. Uma função

$$\lambda : \{M \mid M \text{ é um } A\text{-módulo f.g.}\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

é chamada de uma **função aditiva** se, para toda sequência exata de A -módulos¹ dada por

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} M'' \rightarrow 0$$

se verifica a igualdade $\lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'')$.

Observação 1.1. Seja M um A -módulo finitamente gerado. Ao considerar a sequência exata de A -módulos finitamente gerados

$$0 \rightarrow \{0\} \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} M \rightarrow 0.$$

Se λ for uma função aditiva, então

$$\lambda(M) = \lambda(\{0\}) + \lambda(M) \implies \lambda(\{0\}) = 0.$$

Exemplo 1.1. Seja M um A -módulo. Se A é um corpo, então tem-se que

$$M \text{ é } A\text{-módulo f.g.} \iff \begin{array}{l} M \text{ é espaço vetorial sobre } A \text{ de dimensão} \\ \text{finita.} \end{array}$$

Neste caso, $\lambda(M) = \dim(M)$ (sendo $\dim(M)$ a dimensão do conjunto M como espaço vetorial sobre A) é uma função aditiva. De fato, sejam f e g transformações lineares que geram a sequência exata de A -espaços vetoriais

$$0 \rightarrow V' \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} V'' \rightarrow 0.$$

Verifica-se que:

¹Ou seja, f e g são homomorfismos de A -módulos, tais que g é injetiva, f sobrejetiva e $\text{Im}(g) = \ker(f)$.

1. $\ker(f) = \text{Im}(g)$;
2. g é injetora (visto que $\ker(g) = \{0\}$);
3. f é sobrejetora (uma vez que $\text{Im}(f) = V''$).

Logo, ao aplicarmos o *Teorema do Núcleo-Imagem*² à transformação linear f , segue que

$$\dim(V) = \dim(V'') + \dim(V').$$

Vale salientar que a série de Poincaré e a função de Hilbert que estudaremos em breve são definidas para módulos graduados. Assim, a seguir vamos revisar os conceitos de anel graduado e módulo graduado, com ênfase nos anéis de polinômios (ou mais precisamente, nos anéis de coordenadas homogêneas associados a conjuntos algébricos projetivos e/ou subesquemas fechados determinados por ideias homogêneas em $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$).

Anéis graduados

Definição 1.3. Seja A um anel comutativo com unidade. Este anel A é um *anel graduado* se existe uma família $\{A_n\}_n$ com $0 \leq n \in \mathbb{Z}$, tal que:

1. A_n é subgrupo de $(A, +)$, $\forall n$;
2. Se $a \in A$ e $a \neq 0$, então existem únicos $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ com $a_{i_j} \in A_{i_j}$ não nulo tais que $a = a_{i_1} + \dots + a_{i_k}$;
3. $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$, $\forall i, j$.

Neste caso usamos a notação $A := \bigoplus_{n \geq 0} A_n$.

A notação $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ que representa **soma direta**.³ Além disso, são utilizados as seguintes conceitos neste contexto:

- I. $a \in A$ é dito *homogêneo* se $a \in A_n$ para algum n ;
- II. $a \in A - \{0\}$ é dito *homogêneo de grau n* se $a \in A_n$;
- III. Se $a \in A$ for não nulo e $a = a_1 + \dots + a_l$ com $a_i \in A_{n_i}$, para $i \in \{1, \dots, l\}$. Então a_i é chamada *parte ou componente homogênea* de a de grau n_i .

²Se $f : V \rightarrow V''$ é uma transformação linear. Então $\dim V = \dim \ker(f) + \dim \text{Im}(f)$

³Isto significa que, se $a \in A$ é não nulo e se escreve na forma $a = a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_m$ com $a_i \neq 0$ e $b_j \neq 0$, então $n = m$ e $a_i = b_i$ para todo i , ou seja, a forma de expressar os elementos de A em termos de suas componentes homogêneas (ou seja, elementos de A_i) é única. Assim, verifica-se que $A_i \cap A_j = \{0\}$, $\forall i \neq j$.

Observações 1.1. Seja $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ um anel graduado, então:

- (i) A_0 é um subanel⁴ de A ;
- (ii) Como a inclusão $A_0 \xrightarrow{i} A$ é um homomorfismo de anéis, então A é uma A_0 -álgebra;⁵
- (iii) A_n é um A_0 -módulo.

Exemplo 1.2. Seja A um anel comutativo com unidade. Considere $A_0 = A$ e $A_n = \{0\}$, $\forall n \geq 1$. Observe que isto torna o anel A um anel graduado:

- 1. $(A_i, +) \leq (A, +)$, $\forall i$;
- 2. Se $a \in A$ for não nulo, então $a = a$ com $a \in A_0 = A$;
- 3. $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$.⁶

Portanto, $\{A_i\}$ define uma graduação em A . Assim, $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$.

O exemplo a seguir mostra que existem restrições para a forma em que podemos construir anéis graduados utilizando o anel A e cópias do anel trivial $\{0\}$.

Exemplo 1.3. Seja A um anel comutativo com unidade. Considere

$$A_0 = \{0\}, \quad A_1 = A \quad \text{e} \quad A_i = \{0\} \quad \forall i \geq 2.$$

Neste exemplo, $A_1 \cdot A_1 = A \not\subseteq A_{1+1} = A_2 = \{0\}$. Portanto, $\{A_i\}$ não define uma graduação em A .

A seguir apresentamos a assim denominada graduação usual no anel dos polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ sendo $\mathbb{K}$ um corpo.

⁴Se $(A, +, \cdot)$ é um anel e B um subconjunto não vazio de A , então B é chamado um *subanel* de A , se $(B, +, \cdot)$ é um anel.

⁵Sejam A e B anéis comutativos com unidade. Dizemos que B é uma A -álgebra se existe $f : A \rightarrow B$ homomorfismo de anéis.

⁶Para mostrar que $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$ considere os seguintes casos: $ij \neq 0$ e $ij = 0$.

Caso 1: Se $ij \neq 0$, então $A_i = A_j = \{0\}$. Logo $A_i \cdot A_j = \{0\} \subseteq A_{i+j} = \{0\}$.

Caso 2: Se $j = 0$, então $A_j = A_0 = A$. Logo $A_i \cdot A = \{0\} \subseteq A_i$. Se $j \neq 0$, necessariamente $i = 0$, e o resultado segue de forma análoga.

Exemplo 1.4. A *graduação usual* em $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, sendo $\mathbb{K}$ um corpo. Para cada $d \in \mathbb{Z}$ não negativo considere

$$A_d = [\{x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \mid i_1 + \dots + i_n = d, 0 \leq i_j \in \mathbb{Z}\}].$$

Assim, por exemplo, $A_0 = \mathbb{K}$ e

$$A_1 = [x_1, \dots, x_n] = \{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \mid a_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Particularmente, para o anel de polinômios em uma variável $A = \mathbb{R}[x]$, temos:

$$A_0 = \mathbb{R}, A_1 = [x], A_2 = [x^2], \dots, A_d = [x^d], \dots$$

E, no caso do anel de polinômios em duas variáveis $B = \mathbb{R}[x, y]$, temos:

$$B_0 = \mathbb{R}, B_1 = [x, y], \dots, B_d = [x^d, x^{d-1}y, \dots, xy^{d-1}, y^d], \dots$$

No caso de um anel graduado A , a proposição a seguir, apresenta um critério para A ser Noetheriano em termos da sua graduação. Esse resultado será utilizado para demonstrar o Lema 1.1.

Proposição 1.1. Seja $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ um anel graduado. Então são equivalentes

1. A é um anel Noetheriano;
2. A_0 é Noetheriano e A é finitamente gerado como A_0 -álgebra⁷

Demonstração. Deixamos este resultado para que o leitor consulte. Veja a Proposição 10.7, p. 106 em [1] □

Lema 1.1. Seja $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ um anel graduado. Se A é uma A_0 -álgebra finitamente gerada, então A admite uma quantidade finita de geradores homogêneos como A_0 -álgebra.

Demonstração. Lembremos que A é uma A_0 -álgebra f.g. se existe uma quantidade finita de elementos $f_1, \dots, f_k$ em A tais que

$$A_0[x_1, \dots, x_k] \longrightarrow A \text{ dado por } p(x_1, \dots, x_k) \mapsto p(f_1, \dots, f_k)$$

⁷Sejam A e B anéis comutativos com unidade. Diz-se que A é uma B -álgebra finitamente gerada se existem $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in A$ tais que

$$\underbrace{B[X_1, \dots, X_l]}_{\text{anel dos polinômios}} \longrightarrow A \text{ dado por } p(X_1, \dots, X_l) \mapsto p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$$

é um homomorfismo de anéis sobrejetivo.

é um homomorfismo sobrejetivo de anéis, ou seja, todo elemento em A pode ser representado como uma expressão polinomial com coeficiente em A_0 nas “variáveis” $f_1, \dots, f_k$. Temos assim, uma aplicação da forma

$$\sum_{l=0}^n \left(\sum_{i_1+\dots+i_k=l} a_{i_1,\dots,i_k} x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} \right) \mapsto \sum_{l=0}^n \left(\sum_{i_1+\dots+i_k=l} a_{i_1,\dots,i_k} f_1^{i_1} \dots f_k^{i_k} \right)$$

onde os $a_{i_1,\dots,i_k} \in A_0$. Escreva agora

$$f_1 = f_{10} + f_{11} + \dots + f_{1n_1}$$

$$f_2 = f_{20} + f_{21} + \dots + f_{2n_2}$$

$$\vdots$$

$$f_k = f_{k0} + f_{k1} + \dots + f_{kn_k}$$

Assim temos que o elemento $a \in A$ escreve-se na forma

$$a = \sum a_I f_1^{i_1} \dots f_k^{i_k} = \sum_I a_I \left(\sum_{i=0}^{n_1} f_{1i} \right)^{i_1} \dots \left(\sum_{i=0}^{n_k} f_{ki} \right)^{i_k}.$$

Assim, o elemento $a \in A$ pode ser representado por uma expressão polinomial nas “variáveis” $\{f_{ij}\}$ com coeficientes em A_0 . Sendo cada f_{ij} um elemento homogêneo de A , segue que $\{f_{ij}\}_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n_k}$ é um conjunto finito de geradores homogêneos de A como A_0 -álgebra. $\square$

Módulos Graduados

A seguir será apresentada a estrutura de *Módulo Graduado*.

Definição 1.4. Seja $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ um anel graduado e M um A -módulo. Diz-se que M é um *A -módulo graduado* se existe uma família $\{M_n\}_{n \geq 0}$ com $n \in \mathbb{Z}$ tal que:

1. M_n é um subgrupo de $(M, +)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ não negativo;
2. $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$
3. $A_i M_j \subset M_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$ não negativos.

Neste caso, de forma análoga ao caso dos anéis graduados tem-se que

- I. Os elementos de M_n são chamados *homogêneos*. Se $m \in M_n$ e $m \neq 0$, então m é dito *homogêneo de grau n* .
- II. $M_i \cap M_j = \{0\}$ para todo $i \neq j$.
- III. Se $m \in M$ é não nulo, então existem únicos $m_1, \dots, m_s$ homogêneos não nulos, tais que $m = m_1 + \dots + m_s$ (m_i é chamada *parte ou componente homogênea* de m de grau r_i , se $m_i \in M_{r_i}$, neste caso escrevemos $\text{grau}(m_i) = r_i$).

A seguir apresentamos alguns módulos graduados para ilustrar essa estrutura.

Exemplo 1.5. Sejam $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ um anel graduado e $I \subseteq A$ um ideal homogêneo⁸. Neste caso, $I = \bigoplus_{n \geq 0} I_n$, sendo $I_n = I \cap A_n$, é um A -módulo graduado.

Exemplo 1.6. Se $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ é um anel graduado e $I \subseteq A$ é um ideal homogêneo, então $\frac{A}{I}$ é um A -módulo graduado. Observe inicialmente que $(\frac{A}{I}, +)$ é um grupo abeliano com a soma $\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}$. Além disso,

$$\cdot : A \times \frac{A}{I} \rightarrow \frac{A}{I} \text{ dada por } (\lambda, \bar{a}) \mapsto \overline{\lambda a}$$

torna $\frac{A}{I}$ um A -módulo. De fato, $\frac{A}{I}$ é um A -módulo graduado.

Para finalizar, note que $\frac{A}{I} = \bigoplus_{n \geq 0} \left(\frac{A}{I} \right)_n$ sendo

$$\left(\frac{A}{I} \right)_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_n}{I_n} = \left\{ \bar{\alpha} \in \frac{A}{I} \mid \alpha \in A_n \right\}.$$

Observação 1.2. Se $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ é um $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ -módulo graduado, então M_n é um A_0 -módulo para todo n .

Lema 1.2. Considere o anel graduado $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$. Se $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ é um A -módulo graduado finitamente gerado, então M admite uma quantidade finita de geradores homogêneos como A -módulo.

⁸Um ideal I do anel graduado $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ é dito homogêneo, se para todo $a \in I$ tal que $a = a_0 + \dots + a_d$ com $a_i \in A_i$ tem-se que $a_i \in I$ para todo $i \in \{1, \dots, d\}$.

Demonstração. Sendo M um A -módulo finitamente gerado, existem $g_1, \dots, g_e \in M$ geradores de M como A -módulo. Escreva agora:

$$\begin{aligned} g_1 &= g_{10} + \dots + g_{1k_1} \\ &\vdots \\ g_e &= g_{e0} + \dots + g_{ek_e} \end{aligned}$$

Sendo g_{ij} 's as componentes homogêneas de g_i para $i = 1, \dots, e$ e $j = 0, \dots, k_i$.

Afirmção 1. Verifica-se que $\langle \{g_{ij}\} \rangle = M$ sendo $\langle \{g_{ij}\} \rangle = \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} g_{ij} \mid a_{ij} \in A \right\}$

Por simplicidade, vamos considerar $M' = \langle \{g_{ij}\} \rangle$. Observe que

- $M' \subseteq M$. Segue da definição de M' .
- $M \subseteq M'$. Note que

$$\begin{aligned} m \in M &\implies a_1, \dots, a_e \in A, \text{ tais que } m = a_1 g_1 + \dots + a_e g_e \\ &\implies m = a_1 \left(\sum_j g_{1j} \right) + \dots + a_e \left(\sum_j g_{ej} \right) \\ &\implies m \in M' = \langle \{g_{ij}\} \rangle. \end{aligned}$$

□

Lema 1.3. Considere o anel graduado $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$. Se $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ é um A -módulo graduado finitamente gerado e A é uma A_0 -álgebra finitamente gerada, então M_n é um A_0 -módulo finitamente gerado para todo n .

Demonstração. A partir do Lema 1.2, escolha $g_1, \dots, g_s \in M$ geradores homogêneos de M como A -módulo. Assuma que, $g_i \in M_{r_i}$, ou seja, $gr(g_i) = r_i$ para cada i . Considere $m \in M$, sendo M um A -módulo f.g. existem $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in A$ tais que

$$m = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_s g_s. \quad (1.1)$$

Lembre que A é uma A_0 -álgebra finitamente gerado. Assim, o Lema 1.1 nos permite escolher $f_1, \dots, f_k \in A$ homogêneos tais que $A = A_0[f_1, \dots, f_k]$.

Ao considerar o somando $\alpha_i g_i$ em (1.1) temos que $\alpha_i \in A$ pode ser escrito como uma representação polinomial em $A_0[f_1, \dots, f_k]$. De fato,

$$\alpha_i = \sum_{i_1 + \dots + i_k} \underbrace{a_{i_1, \dots, i_k}}_{\in A_0} f_{1,i}^{i_1} \dots f_{k,i}^{i_k} \implies \alpha_i g_i = \sum_{i_1 + \dots + i_k} \underbrace{a_{i_1, \dots, i_k}}_{\in A_0} \underbrace{f_{1,i}^{i_1} \dots f_{k,i}^{i_k}}_{\in M} \cdot g_i$$

sendo $\{f_{1,i}^{i_1} \dots f_{k,i}^{i_k} \cdot g_i\}$ um conjunto finito de elementos homogêneos de M . Assim, ao variarmos o índice i , vamos obter elementos homogêneos em M , que geram M com A_0 -módulo. Agora, ao escolher dentre esses geradores os de grau n , segue que M_n é um A_0 -módulo finitamente gerado. □

1.2 Teorema de Hilbert-Serre

Vamos começar esta seção apresentando a noção de *Série de Poincaré* associada a um A -módulo graduado.

Seja $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ um anel graduado que é finitamente gerado como A_0 -álgebra e M um A -módulo graduado finitamente gerado. Considere

$$\lambda : \{M \mid M \text{ é um } A_0\text{-módulo f.g.}\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

função aditiva.

A *série de Poincaré* $\mathcal{P}_\lambda(M, t) \in \mathbb{Z}[[t]]$ associada ao A -módulo M é dada por:

$$\mathcal{P}_\lambda(M, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n) t^n.$$

A seguir, apresentamos alguns exemplos de séries de Poincaré em anéis de polinômios.

Exemplo 1.7. Seja $A = k[x]$ o anel de polinômios na variável x com coeficientes no corpo k . Considere a graduação usual em A , ou seja, $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ sendo $A_0 = k$ e $A_d = [x^d]$ para todo $d \geq 1$. Note que todo A_i é espaço k -vetorial unidimensional⁹.

Considere a função aditiva $\lambda(M) = \dim_k(M)$ se M é um k -módulo finitamente gerado (ou seja, um espaço vetorial sobre k de dimensão finita).

Assim,

$$\mathcal{P}(k[x], t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dim(A_n) t^n.$$

Agora, sendo A_n unidimensional para todo n , segue que

$$\mathcal{P}_\lambda(k[x], t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1 + t + t^2 + \dots = \frac{1}{1-t}.$$

Exemplo 1.8. Considerar a graduação usual no anel $A = k[x_1, \dots, x_l]$ sendo k corpo. Assim, $A = \bigoplus_{d \geq 0} A_d$ com

$$A_d = [\{x_1^{i_1} \dots x_l^{i_l} \mid i_1 + \dots + i_l = d\}].$$

⁹Basta notar que $A_n \cong k$ para todo n . Logo $\dim_k(A_n) = 1$ para todo n .

Visto que $\dim(A_d) = \binom{d+l-1}{d}$. Segue que,

$$\mathcal{P}_\lambda(A, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+l-1}{n} t^n.$$

Assim temos que

$$\mathcal{P}_\lambda(A, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+l-1)!}{n!(l-1)!} t^n.$$

Observe que a derivarmos a função $\frac{1}{1-t}$ em relação a t sucessivamente $l-1$ -vezes, obtemos

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^{(l-1)} = \frac{(l-1)!}{(1-t)^l}.$$

Por outro lado,

$$(t^k)^{(l-1)} = k(k-1) \cdots (k-(l-2)) t^{k-l+1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n &\implies \left(\frac{1}{1-t}\right)^{(l-1)} = \left(1+t+t^2+\cdots\right)^{(l-1)} \\ &\implies \frac{1}{(1-t)^l} = \frac{1}{(l-1)!} \left(1+t+t^2+\cdots\right)^{(l-1)}. \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \left(1+t+t^2+\cdots\right)^{(l-1)} &= \sum_{k=l-1}^{\infty} (t^k)^{(l-1)} \\ &= \sum_{k=l-1}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-(l-2)) t^{k-l+1} \\ &= (l-1)! + l!t + \frac{(l+1)!}{2!} t^2 + \frac{(l+2)!}{3!} t^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(l+n-1)!}{n!} t^n. \end{aligned}$$

Para concluirmos, note que:

$$\mathcal{P}_\lambda(A, t) = \frac{1}{(l-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+l-1)!}{n!} t^n.$$

Portanto, $\mathcal{P}_\lambda(A, t) = \frac{1}{(1-t)^l}$.

Exemplo 1.9. Considere $A = k[x_1, x_2] = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ sendo k corpo com a graduação usual e

$$M = \frac{k[x_1, x_2]}{(x_1^2, x_1 x_2)} = \bigoplus_{n \geq 0} M_n \text{ sendo } M_n = \frac{A_n}{(x_1^2, x_1 x_2) \cap A_n}.$$

Observe que M acima é um A -módulo graduado.

Para saber a dimensão do espaço vetorial $M_n = \frac{A_n}{(x_1^2, x_1 x_2) \cap A_n}$, note que

$$M_0 = \{\bar{0}\} \text{ e } M_1 = [\bar{x}_1, \bar{x}_2] \text{ pois } (x_1^2, x_1 x_2) \cap A_1 = \{0\}.$$

A seguir mostraremos que $M_n = [\bar{x}_2^n]$ para todo $n \geq 2$. De fato, ao considerarmos $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \in A_n$ com $n \geq 2$, temos duas possibilidades: $i_1 = 0$ ou $i_1 > 0$. Logo,

$$\overline{x_1^{i_1} x_2^{i_2}} = \begin{cases} \overline{x_2^{i_2}} & \text{se } i_1 = 0 \\ \bar{0} & \text{se } i_1 > 0 \end{cases} \in [\bar{x}_2^n] \text{ com } n = i_2 \geq 2.$$

Portanto $\dim(M_0) = 1, \dim(M_1) = 2$ e $\dim(M_n) = 1$ para todo $n \geq 2$. Assim o polinômio de Poincaré é dado por

$$\mathcal{P}_\lambda(M, t) = t + \frac{1}{1-t} = \frac{-t^2 + t + 1}{1-t}.$$

Lema 1.4. Sejam $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ um anel Noetheriano graduado e $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ um A -módulo graduado finitamente gerado. Considere a função aditiva

$$\lambda : \{M' \mid M' \text{ é um } A_0\text{-módulo f.g.}\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Para cada $f \in A$ homogêneo, considere o homomorfismo de A -módulos $\varphi_f : M \longrightarrow M$ definido por $m \longmapsto f \cdot m$. Sejam

$$K := \ker(\varphi_f) = \text{Ann}_M(f) \text{ e } N = \text{coker}(\varphi_f) := \frac{M}{\text{Im}(\varphi_f)} = \frac{M}{fM}.$$

Então:

1. K e N são A -módulos finitamente gerados graduados;
2. K e N são $\frac{A}{fA}$ -módulos finitamente gerados graduados.

3. $(1 - t^d)\mathcal{P}_\lambda(M, t) = \mathcal{P}_\lambda(N, t) - t^d\mathcal{P}_\lambda(K, t)$ se $f \in A_d$ com $d \geq 1$.

Demonstração. Assuma que $f \in A_d$. Assim o homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi: M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto f \cdot m \end{aligned}$$

induz, para cada $n \geq 0$, um homomorfismo de A_0 -módulos $M_n \rightarrow M_{n+d}$ definido por $m \mapsto f \cdot m$.

1. K e N são A -módulos graduados.

- Graduação para $K = \ker(\varphi_f)$:

$$K = \bigoplus_{n \geq 0} K_n, \text{ sendo } K_n = \ker(\varphi_f) \cap M_n$$

- Graduação para $N = \text{coker}(\varphi_f)$:

$$N = \bigoplus_{n \geq 0} N_n, \text{ sendo } N_n = \frac{M_n}{M_n \cap fM},$$

uma vez que $\text{Im}(\varphi_f) = fM$ e logo,

$$N = \frac{M}{fM}.$$

Afirmção 1. Com as notações acima. Verifica-se que

$$N_n = \frac{M_n}{M_n \cap fM} = \begin{cases} M_n, & \text{se } 0 \leq n < d, \\ \frac{M_n}{fM_{n-d}}, & \text{se } n \geq d. \end{cases}$$

Visto que $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ implica em

$$\text{Im}(\varphi_f) = fM = \bigoplus_{n \geq 0} fM_n \text{ e } fM_n \subset M_{n+d}.$$

Logo $M_i \cap fM = \bigoplus_{n \geq 0} M_i \cap fM_n$ (lembre que $fM_n \subset M_{n+d}$). Assim,

- (i) Se $i < d$ segue que $M_i \cap fM = \{0\}$.
- (ii) Se $i = d + u$, então $M_i \cap fM = fM_u$.

Assim, concluímos a prova da Afirmação 1.

Para mostrar que K e N são A -módulos finitamente gerados será necessário usar os seguintes dois fatos.

Fato 1: Se A é um anel Noetheriano e M é um A -módulo. Verifica-se que:

M é um A -módulo finitamente gerado $\iff M$ é Noetheriano.

Fato 2: Se temos a sequencia exata de A -módulos

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0.$$

Então

M é Noetheriano $\iff M'$ e M'' são Noetherianos.

Para mostrar que K é um A -módulo finitamente gerado, basta observar que K é um submódulo de M . Como M é um A -módulo finitamente gerado e A é Noetheriano, segue do **Fato 1** que M é um A -módulo Noetheriano, logo todo submódulo de M é finitamente gerado.

Para mostrar que N é um A -módulo finitamente gerado, observe que temos $N = \frac{M}{\text{Im}(\varphi_f)}$. Considere a sequencia exata

$$0 \rightarrow \text{Im}(\varphi_f) \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0.$$

Sendo M um A -módulo Noetheriano, o **Fato 2** permite concluir que $\text{Im}(\varphi_f)$ e N são Noetherianos. Usando novamente o **Fato 1** segue que N é um A -módulo finitamente gerado.

2. Considere que $\alpha \in K$ e $\bar{a} \in B = A/fA$. Defina $\bar{a} \cdot \alpha = a\alpha$. Observe que a operação está bem-definida:

$$\bar{a} = \bar{a'} \iff a - a' = fu \text{ para algum } u \in A$$

Como $K = \ker(\varphi_f)$ temos que

$$a\alpha - a'\alpha = fu\alpha = \varphi_f(u\alpha) = u\varphi_f(\alpha) = 0$$

Para $\bar{\beta} \in N$ e $\bar{a} \in B = A/fA$,. Defina $\bar{a} \cdot \bar{\beta} = \overline{a\beta}$. Também vamos verificar que esta operação está bem-definida. Lembremos que:

$$\bar{a} = \bar{a'} \iff a - a' \in fA, \text{ para todo } \bar{a}, \bar{a'} \in B.$$

Analogamente,

$$\bar{\beta} = \bar{\beta'} \iff \beta - \beta' \in fM, \text{ para todo } \bar{\beta}, \bar{\beta'} \in N.$$

Resultando em

$$a\beta - a'\beta' = (a-a')\beta + \cancel{a'\beta} + a'(\beta - \beta') - \cancel{a'\beta} = \underbrace{(a-a')\beta}_{\in fA} + \underbrace{a'(\beta - \beta')}_{\in fM} \in fM,$$

ou seja, esse termo está em $\text{Im}(\varphi_f)$, o que implica em $\overline{a\beta - a'\beta'} = 0$.

Para mostrar que eles são B -módulos graduados, sendo $B = \frac{A}{fA}$. Observe que a graduação de B é dada por

$$B = \bigoplus_{n \geq 0} B_n$$

sendo

$$B_n = \frac{A_n}{A_n \cap fA} = \begin{cases} A_n, & \text{se } n < d \\ \frac{A_n}{fA_{n-d}}, & \text{se } n \geq d \end{cases}$$

Temos $K = \bigoplus_{n \geq 0} K_n$ sendo $K_n = M_n \cap \ker(\varphi_f)$. Sabemos que K é um B -módulo. Observe que¹⁰

$$B_i \cdot K_j \subset K_{i+j}.$$

Temos $N = \text{coker}(\varphi_f) = \bigoplus_{n \geq 0} N_n$ sendo

$$N_n = \frac{M_n}{M_n \cap fM} = \begin{cases} M_n, & \text{se } n < d \\ \frac{M_n}{fM_{n-d}}, & \text{se } n \geq d \end{cases}$$

Sabemos que N é um B -módulo. Além disso,¹¹

$$B_i \cdot N_j \subset N_{i+j}.$$

Resta mostra que K e N são A/fA -módulos finitamente gerados.

¹⁰De fato, se $\bar{a} \in B_i$ ($a \in A_i$) e $\bar{m} \in K_j$ ($m \in M_j \cap \ker(\varphi_f)$) que implica em

$$\bar{a}m = am \in M_{i+j} \cap \ker(\varphi_f) = K_{i+j}.$$

¹¹Uma vez que $\bar{a} \in B_i, \bar{m} \in N_j \implies \bar{a} \cdot \bar{m} = \overline{am}$ com $am \in A_i M_j \subset M_{i+j}$.

K é um B -módulo f.g.. Considere $\{m_1, \dots, m_t\}$ que geram K como A -módulo, então, para todo $k \in K$, existem $a_1, \dots, a_t \in A$ tais que

$$k = a_1 m_1 + \dots + a_t m_t \stackrel{\text{def}}{=} \overline{a_1} m_1 + \dots + \overline{a_t} m_t$$

com $\overline{a_i} \in B$. Logo $\{m_i\}_{i=1}^t$ gera K como B -módulo.

N é um B -módulo f.g.. Seja $\{\overline{m_1}, \dots, \overline{m_r}\}$ conjunto de geradores de N como A -módulo. Assim, para todo $\overline{m} \in N$, existem $b_1, \dots, b_r \in A$ tais que:

$$\begin{aligned} \overline{m} &= b_1 \overline{m_1} + \dots + b_r \overline{m_r} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{b_1 m_1} + \dots + \overline{b_r m_r} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \overline{b_1} \overline{m_1} + \dots + \overline{b_r} \overline{m_r} \end{aligned}$$

Portanto, $\{\overline{m_1}, \dots, \overline{m_r}\}$ geram N como B -módulo.

3. Temos M um A -módulo graduado finitamente gerado, A uma A_0 -álgebra finitamente gerada e f pertencente a A_d com $d \geq 1$. Considere o homomorfismo de A -módulos

$$\begin{aligned} \varphi: M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto fm \end{aligned}$$

Assim temos $K = \ker(\varphi)$ e $N = \text{coker}(\varphi)$ são A -módulos graduados finitamente gerados. Para cada $n \geq 0$, temos a sequência exata

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow M_n \rightarrow M_{n+d} \rightarrow N_{n+d} \rightarrow 0$$

sendo $K_n = \ker(\varphi) \cap M_n$, $N_{n+d} = \frac{M_{n+d}}{fM_n}$. Além disso, o Lema 1.3 nos garante que K_n, M_n, M_{n+d} são A_0 -módulos finitamente gerados para todo n . Junto com a Proposição 2.11 em [1], podemos concluir que:

$$\lambda(K_n) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+d}) - \lambda(N_{n+d}) = 0, \quad \forall n.$$

Equivalentemente,

$$\lambda(M_{n+d}) - \lambda(M_n) = \lambda(N_{n+d}) - \lambda(K_n), \quad \forall n.$$

O que implica em

$$\lambda(M_{n+d})t^{n+d} - \lambda(M_n)t^n t^d = \lambda(N_{n+d})t^{n+d} - \lambda(K_n)t^n t^d \quad (1.2)$$

Lembrando que $\mathcal{P}_\lambda(M, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda(M_m) t^m$ e basta usar a relação 1.2 para concluir o que desejamos. A seguir vamos considerar os termos onde $n + d \geq 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq -d} \lambda(M_{n+d}) t^{n+d} - \left(\sum_{n \geq -d} \lambda(M_n) t^n \right) t^d &= \sum_{n \geq -d} \lambda(N_{n+d}) t^{n+d} + \\ &- \left(\sum_{n \geq -d} \lambda(K_n) t^n \right) t^d \end{aligned}$$

Note que $n + d \geq 0$ se e somente se $n \in \{-d, 1-d, \dots, 0, 1, \dots\}$. Vamos definir $M_i = \{0\} = K_i$ se $i < 0$. Portanto, teremos que

$$\mathcal{P}_\lambda(M, t) - \mathcal{P}_\lambda(M, t) t^d = \mathcal{P}_\lambda(N, t) - \mathcal{P}_\lambda(K, t) t^d.$$

Isto implica em

$$(1 - t^d) \mathcal{P}_\lambda(M, t) = \mathcal{P}_\lambda(N, t) - t^d \mathcal{P}_\lambda(K, t)$$

Como queríamos demonstrar na parte 3. □

Teorema 1.1 (Hilbert-Serre). Seja A um anel graduado Noetheriano, gerado como A_0 -álgebra por m elementos homogêneos de graus $d_1, \dots, d_m$. Considere M um A -módulo graduado finitamente gerado e $\lambda : \{A_0\text{-módulos f.g.}\} \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função aditiva. Então

$$\mathcal{P}_\lambda(M, t) = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^m (1 - t^{d_i})}, \text{ em } \mathbb{Z}[[t]]$$

com $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ e $1/(1 - t^{d_i}) = 1 + t^{d_i} + t^{2d_i} + \dots$

Demonstração. Faremos indução em m (a quantidade de geradores de A como A_0 -álgebra).

Observe que se $f_1, \dots, f_m$ forem geradores (homogêneos) de A como A_0 -álgebra então $A = A_0[f_1, \dots, f_m]$.

Se $m = 0$, então $A = A_0$. Neste caso, M é um A_0 -módulo finitamente gerado e podemos escolher geradores $g_1, \dots, g_t \in M$ homogêneos de grau $r_i, i = 1, \dots, t$. Assim,

$$M = A_0 g_1 + \dots + A_0 g_t$$

o que implica em $M_n = 0$ para todo n maior que $\mu = \max\{r_1, \dots, r_t\}$. Logo,

$$\mathcal{P}_\lambda(M, t) = \sum_{n=0}^{\mu-1} \lambda(M_n) t^n \in \mathbb{Z}[t].$$

Agora assumamos que $s > 0$ e o resultado é válido para $s - 1$. Sejam $f_1, \dots, f_s \in A$ homogêneos de grau d_i ($i = 1, \dots, s$) geradores de A como A_0 -álgebra. Considere o mapa de multiplicação

$$M \xrightarrow{\varphi_s} M \text{ dado por } m \mapsto f_s \cdot m$$

Segue do Lema 1.4 que:

$$(1 - t^{d_s})\mathcal{P}_\lambda(M, t) = \mathcal{P}_\lambda\left(\frac{\overbrace{M}^N}{f_s M}, t\right) - t^{d_s}\mathcal{P}_\lambda(\overbrace{\ker(\varphi_s)}^K, t)$$

sendo K e N dois $\frac{A}{f_s A}$ -módulos graduados finitamente gerados e

$$\frac{A}{f_s A_0} = \frac{A_0[f_1, \dots, f_{s-1}, f_s]}{f_s A} \cong A_0[\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{s-1}]$$

Segue da hipótese de indução que

$$\mathcal{P}_\lambda(N, t) = \frac{g(t)}{\prod_{i=1}^{s-1}(1 - t^{d_i})} \text{ e } \mathcal{P}_\lambda(K, t) = \frac{h(t)}{\prod_{i=1}^{s-1}(1 - t^{d_i})}$$

com $g(t), h(t) \in \mathbb{Z}[t]$. O que implica em

$$\mathcal{P}_\lambda(M, t) = \frac{g(t) - t^{d_s}h(t)}{\prod_{i=1}^s(1 - t^{d_i})} = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^s(1 - t^{d_i})}.$$

□

Do teorema acima, decorre o seguinte corolário.

Corolário 1.1. Seja A um anel graduado Noetheriano que é finitamente gerado por s elementos de grau 1 como A_0 -álgebra. Seja M um A -módulo finitamente gerado. Assuma que

$$\mathcal{P}_\lambda = \frac{f(t)}{(1 - t)^k} = \frac{g(t)}{(1 - t)^s}$$

com $0 \leq s \leq k$ e $g(1) \neq 0$. Então existe um polinômio $h(t) \in \mathbb{Q}[t]$ de grau $s - 1$ tal que

$$\lambda(M_n) = h(n) \text{ para todo } n \gg 0$$

ou seja, n suficientemente grande.

Demonstração. Temos

$$\mathcal{P}_\lambda(M, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n) t^n = \frac{g(t)}{(1-t)^s}.$$

Tendo em consideração que¹²

$$\frac{1}{(1-t)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s-1+n}{s-1} t^n$$

e que $s-1 \geq 1$ se $s \geq 2$.

Escreva $g(t) = \sum_{i=0}^m a_i t^i \in \mathbb{Z}[t]$. Assim, tem-se que

$$\sum_{n \geq 0} \lambda(M_n) t^n = \frac{g(t)}{(1-t)^s} = \sum_{n \geq 0} \binom{s-1+n}{s-1} g(t) t^n.$$

Equivalentemente,

$$\sum_{n \geq 0} \lambda(M_n) t^n = g(t) + \binom{s}{s-1} g(t) t + \binom{s+1}{s-1} g(t) t^2 + \dots$$

Como $g(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$, comparando essas séries termo a termo, obtém-se

$$\begin{aligned} \lambda(M_0) &= a_0 \\ \lambda(M_1) &= a_1 + \binom{s}{s-1} a_0 \\ \lambda(M_2) &= a_2 + \binom{s}{s-1} a_1 + \binom{s+1}{s-1} a_0 \\ &\vdots \\ \lambda(M_n) &= a_n + \binom{s}{s-1} a_{n-1} + \binom{s+1}{s-1} a_{n-2} + \dots + \binom{s-1+n}{s-1} a_0 \end{aligned}$$

Segue que

$$\lambda(M_m) = \sum_{i=0}^m a_i \binom{s-1+m-i}{s-1}, \quad m = \text{gr}(g(t)). \quad (1.3)$$

Considere

$$h(t) = \sum_{i=0}^m a_i \binom{s-1+t-i}{s-1}. \quad (1.4)$$

¹²Se $s = 1$ a definição $\binom{u}{0} = 1 \quad \forall u \geq 0, u \in \mathbb{Z}$.

De (1.3) e (1.4) segue que $\lambda(M_n) = h(n) \forall n \geq m = gr(g(t))$ (uma vez que $a_j = 0 \forall j > m$).

Para finalizar esta demonstração observe que

$$\begin{aligned} \binom{s-1+t-i}{s-1} &= \frac{(t-i+1)(t-i+2)\cdots(t-i+s-1)}{(s-1)!} \\ &= \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} + \frac{p_i(t)}{(s-1)!}. \end{aligned}$$

De onde concluímos que

$$h(t) = \frac{(a_0 + a_1 + \cdots + a_m)}{(s-1)!} t^{s-1} + h_1(t) \text{ sendo } h_1(t) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i p_i(t)}{(s-1)!}.$$

Observe que se $h_1(t)$ não for nulo possui grau menor que $s-1$. Por outro lado, $g(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_m \neq 0$. Portanto, $h(t)$ é um polinômio de grau $s-1$. $\square$

O polinômio $h(t) \in \mathbb{Q}[t]$ obtido no corolário (acima) é denominado *Polinômio de Hilbert* associado ao módulo graduado M com relação à função aditiva λ .

Observação 1.3. No que segue do texto vamos focar nos $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ -módulos graduados $\frac{S}{I}$ sendo I um ideal homogêneo de S (cf. Exemplo 1.6). Nessa categoria de S -módulos, a seguir vamos definir a função de Hilbert h_I associada ao ideal homogêneo I .

1.3 Função de Hilbert e polinômio de Hilbert

Considere o anel graduado $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ com a graduação usual, ou seja, $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ sendo

$$S_d = \{0\} \cup \{F \in S \mid F \neq 0 \text{ homogêneo de grau } d\}.$$

Observações 1.2. Com as notações acima.

- (i) S_d é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão $\binom{n+d}{d}$.
- (ii) Se I é um ideal homogêneo¹³ de S , então $I_d = I \cap S_d$ é subespaço vetorial de S_d . Além disso, no caso $d = 0$, tem-se que

$$I_0 = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{se } I = S, \\ \{0\}, & \text{se } I \neq S. \end{cases}$$

¹³Lembre que um ideal $I \subseteq S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ é homogêneo, se e somente se, para todo $f \in I$ tal que $f = f_0 + \cdots + f_m$ com $f_i \in S_i$ tem-se que $f_i \in I, \forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Exemplo 1.10. Sejam $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ e $f \in S_\ell$ não nulo. Se $I = \langle f \rangle \subseteq S$, então

$$I_d = I \cap S_d = \begin{cases} \{0\} & \text{se } d < \ell, \\ f \cdot S_{d-\ell} & \text{se } d \geq \ell. \end{cases}$$

Assim, $\dim I_d = 0$ para $d \leq \ell$ e $\dim I_d = \dim S_{d-\ell}$ para todo $d \geq \ell$.

A seguir usaremos a notação $\mathbb{N}_0$ para indicar o conjunto dos inteiros não negativos e $\dim$ indica a dimensão como espaço vetorial complexo.

Definição 1.5. Se I for um ideal homogêneo do anel $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, então a função $h_I : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ dada por

$$h_I(d) = \dim S_d - \dim I_d$$

é denominada a *função de Hilbert* associada ao ideal homogêneo I .

Observação 1.4. Sendo h_I uma função aditiva o Corolário 1.1 nos garante existência do *polinômio de Hilbert* associado ao ideal I , que denotaremos por p_I .

A seguir, apresentamos alguns exemplos que são importantes no desenvolvimento do Capítulo 3.

Exemplo 1.11. Considere $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ e $I = \langle x_0 - x_1 \rangle \subset S$. Verifica-se que $h_I(d) = d + 1$ para todo d . Portanto, $p_I(t) = t + 1$.

Afirmção 1: $I_0 = \{0\}$ e $I_d \cong S_{d-1}$, $\forall d \geq 1$.

Temos $I = \{(x_0 - x_1) \cdot f \in S \mid f \in S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]\}$ e $I_d = I \cap S_d = \{0\} \cup \{f \in I \mid f \neq 0, f \text{ é homogêneo de grau } d\}$.

$d = 0$. Neste caso, temos $S_0 = \mathbb{C}$ e $I_0 = I \cap \mathbb{C} = \{0\}$. Observe que, se $g \in I$, então $g = (x_0 - x_1)f$ para algum $f \in S$. Se $f \neq 0$ então as partes homogêneas de g terão grau maior ou igual que 1.¹⁴ Portanto, $I_0 = \{0\}$.

$d \geq 1$. Neste caso, temos

$$g \in I_d \iff g = (x_0 - x_1)h \text{ com } h \in S_{d-1}.$$

Observe que

$$\varphi : S_{d-1} \rightarrow I_d \quad \text{dada por } h \mapsto (x_0 - x_1)h$$

¹⁴Escreva $f = f_0 + f_1 + \dots + f_m$ com $f_i \in S_i$, $0 \leq i \leq m$. Logo

$$g = (x_0 - x_1)f = \underbrace{(x_0 - x_1)f_0}_{\in I_1 \cap S_1} + \dots + \underbrace{(x_0 - x_1)f_m}_{\in I_{m+1} = I \cap S_{m+1}}.$$

é isomorfismo $\mathbb{C}$ -linear. Portanto, $I_d \cong S_{d-1} \forall d \geq 1$.

Afirmção 2: $h_I(d) = d + 1$ para todo d .

Lembre que $\dim S_d = \binom{2+d}{2}$. Logo,

$$h_I(d) = \dim S_d - \dim I_d = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \dim I_d.$$

- Como $I_0 = \{0\}$, segue que $\dim I_0 = 0$. Logo, $h_I(0) = 1 = 0 + 1$.
- Sendo $I_d \cong S_{d-1}$ se $d \geq 1$, segue que $\dim I_d = \dim S_{d-1} = \frac{d(d+1)}{2}$. Logo,

$$h_I(d) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \frac{d(d+1)}{2} = d + 1, \quad \text{se } d \geq 1.$$

Exemplo 1.12. Considere $R = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ com a graduação usual e $f \in R_2$ não nulo. Seja $J = \langle fx_1, fx_2 \rangle$. Verifica-se que $h_J(0) = 1$, $h_J(1) = 3$ e $h_J(d) = 2d + 2$ para todo $d \geq 2$. Portanto, $p_J(t) = 2t + 2$.

Lembremos que $\dim R_d = \binom{2+d}{2}$. Assim,

$$h_J(d) = \dim R_d - \dim J_d = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \dim J_d.$$

Neste caso, podemos dividir a determinação de $h_J(d)$ nas seguintes partes:

$d \in \{0, 1, 2\}$. Como $J_i = \{0\}$ para $i \in \{0, 1, 2\}$, então $\dim J_i = 0$. Logo,

$$h_J(d) = \dim R_d - \dim J_d = \dim R_d = \begin{cases} 1 & \text{se } d = 0, \\ 3 & \text{se } d = 1, \\ 6 = 2 \cdot 2 + 2 & \text{se } d = 2. \end{cases}$$

$d = 3$. Como $J_3 = [fx_1, fx_2]$, segue que $\dim J_3 = 2$. Logo $h_J(3) = \dim R_3 - \dim J_3 = 10 - 2 = 8 = 2 \cdot 3 + 2$.

$d \geq 4$. Considere $\psi : R_{d-3} \times R_{d-3} \longrightarrow I_d$ definida por

$$(A, B) \longmapsto A \cdot fx_1 + B \cdot fx_2.$$

Observe que ψ é uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear sobrejetora. Assim,

$$\dim J_d = 2 \dim R_{d-3} - \dim(N(\psi)).$$

Agora,

$$\begin{aligned}(A, B) \in N(\psi) &\iff Af x_1 = -Bf x_2, \\ &\iff Ax_1 = -Bx_2, \\ &\iff B = C \cdot x_1 \text{ e } A = -C \cdot x_2 \text{ com } C \in R_{d-4}.\end{aligned}$$

Assim, $N(\psi) \cong R_{d-4}$ (basta considerar $R_{d-4} \xrightarrow{\psi} N(\psi)$ dada por $C \mapsto (-C \cdot x_2, C \cdot x_1)$). Portanto,

$$\dim J_d = 2 \dim R_{d-3} - \dim R_{d-4} \quad \forall d \geq 4.$$

De onde concluímos que:

$$h_J(d) = \dim R_d - 2 \dim R_{d-3} + \dim R_{d-4} \quad \forall d \geq 4.$$

Após alguns cálculos, obtemos $h_J(d) = 2d + 2 \quad \forall d \geq 4$.

Exemplo 1.13. Considere $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Se $L_1, L_2 \in S_1$ são L.I. e $I = \langle L_1, L_2 \rangle \subset S$, então verifica-se que $h_I(d) = d + 1$ para todo d . Portanto, $p_I(t) = t + 1$.

Lembremos que $\dim(S_d) = \binom{3+d}{3}$. Logo,

$$h_I(d) = \dim S_d - \dim I_d = \binom{3+d}{3} - \dim I_d.$$

Neste caso, podemos dividir a determinação de $h_I(d)$ nas seguintes partes:

$d = 0$. Como $I_0 = \{0\}$, então $\dim I_0 = 0$. Logo $h_I(0) = \dim S_0 - \dim I_0 = 1 = 0 + 1$.

$d = 1$. Como $I_1 = [L_1, L_2] \cong \mathbb{C}^2$ implica em $\dim I_1 = 2$. Logo $h_I(1) = \dim S_1 - \dim I_1 = 4 - 2 = 2 = 1 + 1$.

$d \geq 2$. Considere $\psi : S_{d-1} \times S_{d-1} \longrightarrow I_d$ definida por

$$(A, B) \mapsto A \cdot L_1 + B \cdot L_2.$$

Observe que ψ é uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear sobrejetora. Assim,

$$\dim I_d = 2 \dim S_{d-1} - \dim(N(\psi)).$$

Agora,

$$(A, B) \in N(\psi) \iff AL_1 = -BL_2 \iff B = C \cdot L_1 \text{ e } A = -C \cdot L_2 \text{ com } C \in S_{d-2}.$$

Assim, $N(\psi) \cong S_{d-2}$ (basta considerar $S_{d-2} \xrightarrow{\psi} N(\psi)$ dada por $C \mapsto (-C \cdot L_2, C \cdot L_1)$). Portanto,

$$\dim I_d = 2 \dim S_{d-1} - \dim S_{d-2} \quad \forall d \geq 2.$$

De onde concluímos que:

$$h_I(d) = \dim S_d - 2 \dim S_{d-1} + \dim S_{d-2} \quad \forall d \geq 2$$

Após alguns cálculos, obtemos $h_I(d) = d + 1 \quad \forall d \geq 2$.

Exemplo 1.14. Considere $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Seja $I = \langle L, f \rangle$ com $L \in S_1, f \in S_2 - LS_1$. Verifica-se que $h_I(d) = 2d + 1$ para todo d . Portanto, $p_I(t) = 2t + 1$.

Lembremos que $\dim(S_d) = \binom{3+d}{3}$. Logo,

$$h_I(d) = \dim S_d - \dim I_d = \binom{3+d}{3} - \dim I_d.$$

Neste caso, podemos dividir a determinação de $h_I(d)$ nas seguintes partes:

$d = 0$. Como $I_0 = \{0\}$, então $\dim I_0 = 0$. Logo $h_I(0) = \dim S_0 - \dim I_0 = 1 = 2 \cdot 0 + 1$.

$d = 1$. Como $I_1 = [L] \cong \mathbb{C}$ implica em $\dim I_1 = 1$. Logo $h_I(1) = \dim S_1 - \dim I_1 = 4 - 1 = 3 = 2 \cdot 1 + 1$.

$d = 2$. Como $I_2 = L \cdot S_1 \oplus [f] = [Lx_0, Lx_1, Lx_2, Lx_3, f]$ que implica em $\dim I_2 = 5$. Logo $h_I(2) = \dim S_2 - \dim I_2 = 10 - 5 = 2 \cdot 2 + 1$.

$d \geq 3$. Considere $\psi : S_{d-1} \times S_{d-2} \longrightarrow I_d$ definida por

$$(A, B) \longmapsto A \cdot L + B \cdot f.$$

Observe que ψ é uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear sobrejetora. Assim,

$$\dim I_d = \dim S_{d-1} + \dim S_{d-2} - \dim(N(\psi)).$$

Agora,

$$(A, B) \in N(\psi) \Leftrightarrow AL = -Bf \Leftrightarrow B = C \cdot L \text{ e } A = -C \cdot f \text{ com } C \in S_{d-3}.$$

Assim, $N(\psi) \cong S_{d-3}$ (basta considerar $S_{d-3} \xrightarrow{\psi} N(\psi)$ dada por $C \mapsto (-C \cdot f, C \cdot L)$). Portanto,

$$\dim I_d = \dim S_{d-1} + \dim S_{d-2} - \dim S_{d-3} \quad \forall d \geq 3.$$

De onde concluímos que:

$$h_I(d) = \dim S_d - \dim S_{d-1} - \dim S_{d-2} + \dim S_{d-3} \quad \forall d \geq 3$$

Após alguns calculos, obtemos $h_I(d) = 2d + 1 \quad \forall d \geq 3$.

Exemplo 1.15. Considere $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Seja $I = \langle x_0, x_1 h_1, x_1 h_2 \rangle$ com $h_1, h_2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ homogêneos de grau e L.I.. Verifica-se que $h_I(0) = 1$ e $h_I(d) = d + 2$ para todo $d \geq 1$. Portanto, $p_I(t) = t + 2$.

Observe que os anéis $\frac{\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]}{\langle x_0, x_1 h_1, x_1 h_2 \rangle}$ e $\frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]}{\langle x_1 h_1, x_1 h_2 \rangle}$ são isomorfos. Portanto, ao considerarmos a graduação usual em $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ e o ideal homogêneo $J = \langle x_1 h_1, x_1 h_2 \rangle$ em R , tem-se que

$$h_I(d) = \dim S_d - \dim I_d = \dim R_d - \dim J_d \quad (1.5)$$

uma vez que tal isomorfismo preserva a graduação.

Lembremos que $\dim R_d = \binom{2+d}{2}$. Logo, segue de (1.5) que

$$h_I(d) = \dim R_d - \dim J_d = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \dim J_d.$$

Neste caso, podemos dividir a determinação de $h_I(d)$ nas seguintes partes:

$d = 0$. Como $J_0 = \{0\}$, então $\dim J_0 = 0$. Logo $h_I(0) = \dim R_0 - \dim J_0 = 1$.

$d = 1$. Como $J_1 = \{0\}$, então $\dim J_1 = 0$. Logo $h_I(1) = \dim R_1 - \dim J_1 = 3 = 1 + 2$.

$d = 2$. Como $J_2 = [x_1 h_1, x_1 h_2]$ que implica em $\dim J_2 = 2$. Logo $h_I(2) = \dim R_2 - \dim J_2 = 6 - 2 = 4 = 2 + 2$.

$d \geq 3$. Considere $\psi : R_{d-2} \times R_{d-2} \longrightarrow I_d$ definida por

$$(A, B) \longmapsto A \cdot x_1 h_1 + B \cdot x_1 h_2.$$

Observe que ψ é uma aplicação $\mathbb{C}$ -linear sobrejetora. Assim,

$$\dim J_d = 2 \dim R_{d-2} - \dim(N(\psi)).$$

Agora,

$$\begin{aligned} (A, B) \in N(\psi) &\iff Ax_1 h_1 = -Bx_1 h_2, \\ &\iff Ah_1 = -Bh_2, \\ &\iff B = C \cdot h_1 \text{ e } A = -C \cdot h_2 \text{ com } C \in R_{d-3}. \end{aligned}$$

Assim, $N(\psi) \cong R_{d-3}$ (basta considerar $R_{d-3} \xrightarrow{\psi} N(\psi)$ dada por $C \mapsto (-C \cdot h_2, C \cdot h_1)$). Portanto,

$$\dim J_d = 2 \dim R_{d-2} - \dim R_{d-3} \quad \forall d \geq 3.$$

De onde concluímos que:

$$h_I(d) = \dim R_d - 2 \dim R_{d-2} + \dim R_{d-3} \quad \forall d \geq 3.$$

Após alguns calculos, obtemos $h_I(d) = d + 2 \quad \forall d \geq 3$.

1.4 Ideais homogêneos & polinômio de Hilbert

Vamos começar observando o comportamento da função de Hilbert, e consequentemente dos polinômios de Hilbert, de dois ideais homogêneos I e J em $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ tais que $I \subseteq J$. Note que a inclusão $I \subseteq J$, nos garante que

$$I_d \subseteq J_d \quad \forall d \implies \dim I_d \leq \dim J_d \implies \underbrace{\dim S_d - \dim J_d}_{h_J(d)} \leq \underbrace{\dim S_d - \dim I_d}_{h_I(d)}.$$

Portanto, $h_J(d) \leq h_I(d)$, $\forall d$. Logo, a Proposição A.2 nos permite concluir que

$$I \subseteq J \implies p_J(d) \leq p_I(d) \quad \forall d \gg 0. \quad (1.6)$$

Uma noção importante em nossa pesquisa é o de *saturado* de um ideal, que vamos introduzir a seguir.

Definição 1.6. Sejam $\mathfrak{m} = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ o ideal irrelevante do anel graduado $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ (com a graduação usual). Se I é um ideal homogêneo do anel graduado S , então definimos a *saturação* de I em relação a $\mathfrak{m}$ (ou simplesmente, a *saturação de I*), que denotaremos por $(I : \mathfrak{m}^\infty)$, da seguinte forma:

$$(I : \mathfrak{m}^\infty) := \langle \{f \in S \mid f\mathfrak{m}^k \subseteq I \text{ para algum inteiro } k > 0\} \rangle.$$

O ideal I é denominado saturado se $I = (I : \mathfrak{m}^\infty)$

Por simplicidade, no que segue do texto usaremos a notação I^{sat} em lugar de $(I : \mathfrak{m}^\infty)$ para indicar o saturado do ideal I .

Lema 1.5. Sejam I e J ideais homogêneos em $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Se existe um inteiro positivo N_0 tal que $I_d = J_d \quad \forall d \geq N_0$, então $I^{sat} = J^{sat}$.

Demonstração. Sendo I^{sat} e J^{sat} ideais homogêneos, tem-se que

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_e \in I^{sat} \text{ (ou } J^{sat}) \Leftrightarrow f_i \in I^{sat} \text{ (ou } J^{sat}) \quad \forall i, \quad 0 \leq i \leq e.$$

Assim, para mostrar a inclusão $I^{sat} \subseteq J^{sat}$, basta considerar elementos homogêneos de I^{sat} . Considere $f \in I^{sat}$ e assumamos que f é homogêneo de grau e . Lembre que

$$I^{sat} = \langle \{f \in S \mid \exists k > 0 \text{ inteiro tal que } fx_i^k \in I \quad \forall i\} \rangle.$$

Considere k inteiro positivo tal que

$$fx_i^k \in I \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

Temos duas possibilidades

- (i) $\text{grau}(fx_i^k) = e + k \geq N_0$.
Neste caso, $fx_i^k \in I_{e+k} = J_{e+k} \quad \forall i$. Com isso, temos que $fx_i^k \in J \quad \forall i$ o que implica em $f \in J^{sat}$.
- (ii) $\text{grau}(fx_i^k) = e + k < N_0$.
Escolha $u > 0$ tal que $e + k + u = N_0$ e observe que $fx_i^k \in I \quad \forall i$, que implica em $fx_i^{k+u} \in I \quad \forall i$. Neste caso, $fx_i^{k+u} \in I_{N_0} = J_{N_0}$, logo $f \in J^{sat}$. Portanto, $I^{sat} \subseteq J^{sat}$. De forma análoga prova-se que $J^{sat} \subseteq I^{sat}$.

□

Proposição 1.2. Sejam $I \subseteq J$ ideais homogêneos saturados em $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ tais que $p_I(t) = p_J(t)$. Então $I = J$

Demonstração. Lembremos que da função de Hilbert temos

$$h_I(d) = \dim S_d - \dim I_d \quad \forall d \geq 0$$

e

$$h_J(d) = \dim S_d - \dim J_d \quad \forall d \geq 0.$$

Além disso, $h_I(d) = p_I(d) \quad \forall d \gg 0$ e $h_J(d) = p_J(d) \quad \forall d \gg 0$. Escolha $N_0 \gg 0$ tal que $h_I(d) = p_I(d)$ e $h_J(d) = p_J(d) \quad \forall d \geq N_0$. Logo $h_I(d) = h_J(d) \quad \forall d \geq N_0$, e isso implica que $\dim I_d = \dim J_d \quad \forall d \geq N_0$. Visto que $I \subseteq J$, segue que $I_d \subseteq J_d \quad \forall d \geq 0$. Portanto, $I_d = J_d \quad \forall d \geq N_0$.

Segue do Lema 1.5, que $I^{sat} = J^{sat}$. Entretanto, sendo I e J ideais homogêneos saturados, tem-se que $I^{sat} = I$ e $J^{sat} = J$. Portanto $I = J$. □

Capítulo 2

Esquema de Hilbert

No Capítulo 1 a cada ideal homogêneo I do anel $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ (com a graduação usual) associamos seu polinômio de Hilbert $p_I(t) \in \mathbb{Q}[t]$. Neste capítulo, fixaremos um polinômio admissível¹ $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$ e mostraremos que o conjunto

$$\left\{ I \subset S \mid I \text{ é um ideal homogêneo saturado tal que } p_I(t) = p(t) \right\}$$

está em correspondência com os pontos fechados de um esquema, denominado *Esquema de Hilbert* e que denotaremos por $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n$. Vale salientar que para construir o esquema de Hilbert será utilizado número de Gotzmann e sua conexão com regularidade. Para podermos entender o que vem a ser um esquema, e posteriormente o que é um subesquema fechados de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n := \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n])$, vamos começar apresentando o espaço topológico $\text{Proj}(S)$ associado a um anel graduado S qualquer.

2.1 $\text{Proj}(S)$ como espaço topológico

Considere $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ um anel graduado e $S_+ = \bigoplus_{d > 0} S_d$ o ideal irrelevante.

O espectro primo homogêneo de S é dado por

$$\text{Proj}(S) = \{P \in \text{Spec}(S) \mid P \text{ é homogêneo e } S_+ \not\subset P\}.$$

Exemplos 2.1. Considere a graduação usual em $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$.

- 1 Visto que 0 e $S_+ = \langle x_0 \rangle$ são os únicos ideais primos homogêneos do anel $S = \mathbb{C}[x_0]$. Segue que $\text{Proj}(\mathbb{C}[x_0]) = \{\langle 0 \rangle\}$.

¹Isto é, existe um ideal homogêneo I em S tal que $p_I(t) = p(t)$. Ou equivalentemente, como veremos mais adiante neste capítulo, existe um subesquema fechado de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ cujo polinômio de Hilbert é $p(t)$.

2 Se $P \in \text{Spec}(\mathbb{C}[x_0, x_1])$ verifica-se que

$$\{0\} \neq P \text{ é homogêneo} \iff P = \begin{cases} \langle \beta x_0 - \alpha x_1 \rangle & \text{com } [\beta : \alpha] \in \mathbb{P}^1, \\ \langle x_0, x_1 \rangle. \end{cases}$$

Portanto, $\text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1]) = \{\langle 0 \rangle\} \cup \{\langle \beta x_0 - \alpha x_1 \rangle \mid [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\}$.

Proposição 2.1. Para cada ideal homogêneo I do anel graduado $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$, considere $V(I) = \{P \in \text{Proj}(S) \mid I \subseteq P\}$. Então a família $\{V(I)\}$ define uma topologia em $\text{Proj}(S)$, denominada topologia de Zariski na qual os subconjuntos fechados são da forma $V(I)$.

Demonstração. Veja Lema 2.4, p. 76 em [11]. $\square$

2.2 Conexão entre o espaço projetivo clássico $\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n := \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n])$

O conjunto quociente $\mathbb{P}^n := \frac{\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}}{\sim}$ sendo $\sim$ a relação de equivalência dada por

$$u \sim v \iff [u] = [v] \leq \mathbb{C}^{n+1}$$

será denominado *espaço projetivo clássico*.

No que segue do texto, por simplicidade usaremos a notação $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n := \text{Proj}(S)$, se $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ com a graduação usual. Neste caso, $S_+ = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$. Logo

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n := \left\{ P \in \text{Spec}(S) \mid P \text{ é homogêneo e } \langle x_0, \dots, x_n \rangle \not\subseteq P \right\}.$$

Proposição 2.2. Com as notações acima, considere $y \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. Verifica-se que:

- (i) $\overline{\{y\}} = V(y)$
- (ii) y é um ponto fechado em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ (isto é, $\overline{\{y\}} = \{y\}$) se e somente se, $\exists! a \in \mathbb{P}^n$ tal que $y = \{F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \mid F(a) = 0\}$.

Demonstração. (i) Temos que $y \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, sabemos que $\overline{\{y\}} = \bigcap V(I)$ sendo I o ideal homogêneo de $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ tal que $y \in V(I)$. Note que:

$$\begin{aligned} y \in V(I) &\iff I \subseteq y \\ &\implies V(y) \subseteq V(I) \\ &\implies V(y) \subseteq \bigcap V(I) = \overline{\{y\}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, $y \in V(y)$. Assim, $V(y)$ é um fechado contendo $\{y\}$. Logo, $\overline{\{y\}} \subseteq V(y)$. Portanto, $\overline{\{y\}} = V(y) \quad \forall y \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$.

(ii) $[\implies]$ Temos $y \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ fechado. Queremos mostrar que existe um único $a \in \mathbb{P}^n$ tal que $y = \{F \in S \mid F(a) = 0\}$, para isto iniciaremos com as seguintes afirmações:

Afirmção 1: $Z(y) \subseteq \mathbb{P}^n$ é não vazio.²

Afirmção 2: Se $a \in Z(y)$ então $I(a) = y$. Sendo $I(a) = \{F \in S \mid F(a) = 0\}$.

De fato, se $a \in Z(y)$ então $I(Z(y)) \subseteq I(a)$. Além disso, o Teorema dos zeros de Hilbert (cf. Teorema A.1) nos garante que $y \subseteq I(a)$. A seguir, mostraremos que $y = I(a)$. Assuma que $a = [a_0 : a_1 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n$. Logo $a_i \neq 0$ para algum i . Suponha sem perda de generalidade que $a_0 \neq 0$. Logo, $a = [1 : b_1 : \dots : b_n]$ com $b_i = a_i/a_0$. Neste caso temos,

$$\begin{aligned} I(a) &= \{F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \mid F(a) = 0\} \\ &= \langle a_0x_1 - a_1x_0, a_0x_2 - a_2x_0, \dots, a_0x_n - a_nx_0 \rangle \\ &= \langle x_1 - b_1x_0, x_2 - b_2x_0, \dots, x_n - b_nx_0 \rangle. \end{aligned}$$

Note que se $F \in y$ for homogêneo de grau d , então podemos escreve-lo da seguinte forma:

$$F = P_1(x_1 - b_1x_0) + \dots + P_n(x_n - b_nx_0) + \alpha x_0^d$$

com $P_1, \dots, P_n \in S_{d-1}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Suponha que $y \subsetneq I(a)$ e F acima não pertence ao ideal $I(a)$. Neste caso, $\alpha \neq 0$. Logo, $x_0^d \in I(a)$. Assim, sendo $I(a)$ primo, segue que $x_0 \in I(a)$ e $I(a) = \langle x_1 - b_1x_0, x_2 - b_2x_0, \dots, x_n - b_nx_0, x_0 \rangle = S_+$. Aplicando a função Z , obtemos $\phi = Z(S_+) = Z(I(a)) = \overline{\{a\}} = \{a\}$ o que é um absurdo. Portanto, $y = I(a)$. Assim, concluímos a prova da Afirmção 2.

Agora, note que se existirem a e b em $\mathbb{P}^n$ tais que $I(a) = I(b) = y$, temos que $Z(I(a)) = Z(I(b))$ que implica em

$$\overline{\{a\}} = \overline{\{b\}} \implies \{a\} = \{b\} \implies a = b.$$

(ii) $[\impliedby]$ De (i) segue que $\overline{\{y\}} = V(y)$. Assim, precisamos mostrar que $V(I(a)) = \{I(a)\}$. Entretanto, $y = I(a)$ é um ideal maximal de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ e $\{I(a)\} \subseteq V(I(a))$. Por outro lado, se $P \in V(I(a))$ temos que $I(a) \subseteq P$. Logo por conta de $I(a)$ ser maximal, concluímos que $I(a) = P$. Com isso, temos $V(I(a)) = \{I(a)\}$. $\square$

²Como $y \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, segue que y é um ideal primo (logo radical) tal que $y \neq S$ e $y \neq S_+$. Logo, o Exercício 2.2 em [11] nos garante que $Z(y) \neq \emptyset$.

A partir da proposição que acabamos de mostrar surge o seguinte corolário:

Corolário 2.1. Os pontos do espaço projetivo clássico $\mathbb{P}^n$ correspondem-se com os pontos fechados de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$.

Demonstração. Basta observar que a função

$$\varphi : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \text{ dada por } a \longmapsto I(a) = \{F \in S \mid F(a) = 0\}$$

é injetora e sua imagem é formada pelos pontos fechados de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. $\square$

2.3 Proj(S) como esquema

Lembremos que $X \subseteq \mathbb{P}^n$ é um fechado se e somente se existe $I \subseteq S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ ideal homogêneo tal que

$$X = Z(I) := \{a \in \mathbb{P}^n \mid F(a) = 0 \ \forall F \in I\}.$$

Por exemplo,

$$\Upsilon = \{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2 \mid a_0 = 0\}$$

é um fechado de $\mathbb{P}^2$ visto que $\Upsilon = Z(I)$ com $I = \langle x_0 \rangle \subseteq S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$.

Entretanto, também se verifica que $\Upsilon = Z(\langle x_0^2 \rangle) = Z(\langle x_0^2, x_0 x_1 \rangle)$ entre muitas outras escolhas. Em geral temos que $\Upsilon = Z(J)$ para todo ideal J tal que $\sqrt{J} = I = \langle x_0 \rangle$.

Agora ao calcularmos $V(I)$ para $I = \langle x_0 \rangle$ temos que

$$\begin{aligned} V(I) &= \{P \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid I \subseteq P\} \\ &= \{P \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid x_0 \in P\} \\ &= \{\langle x_0 \rangle\} \cup \{\langle x_0, \alpha x_2 - \beta x_1 \rangle \mid [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1\}. \end{aligned}$$

De forma análoga verifica-se que $V(I) = V(J)$ para todo ideal homogêneo $J \subseteq S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ tal que $\sqrt{J} = I = \langle x_0 \rangle$. Assim,

$$V : \{I \subseteq S \mid I \text{ é homogêneo}\} \longrightarrow \{\text{fechados em } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n\} \text{ dada por } I \longmapsto V(I)$$

também não consegue distinguir ideais distintos que determinam o mesmo fechado em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$.

Os esquemas, e em especial os subesquemas, fechados de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ de certa forma nos permitem captar e/ou diferenciar ideais que possuem o mesmo radical³ e que definem subesquemas distintos de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$.

Para podermos definir o conceito de esquema, precisamos introduzir os conceitos de pré-feixe e de feixe.

Definição 2.1. Seja X um espaço topológico, um *pré-feixe* $\mathcal{F}$ sobre X associa a cada aberto U em X um conjunto $\mathcal{F}(U)$, e a cada par de abertos U e V em X tais que $U \subseteq V$ um mapa de restrição

$$res_{V,U} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

Satisfazendo as seguintes propriedades:

(PF1) $res_{U,U} = Id_{\mathcal{F}(U)}$ para todo aberto $U \subseteq X$.

(PF2) $res_{V,U} \circ res_{W,V} = res_{W,U}$ para todos os abertos $U \subseteq V \subseteq W$ de X .

A seguir, faremos algumas observações importantes sobre um pré-feixe $\mathcal{F}$ sobre X .

1. Os elementos de $\mathcal{F}(U)$ são chamados de seções de $\mathcal{F}$ sobre U e os elementos de $\mathcal{F}(X)$ são chamados de seções globais.
2. A imagem de $s \in \mathcal{F}(V)$ pelo mapa de restrição $res_{V,U}$ será denotada por $s|_U$ isto é,

$$res_{V,U} : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \text{ é dada por } s \longmapsto s|_U.$$

3. Outra maneira de definir um pré-feixe é como um funtor contravariante

$$\mathcal{F} : \{ \text{abertos de } X \} \longrightarrow \{ \text{conjuntos} \}$$

da categoria dos abertos de X na categoria dos conjuntos, onde cada inclusão $U \subseteq V$ define um morfismo $U \longrightarrow V$.

4. Podemos trocar a categoria dos conjuntos pela categoria dos grupos abelianos, anéis, álgebras, etc. Nestes casos, teremos definido um pré-feixe de grupos abelianos, ..., etc.

³Seja I um ideal do anel comutativo com unidade A . O *radical* do ideal I , que será denotado por $\sqrt{I}$, é definido por:

$$\sqrt{I} = \{a \in A \mid a^m \in I \text{ para algum inteiro } m > 0\}.$$

O ideal I é dito *radical* se $I = \sqrt{I}$.

Em seguida, definiremos o conceito de feixe:

Definição 2.2. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um pré-feixe sobre X . $\mathcal{F}$ é um *feixe* sobre X se satisfaz a seguinte condição:

Para todo $U \subseteq X$ e para toda cobertura aberta $\{U_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ de U , se $f_a \in \mathcal{F}(U_a)$ e $a \in \mathcal{A}$ são tais que

$$f_a|_{U_a \cap U_b} = f_b|_{U_a \cap U_b} \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Então existe um único elemento $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f|_{U_a} = f_a$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

A modo de exemplo definiremos a seguir o feixe de seções Γ associado a uma função contínua.

Exemplo 2.1. Seja $\pi : X \rightarrow Y$ uma função contínua entre espaços topológicos, definimos o feixe de seções Γ , associado a π , sobre Y por

$$\Gamma(U) = \{s : U \rightarrow \pi^{-1}(U) \mid \pi \circ s = Id_U\}.$$

Os morfismos de restrição são definidos pelas restrições naturais.

A seguir definiremos o feixe das funções regulares sobre $Spec(A)$.

Feixe das funções regulares sobre $Spec(A)$

Seja A um anel comutativo com unidade. Lembremos que $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ então $A_{\mathfrak{p}}$ denota a localização do anel A no sistema multiplicativamente fechado $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Assim,

$$A_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in A \text{ e } b \notin \mathfrak{p} \right\}.$$

A cada aberto U de $X = Spec(A)$ associamos

$$\mathcal{O}_x(U) = \left\{ s : U \rightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in Spec(A)} A_{\mathfrak{p}} \mid \forall x \in U, s \text{ satisfaz (i) e (ii) a seguir} \right\},$$

(i) $s(x) \in A_x$;

(ii) $\exists V \subseteq U$ contendo x e $a, b \in A$ tais que $b \notin \mathfrak{p}$ e $s(y) = \frac{a}{b} \in A_y \quad \forall y \in V$.

Sejam $U \subseteq V$ abertos de X . Considere as seguintes funções de restrição:

$$r_{V,U} : \mathcal{O}_X(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(U) \text{ definida por } s \mapsto s|_U.$$

Proposição 2.3. Com as notações acima. Verifica-se que:

1. $\mathcal{O}_X(U)$ é um anel comutativo com unidade para cada aberto U de X .
2. $r_{V,U}$ está bem definida e é um homomorfismo de anéis $\forall U \subseteq V$ aberto de X .
3. $\mathcal{O}_X$ é um feixe sobre X .

Demonstração. 1. Considere as funções s e t em $\mathcal{O}_X(U)$. Note que $s + t$ e $s \cdot t$ pertencem ao conjunto $\mathcal{O}_X(U)$. De fato, como $s(x), t(x) \in A_x$ para todo $x \in U$, segue que

$$(s + t)(x) = s(x) + t(x) \in A_x \text{ e } (s \cdot t)(x) = s(x)t(x) \in A_x \quad \forall x \in U$$

Por outro lado, considerando $x \in U$ sabemos que existe $V \subset U$ aberto contendo x e $a, b \in A$ tais que $b \notin x$ e $s(y) = \frac{a}{b} \in A_y \quad \forall y \in V$ e que existe $W \subset U$ aberto contendo x e $c, d \in A$ tais que $d \notin x$ e $t(y) = \frac{c}{d} \in A_y \quad \forall y \in W$. Observe que $V \cap W \subseteq U$ é um aberto contendo x tal que para todo $y \in V \cap W$ vale que

$$(s + t)(y) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \in A_y \text{ e } (s \cdot t)(y) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in A_y.$$

Portanto, $s + t$ e $s \cdot t$ pertencem a $\mathcal{O}_X(U)$.

Perceba agora que $\mathcal{O}_X(U)$ é um anel comutativo com unidade. Este resultado segue do fato que A_x com unidade $\frac{1}{1}$ para todo $x \in \text{Spec}(A)$

2. A restrição de funções esta bem definida. Além disso, se $s \in \mathcal{O}_X(V)$ e satisfaz as condições (i) e (ii) para todo $x \in V$, segue que $s|_U \in \mathcal{O}_X(U)$ e também satisfaz as condições (i) e (ii) para todo $x \in U$, visto que $U \subseteq V$.
3. Deixamos a cargo do leitor verificar que $\mathcal{O}_X$ é um pré-feixe sobre X .

A seguir vamos verificar que $\mathcal{O}_X$ é um feixe sobre X . Para isto, sejam $U \subseteq X$, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma cobertura aberta de U e $s_\alpha \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$ uma família de seções tal que

$$s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \text{ para todo } \alpha, \beta \in I.$$

Defina $s(x) = s_\alpha(x)$ se $x \in U_\alpha$. A seguir, considere $x \in U$. Assim, $x \in U_\alpha$ para algum $\alpha \in I$ e ao considerarmos $s_\alpha \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$, tem-se que existem $V \subseteq U_\alpha$ contendo x e $a, b \in A$ tais que $b \notin x$ e $s_\alpha(y) = a/b \in A_y \quad \forall y \in V$. Assim, $s(y) = a/b \in A_y \quad \forall y \in V$, de onde concluímos que $s \in \mathcal{O}_X(U)$. Além disso, segue-se da definição de s que $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Deixamos a unicidade a cargo do leitor.

□

Em seguida, iremos definir espaços anelados e localmente anelados.

Definição 2.3. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um feixe sobre X , dizemos que $\mathcal{F}$ é um feixe de anéis sobre X se:

1. $\mathcal{F}(U)$ é um anel para todo $U \subseteq X$ aberto.
2. Os mapas de restrição:

$$\begin{aligned} r_{V,U} : \mathcal{F}(V) &\longrightarrow \mathcal{F}(U) \\ s &\longmapsto s|_U \end{aligned}$$

com $U \subseteq V$ abertos de X são homomorfismos de anéis.

Definição 2.4. O par $(X, \mathcal{F})$ é denominado *espaço anelado* se $\mathcal{F}$ for um feixe de anéis sobre X .

Para definir o conceito de espaço localmente anelado precisamos introduzir o conceito de "stalks" ou fibra de $\mathcal{F}$ sobre $x \in X$.

Definição 2.5. Seja $\mathcal{F}$ um pré-feixe sobre o espaço topológico X e $x \in X$ definimos a *fibra* (ou *stalk*) de $\mathcal{F}$ sobre x , que denotaremos por $\mathcal{F}_x$ da seguinte forma:

$$\mathcal{F}_x = \{(U, s) | x \in U \subseteq X, s \in \mathcal{F}(U)\}$$

onde $(U, s) \sim (V, t) \iff \exists W \subseteq U \cap V$ aberto contendo x tal que $s|_W = t|_W$.

Observações 2.1. Com as notações acima, temos:

1. $\sim$ define uma relação de equivalência no conjunto

$$\mathcal{F}_X = \{(U, s) | x \in U \subseteq X, s \in \mathcal{F}(U)\}.$$

2. A classe de equivalência associada a (U, s) será denotada por s_x .
3. Se $\mathcal{F}$ for um pré-feixe de grupos (anéis,..., etc.) então $\mathcal{F}_x$ será um grupo (anel,..., etc.)
4. Temos o seguinte mapa natural de $\mathcal{F}(U)$ para $\mathcal{F}_x$

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_x \quad s \longmapsto s_x$$

Note que a função acima definida será um homomorfismo de grupos (de anéis,..., etc.) se $\mathcal{F}$ for um pré-feixe de grupos (de anéis,..., etc.).

5. Se $\mathcal{F}$ for um feixe, então temos que

$$s = 0 \in \mathcal{F}(U) \iff s_x = 0 \quad \forall x \in U.$$

De fato, se $s_x = 0 \quad \forall x \in U$ então existe $U_x \subseteq U$ aberto contendo x tal que $s|_{U_x} = 0$, ou seja, temos uma cobertura de U onde s coincide com a seção nula, como $\mathcal{F}$ é um feixe concluimos que $s = 0 \in \mathcal{F}(U)$.

Por exemplo, se $\mathcal{O}_X$ for o feixe das funções regulares sobre $X = \text{Spec}(A)$, verifica-se que:

Proposição 2.4. Seja $\mathcal{O}_X$ o feixe de funções regulares sobre $X = \text{Spec}(A)$. Então os anéis

1. $\mathcal{O}_{X,x}$ e A_x são isomorfos para todo $x \in X$.
2. $\mathcal{O}_X(X_f)$ e A_f são isomorfos para todo $f \in A$, sendo $X_f = \{x \in X \mid f \notin x\}$

Demonstração. Lembremos que o feixe $\mathcal{O}_X$ sobre $X = \text{Spec}(A)$ é definido da seguinte forma: A cada aberto U de X , associamos

$$\mathcal{O}_x(U) = \left\{ s : U \rightarrow \bigsqcup_{p \in \text{Spec}(A)} A_p \mid \forall x \in U, s \text{ satisfaz (i) e (ii) a seguir} \right\},$$

(i) $s(x) \in A_x$;

(ii) $\exists V \subseteq U$ contendo x e $a, b \in A$ tais que $b \notin x$ e $s(y) = \frac{a}{b} \in A_y \quad \forall y \in V$.

Com funções de restrição:

$$r_{V,U} : \mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_x(U) \text{ definida por } s \longmapsto s|_U.$$

se $U \subseteq V$ forem abertos de X .

1. Para cada elemento $\alpha \in A$ considere $X_\alpha = \{y \in X = \text{Spec}(A) \mid \alpha \notin y\}$. Para cada $x \in X$, defina

$$f_x : A_x \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \quad \text{por} \quad \frac{a}{b} \longmapsto [(X_b, s_{\frac{a}{b}})]$$

sendo $s_{\frac{a}{b}} \in \mathcal{O}_X(X_b)$ dada por $s_{\frac{a}{b}}(y) = \frac{a}{b}$ para cada $y \in X_b$. A seguir observe que f_x está bem definida. De fato, se $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in A_x$ são tais que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então existe $\alpha \notin x$ tal que $\alpha(ad - bc) = 0$. Agora considere $W = X_b \cap X_d \cap X_\alpha$, note que W é um subconjunto aberto em $X_b \cap X_d$ que contém x . Além disso,

$$s_{\frac{a}{b}}(y) = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = s_{\frac{c}{d}}(y) \in A_y \quad \forall y \in W \implies f_x\left(\frac{a}{b}\right) = f_x\left(\frac{c}{d}\right).$$

Em seguida, observe que f_x é um homomorfismo de anéis (deixamos a cargo do leitor).

Observe também que f_x é injetiva. Basta mostrar que $\mathcal{N}(f_x) = \left\{ \frac{0}{1} \right\}$. Note que

$$\frac{a}{b} \in \mathcal{N}(f_x) \iff f_x \left(\frac{a}{b} \right) = [(X_b, s_{\frac{a}{b}})] = 0 \in \mathcal{O}_{X,x}$$

sendo $0 = [X, \hat{0}]$ com $\hat{0}(y) = \frac{0}{1}$. De onde concluímos que $s_{\frac{a}{b}}(y) = \frac{a}{b} = \frac{0}{1}$ para todo $y \in X_b$. Por último, perceba que f_x é sobrejetiva. De fato, observe que todo elemento $s_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ admite um representante da forma $[V, s_{\frac{a}{b}}]$ (pela condição (ii)). Agora, como $[V, s_{\frac{a}{b}}] = [X_b, s_{\frac{a}{b}}] = f_x \left(\frac{a}{b} \right)$, segue que f_x é sobrejetiva. Portanto fica provado que f_x é um isomorfismo de anéis.

2. Considere $f \in A$ e $\varphi : A_f \rightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$ definida por

$$u = \frac{a}{f^n} \mapsto s_u \quad \text{com } s_u(x) = \frac{a}{f^n} \in A_x \text{ se } x \in X_f.$$

Observe que φ está bem definida. Deixamos a cargo do leitor a verificar que φ é um isomorfismo de anéis.

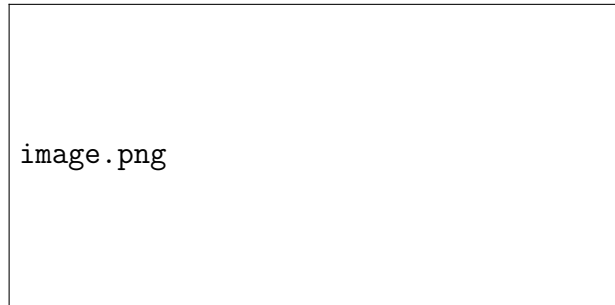
□

A seguir iremos trazer a definição de espaço localmente anelado.

Definição 2.6. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{F}$ um feixe sobre X . O par $(X, \mathcal{F})$ é denominado *espaço localmente anelado* se $(X, \mathcal{F})$ for um espaço anelado tal que $\mathcal{F}_x$ (a fibra de $\mathcal{F}$ sobre x) for um anel local $\forall x \in X$.

A seguir vamos introduzir o conceito de isomorfismo entre espaços localmente anelados. Com esse objetivo em mente precisamos das definições de morfismo entre feixes e de imagem direta de um feixe.

Definição 2.7. Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ feixes sobre X . Um *morfismo* entre feixes $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é uma coleção de funções $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ com U variando nos abertos de X , tais que para toda inclusão $U \subseteq V$ verifica-se que o diagrama



comuta.

Observação 2.1. Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes sobre X . φ induz um morfismo entre as fibras (ou seja, uma função). De fato, defina

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x & \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x \\ [(U, s)] & \mapsto [(U, \varphi_U(s))] \end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

A seguir vamos introduzir a definição de morfismo injetivo, sobrejetivo e isomorfismo.

Definição 2.8. Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo entre feixes.

1. φ é *sobrejetivo* se $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ é sobrejetivo para todo $x \in X$.
2. φ é *injetivo* se $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ é injetivo para todo $x \in X$.
3. φ é *bijetivo* se $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ é bijetivo para todo $x \in X$.

De fato, verifica-se que

Proposição 2.5. Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo entre feixes. Então

- (i) φ é injetivo se e somente se φ_U é injetivo para todo aberto $U \subseteq X$.
- (ii) φ é bijetivo se e somente se φ_U é bijetivo para todo aberto $U \subseteq X$.

Definição 2.9. Dizemos que um morfismo $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é um *isomorfismo* se existe um morfismo $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ tal que

$$\varphi_U \circ \psi_U = id_{\mathcal{G}(U)} \text{ e } \psi_U \circ \varphi_U = id_{\mathcal{F}(U)}$$

para todo aberto $U \subseteq X$.

Proposição 2.6. Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo. Então

- (i) φ é um isomorfismo se e somente se $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ é isomorfismo para todo $U \subseteq X$
- (ii) φ é um isomorfismo se e somente se $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ é isomorfismo para todo $x \in X$

Em seguida, traremos a definição de feixe imagem direta

Definição 2.10. Sejam X e Y espaços topológicos. Considere $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e $\mathcal{F}$ um feixe sobre X . O *feixe imagem direta* de $\mathcal{F}$ via f é um feixe sobre Y denotado por $f_*\mathcal{F}$ e definido da seguinte forma:

$$f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

para todo U aberto de Y . E as funções restrição $r_{V,U}^{f_*\mathcal{F}} : f_*\mathcal{F}(V) \rightarrow f_*\mathcal{F}(U)$ se $U \subseteq V$ são abertos de Y são dadas por:

$$r_{f^{-1}(V),f^{-1}(U)}^{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

Por exemplo, se $\mathcal{F}$ for um pré-feixe sobre X e U um aberto de X , a inclusão $i : U \rightarrow X$ determina a imagem direta $i_*\mathcal{F}$ que é um pré-feixe sobre U . $i_*\mathcal{F}$ é usualmente denotado por $\mathcal{F}|_U$ e denominado restrição de $\mathcal{F}$ a U .

Definição 2.11. Sejam $\mathcal{F}$ um pré-feixe sobre o espaço topológico X e um aberto $U \subseteq X$. O pré-feixe $\mathcal{F}|_U$ sobre U , denominado *restrição* de $\mathcal{F}$ sobre U , é dado por $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$ para qualquer aberto V de U , os morfismos de restrição são os mesmos que os de $\mathcal{F}$. Note que, se $\mathcal{F}$ for um feixe, então $\mathcal{F}|_U$ também o será.

A seguir, definiremos morfismos entre espaços localmente anelados.

Definição 2.12. Sejam X e Y espaços topológicos e $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ feixes sobre X e Y , respectivamente. Se $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ forem espaços anelados, então um *morfismo entre espaços anelados* de $(X, \mathcal{O}_X)$ em $(Y, \mathcal{O}_Y)$ é um par $(f, f^\#)$ onde $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua e $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ é um morfismo de feixes sobre Y . Se $(X, \mathcal{O}_X)$ e $(Y, \mathcal{O}_Y)$ forem espaços localmente anelados e $(f, f^\#)$ um morfismo de $(X, \mathcal{O}_X)$ em $(Y, \mathcal{O}_Y)$. O par $(f, f^\#)$ é um morfismo entre espaços localmente anelados se $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow f_{*,x}\mathcal{O}_{X,x}$ for um homomorfismo local.

A seguir, iremos trazer as definições de Esquema e de Esquema afim.

Definição 2.13. Um espaço localmente anelado $(X, \mathcal{O}_X)$ é chamado de *Esquema afim* se $(X, \mathcal{O}_X)$ for isomorfo (como espaço localmente anelado) a $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ para algum anel comutativo A .

Definição 2.14. Um espaço localmente anelado $(X, \mathcal{O}_X)$ é chamado de *Esquema* se para todo ponto $x \in X$ existe um aberto de X contendo x tal que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ é um esquema afim.

Segue desta definição que todo esquema afim é um esquema.

2.3.1 O feixe das funções regulares $\mathcal{O}_{Proj(S)}$ sobre $Proj(S)$

Considere $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ um anel graduado qualquer. Defina⁴

$$S^h := \{f \in S \mid f \text{ é homogêneo}\}.$$

Para cada ideal primo homogêneo $\mathfrak{x} \in Proj(S)$, considere

$$T := \{f \notin \mathfrak{x} \mid f \in S_d \text{ para algum } d \geq 0\} = (S - \mathfrak{x}) \cap S^h.$$

Observe que T é um sistema multiplicativamente fechado de S . Denotaremos por $S_{(x)}$ o subanel da localização $T^{-1}S$ definido por:

$$S_{(x)} = \left\{ \frac{s}{t} \in T^{-1}S \mid s \text{ é homogêneo e } grau(s) = grau(t) \right\}.$$

Seja $U \subseteq Proj(S)$ um subconjunto aberto, definimos

$$\mathcal{O}_{Proj(S)}(U) = \left\{ s : U \rightarrow \bigsqcup_{p \in Proj(S)} S_{(p)} \mid \forall x \in U, s \text{ satisfaz (i) e (ii) a seguir} \right\}$$

$$(i) \quad s(x) \in S_{(x)}$$

$$(ii) \quad \exists V \subseteq U \text{ contendo } x, \exists a, b \in S \text{ homogêneos do mesmo grau tais que } b \notin \mathfrak{x} \text{ e } s(y) = \frac{a}{b} \in S_{(y)} \forall y \in V.$$

Teorema 2.1. Seja $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ um anel graduado com ideal irrelevante S_+ .

Então

- (a) $\mathcal{O}_{Proj(S)}$ define um feixe de anéis sobre $Proj(S)$.
- (b) Para todo $\mathfrak{x} \in Proj(S)$ o stalk $\mathcal{O}_{Proj(S), \mathfrak{x}}$ é isomorfo ao anel local $S_{(x)}$.
- (c) Os conjuntos abertos $D_+(f) = Proj(S) - V(f)$, com $f \in S_+$ homogêneo e $V(f) = \{P \in Proj(S) \mid f \in P\}$, formam uma cobertura aberta de $Proj(S)$. Além disso,

$$(D_+(f), \mathcal{O}_{Proj(S)}|_{D_+(f)}) \cong (Spec(S_{(f)}), \mathcal{O}_{Spec(S_{(f)})}).$$

Como espaços localmente anelados, sendo

$$S_{(f)} = \left\{ \frac{s}{f^n} \in S_f \mid s \text{ é homogêneo e } grau(s) = grau(f^n) \right\}.$$

- (d) $(Proj(S), \mathcal{O}_{Proj(S)})$ é um esquema.

Demonstração. Veja Proposition 2.5, p. 76 em [11]. □

⁴Lembre que $f \in S$ é dito homogêneo, se $f \in S_d$ para algum $d \geq 0$. Além disso, se $f \in S_d$ for não nulo, então $grau(f) = d$.

2.3.2 Subesquemas fechados de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$

Considere a graduação usual em $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ e I um ideal homogêneo em S . Então $\frac{S}{I}$ também é um anel graduado. De fato, $\frac{S}{I} = \bigoplus_{d \geq 0} \frac{S_d}{I_d}$. Assim, o teorema anterior nos garante que $\left(Proj\left(\frac{S}{I}\right), \mathcal{O}_{Proj\left(\frac{S}{I}\right)} \right)$ é um esquema. Observe que o homomorfismo de anéis $\pi : S \rightarrow \frac{S}{I}$ dado por $a \mapsto \bar{a}$ induz um morfismo

$$Proj\left(\frac{S}{I}\right) \rightarrow V(I) \subseteq Proj(S)$$

$$P \mapsto \pi^{-1}(P) = \{a \in S \mid \bar{a} \in P\}.$$

Definição 2.15. Diremos que o esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ ou simplesmente X é um *subesquema fechado* de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ se existir $I \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ ideal homogêneo tal que

$$X = V(I) \subseteq Proj(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]) \text{ e } \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_{Proj\left(\frac{S}{I}\right)}.$$

Observação 2.2. Existem ideais distintos que determinam o mesmo fechado em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. Portanto teremos diferentes feixes de funções regulares.

A seguir traremos uma forma de distinguir ideais que irão determinar feixes isomorfos.

Teorema 2.2. Considere I_1 e I_2 ideais homogêneos de S tais que $V(I_1) = V(I_2)$. Os ideais I_1 e I_2 definem o mesmo subesquema fechado em $Proj(S)$ se, e somente, se I_1 e I_2 possuem o mesmo saturado.⁵

Demonstração. Veja Corolário 5.16 p. 119 e Ex. 5.10 p.125 em [11] □

Proposição 2.7. Seja $I \subseteq S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ (com a graduação usual) um ideal homogêneo e I^{sat} seu saturado. Então os polinômios de Hilbert $p_I(t)$ e $p_{I^{sat}}(t)$ são iguais.

Demonstração. Veja pagina 350 em [18] □

2.3.3 $Hilb^{p(t)}\mathbb{P}^n$ como conjunto

Considere a graduação usual em $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$.

⁵Lembre que o saturado de um ideal homogêneo $I \subseteq S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ é dado por $I^{sat} := \{f \in S \mid f x_i^k \in I \text{ para algum inteiro } k > 0, \forall i \in \{0, \dots, n\}\}.$

Observação 2.3. Lembre que, todo subesquema fechado de $\mathbb{P}^n$ é determinado por um ideal homogêneo do anel graduado S . Assim, não faremos distinção ao nos referir ao polinômio de Hilbert associado a um ideal homogêneo saturado I , ou ao polinômio de Hilbert associado ao subesquema fechado $V(I) \equiv Proj\left(\frac{S}{I}\right)$ de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

O esquema de Hilbert $Hilb^{p(t)}\mathbb{P}^n$ como um espaço de parâmetros

Dada uma coleção de objetos $\mathcal{C}$ podemos dizer que um conjunto algébrico projetivo X é um espaço de parâmetros para $\mathcal{C}$ se existe uma bijeção entre $\mathcal{C}$ e X . Pode-se substituir conjunto algébrico projetivo por esquema.

Assim, podemos dizer que o esquema de Hilbert, $Hilb^{p(t)}\mathbb{P}^n$, é um espaço de parâmetros cujos pontos fechados (ou geométricos) correspondem-se com os subesquemas fechados de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = Proj(S)$ cujo polinômio de Hilbert é igual a $p(t)$.

De fato, tendo em consideração a Observação 2.3 e a Proposição 2.7 temos a seguinte correspondência:

$$\begin{array}{c} \left\{ \text{Pontos fechados de } Hilb^{p(t)}\mathbb{P}^n \right\} \\ \updownarrow \\ \left\{ I \subset S \mid I \text{ é um ideal homogêneo saturado tal que } p_I(t) = p(t) \right\}. \end{array}$$

2.4 Construção do Esquema de Hilbert via regularidade de Gotzmann

Como já comentamos, os pontos fechados do esquema $Hilb^{p(t)}\mathbb{P}^n$ vão parametrizar os subesquemas fechados de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ com polinômio de Hilbert $p(t)$.

A existência e construção de tal esquema está fortemente atrelado ao conceito de regularidade⁶. De fato, iremos nos valer do teorema de regularidade de Gotzmann, para termos uma forma mais direta de abordar e calcular a regularidade de um ideal homogêneo saturado.

A seguir, apresentamos o teorema da regularidade de Gotzmann. Vale salientar que a representação do polinômio de Hilbert (do lado direito no enunciado desse teorema) é denominada representação de Gotzmann do polinômio $p_I(t)$. Na próxima subseção será abordada essa representação.

⁶Que não vamos introduzir neste texto, uma vez que sua definição envolve os conceitos de feixe coerente (cf. p. 111 em [11]) e de cohomologia de feixes (cf. p. 206 em [11]). O conceito de regularidade foi introduzido por David Mumford em [14]

Teorema 2.3. Seja $p_I(t)$ o polinômio de Hilbert associado ao ideal homogêneo $I \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Assuma que para todo $m \gg 0$

$$p_I(m) = \binom{m+a_1}{m} + \binom{m-1+a_2}{m-1} + \dots + \binom{m-(s-1)+a_s}{m-(s-1)}$$

sendo $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{Z}$ tais que $a_1 \geq \dots \geq a_s \geq 0$. Então o saturado de I , I^{sat} , é s -regular.

Demonstração. Veja Teorema B.33, p. 362 em [18]. □

2.4.1 Representação de Gotzmann

Considere $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$. Uma *representação de Gotzmann* de $p(t)$ é uma representação binomial tal que, para todo inteiro $m \gg 0$

$$p(m) = \binom{m+a_1}{m} + \binom{m-1+a_2}{m-1} + \dots + \binom{m-(s-1)+a_s}{m-(s-1)}$$

sendo $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{Z}$ são tais que $a_1 \geq \dots \geq a_s \geq 0$.

Exemplos 2.2. 1. Se $p(t) = 3$ então escolha $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ e note que:

$$p(m) = 3 = \binom{m}{m} + \binom{m-1}{m-1} + \binom{m-2}{m-2} \quad \forall m \geq 3$$

2. Se $p(t) = t + 1$ então escolha $a_1 = 1$ e note que:

$$p(m) = m + 1 = \binom{m+1}{m} \quad \forall m \geq 1$$

Proposição 2.8. Seja $I \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ um ideal homogêneo e $p_I(t) \in \mathbb{Q}[t]$ seu polinômio de Hilbert. Então $p_I(t)$ possui uma única representação de Gotzmann.

Demonstração. Veja Corolário B. 31, p. 361 em [19] □

A quantidade de termos que aparecem na representação de Gotzmann associada ao polinômio de Hilbert $p_I(t)$ é denominada *número de Gotzmann* de I .

Exemplos 2.3. Sejam $I \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ um ideal homogêneo e $p_I(t) \in \mathbb{Q}[t]$ seu polinômio de Hilbert.

1. Sabemos que o polinômio de Hilbert de $\mathbb{P}^n$, isto é, $(I = \{0\} \subseteq S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n])$ é dado por

$$p(t) = \binom{t+n}{n}.$$

Queremos escrever

$$p(m) = \binom{m+n}{n} = \binom{m+a_1}{m} + \binom{m-1+a_2}{m-1} + \dots + \binom{m-(s-1)+a_s}{m-(s-1)}$$

com $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_s \geq 0$ inteiros. Basta observar que

$$\binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$$

desta forma, escolha $a_1 = n$. Como $s = 1$, segue que o número de Gotzmann de $p(t)$ é 1.

2. Considere I tal que $p_I(t) = t + 2$. Observe que

$$p_I(m) = m + 2 = \binom{m+1}{m} + \binom{m-1}{m-1}$$

Visto que,

$$\binom{k+1}{k} = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1,$$

segue que

$$\binom{m+1}{m} = m+1 \text{ e } \binom{m-1}{m-1} = 1.$$

Logo, $s = 2$, $a_1 = 1$ e $a_2 = 0$ e o número de Gotzmann associado é 2.

3. Considere I tal que $p_I(t) = 2t + 2$. Observe que

$$p_I(m) = 2m + 2 = \binom{m+1}{m} + \binom{m}{m-1} + \binom{m-2}{m-2}$$

Visto que,

$$\binom{k+1}{k} = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1,$$

segue que

$$\binom{m+1}{m} = m+1, \binom{m}{m-1} = m \text{ e } \binom{m-2}{m-2} = 1.$$

Logo, $s = 3$, $a_1 = a_2 = 1$ e $a_3 = 0$ e o número de Gotzmann associado é 3.

2.4.2 Equações para o Esquema de Hilbert

Seja I um ideal homogêneo saturado em $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ que define um subesquema fechado de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ com polinômio de Hilbert $p(t)$.

Teorema 2.4. Existe um inteiro positivo m_0 (que só depende dos coeficientes de $p(t)$) tal que se $d \geq m_0$, então I_d é gerado por I_{m_0} e $\dim \frac{S_d}{I_d} = p(d)$. Além disso, um subespaço vetorial V de S_d de dimensão $\dim S_d - p(d)$ gera um ideal com polinômio de Hilbert $p(t)$ se e somente se

$$\dim \left(\frac{S_{d+1}}{S_1 V} \right) = p(d+1).$$

Demonstração. Confira p. 206 no texto [10]. □

Observações 2.2. Sobre o Teorema 2.4.

- O inteiro m_0 no Teorema 2.4 é denominado de Castelnuovo–Mumford regularidade do ideal saturado $I \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$.
- Os comentários no texto “The Geometry of schemes” de Eisenbud–Harris (p. 263-264 em [9]) foram muito uteis para entender o Teorema 2.4, e principalmente sua implicação na visualização de $\text{Hilb}^{p(t)} \mathbb{P}^n$ como um fechado numa grassmanniana.⁷

Teorema 2.5. O número de Gotzmann de um polinômio admissível $p(t)$ é o melhor limite superior para a regularidade de Castelnuovo–Mumford de um subesquema fechado tendo $p(t)$ como polinômio de Hilbert.

Demonstração. Confira [5]. □

No que segue, seja m_0 o número de Gotzmann de um polinômio admissível $p(t)$ e $q(m) := \dim S_m - p(m)$ para todo inteiro positivo m .

Observe que o Teorema 2.5 nos permite utilizar o número de Gotzmann no Teorema 2.4. Assim, obtemos a correspondência:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{H}} \\ I & \longmapsto & I_{m_0} \end{array}$$

⁷Seja V um espaço vetorial sobre k de dimensão finita n . Para cada d inteiro, $0 \leq d \leq n$, definimos $G_d(V) = \left\{ W \mid W \text{ é um subespaço de } V \text{ de dimensão } d \right\}$.

O conjunto $G_d(V)$ será denominado *grassmanniana* dos subespaços de dimensão d de V .

sendo

$$\mathcal{H} = \{I \subseteq S \mid I \text{ é homogêneo saturado com } p_I(t) = p(t)\},$$

e

$$\tilde{\mathcal{H}} = \{V \leq S_{m_0} \mid \dim V = q(m_0) \text{ e } \dim S_1 V = q(m_0 + 1)\}.$$

Sendo a inversa dada por $V \mapsto \overline{\langle V \rangle}$.

Agora observe que:

$$V \in \tilde{\mathcal{H}} \implies \dim V = q(m_0) \implies V \in G_{q(m_0)}(S_{m_0}).$$

Portanto, $\tilde{\mathcal{H}} \subseteq G_{q(m_0)}(S_{m_0})$.

Proposição 2.9. $\tilde{\mathcal{H}}$ define um fechado em $G_{q(m_0)}(S_{m_0})$

Demonstração. De fato, considere $V \in \tilde{\mathcal{H}}$. A seguir vamos fixar a base ordenada $\{x_0^{m_0}, x_0^{m_0-1}x_1, \dots, x_n^{m_0}\}$ de S_{m_0} . Observe que podemos escolher uma base $\{f_1, \dots, f_k\}$ de V sendo $k = q(m_0)$ de modo que suas coordenadas na base de S_{m_0} fixada (representadas nas linhas da matriz a seguir), sejam da seguinte forma:⁸

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,N_0} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,N_0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{k,k+1} & & a_{k,N_0} \end{bmatrix}$$

sendo $N_0 = \dim S_{m_0}$, se $V \in \mathcal{U}_{1,2,\dots,k}$.

Essa representação corresponde a um ponto num aberto de $G_k(S_{m_0})$ sendo $k = q(m_0)$.

⁸Se $V = [g_1, \dots, g_r] \in G_r(S_d)$ e fixarmos uma base α de S_d , então considere $N_d = \dim S_d$

e

$$[V] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N_d} \\ a_{21} & \dots & a_{2N_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rN_d} \end{bmatrix}$$

onde as entradas de cada linha correspondem-se com os coeficientes de g_i na base α . Os abertos básicos de $G_r(S_d)$ são dados por

$$\mathcal{U}_{i_1 \dots i_r} = \{V \in G_r(S_d) : \det([V]_{i_1 \dots i_r}) \neq 0\}$$

sendo $[V]_{i_1 \dots i_r}$ com $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq N_d = \dim S_d$ o menor $r \times r$ da matriz $[V]$ determinado pelas colunas nas posições $i_1, \dots, i_r$.

Note que $\{f_1x_0, \dots, f_1x_n, \dots, f_kx_0, \dots, f_kx_n\}$ é um conjunto de geradores de S_1V . Assim, ao considerar $\{u_1, \dots, u_{M_0}\}$ base de S_{m_0+1} ($M_0 = \dim S_{m_0+1}$) e colocarmos as coordenadas dos vetores x_if_j (na base $\{u_1, \dots, u_{M_0}\}$), como linhas de uma matriz, chegamos na seguinte representação matricial

$$M = \begin{bmatrix} I_4 & * & \cdots & * & B_1 \\ * & I_4 & \cdots & * & B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & I_4 & B_k \end{bmatrix} \begin{array}{l} 4 \text{ linhas com os coeficientes de } f_1x_0, \dots, f_1x_3 \\ 4 \text{ linhas com os coeficientes de } f_2x_0, \dots, f_2x_3 \\ \vdots \\ 4 \text{ linhas com os coeficientes de } f_kx_0, \dots, f_kx_3 \end{array}$$

sendo I_4 a matriz identidade de ordem 4×4 e B_i $i = 1, \dots, k$ são matrizes com coeficientes.

Assim, $\dim S_1V = \text{posto}(M)$. Como $V \in \tilde{\mathcal{H}}$, segue que

$$\dim S_1V = q(m_0 + 1) \implies \text{posto}(M) = q(m_0 + 1).$$

Isto é, todos os menores da matriz M de ordem maior que $q(m_0 + 1)$, são nulos. O que define um fechado no aberto em questão. De fato temos que:

$$\begin{aligned} & \left\{ \text{Pontos fechados de } \text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n \right\} \\ & \quad \updownarrow \\ & \left\{ I \subseteq S \mid I \text{ é um ideal homogêneo saturado tal que } p_I(t) = p(t) \right\} \\ & \quad \updownarrow \\ & \left\{ V \subseteq S_{m_0} \mid \dim V = q(m_0) \text{ e } \dim S_1V = q(m_0 + 1) \right\} \hookrightarrow G_{q(m_0)}(S_{m_0}) \end{aligned}$$

O que nos permite visualizar $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^n$ como um fechado da Grassmanniana $G_{q(m_0)}(S_{m_0})$. $\square$

Capítulo 3

Pontos fechados em certos esquemas de Hilbert de curvas

Neste capítulo iremos descrever os pontos fechados dos esquemas de Hilbert $\text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^3$, sendo $p(t) = dt + 1 - g$ onde g é o gênero aritmético da curva e d seu grau, nos seguintes casos $(d, g) \in \{(1, 0), (1, -1), (2, 0), (2, -1)\}$.

No que segue do texto vamos considerar $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Lembre-se que

$$\{x \in \text{Hilb}^{p(t)}\mathbb{P}^3 \mid x \text{ é fechado}\}$$

está em bijeção com

$$\mathbb{H}_{p(t)} := \{I \subset S \mid I \text{ é homogêneo saturado e } p_I(t) = p(t)\}$$

sendo $p_I(t)$ o polinômio de Hilbert associado ao ideal I (ou equivalentemente, ao subesquema fechado definido por I).

A seguir vamos introduzir alguns resultados que iremos utilizar para obter a descrição de $\mathbb{H}_{p(t)}$.

3.1 Resultados preliminares

Seja $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ um subesquema fechado.

- O grau de C será denotado por $\text{gr}(C)$ e sua dimensão por $\dim C$.¹
- Denotaremos por $I_C \subset S$ o ideal homogêneo saturado que define C .

¹Se $I \subset \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ for um ideal homogêneo saturado que define o subesquema fechado $C \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, então $\text{gr}(C) := \frac{a_m}{m!}$ e $\dim C := m$ se, $p_I(t) = a_m t^m + \cdots + a_1 t + a_0$.

- Denotaremos por $C_{red} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ o subesquema fechado definido pelo radical de I_C .
- C é um *ponto* se e somente se $I_C = \langle L_1, L_2, L_3 \rangle$ sendo L_1, L_2 e $L_3 \in S_1$ linearmente independentes.
- C é uma *reta* se e somente se $I_C = \langle L_1, L_2 \rangle$ sendo L_1 e $L_2 \in S_1$ linearmente independentes.
- C é uma *cônica* se e somente se $I_C = \langle L, f \rangle$ com $L \in S_1$ e $f \in S_2 - LS_1$. O plano H definido pelo ideal $I_H = \langle L \rangle$ será denominado *plano suporte* da cônica C .
- C é uma *cônica reduzida* se e somente se $I_C = \langle L, f \rangle$ com $L \in S_1$ e $f \in S_2 - LS_1$ sendo I_C um ideal radical.
- C é uma *curva* se $p_{I_C}(t) = dt + d_0 \in \mathbb{Z}[t]$. Ou equivalentemente, C é um subesquema fechado de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ de dimensão 1 e grau d (isto é $d = \text{gr}(C)$).

A proposição a seguir será muito útil no decorrer do texto.

Proposição 3.1. Seja $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ uma curva de grau d tal que I_X é radical. Assuma que

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_{k_1} \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_{k_2}$$

sendo $X_1, \dots, X_{k_1}$ as componentes irredutíveis de dimensão 1 e $Y_1, \dots, Y_{k_2}$ componentes irredutíveis de dimensão 0. Então

$$\text{gr}(X) = \text{gr}(X_1) + \dots + \text{gr}(X_{k_1}).$$

Em particular, $k_1 \leq d$.

Demonstração. Confira na página 52 do livro de Hartshorne ([11]). □

Lema 3.1. Seja C um subesquema fechado de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ de dimensão 1 e grau d . Seja Σ uma componente irredutível de dimensão 1 de C_{red} . Verifica-se que:

1. Se o grau de Σ é 1, então Σ é uma reta em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$.
2. Se o grau de Σ é 2, então Σ é uma cônica.

Demonstração. Seja Σ uma componente irredutível de dimensão 1 de C_{red} .

1. $\text{gr}(\Sigma) = 1$. Seja H um plano em $\mathbb{P}^3$. Como $\dim \Sigma = 1$ podemos escolher pontos distintos p e q em Σ . Note que:

- (i) Tendo em consideração que $\dim H = 2$ e $\dim \Sigma = 1$, segue do Teorema A.2 que $H \cap \Sigma \neq \emptyset$ (uma vez que $2 + 1 - 3 \geq 0$). Além disso, toda componente irredutível Γ de $H \cap \Sigma$ tem dimensão ≥ 0 . Portanto, $\dim \Gamma \in \{0, 1\}$.
- (ii) Escolha o plano H contendo os pontos p e q . Temos duas possibilidades: $\dim(H \cap \Sigma) = 0$ ou $\dim(H \cap \Sigma) = 1$. Suponha que $\dim(H \cap \Sigma) = 0$, ou seja, $H \cap \Sigma$ é formado por um conjunto finito de pontos.

Observe que o Teorema de Bézout em $\mathbb{P}^n$ nos garante que:

$$\text{gr}(H \cap \Sigma) = \text{gr}(H) \cdot \text{gr}(\Sigma) = 1 \cdot 1 = 1$$

Agora, tendo a consideração que $\#(H \cap \Sigma) \leq \text{gr}(H \cap \Sigma) = 1$ chegamos num absurdo, visto que $p, q \in H \cap \Sigma$.

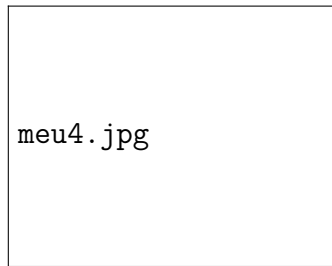
Portanto, $\dim(H \cap \Sigma) = 1$.

- (iii) Para cada plano H contendo p e q , temos que $\dim(H \cap \Sigma) = 1$. Neste caso, existe $\Gamma \subseteq H \cap \Sigma$ componente irredutível de dimensão 1 contendo p e q . Agora $\Gamma \subseteq \Sigma$ (ambos são fechados irredutíveis da mesma dimensão), logo $\Gamma = \Sigma$. Consequentemente, $\Sigma \subset H$.
- (iv) Observe que existem infinitos planos passando por p e q , repetindo a argumentação em (iii) acima, com H_1 ($H_1 \neq H$ e $p, q \in H \cap H_1$) segue que $\Sigma \subset H_1$. Assim, $\Sigma \subset H \cap H_1$, conforme ilustrado na figura a seguir

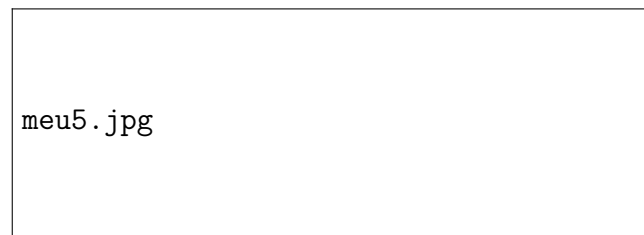


onde $\Sigma \subseteq H \cap H_1 = l$ é uma reta em $\mathbb{P}^3$. Além disso, Σ e l ambos tem dimensão 1 e são fechados irredutíveis, o que implica em $\Sigma = l$.

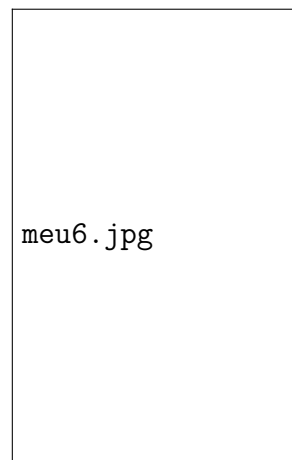
2. $\text{gr}(\Sigma) = 2$. Considere $p_1, p_2, p_3 \in \Sigma$ pontos distintos.



Seja H um plano em $\mathbb{P}^3$ contendo p_1, p_2, p_3 .



Note que, se $\dim(\Sigma \cap H) = 0$, ou seja, $\Sigma \cap H$ consiste de um conjunto finito de pontos.

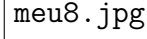


Então o teorema de Bézout em $\mathbb{P}^n$ nos garante que

$$\text{gr}(H \cap \Sigma) = \text{gr}(H) \text{gr}(\Sigma) = 1 \cdot 2 = 2$$

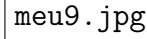
Visto que $\#(\Sigma \cap H) \leq \text{gr}(\Sigma \cap H) = 2$ implica que $\Sigma \cap H$ consiste em, no máximo, dois pontos distintos. Portanto, $\dim \Sigma \cap H = 1$.

Assim, existe $\Gamma \subseteq \Sigma \cap H$ componente irredutível de dimensão 1 contendo p_1, p_2 e p_3 .



Como $\Gamma \subseteq \Sigma$ e ambas são irredutíveis, fechados e da mesma dimensão. Segue que $\Gamma = \Sigma$. Portanto, $\Sigma \subset H$, visto que $\Gamma \subset H$.

Lembre que grau $\text{gr}(\Sigma) = 2$. Assim, Σ é uma curva plana (contida em H) de grau 2 irredutível, ou seja, uma cônica.



Neste caso, se $I_H = \langle L \rangle$ com $L \in S_1$, segue que

$I_\Sigma = I_H + \langle f \rangle = \langle L, f \rangle$ com $f \in S_2 - LS_1$ e f irredutível.

□

3.1.1 União Esquemática

Sejam X e Y subesquemas fechados de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$. A **união esquemática** de X e Y será denotada por $X \sqcup Y$, e é o subesquema fechado definido pelo ideal

$$I_X \cap I_Y.$$

Lema 3.2. Sejam l uma reta em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ e p um ponto que não pertence à reta l . Considere $C = l \sqcup p$ a união esquemática da reta l e o ponto p . Verifica-se que existe $\{h, h_1, h_2, h_3\}$ base de S_1 tal que $I_C = \langle h, h_1h_2, h_1h_3 \rangle$ e $p_{I_C}(t) = t + 2$.

Demonstração. Considere a união esquemática $l \sqcup \{p\}$ com $p \notin l$. Observe que:

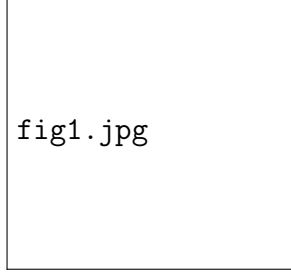


Figura 3.1: Representação de ponto fora da reta

- Existe um único plano H contendo l e p . Assim, existe $I_H = \langle h \rangle$ tal que $h \in I_l$ e $h \in I_p$. Logo $I_l = \langle h, h_1 \rangle$ e $I_p = \underbrace{\langle h, h_2, h_3 \rangle}_{\text{são L.I.}}$ com $\{h, h_1, h_2, h_3\}$ base de S_1 (visto que $p \notin l$).
- Lembremos que a união esquemática $l \sqcup \{p\}$ é definida pelo ideal:

$$I_{l \sqcup \{p\}} = \langle h, h_1 \rangle \cap \langle h, h_2, h_3 \rangle.$$

Afirmção 3.1. $I_{l \sqcup \{p\}} = \langle h, h_1 h_2, h_1 h_3 \rangle$.

Observe que $\langle h, h_1 h_2, h_1 h_3 \rangle \subseteq I_{l \sqcup \{p\}} = \langle h, h_1 \rangle \cap \langle h, h_2, h_3 \rangle$. Logo, vamos concentrar nossa atenção na outra inclusão.

Considere $f \in I_{l \sqcup \{p\}}$, neste caso,

$$f \in I_l = \langle h, h_1 \rangle \Leftrightarrow f = Ah + Bh_1, \text{ para algum } A, B \in S$$

e podemos assumir que h não comparece em B . Assim, vamos escrever $B = \alpha h_1 + \beta h_2 + \gamma h_3$ com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}[h_1, h_2, h_3]$. Por outro lado,

$$f \in I_{\{p\}} = \langle h, h_2, h_3 \rangle \Leftrightarrow f = Ch + Dh_2 + Eh_3, \text{ para algum } C, D, E \in S.$$

Assim, $Ah + Bh_1 = Ch + Dh_2 + Eh_3$. Ou equivalentemente,

$$Ah + \alpha h_1^2 + \beta h_1 h_2 + \gamma h_1 h_3 = Ch + Dh_2 + Eh_3.$$

De onde concluímos que

$$\alpha h_1^2 \in I_{\{p\}} \Rightarrow \alpha \in I_{\{p\}} \Rightarrow \alpha h_1 \in \langle h, h_1 h_2, h_1 h_3 \rangle.$$

Como $f = Ah + \alpha h_1^2 + \beta h_1 h_2 + \gamma h_1 h_3$, segue que

$$f \in \langle h, h_1 h_2, h_1 h_3 \rangle.$$

Portanto $I_{l \sqcup \{p\}} = \langle h, h_1 h_2, h_1 h_3 \rangle$.

A seguir considere uma MCP² $\varphi : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $\varphi(C) = D$ com

$$I_C = \langle h, h_1 h_2, h_1 h_3 \rangle \quad \text{e} \quad I_D = \langle x_0, x_1 x_2, x_1 x_3 \rangle.$$

Como MCD induzem isomorfismos entre os anéis de coordenadas homogêneos (que preservam graduação)

$$\frac{S}{I_C} \cong \frac{S}{I_D}$$

segue que C e D possuem a mesma função de Hilbert. Portanto,

$$p_{I_C}(t) = p_{I_D}(t).$$

Assim, o Exemplo 1.15 nos garante que $p_{I_C}(t) = t + 1$. □

Lema 3.3. Seja C um subesquema fechado de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$. Verifica-se que:

C é a união esquemática de uma cônica D (com plano suporte H) e um ponto $p \notin D$ se, e somente se, existem h, h_1, h_2, h_3 em S_1 e $f \in S_2 - hS_1$ tais que $I_H = \langle h \rangle$ e $I_D = \langle h, f \rangle$, de modo que

$$I_C = \begin{cases} \langle h, h_1 f, h_2 f \rangle & \text{com } I_p = \langle h, h_1, h_2 \rangle, \text{ se } p \in H, \\ \langle h h_1, h h_2, h h_3, f \rangle & \text{com } I_p = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle, \text{ se } p \notin H, \end{cases}$$

e $p_{I_C}(t) = 2t + 2$.

Demonstração. Se D é uma cônica em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ com plano suporte H , então existem $h \in S_1$ e $f \in S_2 - hS_1$ tais que $I_H = \langle h \rangle$ e $I_D = \langle h, f \rangle$.

A menos de uma MCP podemos assumir que o plano suporte da cônica é definido por $\langle x_3 \rangle$. Logo $I_D = \langle x_3, f \rangle$ com $f \in S_2 - x_3 S_1$.

Observe que temos duas possibilidades para a posição relativa entre p e H : $p \in H$ ou $p \notin H$. A seguir vamos estudar esses casos.

- (i) $p \in H$. Neste caso podemos escolher $h_1, h_2 \in S_1$ tais que $I_p = \langle x_3, h_1, h_2 \rangle$ com $\{x_3, h_1, h_2\}$ L.I. e podemos assumir que x_3 não aparece em $h_i, i = 1, 2$.

² $\varphi : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ MCP $\Leftrightarrow \exists T \in \text{Aut}(\mathbb{C}^4)$ tal que $\varphi([v]) = [T(v)]$. Além disso, φ induz $\varphi_{\bullet} : S \rightarrow S$ definida por

$$\varphi_{\bullet} F(x_0, x_1, x_2, x_3) = F(\varphi^{-1}(x_0, \dots, x_n)).$$

Satisfazendo:

- (a) $I \subset^{\text{ideal}} S \Leftrightarrow \tilde{I} = \varphi(I)$ é ideal de S .
(b) I primo (maximal/saturado) $\Leftrightarrow \tilde{I}$ primo (maximal/saturado)

A seguir vamos mostrar que: $I_D \cap I_p = \langle x_3, h_1f, h_2f \rangle$.

Observe que $\langle x_3, h_1f, h_2f \rangle \subseteq I_D \cap I_p$ (visto que $I_D = \langle x_3, f \rangle$ e $I_p = \langle x_3, h_1, h_2 \rangle$). Logo, só nos resta mostrar a outra inclusão.

Considere $g \in I_D \cap I_p$. Assim,

$$g = Ax_3 + Bf = \alpha x_3 + \beta h_1 + \gamma h_2 \quad (3.1)$$

com A, B, α, β e $\gamma \in S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$.

De fato, podemos assumir que x_3 não comparece em B, β e γ .

Isto implica, ao substituirmos $x_3 = 0$, em (3.1), que

$$Bf = \beta h_1 + \gamma h_2 \in \underbrace{\langle h_1, h_2 \rangle}_{\text{ideal primo}}.$$

Pelo absurdo, suponha que $f \in \langle h_1, h_2 \rangle$. Logo

$$f = \mu h_1 + \nu h_2 \Rightarrow f(p) = \mu(p)h_1(p) + \nu(p)h_2(p) \Rightarrow f(p) = 0,$$

o que é um absurdo (pois $p \notin D$).³ Assim,

$$B \in \langle h_1, h_2 \rangle \Rightarrow B = b_1 h_1 + b_2 h_2.$$

Agora, substituindo a expressão acima em $g = Ax_3 + Bf$, chegamos em

$$g = Ax_3 + b_1 f h_1 + b_2 f h_2 \Rightarrow g \in \langle x_3, f h_1, f h_2 \rangle.$$

Portanto, $I_C = I_D \cap I_p = \langle x_3, h_1f, h_2f \rangle$. A seguir vamos calcular $p_{I_C}(t)$.

Note que podemos escolher uma MCP tal que $I_p = \langle x_3, x_2, x_1 \rangle$.

Logo, $I_C = \langle x_3, x_2f, x_1f \rangle$ e temos o isomorfismo entre anéis graduados⁴

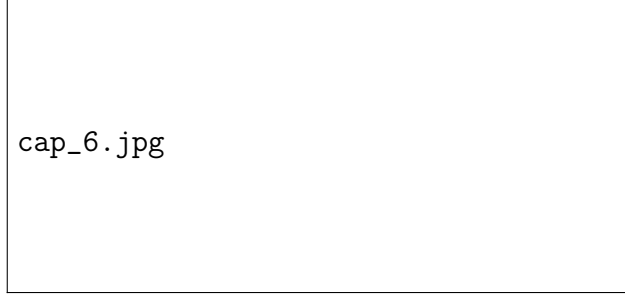
$$\frac{S}{I_C} \simeq \frac{\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]}{\langle x_2f, x_1f \rangle}$$

com $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_2$ tal que $f(1, 0, 0, 0) \neq 0$. Se considerarmos $R = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, segue do Exemplo 1.12 que $p_{I_C}(t) = 2t + 2$.

³Como $I_D = \langle x_3, f \rangle$ e $I_H = \langle x_3 \rangle$, segue que: $p \in D \iff p \in H$ e $f(p) = 0$.

⁴De fato, o isomorfismo é induzido pelo homomorfismo sobrejetivo $\varphi : S \longrightarrow \frac{\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]}{\langle x_2f, x_1f \rangle}$ definido por $p(x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \overline{p(x_0, x_1, x_2, 0)}$, cujo núcleo é o ideal $I_C = \langle x_3, x_2f, x_1f \rangle$.

(ii) Assuma que $p \notin H$,



Note que podemos escolher uma MPC tal que

$$I_D = \langle x_3, f \rangle, \quad I_p = \langle x_0, x_1, x_2 \rangle.$$

A seguir vamos mostrar que $I_D \cap I_p = \langle x_3x_0, x_3x_1, x_3x_2, f \rangle$.

Observe que $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, logo $\langle x_3x_0, x_3x_1, x_3x_2, f \rangle \subseteq I_C \cap I_p$. A seguir, vamos concentrar nossa atenção na outra inclusão, ou seja, $I_D \cap I_p \subseteq \langle x_3x_0, x_3x_1, x_3x_2, f \rangle$.

Considere $g \in I_C \cap I_p$. Assim,

$$\begin{aligned} g = Ax_3 + Bf = \alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 &\Rightarrow Ax_3 \in \langle x_0, x_1, x_2 \rangle \\ &\Rightarrow A \in \langle x_0, x_1, x_2 \rangle \\ &\Rightarrow A = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2. \end{aligned}$$

Ao substituírmos, $A = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ em $g = Ax_3 + Bf$, obtemos

$$g = a_0x_3x_0 + a_1x_3x_1 + a_2x_3x_2 + Bf \Rightarrow g \in \langle x_3x_0, x_3x_1, x_3x_2, f \rangle.$$

Assim, temos $I_C = \langle x_0x_3, x_1x_3, x_2x_3, f \rangle$. A seguir mostraremos que $p_{I_C} = 2t + 2$. Considere $J = \langle x_0x_3, x_1x_3, x_2x_3 \rangle$.

Note que⁵ $\overline{I_C} = \langle \overline{f} \rangle \subset T = \frac{S}{J}$, então temos os isomorfismos (que preservam graduação)

$$\frac{S}{I_C} \simeq \frac{T}{I_C} \simeq \frac{\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]}{\langle f \rangle} \times \mathbb{C}[x_3].$$

⁵Considere $J = \langle x_0x_3, x_1x_3, x_2x_3 \rangle$. Note que $(p, q) \mapsto \overline{p+q}$ define um isomorfismo entre os anéis

$$\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \times \mathbb{C}[x_3] \quad \text{e} \quad T = \frac{S}{J} = \{\overline{p+q} | p \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2], q \in \mathbb{C}[x_3]\}.$$

Logo, $\dim \left(\frac{S}{I_C} \right)_d = \dim \left(\frac{\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]}{\langle f \rangle} \right)_d + 1$. Entretanto,

$$\dim \left(\frac{\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]}{\langle f \rangle} \right)_d = 2d + 1.$$

Portanto, segue da relação acima que $p_{I_C}(t) = 2t + 2$.

□

Lema 3.4. Seja C um subesquema fechado de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$. Considere l_1 e l_2 retas distintas em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$. Verifica-se que:

C é a união esquemática de l_1 e l_2 se e somente se existem $h, h_1, h_2, h_3 \in S_1$ tais que

$$I_C = \langle hh_2, hh_3, h_1h_2, h_1h_3 \rangle \quad \text{com } I_{l_1} = \langle h, h_1 \rangle, I_{l_2} = \langle h_2, h_3 \rangle \text{ e} \\ \{h, h_1, h_2, h_3\} \text{ base de } S_1. \text{ Neste caso,} \\ l_1 \cap l_2 = \emptyset \text{ e } p_{I_C}(t) = 2t + 2.$$

ou

$$I_C = \langle h, h_1h_2 \rangle \quad \text{com } I_{l_1} = \langle h, h_1 \rangle, I_{l_2} = \langle h, h_2 \rangle \text{ e } \{h, h_1, h_2\} \text{ L.I.} \\ \text{Neste caso, } l_1 \cap l_2 \neq \emptyset \text{ e } p_{I_C}(t) = 2t + 1.$$

Demonstração. (1) Assuma que C é uma união esquemática de duas retas disjuntas l_1 e l_2 . Neste caso, $I_{l_1} = \langle h, h_1 \rangle$ e $I_{l_2} = \langle h_2, h_3 \rangle$ sendo $\{h, h_1, h_2, h_3\}$ base de S_1 . A seguir, escolha uma MCP tal que $I_{l_1} = \langle x_0, x_1 \rangle$ e $I_{l_2} = \langle x_2, x_3 \rangle$.

Afirmção: $I_{l_1} \cap I_{l_2} = \langle x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2, x_1x_3 \rangle$.

Observe que, $\langle x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2, x_1x_3 \rangle \subseteq I_{l_1} \cap I_{l_2}$. Agora provaremos a outra inclusão:

Considere $g \in I_{l_1} \cap I_{l_2}$. Assim:

$$g = \alpha x_0 + \beta x_1 = \vartheta x_2 + \delta x_3.$$

Ao substituírmos $x_2 = x_3 = 0$ na expressão acima, temos:

$$\underbrace{\alpha(x_0, x_1, 0, 0)}_{\tilde{\alpha}} x_0 + \underbrace{\beta(x_0, x_1, 0, 0)}_{\tilde{\beta}} x_1 = 0 \Leftrightarrow \tilde{\alpha} \cdot x_0 + \tilde{\beta} \cdot x_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \tilde{\alpha}x_0 &= -\tilde{\beta}x_1 \\ \Rightarrow x_1 \mid \tilde{\alpha} &\text{ e } x_0 \mid \tilde{\beta} \\ \Rightarrow \tilde{\alpha} &= x_1 \cdot \varphi \text{ e } \tilde{\beta} = -x_0 \cdot \varphi \end{aligned}$$

com $\varphi \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$. Note ainda que

$$\begin{aligned} \alpha &= x_2A + x_3B + \tilde{\alpha} \quad \text{com } \tilde{\alpha} = x_1\varphi, \\ \beta &= x_2A_1 + x_3B_1 + \tilde{\beta} \quad \text{com } \tilde{\beta} = -x_0\varphi. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
g &= \alpha x_0 + \beta x_1 \\
&= (x_2 A + x_3 B + x_1 \varphi) x_0 + (x_2 A_1 + x_3 B_1 - x_0 \varphi) \cdot x_1 \\
&= x_0 x_2 A + x_0 x_3 B + x_0 x_1 \varphi + x_1 x_2 A_1 + x_1 x_3 B_1 - x_0 x_1 \varphi \\
&= x_0 x_2 A + x_0 x_3 B + x_1 x_2 A_1 + x_1 x_3 B_1.
\end{aligned}$$

Portanto, $g \in \langle x_0 x_2, x_0 x_3, x_1 x_2, x_1 x_3 \rangle$.

A seguir usamos o pacote online Macaulay para calcular o polinômio de Hilbert do ideal

$$\langle x_0 x_2, x_0 x_3, x_1 x_2, x_1 x_3 \rangle.$$

Conforme ilustra a figura abaixo:



Nas notações do Macaulay $2P_1 = 2(t+1)$ (desde que P_1 indica o polinômio de Hilbert de $\mathbb{P}^1$, a reta projetiva).

(2) Assuma que C é a união esquemática de duas retas concorrentes l_1 e l_2 . Assim, existem h, h_1, h_2 em S_1 L.I. tais que $I_{l_1} = \langle h, h_1 \rangle$ e $I_{l_2} = \langle h, h_2 \rangle$. Logo, podemos escolher uma MCP tal que $I_{l_1} = \langle x_0, x_1 \rangle$ e $I_{l_2} = \langle x_0, x_2 \rangle$.

Afirmção: $I_{l_1} \cap I_{l_2} = \langle x_0, x_1 x_2 \rangle$.

Pela construção, $I_{l_1} \cap I_{l_2} \supseteq \langle x_0, x_1 x_2 \rangle$. Agora provaremos a outra inclusão: Considere $g \in I_{l_1} \cap I_{l_2}$. Assim:

$$g = Ax_0 + Bx_1 = Cx_0 + Dx_2$$

com $B, D \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$.

Ao substituírmos $x_0 = 0$ na expressão acima, temos: $Bx_1 = Dx_2$, então $B = x_2E$ e $D = x_1E$ com $E \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$.

Assim, substituindo B e D em g segue que:

$$g = Ax_0 + x_1x_2E \in \langle x_0, x_1x_2 \rangle.$$

Portanto, $I_C = \langle x_0, x_1x_2 \rangle$. Segue do exemplo 1.14 que:

$$p_{I_C}(t) = 2t + 1.$$

□

3.2 Descrição do Espaço $\mathbb{H}_{p(t)}$ com $p(t) = t + 1$

Lembremos que $l \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ é uma **reta** se e somente se o ideal homogêneo saturado que define l , $I_l = \langle L_1, L_2 \rangle$ sendo L_1 e $L_2 \in S_1$ linearmente independentes.

Proposição 3.2. Seja $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ é um subesquema fechado.

$$C \text{ é uma reta} \iff p_{I_C}(t) = t + 1.$$

Demonstração. $\implies$ Se C é uma reta em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, então $I_C = \langle L_1, L_2 \rangle$ com $L_1, L_2 \in S_1$ linearmente independentes. Assim, o Exemplo 1.13 nos garante que $p_{I_C}(t) = t + 1$.

$\impliedby$ Neste caso, $\dim C = \dim C_{\text{red}} = 1$ e $\text{gr}(C) = \text{gr}(C_{\text{red}}) = 1$.

Assim, a Proposição 3.1 e o Lema 3.1 nos garantem que

$$C_{\text{red}} = \Sigma \cup \{q_1\} \cup \dots \cup \{q_k\}$$

sendo Σ uma reta (a única componente irredutível de dimensão 1 de C_{red}) e $q_1, \dots, q_k$ pontos isolados (fora de Σ).

- Caso 1: C_{red} é irredutível. Neste caso, $C_{\text{red}} = \Sigma$. Logo, C_{red} é uma reta em $\mathbb{P}^3$.

Para concluirmos, observe que estamos na seguinte situação: temos os ideais saturados $I = I_C$ e $\sqrt{I}$ tais que $I \subseteq \sqrt{I}$ com $p_I(t) = p_{\sqrt{I}}(t) = t + 1$. Assim, segue da Proposição 1.2 que $C = C_{\text{red}}$. Portanto, C é uma reta em $\mathbb{P}^3$.

- Caso 2: C_{red} é redutível. Sendo C_{red} uma curva, considere $p_{\sqrt{I_C}}(t) = t + a$ com a inteiro fixo. Além disso, $D = \Sigma \cup \{q_1\}$ é a união esquemática da reta Σ e o ponto q_1 , logo $p_{I_D}(t) = t + 2$ (cf. Lema 3.2). Observe que

$$\begin{aligned} D \subseteq C_{red} &\implies \sqrt{I_C} \subseteq I_D \\ &\stackrel{(1.6)}{\implies} p_{I_D}(d) = d + 2 \leq p_{\sqrt{I_C}}(d) = d + a, \forall d \gg 0 \\ &\implies 2 \leq a. \end{aligned}$$

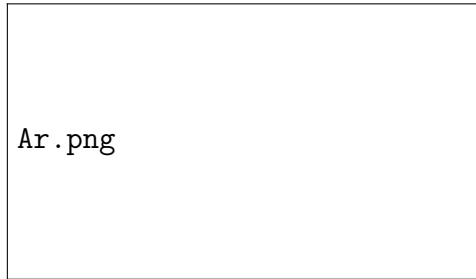
Visto que $I_C \subseteq \sqrt{I_C}$, utilizando (1.6) novamente, temos que

$$p_{\sqrt{I_C}}(d) = d + a \leq p_{I_C}(t) = d + 1, \forall d \gg 0 \Rightarrow a \leq 1.$$

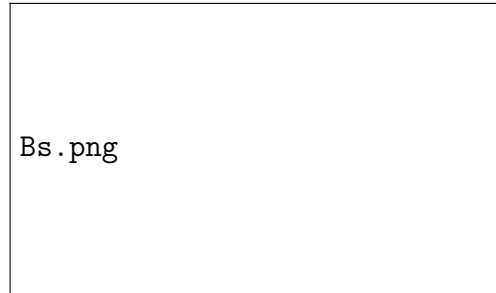
O que é um absurdo. De onde concluímos que, C_{red} não é redutível. $\square$

3.3 Descrição do Espaço $\mathbb{H}_{p(t)}$ com $p(t) = t + 2$

Nesta seção vamos estudar os subsesquemas fechados de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ cujo polinômio de Hilbert é $t + 2$. Observe que $t + 2 = (t + 1) + 1$ é a adição do polinômio de Hilbert de uma reta (conforme a Proposição 3.2) e um ponto. Assim temos a seguinte representação (se o ponto estiver fora da reta):



Entretanto, como veremos o ponto p genericamente fora da reta l , pode-se aproximar da reta l de tal forma que ele vira o que é denominado de ponto mergulhado na reta l , que ilustramos na próxima figura.



Proposição 3.3. Se $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ é um subesquema fechado tal que $p_{I_C}(t) = t+2$. Então

- (i) C_{red} é a união esquemática de uma reta l e um ponto $p \notin l$ ou
- (ii) C_{red} é uma reta em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$.

Demonstração. Se $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ é um subesquema fechado tal que $p_{I_C}(t) = t+2$, então $\dim C = \dim C_{\text{red}} = 1$ e $\text{gr}(C) = \text{gr}(C_{\text{red}}) = 1$.

Assim, a Proposição 3.1 e o Lema 3.1 nos garantem que

$$C_{\text{red}} = \Sigma \cup \{q_1\} \cup \dots \cup \{q_k\}$$

sendo Σ uma reta (a única componente irredutível de dimensão 1 de C_{red}) e $q_1, \dots, q_k$ pontos isolados (fora de Σ).

- Caso 1: C_{red} é irredutível. Neste caso, $C_{\text{red}} = \Sigma$. Logo, C_{red} é uma reta em $\mathbb{P}^3$.
- Caso 2: C_{red} é redutível. Sendo C_{red} uma curva, considere $p_{\sqrt{I_C}}(t) = t+a$ com a inteiro fixo. Além disso, $D = \Sigma \cup \{q_1\}$ é a união esquemática da reta Σ e o ponto $q_1 \notin \Sigma$, logo $p_{I_D}(t) = t+2$ (cf. Lema 3.2). Observe que

$$\begin{aligned} D \subseteq C_{\text{red}} &\implies \sqrt{I_C} \subseteq I_D \\ &\stackrel{(1.6)}{\implies} p_{I_D}(d) = d+2 \leq p_{\sqrt{I_C}}(d) = d+a, \quad \forall d \gg 0 \\ &\implies 2 \leq a. \end{aligned}$$

Visto que $I_C \subseteq \sqrt{I_C}$, utilizando (1.6) novamente, temos que

$$p_{\sqrt{I_C}}(d) = d+a \leq p_{I_C}(t) = d+2, \quad \forall d \gg 0 \Rightarrow a \leq 2.$$

Portanto, $p_{\sqrt{I_C}}(t) = t+2$.

Para concluirmos, observe que estamos na seguinte situação: temos os ideais saturados $I = I_C$, I_D e $\sqrt{I}$ tais que $I \subseteq \sqrt{I} \subseteq I_D$ com $p_I(t) = p_{\sqrt{I}}(t) = p_D(t) = t+2$. Portanto, segue da Proposição 1.2 que $C = C_{\text{red}} = D$. $\square$

Lema 3.5. Se $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ é um subesquema fechado tal que $p_{I_C}(t) = t+2$ e C_{red} é uma reta. Então existem h, h_1, h_2 em S_1 L.I. tais que $I_C = \langle h, h_1^2, h_1 h_2 \rangle$.

Demonstração. Seja $I = I_C$. Como C_{red} é uma reta, existem h, h_1 em S_1 L.I. tais que $\sqrt{I} = \langle h, h_1 \rangle$. Então a menos de uma MCP, vamos assumir que

$$I \subseteq \sqrt{I} = \langle x_0, x_1 \rangle$$

Por outro lado, visto que $p_I(t) = t+2$, segue que seu número de Gotzmann é 2 (cf. Exemplo 2.3). Logo I é 2-regular (cf. Teorema 2.3) e podemos aplicar o Teorema 2.4 (com $m_0 = 2$), que implica em:

$$I \text{ é gerado em grau } 2 \text{ e } \dim I_2 = \dim S_2 - p_I(2) = 10 - 4 = 6.$$

Como $I_2 \leq \langle x_0, x_1 \rangle_2$ e $\dim I_2 = 6$, então existem $q_1, \dots, q_6$ homogêneos de grau 2 em $\langle x_0, x_1 \rangle_2$ tais que $I = \langle q_1, \dots, q_6 \rangle$. De fato,

$$I_2 \in G_6(\langle x_0, x_1 \rangle_2) = \{V \leq \langle x_0, x_1 \rangle_2 \mid \dim V = 6\}.$$

Considere os abertos básicos $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_7$ de $G_6(\langle x_0, x_1 \rangle_2)$ sendo

$$\mathcal{U}_j = \{I \in G_6(\langle x_0, x_1 \rangle_2) \mid \det(I_j) \neq 0\}$$

com $1 \leq j \leq 7$, sendo I_j a matriz 6×6 determinada pelas colunas nas posições $\{1, 2, \dots, 7\} - \{j\}$. A seguir fixe a base ordenada

$$\left\{ \underbrace{x_0^2}_{v_1}, x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1^2, x_1x_2, \underbrace{x_1x_3}_{v_7} \right\}$$

de $\langle x_0, x_1 \rangle_2$.

Observe que se $J \in G_6(\langle x_0, x_1 \rangle_2)$ e $J = [q_1, \dots, q_6]$ temos que

$J \in \mathcal{U}_j \Leftrightarrow$ A base $\{q_i\}_{i=1}^6$ de J pode ser escolhida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} q_1 &= v_{i_1} + a_1 v_j, \\ &\vdots \\ q_6 &= v_{i_6} + a_6 v_j \end{aligned}$$

de modo que $\{1, \dots, 7\} = \{i_1, \dots, i_6, j\}$ com $i_1 < \dots < i_6$.

Agora, J determina o ideal $I = \langle q_1, \dots, q_6 \rangle$. Além disso, I irá definir um subesquema fechado tal que $p_I(t) = t + 2$ se⁶

$$\begin{aligned} \dim \left(\frac{S_3}{S_1 J} \right) &= p_I(3) = 3 + 2 = 5 \Leftrightarrow \dim(S_3) - \dim(S_1 J) = 5 \\ &\Leftrightarrow \dim(S_1 J) = \underbrace{\dim(S_3) - 5}_{\binom{6}{3}=20} = 15. \end{aligned}$$

⁶Lembre que $t + 2$ é 2-regular. Assim, podemos escolher $m_0 = 2$ no Teorema 2.4.

Considere a matriz $M(J)$ de ordem 24×20 , cujas as linhas são determinadas pelos coeficientes das 24 cúbicas $q_i x_j, i = 1, \dots, 6$ e $j = 0, \dots, 3$ na base ordenada

$$\{x_0^3, x_0^2 x_1, x_0^2 x_2, x_0^2 x_3, \dots, x_3^3, x_2^2 x_3, x_2 x_3^2, x_3^3\}$$

de S_3 . Assim,

$J \in \mathcal{U}_j$ determina um ideal I tal que $p_I(t) = t + 2 \iff \text{posto } M(J) = 15$.

Observe que temos os 7 abertos básicos $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_7$ em $G_6(\langle x_0, x_1 \rangle_2)$, onde precisamos estudar o posto de $M(J)$ se $J \in \mathcal{U}_j$. De fato, esses cálculos de posto foram realizados usando o pacote de computação SINGULAR ([6]).

A seguir, nos remetemos a narrar o que foi calculado em três desses 21 abertos (a saber, $\mathcal{U}_{1,2}$, $\mathcal{U}_{1,3}$ e $\mathcal{U}_{3,4}$), desde que nos outros os resultados são equivalentes aos determinados em um ou outro desses abertos.

- $\mathcal{U}_1$. Neste aberto escolhemos coordenadas

$$a_1, \dots, a_6$$

de modo que

$$\begin{aligned} q_1 &= x_0 x_1 + a_1 x_0^2, \\ q_2 &= x_0 x_2 + a_2 x_0^2, \\ q_3 &= x_0 x_3 + a_3 x_0^2, \\ q_4 &= x_1^2 + a_4 x_0^2, \\ q_5 &= x_1 x_2 + a_5 x_0^2, \\ q_6 &= x_1 x_3 + a_6 x_0^2. \end{aligned}$$

Verificamos que $\text{posto}(M(I)) = 15$ se e somente se

$$a_1 a_3 + a_6 = 0, \quad a_1 a_2 + a_5 = 0 \quad \text{e} \quad a_1^2 + a_4 = 0.$$

Ao restringirmos a esse fechado, obtemos o ideal saturado

$$I = \langle h, x_0 h_1, x_0 h_2 \rangle \quad \text{sendo} \quad \begin{cases} h = a_1 x_0 + x_1, \\ h_1 = h x_2 + a_2 x_0, \\ h_2 = x_3 + a_3 x_0. \end{cases}$$

Que corresponde à união esquemática da reta definida por $\langle x_0, x_1 \rangle = \langle h, x_0 \rangle$ e o ponto p fora dessa reta determinado por $I_p = \langle h, h_1, h_2 \rangle$.

- $\mathcal{U}_2$. Neste aberto verificamos que $\text{posto}(M(J)) = 16$ se $J \in \mathcal{U}_2$. Ou seja, nesse aberto, não existem subespaços de $G_6(\langle x_0, x_1 \rangle_2)$, que venham definir um ideal com polinômio de Hilbert $t + 2$.

- $\mathcal{U}_3$. Neste aberto escolhemos coordenadas

$$a_1, \dots, a_6$$

de modo que

$$\begin{aligned} q_1 &= x_0^2 + a_1 x_0 x_2, \\ q_2 &= x_0 x_1 + a_2 x_0 x_2, \\ q_3 &= x_0 x_3 + a_3 x_0 x_2, \\ q_4 &= x_1^2 + a_4 x_0 x_2, \\ q_5 &= x_1 x_2 + a_5 x_0 x_2, \\ q_6 &= x_1 x_3 + a_6 x_0 x_2. \end{aligned}$$

Verificamos que $\text{posto}(M(I)) = 15$ se e somente se

$$a_3 a_5 + a_6 = 0, \quad -a_1 a_5^2 + a_4 = 0 \quad \text{e} \quad a_1 a_5 + a_2 = 0.$$

Ao restringirmos a esse fechado, obtemos o ideal saturado

$$I = \langle h, x_0 h_1, x_0 h_2 \rangle \quad \text{sendo} \quad \begin{cases} h = a_5 x_0 + x_1, \\ h_1 = x_0 + a_1 x_2, \\ h_2 = x_3 + a_3 x_2. \end{cases}$$

Que corresponde à união esquemática da reta definida por $\langle x_0, x_1 \rangle = \langle h, x_0 \rangle$ e o ponto p fora dessa reta determinado por $I_p = \langle h, h_1, h_2 \rangle$ se $a_1 \neq 0$. Caso, contrário, obtemos o ideal

$$\langle h, x_0^2, x_0 h_2 \rangle$$

cujo radical é $\langle x_0, x_1 \rangle$.

- Nos abertos $\mathcal{U}_4, \mathcal{U}_6$ e $\mathcal{U}_7$ obtivemos resultados análogos ao dos relatado no aberto $\mathcal{U}_3$.
- No aberto $\mathcal{U}_5$, obtivemos resultados análogos ao dos relatado no aberto $\mathcal{U}_1$.

□

Teorema 3.1. Seja C um subesquema fechado de $\mathbb{P}^3$. Verifica-se que:

$$p_{I_C}(t) = t + 2 \iff I_C = \begin{cases} \langle h, h_1 h_2, h_1 h_3 \rangle & \text{com } [h, h_1, h_2, h_3] = S_1 \\ \text{ou} \\ \langle h, h_1^2, h_1 h_2 \rangle & \text{com } \{h, h_1, h_2\} \subset S_1 \text{ L.I.} \end{cases}$$

Demonstração. $\implies$ Se C é um subesquema fechado de $\mathbb{P}^3$ tal que $p_{I_C}(t) = t + 2$ e I_C é radical, então a Proposição 3.3 e o Lema 3.3 nos garantem que $I_C = \langle h, h_1 h_2, h_1 h_3 \rangle$. Do contrário, C_{red} é uma reta (cf. Proposição 3.3). Assim, o resultado segue do Lema 3.5.

$\Leftarrow$ Veja o Exemplo 1.15.

□

3.4 Descrição do Espaço $\mathbb{H}_{p(t)}$ com $p(t) = 2t + 1$

Lembremos que $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ é uma **cônica** se e somente se $I_C = \langle L, f \rangle$ com $L \in S_1$ e $f \in S_2 - LS_1$.

Sabemos que $p_{I_C}(t) = 2t + 1$ (veja o Exemplo 1.14 no capítulo 1).

Lema 3.6. Seja I um ideal homogêneo saturado em $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ tal que $p_I(t) = 2t + 1$ e $\sqrt{I} \subseteq \langle L_1, L_2 \rangle$ com $L_1, L_2 \in S_1$ linearmente independentes. Então existe $h \in I$ homogêneo de grau 1.

Demonstração. Observe que o ideal $\langle L_1, L_2 \rangle$ define uma reta ℓ em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$. Além disso, a menos de uma MCP, podemos assumir que $I_{\ell} = \langle x_0, x_1 \rangle$. Observe que

- $\{x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2\}$ é base de S_2 .
- $(I_{\ell})_2 = [x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3]$.
- Como $p_I(t) = 2t + 1$ admite a representação de Gotzmann

$$p_I(d) = \binom{d+1}{d} + \binom{d}{d-1},$$

segue do Teorema 2.3 que I é 2-regular.

- Sendo I 2-regular ao aplicar o Teorema 2.4 (com $m_0 = 2$), concluímos que:

$$I \text{ é gerado em grau 2 e } \dim I_2 = \dim S_2 - p_I(2) = 10 - 5 = 5.$$

Como $I \subseteq \sqrt{I} \subseteq I_{\ell}$. Assim, existe q_1, q_2, q_3, q_4 e q_5 homogêneos de grau 2 em I_{ℓ} tais que $I = \langle q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \rangle$. De fato,

$$I_2 \in G_5((I_{\ell})_2) = \{V \leq (I_{\ell})_2 \mid \dim(V) = 5\}.$$

A seguir, vamos fixar a base ordenada

$$\left\{ \underbrace{x_0^2}_{v_1}, x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1^2, x_1x_2, \underbrace{x_1x_3}_{v_7} \right\} \quad (3.2)$$

de $(I_{\ell})_2$.

Neste caso, se $V = [q_1, \dots, q_5] \in G_5((I_{\ell})_2)$, então $q_i = \sum_{j=1}^7 a_{ij}v_j$ com $i = 1, \dots, 5$.

Considere

$$[V] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{27} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{51} & a_{52} & \dots & a_{57} \end{bmatrix}$$

onde as entradas de cada linha correspondem-se com os coeficientes de q_i na base de $(I_\ell)_2$ que foi fixada em (3.2) onde $i = 1, \dots, 5$

Por outro lado, sendo $I_2 = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]$ um ponto nessa grassmaniana, I_2 pertence a algum dos abertos básicos (de $G_5((I_\ell)_2)$)

$$\mathcal{U}_{i_1 \dots i_5} = \{V \in G_5((I_\ell)_2) \mid \det([V]_{i_1 \dots i_5}) \neq 0\}$$

sendo $[V]_{i_1 \dots i_5}$ com $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_5 \leq 7 = \dim(I_\ell)_2$ o menor 5×5 da matriz $[V]$ determinado pelas colunas nas posições $i_1, \dots, i_5$.⁷

Observe que $V = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5] \leq (I_\ell)_2$ determina o ideal $I = \langle q_1, \dots, q_5 \rangle$. Além disso, I irá definir um subesquema fechado tal que $p_I(t) = 2t + 1$ se⁸

$$\begin{aligned} \dim \left(\frac{S_3}{S_1 V} \right) &= p_I(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \Leftrightarrow \dim(S_3) - \dim(S_1 V) = 7 \\ &\Leftrightarrow \dim(S_1 V) = \underbrace{\dim(S_3)}_{\binom{6}{3}=20} - 7 = 13. \end{aligned}$$

A seguir, por simplicidade usaremos a notação

$$\mathcal{U}_{i,j} = \{I \in G_5((I_\ell)_2) \mid \det(I_{i,j}) \neq 0\}$$

com $1 \leq i < j \leq 7$, sendo $I_{i,j}$ a matriz 5×5 determinada pelas colunas nas posições $i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5$ tais que $\{i, j\} = \{1, 2, \dots, 7\} - \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$.⁹

De fato, se $I = [q_1, \dots, q_5]$ temos que

$I \in \mathcal{U}_{i,j} \Leftrightarrow$ A base $\{q_i\}_{i=1}^5$ de I pode ser escolhida da seguinte forma:

⁷Por exemplos no aberto $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{12345}$ todo ponto $V \in \mathcal{U}$ possui uma base tal que $[V]$ se representa da seguinte forma:

$$[V] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_4 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 & b_5 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{aligned} q_1 &= x_0^2 + a_1 x_1 x_2 + b_1 x_1 x_3, \\ q_2 &= x_0 x_1 + a_2 x_1 x_2 + b_2 x_1 x_3, \\ q_3 &= x_0 x_2 + a_3 x_1 x_2 + b_3 x_1 x_3, \\ q_4 &= x_0 x_3 + a_4 x_1 x_2 + b_4 x_1 x_3, \\ q_5 &= x_1^2 + a_5 x_1 x_2 + b_5 x_1 x_3. \end{aligned}$$

⁸Lembre que $2t + 1$ é 2-regular. Assim, podemos escolher $m_0 = 2$ no Teorema 2.4.

⁹Ao todo obtemos 21 listas ordenadas de índices, que usaremos para descrever os abertos básicos de $G_5((I_\ell)_2)$.

$$\begin{aligned}
q_1 &= v_{i_1} + a_1 v_i + b_1 v_j \\
&\vdots \\
q_5 &= v_{i_5} + a_5 v_i + b_5 v_j
\end{aligned} \tag{3.3}$$

A seguir, para cada ponto $I \in \mathcal{U}_{i,j}$ com $1 \leq i, j \leq 7$. Fixaremos uma base de I como em (3.3).

E vamos considerar a matriz $M(I)$ de ordem 20×20 , cujas as linhas são determinadas pelos coeficientes das 20 cúbicas $q_i x_j$, $i = 1, \dots, 5$ e $j = 0, \dots, 3$ na base ordenada

$$\{x_0^3, x_0^2 x_1, x_0^2 x_2, x_0^2 x_3, \dots, x_3^3, x_2^2 x_3, x_2 x_3^2, x_3^3\}$$

de S_3 .

Neste ponto vamos lembrar que um ideal $I \subset S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ define um subesquema fechado de $\mathbb{P}^3$ tal que $p_I(t) = 2t + 1$ se e somente se

1. $I_2 \in G_5(S_2)$. Em nosso caso, mais especificamente $G_5((I_\ell)_2)$.
2. $\dim(\frac{S_3}{I_2 S_1}) = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \iff \text{posto}(M(I)) = 13$.

Observe que temos os 21 abertos básicos $\mathcal{U}_{1,2}, \dots, \mathcal{U}_{i,j}, \dots, \mathcal{U}_{6,7}$ em $G_5((I_\ell)_2)$, onde precisamos estudar o posto de $M(I)$ se $I \in \mathcal{U}_{i,j}$. De fato, esses cálculos de posto foram realizados usando o pacote de computação SINGULAR ([6]).

A seguir, nos remetemos a narrar o que foi calculado em três desses 21 abertos (a saber, $\mathcal{U}_{1,2}$, $\mathcal{U}_{1,3}$ e $\mathcal{U}_{3,4}$), desde que nos outros os resultados são equivalentes aos determinados em um ou outro desses abertos.

- $\mathcal{U}_{1,2}$ neste aberto verificamos que $\text{posto}(M(I)) = 14$ se $I \in \mathcal{U}_{1,2}$. Ou seja, nesse aberto, não existem subespaços de $G_5((I_\ell)_2)$, que venham definir um ideal com polinômio de Hilbert $2t + 1$.
- $\mathcal{U}_{1,3}$ neste aberto escolhemos coordenadas

$$a_1, \dots, a_5, b_1, \dots, b_5$$

de modo que

$$\begin{aligned}
q_1 &= x_0 x_1 + a_1 x_0^2 + b_1 x_0 x_2, \\
q_2 &= x_0 x_3 + a_2 x_0^2 + b_2 x_0 x_2, \\
q_3 &= x_1^2 + a_3 x_0^2 + b_3 x_0 x_2, \\
q_4 &= x_1 x_2 + a_4 x_0^2 + b_4 x_0 x_2, \\
q_5 &= x_1 x_3 + a_5 x_0^2 + b_5 x_0 x_2.
\end{aligned}$$

Verificamos que $\text{posto}(M(I)) = 13$ se e somente se

$$\begin{cases} b_2b_4 + b_5 = 0 \\ a_2b_4 + a_5 = 0 \\ b_3 = 0 \\ b_1 = 0 \\ a_4 = 0 \\ b_4^2 + a_3 = 0 \\ a_1 - b_4 = 0 \end{cases}$$

Ao pensarmos essas equações acima, como expressões polinomiais em $\mathbb{C}[a_1, \dots, a_5, b_1, \dots, b_5]$, elas definem um fechado Y no afim $\mathbb{C}^{10} \cong \mathcal{U}_{1,3}$ de dimensão 3 = 10 - 7.

Ao restringirmos a esse fechado, obtemos o ideal saturado

$$I = \langle h, f \rangle \quad \text{sendo } h = b_4x_0 + x_1, f = x_0(x_3 + a_2x_0 + b_2x_2).$$

Assim, existe $h = b_4x_0 + x_1 \in I$ de grau 1.¹⁰

- $\mathcal{U}_{3,4}$. Neste aberto também usamos as coordenadas $a_1, \dots, a_5, b_1, \dots, b_5$ e determinamos um fechado Y (afim) definido por 7 equações (de forma semelhante ao caso anterior), só que ao nos restringirmos a esse fechado, obtemos o ideal saturado

$$I = \langle h, f \rangle \quad \text{sendo } h = b_5x_0 + x_1, f = x_0(x_0 + a_1x_2 + b_1x_3).$$

Assim, existe $h = b_5x_0 + x_1 \in I$ de grau 1. O interessante, neste caso é que ao escolhermos $a_1 = b_1 = 0$, obtemos uma cônica reduzida.

□

Lema 3.7. Seja C um subesquema fechado de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ tal que $p_{I_C}(t) = 2t + 1$ e $\text{gr}(C_{red}) = 1$. Verifica-se então que existem $h_1, h_2 \in \sqrt{I_C} \cap S_1$, linearmente independentes, tais que $I_C = \langle h_1, h_2^2 \rangle$. Consequentemente C_{red} é uma reta.

Demonstração. Sendo C_{red} um subesquema fechado de dimensão 1 e grau 1 de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, segue do Lema 3.1 que toda componente irredutível de dimensão 1 de C_{red} é uma reta em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$. Agora a Proposição 3.1 nos garante que C_{red} possui uma única componente irredutível de dimensão 1 (visto que $\text{gr}(C_{red}) = 1$). Assim,

$$C_{red} = \Sigma \cup \{q_1\} \cup \dots \cup \{q_l\}$$

¹⁰Observe que I define uma cônica reduzida que é a união esquemática de duas retas (distintas) concorrentes, para todo valor de a_1 e b_1 .

sendo Σ uma reta (a única componente de dimensão 1) e $q_1, \dots, q_l$ pontos isolados (fora de Σ).

Observe que $\Sigma \subseteq C_{red}$. Logo

$$I_{C_{red}} = \sqrt{I} \subset I_\Sigma \quad \text{sendo } I = I_C.$$

Assim, $I \subseteq \sqrt{I} \subseteq I_\Sigma$. Portanto, segue do Lema 3.6 que existe $h \in I_1, h \neq 0$. Logo,

$$\langle h \rangle \subseteq I \subseteq \sqrt{I} \subseteq I_\Sigma.$$

Assuma que $I_\Sigma = \langle h, h_1 \rangle$ com $h, h_1 \in S_1$ são L.I.. A seguir, considere $\{h, h_1, h_2, h_3\}$ base de S_1 . Observe que:

- $\{h^2, hh_1, hh_2, hh_3, h_1^2, h_1h_2, h_1h_3, h_2^2, h_2h_3, h_3^2\}$ é base de S_2 .
- $\langle h \rangle_2 = [h^2, hh_1, hh_2, hh_3] \subseteq I_2$.
- $(I_\Sigma)_2 = [h^2, hh_1, hh_2, hh_3, h_1^2, h_1h_2, h_1h_3]$.
- Se $f \in I_\Sigma = \langle h, h_1 \rangle$ for homogêneo de grau 2, então

$$f = hM + h_1N \quad M, N \in S_1.$$

- Como $p_I(t) = 2t + 1$ admite a representação de Gotzmann

$$p_I(d) = \binom{d+1}{d} + \binom{d}{d-1},$$

segue do Teorema 2.3 que I é 2-regular.

- Sendo I 2-regular ao aplicar o Teorema 2.4 (com $m_0 = 2$), concluímos que:

$$I \text{ é gerado em grau 2 e } \dim I_2 = \dim S_2 - p_I(2) = 10 - 5 = 5.$$

Logo $I_2 = [h^2, hh_1, hh_2, hh_3, f]$ com $f \in [h_1^2, h_1h_2, h_1h_3]$ (visto que $f \in I_\Sigma$). Assim, $f = h_1L$ com $L = \alpha h_1 + \beta h_2 + \gamma h_3$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

Portanto,

$$I = \langle h^2, hh_1, hh_2, hh_3, h_1L \rangle.$$

Temos duas possibilidades: $\{h_1, L\}$ é L.I. ou L.D..

- (i) $\{h_1, L\}$ é L.I. Neste caso, temos que $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$, logo

$$I = \langle h^2, hh_1, hh_2, hh_3, h_1L \rangle \implies \sqrt{I} = \langle h, h_1L \rangle \quad \text{com } h_1, L \text{ L.I.}$$

Assim, C_{red} é uma cônica redutível, logo $gr(C_{red}) = 2$. Absurdo!

- (ii) $\{h_1, L\}$ é L.D. Neste caso, temos que $\beta = \gamma = 0$, que implica em $L = \alpha h_1$ com $\alpha \neq 0$ que, por sua vez, resulta em

$$I = \langle h^2, hh_1, hh_2, hh_3, h_1^2 \rangle \implies \sqrt{I} = \langle h, h_1 \rangle \quad \text{com } h, h_1 \text{ L.I.}$$

Portanto, C_{red} é uma reta.

$$I = \langle h^2, hh_1, hh_2, hh_3, h_1 L \rangle \implies \sqrt{I} = \langle h, h_1 L \rangle \quad \text{se } h_1, L \text{ são L.I.}$$

□

Proposição 3.4. Se $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ for uma curva tal que $p_{I_C}(t) = 2t + 1$. Então $C_{\text{red}} = C$ é uma cônica ou C_{red} é uma reta em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$.

Demonstração. Por simplicidade, considere $I = I_C$.

Lembremos que $\dim C = 1 = \dim C_{\text{red}}$ (visto que $V(I) = V(\sqrt{I})$).

Por outro lado, $I \subseteq \sqrt{I}$. Assim, o Lema A.1 nos garante que $\text{gr}(C_{\text{red}}) \leq 2 = \text{gr}(C)$.

Assim, temos dois casos a serem analisados: $\text{gr}(C_{\text{red}}) = 1$ ou $\text{gr}(C_{\text{red}}) = 2$.

Caso 1: Assuma que $\text{gr}(C_{\text{red}}) = 1$.

Neste caso, o Lema 3.7 nos garante que C_{red} é uma reta em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$.

Caso 2: Assuma que $\text{gr}(C_{\text{red}}) = 2$.

Seja Σ uma componente irredutível de C_{red} de dimensão 1. Segue do Lema 3.1 que $\text{gr}(\Sigma) \leq \text{gr}(C_{\text{red}}) = 2$.

- Se $\text{gr}(\Sigma) = 2$ então,

$$C_{\text{red}} = \Sigma \cup \{q_1\} \cup \dots \cup \{q_l\}$$

sendo Σ uma cônica (a única componente de dimensão 1) e $q_1, \dots, q_l$ pontos isolados (fora de Σ).

Seja $D = \Sigma \sqcup q_1$ a união esquemática da cônica Σ e do ponto q_1 . Segue do Lema 3.3 que $p_{I_D}(t) = 2t + 2$. Agora, $D \subseteq C_{\text{red}}$, logo $I_{C_{\text{red}}} \subseteq I_D$. Assim,

$$I \subseteq \sqrt{I} = I_{C_{\text{red}}} \subseteq I_D \implies p_{I_D}(d) = 2d + 2 \leq p_I(d) = 2d + 1 \quad \forall d \gg 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, $C_{\text{red}} = \Sigma$, que implica em $p_{\sqrt{I}}(t) = 2t + 1$.

Assim, estamos na seguinte situação: temos os ideais saturados I e $\sqrt{I}$ tais que $I \subseteq \sqrt{I}$ com $p_I(t) = p_{\sqrt{I}}(t) = 2t + 1$. Segue da Proposição 1.2 que $C = C_{\text{red}}$.

- Se $\text{gr}(\Sigma) = 1$ então o Lema 3.1 nos garante que Σ é uma reta em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$. Agora como $\text{gr}(C_{\text{red}}) = 2$ e toda componente de dimensão 1 e grau 1 é uma reta, a Proposição 3.1 nos garante que

$$C_{\text{red}} = \Sigma \cup \Sigma_1 \cup \{q_1\} \cup \dots \cup \{q_l\}$$

sendo Σ e Σ_1 retas em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, e $q_1, \dots, q_l$ pontos isolados (fora de $\Sigma \cup \Sigma_1$).

Temos duas possibilidades para a posição relativa das retas Σ e Σ_1 .

meu10.jpg

No que segue, vamos analisar os casos (i) e (ii), respectivamente:

- (i) $C_{\text{red}} = \Sigma \cup \Sigma_1 \cup \{q_1\} \cup \dots \cup \{q_l\}$ com $\Sigma \cap \Sigma_1 = \emptyset$.

meu11.jpg

Seja $D = \Sigma_1 \cup \Sigma_l$. Note que $D \subseteq C_{\text{red}}$ o que implica em

$$\sqrt{I} = I_{C_{\text{red}}} \subset I_D \xrightarrow{(1.6)} p_{I_D}(d) \leq p_{\sqrt{I}}(d) \quad \forall d \gg 0 \quad (3.4)$$

Agora, tendo em consideração que C_{red} é uma curva de grau 2, então $p_{\sqrt{I}}(t) = 2t + a$ sendo a uma constante. Além disso, o Lema 3.4 nos garante que $p_{I_D}(t) = 2t + 2$. Assim, concluímos a partir de (3.4) que

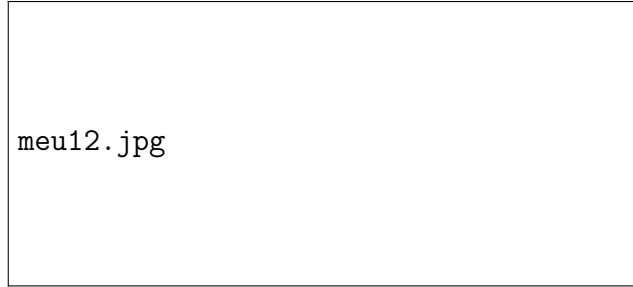
$$2d + 2 \leq 2d + a \quad \forall d \gg 0,$$

Isto implica em $a \geq 2$. Entretanto $I \subseteq \sqrt{I}$, logo (1.6) implica em

$$p_{\sqrt{I}}(d) = 2d + a \leq p_I(d) = 2d + 1 \implies a \leq 1.$$

Isto é um absurdo.

(ii) $C_{\text{red}} = \Sigma \cup \Sigma_1 \cup \{q_1\} \cup \dots \cup \{q_l\}$ com $\Sigma \cap \Sigma_1 \neq \emptyset$.



De forma análoga, temos $D = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subseteq C_{\text{red}}$ que implica em $\sqrt{I} = I_D \subseteq I_D$. Como também que $p_{\sqrt{I}}(t) = 2t + a$ sendo a uma constante. Agora, o Lema 3.4 nos garante que $p_{I_D}(t) = 2t + 1$. Agora, a partir de (1.6) obtemos que

$$p_D(d) \leq p_{\sqrt{I}}(d), \forall d \gg 0 \implies 2d + 1 \leq 2d + a \forall d \gg 0 \implies a \geq 1.$$

Lembremos que, $I \subseteq \sqrt{I}$, implica em

$$p_{\sqrt{I}}(d) = 2d + a \leq p_I(d) = 2d + 1 \implies a \leq 1.$$

Portanto, $p_{\sqrt{I}}(t) = 2t + 1$.

Assim, estamos novamente na seguinte situação: temos os ideais saturados I e $\sqrt{I}$ tais que $I \subseteq \sqrt{I}$ com $p_I(t) = p_{\sqrt{I}}(t) = 2t + 1$. Portanto, segue da Proposição 1.2 que $C = C_{\text{red}}$.

Observe que os ideais $I = \sqrt{I} \subseteq I_D$ são ambos saturados e satisfazem $p_I(t) = p_D(t) = 2t + 1$. Logo, $C = C_{\text{red}} = \Sigma \cup \Sigma_1$

□

Corolário 3.1. Se $C \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ for uma curva tal que $C_{\text{red}} = C$ e $p_{I_C}(t) = 2t + 1$. Então C é uma cônica. De fato, C é irredutível ou união de um par de retas concorrentes em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$.

Teorema 3.2. Seja C um subesquema fechado de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$. Verifica-se que

$$C \text{ é uma cônica} \iff p_{I_C}(t) = 2t + 1.$$

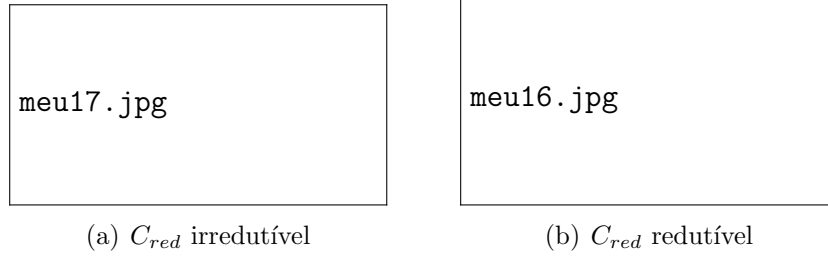


Figura 3.2: (a) C_{red} é irredutível e no caso (b) C_{red} é redutível.

Demonstração. $\implies$ Se C é uma cônica em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, então o Exemplo 1.14 implica em que $p_{I_C}(t) = 2t + 1$.

$\Leftarrow$ Se C um subesquema fechado de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ tal que $p_{I_C}(t) = 2t + 1$. A Proposição 3.4 implica em que C é uma cônica, se $C = C_{red}$. Caso contrário, C_{red} é uma reta e neste caso o Lema 3.7 nos garante C é uma cônica. $\square$

3.5 Descrição do Espaço $\mathbb{H}_{p(t)}$ com $p(t) = 2t + 2$

Seja D um subesquema fechado de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ tal que $p_{I_D}(t) = 2t + 2$. Observe que podemos escrever $p_{I_D}(t) = 2t + 2$, das seguintes formas:

- $p_{I_D}(t) = 2t + 2 = (2t + 1) + 1$. Neste caso, podemos pensar que D é igual à união esquemática de uma cônica $\mathcal{C}$ e um ponto. Conforme ilustra a figura a seguir (sendo H o plano suporte da cônica $\mathcal{C}$):

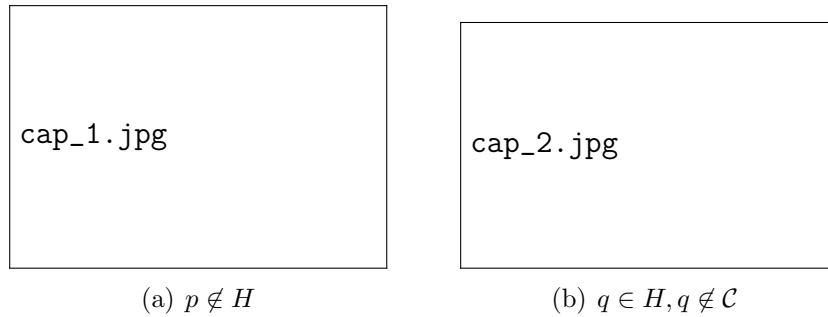


Figura 3.3: Representações das curvas

- $p_{I_D}(t) = 2t + 2 = (t + 1) + (t + 1)$. Neste caso, podemos pensar D é igual à união esquemática de duas retas disjuntas ℓ_1 e ℓ_2 . Veja imagem a seguir:

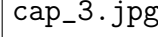


Figura 3.4: Retas reversas

A seguir vamos caracterizar os subesquemas fechados reduzidos¹¹ cujo polinômio de Hilbert é $2t + 2$.

Proposição 3.5. Seja C um subesquema fechado de $\mathbb{P}^3$ tal que $p_{I_C}(t) = 2t + 2$. Verifica-se que:

$$C = C_{red} \iff \begin{cases} C \text{ é a união esquemática de uma cônica reduzida } D \text{ e um ponto } \\ p \notin D. \\ \text{ou} \\ C \text{ é a união esquemática de duas retas disjuntas.} \end{cases}$$

Demonstração. $\implies$ Se $C = C_{red}$ segue que $\text{gr}(C_{red}) = 2$.

Segue da proposição 3.1 que C_{red} possui uma única componente irredutível de dimensão 1 e grau 2 ou exatamente duas componentes de dimensão 1 e grau 1. Agora, observe que:

- (i) Se C_{red} possui uma única componente irredutível de dimensão 1 e grau 2, então o lema 3.1 nos garante que:

$$C_{red} = D \cup \{q_1\} \cup \dots \cup \{q_k\}$$

sendo D uma cônica em $\mathbb{P}^3$ e $q_1, \dots, q_k$ pontos fora de D .

Note que, se C_{red} for irredutível, teríamos que $C_{red} = D$, logo C_{red} é uma cônica e $p_{\sqrt{I_C}}(t) = 2t + 1$, mas isso é um absurdo, visto que $C = C_{red}$. Portanto, C_{red} admite pelo menos uma componente de dimensão zero. Assuma que $\{q\} \dot{\cup} D \subseteq C_{red}$. Entretanto, $I_{D \dot{\cup} \{q\}}$ e $\sqrt{I_C}$ são ideais homogêneos saturados que tem o mesmo polinômio de Hilbert. Assim, a Proposição 1.2 implica em $\{q\} \dot{\cup} D = C_{red} = C$.

Neste caso, C é a união esquemática de uma cônica D e um ponto $q \notin D$.

¹¹Um subesquema fechado C de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ é dito *reduzido*, se $I_C = \sqrt{I_C}$, ou seja, $C = C_{red}$.

- (ii) Se C_{red} possui duas componentes de dimensão 1 e grau 1, então o lema 3.1 nos garante que:

$$C_{red} = l_1 \cup l_2 \cup \{q_1\} \cup \cdots \cup \{q_k\}$$

sendo l_1 e l_2 retas distintas em $\mathbb{P}^3$, e $q_1, \dots, q_k$ pontos fora de $l_1 \cup l_2$.

Neste caso temos duas possibilidades para as retas l_1 e l_2 , elas podem ser concorrentes, definindo uma cônica ou disjuntas, de modo que $P_{I_{l_1 \cup l_2}}(t) = 2t + 2$ (cf. Lema 3.4).

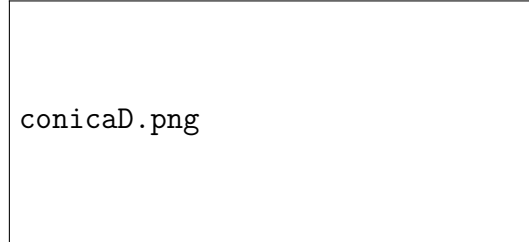
Como $C = C_{red}$, que implica em $P_{\sqrt{I_C}}(t) = 2t + 2$, necessariamente

$$C_{red} = \begin{cases} l_1 \cup l_2 \cup \{q\} & \text{se } l_1 \cap l_2 \neq \emptyset, \\ l_1 \cup l_2 & \text{se } l_1 \cap l_2 = \emptyset. \end{cases}$$

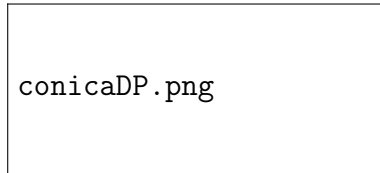
Na primeira opção concluímos que C_{red} é a união esquemática da cônica $l_1 \cup l_2$ e o ponto q , já na segunda opção, segue que $C_{red} = l_1 \cup l_2$ é a união esquemática de duas retas disjuntas.

$\Leftarrow$ (1) Se C é a união esquemática uma cônica D em $\mathbb{P}^3$ e um ponto $p \notin D$, então $I_C = I_D \cap I_p$. Então basta mostrar que esse ideal é radical para concluirmos que $C = C_{red}$.

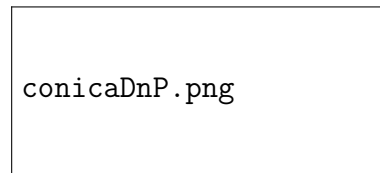
Assuma que H é o plano suporte da cônica D .



Assim, $I_D = \langle h, f \rangle$ sendo $I_H = \langle h \rangle$ com $f \in S_2 - hS_1$. Temos duas possibilidades: $\underbrace{p \in H}_{(a)}$ ou $\underbrace{p \notin H}_{(b)}$.



(a)



(b)

- (a) Neste caso, o Lema 3.3 nos garante que podemos escolher $h, h_1, h_2 \in S_1$ tais que $I_p = \langle h, h_1, h_2 \rangle$, $I_D = \langle h, f \rangle$ com $f \in S_2 - hS_1$ são ideais radicais tais que

$$I_C = \langle h, fh_1, fh_2 \rangle.$$

Para concluir, observe que o ideal acima é radical.

- (b) Neste caso, o Lema 3.3 nos garante que podemos escolher $\{h, h_1, h_2, h_3\}$ base de S_1 tais que $I_p = \langle h_1, h_2, h_3 \rangle$, $I_D = \langle h, f \rangle$ com $f \in S_2 - hS_1$ são ideais radicais tais que

$$I_C = \langle hh_1, hh_2, hh_3, f \rangle.$$

Para concluir, basta observar que o ideal acima é radical.

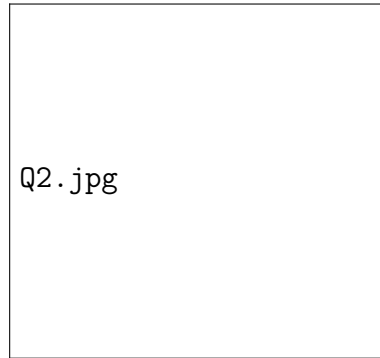
- (2) Se C é a união esquemática de duas retas disjuntas, logo $p_I(t) = 2t + 2$ (cf. Lema 3.4). Assim, como se trata de duas retas disjuntas (logo distintas), a Proposição 3.4 nos garante que $C = C_{red}$. $\square$

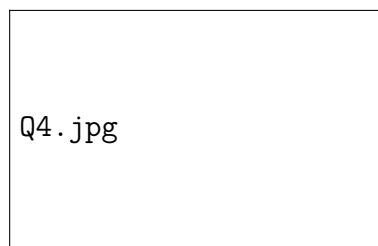
Corolário 3.2. Seja $I \subset \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ um ideal homogêneo saturado tal que $I = \sqrt{I}$. Então

$$p_I(t) = 2t + 2 \iff \begin{cases} I = \langle hh_1, hh_2, hh_3, f \rangle & \text{com } [h, h_1, h_2, h_3] = S_1 \\ & f \in S_2 - hS_1, \\ & (p_{\langle h, f \rangle}(t) = 2t + 1) \\ I = \langle h, h_1f, h_2f \rangle & \text{com } \{h, h_1, h_2\} \subset S_1 \text{ L.I.} \\ & f \in S_2 - hS_1, \\ & (p_{\langle h, f \rangle}(t) = 2t + 1) \\ I = \langle hh_2, hh_3, h_1h_2, h_1h_3 \rangle & \text{com } [h, h_1, h_2, h_3] = S_1 \end{cases}$$

Demonstração. Segue da Proposição 3.5 e dos Lemas 3.3 e 3.4. $\square$

Observações 3.1. No caso em que C é um subesquema fechado de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ cujo polinômio de Hilbert é $2t + 2$ e $C \neq C_{red}$, temos as seguintes possibilidades:





Acreditamos que com as técnicas expostas em nosso trabalho, poderíamos descrever os ideais homogêneos saturados que determinam tais configurações. Entretanto, não é uma tarefa fácil. Por exemplo, no artigo [17] os autores dão uma descrição de uma das componentes do esquema de Hilbert Hilb^{2t+3} e comentam que a descrição das outras componentes faz parte de uma pesquisa a futuro.

Apêndice A

Alguns conceitos de geometria algébrica

A.1 $\mathbb{P}^n$: O Espaço Projetivo Clássico

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo k . Defina a seguinte relação em $V - \{0_V\}$ (sendo 0_V o vetor nulo de V)

$$u \sim v \iff u = \lambda v, \text{ para algum } \lambda \neq 0 \in k.$$

Observe que $\sim$ define uma relação de equivalência em $V - \{0_V\}$

Definição A.1. O conjunto quociente será denotado por $\mathbb{P}(V)$ e denominado *projetivização* de V . Assim,

$$\mathbb{P}(V) := \frac{V - \{0_V\}}{\sim}.$$

Note que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \longrightarrow & G_1(V) = \{W \mid W \leq V, \dim W = 1\} \\ \bar{v} & \longmapsto & [v] \end{array}$$

sendo $\bar{v}$ a classe de equivalência de v e $[v]$ o subespaço unidimensional de V gerado por v , é uma bijeção. Assim, podemos pensar os pontos de $\mathbb{P}(V)$ como sendo retas em V passando pela origem.

A seguir nosso foco será $V = \mathbb{C}^{n+1}$ como espaço vetorial complexo.

O n -espaço projetivo complexo

Usaremos a notação $\mathbb{P}^n$ em lugar de $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ para indicar n -espaço projetivo sobre $\mathbb{C}$. De fato, usaremos também a denominação de *n -espaço projetivo*

clássico. Além disso, para cada vetor $v = (v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ não-nulo, usaremos a notação $[v_0 : \dots : v_n]$ para indicar a classe de equivalência associada ao vetor v . As coordenadas $v_0, \dots, v_n$ do vetor v são denominadas *coordenadas homogêneas* do ponto $[v_0 : \dots : v_n] \in \mathbb{P}^n$.

A seguir vamos a apresentar a reta projetiva $\mathbb{P}^1$, o plano projetivo $\mathbb{P}^2$ e o espaço projetivo $\mathbb{P}^3$.

Exemplo A.1. Tendo em consideração que $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$, segue que:

P0. Como $\mathbb{P}^0 = \mathbb{P}(\mathbb{C})$ tem-se $\mathbb{P}^0 = \{[1]\}$. É um conjunto unitário.

P1. Como $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ tem-se

$$\mathbb{P}^1 = \{[a_0 : 1] \mid a_0 \in \mathbb{C}\} \cup \{[1 : 0]\}.$$

Assim, $\mathbb{P}^1$ admite uma partição dada por uma cópia de $\mathbb{C}$ (a reta complexa afim) e um ponto (chamado ponto no infinito). $\mathbb{P}^1$ é denominada *reta projetiva*.

P2. Como $\mathbb{P}^2$ é obtido por $\mathbb{C}^3$ tem-se

$$\mathbb{P}^2 = \{[a_0 : a_1 : 1] \mid a_0, a_1 \in \mathbb{C}\} \cup \{[a_0 : a_1 : 0] \mid [a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1\}.$$

Assim, $\mathbb{P}^2$ admite uma partição dada por uma cópia de $\mathbb{C}^2$ (o plano complexo afim) e uma reta projetiva (chamada reta no infinito). $\mathbb{P}^2$ é denominado *plano projetivo*.

P3. Como $\mathbb{P}^3$ é obtido por $\mathbb{C}^4$ tem-se

$$\mathbb{P}^3 = \{[a_0 : a_1 : a_2 : 1] \mid a_i \in \mathbb{C}\} \cup \{[a_0 : a_1 : a_2 : 0] \mid [a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2\}.$$

Assim, $\mathbb{P}^3$ admite uma partição dada por uma cópia de $\mathbb{C}^3$ (o espaço complexo afim) e um plano projetivo (chamado plano no infinito). $\mathbb{P}^3$ é denominado *espaço projetivo*.

Zeros em $\mathbb{P}^n$ de um ideal homogêneo

Considere a graduado usual em $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Assim, $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ sendo

$$S_d = \{0\} \cup \{F \in S \mid F \neq 0 \text{ homogêneo de grau } d\}.$$

Um ideal $I \subseteq S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ é homogêneo, se e somente se, I possui um conjunto de geradores homogêneos.

Exercício A.1. Sejam f, g polinômios não nulos em $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ com a seguinte decomposição em partes homogêneas $f = f_0 + \dots + f_d$ e $g = g_0 + \dots + g_e$ sendo $d \leq e$. Se $(\)_k$ denota a parte homogênea em grau k , então mostre que:

$$(a) \ (f + g)_k = f_k + g_k \text{ para todo } k \in \{0, \dots, e\}.$$

$$(b) \ (f \cdot g)_k = f_0 \cdot g_k + f_1 \cdot g_{k-1} + \dots + f_{k-1} \cdot g_1 + f_k \cdot g_0 \text{ para todo } k \in \{0, \dots, d+e\}.$$

Proposição A.1. Seja I um ideal do anel $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Verifica-se que I é homogêneo $\iff \forall g \in I, g \neq 0$ tem-se que $g_i \in I \ \forall i \in \{0, 1, \dots, d\}$ com $d = \text{grau}(g)$ e $g_i \in S_i$ tal que $g = g_0 + \dots + g_d$.

Demonstração. Se $h \in S$ vamos denotar por $(h)_m \in S_m$ a parte homogênea em grau m de h .

$\implies$ Sendo $I \subseteq S$ ideal homogêneo, escolha polinômios homogêneos $F_1, \dots, F_k$ em S tais que $I = \langle F_1, \dots, F_k \rangle$.

Seja $g \in I$ não nulo de grau d tal que

$$g = g_0 + g_1 + \dots + g_d \quad \text{com } g_i \in S_i.$$

Como $g \in I$ existem $p_1, \dots, p_k \in S$ tais que $g = p_1 F_1 + \dots + p_k F_k$. Assim,

$$g_i = (g)_i = (p_1 F_1 + \dots + p_k F_k)_i \stackrel{Ex. A.1}{=} (p_1 F_1)_i + \dots + (p_k F_k)_i. \quad (A.1)$$

Agora vamos focar na determinação de $(p_1 F_1)_i, \dots, (p_k F_k)_i$ para cada $i \geq 0$. Para isso, assumamos que $\text{grau}(F_j) = d_j$ para cada $j \in \{1, \dots, k\}$. Segue mais uma vez do Exercício A.1 que

$$(p_1 F_1)_i = \begin{cases} (p_1)_{i-d_1} F_1 & \text{se } i \geq d_1 \\ 0 & \text{se } i < d_1 \end{cases}, \dots, (p_k F_k)_i = \begin{cases} (p_k)_{i-d_k} F_k & \text{se } i \geq d_k \\ 0 & \text{se } i < d_k \end{cases}$$

Portanto, $(p_1 F_1)_i, \dots, (p_k F_k)_i$ pertencem ao ideal $\langle F_1, \dots, F_k \rangle = I$. Segue de (A.1) que $g_i \in I$ para cada $i \in \{0, \dots, d\}$.

$\impliedby$ Como S é um anel noetheriano podemos escolher $h_1, \dots, h_k$ geradores do ideal I . Assumamos que a decomposição desses geradores do ideal I em partes homogêneas seja dada por

$$\begin{aligned} h_1 &= (h_1)_0 + (h_1)_1 + \dots + (h_1)_{d_1}, \\ &\vdots \\ h_k &= (h_k)_0 + (h_k)_1 + \dots + (h_k)_{d_k}. \end{aligned}$$

Afirmção: Seja $J = \langle (h_1)_0, (h_1)_1, \dots, (h_1)_{d_1}, \dots, (h_k)_0, (h_k)_1, \dots, (h_k)_{d_k} \rangle$. Então $I = J$.

De fato, sendo $h_1, \dots, h_k$ geradores do ideal I , segue da hipótese que as partes homogêneas de cada h_j pertencem ao ideal I . Portanto, $J \subseteq I$.

A outra inclusão fica para o leitor. $\square$

Definição A.2. Seja $I \subseteq S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ um ideal homogêneo. Os zeros de I que serão denotados por $Z(I)$, são dados por

$$Z(I) = \{[v] \in \mathbb{P}^n \mid F_i(v) = 0, i = 1, \dots, k\}$$

sendo $F_1, \dots, F_k$ um conjunto de geradores homogêneos do ideal I .

Exercício A.2. Mostre que $Z(I)$ independe da escolha de geradores homogêneos para o ideal homogêneo $I \subseteq S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$.

Exemplo A.2. Considere o ideal $I = \langle x_0, x_1^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. O conjunto dos seus zeros $Z(I) \subseteq \mathbb{P}^2$ é dado por

$$Z(I) = \{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2 \mid a_0 = 0, a_1^2 = 0\} = \{[(0 : 0 : 1)]\}.$$

Teorema dos zeros de Hilbert e outros resultados

Se K um corpo algebricamente fechado e K^n o conjunto das n -uplas de números em K .

Definição A.3. A variedade afim $V(I)$ definida por um ideal I consiste no conjunto de todas as n -uplas $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ tais que $f(x) = 0$ para todo $f \in I$.

Teorema A.1. (Zeros de Hilbert) Seja K um corpo algebricamente fechado (como o dos números complexos), considera-se o anel de polinômios $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ e seja I um ideal neste anel. Se $p(x)$ é um polinômio em $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ que se anula na variedade $V(I)$, i.e. $p(x) = 0$ para todo x em $V(I)$, então existe um número natural r tal que $p(x)^r$ está em I .

Demonstração. Confira Teorema 9, p. 384 em [3]. $\square$

Um teorema que utilizaremos bastante no capítulo 3 é o seguinte:

Teorema A.2. Sejam Y e Z variedades em $\mathbb{P}^n$ de dimensão r, s respectivamente. Então toda componente irredutível de $Y \cap Z$ tem dimensão $\geq r + s - n$. Mais ainda, se $r + m - n \geq 0$, então $Y \cap Z$ é não-vazio.

Demonstração. Confira o Teorema 7.2 na p. 48 em [11]. $\square$

Os teoremas acima nos habilitarão a resolver os problemas geométricos associando-os a seus ideais, portanto são cruciais para a compreensão dos conteúdos que pretendemos estudar.

Uma outra referência que trata da existência do polinômio de Hilbert, e que acrescenta um resultado muito importante para nossa pesquisa é que o grau do polinômio de Hilbert coincide com a dimensão de $Z(I)$.

Observação A.1. Tendo em consideração que a dimensão do subesquema fechado $V(I) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 := Proj(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3])$ determinado por um ideal homogêneo I do anel $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ foi definido pelo grau do seu polinômio de Hilbert $p_I(t)$, então segue da Proposição A.2 (a seguir) que

$$\text{grau}(p_I(t)) = \dim Z(I) = \dim V(I).$$

Proposição A.2. Seja I um ideal homogêneo em $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ com função de Hilbert associada h_I . Então existe um polinômio $p_I \in \mathbb{Q}[t]$ tal que para todo d suficientemente grande verifica-se que:

$$h_I(d) = p_I(d).$$

Além disso, $\text{grau}(p_I) = \dim Z(I) = \dim V(I)$.¹

Demonstração. Confira Proposição 13.2, p. 165 do livro do Harris ([8]). $\square$

Utilizaremos a Proposição A.2 para mostrar o seguinte lema.

Lema A.1. Sejam I e J ideais homogêneos em $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ tais que $I \subseteq J$. Então

- (1) $\text{grau}(p_J(t)) \leq \text{grau}(p_I(t))$.
- (2) Se vale a igualdade em (1), então o grau do subesquema fechado definido por I é maior ou igual que o grau do subesquema fechado definido por J .

Demonstração. (1) Como $I \subseteq J$, segue que $V(J) \subseteq V(I)$. Assim, $\dim V(J) \leq \dim V(I)$. Entretanto, segue da Proposição A.2 que $\text{grau}(p_I(t)) = \dim V(I)$ e $\text{grau}(p_J(t)) = \dim V(J)$. Portanto, $\text{grau}(p_J(t)) \leq \text{grau}(p_I(t))$.

¹Se I é um ideal homogêneo do anel $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ (com a graduação usual), então $Z(I) = \{p \in \mathbb{P}^n \mid f(p) = 0 \forall f \in I\}$ e $V(I) = \{\mathfrak{p} \in Proj(S) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$ sendo $Proj(S)$ formado pelos ideais primos homogêneos do anel S que não contêm $S_+ = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$.

(2) Sejam Y e Z os subesquemas fechados de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ definidos por I e J , respectivamente. Se vale a igualdade $\text{gr}(p_J(t)) = \text{gr}(p_I(t)) = m$, segue que $\dim Y = \dim Z = m$ e seus polinômios de Hilbert são da forma:

$$p_I(t) = \frac{\alpha}{m!}t^m + tmg \quad \text{e} \quad p_J(t) = \frac{\beta}{m!}t^m + tmg \quad (\text{A.2})$$

sendo $\alpha = \text{gr}(Y)$ e $\beta = \text{gr}(Z)$. Agora, como $I \subseteq J$, segue de (1.6) que $p_J(d) \leq p_I(d) \quad \forall d \gg 0$. Assim,

$$0 \leq \frac{\alpha - \beta}{m!}d^m + tmg \quad \forall d \gg 0 \implies 0 \leq \alpha - \beta.$$

Portanto, $\text{gr}(Z) \leq \text{gr}(Y)$.

□

Referências Bibliográficas

- [1] M. F. Atiyah & I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
- [2] D. Cartwright, D. Erman, M. Velasco and B. Viray, *Hilbert schemes of 8 points*, Algebra Number Theory 3(7): 763-795 (2009).
- [3] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, New York:Springer-Verlag, 3a Ed. (2006).
- [4] J. Fogarty, *Algebraic families on an Algebraic Surface*, Amer. Jour. of Math. 13, No 2 (1968), 511-521.
- [5] G. Gotzmann, *Eine Bedingung für die Flachheit und das Hilbertpolynom eines graduierten Ringes*, Math. Z. 158 (1978), no. 1, 61–70.
- [6] G.M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann, *Singular-a computer algebra system for polynomial computations*, in: Symbolic computation and automated reasoning, AK Peters/CRC Press, 2001, 227–233.
- [7] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 4, p. 5-228 (1960).
- [8] J. Harris, *Algebraic Geometry: A first course*, Graduate Texts in Math. 133, Springer, New York, 1995.
- [9] J. Harris & D. Eisenbud, *The Geometry of Schemes*, Graduate Texts in Math. 197, Springer, New York, 1999.
- [10] J. Harris & D. Eisenbud, *3264 and all that: A second course in algebraic geometry*, Cambridge University Press, United Kingdom, 2016.
- [11] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. 52, Springer, New York, 1977.

- [12] R. Hartshorne, *Connectedness of the Hilbert scheme*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 29 (1966), p. 5-48
- [13] A. Lee, *The Hilbert Schemes of Curves in $\mathbb{P}^3$* , Harvard Mathematics Department Senior Thesis, 2000.
- [14] D. Mumford, *Lectures on Curves on an Algebraic Surface*, Annals of Mathematics Studies, vol. 59, Princeton University Press, 1966.
- [15] J. Nathan, *Basic algebra I*, Courier Corporation, 2012.
- [16] R. Piene and M. Schlessinger, *On the Hilbert Scheme Compactification of the Space of Twisted Cubics*, American Journal of Mathematics Vol. 107, No. 4 (Aug., 1985), pp. 761-774
- [17] J. Rojas, A. Silva and F. Xavier, *Schematic union of $(n-3)$ and $(n-2)$ dimensional quadrics in n* , Bulletin des Sciences Mathématiques, v. 174, (2022) p. 103091.
- [18] W. V. Vasconcelos, *Computacional Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.
- [19] W. V. Vasconcelos, *Algorithms and Computation in Mathematics*, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.