



UFPB

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

João Leno Santos de Andrade

**Comparando o pseudotensor de Landau-Lifshitz
com o Tensor de Energia-Momento do
Teleparalelismo**

João Pessoa - PB

2023



UFPB

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

João Leno Santos de Andrade

**Comparando o pseudotensor de Landau-Lifshitz com o
Tensor de Energia-Momento do Teleparalelismo**

Dissertação realizada no Departamento de Física da UFPB, sob orientação do Prof. Dr. Jansen Brasileiro Formiga, para a obtenção do grau de Mestre em Física.

João Pessoa - PB

2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A553c Andrade, João Leno Santos de.

Comparando o pseudotensor de Landau-Lifshitz com o tensor de energia-momento do teleparalelismo / João Leno Santos de Andrade. - João Pessoa, 2023.
77 f.

Orientação: Jansen Brasileiro Formiga.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Gravidade. 2. Espaço-tempo. 3. Curvatura. 4. Teleparalelismo. 5. Pseudotensor. 6. Energia do campo gravitacional. I. Formiga, Jansen Brasileiro. II. Título.

UFPB/BC

CDU 531.5(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de dissertação de **Mestrado** do aluno **João Leno Santos De Andrade**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

Aos vinte e oito dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e três, às 10:00, na sala virtual <https://meet.google.com/hin-dxzp-inv>, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a dissertação de Mestrado, na área de Gravitação e Cosmologia, de **João Leno Santos De Andrade**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Jansen Brasileiro Formiga (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Thiago Roberto da Possa Caramês (UFF), Fábio Leal de Melo Dahia (UFPB) e Fernando Lessa Carneiro (UFNT). Dando início aos trabalhos, o Prof. Jansen Brasileiro Formiga comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de dissertação intitulada “*Comparando o pseudotensor de Landau-Lifshitz com o Tensor de Energia-Momento do Teleparalelismo*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **28 de julho de 2023**.

Prof. Dr. Jansen Brasileiro Formiga
Orientador - PPGF/UFPB

Prof. Dr. Thiago Roberto da Possa Caramês
UFF

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Fernando Lessa Carneiro
UFNT

*“A Deus e à minha família,
que nunca deixaram de
acreditar em mim.”*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me presenteado cada dia com saúde e ter conduzido meus passos.

A minha família, por acreditar em mim e apoiar durante toda a minha trajetória acadêmica.

Ao meu orientador Professor Dr. Jansen Brasileiro Formiga pelo direcionamento, paciência e tempo concedido a este trabalho.

Aos professores que contribuíram ao longo da minha formação acadêmica, principalmente o Professor Dr. Francisco de Assis de Brito pela oportunidade que me deu de trabalharmos em uma iniciação científica.

Aos meus amigos e colegas ao longo do processo, por todo o conhecimento compartilhado e pela ajuda nos momentos que precisei. Em especial à Thalita Hernesto e Fernanda Barbosa pelas conversas e apoios.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

A presente dissertação versa sobre comparações entre duas abordagens para energia e o momento do campo gravitacional, a saber, o pseudotensor de Landau-Lifshitz e o tensor de energia-momento do teleparalelismo. O problema da determinação da energia gravitacional vem desde do surgimento da relatividade geral (RG), em 1915. Trata-se de um problema de grande importância para a Física, uma vez que os conceitos de energia e momento são fundamentais tanto para as teorias clássicas quanto para a mecânica quântica. A compreensão de como o campo gravitacional se comporta é fundamental para resolver um dos maiores problemas da física moderna, a construção de uma teoria quântica da gravitação; certamente, a resolução do problema da energia do campo gravitacional ajudará nessa compreensão. Devido às inúmeras abordagens para solução desse problema, não foi possível fazer uma descrição detalhada de cada uma. Assim, decidimos trabalhar com apenas o pseudotensor de Landau-Lifshitz e o tensor do teleparalelismo. O pseudotensor de Landau-Lifshitz é definido no contexto da RG e é frequentemente usado em livros textos quando se deseja dar uma descrição qualitativa da energia do campo gravitacional. Já o tensor do Teleparalelismo que usamos foi desenvolvido no contexto de uma teoria que fornece as mesmas equações de campo da RG porém possui uma noção de paralelismo distante; essa teoria é conhecida como Teleparalelismo Equivalente à Relatividade Geral (TEGR). Nesta dissertação, apresentamos resultados que mostram que o tensor do teleparalelismo apresenta propriedades mais adequadas para descrever o campo gravitacional que o pseudotensor de Landau-Lifshitz. Discutimos, por exemplo, o resultado que já é bem conhecido na literatura de que a versão teleparalela reproduz a equação de estado de um campo sem massa, enquanto que o pseudotensor de Landau-Lifshitz nem sempre é capaz de tal feito. Como resultado original, fomos capazes de mostrar que para um campo fraco e com uma escolha adequada do “gauge” o pseudotensor de Landau-Lifshitz difere do teleparalelo por um termo de quarta ordem. Também fizemos comparações exatas no espaço-tempo de ondas planas, conhecido genericamente por pp-waves.

Palavras-Chave: Espaço-tempo, curvatura, Teleparalelismo, gravidade, pseudotensor, energia do campo gravitacional.

Abstract

The present dissertation deals with comparisons between two approaches for energy and momentum of the gravitational field, namely, the Landau-Lifshitz pseudotensor and the energy-momentum tensor of teleparallelism. The problem of determining gravitational energy dates back to the emergence of general relativity in 1915. It is a problem of great importance for Physics, since the concepts of energy and momentum are fundamental both for classical theories and quantum mechanics. Understanding how the gravitational field behaves is fundamental to solving one of the biggest problems in modern physics, the construction of a quantum theory of gravitation; certainly, the resolution of the gravitational field energy problem will help in this understanding. Due to the numerous approaches to solve this problem, it was not possible to make a detailed description of each one. Thus, we decided to work with only the Landau-Lifshitz pseudotensor and the teleparallelism tensor. The Landau-Lifshitz pseudotensor is defined in the context of general relativity and is often used in textbooks when one wants to give a qualitative description of the gravitational field energy. The teleparallelism tensor we used was developed in the context of a theory that provides the same field equations as GR but has a notion of distant parallelism; this theory is known as Teleparallelism Equivalent to General Relativity (TEGR). In this dissertation, we present results that show that the teleparallelism tensor presents more adequate properties to describe the gravitational field than the Landau-Lifshitz pseudotensor. We discuss, for example, the result that is already well known in the literature that the teleparallel version reproduces the equation of state of a massless field, while the Landau-Lifshitz pseudotensor is not always capable of such a feat. As an original result, we were able to show that for a weak field and with a suitable “gauge” choice the Landau-Lifshitz pseudotensor differs from the teleparallel one by a fourth order term. We also made exact comparisons in the spacetime of plane waves, known generically as pp-waves.

Key-words: Space-time, curvature, Teleparallelism, gravity, pseudotensor, energy-momentum.

Sumário

Sumário	9
1 Introdução	11
2 Relatividade Especial	13
2.1 O que é a Relatividade Especial?	13
2.2 Motivação	13
2.3 Postulados	13
2.3.1 Consequências	14
2.4 Implicações para a Física Moderna	14
2.5 O Espaço-Tempo de Minkowski	15
2.6 A Transformação de Lorentz	15
3 Relatividade Geral	19
3.1 O Princípio da Covariância Geral	19
3.2 O Princípio da Equivalência de Einstein	20
3.3 Curvatura	21
3.4 Geodésica	22
3.5 Equações de Campo	23
3.6 Leis de Conservação para 4-momento e Momento Angular	24
3.6.1 Integrais de Fluxo Gaussiano para 4-momento e Momento Angular	24
3.6.2 Integrais de volume para 4-momento e Momento Angular	26
3.6.3 Argumentos Contra a Localização da Energia Gravitacional	28
3.6.4 Leis de Conservação para o 4-momento Total e Momento Angular	28
3.7 Outros pseudotensores	30
4 Teleparalelismo	33
4.1 O que é Teleparalelismo?	33
4.2 Teleparalelismo na RG	33
4.3 História do Teleparalelismo	34
4.3.1 Renascimento do Interesse pelo Teleparalelismo	35
4.3.1.1 C. Møller	35
4.3.1.2 Teoria de gauge do grupo das translações	36
4.3.2 Formulação Hamiltoniana do TEGR	36
4.3.2.1 Início da formulação Hamiltoniana	36
4.3.2.2 Equivalência com o formalismo ADM	37
4.4 Equações de Campo	37
4.4.1 Escalar de Torção e Lagrangiana	37
4.5 Energia no Teleparalelismo	38
4.6 Generalizações da teoria Teleparalela	40

4.7	Aplicações do Teleparalelismo	40
4.8	Decomposição de Eckart	41
5	Problemas da Energia Gravitacional	43
5.1	Ondas Gravitacionais Planas Linearmente Polarizadas	43
5.1.1	Comparação entre o pseudotensor de Landau-Lifshitz e o tensor teleparalelo	47
5.1.2	Caso Particular	49
5.1.3	Onda Eletromagnética Pura	50
5.2	Métrica de Minkowski nas Coordenadas próprias de um Observador	50
6	Resumo e Perspectivas	55
6.1	Sobre as comparações	55
6.2	Perspectivas	55
A	Densidade de energia-momento	57
A.1	Cálculo de $\theta_{LL}^{\mu\nu}$	57
A.2	Decomposições	59
B	pseudotensor de Landau-Lifshitz	63
B.1	Cálculo de $t_{LL}^{\mu\nu}$	63
	Referências	75

1 Introdução

A relatividade especial é uma teoria formulada por Albert Einstein em 1905 que revolucionou nossa compreensão do espaço, do tempo e do comportamento dos objetos em altas velocidades. Essa teoria é baseada em dois postulados fundamentais. O primeiro postulado é o **Princípio da Relatividade**, que diz que as leis da física são as mesmas para todos os referenciais inerciais. O segundo postulado diz respeito a **Constância da Velocidade da Luz**, que diz que a velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores inerciais, este postulado afirma que a velocidade da luz é sempre medida como $c = 299.792.458 \text{ m/s}$. Entretanto, esse postulado nada diz sobre a covariância das leis da Física quando expressas em referenciais não-inerciais. Portanto, em princípio, ela é uma teoria limitada aos referenciais inerciais e não inclui o campo gravitacional. A teoria que inclui o campo gravitacional e generaliza a relatividade para qualquer referencial, acelerado ou não, é conhecida como teoria da relatividade geral. Nela Einstein introduziu o chamado princípio da relatividade geral, cuja formulação matemática corresponde ao que se costuma chamar de princípio da covariância geral, que pode ser entendido como significando que as equações da Física devem ter uma forma tensorial [1, 2].

Em 1915 Albert Einstein formulou a RG [3], que é uma teoria da gravidade que revolucionou nossa compreensão da natureza fundamental do espaço-tempo e do comportamento de objetos massivos. Ela fornece uma estrutura geométrica para descrever os efeitos da gravidade como a curvatura do espaço-tempo causada por massa e energia. Apesar de bem sucedida em explicar e prever vários fenômenos da natureza, ela não oferece uma descrição clara e satisfatória da energia do campo gravitacional. Ao contrário de outras teorias, como a eletromagnética, por exemplo, que têm densidades de energia bem definidas associadas a elas, a energia associada à gravidade não é fácil de definir e medir de maneira local ou covariante [2].

O pseudotensor de Landau-Lifshitz [4], também conhecido como pseudotensor de energia-momento de Landau-Lifshitz, é uma construção matemática usada na RG para lidar com a energia e o momento associados ao campo gravitacional, além de reproduzir o 4-momento do formalismo ADM no limite assintótico [5]. Uma das principais críticas ao pseudotensor de Landau-Lifshitz é sua falta de covariância e dependência coordenada. Devido à sua dependência de coordenadas, não é um candidato adequado para uma descrição covariante e independente de coordenadas de energia e momento na RG. O problema de determinar a energia gravitacional tem sido uma área ativa de pesquisa e debate no campo da RG [3, 4, 6–20]. Várias propostas e abordagens foram apresentadas, incluindo o uso de definições de energia-momento quase locais (veja, por exemplo, as Refs. [12, 13]) e energia gravitacional associada a ondas gravitacionais [21]. No entanto, uma solução

universalmente aceita e satisfatória para o problema ainda não foi alcançada.

No verão de 1928 Einstein começou a trabalhar com uma teoria alternativa da gravitação conhecida como teleparalelismo [22]. O teleparalelismo, também conhecido como gravidade teleparalela, é uma formulação alternativa da gravidade que surgiu como uma extensão da RG para incluir o eletromagnetismo na geometria, isto é, geometrizar o campo eletromagnético. Todavia, esse projeto foi abandonado e, hoje, o teleparalelismo é usado por outros motivos, em especial a descrição da energia do campo gravitacional.

Na estrutura do teleparalelismo, o tensor energia-momento do campo gravitacional desempenha um papel crucial na descrição da distribuição de matéria e energia no espaço-tempo. Ele permite reescrever as equações de Einstein em uma forma na qual é possível identificar a energia do campo gravitacional e colocá-la no lado direito das equações, em igual destaque à energia da matéria.

Nesta dissertação, apresentamos uma comparação entre o pseudotensor de Landau-Lifshitz e o tensor do teleparalelismo. Primeiro, apresentamos esses dois objetos e só depois iniciamos a comparação. Na comparação, usamos duas abordagens distintas. Na primeira, coletamos informações presentes na literatura e realizamos uma comparação qualitativa. Depois, realizamos cálculos inéditos para obter resultados novos. Mostramos que, no caso de ondas planas com polarização $+$ e em um referencial em queda livre, os dois objetos diferem por um termo negativo. Também foi possível mostrar que, para uma escolha adequada de coordenadas, os dois objetos coincidem até terceira ordem em uma aproximação de campo fraco. Usando a decomposição de Eckart [23, 24], mostramos que eles preveem densidades, pressões, e fluxo de calor distintos.

Ao longo desta dissertação, usamos o formalismo tensorial, o formalismo de tétrada e a decomposição de Eckart, para estudar as densidade de energia e pressões associadas à energia do espaço-tempo [23, 24]. No Capítulo 2 apresentamos de forma resumida e objetiva a teoria da relatividade especial. No capítulo 3 apresentamos a teoria da relatividade geral, onde apontamos seus princípios fundamentais, uma noção de curvatura, a definição de geodésica, as equações de campo e as leis de conservação do 4-momento. No Capítulo 4 apresentamos a ideia do teleparalelismo, desde o surgimento até as aplicações; ao final, apresentamos a decomposição da densidade tensorial de energia-momento em termos da densidade de energia, das pressões, e do fluxo de calor. No capítulo 5 faremos uma comparação entre o pseudotensor de Landau-Lifshitz e o tensor teleparalelo. Para isso, usaremos o espaço-tempo de ondas planas linearmente polarizadas e o espaço-tempo de Minkowski. No último caso, a comparação é feita em um referencial acelerado. No capítulo 6 esboçamos um resumo dos resultados e perspectivas futuras.

2 Relatividade Especial

2.1 O que é a Relatividade Especial?

A relatividade especial é uma teoria científica desenvolvida por Albert Einstein em 1905 que mudou fundamentalmente nossa compreensão do espaço e do tempo. Este capítulo visa fornecer uma visão abrangente dessa teoria, incluindo seus principais postulados, consequências e implicações para nossa compreensão da física e do universo.

2.2 Motivação

A relatividade especial foi desenvolvida por Albert Einstein em 1905 como uma resposta à dificuldade da física newtoniana em explicar o comportamento da luz sem recorrer à hipótese do Éter Luminífero¹ [1]. Essa teoria introduziu uma nova estrutura para a compreensão da natureza do universo, que desafiou a nossa visão sobre o espaço e o tempo. Desde então, a relatividade especial se tornou um dos pilares da física moderna e continua a moldar nossa compreensão do universo hoje.

2.3 Postulados

A Relatividade Restrita é baseada em dois postulados fundamentais, que são:

- O Princípio da Relatividade: As leis da física são as mesmas para todos os observadores inerciais [1];

Esse postulado é uma generalização do princípio da relatividade de Galileu, que afirma que as leis da mecânica são as mesmas para todos os observadores em movimento uniforme em relação uns aos outros na ausência de forças externas. O que o princípio da relatividade restrita faz é incluir todas as leis da física, especialmente as que descrevem o eletromagnetismo.

- A constância da velocidade da luz: a velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores inerciais [1].

¹ O Éter era um meio físico que foi postulado como sendo um meio que permeava todo o espaço e sobre o qual as ondas eletromagnéticas se propagavam. Entretanto, o experimento de Michelson-Morley, realizado em 1881 não foi capaz de detectar o movimento da Terra em relação ao Éter, colocando esse meio como algo difícil de ser detectado.

Uma consequência desse postulado é que o intervalo de tempo e o comprimento são relativos ao movimento do observador e que não existe um referencial “absoluto” no universo.

Esses dois postulados são a base da relatividade especial e têm consequências como a dilatação do tempo, a contração do comprimento e a equivalência entre massa e energia.

2.3.1 Consequências

A relatividade especial tem várias consequências importantes que mudam fundamentalmente nossa compreensão do espaço e do tempo. Uma das mais famosas é a dilatação do tempo [25], que prevê que o tempo passa mais devagar para objetos que se movem em alta velocidade em relação a um observador. Este efeito foi corroborado por uma variedade de experimentos, incluindo medições do tempo de vida de partículas que se movem em altas velocidades.

Outra consequência da relatividade especial é a contração do comprimento [26], que prevê que os objetos que se movem em altas velocidades “parecerão” mais curtos na direção de seu movimento. Este efeito também foi corroborado experimentalmente.

A teoria também prevê a equivalência de massa e energia [27], conforme descrito pela famosa equação de Einstein $E = mc^2$. Esta equação mostra que massa pode ser convertida em energia e vice-versa. Essa equivalência foi verificada experimentalmente e levou a uma melhor compreensão da energia nuclear e ao desenvolvimento de tecnologias importantes.

Temos também a relatividade da simultaneidade [1], que diz que dois eventos que são simultâneos em um referencial podem não ser simultâneos em outro referencial. Este efeito é conhecido como a relatividade da simultaneidade e é uma consequência da constância da velocidade da luz.

Podemos ainda citar o efeito de causalidade [1], que nos diz que a ordem de causa e efeito é preservada em todos os referenciais e nenhum processo físico pode se propagar mais rápido que a velocidade da luz.

2.4 Implicações para a Física Moderna

A relatividade especial teve um impacto profundo na física moderna. Isso levou ao desenvolvimento de novas teorias, como a mecânica quântica relativística e a teoria da relatividade geral.

A teoria também mudou fundamentalmente nossa compreensão do universo. Mostrou que o espaço e o tempo não são entidades separadas, mas sim entrelaçadas em um

tecido quadridimensional conhecido como espaço-tempo [1]. Isso levou a novas ideias sobre a natureza da gravidade e a estrutura do próprio universo.

2.5 O Espaço-Tempo de Minkowski

A métrica de Minkowski é um objeto matemático que descreve a geometria do espaço-tempo quadridimensional na teoria da relatividade especial [1]. Ela foi introduzida em 1907 por Hermann Minkowski como uma forma de descrever a geometria do espaço-tempo na relatividade especial.

A métrica de Minkowski é definida como uma matriz 4x4 que, em coordenadas cartesianas, possui uma diagonal de $(-1, 1, 1, 1)$ e todos os outros elementos iguais a zero, escrita da seguinte maneira [2],

$$||\eta_{\mu\nu}|| = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ e a distância infinitesimal entre dois eventos, denominada “elemento de linha”, é dada por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1)$$

Essa métrica descreve o intervalo de espaço-tempo entre dois eventos, que é uma quantidade invariante nas transformações de Lorentz.

O intervalo de espaço-tempo entre dois eventos é definido como a diferença entre o quadrado da distância no tempo e o quadrado da distância no espaço. A métrica de Minkowski nos permite calcular esse intervalo, que é um conceito fundamental na relatividade restrita. O espaço-tempo de Minkowski é o espaço da mecânica relativística, assim como o espaço euclidiano é o espaço da mecânica newtoniana.

2.6 A Transformação de Lorentz

Agora queremos encontrar as transformações que conectam as coordenadas de dois referenciais inerciais que diferem apenas pelo movimento relativo constante e são consistentes com o Princípio da Relatividade de Einstein [2]. Digamos que Λ_ν^μ sejam os elementos da matriz que conecta os dois referenciais inerciais, ou seja

$$dx^\mu \rightarrow dx'^\mu = \Lambda_\nu^\mu dx^\nu. \quad (2.2)$$

Temos

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \rightarrow ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu, \quad (2.3)$$

porque a forma do tensor métrico não pode mudar e, portanto, encontramos a seguinte condição de que a transformação Λ_ν^μ deve satisfazer

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma \eta_{\rho\sigma}. \quad (2.4)$$

Como há várias maneiras de obter a expressão da transformação Λ_ν^μ , vamos nos deter ao seguinte método:

$$t \rightarrow \tilde{t} = ict, \quad (2.5)$$

onde i é a unidade imaginária, i.e. $i^2 = -1$, e t é o tempo. O elemento de linha agora lê-se

$$ds^2 = d\tilde{t}^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.6)$$

que é o elemento de linha em um espaço 4-dimensional Euclidiano $\mathbb{R}^4$ [2]. As transformações que deixam o elemento de linha invariante são as rotações e as translações. Agora em $\mathbb{R}^4$ temos seis rotações “elementares” porque também existem as rotações nos planos $\tilde{t}x$, $\tilde{t}y$ e $\tilde{t}z$. A generalização das transformações galileanas deveriam então partir das rotações nos planos $\tilde{t}x$, $\tilde{t}y$ e $\tilde{t}z$.

Vamos considerar uma rotação no plano $\tilde{t}x$. A matriz de rotação é

$$R_{\tilde{t}x}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

onde θ é o ângulo de rotação. Temos

$$\begin{pmatrix} d\tilde{t} \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d\tilde{t}' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)d\tilde{t} + \sin(\theta)dx \\ -\sin(\theta)d\tilde{t} + \cos(\theta)dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Considerando um evento que não está mudando as coordenadas do espaço no referencial $(\tilde{t}, x, y, z)$, temos $dx = 0$ e, portanto,

$$\frac{dx'}{d\tilde{t}'} = -\frac{\sin(\theta)d\tilde{t}}{\cos(\theta)d\tilde{t}} = -\tan(\theta). \quad (2.9)$$

Se reintroduzirmos as variáveis t e $\tilde{t}$, teremos

$$\frac{dx'}{dt'} = -ic \tan(\theta). \quad (2.10)$$

Note que $\frac{dx'}{dt'} = -v$, onde $-v$ é a velocidade do referencial (ct, x, y, z) relativo ao referencial (ct', x', y', z') , e portanto

$$\tan(\theta) = -i\alpha, \quad (2.11)$$

onde nós definimos $\alpha = \frac{v}{c}$. Desde que

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}, \\ \sin(\theta) &= \tan(\theta) \cos(\theta) = -\frac{i\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

a equação (2.8) torna-se

$$\begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} cdt' \\ dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma cdt - \gamma \alpha dx \\ -\gamma \alpha cdt + \gamma dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

onde definimos o fator de Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}. \quad (2.14)$$

A expressão para Λ_{ν}^{μ} é, portanto,

$$||\Lambda_{x\nu}^{\mu}|| = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\alpha & 0 & 0 \\ -\gamma\alpha & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

onde o subíndice x indica que a velocidade relativa dos dois referenciais está ao longo do eixo x [2]. Teremos expressões similares se o movimento relativo entre dois referenciais forem ao longo dos eixos y ou z

$$||\Lambda_{y\nu}^{\mu}|| = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\alpha & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ||\Lambda_{z\nu}^{\mu}|| = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\alpha & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

As transformações inversas podem ser facilmente obtidas com a substituição $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$. Como exemplo, vamos tomar a transformação inversa de (2.15), que será

$$||\Lambda_{x\nu}^{-1\mu}|| = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\alpha & 0 & 0 \\ \gamma\alpha & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

e é de fácil verificação que $\Lambda_{x\nu}^{\mu} \Lambda_{x\rho}^{-1\nu} = \delta_{\rho}^{\mu}$.

As transformações que conectam dois referenciais inerciais que diferem apenas pelo movimento relativo constante são chamadas de boosts, que são um caso particular

das transformações de Lorentz. Elas são a generalização relativística das transformações galileanas. As transformações de Lorentz com as rotações espaciais formam um grupo, que é chamado de grupo de Lorentz. Se somarmos as translações ao grupo de Lorentz, teremos o grupo de Poincaré, que é a contraparte na relatividade especial do grupo de Galileu na mecânica newtoniana [2]. Se substituirmos explicitamente a velocidade da luz c , o fator de Lorentz ficará

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.18)$$

Para $c \rightarrow \infty$, temos $\gamma \rightarrow 1$, e as transformações reduzem-se às de Galileu.

3 Relatividade Geral

A teoria da relatividade especial discutida no capítulo anterior é baseada no Princípio da Relatividade de Einstein e requer um espaço-tempo plano e referenciais inerciais. O objetivo deste capítulo é discutir a extensão de tal referencial teórico para incluir o campo gravitacional e referenciais não inerciais.

A partir de considerações simples, fica claro que a gravidade newtoniana precisa de uma revisão profunda. Na Lei da Gravitação Universal de Newton, existe a distância entre os dois corpos, mas as distâncias dependem do referencial. Além disso, vimos que na relatividade especial podemos transformar massa em energia e vice-versa. Assim, devemos esperar que partículas sem massa também sintam e gerem campos gravitacionais, e precisamos de uma estrutura para incluí-los [2]. Por fim, se a gravidade acopla à energia, ela deve acoplar à própria energia gravitacional. Devemos, portanto, esperar que a teoria seja não linear, o que não é o caso da gravidade newtoniana, onde o campo gravitacional de um sistema de múltiplos corpos é simplesmente a soma dos campos gravitacionais dos corpos individuais.

3.1 O Princípio da Covariância Geral

O princípio da covariância geral é um conceito fundamental na RG que desempenha um papel crucial na formulação da teoria. Origina-se do desejo de criar uma teoria da gravidade que seja consistente com os princípios da relatividade especial e mantenha sua validade sob transformações arbitrárias de coordenadas [1]. Nesta seção, nos aprofundamos no princípio da covariância geral e suas implicações para a formulação das equações de campo de Einstein.

Antes é essencial entender os princípios básicos. A relatividade especial introduziu o conceito de espaço-tempo, onde as leis físicas são expressas de forma covariante, o que significa que elas permanecem inalteradas sob as transformações de Lorentz 2.6. Essas transformações misturam coordenadas de espaço e tempo e incluem rotações, impulsos (“boosts”) e translações.

Na RG, o princípio da covariância geral estende a noção de covariância da relatividade especial para incluir interações gravitacionais. A teoria da relatividade geral é baseada no Princípio Geral da Relatividade:

Princípio Geral da Relatividade. As leis da física são as mesmas em todos os referenciais [2].

Uma formulação alternativa da ideia de que as leis da física são independentes da

escolha do referencial é o Princípio da Covariância Geral.

Princípio da Covariância Geral. A forma das leis da física é invariante sob transformações arbitrárias de coordenadas diferenciáveis [2].

Portanto, matematicamente, o princípio da covariância geral pode ser expresso exigindo que as equações que descrevem a dinâmica da matéria e a curvatura do espaço-tempo sejam expressas na forma tensorial. Tensores são objetos matemáticos que se transformam covariantemente sob transformações de coordenadas, garantindo que as equações mantenham sua forma. Este princípio tem profundas implicações para a formulação das equações de campo de Einstein. Ele garante que as equações que descrevem a curvatura do espaço-tempo e o movimento da matéria sejam covariantes sob transformações de coordenadas arbitrárias [28]. Consequentemente, a teoria não está vinculada a nenhuma escolha particular de coordenadas, e as previsões físicas permanecem invariáveis, independentemente do sistema de coordenadas empregado.

Porém, vale mencionar que tal princípio é considerado controverso devido as inúmeras críticas que recebeu desde sua formulação. Muitos o consideram vazio, pois é possível formular qualquer teoria em uma forma tensorial. Para uma discussão detalhada sobre esse problema, veja, por exemplo, a referência [28]. De qualquer forma, ele foi fundamental para que Einstein pudesse formular sua teoria da gravitação.

3.2 O Princípio da Equivalência de Einstein

O Princípio de Equivalência de Einstein é a pedra angular da RG, encapsulando a ideia fundamental de que os efeitos da gravidade são localmente indistinguíveis daqueles causados pela aceleração. Ele serve como um princípio orientador para a formulação da teoria e fornece informações sobre a natureza da gravidade e do espaço-tempo.

Há várias versões do princípio da equivalência e sua classificação varia de autor para autor. Muitas, inclusive, se contradizem. Todas as versões estão de acordo com a ideia de que no limite newtoniano as massas gravitacional e inercial são iguais.

A versão de Einstein diz basicamente o seguinte. Considere um referencial no qual um ponto material isolado se move uniformemente em linha reta (em geral, chamamos esse referencial de inercial). Um observador uniformemente acelerado em relação a esse referencial pode admitir que está em repouso sem contradizer nenhuma lei da Física, contanto que ele admita está na presença de um campo gravitacional homogêneo. (Uma versão mais precisa, fornecida pelo próprio Einstein, pode ser encontrada na página 206 da referência [29].)

Há, também, as versões que fazem uso do conceito de regiões infinitesimais para apresentar o princípio da equivalência. Elas afirmam que é possível cancelar um campo

gravitacional arbitrário em uma região infinitesimal do espaço-tempo. Essas versões foram bastante criticadas por Einstein e Synge, que certa forma consideraram um resultado trivial. Nas palavras de Synge (página ix de [30]) “Does it mean that the signature of the spacetime metric is $+2$ (or -2 if you prefer the other convention)? If so, it is important, but hardly a Principle...” De qualquer forma, essas versões ainda são muito usadas e, frequentemente, confundidas com a versão de Einstein, sendo que Einstein nunca enunciou o princípio da equivalência em regiões infinitesimais. Para maiores detalhes sobre essa e outras controvérsias, veja a referência [29]. A classificação das várias versões do princípio em “forma fraca”, “forma forte”, “princípio de Einstein” etc também são confusas e variadas. Por isso, não as apresentaremos aqui. O leitor interessado em uma tentativa de por ordem nessas classificações, pode encontrar as várias versões desse princípio em uma classificação bastante precisa em [31].

Várias formas do princípio da equivalência têm sido testadas experimentalmente e os resultados dos experimentos estão em concordância com essas formas [32]. Em especial, até agora, não foi detectada nenhuma diferença entre a massa inercial e a massa gravitacional. Assim, podemos concluir que o princípio da equivalência tem suporte experimental.

3.3 Curvatura

A curvatura é um conceito fundamental no campo da geometria diferencial e desempenha um papel central na RG. Nessa teoria, ela descreve a curvatura do próprio espaço-tempo devido à presença de massa e energia.

Em superfícies bidimensionais, como uma folha de papel ou a superfície de uma esfera, a curvatura é intuitivamente entendida como a quantidade pela qual a superfície se desvia de ser plana. Essa propriedade pode ser quantificada em termos de raio de curvatura ou usando ferramentas matemáticas como curvatura gaussiana ou curvatura média. Essas medidas capturam a quantidade de dobra ou protuberância da superfície em cada ponto.

Na RG, o espaço-tempo é uma estrutura geométrica quadridimensional que combina espaço e tempo em uma entidade unificada, que pode ser representada por uma métrica. A curvatura do espaço-tempo é descrita pelo tensor de Riemann, que é diferente de zero sempre que há um conteúdo de matéria ou energia [1].

A relação da geometria com a distribuição de massa e energia é dada pelas equações de campo de Einstein. Essas equações estabelecem uma conexão entre a curvatura do espaço-tempo (expressa pelo tensor de Einstein) e a distribuição de matéria e energia (expressa pelo tensor energia-momento).

Em resumo, compreender a curvatura é crucial para compreender o comportamento

das partículas, os efeitos da gravidade e a dinâmica do universo conforme descrito pela RG.

3.4 Geodésica

Uma geodésica é o caminho mais curto entre dois pontos em um espaço, como uma variedade ou espaço-tempo [33]. As geodésicas desempenham um papel central tanto na geometria diferencial quanto na RG, onde representam os caminhos seguidos por partículas ou raios de luz em resposta à curvatura do espaço-tempo. No campo da geometria diferencial, as geodésicas são definidas como curvas que minimizam ou maximizam localmente o comprimento entre dois pontos [34]. Elas são intrínsecas à geometria e representam a trajetória natural de partículas livres ou raios de luz.

As equações de uma geodésica podem ser escritas da seguinte forma. Considere uma curva parametrizada $x^\mu(\lambda)$, onde x^μ representa as coordenadas dos pontos ao longo da curva e λ é um parâmetro afim que rotula os pontos ao longo da curva. A equação geodésica pode ser escrita como [35]:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \quad (3.1)$$

onde $\overset{\circ}{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu$ representa os símbolos de Christoffel do segundo tipo, que são determinados pelo tensor métrico através da relação [33]:

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (g_{\nu\lambda,\sigma} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\sigma,\lambda}). \quad (3.2)$$

Na equação (3.1), os símbolos de Christoffel estão descrevendo como os vetores de base das coordenadas mudam à medida que são transportados ao longo da curva.

A equação geodésica também pode ser expressa em termos do vetor tangente à curva, $T^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, como:

$$\frac{dT^\mu}{d\lambda} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu T^\nu T^\sigma = 0. \quad (3.3)$$

Essa equação indica que a derivada covariante¹ do vetor tangente ao longo da geodésica é zero, refletindo o fato de que as geodésicas, pelo menos na geometria riemanniana, são simultaneamente a menor distância entre dois pontos e a trajetória mais “reta” da geometria. Isso significa que o vetor tangente permanece inalterado à medida que se move ao longo da geodésica [35].

¹ Esta derivada é definida como sendo a deriva que se transforma de forma covariante diante de uma transformação de coordenadas, isto é, ela mantém a forma.

Resolver a equação geodésica permite determinar o caminho seguido por uma partícula ou raio de luz em um espaço curvo. A equação geodésica é uma ferramenta essencial na RG para entender o movimento das partículas sob a influência da gravidade.

Em resumo, geodésicas são os caminhos mais curtos entre dois pontos em um espaço curvo. Na geometria diferencial, as geodésicas representam curvas intrínsecas, e na RG descrevem os caminhos seguidos por partículas ou raios de luz em resposta à curvatura do espaço-tempo. Portanto, compreender a geodésica é crucial para compreender o movimento das partículas livres.

3.5 Equações de Campo

As equações de campo da RG são um conjunto de equações que descrevem o comportamento da gravidade e a curvatura do espaço-tempo. Elas fornecem uma estrutura matemática para entender a relação entre a matéria e a geometria do espaço-tempo.

As equações de campo podem ser escritas em termos do tensor de Einstein ($G_{\mu\nu}$) e do tensor de energia-momento ($T_{\mu\nu}$) [1]. O tensor de Einstein é uma expressão matemática que codifica a curvatura do espaço-tempo, enquanto o tensor de energia-momento representa a distribuição de matéria e energia no espaço-tempo.

As equações de campo são dadas por [2]:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{c^4} GT_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

onde G é a constante gravitacional, c é a velocidade da luz. O tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ é uma combinação do tensor de Ricci ($\mathring{R}_{\mu\nu}$) e do escalar de Ricci ($\mathring{R}$), que são obtidos a partir do tensor de Riemann, $R^\alpha_{\mu\beta\nu}$. Em termos dos símbolos de Christoffel, o tensor de Riemann tem a forma

$$\mathring{R}^\alpha_{\mu\beta\nu} = \partial_\beta \mathring{\Gamma}^\alpha_{\nu\mu} - \partial_\nu \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\mu} + \mathring{\Gamma}^\phi_{\nu\mu} \mathring{\Gamma}^\alpha_{\beta\phi} - \mathring{\Gamma}^\phi_{\beta\mu} \mathring{\Gamma}^\alpha_{\nu\phi}. \quad (3.5)$$

O tensor de Ricci é definido pela contração

$$\mathring{R}_{\mu\nu} = \mathring{R}^\alpha_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\beta} \mathring{R}_{\beta\mu\alpha\nu}. \quad (3.6)$$

Uma contração final define o escalar de Ricci por

$$\mathring{R} = g^{\mu\nu} \mathring{R}_{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

O tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ contém informações sobre a densidade de energia e pressão do campo de matéria, e sua forma específica depende da natureza da matéria e dos campos presentes no sistema em consideração [1].

As equações de campo também podem ser expressas na forma [2]:

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R} = \frac{8\pi}{c^4}GT_{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, que descreve a geometria do espaço-tempo. O tensor métrico define a distância e os ângulos entre pontos próximos no espaço-tempo.

As equações de campo da RG são não lineares e acopladas, o que significa que a distribuição de matéria e energia afeta a curvatura do espaço-tempo, enquanto a curvatura do espaço-tempo influencia o movimento da matéria e da energia [2]. A resolução das equações de campo permite determinar o tensor métrico e, conseqüentemente, a geometria do espaço-tempo para uma dada distribuição de matéria e energia.

As equações de campo foram testadas e verificadas por meio de inúmeros experimentos e observações, como a deflexão da luz em torno de objetos massivos, a precessão do periélio de Mercúrio e as ondas gravitacionais detectadas por observatórios de ondas gravitacionais. Por isso, as equações de Einstein são tidas como as equações mais bem sucedidas na descrição do campo gravitacional.

3.6 Leis de Conservação para 4-momento e Momento Angular

Nesta seção, apresentamos uma das várias propostas para 4-momento e momento angular no contexto da RG. Ela não será utilizada mais adiante, porém consideramos importante que o leitor tenha contato com o problema da determinação da energia gravitacional no contexto dessa teoria, antes de passarmos para o teleparalelismo. A apresentação será baseada no capítulo 20 da referência [35].

3.6.1 Integrais de Fluxo Gaussiano para 4-momento e Momento Angular

Para apresentarmos uma definição para o 4-momento de um determinado espaço-tempo, vamos usar as equações de Einstein em sua forma linearizada. Assim, nos limitaremos ao caso de campos gravitacionais fracos.

A aproximação de campo fraco pode ser feita da seguinte forma. Primeiro, admite-se que a métrica $g_{\mu\nu}$ possa ser aproximada por $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Depois, calcula-se $G_{\mu\nu}$ até a primeira ordem em $h_{\mu\nu}$. Por conveniência, o tensor de Einstein é reescrito em termos de um novo conjunto de funções $\{\bar{h}_{\mu\nu}\}$ cuja definição é $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - (1/2)\eta_{\mu\nu}h$, onde $h \equiv \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$. Assim, as equações (3.4) podem ser aproximadas por

$$2G^{\mu\nu} = H^{\mu\alpha\nu\beta}_{,\alpha\beta} = 16\pi T^{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

onde a vírgula representa a derivada parcial e $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ é dado por

$$H^{\mu\alpha\nu\beta} \equiv -(\bar{h}^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\nu}\bar{h}^{\alpha\beta} - \bar{h}^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta} - \bar{h}^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu}). \quad (3.10)$$

Como se verifica a partir desta expressão, ele tem as mesmas simetrias que o tensor de Riemann

$$H^{\mu\alpha\nu\beta} = H^{\nu\beta\mu\alpha} = H^{[\mu\alpha][\nu\beta]},$$

$$H^{\mu[\alpha\nu\beta]} = 0. \quad (3.11)$$

Da antissimetria de $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ em ν e β , seguem as leis de conservação da fonte da teoria linearizada,

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{1}{16\pi} H^{\mu\alpha\nu\beta}_{,\alpha\beta\nu} = 0.$$

A mesma antissimetria que produz essas equações de movimento também produz uma integral de fluxo para o 4-momento total da fonte:

$$\begin{aligned} P^\mu &= \int T^{\mu 0} d^3x = \frac{1}{16\pi} \int H^{\mu\alpha 0\beta}_{,\alpha\beta} d^3x \\ &= \frac{1}{16\pi} \int H^{\mu\alpha 0j}_{,\alpha j} d^3x = \frac{1}{16\pi} \oint H^{\mu\alpha 0j}_{,\alpha} d^2S_j, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde foi usado $H^{\mu\alpha 00}_{,\alpha 0} = 0$ na primeira igualdade da segunda linha. Já na segunda igualdade, foi utilizado o teorema de Gauss. A 2-superfície fechada de integração S deve envolver completamente a fonte e deve estar em uma 3-superfície de tempo constante x^0 .

A energia pode ser obtida a partir da componente P^0 . Escrevendo essa componente em termos da métrica g_{ij} , onde os índices latinos assumem os valores 1, 2, 3, chega-se a

$$P^0 = \frac{1}{16\pi} \int_S (g_{jk,k} - g_{kk,j}) d^2S_j. \quad (3.13)$$

É interessante notar que essa expressão coincide exatamente com a energia ADM [5], que é obtida a partir do formalismo hamiltoniano.

Usando a definição usual de momento angular, no contexto de uma teoria relativística, e procedendo de maneira similar ao que foi feito em (3.12), chega-se a

$$\begin{aligned} J^{\mu\nu} &= \int (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}) d^3x \\ &= \frac{1}{16\pi} \oint_S (x^\mu H^{\nu\alpha 0j}_{,\alpha} - x^\nu H^{\mu\alpha 0j}_{,\alpha} + H^{\mu j 0\nu} - H^{\nu j 0\mu}) d^2S_j. \end{aligned} \quad (3.14)$$

As expressões que obtivemos para P^μ e para $J^{\mu\nu}$ são válidas apenas para campos gravitacionais fracos. Entretanto, elas podem ser aplicadas em espaços-tempos que tenham regiões com campo intenso, contanto que as utilizemos apenas nas regiões distantes, onde o campo é fraco. A situação mais comum, para a qual esse tipo de aproximação é válida, é a região assintótica de um espaço-tempo de uma fonte isolada. Como essa fonte está localizada em uma região finita do espaço, mesmo que seu campo gravitacional seja forte nas proximidades, é possível se afastar o suficiente para que a aproximação de campo fraco seja válida. Assim, as expressões obtidas acima podem ser usadas para calcular o 4-momento e o momento angular desses espaços-tempos.

É importante destacar, aqui, que as expressões obtidas acima para P^μ e $J^{\mu\nu}$ só devem ser usadas em um sistema de coordenadas assintoticamente retangular, onde a métrica $g_{\mu\nu}$ toma a forma da métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$. Em um sistema de coordenadas inercial local, isto é, um sistema de coordenadas tal que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu,\alpha} = 0$ em um certo evento, os integrandos de P^μ e $J^{\mu\nu}$ são nulos, pois

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\alpha} = h_{\mu\nu,\alpha} = 0 &\Rightarrow H^{\mu\nu\alpha\beta}_{,\alpha} = 0; \\ g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} &\Rightarrow H^{\mu\nu\alpha\beta} = 0. \end{aligned}$$

Isso não significa, entretanto que P^μ e $J^{\mu\nu}$ sejam nulos nesse sistema de coordenadas. Na verdade, o resultado das integrais, isto é, os valores do 4-momento e do momento angular serão independentes do sistema de coordenadas retangulares utilizados. Eles são tensores na região assintoticamente plana, local onde $g_{\mu\nu}$ tende a $\eta_{\mu\nu}$.

O uso de coordenadas curvilíneas ou a ausência da condição de contorno $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ pode, facilmente, levar a resultados sem sentido, e até divergentes. Tanto o formalismo apresentado aqui, quanto o formalismo ADM apresentado em [5] sofrem dessa limitação.

3.6.2 Integrais de volume para 4-momento e Momento Angular

O procedimento para obter as integrais de volume no caso linearizado é bastante simples. Aqui, apresentamos para o caso geral, sem linearização.

Suponha, agora, que $H^{\mu\nu\alpha\beta}$ continua tendo a mesma forma de antes, porém escrita em termos de $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$. Nesse caso, ainda é possível colocar as equações de Einstein, sem aproximação, na seguinte forma

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{,\alpha\beta} = 16\pi T_{eff}^{\mu\nu} \quad (3.15)$$

onde $T_{eff}^{\mu\nu}$ é um objeto que é dado pelo tensor de energia-momento da matéria mais uma parte não tensorial. Esta forma das equações de Einstein permite uma conversão das integrais de fluxo Gaussiano em integrais de volume, assim como na teoria linearizada:

$$\begin{aligned} P^\mu &= \frac{1}{16\pi} \oint H^{\mu\alpha 0j}_{,\alpha} d^2 S_j = \frac{1}{16\pi} \int H^{\mu\alpha 0j}_{,\alpha j} d^3 x \\ &= \frac{1}{16\pi} \int H^{\mu\alpha 0\beta}_{,\alpha\beta} d^3 x = \int T_{eff}^{\mu 0} d^3 x. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Similarmente,

$$J^{\mu\nu} = \int (x^\mu T_{eff}^{\nu 0} - x^\nu T_{eff}^{\mu 0}) d^3 x. \quad (3.17)$$

Nessas integrais de volume, como em toda a discussão anterior, as coordenadas devem se tornar assintoticamente lorentziana ($g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$) longe da fonte.

A forma de $T_{eff}^{\mu\nu}$ pode ser calculada ao lembrar que $H_{,\alpha\beta}^{\mu\alpha\nu\beta}$ tem a mesma forma do tensor linearizado de Einstein (3.9). Assim, o $T_{eff}^{\mu\nu}$ pode ser obtido a partir da soma de $T^{\mu\nu}$ com

$$16\pi t^{\mu\nu} \equiv H_{,\alpha\beta}^{\mu\alpha\nu\beta} - 2G^{\mu\nu}, \quad (3.18)$$

onde $t^{\mu\nu}$ é identificado como sendo o pseudotensor de energia-momento do campo gravitacional. A partir dessas identificações, podemos reescrever as equações de Einstein na forma

$$H_{,\alpha\beta}^{\mu\alpha\nu\beta} = 16\pi t^{\mu\nu} + 2G^{\mu\nu} = 16\pi(t^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}),$$

de modo que

$$T_{eff}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}. \quad (3.19)$$

A equação de campo de Einstein (3.15) implica, porque $H_{,\alpha\beta}^{\mu\alpha\nu\beta}$ é antissimétrico em ν e β , que

$$T_{eff,\nu}^{\mu\nu} = (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})_{,\nu} = 0. \quad (3.20)$$

Todas as quantidades $H^{\mu\alpha\nu\beta}$, $T_{eff}^{\mu\nu}$ e $t^{\mu\nu}$ dependem para sua definição e existência da escolha de coordenadas; eles não têm existência independente de coordenadas, não sendo, portanto, componentes de um tensor ou de qualquer outro objeto geométrico.

Está claro no procedimento acima que há uma infinidade de formas de definir $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ e obter uma definição para o 4-momento e para o momento angular. Em particular, se definirmos uma nova quantidade $H_{novo}^{\mu\alpha\nu\beta}$ que coincide com $H^{\mu\alpha\nu\beta}$ original na região assintótica de campo fraco, então o novo 4-momento e o novo momento angular coincidirão com os obtidos a partir de $H^{\mu\alpha\nu\beta}$. Uma escolha convenientemente foi dada por Landau e Lifshitz [4], que definiram o objeto

$$H_{LL}^{\mu\alpha\nu\beta} = \mathfrak{g}^{\mu\nu} \mathfrak{g}^{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\alpha\nu} \mathfrak{g}^{\mu\beta}, \quad (3.21)$$

onde $\mathfrak{g}^{\mu\nu} \equiv (-g)^{\frac{1}{2}} g^{\mu\nu}$. Landau e Lifshitz mostraram que as equações de Einstein podem ser escritas na forma

$$H_{LL,\alpha\beta}^{\mu\alpha\nu\beta} = 16\pi(-g)(T^{\mu\nu} + t_{LL}^{\mu\nu}), \quad (3.22)$$

onde as componentes do pseudotensor de Landau-Lifshitz são dadas por

$$\begin{aligned} (-g)t_{LL}^{\alpha\beta} = & \frac{1}{16\pi} [\mathfrak{g}_{,\lambda}^{\alpha\beta} \mathfrak{g}_{,\mu}^{\lambda\mu} - \mathfrak{g}_{,\lambda}^{\alpha\lambda} \mathfrak{g}_{,\mu}^{\beta\mu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} \mathfrak{g}_{,\rho}^{\lambda\nu} \mathfrak{g}_{,\nu}^{\rho\mu} \\ & - (g^{\alpha\lambda} g_{\mu\nu} \mathfrak{g}_{,\rho}^{\beta\lambda} \mathfrak{g}_{,\lambda}^{\mu\rho} + g^{\beta\lambda} g_{\mu\nu} \mathfrak{g}_{,\rho}^{\alpha\nu} \mathfrak{g}_{,\lambda}^{\mu\rho}) + g_{\lambda\mu} g^{\nu\rho} \mathfrak{g}_{,\nu}^{\alpha\lambda} \mathfrak{g}_{,\rho}^{\beta\mu} \\ & + \frac{1}{8} (2g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu}) (2g_{\nu\rho} g_{\sigma\tau} - g_{\rho\sigma} g_{\nu\tau}) \mathfrak{g}_{,\lambda}^{\nu\tau} \mathfrak{g}_{,\mu}^{\rho\sigma}]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Neste caso, teremos

$$T_{\text{LL eff}}^{\mu\nu} \equiv (-g)(T^{\mu\nu} + t_{\text{LL}}^{\mu\nu}) \quad (3.24)$$

e

$$T_{\text{LL eff},\nu}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.25)$$

$$P^\mu = \int T_{\text{LL eff}}^{\mu 0} d^3x, \quad (3.26)$$

$$J^{\mu\nu} = \int (x^\mu T_{\text{LL eff}}^{\nu 0} - x^\nu T_{\text{LL eff}}^{\mu 0}) d^3x. \quad (3.27)$$

3.6.3 Argumentos Contra a Localização da Energia Gravitacional

Nesta seção, vamos apresentar os argumentos elaborados por Misner, Kip Thorne e John Wheeler contra a ideia de tentar localizar a energia do campo gravitacional, pelo menos no contexto da RG.

Quando queremos saber qual é a energia e o momento do campo eletromagnético em um dado elemento de volume, temos apenas uma fórmula para calcular; não há ambiguidade. Além disso, essa energia-momento “tem peso”, pois ela curva o espaço, serve como fonte no lado direito das equações de Einstein, e produz um desvio geodésico entre duas linhas de universo que passam na região. Ela é observável. Nenhuma dessas propriedades está presente nos pseudotensores: há uma infinidade de pseudotensores que podem ser definidos; “a energia-momento local do campo gravitacional” não tem peso, ela não curva o espaço e nem serve com fonte no lado direito das equações de Einstein; também não produz desvio geodésico. Conclusão, ela não é observável.

Outro argumento apresentando pelos autores é que sempre podemos encontrar, em qualquer localidade, um referencial no qual todos os símbolos de Christoffel desaparecem. Eles terminam o argumento com a afirmação “No Γ ’s no “gravitational field” and no local gravitational field means no “local gravitational energy-momentum”.”

Duas questões interessantes, mas que não serão discutidas aqui, são as seguintes: “até que ponto esses argumentos não são dependentes da visão tradicional da RG?” Será que em uma nova teoria esses argumentos seriam válidos, ainda que essa teoria tivesse as mesmas equações de campo da RG?

3.6.4 Leis de Conservação para o 4-momento Total e Momento Angular

Há vários sistemas físicos que possuem corpos com campos gravitacionais intensos, mas que também possuem regiões enormes entre eles nas quais o campo gravitacional é fraco. Como exemplos, temos o Sistema Solar, as galáxias, e os aglomerados de galáxias.

Nesses sistemas, é razoável admitir que nessas regiões de campo fraco, que chamaremos de “entre corpos”, o espaço-tempo é aproximadamente plano e podemos desprezar as contribuições do pseudotensor. Assim, podemos escrever o 4-momento do sistema na forma

$$\begin{aligned} P_{sistema}^\mu &= \sum_\alpha \int_\alpha T_{eff}^{\mu 0} d^3x + \int_{\text{entre corpos}} T_{eff}^{\mu 0} d^3x \\ &= \sum_\alpha P_\alpha^\mu + \int_{\text{entre corpos}} T^{\mu 0} d^3x \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde separamos a integral em dois tipos: somatório das integrais nas regiões “assintóticas” (longe o suficiente) que envolve cada corpo, denotados por α e uma integral sobre a região quase vazia que existe entre os corpos do sistema.

O P_α^μ corresponde ao 4-momento do corpo α medido por um observador que está “próximo” do corpo α e longe dos outros corpos. Já a integral de $T^{\mu 0}$ na região entre os corpos computa as contribuições de qualquer gás, partículas, ou campo magnéticos que possam estar presentes nessa região. Fazendo o mesmo como o momento angular, teremos

$$J_{sistema}^{\mu\nu} = \sum_\alpha J_\alpha^{\mu\nu} + \int_{\text{entre corpos}} (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}) d^3x. \quad (3.29)$$

Envolva este sistema assintoticamente plano por uma superfície bidimensional S que está em repouso em algum referencial assintótico de Lorentz. Então o 4-momento e o momento angular dentro de S mudam a uma taxa dada por

$$\begin{aligned} \frac{dP^\mu}{dt} &= \frac{d}{dt} \int T_{eff}^{\mu 0} d^3x = \int T_{eff,0}^{\mu 0} d^3x \\ &= - \int T^{\mu j} d^3x = - \oint T_{eff}^{\mu j} d^2S_j, \end{aligned} \quad (3.30)$$

e similarmente

$$\frac{dJ^{\mu\nu}}{dt} = - \oint_{S_2} (x^\mu T_{eff}^{\nu j} - x^\nu T_{eff}^{\mu j}) d^2S_j. \quad (3.31)$$

Por conveniência, considere $T_{eff}^{\mu\nu}$ como sendo dado pelo pseudotensor de Landau-Lifshitz. Assim, na região assintoticamente plana, teremos

$$T_{eff}^{\mu\nu} = (-g)(T^{\mu\nu} + t_{LL}^{\mu\nu}) \approx (T^{\mu\nu} + t_{LL}^{\mu\nu}),$$

onde $t_{LL}^{\mu\nu}$ é dado pelas equações (3.23). Apenas as partes de $t_{LL}^{\mu\nu}$ que tem uma dependência do tipo $1/r^2$ ou $1/r^3$ para r grande pode contribuir para as integrais de fluxo (3.30), (3.31). Para soluções estáticas, $t_{LL}^{\mu\nu}$ vai com $1/r^4$. Portanto, as únicas contribuições vêm de partes dinâmicas da métrica, que, nessas grandes distâncias, são inteiramente na forma de ondas gravitacionais. Além disso, a média $t_{LL}^{\mu\nu}$ ao longo de vários comprimentos de onda antes de avaliar as integrais de fluxo (3.30), (3.31) não pode afetar os valores das integrais. Portanto, pode-se fazer livremente nessas integrais a substituição

$$T_{eff}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + T^{(GW)\mu\nu},$$

onde $T^{(GW)\mu\nu}$ representa o valor médio de $t_{LL}^{\mu\nu}$. Portanto, podemos escrever

$$-\frac{dP^\mu}{dt} = \oint_S (T^{\mu j} + T^{(GW)\mu j}) d^2 S_j, \quad (3.32)$$

$$-\frac{dJ^{\mu\nu}}{dt} = \oint_S [x^\mu (T^{\nu j} + T^{(GW)\nu j}) - x^\nu (T^{\mu j} + T^{(GW)\mu j})] d^2 S_j. \quad (3.33)$$

As equações (3.32) e (3.33) dizem que a taxa de perda do 4-momento e momento angular do sistema, é precisamente igual à taxa na qual a matéria, os campos e as ondas gravitacionais carregam 4-momento e momento angular para fora da região envolvida por S .

3.7 Outros pseudotensores

Apenas para fornecer ao leitor uma noção da quantidade de propostas para descrever a energia do campo gravitacional, apresentamos nesta seção os pseudotensores mais conhecidos na literatura.

A definição de energia-momento de Einstein, pode ser escrita na forma [14]

$$E_\mu^\nu = \frac{1}{16\pi} \Theta_{\mu,\alpha}^{\nu\alpha}, \quad (3.34)$$

onde

$$\Theta_\mu^{\nu\alpha} = \frac{g_{\mu\beta}}{\sqrt{-g}} \Psi^{\nu\alpha\beta\rho}_{,\rho} \quad (3.35)$$

e

$$\Psi^{\nu\alpha\beta\rho} = [-g(g^{\nu\beta}g^{\alpha\rho} - g^{\alpha\beta}g^{\nu\rho})]. \quad (3.36)$$

A componente E_0^0 é interpretada como sendo a densidade de energia, E_α^0 são as componentes da densidade de momento e E_0^α são as componentes da densidade de corrente de energia.

A definição de energia-momento de Bergmann-Thomson, pode ser escrita como [14]

$$B^{\beta\nu} = \frac{1}{16\pi} \Xi_{,\alpha}^{\beta\nu\alpha}, \quad (3.37)$$

onde

$$\Xi^{\beta\nu\alpha} = g^{\beta\mu} X_\mu^{\nu\alpha} \quad (3.38)$$

com

$$X_\mu^{\nu\alpha} = -X_\mu^{\alpha\nu} = \frac{g_{\mu\beta}}{\sqrt{-g}} \Psi^{\nu\alpha\beta\rho}_{,\rho}, \quad (3.39)$$

onde B_0^0 é a densidade de energia, B_μ^0 são as componentes da densidade de momento e B_0^μ são as componentes da densidade de corrente de energia.

A definição do complexo de energia-momento (outro nome para “pseudotensor”) de Møller, em RG, pode ser escrita como [14]

$$M_\mu^\nu = \frac{1}{8\pi} \lambda_{\mu,\alpha}^{\nu\alpha}, \quad (3.40)$$

onde o superpotencial anti-simétrico $\lambda_\mu^{\nu\alpha}$ é

$$\lambda_\mu^{\nu\alpha} = \sqrt{-g} [g_{\mu\beta,\gamma} - g_{\mu\gamma,\beta}] g^{\nu\gamma} g^{\alpha\beta}. \quad (3.41)$$

A componente M_0^0 é a densidade de energia e M_α^0 são as componentes da densidade de momento.

A definição do complexo de energia-momento de Papapetou, pode ser escrita como [14]

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} N^{\mu\nu\alpha\beta}_{,\alpha\beta}, \quad (3.42)$$

com

$$N^{\mu\nu\alpha\beta} = \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + g^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} - g^{\nu\beta} \eta^{\mu\alpha}), \quad (3.43)$$

onde Σ_0^0 é a densidade de energia, Σ_μ^0 são as componentes da densidade de momento e Σ_0^μ são as componentes da densidade de corrente de energia.

A definição do complexo de energia-momento de Tolman, pode ser escrita como [14]

$$\Upsilon_\nu^\mu = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{S}_{\nu,\lambda}^{\mu\lambda}, \quad (3.44)$$

onde Υ_0^0 e Υ_α^0 são componentes de energia e momento e

$$\mathfrak{S}_\nu^{\mu\lambda} = \sqrt{-g} (-g^{\rho\mu} V_{\nu\rho}^\lambda + \frac{1}{2} g_\nu^\mu g^{\rho\sigma} V_{\rho\sigma}^\lambda) \quad (3.45)$$

com

$$V_{\gamma\mu}^\nu = -\Gamma_{\gamma\mu}^\nu + \frac{1}{2} g_\gamma^\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\sigma + \frac{1}{2} g_\mu^\nu \Gamma_{\sigma\gamma}^\sigma. \quad (3.46)$$

Embora já tenhamos fornecido uma expressão para o pseudotensor de Landau-Lifshitz, vamos reescrevê-lo aqui em termos dos símbolos de Christoffel. Em termos desses símbolos, (3.23), teremos [2]

$$\begin{aligned} t_{LL}^{\mu\nu} = & k [(2\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\rho \mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^\sigma - \mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^\rho \mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^\sigma - \mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^\rho \mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^\sigma) (g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda}) \\ & + g^{\mu\kappa} g^{\lambda\rho} (\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^\nu \mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^\sigma + \mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^\nu \mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^\sigma - \mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^\nu \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\sigma - \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\nu \mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^\sigma) \\ & + g^{\nu\kappa} g^{\lambda\rho} (\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^\mu \mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^\sigma + \mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^\mu \mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^\sigma - \mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^\mu \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\sigma - \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\mu \mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^\sigma) \\ & + g^{\kappa\lambda} g^{\rho\sigma} (\mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^\mu \mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^\nu - \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\mu \mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^\nu), \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde $k = c^4/(16\pi G)$, e $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$ são os símbolos de Christoffel.

Em termos de $t_{LL}^{\mu\nu}$, as equações de Einstein podem ser escritas na forma

$$(-g)(T^{\mu\nu} + t_{LL}^{\mu\nu}) = \partial_{\sigma}\tau^{\mu\nu\sigma}, \quad (3.48)$$

onde

$$\tau^{\mu\nu\sigma} = k\partial_{\rho}[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})], \quad (3.49)$$

$T^{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento da matéria, e g o determinante da métrica.

A densidade de energia-momento do espaço-tempo neste caso pode ser denotada por

$$\theta_{LL}^{\mu\nu} = \partial_{\sigma}\tau^{\mu\nu\sigma}. \quad (3.50)$$

Esses foram só alguns dos principais pseudotensores, mas o leitor pode estar certo de que há muitos outros. Vale lembrar que essa ambiguidade na descrição da densidade de energia do campo gravitacional é um dos argumentos contra a localização da energia gravitacional. Na próxima seção, apresentaremos a proposta do teleparalelismo para tentar solucionar esse problema.

4 Teleparalelismo

4.1 O que é Teleparalelismo?

Teleparalelismo é a ideia de que o transporte paralelo de um vetor não depende da trajetória. Imagine um vetor, queremos movimentar ele de um ponto A até um ponto B. Podemos transportar este vetor por diferentes caminhos, basta escolher a trajetória. Porém, se este transporte paralelo for sempre independente da trajetória, para quaisquer que sejam os pontos (ou curvas), então, dizemos que há teleparalelismo.

Em qualquer espaço-tempo com teleparalelismo, existe um conjunto de campos vetoriais que formam uma base onde os coeficientes de conexão são nulos. Chamamos esse referencial de referencial teleparalelo e o denotamos por e_a , onde os índices latinos do início do alfabeto vão de (0) a (3), enquanto os do meio do alfabeto vão de 1 a 3 e representam índices de espaço tangente somente quando escrito na forma (i) , (j) , etc. O coframe é denotado por ϑ^a , e sua relação com o frame é dada pela condição $\vartheta^a(e_b) = \delta_b^a$. O referencial e o coframe são simplesmente chamados de tétrada, e suas componentes nas bases de coordenadas ∂_μ e dx^μ são e_a^μ e e_μ^a , respectivamente; matematicamente, temos $e_a = e_a^\mu \partial_\mu$ e $\vartheta^a = e_\mu^a dx^\mu$, onde os índices gregos vão de 0 a 3. Aqui, também usaremos a seguinte notação: dado um campo vetorial v , expandimos esse vetor na base ∂_μ na forma $v = v^\mu \partial_\mu$. Além disso, a atuação de v em uma função f é denotada por $v[f] = v^\mu \partial_\mu f$.

4.2 Teleparalelismo na RG

Seja M uma variedade diferenciável, $F(M)$ o conjunto das funções suaves em M , e $V(M)$ o conjunto dos campos vetoriais de classe C^∞ em M . Chamamos de conexão afim a aplicação $\nabla : V(M) \times V(M) \rightarrow V(M)$ que satisfaz as seguintes propriedades¹:

$$\nabla_{fv+gu}w = f\nabla_vw + g\nabla_uw, \quad (4.1)$$

$$\nabla_v(u+w) = \nabla_vu + \nabla_vw, \quad (4.2)$$

$$\nabla_v(fu) = v[f]u + f\nabla_vu, \quad (4.3)$$

onde $v, u, w \in V(M)$ e $f, g \in F(M)$.

Um caso particular de conexão é a conexão de Levi-Civita. Ela é determinada univocamente pela métrica e corresponde exatamente à conexão usada na teoria da RG.

Formulada por Einstein em 1915, a RG só apresenta teleparalelismo quando a curvatura da conexão de Levi-Civita, $\overset{\circ}{\nabla}$, é nula:

¹ Para maiores detalhes sobre conexões afins, veja, por exemplo, a referência [36].

$$\overset{\circ}{R}(v, u)w \equiv \overset{\circ}{\nabla}_v \overset{\circ}{\nabla}_u w - \overset{\circ}{\nabla}_u \overset{\circ}{\nabla}_v w - \overset{\circ}{\nabla}_{[v, u]} w = 0, \quad (4.4)$$

onde $[v, u]$ é o bracket de Lie, que é definido como $[v, u]f = v[u[f]] - u[v[f]]$.

Uma consequência desta condição na RG é que temos um referencial rígido, ou seja,

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu e_a = 0, \quad (4.5)$$

e este referencial rígido é o referencial inercial global

$$e_a = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z). \quad (4.6)$$

Nota-se que, na RG o teleparalelismo tem um “problema”, só vai existir teleparalelismo se a curvatura de Levi-Civita for nula. Isto leva a uma métrica trivial, a métrica de Minkowski.

Contudo, é possível ampliar a noção de teleparalelismo para uma geometria com outras conexões que possuam torção e não-metricidade. Essa extensão foi estabelecida por Eisenhart em 1927 [37]. Ela diz que a condição necessária e suficiente para que haja teleparalelismo é a nulidade do tensor de curvatura.

4.3 História do Teleparalelismo

No verão de 1928 Einstein começou a trabalhar com teleparalelismo. Apesar de o paralelismo distante já ser do conhecimento de Cartan, Weitzenböck e Eisenhart, quem primeiro formulou uma teoria física foi Albert Einstein. O objetivo de Einstein era unificar o campo eletromagnético com o campo gravitacional, através dos graus de liberdade do campo de tétada. A ideia era combinar uma conexão sem curvatura com uma métrica não trivial.

Como consequência, a teoria passa a ter duas conexões :

- Levi-Civita, $\overset{\circ}{\nabla}$, com curvatura e sem torção;
- Weitzenböck, ∇ , sem curvatura e com torção.

Ou seja, vai existir um referencial “rígido” , tal que, $\nabla_\mu e_a = 0$. Porém, ao contrário do espaço-tempo de Minkowski, não está claro qual é o referencial que satisfaz essa condição.

Ainda em 1928, Einsten fez algumas comparações com as principais geometrias que estavam em destaque na época. A geometria de Weyl e a geometria riemanniana [37]. A geometria de Weyl não permite comparar comprimentos em pontos distintos da

variedade e nem orientações, ou seja, quando Weyl formulou esta geometria ele queria que fosse a geometria mais local possível. Por outro lado, a geometria riemanniana permite a comparação de comprimentos de pontos distantes, mas não de direções. Já a teoria que Einstein estava formulando, que é baseada na geometria de Weitzenböck, permitia não só a comparação de comprimentos, mas como também de direções.

Após algumas tentativas, Einstein chegou a um invariante para construir sua ação:

$$T \equiv \frac{1}{4}T^{abc}T_{acb} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^a T_a, \quad (4.7)$$

onde $T_a = T_{ba}^b$ e T_{bc}^a é a torção de Weitzenböck, dada por $T_{\mu\nu}^a = \partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a$.

Contudo, Einstein se frustrou com esta ação. Em carta enviada a Einstein, no dia 23 de maio de 1929, Lanczos chama a atenção de Einstein para a relação

$$\dot{R} = -T + 2\dot{\nabla}_\mu T^\mu. \quad (4.8)$$

As equações de campo eram as mesmas da RG. Portanto, não era possível obter às equações da eletrodinâmica.

Outras tentativas foram feitas, mas sem sucesso. Então, Einstein desiste de tentar unificar a gravitação e o eletromagnetismo através do paralelismo distante.

Todo este percurso durou do verão de 1928 até a primavera de 1931. Durante este período, Einstein interagiu com vários pesquisadores. Como exemplo, podemos destacar Herman Müntz, Roland Weitzenböck, Cornelius Lanczos, Elie Cartan e Walther Mayer.

Em 1938 Einstein explicou de forma mais detalhada o motivo de sua desistência de trabalhar com o teleparalelismo [22]. Primeiramente, a impossibilidade de encontrar uma representação tipo tensorial para o campo eletromagnético. Outro motivo, é que a teoria tem uma liberdade excessiva na construção das equações de campo.

4.3.1 Renascimento do Interesse pelo Teleparalelismo

4.3.1.1 C. Møller

O interesse pelo teleparalelismo surge novamente em 1961 com o trabalho de C. Møller [38]. Møller percebeu que podia utilizar o teleparalelismo para resolver o problema da localização da energia do campo gravitacional, ou pelo menos, da formulação de uma densidade tensorial e eventualmente uma energia para o espaço-tempo e alegou ter encontrado uma solução satisfatória [38]. Todavia, a ideia de ter encontrado uma solução satisfatória não era tão simples assim, pois havia uma enorme ambiguidade na definição dessa densidade.

4.3.1.2 Teoria de gauge do grupo das translações

Outra motivação apareceu, em 1976, quando Y. M. Cho obteve a lagrangiana do Teleparalelismo a partir da teoria de gauge da translação com uma lagrangiana do tipo Yang-Mills [39]:

$$\mathfrak{L}_{T_4} = \frac{1}{\kappa^2} \sqrt{-g} \left(\frac{1}{4} T_{abc} T_{abc} + \frac{1}{2} T_{abc} T_{acb} - T_{abb} T_{acc} \right). \quad (4.9)$$

No mesmo ano, Cho mostrou que a teoria de Einstein-Cartan é obtida de forma unívoca a partir da teoria de gauge do grupo de Poincaré, se a lagrangiana tiver apenas as contribuições mais simples dos campos de força [40]. Vale resaltar que, a teoria de Einstein-Cartan não é teleparalelismo, apenas por curiosidade.

Em 1977, K. Hayashi não se limita a uma teoria em particular e mostra que a teoria de gauge do grupo das translações é uma teoria gravitacional baseada no espaço de Weitzenböck [41].

4.3.2 Formulação Hamiltoniana do TEGR

4.3.2.1 Início da formulação Hamiltoniana

Até onde sabemos, a formulação hamiltoniana teve início no fim da década de 80. O artigo mais antigo sobre esse tema que temos conhecimento é “Positive energy via the teleparallel hamiltonian”, de J. M. Nester (1989) [16]. Porém, não é muito aprofundado no formalismo, lá o Nester foca mais no problema da positividade da energia.

O formalismo hamiltoniano propriamente dito, mais amadurecido, foi desenvolvido por J. W. Maluf e colaboradores [42–46].

Tanto Maluf quanto Nester identificaram um 4-momento para o espaço-tempo, porém suas versões são diferentes. Além disso, durante o processo da formulação hamiltoniana, Maluf identificou um objeto com comportamento de momento angular, o Nester não fez isso.

As principais diferenças entre os 4-momentos de Maluf e Møller são:

- O de Møller não é capaz de reproduzir a energia do buraco negro quando a tétrada está adaptada as coordenadas de Kruskal, a expressão do Maluf é [47].

Já as principais diferenças entre os 4-momentos de Maluf e Nester são as seguintes:

- Embora Nester tenha motivado sua versão a partir do formalismo hamiltoniano, ele não usa o índice de espaço tangente para chegar a sua definição. No teleparalelismo,

o campo gravitacional é identificado com a tétrada, e não com a métrica. Portanto, o momento canônico conjugado deve conter um   ndice de espaço tangente, isto é $\Pi^{a\nu}$ e não dois índices de espaço-tempo, $\Pi^{\mu\nu}$.

Devido a essas vantagens, daqui pra frente usaremos a versão do Maluf.

4.3.2.2 Equivalência com o formalismo ADM

Em 2002, Maluf demonstrou que a energia do 4-momento obtido a partir do formalismo Hamiltoniano do TEGR reproduz a do formalismo ADM [45]. J   em 2022, foi demonstrado que a versão do TEGR generaliza a do formalismo ADM [20].

4.4 Equa  es de Campo

4.4.1 Escalar de Tor  o e Lagrangiana

Antes de apresentarmos as equa  es de campo, vejamos alguns dos elementos da geometria de Weitzenb  ck.

A conexão de Weitzenb  ck é definida como sendo uma conexão, tal que, existe uma base teleparalela que é ortonormal.

- Conexão de Weitzenb  ck (1921)

$$\nabla_\mu e_a = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = e_a^\lambda \partial_\mu e_\nu^a. \quad (4.10)$$

- Tor  o de Weitzenb  ck na base teleparalela

$$T_{\mu\nu}^a = \partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a. \quad (4.11)$$

Note que, no frame teleparalelo, ela coincide com o objeto de não holonomia.

- Escalar de torço

$$T \equiv \frac{1}{4} T^{abc} T_{abc} + \frac{1}{2} T^{abc} T_{bac} - T^a T_a. \quad (4.12)$$

A partir deste escalar de torço, definimos a lagrangiana da teoria.

- Densidade lagrangiana do TEGR

$$\mathcal{L} = -keT - \mathcal{L}_M, \quad (4.13)$$

onde $\mathcal{L}_M$ é a densidade lagrangiana dos campos de matéria, $k = c^4/(16\pi G)$, e $e = \|e_\mu^a\|$.

Uma pequena observação para realização dos cálculos. Para uma tétrada na qual $e_{(0)}$ aponta para o futuro e a triáde, $e_{(i)}$ é de mão direita, teremos $e = \sqrt{-g}$.

Tomadas as variações da ação do teleparalelismo com relação às tétradas, obtemos exatamente as equações de Einstein. Porém, as equações são escritas em uma forma semelhante àquelas dos pseudotensores, com o suposto conteúdo de energia-momento do campo gravitacional do lado direito.

- Equações de Campo

$$\partial_\alpha(e\Sigma^{a\mu\alpha}) = \frac{e}{4k}(t^{\mu a} + T^{\mu a}), \quad (\text{Equações de Einstein}) \quad (4.14)$$

onde

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4}(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}) + \frac{1}{2}(\eta^{ab}T^c - \eta^{ab}T^c) \quad (4.15)$$

é chamado de superpotencial e

$$t^{\mu a} = k(4\Sigma^{bc\mu}T_{bc}^a - e^{a\mu}T) \quad (4.16)$$

é identificado como o tensor energia-momento do campo gravitacional.

4.5 Energia no Teleparalelismo

O momento canônico conjugado a $e_{a\mu}$ é definido da seguinte forma

$$\Pi^{a\mu} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{e}_{a\mu}} = -4ke\Sigma^{a0\mu} \quad (4.17)$$

Note que, o momento canônico conjugado é definido naturalmente com um índice de espaço tangente. Portanto, neste sentido, a definição do Maluf é mais natural do que a do Nester.

A partir do formalismo Hamiltoniano, Maluf define o 4-momento do espaço-tempo

$$P^a = - \int_V d^3x \partial_i \Pi^{ai} \implies P^a = - \oint_S dS_i \Pi^{ai} \quad (4.18)$$

(sem singularidade)

Um questionamento que pode surgir seria se a singularidade, caso exista, contribui. Formiga e Gonçalves [47] mostraram em 2021 que no caso dos espaços-tempos de Kruskal e Novikov a singularidade não contribui para o 4-momento.

Caso haja um espaço-tempo onde a singularidade contribua para a energia, podemos proceder da seguinte forma:

- Podemos excluir as singularidades integrando apenas na região livre de singularidades. Assim, a integral de superfície será uma integral sobre vários contornos.
- Caso faça sentido falar em um limite assintótico, podemos levar as integrais sobre os contornos internos para o lado direito das equações de Einstein e calcular a energia total usando o contorno externo, como é feito no formalismo ADM.

O teleparalelismo nos permite identificar uma densidade de energia, atribuir uma densidade de energia para o espaço-tempo e para um campo gravitacional.

Combinando as equações de campo com o momento conjugado, obtemos

$$-\partial_i \Pi^{ai} = e t^{0a} + e T^{0a}, \quad (4.19)$$

onde, no lado esquerdo da equação temos o que interpretamos como sendo a densidade de energia do espaço-tempo, e do lado direito temos o que interpretamos como a densidade de energia do campo gravitacional e a densidade de energia da matéria, respectivamente.

Veremos agora o que isso nos diz sobre o princípio da equivalência. Aqui estamos diante de uma controvérsia porque a equação (4.19) parece sugerir a localização da energia do campo gravitacional, ou seja, ela parece dizer que temos uma densidade, que localizamos a energia do campo gravitacional. Porém, uma afirmação encontrada no livro do Misner, Thorne e Wheeler vemos que, “É sempre possível encontrar, em qualquer localidade, um referencial no qual o campo gravitacional local (todos os símbolos de Christoffel; todos os Gamma) desaparece. Sem Gamma significa que não há campo gravitacional, e ausência de campo gravitacional local significa ausência de energia-momento gravitacional local” [35].

Como mencionado anteriormente, há controvérsias com as versões do princípio da equivalência em regiões infinitesimais. Quando falamos sobre essas versões, apresentamos as críticas feitas por Einstein e Synge, que podem ser sintetizadas na ideia de que essas versões são triviais, não representado, portanto, um princípio fundamental. Porém, há outra crítica que destaca a natureza vaga da ideia de localidade. Um dos autores que primeiro demonstrou a dificuldade do conceito de localidade foi Ohanian [48]. Nesse artigo, Ohanian mostra que se definirmos localidade como sendo uma região arbitrariamente pequena, então é possível detectar o campo gravitacional localmente. Outros autores, entretanto, fazem o contrário, definem localidade com sendo a região que permite a validade do princípio da equivalência [49], o que exclui os exemplos dados por Ohanian; em outras palavras, para esses autores, os experimentos que são realizados em regiões arbitrariamente pequenas que são capazes de detectar o campo gravitacional não são experimentos locais. Uma aparente solução para esse conflito é oferecida por Casola et al. [31]. A solução sugerida por esses autores é restringir o princípio da equivalência não só a regiões suficientemente pequenas mas como também a fenômenos suficientemente elementares. (Para

exemplos de fenômenos que não são suficientemente elementares, veja, por exemplo, a seção II. D de [31].)

Seria interessante saber qual é a relação de toda essa controvérsia com $t^{\lambda a}$. Podemos especular o seguinte. O tensor $et^{\lambda a}$ é sensível ao referencial teleparalelo e referenciais são sistemas físicos. Portanto, se usarmos sistemas não elementares como referencial teleparalelo talvez possamos determinar a energia do campo gravitacional em regiões arbitrariamente pequenas, ou mesmo em um ponto da variedade, independentemente dessa definição ser local ou não.

Uma conclusão que podemos tirar disso é que, ainda que não seja possível localizar a energia do campo gravitacional, algo que dependerá de uma definição mais precisa do que se quer dizer com ‘localizar’, é possível que o valor de $et^{\lambda a}$, ponto a ponto da variedade do espaço-tempo, tenha um significado físico e represente o valor da densidade de energia do campo gravitacional. Para uma discussão mais detalhada sobre o referencial teleparalelo, veja a referência [50].

4.6 Generalizações da teoria Teleparalela

Em 1979, K. Hayashi estudou detalhadamente a lagrangiana com três parâmetros que generalizam o escalar de torção T :

$$L_G = a_1(t^{\lambda\mu\nu}t_{\lambda\mu\nu}) + a_2(v^\mu v_\mu) + a_3(a^\mu a_\mu) + a_0, \quad (4.20)$$

onde a_1 , a_2 e a_3 são parâmetros livres, enquanto a_0 é um termo cosmológico. Ele chama essa abordagem de ‘New general relativity’ [51].

Outra generalização, muito mais abrangente, é a Metric-affine Gravity (MAG), que é uma teoria que tem o teleparalelismo como caso particular [52].

Existe também a teorias $f(T)$, onde f é uma função do escalar de torção.

Existem também as teorias $f(T, B)$, onde B é o termo de superfície:

$$B \equiv \mathring{R} + T = 2\mathring{\nabla}_\mu T^\mu.$$

As teorias $f(\mathring{R})$ e $f(T)$ são casos particulares das $f(T, B)$ [53].

Existe ainda uma teoria que não trabalha com torção, as teorias $f(Q)$, onde Q está associado a não metricidade. No lugar da torção é usada a não metricidade, e essa é uma teoria com conexão simétrica [54].

4.7 Aplicações do Teleparalelismo

Aqui vamos citar apenas algumas aplicações mais conhecidas do teleparalelismo.

- Aplicações na energia gravitacional (TEGR) [11]: definir a energia total de um espaço-tempo, definir a energia gravitacional, fornecer uma energia quasi-local, possibilidade de localizar a energia do campo gravitacional;
- Em termos cosmológicos (Teorias modificadas): Explicar a atual expansão acelerada do universo sem a necessidade de pressão negativa [55–57], resolver o problema do horizonte de partícula sem precisar de um campo inflacionário [58];
- Já foi analisado na termodinâmica de buracos negros, analisar a entropia do buraco negro [59].

4.8 Decomposição de Eckart

A decomposição do tensor energia-momento é uma técnica matemática usada na RG para analisar e entender a distribuição de energia, momento e tensão de um certo campo de matéria ou radiação. O tensor energia-momento descreve a distribuição de massa, energia e momento no espaço-tempo, e sua decomposição permite a separação de suas contribuições em diferentes componentes.

É interessante decompor os tensores de energia-momento para analisar suas propriedades a partir de quantidades conhecidas como calor e pressão. Como, em geral, $\theta^{\mu\nu}$ e $t^{\mu\nu}$, onde $\theta^{\mu\nu}$ representa o objeto que interpretamos como sendo o tensor de energia-momento do espaço-tempo, não são necessariamente simétricos, aplicamos esta decomposição à parte simétrica.

A decomposição desses tensores em relação a $e_{(0)}$ pode ser escrita como [23, 24]

$$\theta^{(\mu\nu)} = \rho e_{(0)}^\mu e_{(0)}^\nu + p h^{\mu\nu} + \frac{2}{c} q^{(\mu} e_{(0)}^{\nu)} - P^{\mu\nu}, \quad (4.21)$$

e

$$t^{(\mu\nu)} = \rho_g e_{(0)}^\mu e_{(0)}^\nu + p_g h^{\mu\nu} + \frac{2}{c} q_g^{(\mu} e_{(0)}^{\nu)} - P_g^{\mu\nu}, \quad (4.22)$$

onde

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \theta_{(\mu\nu)} e_{(0)}^\mu e_{(0)}^\nu, \quad p \equiv \frac{1}{3} \theta_{(\mu\nu)} h^{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + e_{(0)\mu} e_{(0)\nu}, \\ q^\mu &\equiv -c h_\alpha^\mu \theta^{(\alpha\beta)} e_{(0)\beta}, \quad P^{\mu\nu} \equiv -h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \theta^{(\alpha\beta)} + p h^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

(Estamos usando os parênteses para indicar a simetrização dos índices.) As definições de ρ_g , p_g , q_g e P_g são análogas.

Assumimos que podemos interpretar ρ , p , q^μ e $P^{\mu\nu}$ respectivamente como densidade de energia, pressão isotrópica, fluxo de calor e tensor de tensão viscosa.

A decomposição do tensor energia-momento é uma ferramenta útil no estudo de campos gravitacionais porque fornece uma maneira de entender as diferentes contribuições para a distribuição geral de energia, momento e tensão. Ele permite que os pesquisadores analisem o campo gravitacional em termos de suas várias quantidades físicas e obtenham insights sobre a natureza do sistema em consideração.

5 Problemas da Energia Gravitacional

Dedicamos este capítulo aos resultados de nossas pesquisas. Primeiro, apresentamos o espaço-tempo com o qual trabalhamos e depois os cálculos e os resultados obtidos.

5.1 Ondas Gravitacionais Planas Linearmente Polarizadas

No contexto da RG, as ondas gravitacionais são ondulações no tecido do espaço-tempo causadas pela aceleração de objetos massivos. Elas se propagam na velocidade da luz e carregam energia para longe da fonte. As ondas gravitacionais podem ter diferentes polarizações, semelhantes a como as ondas eletromagnéticas podem ser polarizadas. No caso da polarização linear, a direção de oscilação permanece fixa. Por simplicidade, trabalharemos com esse caso.

Para entender as ondas gravitacionais planas linearmente polarizadas, vamos considerar um cenário simplificado. Imagine uma onda gravitacional se propagando na direção z . Podemos escolher um sistema de coordenadas tal que os eixos x e y sejam perpendiculares à direção de propagação. Nesse cenário, uma onda gravitacional plana linearmente polarizada faria com que o espaço-tempo se estendesse e se espremesse em uma direção no plano xy . O padrão de alongamento e compressão se repete à medida que a onda se propaga.

A métrica do espaço-tempo que trabalhamos foi

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + f(u)^2 dx^2 + g(u)^2 dy^2 + dz^2, \quad (5.1)$$

onde $u = t - z/c$.

No vácuo, as soluções dessa métrica são chamadas de ondas gravitacionais planas linearmente polarizadas (com polarização $+$) [1]. Elas representam ondas gravitacionais de ‘frente plana’, pelo menos longe das fontes, que se propagam na direção do eixo z . Também podem ser usadas na presença de um $T^{\mu\nu}$, isto é, sem ser vácuo.

No vácuo, as ondas gravitacionais podem se propagar indefinidamente sem dissipação ou dispersão significativa. Elas viajam na velocidade da luz e podem ser detectadas e medidas por observatórios de ondas gravitacionais, como LIGO, Virgo e outros detectores futuros. A detecção e análise de ondas gravitacionais no vácuo fornecem informações cruciais sobre fenômenos astrofísicos, como fusões de buracos negros, colisões de estrelas de nêutrons e outros eventos cósmicos energéticos.

Vamos, agora, calcular o $\theta_{LL}^{\mu\nu}$ e o $t_{LL}^{\mu\nu}$ para esta métrica. Vimos em (3.50) que o

tensor de energia-momento $\theta_{LL}^{\mu\nu}$ é dado por

$$\theta_{LL}^{\mu\nu} = \partial_\sigma \tau^{\mu\nu\sigma},$$

onde

$$\tau^{\mu\nu\sigma} = k\partial_\rho [(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})],$$

onde g é o determinante da métrica.

Temos que, para essa métrica, o determinante toma a seguinte forma

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(u)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g(u)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -f(u)^2 g(u)^2, \quad (5.2)$$

onde a métrica é dada por

$$g^{\mu\nu} = -\delta_0^\mu \delta_0^\nu + f(u)^{-2} \delta_1^\mu \delta_1^\nu + g(u)^{-2} \delta_2^\mu \delta_2^\nu + \delta_3^\mu \delta_3^\nu. \quad (5.3)$$

Com este resultado, podemos realizar o cálculo do $\tau^{\mu\nu\sigma}$ começando pelos termos presentes no parênteses, ou seja, efetuando os cálculos de $g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}$ e $g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}$, que são demonstrados no apêndice A.1.

Portanto, $\tau^{\mu\nu\sigma}$ toma a forma

$$\begin{aligned} \tau^{\mu\nu\sigma} &= k\partial_\rho [(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})] \\ &= k\partial_\rho [(f(u)^2 g(u)^2)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})], \end{aligned}$$

Realizando os cálculos, chegamos a

$$\begin{aligned} \tau^{\mu\nu\sigma} &= k\partial_\rho [-g(u)^2 \delta_0^\mu \delta_0^\nu \delta_1^\rho \delta_1^\sigma - f(u)^2 \delta_0^\mu \delta_0^\nu \delta_2^\rho \delta_2^\sigma - f(u)^2 g(u)^2 \delta_0^\mu \delta_0^\nu \delta_3^\rho \delta_3^\sigma \\ &\quad - g(u)^2 \delta_1^\mu \delta_1^\nu \delta_0^\rho \delta_0^\sigma + \delta_1^\mu \delta_1^\nu \delta_2^\rho \delta_2^\sigma + g(u)^2 \delta_1^\mu \delta_1^\nu \delta_3^\rho \delta_3^\sigma - f(u)^2 \delta_2^\mu \delta_2^\nu \delta_0^\rho \delta_0^\sigma + \delta_2^\mu \delta_2^\nu \delta_1^\rho \delta_1^\sigma \\ &\quad + f(u)^2 \delta_2^\mu \delta_2^\nu \delta_3^\rho \delta_3^\sigma - f(u)^2 g(u)^2 \delta_3^\mu \delta_3^\nu \delta_0^\rho \delta_0^\sigma - g(u)^2 \delta_3^\mu \delta_3^\nu \delta_1^\rho \delta_1^\sigma + f(u)^2 \delta_3^\mu \delta_3^\nu \delta_2^\rho \delta_2^\sigma \\ &\quad + g(u)^2 \delta_0^\mu \delta_1^\nu \delta_0^\rho \delta_1^\sigma + f(u)^2 \delta_0^\mu \delta_2^\nu \delta_0^\rho \delta_2^\sigma + f(u)^2 g(u)^2 \delta_0^\mu \delta_3^\nu \delta_0^\rho \delta_3^\sigma + g(u)^2 \delta_1^\mu \delta_0^\nu \delta_1^\rho \delta_0^\sigma \\ &\quad - \delta_1^\mu \delta_2^\nu \delta_1^\rho \delta_2^\sigma - g(u)^2 \delta_1^\mu \delta_3^\nu \delta_1^\rho \delta_3^\sigma + f(u)^2 \delta_2^\mu \delta_0^\nu \delta_2^\rho \delta_0^\sigma - \delta_2^\mu \delta_1^\nu \delta_2^\rho \delta_1^\sigma - f(u)^2 \delta_2^\mu \delta_3^\nu \delta_2^\rho \delta_3^\sigma \\ &\quad + f(u)^2 g(u)^2 \delta_3^\mu \delta_0^\nu \delta_3^\rho \delta_0^\sigma - g(u)^2 \delta_3^\mu \delta_1^\nu \delta_3^\rho \delta_1^\sigma - f(u)^2 \delta_3^\mu \delta_2^\nu \delta_3^\rho \delta_2^\sigma]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Após a realização das derivadas, presentes no apêndice A.1, ficamos por fim com

$$\begin{aligned} \tau^{\mu\nu\sigma} &= \frac{2k}{c} [(f(u)f'(u)g(u)^2 + g(u)g'(u)f(u)^2)\delta_0^\mu \delta_0^\nu \delta_3^\rho \delta_3^\sigma - g(u)g'(u)\delta_1^\mu \delta_1^\nu \delta_1^\rho \delta_1^\sigma \\ &\quad - f(u)f'(u)\delta_2^\mu \delta_2^\nu \delta_0^\rho \delta_0^\sigma - f(u)f'(u)\delta_2^\mu \delta_2^\nu \delta_3^\rho \delta_3^\sigma - [f(u)f'(u)g(u)^2 \\ &\quad + g(u)g'(u)f(u)^2]\delta_3^\mu \delta_3^\nu \delta_0^\rho \delta_0^\sigma + g(u)g'(u)\delta_0^\mu \delta_0^\nu \delta_1^\rho \delta_1^\sigma + f(u)f'(u)\delta_0^\mu \delta_0^\nu \delta_2^\rho \delta_2^\sigma \\ &\quad + [f(u)f'(u)g(u)^2 + g(u)g'(u)f(u)^2]\delta_0^\mu \delta_3^\nu \delta_3^\rho \delta_0^\sigma - [f(u)f'(u)g(u)^2 \\ &\quad + g(u)g'(u)f(u)^2]\delta_3^\mu \delta_0^\nu \delta_0^\rho \delta_3^\sigma + g(u)g'(u)\delta_3^\mu \delta_1^\nu \delta_1^\rho \delta_3^\sigma + f(u)f'(u)\delta_3^\mu \delta_2^\nu \delta_2^\rho \delta_3^\sigma]. \end{aligned}$$

Portanto, tendo o valor de $\tau^{\mu\nu\sigma}$, podemos calcular $\theta_{LL}^{\mu\nu}$ explicitamente,

$$\theta_{LL}^{\mu\nu} = \partial_\sigma \tau^{\mu\nu\sigma}. \quad (5.5)$$

Segue-se então, após os passos mostrados no apêndice A.1 que, juntando todos os resultados obtidos ficaremos com

$$\theta_{LL}^{\mu\nu} = -\frac{2k}{c^2} F(\delta_0^\mu + \delta_3^\mu)(\delta_0^\nu + \delta_3^\nu).$$

Por fim, abrindo o termo F , dado por (A.3), temos a forma explícita da densidade de energia-momento do espaço-tempo para este nosso caso e será denotada por:

$$\begin{aligned} \theta_{LL}^{\mu\nu} = & -\frac{2k}{c^2} [f'(u)^2 g(u)^2 + f(u) f''(u) g(u)^2 + 4g(u) g'(u) f(u) f'(u) \\ & + g'(u)^2 f(u)^2 + g(u) g''(u) f(u)^2] (\delta_0^\mu + \delta_3^\mu)(\delta_0^\nu + \delta_3^\nu). \end{aligned} \quad (5.6)$$

É interessante notar que o pseudotensor de energia-momento do espaço-tempo é simétrico.

Também é interessante decompor o tensor de tensão-energia para analisar suas propriedades a partir de quantidades conhecidas como, por exemplo, calor e pressão.

A densidade de energia é dada pela expressão

$$\rho = \theta_{(\mu\nu)} e_{(0)}^\mu e_{(0)}^\nu. \quad (5.7)$$

Agora, usando o resultado (5.6), a densidade de energia para pp-waves será

$$\rho_{LL} = \theta_{LL(\mu\nu)} e_{(0)}^\mu e_{(0)}^\nu, \quad (5.8)$$

onde o $\theta_{LL(\mu\nu)}$ é dado por

$$\begin{aligned} \theta_{LL(\mu\nu)} = & -\frac{2k}{c^2} [f'(u)^2 g(u)^2 + f(u) f''(u) g(u)^2 + 4g(u) g'(u) f(u) f'(u) \\ & + g'(u)^2 f(u)^2 + g(u) g''(u) f(u)^2] (\delta_\mu^0 - \delta_\mu^3)(\delta_\nu^0 - \delta_\nu^3), \end{aligned} \quad (5.9)$$

e portanto, a densidade ficará

$$\begin{aligned} \rho_{LL} = & -\frac{2k}{c^2} [f'(u)^2 g(u)^2 + f(u) f''(u) g(u)^2 + 4g(u) g'(u) f(u) f'(u) \\ & + g'(u)^2 f(u)^2 + g(u) g''(u) f(u)^2], \end{aligned} \quad (5.10)$$

como demonstrado em A.2.

Agora, a decomposição da pressão isotrópica. A pressão isotrópica é dada por

$$p = \frac{1}{3}\theta_{(\mu\nu)}h^{\mu\nu}. \quad (5.11)$$

E com isso, sua decomposição ficará

$$p_{LL} = \frac{1}{3}\theta_{LL(\mu\nu)}h^{\mu\nu}$$

isto é,

$$\begin{aligned} p_{LL} = & -\frac{2k}{3c^2}[f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) \\ & + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2], \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde os cálculos podem ser encontrados no apêndice [A.2](#). Esse resultado coincide com $\frac{1}{3}$ da densidade de energia

$$p_{LL} = \frac{1}{3}\rho_{LL}. \quad (5.13)$$

Perceba que, neste caso particular, a abordagem de Landau-Lifshitz fornece uma equação de estado do tipo radiação eletromagnética, o que é consistente com o problema que estamos trabalhando.

Temos que, o fluxo de calor é dado por

$$q^\mu = -c\theta^{(\alpha\beta)}h_\alpha^\mu e_{(0)\beta}. \quad (5.14)$$

Logo, sua decomposição será

$$q_{LL}^\mu = -c\theta_{LL}^{(\alpha\beta)}h_\alpha^\mu e_{(0)\beta}$$

isto é, com o resultado calculado em ([A.11](#)) o fluxo de calor será dado como

$$\begin{aligned} q_{LL}^\mu = & \frac{2k}{c}[f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) \\ & + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2]\delta_3^\mu. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Por fim, uma última decomposição, a decomposição do pseudotensor de tensão viscoso, que é dado por

$$P^{\mu\nu} = -\theta^{(\alpha\beta)}h_\alpha^\mu h_\beta^\nu + p h^{\mu\nu}. \quad (5.16)$$

Usando a abordagem de Landau-Lifshitz, podemos escrever

$$P_{LL}^{\mu\nu} = -\theta_{LL}^{(\alpha\beta)}h_\alpha^\mu h_\beta^\nu + p_{LL}h^{\mu\nu}$$

Como calculado em (A.12) vemos que

$$P_{LL}^{\mu\nu} = -\frac{2k}{c^2}[f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2](f(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\nu + g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\nu - 2\delta_3^\mu\delta_3^\nu). \quad (5.17)$$

Assumimos que podemos interpretar ρ , p , q^μ e $P^{\mu\nu}$ respectivamente como densidade de energia, pressão isotrópica, fluxo de calor e “tensor” de tensão viscosa.

O pseudotensor de Landau-Lifshitz é dado por

$$\begin{aligned} t_{LL}^{\mu\nu} = & k[(2\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\rho\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^\sigma - \mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^\rho\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^\sigma - \mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^\rho\mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^\sigma)(g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda}) \\ & + g^{\mu\kappa}g^{\lambda\rho}(\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^\nu\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^\sigma + \mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^\nu\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^\sigma - \mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^\nu\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\sigma - \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\nu\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^\sigma) \\ & + g^{\nu\kappa}g^{\lambda\rho}(\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^\mu\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^\sigma + \mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^\mu\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^\sigma - \mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^\mu\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\sigma - \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\mu\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^\sigma) \\ & + g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma}(\mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^\mu\mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^\nu - \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\mu\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^\nu). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Os símbolos de Christoffel são dados por

$$\mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \quad (5.19)$$

onde

$$g_{\mu\nu} = -\delta_\mu^0\delta_\nu^0 + f(u)^2\delta_\mu^1\delta_\nu^1 + g(u)^2\delta_\mu^2\delta_\nu^2 + \delta_\mu^3\delta_\nu^3. \quad (5.20)$$

Com essas expressões expostas, podemos calcular nosso pseudotensor. O leitor pode acompanhar e conferir os cálculos no Apêndice B. Como resultado, obtemos

$$t_{LL}^{\mu\nu} = -\frac{2k}{c^2}\left(\frac{f'(u)^2}{f(u)^2} + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2} + 4\frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}\right)(\delta_0^\mu + \delta_3^\mu)(\delta_0^\nu + \delta_3^\nu). \quad (5.21)$$

Note que o pseudotensor de Landau-Lifshitz também é simétrico. Também podemos ver dessa expressão que ele tem traço nulo. Esta última propriedade leva naturalmente a uma equação de estado do tipo radiação, como demonstrado em [20].

5.1.1 Comparação entre o pseudotensor de Landau-Lifshitz e o tensor teleparalelo

O tensor teleparalelo que iremos comparar tem a forma [21]

$$t^{\mu a} = -\frac{c^2}{8\pi G}\frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}(\delta_0^\mu + \delta_3^\mu)(\delta_0^a + \delta_3^a), \quad (5.22)$$

que também pode ser reescrito na forma

$$t^{\mu\nu} = -\frac{c^2}{8\pi G} \frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)} (\delta_0^\mu + \delta_3^\mu)(\delta_0^\nu + \delta_3^\nu). \quad (5.23)$$

Essas quantidades foram calculadas com o seguinte referencial teleparalelo

$$e_a^\mu = \delta_a^0 + f(u)^{-1} \delta_a^1 \delta_1^\mu + g(u)^{-1} \delta_a^2 \delta_2^\mu + \delta_a^3 \delta_3^\mu. \quad (5.24)$$

Esse referencial está adaptado a um conjunto de partículas em queda livre, assim como o sistema de coordenadas. Para ser mais preciso, o sistema de coordenadas (t, x, y, z) está adaptado a esse referencial¹.

Está claro que a componente 00 do tensor teleparalelo pode ser escrita simplesmente como

$$t^{0(0)} = -\frac{c^2}{8\pi G} \frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)} = -\frac{4k}{c^2} \frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}, \quad (5.25)$$

onde $k = \frac{c^4}{16\pi G}$.

Da equação (5.21), vemos que

$$t_{LL}^{00} = -\frac{2k}{c^2} \left[\frac{f'(u)^2}{f(u)^2} + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2} + 4 \frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)} \right]. \quad (5.26)$$

Após uma manipulação simples, vemos que

$$\begin{aligned} t_{LL}^{00} &= -\frac{2k}{c^2} \left(\frac{f'(u)^2}{f(u)^2} + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2} + 2 \frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)} + 2 \frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)} \right) \\ &= -\frac{2k}{c^2} \left[\left(\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)} \right)^2 + 2 \frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)} \right], \end{aligned}$$

ou simplesmente

$$t_{LL}^{00} = -\frac{2k}{c^2} \left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)} \right]^2 - \frac{4k}{c^2} \frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}. \quad (5.27)$$

Notando que o último termo é igual a equação (5.25), podemos reescrever essa expressão na forma

$$t_{LL}^{00} = -\frac{2k}{c^2} \left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)} \right]^2 + t^{00}, \quad (5.28)$$

Dessa expressão, podemos concluir que, no sistema de coordenadas e no referencial teleparalelo que estamos adotando, a diferença entre o pseudotensor de Landau-Lifshitz e o tensor do teleparalelismo é um termo negativo. (Note que para $f(u)g(u)$ constante, eles coincidem de forma exata.)

¹ Na visão mais moderna, um referencial é um sistema físico, que é representado pelo campo de tétradas; já as coordenadas são apenas números que servem para rotular os eventos do espaço-tempo. Para maiores detalhes, veja a seção 6.3 da referência [28].

5.1.2 Caso Particular

Suponha, agora, que estamos em uma região do espaço vazio onde o campo gravitacional é fraco. Nesse caso, é razoável admitir que [1]

$$f \approx 1 - \frac{1}{2}\epsilon h_{11}, \quad g \approx 1 + \frac{1}{2}\epsilon h_{11}. \quad (5.29)$$

onde $\epsilon \ll 1$.

As derivadas desses termos serão, respectivamente,

$$f' \approx -\frac{1}{2}\epsilon h'_{11}, \quad g' \approx \frac{1}{2}\epsilon h'_{11}. \quad (5.30)$$

Substituindo (5.29) e (5.30) em (5.25), teremos,

$$\begin{aligned} t^{0(0)} &\approx -\frac{4k}{c^2} \frac{(-\frac{1}{2}\epsilon h'_{11})(\frac{1}{2}\epsilon h'_{11})}{(1 - \frac{1}{2}\epsilon h_{11})(1 + \frac{1}{2}\epsilon h_{11})} \approx \frac{\epsilon^2 h_{11}'^2 k}{c^2(1 - \frac{1}{4}\epsilon^2 h_{11}^2)} \\ &\approx \frac{k}{c^2} \epsilon^2 h_{11}'^2 (1 - \frac{1}{4}\epsilon^2 h_{11}^2)^{-1} \approx \frac{k}{c^2} \epsilon^2 h_{11}'^2 (1 + \frac{1}{4}\epsilon^2 h_{11}^2) \\ &\approx \frac{k}{c^2} \epsilon^2 h_{11}'^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \approx \frac{k}{c^2} \epsilon^2 h_{11}'^2, \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde utilizamos a expansão binomial.

Façamos agora o mesmo com o pseudotensor de Landau-Lifshitz. A partir das equações (5.28), (5.29) e (5.30), teremos

$$\begin{aligned} t_{LL}^{00} &= -\frac{2k}{c^2} \left[\frac{-\frac{1}{2}\epsilon h'_{11}}{(1 - \frac{1}{2}\epsilon h_{11})} + \frac{\frac{1}{2}\epsilon h'_{11}}{(1 + \frac{1}{2}\epsilon h_{11})} \right]^2 + t^{00} \\ &= -\frac{2k}{c^2} \left[-\frac{1}{2}\epsilon h'_{11} (1 - \frac{1}{2}\epsilon h_{11})^{-1} + \frac{1}{2}\epsilon h'_{11} (1 + \frac{1}{2}\epsilon h_{11})^{-1} \right]^2 + t^{00} \\ &= -\frac{2k}{c^2} \left[-\frac{1}{2}\epsilon h'_{11} (1 + \frac{1}{2}\epsilon h_{11}) + \frac{1}{2}\epsilon h'_{11} (1 - \frac{1}{2}\epsilon h_{11}) \right]^2 + t^{00} \\ &= -\frac{2k}{c^2} \left[-\frac{1}{2}\epsilon h'_{11} - \frac{1}{4}\epsilon^2 h'_{11} h_{11} + \frac{1}{2}\epsilon h'_{11} - \frac{1}{4}\epsilon^2 h'_{11} h_{11} \right]^2 + t^{00} \\ &= -\frac{2k}{c^2} \left[-\frac{1}{2}\epsilon^2 h'_{11} h_{11} \right]^2 + t^{00} \\ &= t^{00} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde, mais uma vez, utilizamos a expansão binomial.

Por fim,

$$t_{LL}^{00} = t^{00} + \mathcal{O}(\epsilon^4) = t^{00}. \quad (5.33)$$

Vemos, portanto, que para campos gravitacionais fracos e em um sistema de coordenadas tal que a métrica tome a forma de Minkowski quando a perturbação é nula, t_{LL}^{00} e t^{00} coincidem até terceira ordem.

5.1.3 Onda Eletromagnética Pura

Vamos agora analisar mais um caso particular, o caso da onda eletromagnética pura, que corresponde a $f(u) = g(u)$ (veja, por exemplo, a seção 35.11 de [35]). Partindo da equação (5.27), temos que

$$t_{LL}^{00} = -\frac{2k}{c^2} \left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)} \right]^2 - \frac{4k}{c^2} \frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)},$$

agora, aplicando a condição $f(u) = g(u)$, vemos que a expressão será dada por

$$\begin{aligned} t_{LL}^{00} &= -\frac{2k}{c^2} \left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{f'(u)}{f(u)} \right]^2 - \frac{4k}{c^2} \frac{f'(u)f'(u)}{f(u)f(u)} \\ &= -\frac{2k}{c^2} \left[2 \frac{f'(u)}{f(u)} \right]^2 - \frac{4k}{c^2} \left[\frac{f'(u)}{f(u)} \right]^2 \\ &= -\frac{8k}{c^2} \left[\frac{f'(u)}{f(u)} \right]^2 - \frac{4k}{c^2} \left[\frac{f'(u)}{f(u)} \right]^2 \end{aligned}$$

e, portanto, o resultado para uma onda eletromagnética pura fica dado por

$$t_{LL}^{00} = -\frac{12k}{c^2} \left[\frac{f'(u)}{f(u)} \right]^2. \quad (5.34)$$

Assim como o do teleparalelismo, equação (5.22), o pseudotensor de Landau-Lifshitz também é negativo. Porém, ele difere do teleparalelo por um fator de 3. (Note que a aproximação de campo fraco feita na seção anterior não se aplica aqui, pois lá admitimos que estávamos no vazio. Nesta seção estamos considerando que há um campo eletromagnético.)

5.2 Métrica de Minkowski nas Coordenadas próprias de um Observador

Nesta seção, fazemos a comparação entre a proposta de Landau-Lifshitz e a do teleparalelismo em um referencial acelerado no espaço-tempo de Minkowski.

A métrica de Minkowski escrita nas coordenadas próprias de um observador cuja aceleração é $A^l(x^0)$, onde x^0 é o comprimento de arco da linha de universo, e cuja triáde usada pelo observador não rotaciona, pode ser dada na forma

$$ds^2 = -F^2(dx^0)^2 + dx^k dx^k, \quad (5.35)$$

onde

$$F(x^\mu) = 1 + \frac{A^l x^l}{c^2}. \quad (5.36)$$

Note que $A^l x^l = A^1 x^1 + A^2 x^2 + A^3 x^3$.

Temos que o determinate desta métrica será dada por

$$g = \det||g_{\mu\nu}|| = \begin{vmatrix} -F(x^\mu)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -F(x^\mu)^2, \quad (5.37)$$

onde a métrica é dada por

$$g^{\mu\nu} = -F^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\nu + \delta_i^\mu\delta_i^\nu. \quad (5.38)$$

Com estas informações, iremos calcular (3.49). Por conveniência, façamos as contas por partes. Começando por $g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} &= (-F^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\nu + \delta_i^\mu\delta_i^\nu)(-F^{-2}\delta_0^\rho\delta_0^\sigma + \delta_j^\rho\delta_j^\sigma) \\ &= F^{-4}\delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta_0^\rho\delta_0^\sigma - F^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta_j^\rho\delta_j^\sigma - F^{-2}\delta_i^\mu\delta_i^\nu\delta_0^\rho\delta_0^\sigma + \delta_i^\mu\delta_i^\nu\delta_j^\rho\delta_j^\sigma. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Analogamente para a segunda parte, temos

$$g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} = F^{-4}\delta_0^\mu\delta_0^\rho\delta_0^\nu\delta_0^\sigma - F^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\rho\delta_j^\nu\delta_j^\sigma - F^{-2}\delta_i^\mu\delta_i^\rho\delta_0^\nu\delta_0^\sigma + \delta_i^\mu\delta_i^\rho\delta_j^\nu\delta_j^\sigma. \quad (5.40)$$

Agora, juntando os resultados de (5.37), (5.39), (5.40) e substituindo em (3.49), ficaremos com

$$\begin{aligned} \tau^{\mu\nu\sigma} &= k\partial_\rho[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})] \\ &= k\partial_\rho[-(-F^2)(F^{-4}\delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta_0^\rho\delta_0^\sigma - F^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta_j^\rho\delta_j^\sigma - F^{-2}\delta_i^\mu\delta_i^\nu\delta_0^\rho\delta_0^\sigma + \delta_i^\mu\delta_i^\nu\delta_j^\rho\delta_j^\sigma \\ &\quad - F^{-4}\delta_0^\mu\delta_0^\rho\delta_0^\nu\delta_0^\sigma + F^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\rho\delta_j^\nu\delta_j^\sigma + F^{-2}\delta_i^\mu\delta_i^\rho\delta_0^\nu\delta_0^\sigma - \delta_i^\mu\delta_i^\rho\delta_j^\nu\delta_j^\sigma)] \\ &= k\partial_\rho[F^2(-F^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta_j^\rho\delta_j^\sigma - F^{-2}\delta_i^\mu\delta_i^\nu\delta_0^\rho\delta_0^\sigma + \delta_i^\mu\delta_i^\nu\delta_j^\rho\delta_j^\sigma \\ &\quad + F^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\rho\delta_j^\nu\delta_j^\sigma + F^{-2}\delta_i^\mu\delta_i^\rho\delta_0^\nu\delta_0^\sigma - \delta_i^\mu\delta_i^\rho\delta_j^\nu\delta_j^\sigma)] \\ &= k\partial_\rho[\delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta_j^\rho\delta_j^\sigma - \delta_i^\mu\delta_i^\nu\delta_0^\rho\delta_0^\sigma + F^2\delta_i^\mu\delta_i^\nu\delta_j^\rho\delta_j^\sigma \\ &\quad + \delta_0^\mu\delta_0^\rho\delta_j^\nu\delta_j^\sigma + \delta_i^\mu\delta_i^\rho\delta_0^\nu\delta_0^\sigma - F^2\delta_i^\mu\delta_i^\rho\delta_j^\nu\delta_j^\sigma] \\ &= k\partial_\rho[\delta_0^\mu\delta_j^\sigma(\delta_0^\rho\delta_j^\nu - \delta_0^\nu\delta_j^\rho) + \delta_i^\mu\delta_0^\sigma(\delta_i^\rho\delta_0^\nu - \delta_i^\nu\delta_0^\rho) + F^2\delta_i^\mu\delta_j^\sigma(\delta_i^\rho\delta_j^\nu - \delta_i^\nu\delta_j^\rho)] \\ &= k\partial_\rho[\delta_0^\mu\delta_i^\sigma(\delta_0^\rho\delta_i^\nu - \delta_0^\nu\delta_i^\rho) - \delta_i^\mu\delta_0^\sigma(\delta_0^\rho\delta_i^\nu - \delta_0^\nu\delta_i^\rho) + F^2\delta_i^\mu\delta_j^\sigma(\delta_i^\rho\delta_j^\nu - \delta_i^\nu\delta_j^\rho)] \\ &= k\partial_\rho[(\delta_0^\mu\delta_i^\sigma - \delta_i^\mu\delta_0^\sigma)(\delta_0^\rho\delta_i^\nu - \delta_0^\nu\delta_i^\rho) + F^2\delta_i^\mu\delta_j^\sigma(\delta_i^\rho\delta_j^\nu - \delta_i^\nu\delta_j^\rho)]. \end{aligned}$$

Como na primeira parte temos apenas produtos de deltas, só precisamos nos preocupar com os termos que dependem de F. Realizando a derivada, chegamos a

$$\tau^{\mu\nu\sigma} = k\frac{\partial F^2}{\partial x^\rho}\delta_i^\mu\delta_j^\sigma(\delta_i^\rho\delta_j^\nu - \delta_i^\nu\delta_j^\rho),$$

onde a derivada é dada por

$$\frac{\partial F^2}{\partial x^\rho} = 2F \frac{\partial F}{\partial x^\rho} = \frac{2F}{c^2} (x^l A'^l \delta_\rho^0 + A^l \delta_\rho^l)$$

e a linha sobre o A representa derivada com relação a x^0 .

Portanto,

$$\tau^{\mu\nu\sigma} = k \frac{2F}{c^2} (x^l A'^l \delta_\rho^0 + A^l \delta_\rho^l) \delta_i^\mu \delta_j^\sigma (\delta_i^\nu \delta_j^\rho - \delta_i^\rho \delta_j^\nu).$$

Como as contrações com o δ_ρ^0 serão zero, então

$$\begin{aligned} \tau^{\mu\nu\sigma} &= \frac{2k}{c^2} F \delta_i^\mu \delta_j^\sigma (A^l \delta_i^\nu \delta_j^l - A^l \delta_j^\nu \delta_i^l) \\ &= \frac{2k}{c^2} F \delta_i^\mu \delta_j^\sigma (A^j \delta_i^\nu - A^i \delta_j^\nu). \end{aligned}$$

Por fim, podemos agora calcular o pseudotensor $\theta_{LL}^{\mu\nu}$, dado pela equação (3.50)

$$\begin{aligned} \theta_{LL}^{\mu\nu} &= \partial_\sigma \tau^{\mu\nu\sigma} \\ &= \frac{2k}{c^2} \delta_i^\mu \delta_j^\sigma \partial_\sigma [F (A^j \delta_i^\nu - A^i \delta_j^\nu)] \\ &= \frac{2k}{c^4} \delta_i^\mu \delta_j^\sigma [(x^l A'^l \delta_\sigma^0 + A^l \delta_\sigma^l) (A^j \delta_i^\nu - A^i \delta_j^\nu) + F (A'^j \delta_\sigma^0 \delta_i^\nu - A'^i \delta_\sigma^0 \delta_j^\nu)] \\ &= \frac{2k}{c^4} \delta_i^\mu \delta_j^\sigma [A^l \delta_\sigma^l (A^j \delta_i^\nu - A^i \delta_j^\nu)] \\ &= \frac{2k}{c^4} A^l \delta_i^\mu \delta_j^l (A^j \delta_i^\nu - A^i \delta_j^\nu) \\ &= \frac{2k}{c^4} A^j \delta_i^\mu (A^j \delta_i^\nu - A^i \delta_j^\nu). \end{aligned} \tag{5.41}$$

De acordo com o resultado obtido, sendo este diferente de zero, significa que o pseudotensor de Landau-Lifshitz (3.47) também não o é, pois estamos trabalhando com o espaço-tempo de Minkowski. Portanto, podemos concluir com essa informação que o pseudotensor de Landau-Lifshitz prevê a existência de um campo gravitacional mesmo na ausência de curvatura. Sugerindo então a validade do princípio da equivalência, no sentido original de Einstein, em que o observador pode alegar que está em repouso na presença de um tipo de campo gravitacional especial.

Contudo, veremos que, ao usarmos a decomposição de Eckart 4.8 este ‘campo gravitacional’ não tem densidade de energia, mas tem pressão, o que é algo que não é esperado e aparenta ser contraditório. Este problema não está presente no teleparalelismo, quando usamos um referencial adaptado às coordenadas que estamos usando aqui. Como demonstrado em [50], o tensor energia-momento do teleparalelismo é nulo, o que está de acordo com uma visão muito comum na literatura, devido a Synge, de que o campo gravitacional é nulo quando a curvatura da conexão de Levi-Civita é nula.

Como visto anteriormente, a densidade de energia é dada pela expressão (5.7), e portanto a expressão fica

$$\begin{aligned}\rho_{LL} &= \theta_{LL(\mu\nu)} e_{(0)}^\mu e_{(0)}^\nu \\ &= \theta_{LL}^{\mu\nu} e_{(0)\mu} e_{(0)\nu} = \theta_{LL}^{00} = 0.\end{aligned}\quad (5.42)$$

A expressão da pressão isotrópica é dada por (5.11), portanto

$$\begin{aligned}p_{LL} &= \frac{1}{3} \theta_{LL(\mu\nu)} h^{\mu\nu} = \frac{1}{3} \theta_{LL}^{(\mu\nu)} h_{\mu\nu} = \frac{1}{3} \theta_{LL}^{kk} \\ &= \frac{2k}{3c^4} A^j \delta_i^k (A^j \delta_i^k - A^i \delta_j^k) \\ &= \frac{2k}{3c^4} (A^j A^j \delta_i^k \delta_i^k - A^j A^i \delta_i^k \delta_j^k) \\ &= \frac{2k}{3c^4} (A^j A^j \delta_k^k - A^j A^i \delta_i^j) \\ &= \frac{2k}{3c^4} (3A^j A^j - A^j A^j) \\ &= \frac{4k}{3c^4} A^i A^i.\end{aligned}\quad (5.43)$$

Os resultados (5.42) e (5.43) são compatíveis com o caso particular obtido em [20].

O fluxo de calor é dado pela expressão (5.14), e portanto

$$\begin{aligned}q_{LL}^\mu &= -c \theta^{(\alpha\beta)} h_\alpha^\mu e_{(0)\beta} \\ &= -c \theta^{(\alpha 0)} h_\alpha^\mu = 0.\end{aligned}\quad (5.44)$$

O “tensor” de tensão viscoso é dado pela expressão (5.16), com isso temos

$$\begin{aligned}P^{\mu\nu} &= -\theta^{(\alpha\beta)} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu + p h^{\mu\nu} \\ &= -\frac{2k}{c^4} A^j \delta_i^\alpha (A^j \delta_i^\beta - A^i \delta_j^\beta) \delta_\alpha^\mu \delta_k^\mu \delta_\beta^\nu \delta_l^\nu + \frac{4k}{3c^4} A^i A^i \delta_j^\mu \delta_j^\nu \\ &= -\frac{2k}{c^4} A^j \delta_i^k (A^j \delta_i^l - A^i \delta_j^l) \delta_k^\mu \delta_l^\nu + \frac{4k}{3c^4} A^i A^i \delta_j^\mu \delta_j^\nu \\ &= -\frac{2k}{c^4} (A^j A^j \delta_l^k - A^i A^j \delta_i^k \delta_j^l) \delta_k^\mu \delta_l^\nu + \frac{4k}{3c^4} A^i A^i \delta_j^\mu \delta_j^\nu \\ &= -\frac{2k}{c^4} A^j A^j \delta_l^k \delta_k^\mu \delta_l^\nu + \frac{2k}{c^4} A^k A^l \delta_k^\mu \delta_l^\nu + \frac{4k}{3c^4} A^i A^i \delta_j^\mu \delta_j^\nu \\ &= -\frac{2k}{c^4} A^j A^j \delta_l^\mu \delta_l^\nu + \frac{2k}{c^4} A^k A^l \delta_k^\mu \delta_l^\nu + \frac{4k}{3c^4} A^i A^i \delta_j^\mu \delta_j^\nu \\ &= -\frac{2k}{c^4} A^i A^i \delta_j^\mu \delta_j^\nu + \frac{4k}{3c^4} A^i A^i \delta_j^\mu \delta_j^\nu + \frac{2k}{c^4} A^k A^l \delta_k^\mu \delta_l^\nu \\ &= -\frac{2k}{3c^4} A^i A^i \delta_j^\mu \delta_j^\nu + \frac{2k}{c^4} A^i A^j \delta_i^\mu \delta_j^\nu.\end{aligned}\quad (5.45)$$

Em resumo, embora o pseudotensor de Landau-Lifshitz possa parecer ser uma expressão da equivalência entre o campo gravitacional e a inércia, ele não parece fornecer

um resultado muito consistente quando o referencial está acelerado. Por outro lado, o do teleparalelismo fornece o resultado que seria esperado na visão do Synge: se a curvatura da conexão de Levi-Civita é nula, então não há campo gravitacional.

6 Resumo e Perspectivas

6.1 Sobre as comparações

Ao comparar o pseudotensor de Landau-Lifshitz t_{LL} com o do teleparalelismo $t^{\mu\nu}$, vimos na literatura que:

- t_{LL} depende do sistema de coordenadas, enquanto que $t^{\mu\nu}$ depende da tétrada que é escolhida como teleparalela.
- t_{LL} não é nulo em um referencial acelerado em Minkowski, já $t^{\mu\nu}$ é. Nesse sentido, o do teleparalelismo está de acordo com a visão de Synge (a interação gravitacional é produzida pela curvatura de Levi-Civita, não pela inércia).
- t_{LL} não necessariamente tem traço nulo [20], já o do teleparalelismo sim. Enfatizamos que é natural que um campo sem massa, como é o caso do campo gravitacional, deva ser representado por um tensor sem traço. Refizemos a demonstração de [20], e confirmamos que, de fato, a decomposição de t_{LL} em densidade de energia e pressão em um referencial aceleração é inconsistente, pois fornece uma densidade nula com uma pressão diferente de zero.

6.2 Perspectivas

- Realizar novas comparações em outros espaços-tempos.
- Realizar a comparação na aproximação de campo fraco, para o caso geral.

A Densidade de energia-momento

A densidade de energia-momento do espaço-tempo é descrita pelas equações de campo de Einstein. Essas equações relacionam a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de energia e momento dentro dele. Neste apêndice iremos calculá-lo no formalismo de Landau-Lifshitz.

A.1 Cálculo de $\theta_{LL}^{\mu\nu}$

Visto no final do capítulo 3, o pseudotensor de densidade tem a seguinte forma

$$\theta_{LL}^{\mu\nu} = \partial_\sigma \tau^{\mu\nu\sigma},$$

onde

$$\tau^{\mu\nu\sigma} = k\partial_\rho [(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})].$$

Começamos então calculando $\tau^{\mu\nu\sigma}$, para isso iremos fazer separadamente os produtos $g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}$ e $g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}$, temos então

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} &= [-\delta_0^\mu\delta_0^\nu + f(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\nu + g(u)^2\delta_2^\mu\delta_2^\nu + \delta_3^\mu\delta_3^\nu][-\delta_0^\rho\delta_0^\sigma + f(u)^{-2}\delta_1^\rho\delta_1^\sigma + g(u)^2\delta_2^\rho\delta_2^\sigma + \delta_3^\rho\delta_3^\sigma] \\ &= \delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta_0^\rho\delta_0^\sigma - f(u)^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta_1^\rho\delta_1^\sigma - g(u)^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta_2^\rho\delta_2^\sigma - \delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta_3^\rho\delta_3^\sigma - f(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\nu\delta_0^\rho\delta_0^\sigma \\ &\quad + f(u)^{-4}\delta_1^\mu\delta_1^\nu\delta_1^\rho\delta_1^\sigma + f(u)^{-2}g(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\nu\delta_2^\rho\delta_2^\sigma + f(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\nu\delta_3^\rho\delta_3^\sigma - g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\nu\delta_0^\rho\delta_0^\sigma \\ &\quad + f(u)^{-2}g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\nu\delta_1^\rho\delta_1^\sigma + g(u)^{-4}\delta_2^\mu\delta_2^\nu\delta_2^\rho\delta_2^\sigma + g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\nu\delta_3^\rho\delta_3^\sigma - \delta_3^\mu\delta_3^\nu\delta_0^\rho\delta_0^\sigma \\ &\quad + f(u)^{-2}\delta_3^\mu\delta_3^\nu\delta_1^\rho\delta_1^\sigma + g(u)^{-2}\delta_3^\mu\delta_3^\nu\delta_2^\rho\delta_2^\sigma + \delta_3^\mu\delta_3^\nu\delta_3^\rho\delta_3^\sigma. \end{aligned} \quad (A.1)$$

Fazendo um cálculo similar para $g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}$, obtemos

$$\begin{aligned} g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} &= \delta_0^\mu\delta_0^\rho\delta_0^\nu\delta_0^\sigma - f(u)^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\rho\delta_1^\nu\delta_1^\sigma - g(u)^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\rho\delta_2^\nu\delta_2^\sigma - \delta_0^\mu\delta_0^\rho\delta_3^\nu\delta_3^\sigma - f(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\rho\delta_0^\nu\delta_0^\sigma \\ &\quad + f(u)^{-4}\delta_1^\mu\delta_1^\rho\delta_1^\nu\delta_1^\sigma + f(u)^{-2}g(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\rho\delta_2^\nu\delta_2^\sigma + f(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\rho\delta_3^\nu\delta_3^\sigma - g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\rho\delta_0^\nu\delta_0^\sigma \\ &\quad + f(u)^{-2}g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\rho\delta_1^\nu\delta_1^\sigma + g(u)^{-4}\delta_2^\mu\delta_2^\rho\delta_2^\nu\delta_2^\sigma + g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\rho\delta_3^\nu\delta_3^\sigma - \delta_3^\mu\delta_3^\rho\delta_0^\nu\delta_0^\sigma \\ &\quad + f(u)^{-2}\delta_3^\mu\delta_3^\rho\delta_1^\nu\delta_1^\sigma + g(u)^{-2}\delta_3^\mu\delta_3^\rho\delta_2^\nu\delta_2^\sigma + \delta_3^\mu\delta_3^\rho\delta_3^\nu\delta_3^\sigma. \end{aligned} \quad (A.2)$$

Com esses valores dados, temos que, a expressão ficará (5.4). Agora, calcularemos as derivadas presentes na expressão.

Tendo em vista que u é dado por

$$u = t - \frac{z}{c},$$

ficamos então com

$$u = \frac{x^0}{c} - \frac{x^3}{c} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{c}\delta_\lambda^0 - \frac{1}{c}\delta_\lambda^3;$$

tomando agora a derivada de $g(u)^2$ com relação a x^ρ , temos então

$$\frac{\partial[g(u)^2]}{\partial x^\rho} = \frac{\partial[g(u)^2]}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x^\rho} = 2g(u)g'(u)\left(\frac{1}{c}\delta_\rho^0 - \frac{1}{c}\delta_\rho^3\right);$$

Similarmente para $f(u)^2$,

$$\frac{\partial[f(u)^2]}{\partial x^\rho} = 2f(u)f'(u)\left(\frac{1}{c}\delta_\rho^0 - \frac{1}{c}\delta_\rho^3\right).$$

E, portanto, para $f(u)^2g(u)^2$, teremos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial[f(u)^2g(u)^2]}{\partial x^\rho} &= \frac{\partial[f(u)^2g(u)^2]}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x^\rho} \\ &= \left(\frac{\partial[f(u)^2]}{\partial u}g(u)^2 + \frac{\partial[g(u)^2]}{\partial u}f(u)^2\right)\left(\frac{1}{c}\delta_\rho^0 - \frac{1}{c}\delta_\rho^3\right) \\ &= \frac{2}{c}[f(u)f'(u)g(u)^2 + g(u)g'(u)f(u)^2]\left(\frac{1}{c}\delta_\rho^0 - \frac{1}{c}\delta_\rho^3\right). \end{aligned}$$

Agora, iremos derivar $g(u)g'(u)$ e $f(u)f'(u)$ com respeito a x^σ . Portanto,

$$\frac{\partial[g(u)g'(u)]}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial[g(u)g'(u)]}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x^\sigma} = (g'(u)^2 + g(u)g''(u))\left(\frac{1}{c}\delta_\sigma^0 - \frac{1}{c}\delta_\sigma^3\right);$$

Similarmente,

$$\frac{\partial[f(u)f'(u)]}{\partial x^\sigma} = (f'(u)^2 + f(u)f''(u))\left(\frac{1}{c}\delta_\sigma^0 - \frac{1}{c}\delta_\sigma^3\right).$$

Calculando a derivada de $f(u)f'(u)g(u)^2 + g(u)g'(u)f(u)^2$, ficamos então com

$$\begin{aligned} \frac{\partial[f(u)f'(u)g(u)^2 + g(u)g'(u)f(u)^2]}{\partial x^\sigma} &= \frac{\partial[f(u)f'(u)g(u)^2 + g(u)g'(u)f(u)^2]}{\partial u} \left(\frac{1}{c}\delta_\sigma^0 - \frac{1}{c}\delta_\sigma^3\right) \\ &= [f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 2g(u)g'(u)f(u)f'(u) \\ &\quad + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2 \\ &\quad + f(u)f'(u)g(u)g'(u)]\left(\frac{1}{c}\delta_\sigma^0 - \frac{1}{c}\delta_\sigma^3\right). \end{aligned}$$

A título de simplificação, iremos fazer a seguinte substituição

$$\begin{aligned} F(f, f', f'', g, g', g''; u) &= F \equiv [f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 2g(u)g'(u)f(u)f'(u) \\ &\quad + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2 + f(u)f'(u)g(u)g'(u)]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Portanto,

$$\frac{\partial[f(u)f'(u)g(u)^2 + g(u)g'(u)f(u)^2]}{\partial x^\sigma} = F\left(\frac{1}{c}\delta_\sigma^0 - \frac{1}{c}\delta_\sigma^3\right). \quad (\text{A.4})$$

Seguindo agora com os cálculos, assim como visto anteriormente, podemos eliminar os termos com $(\delta_1^\sigma, \delta_2^\sigma)$, pois, sabemos que irão se anular com $(\delta_\sigma^0, \delta_\sigma^3)$.

Assim, o valor de $\theta_{LL}^{\mu\nu}$ será dado por

$$\begin{aligned}\theta_{LL}^{\mu\nu} = & \frac{2k}{c} \left[\frac{\partial[f(u)f'(u)g(u)^2 + g(u)g'(u)f(u)^2]}{\partial x^3} \delta_0^\mu \delta_0^\nu - \frac{\partial[g(u)g'(u)]}{\partial x^0} \delta_1^\mu \delta_1^\nu - \frac{\partial[g(u)g'(u)]}{\partial x^3} \delta_1^\mu \delta_1^\nu \right. \\ & - \frac{\partial[f(u)f'(u)]}{\partial x^0} \delta_2^\mu \delta_2^\nu - \frac{\partial[f(u)f'(u)]}{\partial x^3} \delta_2^\mu \delta_2^\nu - \frac{\partial[f(u)f'(u)g(u)^2 + g(u)g'(u)f(u)^2]}{\partial x^0} \delta_3^\mu \delta_3^\nu \\ & \left. + \frac{\partial[f(u)f'(u)g(u)^2 + g(u)g'(u)f(u)^2]}{\partial x^3} \delta_0^\mu \delta_3^\nu - \frac{\partial[f(u)f'(u)g(u)^2 + g(u)g'(u)f(u)^2]}{\partial x^0} \delta_3^\mu \delta_0^\nu \right],\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\theta_{LL}^{\mu\nu} = & \frac{2k}{c} \left[-\frac{F}{c} \delta_0^\mu \delta_0^\nu - \frac{1}{c} (g'(u)^2 + g(u)g''(u)) \delta_1^\mu \delta_1^\nu + \frac{1}{c} (g'(u)^2 + g(u)g''(u)) \delta_1^\mu \delta_1^\nu - \frac{1}{c} (f'(u)^2 \right. \\ & \left. + f(u)f''(u)) \delta_2^\mu \delta_2^\nu + \frac{1}{c} (f'(u)^2 + f(u)f''(u)) \delta_2^\mu \delta_2^\nu - \frac{F}{c} \delta_3^\mu \delta_3^\nu - \frac{F}{c} \delta_0^\mu \delta_3^\nu - \frac{F}{c} \delta_3^\mu \delta_0^\nu \right] \\ = & -\frac{2k}{c^2} F (\delta_0^\mu \delta_0^\nu + \delta_0^\mu \delta_3^\nu + \delta_3^\mu \delta_0^\nu + \delta_3^\mu \delta_3^\nu) \\ = & -\frac{2k}{c^2} F [\delta_0^\mu (\delta_0^\nu + \delta_3^\nu) + \delta_3^\mu (\delta_0^\nu + \delta_3^\nu)].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\theta_{LL}^{\mu\nu} = -\frac{2k}{c^2} F (\delta_0^\mu + \delta_3^\mu) (\delta_0^\nu + \delta_3^\nu). \quad (\text{A.5})$$

A.2 Decomposições

A densidade de energia é dada por

$$\rho_{LL} = \theta_{LL(\mu\nu)} e_{(0)}^\mu e_{(0)}^\nu, \quad (\text{A.6})$$

e, portanto, a densidade ficará

$$\begin{aligned}
\rho_{LL} &= -\frac{2k}{c^2}[f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2](\delta_\mu^0 - \delta_\mu^3)(\delta_\nu^0 - \delta_\nu^3)e_{(0)}^\mu e_{(0)}^\nu \\
&= -\frac{2k}{c^2}[f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2](\delta_\mu^0 e_{(0)}^\mu - \delta_\mu^3 e_{(0)}^\mu)(\delta_\nu^0 e_{(0)}^\nu - \delta_\nu^3 e_{(0)}^\nu) \\
&= -\frac{2k}{c^2}[f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2](e_{(0)}^0 - e_{(0)}^3)(e_{(0)}^0 - e_{(0)}^3) \\
&= -\frac{2k}{c^2}[f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2](1-0)(1-0) \\
&= -\frac{2k}{c^2}[f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2], \tag{A.7}
\end{aligned}$$

onde, foi usado que o valor de e_a^μ é dado por

$$e_a^\mu = \delta_a^0 \delta_0^\mu + f(u)^{-1} \delta_a^1 \delta_1^\mu + g(u)^{-1} \delta_a^2 \delta_2^\mu + \delta_a^3 \delta_3^\mu, \tag{A.8}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow e_{(0)}^0 = \delta_0^0 \delta_0^0 = 1; \\
&\Rightarrow e_{(0)}^3 = \delta_0^3 \delta_3^3 = 0 \cdot 1 = 0.
\end{aligned}$$

A pressão isotrópica é dada por

$$p_{LL} = \frac{1}{3} \theta_{LL(\mu\nu)} h^{\mu\nu}$$

o que nos leva à

$$\begin{aligned}
p_{LL} &= \frac{1}{3} \left[-\frac{2k}{c^2} [f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) \right. \\
&\quad \left. + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2] (\delta_\mu^0 - \delta_\mu^3)(\delta_\nu^0 - \delta_\nu^3) [f(u)^{-2} \delta_1^\mu \delta_1^\nu \right. \\
&\quad \left. + g(u)^{-2} \delta_2^\mu \delta_2^\nu + \delta_3^\mu \delta_3^\nu] \right. \\
&= \frac{1}{3} \left[-\frac{2k}{c^2} [f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) + g'(u)^2f(u)^2 \right. \\
&\quad \left. + g(u)g''(u)f(u)^2] (\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - \delta_\mu^0 \delta_\nu^3 - \delta_\mu^3 \delta_\nu^0 + \delta_\mu^3 \delta_\nu^3) [f(u)^{-2} \delta_1^\mu \delta_1^\nu + g(u)^{-2} \delta_2^\mu \delta_2^\nu + \delta_3^\mu \delta_3^\nu] \right. \\
&= -\frac{2k}{3c^2} [f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) \\
&\quad \left. + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2], \tag{A.9}
\end{aligned}$$

onde $h^{\mu\nu}$ é dado por

$$h^{\mu\nu} = f(u)^{-2} \delta_1^\mu \delta_1^\nu + g(u)^{-2} \delta_2^\mu \delta_2^\nu + \delta_3^\mu \delta_3^\nu. \tag{A.10}$$

O fluxo de calor é dado por

$$q_{LL}^\mu = -c\theta_{LL}^{(\alpha\beta)}h_\alpha^\mu e_{(0)\beta}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
q_{LL}^\mu &= -c\left[-\frac{2k}{c^2}[f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) \right. \\
&\quad \left. + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2](\delta_0^\alpha - \delta_3^\alpha)(\delta_0^\beta - \delta_3^\beta)](\delta_\alpha^i\delta_i^\mu)[-e_{(0)}^\beta]\right] \\
&= \frac{2k}{c}[f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2](\delta_0^\alpha\delta_3^i - \delta_3^\alpha\delta_\alpha^i)(-\delta_0^\beta e_{(0)}^\beta + \delta_3^\beta e_{(0)}^\beta)\delta_i^\mu \\
&= -\frac{2k}{c}[f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2]\delta_3^i(-e_{(0)}^0 + e_{(0)}^3)\delta_i^\mu \\
&= -\frac{2k}{c}[f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2]\delta_3^i(-1 + 0)\delta_i^\mu \\
&= \frac{2k}{c}[f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2]\delta_3^i\delta_i^\mu \\
&= \frac{2k}{c}[f'(u)^2g(u)^2 + f(u)f''(u)g(u)^2 + 4g(u)g'(u)f(u)f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2f(u)^2 + g(u)g''(u)f(u)^2]\delta_3^\mu.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

O “tensor” de tensão viscoso é dado por

$$P_{LL}^{\mu\nu} = -\theta_{LL}^{(\alpha\beta)}h_\alpha^\mu h_\beta^\nu + p_{LL}h^{\mu\nu}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
P_{LL}^{\mu\nu} &= - \left[-\frac{2k}{c^2} [f'(u)^2 g(u)^2 + f(u) f''(u) g(u)^2 + 4g(u) g'(u) f(u) f'(u) \right. \\
&\quad \left. + g'(u)^2 f(u)^2 + g(u) g''(u) f(u)^2] (\delta_0^\alpha - \delta_3^\alpha) (\delta_0^\beta - \delta_3^\beta) (\delta_\alpha^i \delta_i^\mu) (\delta_\beta^j \delta_j^\nu) \right. \\
&\quad \left. + \left[-\frac{2k}{3c^2} [f'(u)^2 g(u)^2 + f(u) f''(u) g(u)^2 + 4g(u) g'(u) f(u) f'(u) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + g'(u)^2 f(u)^2 + g(u) g''(u) f(u)^2] \right] (f(u)^{-2} \delta_1^\mu \delta_1^\nu + g(u)^{-2} \delta_2^\mu \delta_2^\nu + \delta_3^\mu \delta_3^\nu) \right] \\
&= \frac{2k}{c^2} [f'(u)^2 g(u)^2 + f(u) f''(u) g(u)^2 + 4g(u) g'(u) f(u) f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2 f(u)^2 + g(u) g''(u) f(u)^2] (\delta_0^\alpha \delta_\alpha^i - \delta_3^\alpha \delta_\alpha^i) (\delta_0^\beta \delta_\beta^j - \delta_3^\beta \delta_\beta^j) \delta_i^\mu \delta_j^\nu \\
&\quad - \frac{2k}{3c^2} [f'(u)^2 g(u)^2 + f(u) f''(u) g(u)^2 + 4g(u) g'(u) f(u) f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2 f(u)^2 + g(u) g''(u) f(u)^2] (f(u)^{-2} \delta_1^\mu \delta_1^\nu + g(u)^{-2} \delta_2^\mu \delta_2^\nu + \delta_3^\mu \delta_3^\nu) \\
&= \frac{2k}{c^2} [f'(u)^2 g(u)^2 + f(u) f''(u) g(u)^2 + 4g(u) g'(u) f(u) f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2 f(u)^2 + g(u) g''(u) f(u)^2] \delta_3^i \delta_3^j \delta_i^\mu \delta_j^\nu \\
&\quad - \frac{2k}{3c^2} [f'(u)^2 g(u)^2 + f(u) f''(u) g(u)^2 + 4g(u) g'(u) f(u) f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2 f(u)^2 + g(u) g''(u) f(u)^2] (f(u)^{-2} \delta_1^\mu \delta_1^\nu + g(u)^{-2} \delta_2^\mu \delta_2^\nu + \delta_3^\mu \delta_3^\nu) \\
&= \frac{2k}{c^2} [f'(u)^2 g(u)^2 + f(u) f''(u) g(u)^2 + 4g(u) g'(u) f(u) f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2 f(u)^2 + g(u) g''(u) f(u)^2] \delta_3^\mu \delta_3^\nu \\
&\quad - \frac{2k}{3c^2} [f'(u)^2 g(u)^2 + f(u) f''(u) g(u)^2 + 4g(u) g'(u) f(u) f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2 f(u)^2 + g(u) g''(u) f(u)^2] (f(u)^{-2} \delta_1^\mu \delta_1^\nu + g(u)^{-2} \delta_2^\mu \delta_2^\nu + \delta_3^\mu \delta_3^\nu) \\
&= - \frac{2k}{c^2} [f'(u)^2 g(u)^2 + f(u) f''(u) g(u)^2 + 4g(u) g'(u) f(u) f'(u) \\
&\quad + g'(u)^2 f(u)^2 + g(u) g''(u) f(u)^2] (f(u)^{-2} \delta_1^\mu \delta_1^\nu + g(u)^{-2} \delta_2^\mu \delta_2^\nu - 2\delta_3^\mu \delta_3^\nu). \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

B pseudotensor de Landau-Lifshitz

B.1 Cálculo de $t_{LL}^{\mu\nu}$

O pseudotensor de Landau-Lifshitz é dado por

$$\begin{aligned}
 t_{LL}^{\mu\nu} = & k[(2\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\rho}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\sigma} - \mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\rho}\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\sigma} - \mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^{\rho}\mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{\sigma})(g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda}) \\
 & + g^{\mu\kappa}g^{\lambda\rho}(\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\sigma} + \mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\sigma} - \mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\sigma} - \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\sigma}) \\
 & + g^{\nu\kappa}g^{\lambda\rho}(\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\sigma} + \mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\sigma} - \mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\sigma} - \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\sigma}) \\
 & + g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma}(\mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{\nu} - \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\nu})],
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

onde $k = c^4/(16\pi G)$, e $\mathring{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$ são os símbolos de Christoffel.

O símbolo de Cristoffel ajustado para o nosso interesse tem a forma

$$\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\gamma}(g_{\kappa\gamma,\lambda} + g_{\lambda\gamma,\kappa} - g_{\kappa\lambda,\gamma}).$$

Para encontrarmos a expressão do símbolo de Cristoffel devemos primeiro calcular as derivadas da métrica presentes na equação. Assim, temos

$$\begin{aligned}
 g_{\kappa\gamma,\lambda} \equiv \partial_{\lambda}g_{\kappa\gamma} &= \partial_{\lambda}(-\delta_{\kappa}^0\delta_{\gamma}^0 + f(u)^2\delta_{\kappa}^1\delta_{\gamma}^1 + g(u)^2\delta_{\kappa}^2\delta_{\gamma}^2 + \delta_{\kappa}^3\delta_{\gamma}^3) \\
 &= \frac{2}{c}[f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\gamma}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\gamma}^2](\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3);
 \end{aligned}$$

e, similarmente obtemos

$$\begin{aligned}
 g_{\lambda\gamma,\kappa} \equiv \partial_{\kappa}g_{\lambda\gamma} &= \frac{2}{c}[f(u)f'(u)\delta_{\lambda}^1\delta_{\gamma}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\lambda}^2\delta_{\gamma}^2](\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3); \\
 g_{\kappa\lambda,\gamma} \equiv \partial_{\gamma}g_{\kappa\lambda} &= \frac{2}{c}[f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\lambda}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\lambda}^2](\delta_{\gamma}^0 - \delta_{\gamma}^3).
 \end{aligned}$$

Assim, o símbolo de Cristoffel acaba tomando a forma

$$\begin{aligned}
 \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\rho} = & \frac{1}{c}g^{\rho\gamma}[(f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\gamma}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\gamma}^2)(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3) \\
 & + (f(u)f'(u)\delta_{\lambda}^1\delta_{\gamma}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\lambda}^2\delta_{\gamma}^2)(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3) \\
 & - (f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\lambda}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\lambda}^2)(\delta_{\gamma}^0 - \delta_{\gamma}^3)]
 \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\rho &= \frac{1}{c} [-\delta_0^\rho \delta_0^\gamma + f(u)^{-2} \delta_1^\rho \delta_1^\gamma + g(u)^{-2} \delta_2^\rho \delta_2^\gamma + \delta_3^\rho \delta_3^\gamma] \\
&\quad * [(f(u)f'(u)\delta_\kappa^1 \delta_\gamma^1 + g(u)g'(u)\delta_\kappa^2 \delta_\gamma^2)(\delta_\lambda^0 - \delta_\lambda^3) \\
&\quad + (f(u)f'(u)\delta_\lambda^1 \delta_\gamma^1 + g(u)g'(u)\delta_\lambda^2 \delta_\gamma^2)(\delta_\kappa^0 - \delta_\kappa^3) \\
&\quad - (f(u)f'(u)\delta_\kappa^1 \delta_\lambda^1 + g(u)g'(u)\delta_\kappa^2 \delta_\lambda^2)(\delta_\gamma^0 - \delta_\gamma^3)] \\
&= \frac{1}{c} [(-\delta_0^\rho \delta_0^\gamma)(-f(u)f'(u)\delta_\kappa^1 \delta_\lambda^1 - g(u)g'(u)\delta_\kappa^2 \delta_\lambda^2)(\delta_\gamma^0 - \delta_\gamma^3) \\
&\quad + (f(u)^{-2} \delta_1^\rho \delta_1^\gamma)(f(u)f'(u)\delta_\kappa^1 \delta_\gamma^1 + g(u)g'(u)\delta_\kappa^2 \delta_\gamma^2)(\delta_\lambda^0 - \delta_\lambda^3) \\
&\quad + (f(u)^{-2} \delta_1^\rho \delta_1^\gamma)(f(u)f'(u)\delta_\lambda^1 \delta_\gamma^1 + g(u)g'(u)\delta_\lambda^2 \delta_\gamma^2)(\delta_\kappa^0 - \delta_\kappa^3) \\
&\quad + (g(u)^{-2} \delta_2^\rho \delta_2^\gamma)(f(u)f'(u)\delta_\kappa^1 \delta_\gamma^1 + g(u)g'(u)\delta_\kappa^2 \delta_\gamma^2)(\delta_\lambda^0 - \delta_\lambda^3) \\
&\quad + (g(u)^{-2} \delta_2^\rho \delta_2^\gamma)(f(u)f'(u)\delta_\lambda^1 \delta_\gamma^1 + g(u)g'(u)\delta_\lambda^2 \delta_\gamma^2)(\delta_\kappa^0 - \delta_\kappa^3) \\
&\quad + (\delta_3^\rho \delta_3^\gamma)(-f(u)f'(u)\delta_\kappa^1 \delta_\lambda^1 - g(u)g'(u)\delta_\kappa^2 \delta_\lambda^2)(\delta_\gamma^0 - \delta_\gamma^3)].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\rho &= \frac{1}{c} [(f(u)f'(u)\delta_\kappa^1 \delta_\lambda^1 + g(u)g'(u)\delta_\kappa^2 \delta_\lambda^2)\delta_0^\rho \\
&\quad + (f(u)f'(u)\delta_\kappa^1 \delta_\lambda^1 + g(u)g'(u)\delta_\kappa^2 \delta_\lambda^2)\delta_3^\rho \\
&\quad + (\frac{f'(u)}{f(u)}\delta_1^\rho \delta_\kappa^1(\delta_\lambda^0 - \delta_\lambda^3) + \frac{f'(u)}{f(u)}\delta_1^\rho \delta_\lambda^1(\delta_\kappa^0 - \delta_\kappa^3)) \\
&\quad + (\frac{g'(u)}{g(u)}\delta_2^\rho \delta_\kappa^2(\delta_\lambda^0 - \delta_\lambda^3) + \frac{g'(u)}{g(u)}\delta_2^\rho \delta_\lambda^2(\delta_\kappa^0 - \delta_\kappa^3))].
\end{aligned}$$

Agora que sabemos a forma de $\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\rho$, sabemos também a forma dos próximos símbolos apenas mudando os índices. O termo seguinte será dado então por

$$\begin{aligned}
\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^\sigma &= \frac{1}{c} [(f(u)f'(u)\delta_\rho^1 \delta_\sigma^1 + g(u)g'(u)\delta_\rho^2 \delta_\sigma^2)\delta_0^\sigma \\
&\quad + (f(u)f'(u)\delta_\rho^1 \delta_\sigma^1 + g(u)g'(u)\delta_\rho^2 \delta_\sigma^2)\delta_3^\sigma \\
&\quad + (\frac{f'(u)}{f(u)}\delta_1^\sigma \delta_\rho^1(\delta_\sigma^0 - \delta_\sigma^3) + \frac{f'(u)}{f(u)}\delta_1^\sigma \delta_\sigma^1(\delta_\rho^0 - \delta_\rho^3)) \\
&\quad + (\frac{g'(u)}{g(u)}\delta_2^\sigma \delta_\rho^2(\delta_\sigma^0 - \delta_\sigma^3) + \frac{g'(u)}{g(u)}\delta_2^\sigma \delta_\sigma^2(\delta_\rho^0 - \delta_\rho^3))].
\end{aligned}$$

Como $\delta_0^\sigma \delta_\sigma^1 = \delta_0^\sigma \delta_\sigma^2 = \delta_3^\sigma \delta_\sigma^1 = \delta_3^\sigma \delta_\sigma^2 = \delta_1^\sigma \delta_\sigma^0 = \delta_1^\sigma \delta_\sigma^3 = \delta_2^\sigma \delta_\sigma^0 = \delta_2^\sigma \delta_\sigma^3 = 0$, ficamos então com

$$\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^\sigma = \frac{1}{c} \frac{f'(u)}{f(u)} (\delta_\rho^0 - \delta_\rho^3) + \frac{1}{c} \frac{g'(u)}{g(u)} (\delta_\rho^0 - \delta_\rho^3) = \frac{1}{c} [\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)}] (\delta_\rho^0 - \delta_\rho^3). \quad (\text{B.2})$$

Agora, o cálculo do primeiro produto presente no pseudotensor será dado por

$$\begin{aligned}
2\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\rho}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\sigma} &= \frac{1}{c^2}[(f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\lambda}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\lambda}^2)\delta_0^{\rho} + [f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\lambda}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\lambda}^2]\delta_3^{\rho} \\
&\quad + (\frac{f'(u)}{f(u)}\delta_1^{\rho}\delta_{\kappa}^1(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3) + \frac{f'(u)}{f(u)}\delta_1^{\rho}\delta_{\lambda}^1(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)) + (\frac{g'(u)}{g(u)}\delta_2^{\rho}\delta_{\kappa}^2(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3) \\
&\quad + \frac{g'(u)}{g(u)}\delta_2^{\rho}\delta_{\lambda}^2(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3))][\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)}](\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3),
\end{aligned}$$

onde, sabemos que $\delta_1^{\rho}\delta_{\rho}^0 = \delta_1^{\rho}\delta_{\rho}^3 = \delta_2^{\rho}\delta_{\rho}^0 = \delta_2^{\rho}\delta_{\rho}^3 = 0$, e já eliminamos para facilitar os cálculos, ficando por fim com

$$\begin{aligned}
2\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\rho}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\sigma} &= \frac{1}{c^2}[(f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\lambda}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\lambda}^2)(\delta_0^{\rho} + \delta_3^{\rho})(\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)})(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3)] \\
&= \frac{1}{c^2}[(\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)})(f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\lambda}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\lambda}^2)(\delta_0^{\rho}\delta_{\rho}^0 - \delta_0^{\rho}\delta_{\rho}^3 + \delta_3^{\rho}\delta_{\rho}^0 - \delta_3^{\rho}\delta_{\rho}^3)] \\
&= \frac{1}{c^2}[(\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)})(f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\lambda}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\lambda}^2)(1 - 0 + 0 - 1)].
\end{aligned}$$

Portanto, o primeiro termo é nulo

$$2\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\rho}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\sigma} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Calculemos, agora, o segundo produto do pseudotensor $\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\rho}\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\sigma}$. Os símbolos são dados por

$$\begin{aligned}
\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\rho} &= \frac{1}{c}[(f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\sigma}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\sigma}^2)(\delta_0^{\rho} + \delta_3^{\rho}) \\
&\quad + \frac{f'(u)}{f(u)}(\delta_1^{\rho}\delta_{\kappa}^1(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3) + \delta_1^{\rho}\delta_{\sigma}^1(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)) \\
&\quad + \frac{g'(u)}{g(u)}(\delta_2^{\rho}\delta_{\kappa}^2(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3) + \delta_2^{\rho}\delta_{\sigma}^2(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3))]; \\
\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\sigma} &= \frac{1}{c}[(f(u)f'(u)\delta_{\lambda}^1\delta_{\rho}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\lambda}^2\delta_{\rho}^2)(\delta_0^{\sigma} + \delta_3^{\sigma}) \\
&\quad + \frac{f'(u)}{f(u)}(\delta_1^{\sigma}\delta_{\lambda}^1(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_1^{\sigma}\delta_{\rho}^1(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)) \\
&\quad + \frac{g'(u)}{g(u)}(\delta_2^{\sigma}\delta_{\lambda}^2(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_2^{\sigma}\delta_{\rho}^2(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3))].
\end{aligned}$$

Tomando o produto desses símbolos, teremos então

$$\begin{aligned}
\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\rho}\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\sigma} &= \frac{1}{c^2}[(f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\sigma}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\sigma}^2)(\delta_0^{\rho} + \delta_3^{\rho})\frac{f'(u)}{f(u)}\delta_1^{\sigma}\delta_{\lambda}^1(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) \\
&\quad + (f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\sigma}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\sigma}^2)(\delta_0^{\rho} + \delta_3^{\rho})\frac{g'(u)}{g(u)}\delta_2^{\sigma}\delta_{\lambda}^2(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) \\
&\quad + \frac{f(u)}{f'(u)}\delta_1^{\rho}\delta_{\kappa}^1(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3)(f(u)f'(u)\delta_{\lambda}^1\delta_{\rho}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\lambda}^2\delta_{\rho}^2)(\delta_0^{\sigma} + \delta_3^{\sigma}) \\
&\quad + \frac{f'(u)}{f(u)}\delta_1^{\rho}\delta_{\sigma}^1(\delta_0^{\kappa} - \delta_3^{\kappa})\frac{f'(u)}{f(u)}\delta_1^{\sigma}\delta_{\rho}^1(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3) + (f(u)f'(u)\delta_{\lambda}^1\delta_{\rho}^1 \\
&\quad + g(u)g'(u)\delta_{\lambda}^2\delta_{\rho}^2)(\delta_0^{\sigma} + \delta_3^{\sigma})\frac{g'(u)}{g(u)}\delta_2^{\sigma}\delta_{\kappa}^2(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3) \\
&\quad + \frac{g'(u)}{g(u)}\delta_2^{\rho}\delta_{\sigma}^2(\delta_0^{\kappa} - \delta_3^{\kappa})\frac{g'(u)}{g(u)}\delta_2^{\sigma}\delta_{\rho}^2(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)].
\end{aligned}$$

Considerando as propriedades do delta, temos que os produtos serão

$$\begin{aligned}
(\delta_0^{\rho} + \delta_3^{\rho})(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) &= \delta_0^{\rho}\delta_{\rho}^0 - \delta_0^{\rho}\delta_{\rho}^3 + \delta_3^{\rho}\delta_{\rho}^0 - \delta_3^{\rho}\delta_{\rho}^3 = 1 - 0 + 0 - 1 = 0; \\
&\Rightarrow (\delta_0^{\sigma} + \delta_3^{\sigma})(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\rho}\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\sigma} &= \frac{1}{c^2}\left[\frac{f'(u)}{f(u)}\right]^2(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3) + \frac{1}{c^2}\left[\frac{g'(u)}{g(u)}\right]^2(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3) \\
&= \frac{1}{c^2}\left[\frac{f'(u)^2}{f(u)^2} + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2}\right](\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3).
\end{aligned}$$

O cálculo para o terceiro produto $\mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^{\rho}\mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{\sigma}$ será efetuado de maneira análoga. Agora que conhecemos os símbolos de Christoffel fica fácil notar que

$$\begin{aligned}
\mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^{\rho} &= \frac{1}{c}\left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)}\right](\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3); \\
\mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{\sigma} &= \frac{1}{c}\left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)}\right](\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3).
\end{aligned}$$

O produto então será dado por

$$\begin{aligned}
\mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^{\rho}\mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{\sigma} &= \frac{1}{c^2}\left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)}\right]^2(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3) \\
&= \frac{1}{c^2}\left[\frac{f'(u)^2}{f(u)^2} + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2} + 2\frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}\right](\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3).
\end{aligned}$$

Por fim, juntando os três resultados obtidos para os três primeiros produtos, temos que, o primeiro parênteses do pseudotensor será dado por:

$$\begin{aligned}
(2\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\rho}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\sigma} - \mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\rho}\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\sigma} - \mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^{\rho}\mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{\sigma}) &= 0 - \frac{1}{c^2}\left[\frac{f'(u)^2}{f(u)^2} + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2}\right](\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3) \\
&\quad - \frac{1}{c^2}\left[\frac{f'(u)^2}{f(u)^2} + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2} + 2\frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}\right](\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3).
\end{aligned}$$

Agora, iremos calcular o parênteses com a subtração dos produtos da métrica $(g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda})$, onde já vimos que a métrica é dada por (5.3). Primeiro, vamos calcular isto separadamente, então, temos que o primeiro produto será

$$\begin{aligned} g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda} = & \delta_0^\mu\delta_0^\kappa\delta_0^\nu\delta_0^\lambda - f(u)^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\kappa\delta_1^\nu\delta_1^\lambda - g(u)^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\kappa\delta_2^\nu\delta_2^\lambda - \delta_0^\mu\delta_0^\kappa\delta_3^\nu\delta_3^\lambda - f(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\kappa\delta_0^\nu\delta_0^\lambda \\ & + f(u)^{-4}\delta_1^\mu\delta_1^\kappa\delta_1^\nu\delta_1^\lambda + f(u)^{-2}g(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\kappa\delta_2^\nu\delta_2^\lambda + f(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\kappa\delta_3^\nu\delta_3^\lambda - g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\kappa\delta_0^\nu\delta_0^\lambda \\ & + f(u)^{-2}g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\kappa\delta_1^\nu\delta_1^\lambda + g(u)^{-4}\delta_2^\mu\delta_2^\kappa\delta_2^\nu\delta_2^\lambda + g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\kappa\delta_3^\nu\delta_3^\lambda - \delta_3^\mu\delta_3^\kappa\delta_0^\nu\delta_0^\lambda \\ & + f(u)^{-2}\delta_3^\mu\delta_3^\kappa\delta_1^\nu\delta_1^\lambda + g(u)^{-2}\delta_3^\mu\delta_3^\kappa\delta_2^\nu\delta_2^\lambda + \delta_3^\mu\delta_3^\kappa\delta_3^\nu\delta_3^\lambda. \end{aligned}$$

Consequentemente, o segundo produto tem o mesmo resultado mudando apenas os índices, ficando portanto

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda} = & \delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta_0^\kappa\delta_0^\lambda - f(u)^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta_1^\kappa\delta_1^\lambda - g(u)^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta_2^\kappa\delta_2^\lambda - \delta_0^\mu\delta_0^\nu\delta_3^\kappa\delta_3^\lambda - f(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\nu\delta_0^\kappa\delta_0^\lambda \\ & + f(u)^{-4}\delta_1^\mu\delta_1^\nu\delta_1^\kappa\delta_1^\lambda + f(u)^{-2}g(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\nu\delta_2^\kappa\delta_2^\lambda + f(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\nu\delta_3^\kappa\delta_3^\lambda - g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\nu\delta_0^\kappa\delta_0^\lambda \\ & + f(u)^{-2}g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\nu\delta_1^\kappa\delta_1^\lambda + g(u)^{-4}\delta_2^\mu\delta_2^\nu\delta_2^\kappa\delta_2^\lambda + g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\nu\delta_3^\kappa\delta_3^\lambda - \delta_3^\mu\delta_3^\nu\delta_0^\kappa\delta_0^\lambda \\ & + f(u)^{-2}\delta_3^\mu\delta_3^\nu\delta_1^\kappa\delta_1^\lambda + g(u)^{-2}\delta_3^\mu\delta_3^\nu\delta_2^\kappa\delta_2^\lambda + \delta_3^\mu\delta_3^\nu\delta_3^\kappa\delta_3^\lambda. \end{aligned}$$

Com isto, temos que a subtração, levando em conta os termos iguais, ficará determinada por:

$$\begin{aligned} (g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda}) = & -f(u)^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\kappa\delta_1^\nu\delta_1^\lambda - g(u)^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\kappa\delta_2^\nu\delta_2^\lambda - \delta_0^\mu\delta_0^\kappa\delta_3^\nu\delta_3^\lambda - f(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\kappa\delta_0^\nu\delta_0^\lambda \\ & + f(u)^{-2}g(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\kappa\delta_2^\nu\delta_2^\lambda + f(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\kappa\delta_3^\nu\delta_3^\lambda - g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\kappa\delta_0^\nu\delta_0^\lambda \\ & + f(u)^{-2}g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\kappa\delta_1^\nu\delta_1^\lambda + g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\kappa\delta_3^\nu\delta_3^\lambda - \delta_3^\mu\delta_3^\kappa\delta_0^\nu\delta_0^\lambda + f(u)^{-2}\delta_3^\mu\delta_3^\kappa\delta_1^\nu\delta_1^\lambda \\ & + g(u)^{-2}\delta_3^\mu\delta_3^\kappa\delta_2^\nu\delta_2^\lambda + f(u)^{-2}\delta_0^\mu\delta_1^\kappa\delta_0^\nu\delta_1^\lambda + g(u)^{-2}\delta_0^\mu\delta_2^\kappa\delta_0^\nu\delta_2^\lambda + \delta_0^\mu\delta_3^\kappa\delta_0^\nu\delta_3^\lambda \\ & + f(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_0^\kappa\delta_1^\nu\delta_0^\lambda - f(u)^{-2}g(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_2^\kappa\delta_1^\nu\delta_2^\lambda - f(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_3^\kappa\delta_1^\nu\delta_3^\lambda \\ & + g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_0^\kappa\delta_2^\nu\delta_0^\lambda - f(u)^{-2}g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_1^\kappa\delta_2^\nu\delta_1^\lambda - g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_3^\kappa\delta_2^\nu\delta_3^\lambda \\ & + \delta_3^\mu\delta_0^\kappa\delta_3^\nu\delta_0^\lambda - f(u)^{-2}\delta_3^\mu\delta_1^\kappa\delta_3^\nu\delta_1^\lambda - g(u)^{-2}\delta_3^\mu\delta_2^\kappa\delta_3^\nu\delta_2^\lambda. \end{aligned}$$

Aplicando este resultado no primeiro parênteses do pseudotensor e tendo em vista que apenas os termos com $\delta_0^\kappa, \delta_3^\kappa, \delta_0^\lambda, \delta_3^\lambda$ não anularão, ficamos com o resultado da primeira

linha do pseudotensor (B.1), dado por

$$\begin{aligned}
& (2\overset{\circ}{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\rho}\overset{\circ}{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\sigma} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\rho}\overset{\circ}{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\sigma} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\kappa\rho}^{\rho}\overset{\circ}{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{\sigma})(g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda}) = \\
& = -\frac{2}{c^2}\left[\frac{f'(u)^2}{f(u)^2} + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2} + \frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}\right](\delta_{\kappa}^0\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\kappa}^0\delta_{\lambda}^3 - \delta_{\kappa}^3\delta_{\lambda}^0 + \delta_{\kappa}^3\delta_{\lambda}^3) - \delta_0^{\mu}\delta_0^{\kappa}\delta_3^{\nu}\delta_3^{\lambda} \\
& \quad - \delta_3^{\mu}\delta_3^{\kappa}\delta_0^{\nu}\delta_0^{\lambda} + \delta_0^{\mu}\delta_3^{\kappa}\delta_0^{\nu}\delta_3^{\lambda} + f(u)^{-2}\delta_1^{\mu}\delta_0^{\kappa}\delta_1^{\nu}\delta_0^{\lambda} - f(u)^{-2}\delta_1^{\mu}\delta_3^{\kappa}\delta_1^{\nu}\delta_3^{\lambda} \\
& \quad + g(u)^{-2}\delta_2^{\mu}\delta_0^{\kappa}\delta_2^{\nu}\delta_0^{\lambda} - g(u)^{-2}\delta_2^{\mu}\delta_3^{\kappa}\delta_2^{\nu}\delta_3^{\lambda} + \delta_3^{\mu}\delta_0^{\kappa}\delta_3^{\nu}\delta_0^{\lambda} \\
& = -\frac{2}{c^2}\left[\frac{f'(u)^2}{f(u)^2} + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2} + \frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}\right][f(u)^{-2}\delta_1^{\mu}\delta_1^{\nu} + g(u)^{-2}\delta_2^{\mu}\delta_2^{\nu} \\
& \quad + \delta_3^{\mu}\delta_3^{\nu} + \delta_0^{\mu}\delta_3^{\nu} + \delta_3^{\mu}\delta_0^{\nu} + \delta_0^{\mu}\delta_0^{\nu} - f(u)^{-2}\delta_1^{\mu}\delta_1^{\nu} - g(u)^{-2}\delta_2^{\mu}\delta_2^{\nu}] \\
& = -\frac{2}{c^2}\left[\frac{f'(u)^2}{f(u)^2} + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2} + \frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}\right][\delta_3^{\mu}\delta_3^{\nu} + \delta_0^{\mu}\delta_3^{\nu} + \delta_3^{\mu}\delta_0^{\nu} + \delta_0^{\mu}\delta_0^{\nu}].
\end{aligned}$$

Agora, faremos os cálculos para a segunda linha do pseudotensor (B.1). Começando pelo seu primeiro produto $\overset{\circ}{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\nu}\overset{\circ}{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\sigma}$, onde seus símbolos são

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\nu} &= \frac{1}{c}[(f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\sigma}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\sigma}^2)(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\
& \quad + \frac{f'(u)}{f(u)}(\delta_1^{\nu}\delta_{\kappa}^1(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3) + \delta_1^{\nu}\delta_{\sigma}^1(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)) \\
& \quad + \frac{g'(u)}{g(u)}(\delta_2^{\nu}\delta_{\kappa}^2(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3) + \delta_2^{\nu}\delta_{\sigma}^2(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3))]; \\
\overset{\circ}{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\sigma} &= \frac{1}{c}[(f(u)f'(u)\delta_{\lambda}^1\delta_{\rho}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\lambda}^2\delta_{\rho}^2)(\delta_0^{\sigma} + \delta_3^{\sigma}) \\
& \quad + \frac{f'(u)}{f(u)}(\delta_1^{\sigma}\delta_{\lambda}^1(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_1^{\sigma}\delta_{\rho}^1(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)) \\
& \quad + \frac{g'(u)}{g(u)}(\delta_2^{\sigma}\delta_{\lambda}^2(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_2^{\sigma}\delta_{\rho}^2(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3))].
\end{aligned}$$

O produto então será

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\nu}\overset{\circ}{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\sigma} &= \frac{1}{c^2}[(f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\sigma}^1)(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu})\frac{f'(u)}{f(u)}[\delta_1^{\sigma}\delta_{\lambda}^1(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_1^{\sigma}\delta_{\rho}^1(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)] \\
& \quad + (g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\sigma}^2)(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu})\frac{g'(u)}{g(u)}[\delta_2^{\sigma}\delta_{\lambda}^2(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_2^{\sigma}\delta_{\rho}^2(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)] \\
& \quad + \frac{f'(u)}{f(u)}\delta_1^{\nu}\delta_{\kappa}^1(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3)(f(u)f'(u)\delta_{\lambda}^1\delta_{\rho}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\lambda}^2\delta_{\rho}^2)(\delta_0^{\sigma} + \delta_3^{\sigma}) \\
& \quad + \frac{f'(u)}{f(u)}[\delta_1^{\nu}\delta_{\sigma}^1(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)]\frac{f'(u)}{f(u)}(\delta_1^{\sigma}\delta_{\lambda}^1(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_1^{\sigma}\delta_{\rho}^1(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)) \\
& \quad + \frac{g'(u)}{g(u)}\delta_2^{\nu}\delta_{\kappa}^2(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3)(f(u)f'(u)\delta_{\lambda}^1\delta_{\rho}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\lambda}^2\delta_{\rho}^2)(\delta_0^{\sigma} + \delta_3^{\sigma}) \\
& \quad + \frac{g'(u)}{g(u)}\delta_2^{\nu}\delta_{\sigma}^2(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)\frac{g'(u)}{g(u)}(\delta_2^{\sigma}\delta_{\lambda}^2(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_2^{\sigma}\delta_{\rho}^2(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3))].
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\sigma} = & \frac{1}{c^2}[f'(u)^2[\delta_{\kappa}^1\delta_{\lambda}^1(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_{\kappa}^1\delta_{\rho}^1(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)](\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\ & + g'(u)^2[\delta_{\kappa}^2\delta_{\lambda}^2(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_{\kappa}^2\delta_{\rho}^2(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)](\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\ & + \frac{f'(u)^2}{f(u)^2}[\delta_1^{\nu}\delta_{\lambda}^1(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_1^{\nu}\delta_{\rho}^1(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)](\delta_{\kappa}^0 + \delta_{\kappa}^3) \\ & + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2}[\delta_2^{\nu}\delta_{\lambda}^2(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_2^{\nu}\delta_{\rho}^2(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)](\delta_{\kappa}^0 + \delta_{\kappa}^3)].\end{aligned}$$

Calcularemos, agora, o segundo produto $\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\sigma}$, onde seus termos são

$$\begin{aligned}\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\nu} = & \frac{1}{c}[(f(u)f'(u)\delta_{\lambda}^1\delta_{\rho}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\lambda}^2\delta_{\rho}^2)(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\ & + \frac{f'(u)}{f(u)}(\delta_1^{\nu}\delta_{\lambda}^1(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_1^{\nu}\delta_{\rho}^1(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)) \\ & + \frac{g'(u)}{g(u)}(\delta_2^{\nu}\delta_{\lambda}^2(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_2^{\nu}\delta_{\rho}^2(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3))];\end{aligned}$$

e

$$\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\sigma} = \frac{1}{c}\left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)}\right](\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3).$$

Logo, o produto será

$$\begin{aligned}\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\sigma} = & \frac{1}{c^2}\left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)}\right][(f(u)f'(u)\delta_{\lambda}^1\delta_{\rho}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\lambda}^2\delta_{\rho}^2)(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\ & + \frac{f'(u)}{f(u)}(\delta_1^{\nu}\delta_{\lambda}^1(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_1^{\nu}\delta_{\rho}^1(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)) \\ & + \frac{g'(u)}{g(u)}(\delta_2^{\nu}\delta_{\lambda}^2(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_2^{\nu}\delta_{\rho}^2(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3))](\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3).\end{aligned}$$

O terceiro produto ficará igual ao primeiro, basta apenas trocar os índices $\kappa \rightarrow \rho, \lambda \rightarrow \kappa$ e $\rho \rightarrow \lambda$. Portanto, ficamos com

$$\begin{aligned}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\sigma} = & \frac{1}{c^2}[f'(u)^2[\delta_{\rho}^1\delta_{\kappa}^1(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3) + \delta_{\rho}^1\delta_{\lambda}^1(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)](\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\ & + g'(u)^2[\delta_{\rho}^2\delta_{\kappa}^2(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3) + \delta_{\rho}^2\delta_{\lambda}^2(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)](\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\ & + \frac{f'(u)^2}{f(u)^2}[\delta_1^{\nu}\delta_{\kappa}^1(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3) + \delta_1^{\nu}\delta_{\lambda}^1(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)](\delta_{\rho}^0 + \delta_{\rho}^3) \\ & + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2}[\delta_2^{\nu}\delta_{\kappa}^2(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3) + \delta_2^{\nu}\delta_{\lambda}^2(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)](\delta_{\rho}^0 + \delta_{\rho}^3)].\end{aligned}$$

Por fim, o quarto produto $\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\sigma}$ é idêntico ao segundo, trocando apenas $\lambda \rightarrow$

$\kappa, \rho \rightarrow \lambda$ e $\kappa \rightarrow \rho$. Ficamos então com

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\nu \dot{\Gamma}_{\rho\sigma}^\sigma &= \frac{1}{c^2} \left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)} \right] [(f(u)f'(u)\delta_\kappa^1\delta_\lambda^1 + g(u)g'(u)\delta_\kappa^2\delta_\lambda^2)(\delta_0^\nu + \delta_3^\nu) \\ &\quad + \frac{f'(u)}{f(u)}(\delta_1^\nu\delta_\kappa^1(\delta_\lambda^0 - \delta_\lambda^3) + \delta_1^\nu\delta_\lambda^1(\delta_\kappa^0 - \delta_\kappa^3)) \\ &\quad + \frac{g'(u)}{g(u)}(\delta_2^\nu\delta_\kappa^2(\delta_\lambda^0 - \delta_\lambda^3) + \delta_2^\nu\delta_\lambda^2(\delta_\kappa^0 - \delta_\kappa^3))](\delta_\rho^0 - \delta_\rho^3).\end{aligned}$$

Agora, vamos calcular $g^{\mu\kappa}g^{\lambda\rho}$ e aplicá-lo no parênteses da segunda linha de (B.1), para isso vamos usar o valor de (A.1). Portanto,

$$\begin{aligned}g^{\mu\kappa}g^{\lambda\rho} &= \delta_0^\mu\delta_0^\kappa\delta^\lambda\delta_0^\rho - f(u)^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\kappa\delta_1^\lambda\delta_1^\rho - g(u)^{-2}\delta_0^\mu\delta_0^\kappa\delta_2^\lambda\delta_2^\rho - \delta_0^\mu\delta_0^\kappa\delta_3^\lambda\delta_3^\rho - f(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\kappa\delta_0^\lambda\delta_0^\rho \\ &\quad + f(u)^{-4}\delta_1^\mu\delta_1^\kappa\delta_1^\lambda\delta_1^\rho + f(u)^{-2}g(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\kappa\delta_2^\lambda\delta_2^\rho + f(u)^{-2}\delta_1^\mu\delta_1^\kappa\delta_3^\lambda\delta_3^\rho - g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\kappa\delta_0^\lambda\delta_0^\rho \\ &\quad + f(u)^{-2}g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\kappa\delta_1^\lambda\delta_1^\rho + g(u)^{-4}\delta_2^\mu\delta_2^\kappa\delta_2^\lambda\delta_2^\rho + g(u)^{-2}\delta_2^\mu\delta_2^\kappa\delta_3^\lambda\delta_3^\rho - \delta_3^\mu\delta_3^\kappa\delta_0^\lambda\delta_0^\rho \\ &\quad + f(u)^{-2}\delta_3^\mu\delta_3^\kappa\delta_1^\lambda\delta_1^\rho + g(u)^{-2}\delta_3^\mu\delta_3^\kappa\delta_2^\lambda\delta_2^\rho + \delta_3^\mu\delta_3^\kappa\delta_3^\lambda\delta_3^\rho.\end{aligned}$$

Vamos agora resolver a segunda linha separadamente e juntar os resultados. A segunda linha é dada como

$$g^{\mu\kappa}g^{\lambda\rho}(\dot{\Gamma}_{\kappa\sigma}^\nu \dot{\Gamma}_{\lambda\rho}^\sigma + \dot{\Gamma}_{\lambda\rho}^\nu \dot{\Gamma}_{\kappa\sigma}^\sigma - \dot{\Gamma}_{\rho\sigma}^\nu \dot{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\sigma - \dot{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\nu \dot{\Gamma}_{\rho\sigma}^\sigma).$$

Aplicando o valor de $g^{\mu\kappa}g^{\lambda\rho}$ em cada produto presente no parênteses ficaremos com

$$g^{\mu\kappa}g^{\lambda\rho}\dot{\Gamma}_{\kappa\sigma}^\nu \dot{\Gamma}_{\lambda\rho}^\sigma = 0;$$

$$\begin{aligned}g^{\mu\kappa}g^{\lambda\rho}\dot{\Gamma}_{\lambda\rho}^\nu \dot{\Gamma}_{\kappa\sigma}^\sigma &= \frac{1}{c^2} \left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)} \right] \left[-\frac{f'(u)}{f(u)}\delta_0^\mu(\delta_0^\nu + \delta_3^\nu) \right. \\ &\quad \left. - \frac{g'(u)}{g(u)}\delta_0^\mu(\delta_0^\nu + \delta_3^\nu) - \frac{f'(u)}{f(u)}\delta_3^\mu(\delta_0^\nu + \delta_3^\nu) - \frac{g'(u)}{g(u)}\delta_3^\mu(\delta_0^\nu + \delta_3^\nu) \right] \\ &= -\frac{1}{c^2} \left[\frac{f'(u)}{f(u)} + \frac{g'(u)}{g(u)} \right]^2 (\delta_0^\mu + \delta_3^\mu)(\delta_0^\nu + \delta_3^\nu);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g^{\mu\kappa}g^{\lambda\rho}\dot{\Gamma}_{\rho\sigma}^\nu \dot{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\sigma &= \frac{1}{c^2} \left[-\frac{f'(u)^2}{f(u)^2}\delta_0^\mu(\delta_0^\nu + \delta_3^\nu) - \frac{g'(u)^2}{g(u)^2}\delta_0^\mu(\delta_0^\nu + \delta_3^\nu) - f(u)^{-2}\frac{f'(u)^2}{f(u)^2}\delta_1^\mu\delta_1^\nu \right. \\ &\quad \left. + f(u)^{-2}\frac{f'(u)^2}{f(u)^2}\delta_1^\mu\delta_1^\nu - g(u)^{-2}\frac{g'(u)^2}{g(u)^2}\delta_2^\mu\delta_2^\nu + g(u)^{-2}\frac{g'(u)^2}{g(u)^2}\delta_2^\mu\delta_2^\nu \right. \\ &\quad \left. - \frac{f'(u)^2}{f(u)^2}\delta_3^\mu(\delta_0^\nu + \delta_3^\nu) - \frac{g'(u)^2}{g(u)^2}\delta_3^\mu(\delta_0^\nu + \delta_3^\nu) \right] \\ &= -\frac{1}{c^2} \left[\frac{f'(u)^2}{f(u)^2} + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2} \right] (\delta_0^\mu + \delta_3^\mu)(\delta_0^\nu + \delta_3^\nu);\end{aligned}$$

$$g^{\mu\kappa}g^{\lambda\rho}\dot{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\nu \dot{\Gamma}_{\rho\sigma}^\sigma = 0.$$

Por fim, juntando os resultados, obtemos

$$\begin{aligned}
g^{\mu\kappa}g^{\lambda\rho}(\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\sigma} + \mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\sigma} - \mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\sigma} - \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\sigma}) = \\
-\frac{1}{c^2}\left[\frac{f'(u)^2}{f(u)^2} + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2} + 2\frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}\right](\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\
+\frac{1}{c^2}\left[\frac{f'(u)^2}{f(u)^2} + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2}\right](\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\
= -\frac{2}{c^2}\frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}),
\end{aligned}$$

isto é, o valor da segunda linha do pseudotensor será

$$g^{\mu\kappa}g^{\lambda\rho}(\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\sigma} + \mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\sigma} - \mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\sigma} - \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\nu}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\sigma}) = -\frac{2}{c^2}\frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}).$$

Dando uma olhada nos produtos presentes na terceira linha vemos que os produtos são iguais aos da segunda linha, mudando apenas o índice ν por μ . Portanto, temos

$$g^{\nu\kappa}g^{\lambda\rho}(\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\sigma} + \mathring{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\kappa\sigma}^{\sigma} - \mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\sigma} - \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\sigma}) = -\frac{2}{c^2}\frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu})(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu}).$$

Já a quarta linha é dada por

$$g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma}(\mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{\nu} - \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\nu}).$$

Vamos resolvê-la em partes, começando pelo produto de $\mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{\nu}$, onde suas componentes são

$$\begin{aligned}
\mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^{\mu} = & \frac{1}{c}[(f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\rho}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\rho}^2)(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu}) \\
& + \frac{f'(u)}{f(u)}(\delta_1^{\mu}\delta_{\kappa}^1(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_1^{\mu}\delta_{\rho}^1(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3)) \\
& + \frac{g'(u)}{g(u)}(\delta_2^{\mu}\delta_{\kappa}^2(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_2^{\mu}\delta_{\rho}^2(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3))]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{\nu} = & \frac{1}{c}[(f(u)f'(u)\delta_{\lambda}^1\delta_{\sigma}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\lambda}^2\delta_{\sigma}^2)(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\
& + \frac{f'(u)}{f(u)}(\delta_1^{\nu}\delta_{\lambda}^1(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3) + \delta_1^{\nu}\delta_{\sigma}^1(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)) \\
& + \frac{g'(u)}{g(u)}(\delta_2^{\nu}\delta_{\lambda}^2(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3) + \delta_2^{\nu}\delta_{\sigma}^2(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3))].
\end{aligned}$$

O produto desses termos é então

$$\begin{aligned}
\mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{\nu} = & \frac{1}{c^2}[(f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\rho}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\rho}^2)(f(u)f'(u)\delta_{\lambda}^1\delta_{\sigma}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\lambda}^2\delta_{\sigma}^2)(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\
& + (f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\rho}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\rho}^2)\frac{f'(u)}{f(u)}(\delta_1^{\nu}\delta_{\lambda}^1(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3) + \delta_1^{\nu}\delta_{\sigma}^1(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3))(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu}) \\
& + (f(u)f'(u)\delta_{\kappa}^1\delta_{\rho}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\kappa}^2\delta_{\rho}^2)\frac{g'(u)}{g(u)}(\delta_2^{\nu}\delta_{\lambda}^2(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3) + \delta_2^{\nu}\delta_{\sigma}^2(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3))(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu}) \\
& + \frac{f'(u)}{f(u)}(\delta_1^{\mu}\delta_{\kappa}^1(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_1^{\mu}\delta_{\rho}^1(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3))(f(u)f'(u)\delta_{\lambda}^1\delta_{\sigma}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\lambda}^2\delta_{\sigma}^2)(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\
& + [\frac{f'(u)}{f(u)}]^2(\delta_1^{\mu}\delta_{\kappa}^1(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_1^{\mu}\delta_{\rho}^1(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3))(\delta_1^{\nu}\delta_{\lambda}^1(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3) + \delta_1^{\nu}\delta_{\sigma}^1(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)) \\
& + [\frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}](\delta_1^{\mu}\delta_{\kappa}^1(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_1^{\mu}\delta_{\rho}^1(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3))(\delta_2^{\nu}\delta_{\lambda}^2(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3) + \delta_2^{\nu}\delta_{\sigma}^2(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)) \\
& + \frac{g'(u)}{g(u)}(\delta_2^{\mu}\delta_{\kappa}^2(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_2^{\mu}\delta_{\rho}^2(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3))(f(u)f'(u)\delta_{\lambda}^1\delta_{\sigma}^1 + g(u)g'(u)\delta_{\lambda}^2\delta_{\sigma}^2)(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\
& + [\frac{g'(u)f'(u)}{g(u)f(u)}](\delta_2^{\mu}\delta_{\kappa}^2(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_2^{\mu}\delta_{\rho}^2(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3))(\delta_1^{\nu}\delta_{\lambda}^1(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3) + \delta_1^{\nu}\delta_{\sigma}^1(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)) \\
& + [\frac{g'(u)}{g(u)}]^2(\delta_2^{\mu}\delta_{\kappa}^2(\delta_{\rho}^0 - \delta_{\rho}^3) + \delta_2^{\mu}\delta_{\rho}^2(\delta_{\kappa}^0 - \delta_{\kappa}^3))(\delta_2^{\nu}\delta_{\lambda}^2(\delta_{\sigma}^0 - \delta_{\sigma}^3) + \delta_2^{\nu}\delta_{\sigma}^2(\delta_{\lambda}^0 - \delta_{\lambda}^3)).
\end{aligned}$$

O segundo produto $\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\nu}$ é idêntico ao primeiro, mudando apenas os índices $\rho \rightarrow \lambda$. Com isso, fazendo uso mais uma vez de (A.1), temos que $g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma}$ ficará determinado por

$$\begin{aligned}
g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma} = & \delta_0^{\kappa}\delta_0^{\lambda}\delta_0^{\rho}\delta_0^{\sigma} - f(u)^{-2}\delta_0^{\kappa}\delta_0^{\lambda}\delta_1^{\rho}\delta_1^{\sigma} - g(u)^{-2}\delta_0^{\kappa}\delta_0^{\lambda}\delta_2^{\rho}\delta_2^{\sigma} - \delta_0^{\kappa}\delta_0^{\lambda}\delta_3^{\rho}\delta_3^{\sigma} - f(u)^{-2}\delta_1^{\kappa}\delta_1^{\lambda}\delta_0^{\rho}\delta_0^{\sigma} \\
& + f(u)^{-4}\delta_1^{\kappa}\delta_1^{\lambda}\delta_1^{\rho}\delta_1^{\sigma} + f(u)^{-2}g(u)^{-2}\delta_1^{\kappa}\delta_1^{\lambda}\delta_2^{\rho}\delta_2^{\sigma} + f(u)^{-2}\delta_1^{\kappa}\delta_1^{\lambda}\delta_3^{\rho}\delta_3^{\sigma} - g(u)^{-2}\delta_2^{\kappa}\delta_2^{\lambda}\delta_0^{\rho}\delta_0^{\sigma} \\
& + f(u)^{-2}g(u)^{-2}\delta_2^{\kappa}\delta_2^{\lambda}\delta_1^{\rho}\delta_1^{\sigma} + g(u)^{-4}\delta_2^{\kappa}\delta_2^{\lambda}\delta_2^{\rho}\delta_2^{\sigma} + g(u)^{-2}\delta_2^{\kappa}\delta_2^{\lambda}\delta_3^{\rho}\delta_3^{\sigma} - \delta_3^{\kappa}\delta_3^{\lambda}\delta_0^{\rho}\delta_0^{\sigma} \\
& + f(u)^{-2}\delta_3^{\kappa}\delta_3^{\lambda}\delta_1^{\rho}\delta_1^{\sigma} + g(u)^{-2}\delta_3^{\kappa}\delta_3^{\lambda}\delta_2^{\rho}\delta_2^{\sigma} + \delta_3^{\kappa}\delta_3^{\lambda}\delta_3^{\rho}\delta_3^{\sigma}.
\end{aligned}$$

Aplicando esse resultado no primeiro termo, teremos que

$$\begin{aligned}
g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma}\mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{\nu} = & \frac{1}{c^2}[-[\frac{f'(u)}{f(u)}]^2f(u)^{-2}\delta_1^{\mu}\delta_1^{\nu} + f(u)^{-4}[f'(u)f(u)]^2(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\
& - g(u)^{-2}\frac{g'(u)}{g(u)}]^2\delta_2^{\mu}\delta_2^{\nu} - f(u)^{-2}[\frac{f'(u)}{f(u)}]^2\delta_1^{\mu}\delta_1^{\nu} + [\frac{f'(u)}{f(u)}]^2f(u)^{-2}\delta_1^{\mu}\delta_1^{\nu} \\
& - [\frac{g'(u)}{g(u)}]^2g(u)^{-2}\delta_2^{\mu}\delta_2^{\nu} + g(u)^{-4}[g'(u)g(u)]^2(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\
& + [\frac{g'(u)}{g(u)}]^2g(u)^{-2}\delta_2^{\mu}\delta_2^{\nu} + f(u)^{-2}[\frac{f'(u)}{f(u)}]^2\delta_1^{\mu}\delta_1^{\nu} + g(u)^{-2}\frac{g'(u)}{g(u)}]^2\delta_2^{\mu}\delta_2^{\nu}],
\end{aligned}$$

resultando em

$$g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma}\mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{\nu} = \frac{1}{c^2}([\frac{f'(u)}{f(u)}]^2 + [\frac{g'(u)}{g(u)}]^2)(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}).$$

Aplicando agora no segundo termo

$$\begin{aligned}
g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma}\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\nu} &= \frac{1}{c^2}[(f(u)f'(u))^2f(u)^{-4}(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\
&\quad + (f(u)f'(u))(g(u)g'(u))f(u)^{-2}g(u)^{-2}(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\
&\quad + f(u)^{-2}g(u)^{-2}(g(u)g'(u))(f(u)f'(u))(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\
&\quad + (g(u)g'(u))^2g(u)^{-4}(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu})]
\end{aligned}$$

resultando em

$$g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma}\mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\nu} = \frac{1}{c^2}[(\frac{f'(u)}{f(u)})^2 + 2\frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)} + (\frac{g'(u)}{g(u)})^2](\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}).$$

Portanto, a quarta linha fica determinada como

$$\begin{aligned}
g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma}(\mathring{\Gamma}_{\kappa\rho}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\lambda\sigma}^{\nu} - \mathring{\Gamma}_{\kappa\lambda}^{\mu}\mathring{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\nu}) &= \frac{1}{c^2}[(\frac{f'(u)}{f(u)})^2 + (\frac{g'(u)}{g(u)})^2](\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\
&\quad - [(\frac{f'(u)}{f(u)})^2 + 2\frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)} + (\frac{g'(u)}{g(u)})^2](\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu})] \\
&= -\frac{2}{c^2}\frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}).
\end{aligned}$$

Por fim, juntando os resultados de todas as linhas, encontramos que, o resultado do pseudotensor será

$$\begin{aligned}
t_{LL}^{\mu\nu} &= \frac{2k}{c^2}[-(\frac{f'(u)^2}{f(u)^2} + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2} + \frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)})(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\
&\quad - \frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) - \frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}) \\
&\quad - \frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)}(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu})]
\end{aligned}$$

E, portanto, o pseudotensor para pp-waves é

$$t_{LL}^{\mu\nu} = -\frac{2k}{c^2}(\frac{f'(u)^2}{f(u)^2} + \frac{g'(u)^2}{g(u)^2} + 4\frac{f'(u)g'(u)}{f(u)g(u)})(\delta_0^{\mu} + \delta_3^{\mu})(\delta_0^{\nu} + \delta_3^{\nu}). \quad (\text{B.4})$$

Referências

- [1] D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's relativity*. New york: Oxford University Press Inc, 1992. Citado 9 vezes nas páginas 11, 13, 14, 15, 19, 21, 23, 43 e 49.
- [2] BAMBI, C. *Introduction to General Relativity: A Course for Undergraduate Students of Physics*. [S.l.]: Springer, 2018. Citado 10 vezes nas páginas 11, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 24 e 31.
- [3] EINSTEIN, A. Zur Allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1915, p. 778–786, 1915. Citado na página 11.
- [4] LANDAU, L. D.; LIFSCHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields*. 4. ed. Oxford: Pergamon Press, 1975. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 27.
- [5] ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. Republication of: The dynamics of general relativity. *Gen. Relativ. Gravit.*, Springer, v. 40, p. 1997–2027, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 11, 25 e 26.
- [6] PAPAPETROU, A. Einstein's theory of gravitation and flat space. *Proc. R. Irish Acad. (Sect. A)*, Royal Irish Academy, v. 52, p. 11–23, 1948. ISSN 00358975. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/20488488>>. Citado na página 11.
- [7] BERGMANN, P. G.; THOMSON, R. Spin and angular momentum in general relativity. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 89, p. 400–407, Jan 1953. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.89.400>>. Citado na página 11.
- [8] Møller, C. Further remarks on the localization of the energy in the general theory of relativity. *Annals of Physics*, v. 12, n. 1, p. 118 – 133, 1961. ISSN 0003-4916. Citado na página 11.
- [9] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley and Sons, 1972. ISBN 0-471-92567-5. Citado na página 11.
- [10] ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. *Teleparallel Gravity: An Introduction*. [S.l.]: Springer, London, 2012. ISBN 9789400751422. Citado na página 11.
- [11] MALUF, J. W. The teleparallel equivalent of general relativity. *Ann. Phys. (Berlin)*, v. 525, n. 5, p. 339–357, 2013. ISSN 1521-3889. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 41.
- [12] BROWN, J. D.; YORK, J. W. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 47, p. 1407–1419, Feb 1993. Citado na página 11.

- [13] CHANG, C.-C.; NESTER, J. M.; CHEN, C.-M. Pseudotensors and quasilocal energy-momentum. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 83, p. 1897–1901, Sep 1999. Citado na página 11.
- [14] ÖZKURT, AYGÜN, S. Energy distributions of bianchi type-vi h universe in general relativity and teleparallel gravity. *Pramana*, Springer, v. 88, p. 1–9, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 11, 30 e 31.
- [15] LUCIANO, C.; E., R. G. Is teleparallel gravity really equivalent to general relativity? *Ann. Phys. (Berlin)*, v. 530, n. 1, p. 1700175, 2018. Citado na página 11.
- [16] NESTER, J. M. Positive energy via the teleparallel hamiltonian. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 4, p. 1755, 1989. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217751X89000704>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 36.
- [17] OBUKHOV, Y. N.; PEREIRA, J.; RUBILAR, G. F. On the energy transported by exact plane gravitational-wave solutions. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 26, n. 21, p. 215014, 2009. Citado na página 11.
- [18] EMTSOVA, E. D. et al. On conserved quantities for the schwarzschild black hole in teleparallel gravity. *Eur. Phys. J. C*, Springer, v. 81, p. 743, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09505-x>>. Citado na página 11.
- [19] ULHOA, S. C.; CARNEIRO, F. L.; MALUF, J. W. On the thermodynamics of pp-waves. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 37, n. 32, p. 2250219, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217732322502194>>. Citado na página 11.
- [20] FORMIGA, J. B.; GONÇALVES, V. R. Generalization of the ADM gravitational energy momentum. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 106, p. 044021, Aug 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.106.044021>>. Citado 5 vezes nas páginas 11, 37, 47, 53 e 55.
- [21] FORMIGA, J. B. The energy-momentum tensor of gravitational waves, Wyman spacetime, and freely falling observers. *Ann. Phys. (Berlin)*, v. 530, n. 12, p. 1800320, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 47.
- [22] SAUER, T. Field equations in teleparallel space-time: Einstein's fernparallelismus approach toward unified field theory. *Historia Mathematica*, v. 33, n. 4, p. 399, 2006. ISSN 0315-0860. Special Issue on Geometry and its Uses in Physics, 1900-1930. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086005001060>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 35.
- [23] ELLIS, G. F. Republication of: Relativistic cosmology. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 41, p. 581–660, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 41.

- [24] ECKART, C. The thermodynamics of irreversible processes. iii. relativistic theory of the simple fluid. *Physical review*, APS, v. 58, n. 10, p. 919, 1940. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 41.
- [25] SAATHOFF, G. et al. Improved test of time dilation in special relativity. *Physical review letters*, APS, v. 91, n. 19, p. 190403, 2003. Citado na página 14.
- [26] RINDLER, W. Length contraction paradox. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 29, n. 6, p. 365–366, 1961. Citado na página 14.
- [27] EINSTEIN, A. Elementary derivation of the equivalence of mass and energy. *Bulletin of the American mathematical society*, v. 41, n. 4, p. 223–230, 1935. Citado na página 14.
- [28] NORTON, J. D. General covariance and the foundations of general relativity: eight decades of dispute. *Reports on progress in physics*, IOP Publishing, v. 56, n. 7, p. 791, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 48.
- [29] NORTON, J. What was Einstein’s principle of equivalence? *Stud. Hist. Phil. Sci.*, v. 16, n. 3, p. 203–246, 1985. ISSN 0039-3681. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0039368185900020>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.
- [30] SYNGE, J. L. *Relativity: the general theory*. Amsterdam: North-Holland, 1965. Citado na página 21.
- [31] CASOLA, E. D.; LIBERATI, S.; SONEGO, S. Nonequivalence of equivalence principles. *Am. J. Phys.*, v. 83, n. 1, p. 39–46, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.4895342>>. Citado 3 vezes nas páginas 21, 39 e 40.
- [32] WILL, C. M. The Confrontation between general relativity and experiment. *Living Rev. Relativ.*, v. 17, p. 4, 2014. Citado na página 21.
- [33] ATKINS, J. Solving the geodesic equation. *University of Rochester, Department of Physics and Astronomy*, 2018. Citado na página 22.
- [34] CARMO, M. P. do. *Geometria riemanniana*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008. Citado na página 22.
- [35] MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. New York: W.H. Freeman and Company, 1973. Citado 4 vezes nas páginas 22, 24, 39 e 50.
- [36] NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. 2nd. ed. Bristol: IOP Publishing Ltd, 2003. Citado na página 33.

- [37] GOENNER, H. F. On the history of unified field theories. *Living reviews in relativity*, Springer, v. 7, n. 1, p. 1–153, 2004. Citado na página [34](#).
- [38] MØLLER, C. Conservation laws and absolute parallelism in general relativity. *Nordita Publ.*, v. 64, p. 50, 1961. Citado na página [35](#).
- [39] CHO, Y. Einstein lagrangian as the translational yang-mills lagrangian. *Physical Review D*, APS, v. 14, n. 10, p. 2521, 1976. Citado na página [36](#).
- [40] CHO, Y. Gauge theory of poincaré symmetry. *Physical Review D*, APS, v. 14, n. 12, p. 3335, 1976. Citado na página [36](#).
- [41] HAYASHI, K. The gauge theory of the translation group and underlying geometry. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 69, n. 4, p. 441–444, 1977. Citado na página [36](#).
- [42] MALUF, J. W. Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 35, n. 1, p. 335–343, 1994. Citado na página [36](#).
- [43] MALUF, J.; ROCHA-NETO, J. da. General relativity on a null surface: Hamiltonian formulation in the teleparallel geometry. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 31, n. 2, p. 173–185, 1999. Citado na página [36](#).
- [44] MALUF, J. W.; ROCHA-NETO, J. da. Hamiltonian formulation of general relativity in the teleparallel geometry. *Physical Review D*, APS, v. 64, n. 8, p. 084014, 2001. Citado na página [36](#).
- [45] MALUF, J. et al. Energy and angular momentum of the gravitational field in the teleparallel geometry. *Physical Review D*, APS, v. 65, n. 12, p. 124001, 2002. Citado 2 vezes nas páginas [36](#) e [37](#).
- [46] NETO, J. da R.; MALUF, J.; ULHOA, S. Hamiltonian formulation of unimodular gravity in the teleparallel geometry. *Physical Review D*, APS, v. 82, n. 12, p. 124035, 2010. Citado na página [36](#).
- [47] GONÇALVES, V.; FORMIGA, J. The black hole energy and the energy of the other universe. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 136, n. 10, p. 1063, 2021. Citado 2 vezes nas páginas [36](#) e [38](#).
- [48] OHANIAN, H. C. What is the principle of equivalence? *Am. J. Phys.*, v. 45, n. 10, p. 903–909, 1977. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.10744>>. Citado na página [39](#).
- [49] ANDERSON, J. L.; GAUTREAU, R. Operational formulation of the principle of equivalence. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 185, p. 1656–1661, Sep 1969.

Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.185.1656>>. Citado na página 39.

- [50] FORMIGA, J. B. On the teleparallel frame problem. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 37, n. 33n34, p. 2250222, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 52.
- [51] HAYASHI, K.; SHIRAFUJI, T. New general relativity. *Physical Review D*, APS, v. 19, n. 12, p. 3524, 1979. Citado na página 40.
- [52] HEHL, F. W. et al. Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance. *Physics Reports*, Elsevier, v. 258, n. 1-2, p. 1–171, 1995. Citado na página 40.
- [53] BAHAMONDE, S.; BÖHMER, C. G.; WRIGHT, M. Modified teleparallel theories of gravity. *Physical review D*, APS, v. 92, n. 10, p. 104042, 2015. Citado na página 40.
- [54] JIMÉNEZ, J. B.; HEISENBERG, L.; KOIVISTO, T. Coincident general relativity. *Physical Review D*, APS, v. 98, n. 4, p. 044048, 2018. Citado na página 40.
- [55] BENGOCHEA, G. R.; FERRARO, R. Dark torsion as the cosmic speed-up. *Physical Review D*, APS, v. 79, n. 12, p. 124019, 2009. Citado na página 41.
- [56] CARDONE, V. F.; RADICELLA, N.; CAMERA, S. Accelerating $f(t)$ gravity models constrained by recent cosmological data. *Physical Review D*, APS, v. 85, n. 12, p. 124007, 2012. Citado na página 41.
- [57] CAI, Y.-F. et al. $f(t)$ teleparallel gravity and cosmology. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 79, n. 10, p. 106901, 2016. Citado na página 41.
- [58] FERRARO, R.; FIORINI, F. Modified teleparallel gravity: Inflation without an inflaton. *Physical Review D*, APS, v. 75, n. 8, p. 084031, 2007. Citado na página 41.
- [59] HAMMAD, F. et al. Noether charge and black hole entropy in teleparallel gravity. *Physical Review D*, APS, v. 100, n. 12, p. 124040, 2019. Citado na página 41.