

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**ATIVIDADES COM RECURSOS MANIPULATIVOS PARA O
ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

NAYANNE PRISCILA SILVESTRE DE MELO

João Pessoa – Paraíba

Outubro de 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**ATIVIDADES COM RECURSOS MANIPULATIVOS PARA O
ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

NAYANNE PRISCILA SILVESTRE DE MELO

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Coordenação do curso
de Licenciatura em Matemática da
Universidade Federal da Paraíba como
requisito parcial para obtenção do título
de licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra Rogéria
Gaudencio do Rêgo

João Pessoa – Paraíba

Outubro de 2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M528a Melo, Nyanne Priscila Silvestre de.

Atividades com recursos manipulativos para o ensino de geometria espacial na educação básica / Nyanne Priscila Silvestre de Melo. - João Pessoa, 2023.
60 p. : il.

Orientação: Rogéria Gaudencio do Rêgo.

TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Recursos manipulativos. 2. Geometria espacial. 3. Sólidos geométricos. 4. BNCC. I. Rêgo, Rogéria Gaudencio do. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

NAYANNE PRISCILA SILVESTRE DE MELO

**ATIVIDADES COM RECURSOS MANIPULATIVOS PARA O ENSINO
DE GEOMETRIA ESPACIAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra Rogéria Gaudencio do Rêgo

Aprovado(a) em: 24 / 10 / 2023.

BANCA EXAMINADORA

Rogéria Gaudencio do Rêgo

Profa. Dra Rogéria Gaudencio do Rêgo - UFPB
(Orientadora)

Adriano Alves de Medeiros

Prof. Dr Adriano Alves de Medeiros - UFPB
(Avaliador)

Vinicius Martins Varella

Prof. Dr Vinicius Martins Varella - UFPB
(Avaliador)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais Marilene e Alcides que me apoiaram e investiram o máximo na minha educação. Em especial, à minha mãe, meu alicerce, por todo incentivo nessa jornada e por sempre estar ao meu lado, e ao meu irmão Nicollas.

À minha amiga Gislaine que a graduação me presenteou e sempre esteve comigo me apoiando, incentivando e compartilhando todos os momentos de alegria e dificuldade.

À minha amiga Maria Vitória que a escola me presenteou e sempre esteve comigo, compartilhando momentos importantes de evolução e alegria durante a jornada escolar e acadêmica.

Aos meus amigos e colegas de curso que caminharam ao meu lado desde o início desta trajetória acadêmica me ajudando quando preciso.

A todos os professores que contribuíram para meu crescimento escolar e acadêmico.

À minha orientadora Rogéria Gaudencio e aos membros da banca Vinícius Varella e Adriano Medeiros, que tanto admiro profissionalmente, pelas oportunidades e experiências enriquecedoras construídas durante os Projetos PROBEX e PIBIC que permitiram minha evolução pessoal e acadêmica e transformou minha visão sobre a educação matemática.

RESUMO

O presente trabalho tem como tema central propor recursos manipulativos para o ensino de sólidos geométricos em Geometria Espacial, com o uso de materiais de baixo custo. Nosso Objetivo geral, portanto, foi apresentar e discutir atividades que utilizam materiais concretos no contexto de Geometria Espacial. Para alcançar esse Objetivo, tivemos como Objetivos específicos: Identificar propostas de ensino de Matemática que fazem uso de recursos didáticos manipulativos, voltadas para a Educação Básica; e selecionar as propostas baseadas em Geometria Espacial utilizando materiais concretos e relacionar essas propostas a Objetos de aprendizagem e Habilidades matemáticas apresentadas na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). Nosso estudo teve natureza qualitativa, do tipo bibliográfico e documental, uma vez que as atividades foram levantadas de livros e roteiros desenvolvidos pela equipe do Projeto Probex. O referencial teórico da investigação teve como base a Teoria Van Hiele para o pensamento geométrico e os Objetos de conhecimento e Habilidades da BNCC (Brasil, 2018), pois se trata do documento mais recente, mas também tratamos acerca dos PCN (Brasil, 1998) e dos materiais manipulativos para o ensino de Geometria Espacial (Smole; Diniz, 2016). Nosso levantamento foi desenvolvido utilizando propostas de recursos didáticos manipulativos e algumas atividades exploratórias que proporcionam maior participação dos alunos e auxiliam no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Palavras-chaves: Recursos manipulativos. Geometria Espacial. Sólidos Geométricos. BNCC.

ABSTRACT

The present work has, as its central theme, the proposal of manipulative resources for teaching three-dimensional solids in Spatial Geometry, using low-cost materials. Our overall objective was to present and discuss activities that utilize concrete materials in the context of Spatial Geometry. To achieve this goal, we had specific objectives: Identify mathematics teaching proposals that make use of manipulative teaching resources aimed at Basic Education; and select proposals based on Spatial Geometry using concrete materials and relate these proposals to learning objects and mathematical skills presented in the Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018). Our study was qualitative in nature, bibliographic and documentary, since the activities were taken from books and scripts developed by the Probex Project team. The theoretical framework of the research was based on the Van Hiele Theory for geometric thinking and the Knowledge Objects and Skills of the BNCC (Brasil, 2018), as it is the most recent document, but we also addressed the PCN (Brasil, 1998) and manipulative materials for teaching Spatial Geometry (Smole; Diniz, 2016). Our survey was developed using proposals for manipulative teaching resources and some exploratory activities that encourage greater student participation and assist in the development of geometric thinking.

Key-words: Manipulative resources. Spatial Geometry. Geometric solids. BNCC.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Articulações para montagem esqueleto de tetraedro	32
Figura 2: Tetraedros construídos durante oficina de formação de professores	33
Figura 3: Construção de poliedros durante oficina de formação de professores	33
Figura 4: Sólidos geométricos: poliedros	34
Figura 5: Simbologias utilizadas em diagramas de Origami	37
Figura 6: Mais simbologias utilizadas em diagramas de Origami	38
Figura 7: Diagrama do módulo do cubo	39
Figura 8: Encaixe dos módulos do cubo	40
Figura 9: Cubo finalizado	40
Figura 10: Questão do ENEM sobre vistas ortogonais	41
Figura 11: Alternativas de respostas da questão do ENEM sobre vistas ortogonais	41
Figura 12: Diagrama do copo	43
Figura 13: Octógono regular construído com oito copos	44
Figura 14: Pirâmide de base triangular construída com três copos	45
Figura 15: Diagrama do módulo do dodecaedro	46
Figura 16: Dodecaedro finalizado	47
Figura 17: Planificação do cubo apresentada em livros didáticos	48
Figura 18: Sugestão de construção com quatro cubos coloridos	49
Figura 19: Vistas ortogonais da primeira construção	49
Figura 20: Vistas ortogonais da segunda e terceira construção,	

respectivamente	50
Figura 21: Construções movendo um cubo da pilha inicial	50
Figura 22: Vistas frontais de construções com cubos	51
Figura 23: Maquete construída	53
Figura 24: Comparação de diferentes embalagens com mesma capacidade	55

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO E JUSTIFICATIVA DO TEMA DE PESQUISA.....	11
1.1. BREVE JUSTIFICATIVA SOBRE A TEMÁTICA ESCOLHIDA.....	11
1.2 OBJETIVOS DE INVESTIGAÇÃO.....	13
1.3 METODOLOGIA.....	14
1.4 ESTRUTURA GERAL DO PRESENTE TEXTO.....	15
2. O ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL: BREVE RECORTE HISTÓRICO.....	16
2.1 A CRIAÇÃO DA DISCIPLINA DE GEOMETRIA E SEU ENSINO....	16
2.2 OS PCN E A BNCC NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO.....	17
2.2.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais.....	17
2.2.2 A Base Nacional Comum Curricular.....	20
2.3 O PENSAMENTO GEOMÉTRICO.....	25
2.4 MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULATIVOS.....	27
2.4.1 Materiais didáticos manipulativos para o ensino de geometria espacial.....	29
3 PROPOSTAS DE RECURSOS MANIPULATIVOS PARA O ENSINO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS.....	31
3.1 A ELABORAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DE ATIVIDADES COM RECURSOS MANIPULATIVOS EM GEOMETRIA ESPACIAL.....	31
3.2 CONSTRUÇÃO DE ESQUELETOS DE POLIEDROS.....	32
3.3 EXPLORANDO DOBRADURAS DE PAPEL: ORIGAMI.....	36
3.3.1 DIAGRAMA DO CUBO.....	39
3.3.2 DIAGRAMA DO COPO.....	42
3.3.3 DIAGRAMA DO DODECAEDRO.....	46
3.4 QUEBRA-CABEÇAS COM CUBOS.....	48
3.5 CONSTRUÇÃO DE MAQUETES COM EMBALAGENS.....	51
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	57
REFERÊNCIAS.....	59

1. APRESENTAÇÃO E JUSTIFICATIVA DO TEMA DE PESQUISA

1.1. BREVE JUSTIFICATIVA SOBRE A TEMÁTICA ESCOLHIDA

A Geometria está presente no mundo físico em diversos cenários, como em construções, na natureza, na tecnologia e nas artes. Também, integra outras áreas do currículo escolar, como a Geografia, no trabalho de localização de pontos na superfície da Terra e na leitura e interpretação de mapas; e as Ciências da Natureza, em critérios de classificação de animais, de acordo com a presença de simetria (radial ou bilateral), ou não, em seus corpos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998), o trabalho com Geometria, referida como Espaço e Forma naquele documento, deve ser explorado através de construções geométricas que utilizem objetos do mundo físico, permitindo que o aluno aproxime os conteúdos à sua realidade. Como também, orienta-se que sejam trabalhadas situações-problemas para o desenvolvimento da capacidade de argumentar e construir demonstrações geométricas.

O estudo de Geometria “possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (Brasil, 1998, p. 122) - o pensamento geométrico.

A Geometria, na Base Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), constitui uma das cinco Unidades Temáticas indicadas para o Ensino Fundamental e compreende o estudo de posições e deslocamentos no espaço, como também de figuras planas e espaciais em suas formas e relações para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Na BNCC, orienta-se o uso de recursos didáticos para auxiliar o aluno na compreensão de significados dos objetos matemáticos, de modo que eles “precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos” (Brasil, 2018, p. 298). Alguns exemplos desses recursos citados no documento são malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares.

A utilização de materiais didáticos convencionais, tais como lousa, papel e lápis, com a implementação de atividades meramente descritivas e monótonas, carecem de estímulo ao aluno na exploração de experiências geométricas e à identificação de conexões com os diversos objetos que os cercam, bem como promovem pouco a interação entre os alunos.

O progresso no desenvolvimento do pensamento geométrico das crianças está ligado ao estímulo de suas explorações. Cada criança constrói sua compreensão dos objetos geométricos a partir das experiências que vivencia, e quando envolve figuras tridimensionais, a visualização e compreensão podem se tornar mais desafiadoras. Isso ocorre porque, sem o estímulo adequado, as crianças enfrentam dificuldades em formular ideias. Como afirmam Rogenski e Pedroso (2009, p. 5):

[O]s alunos têm amplas dificuldades, primeiramente com relação à visualização e representação, pois reconhecem poucos conceitos da geometria básica e, por conseguinte da geometria espacial. Também apresentam problemas de percepção das relações existentes entre os objetos de identificação das propriedades das figuras que formam os sólidos, dentre outros conceitos.

Lorenzato (2006) destaca a importância do professor saber utilizar corretamente os materiais manipulativos para a aprendizagem significativa dos alunos e, para isso, é necessário o estímulo das instituições formadoras de professores para o uso desses materiais.

A manipulação de materiais concretos auxilia na compreensão e na construção de ideias matemáticas, sobretudo habilidades geométricas, desempenhando um papel crucial no processo de ensino-aprendizagem do aluno e proporcionando a oportunidade de explorar ativamente conceitos geométricos, como discutiremos teoricamente adiante.

Entretanto, os materiais manipulativos no ensino de Geometria Espacial, mais recorrentes nos livros didáticos, são planificações de superfícies de sólidos geométricos, prontas para que o aluno apenas recorte e cole.

Compreendemos que essas atividades propostas pelos livros didáticos são recursos que proporcionam suporte aos professores, uma vez que sua implementação exige apenas materiais simples, como papel e tesoura. No entanto, existem outras atividades que fazem uso de instrumentos básicos,

facilmente encontrados no cotidiano, tanto dos alunos quanto dos professores, e que estimulam ainda mais o aprendizado dos alunos.

A motivação para a elaboração deste trabalho se deu pelas propostas de atividades com materiais manipulativos realizadas durante o Projeto de Extensão “Formação Continuada em Resolução de Problemas, para professores que ensinam Matemática”, coordenado pela Prof^a Dra Rogéria Gaudencio do Rêgo, vinculado ao Probex/UFPB 2022/2023.

O projeto foi desenvolvido no período de 01 de agosto de 2022 a 31 de julho de 2023, e realizadas 16 (dezesesseis) Oficinas, com a participação ativa de cerca de 300 professores da Educação Básica de diversos municípios da Paraíba; professores do município de Itambé, Pernambuco; e professores do município de Novo Hamburgo, Rio Grande do Sul. Elaboramos materiais e roteiros utilizando atividades dinâmicas para a realização das oficinas de formação continuada, trabalhando com professores do Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Durante as oficinas foram abordados diversos conteúdos matemáticos, contudo, os materiais apresentados na presente investigação possuem foco em Geometria Espacial, em especial nas atividades com sólidos geométricos. Esses materiais envolvem recursos manipulativos ou concretos, como o uso do Origami e construção de sólidos utilizando instrumentos comumente encontrados na escola.

A utilização de recursos manipulativos nas atividades com os professores proporcionou uma valiosa oportunidade de trocas de experiências, discussões e esclarecimento de dúvidas sobre o tema. Além disso, conseguimos integrar esses recursos de forma eficaz em problemas adaptados para diferentes níveis escolares, possibilitando, dessa maneira, que os professores apliquem uma mesma atividade com materiais manipulativos em diversas turmas.

1.2 OBJETIVOS DE INVESTIGAÇÃO

Com base nos levantamentos iniciais que realizamos para o planejamento das Oficinas, um recurso didático destacado para utilização na Educação Básica foi o uso de materiais manipulativos. No ensino de Geometria

Espacial, seu uso é fundamental como suporte para o professor e no auxílio do processo de aprendizagem do aluno. Buscamos priorizar o uso de materiais de fácil acesso, tanto para os professores quanto para os estudantes, e promover uma abordagem pedagógica mais inclusiva e acessível.

A questão central de investigação foi: que atividades podem ser propostas com o uso de materiais manipulativos de baixo custo envolvendo Geometria Espacial, dirigidas à Educação Básica?

O presente trabalho tem como objetivo geral apresentar e discutir atividades que utilizam materiais concretos no contexto de Geometria Espacial. Como objetivos específicos, temos:

- Identificar propostas de ensino de Matemática que fazem uso de recursos didáticos manipulativos, voltadas para a Educação Básica;
- Selecionar as propostas baseadas em Geometria Espacial utilizando materiais concretos e relacionar essas propostas a Objetos de aprendizagem e Habilidades matemáticas apresentadas na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018).

1.3 METODOLOGIA

Em razão da natureza de nosso Objetivo geral, o presente trabalho foi desenvolvido considerando uma abordagem de natureza qualitativa, que não teve direcionamento para o tratamento numérico/estatístico de dados (Prodanov e Freitas, 2013).

O estudo se constitui como sendo de natureza bibliográfica e documental, uma vez que as atividades que são apresentadas e discutidas no texto foram levantadas em livros e em registros desenvolvidos pela equipe do Projeto Probex já citado.

Vale destacar que,

Enquanto a pesquisa bibliográfica se utiliza fundamentalmente das contribuições de vários autores sobre determinado assunto, a pesquisa documental baseia-se em materiais que não receberam ainda um tratamento analítico ou que podem ser reelaborados de acordo com os objetivos da pesquisa (Prodanov e Freitas, 2013, p.55).

Os documentos consultados foram roteiros de atividades elaboradas pela equipe, particularmente aqueles direcionados ao trabalho com conteúdos de Geometria espacial, recorte ao qual direcionamos nossa pesquisa.

1.4 ESTRUTURA GERAL DO PRESENTE TEXTO

O texto de nosso Trabalho de Conclusão de Curso está organizado em três capítulos. No primeiro Capítulo, abordamos a Introdução, com a apresentação da escolha do tema e sua justificativa, os objetivos gerais e específicos a serem alcançados e a metodologia utilizada na investigação. Dessa forma, apresentamos uma visão geral da apresentação do tema.

No segundo Capítulo, apresentamos a fundamentação teórica, com um breve recorte histórico sobre Geometria, abordando a criação da disciplina e seu ensino; os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Comum Curricular no ensino de Geometria; o pensamento geométrico, explorando a Teoria Van Hiele; e o uso de materiais manipulativos no ensino de Matemática e de Geometria Espacial.

No Capítulo 3, discutimos as propostas de atividades utilizando materiais manipulativos que foram elaborados durante o projeto de extensão e aplicados em oficinas de formação de professores. Encerramos o texto com as nossas Considerações finais.

2. O ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL: BREVE RECORTE HISTÓRICO

2.1 A CRIAÇÃO DA DISCIPLINA DE GEOMETRIA E SEU ENSINO

No Brasil, durante os séculos XVII e XVIII, o ensino de Geometria tinha o objetivo de auxiliar a formação de militares, para proteção do país em situações de guerra, com uma metodologia prática, sem o rigor matemático. Entretanto, a Geometria não era ensinada na educação básica, apenas em escolas de ensino militar (Konzen; Bernardi; Cecco, 2017).

No século XIX, as noções geométricas passaram a ser pré-requisito no ensino secundário (atualmente ensinados Fundamental II e Médio) para aqueles que queriam entrar no ensino superior nos Cursos Jurídicos, nas Academias de Médicos/Cirúrgicos e nas Escolas Politécnicas (Konzen; Bernardi; Cecco, 2017). Vale ressaltar que até então Álgebra, Aritmética, Trigonometria e Geometria eram disciplinas independentes.

A disciplina Matemática unificou as áreas que eram tratadas como disciplinas isoladas e com a Reforma Francisco Campos, realizada em 1931, todo o país adotou o sistema. No entanto, com o Movimento da Matemática Moderna (MMM) na década de 1960, o foco era que a linguagem matemática fosse unificada para o pensamento científico e tecnológico, destacando o enfoque algébrico da Geometria e aproximando a Matemática pura à Matemática do ensino básico (Konzen; Bernardi; Cecco, 2017).

O objetivo de trabalhar abstrações e teorias distanciando-se da prática, se opunha totalmente do objetivo inicial da criação da Geometria. Diante disso, de acordo com Konzen, Bernardi e Cecco (2017), os professores enfrentaram dificuldades em acompanhar o processo conceitual e formal dos conteúdos, resultando na ausência do ensino das noções geométricas na formação dos alunos. Nos livros didáticos de Matemática os conteúdos de Geometria estavam localizados nos capítulos finais.

No final da década de 1990, com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998/1999), o ensino de Geometria na educação básica começou a ser resgatado na unidade temática “Espaço e Forma”. O documento ressaltava a importância da Geometria para a formação geral do estudante e

tratava das possibilidades de aplicação das ideias dessa área no cotidiano e em outras áreas de conhecimento (Kaleff, 2016).

Em 2017, outro documento normativo entra em uso na definição da grade curricular educacional, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), trazendo uma nova visão sobre o ensino de Matemática, sobretudo para a Geometria, que passou a ter uma Unidade temática assim denominada, na matriz de Objetos de conhecimento e Habilidades para o Ensino Fundamental. No ano seguinte foi aprovado o documento completo, com as indicações para o Ensino Médio (Brasil, 2018).

2.2 OS PCN E A BNCC NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

2.2.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são uma coleção de documentos que abrangem cada área de conhecimento educacional, incluindo Temas Transversais - que podem ser abordados em todas as áreas -, para auxiliar o professor em sua prática pedagógica na educação básica. Esses documentos são divididos da 1ª a 4ª série (Ensino Fundamental I - 1º e 2º Ciclos), 5ª a 8ª série (Ensino Fundamental II - 3º e 4º Ciclos) e Ensino Médio, com quatro blocos de conteúdos na disciplina de Matemática para o Ensino Fundamental: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.

O ensino de Geometria, nos PCN, é abordado no bloco de conteúdo “Espaço e Forma”. Destaca-se que os conceitos geométricos são fundamentais, uma vez que “o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (Brasil, 1998. p. 51).

O documento ressalta a importância de conectar o conteúdo geométrico com o mundo físico do aluno, resgatando a ideia da criação da Geometria no Brasil:

[É] fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de

arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (Brasil, 1998. p. 51).

Acresce a conexão entre os blocos de conteúdo da disciplina,

[A] variedade de conexões que podem ser estabelecidas entre os diferentes blocos, ou seja, ao planejar suas atividades, o professor procurará articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando a possibilitar a compreensão mais ampla que o aluno possa atingir a respeito dos princípios e métodos básicos do corpo de conhecimentos matemáticos (proporcionalidade, equivalência, indução, dedução etc.); além disso, buscará estabelecer ligações entre a Matemática, as situações cotidianas dos alunos e as outras áreas do conhecimento (Brasil, 1998. p. 53).

Além disso, trabalhar com situações-problema no ensino de Geometria (e da Matemática) é um tema enfatizado no documento, visto que permite que o aluno desenvolva capacidades específicas na disciplina e em outros aspectos da vida. Acrescenta-se no documento a orientação para o recurso aos jogos, materiais manipulativos e novas tecnologias, atrelados às situações-problema, potencializando a constituição de habilidades cognitivas vinculadas ao pensamento matemático.

Nos PCN os conteúdos de Geometria estão presentes desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, sendo indicados em todos os anos da educação básica, inclusive no Ensino Médio. Os conteúdos propostos sobre Espaço e Forma abordados no 3º ciclo (equivalente aos atuais 6º e 7º Anos do Ensino Fundamental) envolviam o posicionamento de pontos e coordenadas cartesianas, utilizando situações-problemas para sua interpretação; classificação, descrição de características e utilização de nomenclaturas de figuras bidimensionais e tridimensionais; composição e decomposição de figuras planas, permitindo a identificação de decomposições de figuras espaciais; como também, a ampliação, redução e transformação dessas figuras; e, noções de direção e sentido, ângulo, paralelismo e perpendicularismo, buscando utilizar instrumentos e recursos didáticos durante o ensino (Brasil, 1998).

No 4º ciclo (equivalente aos atuais 8º e 9º Anos do Ensino Fundamental), contemplava-se os mesmos conteúdos do ciclo anterior,

abordando o aprofundamento necessário e dispondo de problemas que permitam o raciocínio dedutivo do aluno, inicia-se o trabalho com demonstrações, contudo de forma simples, tal como a verificação da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para um não-convexo, o Teorema de Tales e o Teorema de Pitágoras, sobretudo com aplicações (Brasil, 1998).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) da área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias abrangiam conhecimentos e habilidades das disciplinas de Biologia, Física, Química e Matemática, apresentando os conhecimentos a serem desenvolvidos na Matemática, como também competências e habilidades.

Os PCNEM realçam que a Matemática possui valor formativo e

[...] contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais (Brasil, 2002. p. 40).

O estudante, ao ingressar no Ensino Médio, depara-se com vários conteúdos que já foram estudados nos anos escolares anteriores, ou seja, espera-se que durante esses anos os significados das ideias que lhe foram apresentadas tenham sido construídos e sejam, então, ampliados e aprofundados.

Habilidades que são desenvolvidas com esse pensamento na área da Geometria são de “[...] visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas [...], para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.” (Brasil, 2002. p. 44).

Os PCNEM consideram que

Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as

representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências, em especial a Física (Brasil, 2002. p. 44).

Mediante o exposto, os Parâmetros Curriculares Nacionais, tanto do Ensino Fundamental quanto do Médio, resgatam a concepção da Matemática, sobretudo a Geometria, com uma perspectiva significativa para a educação básica, apontando habilidades e competências que permitem o desenvolvimento dos alunos.

2.2.2 A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) é um documento normativo para elaboração da estrutura curricular das escolas de Educação Básica, nas disciplinas de cada etapa escolar, buscando uma maior aproximação nacional do currículo em todo o país. Sua 1ª versão foi disponibilizada em 2015 e a última, com o acréscimo da etapa do Ensino Médio, foi apresentada pelo Ministério da Educação (MEC) em 2018, sendo um norteador para a estruturação de redes públicas e estaduais de ensino.

A Base está estruturada em torno de dez competências gerais para a Educação Básica e de competências específicas para as diferentes disciplinas de cada etapa escolar (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio). No Fundamental, tem-se os componentes curriculares e as competências específicas desses componentes, sendo essa etapa dividida nos anos iniciais e finais com unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades. Na área da Matemática, as unidades temáticas propostas são as de Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística.

O documento apresenta a unidade temática de Geometria da seguinte forma:

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre

elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos (Brasil, 2018, p. 271).

Nos anos finais do Ensino Fundamental, busca-se que, no ensino de Geometria, o aluno consiga fortalecer e ampliar seus conhecimentos desenvolvidos nos anos iniciais dessa etapa, a fim de elaborar conceitos e análises que permitam o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo, utilizado em demonstrações matemáticas.

A Geometria Espacial é mencionada no 6º ano através do Objeto de conhecimento “Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)” com a habilidade a ser desenvolvida: “(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial” (Brasil, 2018, p. 303).

Posteriormente, encontra-se seu estudo no 9º ano com o Objeto de conhecimento “Vistas ortogonais de figuras espaciais”, trazendo a habilidade: “(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva” (Brasil, 2018, p. 319).

No Ensino Médio, a Matemática é abordada de modo que “o foco é a construção de uma visão integrada [...], aplicada à realidade” (Brasil, 2018, p. 518). Assim, ela não é vista como no Ensino Fundamental com as divisões de unidades temáticas, mas com ideias fundamentais que se articulam diante os campos (Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas) para o desenvolvimento do pensamento matemático, associados a cinco Competências específicas.

No ensino de Geometria, encontram-se as seguintes competências específicas que estão relacionadas às habilidades a serem desenvolvidas, com algumas dessas abordando conexões com o conteúdo de Grandezas e Medidas:

Competência Específica 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios,

de modo a consolidar uma formação científica geral (Brasil, 2018, p. 524).

A Competência 1 apresenta indicações para que os alunos interpretem situações de diferentes campos do conhecimento para a compreensão do mundo e para a formação científica, utilizando a Matemática para a interpretação, reflexão e análise de situações do cotidiano. Através dessa competência, sugere-se que para as noções geométricas seja desenvolvida a habilidade EM13MAT105: “Utilizar noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras” (Brasil, 2018, p. 525).

A Competência 3 incentiva que os alunos aprofundem-se acerca dos fundamentos dos conceitos matemáticos, não apenas para resolver problemas, mas também para buscar a veracidade dos argumentos utilizados nas soluções, bem como tenham capacidade de construir modelos:

Competência Específica 3: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (Brasil, 2018, p. 527).

Segundo Van de Walle (2009), os modelos matemáticos são qualquer objeto, figura ou desenho que represente um conceito matemático. As habilidades relacionadas à Competência Específica 3 que envolvem Geometria são EM13MAT307, EM13MAT308 e EM13MAT309:

(EM13MAT307): Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT308): Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.

(EM13MAT309): Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados (Brasil, 2018, p. 528-529).

As habilidades citadas sugerem que os conhecimentos construídos durante o estudo de Geometria tenham aplicações em contextos reais, de modo que os alunos desenvolvam a capacidade de dedução e de cálculos para aplicá-los nesses contextos, com as habilidades EM13MAT307 e EM13MAT309 fazendo conexão da Geometria com o conteúdo de áreas e volumes de Grandezas e Medidas.

A Competência Específica 4 orienta que o aluno fortaleça o raciocínio matemático de modo que identifique a flexibilidade de transitar entre registros de representação matemática, reconhecendo suas relações e conexões:

Competência Específica 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático (Brasil, 2018, p. 530).

A habilidade que envolve conceitos geométricos dessa competência é a EM13MAT407: “Interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas” (Brasil, 2018, p. 531).

A Competência Específica 5 incentiva que o aluno explore ativamente a matemática, enfatizando a utilização de recursos como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, de modo que desenvolvam o pensamento crítico e a habilidade de resolver problemas.

Competência Específica 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 532).

As habilidades EM13MAT504, EM13MAT505, EM13MAT509 e EM13MAT512 correspondem a essa competência abordando habilidades geométricas.

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras (Brasil, 2018, p. 533).

A habilidade relaciona a Geometria com Grandezas e Medidas, de maneira que o aluno desenvolva a habilidade de investigação para obter medidas de figuras geométricas tridimensionais, no caso medida de volume.

As habilidades EM13MAT307 e EM13MAT309 estão relacionadas ao cálculo de áreas:

(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados.

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica.

(EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos (Brasil, 2018, p. 533).

Essas habilidades fazem conexões da Geometria com as Grandezas e Medidas, em razão da defesa da integralidade dos conteúdos Matemáticos buscados pelo documento, que é reforçada no final do texto “Considerações sobre a organização curricular”: “[É] fundamental preservar as ideias básicas desta BNCC referentes à articulação entre os vários campos da Matemática, com vistas à construção de uma visão integrada de Matemática e aplicada à realidade” (Brasil, 2018, p. 535).

2.3 O PENSAMENTO GEOMÉTRICO

O desenvolvimento do pensamento geométrico auxilia na capacidade e forma do aluno observar o mundo em que vive, visualizando objetos e estabelecendo relações com descrições geométricas, bem como na articulação dos conceitos nos diferentes ramos da Matemática e na resolução de problemas. Na BNCC e nos PCN, o ensino através da Resolução de Problemas é um tema mencionado diversas vezes e um exemplo disso na BNCC são as habilidades EF06MA17 e EM13MAT309. Nos PCN, tem-se um tópico no qual é discutida *A resolução de problemas e o ensino-aprendizagem de Matemática* (Brasil, 1998, p. 39).

Para o desenvolvimento do pensamento geométrico foram elaborados modelos teóricos específicos, dentre os quais destacamos o Modelo Van Hiele, de autoria dos professores holandeses Pierre e Dina Van Hiele, durante a década de 1950, utilizado com o objetivo de avaliar as habilidades dos alunos em Geometria através de cinco níveis, podendo, assim, observar o desenvolvimento de seu pensamento geométrico.

O modelo possui as seguintes características relacionadas aos níveis:

- Os cinco níveis são desenvolvidos de forma sequencial (Van de Walle, 2009), ou seja, para o aluno alcançar o nível 3 é necessário que ele tenha passado pelos níveis 0, 1 e 2 de forma consecutiva. Dessa maneira, o aluno tem constituído sua experiência através do pensamento geométrico criando relações com os objetos estudados e visualizados no cotidiano;
- Os níveis não dependem da idade do aluno (Van de Walle, 2009). Isto é, cada aluno possui seu desenvolvimento, podendo ter em uma mesma sala de aula indivíduos em níveis diferentes, pois cada um possui experiências geométricas distintas;
- Para que ocorra o avanço para o próximo nível, a experiência geométrica é essencial (Van de Walle, 2009), portanto é necessário que os alunos explorem atividades que permitam o desenvolvimento de novas experiências, com interações entre as crianças e os objetos que os cercam;

- Caso a linguagem ou o ensino esteja acima do nível do aluno, a comunicação não ocorre (Van de Walle, 2009), pois, quando o aluno lida com conteúdos que não tenham sido compreendidos, acontece a memorização do assunto e mais adiante o esquecimento, formando um conhecimento temporário e superficial.

Os níveis referentes ao desenvolvimento cognitivo do aluno acerca da Geometria são numerados de 0 a 4 (na tradução do referencial que adotamos), que são apresentados em seguida.

O Nível 0, denominado como de Visualização ou Reconhecimento, tem as seguintes características: nele os alunos desenvolvem o reconhecimento visual e a nomeação das figuras de acordo com suas características, julgadas pela aparência, como quadrado, triângulo e círculo. Porém, não têm condições de classificar as figuras com vocabulário geométrico seguindo as propriedades de seus componentes.

Assim, classificam as figuras com referências ao seu cotidiano, como uma figura que remete a uma bola de futebol. Espera-se que o aluno, alcançando esse nível, explore as figuras e as classifique de acordo com suas características visuais, fazendo agrupamento das figuras que são parecidas ou diferentes e, com isso, iniciar o trabalho com os nomes e propriedades dessas figuras de modo informal (Van de Walle, 2009).

No Nível 1, de Análise, os alunos conseguem classificar figuras de modo informal, sendo capazes de listar propriedades, mas sem identificar as inter-relações que existem, por exemplo, entre figuras geométricas de determinado grupo, como o dos quadriláteros: “todos os quadrados são retângulos, mas nem todo retângulo é quadrado”.

No Nível 2, de Dedução informal ou Abstração, os alunos são capazes de fazer relações entre as figuras e suas propriedades (por exemplo, retângulos são paralelogramos com pelo menos um ângulo reto); compreender definições abstratas; e entender o conceito de inclusão e interseção de classes. Atingindo esse nível deve também ser capaz de acompanhar uma prova formal, mas não são capazes de construir uma demonstração por si mesmos (Van de Walle, 2009).

No Nível 3, de Dedução formal, os alunos têm capacidade e condições de fazer demonstrações formais, trabalhando com sentenças abstratas sobre

as propriedades geométricas e fazendo conclusões lógicas. Começam a desenvolver análise de um sistema completo, com axiomas, definições, teoremas, corolários e postulados. Eles conseguem construir listas de axiomas e definições para provar teoremas utilizando o raciocínio lógico, podendo encontrar mais de um caminho para essa demonstração. Um exemplo são alunos do Ensino Médio que desenvolvem, em Geometria, a criação de um sistema dedutivo (geralmente, o sistema euclidiano) (Van de Walle, 2009).

No Nível 4, do Rigor, os alunos trabalham com distinções e relações entre diferentes sistemas axiomáticos, não apenas com deduções, e entendem relações abstratas sem depender de representações físicas.

Considerando-se as características dos níveis do Modelo, aqui brevemente apresentados, é importante destacar que a expectativa é que estudantes da Educação Básica alcancem, no máximo o Nível 2, no Ensino Fundamental, e, dependendo das experiências desenvolvida em sala de aula, alcancem, pelo menos parcialmente, o Nível 3. Entendemos que o último Nível do modelo é alcançado apenas pelos matemáticos especialistas da área.

A Teoria Van Hiele permite acompanhar o avanço dos alunos durante os anos escolares acerca do conhecimento geométrico, ajudando no planejamento e desenvolvimento de atividades que visam à elaboração de habilidades necessárias para que construam sua compressão do mundo através do pensamento geométrico, refletindo, explorando e discutindo ideias.

O professor, como instrutor no processo de desenvolvimento escolar do aluno, precisa conhecer adequadamente os conteúdos que ensina e selecionar os materiais necessários para a facilitação da compreensão e a promoção da interação dos alunos com objetos geométricos e matemáticos, assim, através da mediação adequada, o aluno pode avançar nos níveis do Modelo, de forma satisfatória.

2.4 MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULATIVOS

O uso de materiais didáticos no ensino de Matemática remonta à antiguidade, desde Comenius (1592-1670) com sua publicação *Didactica Magna*, sugerindo que para o melhor desenvolvimento dos alunos deveriam ser

aplicados recursos com métodos de ilustração e objetos da vida cotidiana durante as aulas (Smole; Diniz, 2016).

No entanto, a abordagem com materiais didáticos manipulativos ou concretos começou a ganhar destaque durante o século XX, com o movimento Escola Nova, cujos princípios envolviam que o processo de observação e dedução era papel do professor e a criança tinha capacidade de aprender naturalmente (Smole; Diniz, 2016), ou seja, defendia os métodos ativos de ensino. Destacam-se, também, autores como Maria Montessori (1870-1952) e Decroly (1871-1932) que criaram jogos e materiais para o melhor ensino de Matemática.

Lorenzato afirma que “material didático (MD) é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem” (Lorenzato, 2006, p. 18), mas, para sua utilização, o professor deve estar ciente dos objetivos que deseja alcançar e no processo que o levará nesses objetivos para que a aprendizagem do aluno seja significativa. O mesmo ocorre no uso de materiais concretos.

A utilização de materiais didáticos manipulativos no ensino de Matemática é um recurso que torna o aluno um agente ativo na construção do seu conhecimento matemático (Mendes, 2008), como também torna seu processo de aprendizagem significativo (Smole; Diniz, 2016).

Tais materiais representam ideias e propriedades matemáticas, auxiliando a construção do caráter dinâmico e sua reflexão no decorrer das atividades e discussões de ideias, permitindo, também, que haja o desenvolvimento da linguagem matemática (Smole; Diniz, 2016).

Vale ressaltar que o uso de materiais concretos não é sinônimo apenas de materiais palpáveis, caracterizados apenas pelo manuseio do aluno, mas materiais que possibilitam que o aluno construa os significados desejados para o conteúdo proposto e, assim, tenha uma melhor aprendizagem.

Contudo, é fundamental que os materiais sejam empregados de maneira apropriada. Conforme observado por Kaleff (2016), diversas vezes o professor utiliza materiais manipulativos com foco em seus componentes lúdicos, sobretudo no contexto de jogos, assim, negligenciando seus aspectos formadores do conhecimento, com o intuito de superar os “obstáculos cognitivos na construção de um conceito, de seu significado e de sua abstração” (Kaleff, 2016, p.56).

De acordo com Passos (2006, p. 78), os “materiais [manipulativos] devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento no momento em que um saber está sendo construído”. Assim, podem ser utilizados para o desenvolvimento de novas ideias matemáticas, como também para aplicar o conhecimento já construído previamente, explorando situações-problemas para a construção de atitudes investigadoras e realçando a interação entre os alunos com discussões e registros.

Os benefícios que são desenvolvidos na aprendizagem influenciam no âmbito escolar, observando o desenvolvimento de capacidades cognitivas, segundo Ribeiro (apud Smole; Diniz, 2016, p. 21), que “permitiam compreender a finalidade da tarefa, planejar sua realização, aplicar e alterar conscientemente estratégias de estudo e avaliar seu próprio processo durante a execução”.

Também auxiliam em situações do cotidiano, ao trabalhar resolução de problemas, potencializando o processo reflexivo e o desenvolvimento do pensar autônomo, e incentiva a comunicação oral e escrita entre os alunos, trabalhando com registros e exposições sobre como desenvolveu seu raciocínio.

2.4.1 Materiais didáticos manipulativos para o ensino de geometria espacial

O contato da criança com o espaço em que vive é constante, desenvolvendo, assim, experiências geométricas informais, como o reconhecimento de figuras, percepção de espaço, distância, localização e visualização de objetos, entre outros. Durante seus anos escolares essas experiências demandam conceitos formais, como propriedades e linguagem matemática adequada para identificação de conteúdos geométricos.

Os autores Frostig, Horne e Hoffer (apud. Smole; Diniz, 2016) identificaram seis habilidades que caracterizam a percepção espacial: coordenação motora visual; memória visual; percepção de figuras planas; constância perceptiva ou constância de forma e tamanho; percepção de relações espaciais; e discriminação visual.

As duas primeiras habilidades estão relacionadas ao controle do esquema corporal. A habilidade de coordenação motora visual está relacionada à capacidade de controlar os movimentos dos olhos e das mãos com estímulos visuais, desenvolvida em atividades de desenhos, recortes, dobraduras e montagem de quebra-cabeças, entre outros. A memória visual é a capacidade de lembrar informações visuais de um objeto, relacionando suas características (Smole; Diniz, 2016).

As quatro últimas habilidades estão relacionadas a estratégias cognitivas desenvolvidas por meio de atividades geométricas. A habilidade de percepção de figuras planas corresponde a capacidade reconhecer e identificar figuras e suas características. A constância perceptiva (ou constância de tamanho e forma) envolve o reconhecimento de propriedades invariantes de um objeto. A percepção de relações espaciais está relacionada à habilidade de visualizar dois ou mais objetos, através de relações espaciais, e a discriminação visual se refere à capacidade de perceber e diferenciar detalhes entre figuras e objetos (Smole; Diniz, 2016).

As seis habilidades de percepção espacial são desenvolvidas durante os anos escolares iniciais com atividades que trabalham pensamento espacial, resolução de problemas e visualização. Porém, caso sejam identificadas dificuldades com alunos de outros anos escolares, as atividades adequadas auxiliam no desenvolvimento das habilidades geométricas necessárias (Smole; Diniz, 2016).

Os materiais didáticos manipulativos são aliados no progresso das atividades, permitindo a manipulação de objetos, identificando suas partes e correspondendo-as a propriedades. Antes do início da atividade é importante que os alunos tenham um momento para conhecer os materiais, permitindo que explorem e manuseiem o material livremente.

3 PROPOSTAS DE RECURSOS MANIPULATIVOS PARA O ENSINO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

3.1 A ELABORAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DE ATIVIDADES COM RECURSOS MANIPULATIVOS EM GEOMETRIA ESPACIAL

Neste Capítulo apresentamos algumas atividades desenvolvidas na área de Geometria Espacial, mais especificamente relacionadas à construção e exploração de sólidos geométricos, considerando o uso de materiais didáticos manipulativos na Educação Básica.

Como visto anteriormente, na BNCC, os conteúdos de Geometria Espacial são mencionados em apenas dois momentos durante o Ensino Fundamental II: no 6º ano, com o Objeto de conhecimento “Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)” e sua habilidade relacionada (“**EF06MA17**”); e, posteriormente, no 9º ano, na proposição do trabalho com vistas ortogonais de sólidos geométricos e sua habilidade relacionada (“**EF09MA17**”).

No 6º ano, é comum que o estudo dos sólidos geométricos “prismas e pirâmides” esteja relacionado nos livros didáticos de Matemática às suas planificações, o que implica que é possível que sejam realizadas atividades que incentivam apenas essa linha de raciocínio.

Apesar da importância de trabalharmos com representações de sólidos em superfícies planas, é fundamental que o aluno explore objetos geométricos tridimensionais, possibilitando sua associação com objetos encontrados no cotidiano e a resolução de problemas.

No documento da BNCC do Ensino Médio, encontra-se na Competência 5 o incentivo da utilização de materiais concretos para que os alunos investiguem e façam experimentações utilizando esses materiais, como também recursos digitais e apoios visuais (Brasil, 2018).

Os materiais manipulativos ou concretos em Geometria podem ser explorados em diversos tipos de atividades, como em dobraduras de Origami; construção de maquetes; construção de esqueletos de sólidos geométricos; elaboração de planificações; quebra-cabeças, como o Tangram; e atividades com papel quadriculado, entre outros.

As sugestões de atividades com materiais concretos que apresentamos e discutimos em nosso texto envolvem apenas Geometria Espacial. Cada sequência de atividades com recursos manipulativos apresenta a seguinte caracterização: conteúdos abordados; objetivos gerais e específicos, de acordo com a BNCC; materiais utilizados para sua elaboração; descrição da montagem e sugestões de questões e problemas a serem explorados.

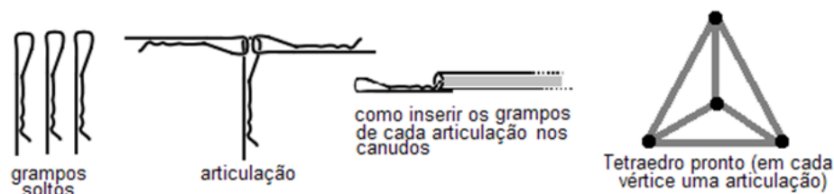
3.2 CONSTRUÇÃO DE ESQUELETOS DE POLIEDROS

Nesta proposta de atividade, sugerimos a confecção dos esqueletos de poliedros, ou seja, sua estrutura de arestas e vértices. Para sua construção, os instrumentos necessários são canudos de plástico (ou papel) que tenham o mesmo comprimento, caso as figuras sejam regulares, em quantidade correspondente ao número de arestas do poliedro, e grampos de cabelo para as articulações, correspondendo ao número de arestas que saem de cada vértice do poliedro.

Como exemplo, apresentamos na Figura 1 um tetraedro (pirâmide de base triangular) confeccionado com essa técnica. Para sua confecção precisamos de seis canudos, que correspondem ao número de arestas. Como cada vértice do sólido é ponto de encontro de três arestas, precisamos de três grampos para formar uma articulação necessária para cada vértice.

Para conectar os canudos que constituem as arestas do esqueleto, inserimos cada grampo em um canudo, com sua parte ondulada voltada para dentro do canudo, para melhor firmeza da estrutura.

Figura 1: Articulações para montagem esqueleto de tetraedro.



Fonte: Rêgo e Rêgo, 2010, p.45

Esta atividade foi realizada em oficinas de formação de professores durante o projeto de extensão citado na Introdução (Figura 2).

Figura 2: Tetraedros construídos durante oficina de formação de professores



Fonte: Autoria própria.

Na ocasião exploramos a construção do tetraedro, mas também de outros sólidos geométricos. Na Figura 3 temos um grupo de professoras que atuam nos anos iniciais, construindo esqueletos de poliedros, como prismas e outros tipos de pirâmides, com a técnica apresentada.

Figura 3: Construção de poliedros durante oficina de formação de professores



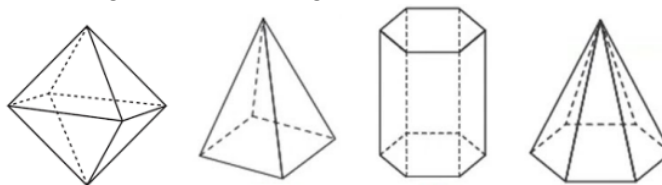
Fonte: Autoria própria

Com essa atividade, podemos promover uma reflexão sobre a rigidez dos sólidos: “Qual o critério necessário para a garantia de que um sólido geométrico se torne rígido?”. Nesse contexto, podemos construir a estrutura de um cubo e analisar como, na ausência de faces “triangularizadas”, o sólido perde sua integridade, tornando-se instável e flexível.

Outra questão a ser explorada: “Quantos canudos e articulações você precisaria para montar cada esqueleto de sólido e, além disso, quantos

grampos de cabelo teria cada articulação?”. Podemos tomar como exemplo de desafios, os sólidos geométricos presentes na Figura 4.

Figura 4: Sólidos geométricos: poliedros



Fonte: Autoria própria

As construções de esqueletos de sólidos geométricos podem ser associadas a alguns Objetos de conhecimento e Habilidades da BNCC (Brasil, 2018) do conteúdo de Geometria no Ensino Fundamental. Nessa direção, no 6º ano, podemos destacar os seguintes Objetos de conhecimento:

Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)

Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados

Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas (Brasil, 2018, p. 302).

Embora seja recomendado abordar o uso de planificações envolvendo Prismas e Pirâmides, é possível incorporar os esqueletos desses sólidos para facilitar a identificação de seus vértices, faces e arestas. Ao mesmo tempo em que estabelecemos conexões com os polígonos a fim de identificar as faces dos poliedros, trabalhamos com medidas e ângulos desses polígonos.

Podemos, ainda, propor a construção de sólidos menores e maiores, regulares ou não, diferenciando o tamanho dos canudos, realizando, assim, comparações de figuras obtidas com registro das faces e analisando a ampliação e redução dessas figuras.

As Habilidades relacionadas aos Objetos de conhecimento citados são, respectivamente:

(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial

(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros

(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais. (Brasil, 2018, p. 303).

O Objeto de conhecimento “Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos”, pode ser trabalhado no 7º ano, desenvolvendo a seguinte habilidade relacionada:

(EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas” (Brasil, 2018, p. 309).

A elaboração dos esqueletos de poliedros facilita o desenvolvimento da percepção espacial dos estudantes e as figuras produzidas por eles podem ser exploradas em atividades de representação usando desenho a mão livre, ou com o suporte de papel quadriculado ou pontilhado.

Com a elaboração desta atividade, os alunos que se encontram no Nível 0 (de Reconhecimento) da Teoria Van Hiele (Van de Walle, 2009), têm a oportunidade de progredir para o Nível 1 (de Análise) (Van de Walle, 2009) ao aprimorar sua compreensão da classificação de figuras e suas características. Além disso, podem também avançar para o Nível 2 (de Abstração) (Van de Walle, 2009) ao desenvolver a habilidade de estabelecer relações entre as figuras e suas propriedades.

Na Oficina desenvolvida no Projeto Probex, os professores comentaram que já haviam desenvolvido atividade semelhante com os estudantes, usando massa de modelar ou jujubas para os vértices, e palitos de dente para as arestas, mas consideraram a proposta de uso de canudos e grampos, interessante, pelo fato de o material ser reutilizável e fácil de ser encontrado no comércio, a um baixo custo.

3.3 EXPLORANDO DOBRADURAS DE PAPEL: ORIGAMI

O ensino de Geometria com o uso de dobraduras promove a estimulação de três sentidos fundamentais destacados por Boakes (apud Rêgo; Rêgo; Gaudencio Júnior, 2018):

o auditivo, através de orientações orais que são levadas pelo professor, ressaltando o uso de terminologias corretas; a cinestesia, que se desenvolve através do passo-a-passo de uma dobradura, com variações no tamanho do papel e, conseqüentemente, na amplitude da dobra; e a visual-espacialidade, estimulada por meio de análises de diagramas e dos produtos resultantes, tanto durante como após a conclusão do processo (Rêgo; Rêgo; Gaudencio Júnior, 2018, p. 16).

Um recurso manipulativo que envolve o uso de dobraduras é o Origami, antiga técnica oriental com o uso de papel. Quando trabalhado com os alunos, permite que ampliem seus conhecimentos formais de Geometria, familiarizando-se com as noções e figuras geométricas estudadas.

A confecção de Origami utiliza instruções do tipo passo a passo para a realização de módulos, promovendo o desenvolvimento de habilidades dos alunos, incluindo a compreensão, análise das etapas de confecção, resolução das sequências de ações e comparação para saber se os passos realizados estão corretos.

No 6º ano do Ensino Fundamental, a BNCC destaca a habilidade abaixo a ser desenvolvida no ensino de Geometria:

(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.) (Brasil, 2018, p. 303).

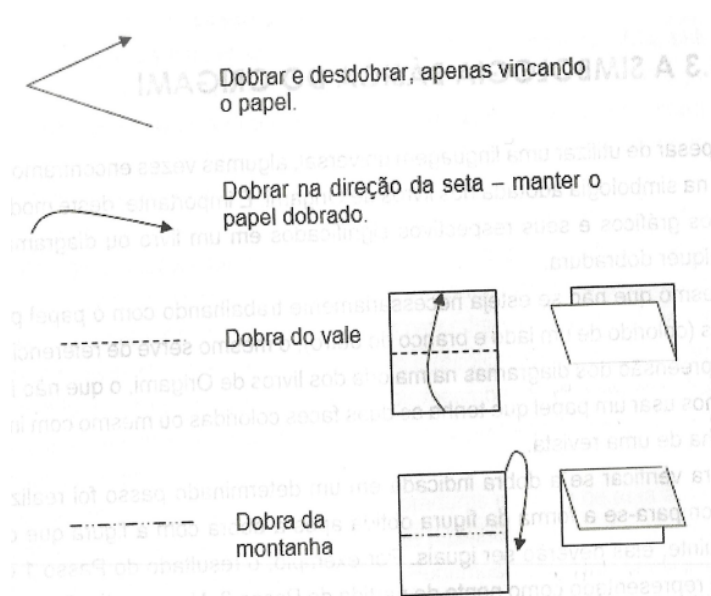
Esta habilidade se concentra no desenvolvimento com instruções passo a passo e na prática de construções de dobraduras, com o Objeto de conhecimento relacionado: “Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares”.

Para alcançar sucesso ao aplicar o ensino com Origami, é fundamental que o professor siga algumas recomendações importantes (Rêgo; Rêgo; Gaudencio Júnior, 2018, p. 49):

- o uso do passo-a-passo da dobradura deve ser respeitado para que seja alcançado o resultado esperado;
- utilizar a linguagem matemática adequada, evitando expressões como “pontinha” do papel e sim “vértice”;
- respeitar o ritmo de cada aluno e acompanhar o processo da realização da dobradura, incentivando que os alunos se ajudem entre si;
- deixar claro os objetos que desejam ser alcançados;
- registrar em cada passo do diagrama os elementos matemáticos que podem ser explorados, questões para serem feitas;
- incentivar que os alunos façam relatórios sobre as dobraduras;
- propor aos alunos atividades investigativas, com questões abertas, permitindo que possa ser apresentadas diferentes respostas;
- e, o mais importante, que seja uma atividade divertida para os alunos e para o professor.

Ao trabalhar com diagramas de Origami, precisamos conhecer algumas simbologias básicas utilizadas no processo, e que possibilitam a confecção de figuras apresentadas em livros especializados em qualquer idioma. Nas Figuras 5 e 6 trazemos algumas delas. Na Figura 5 temos a simbologia usada para as dobras mais básicas (vale e montanha).

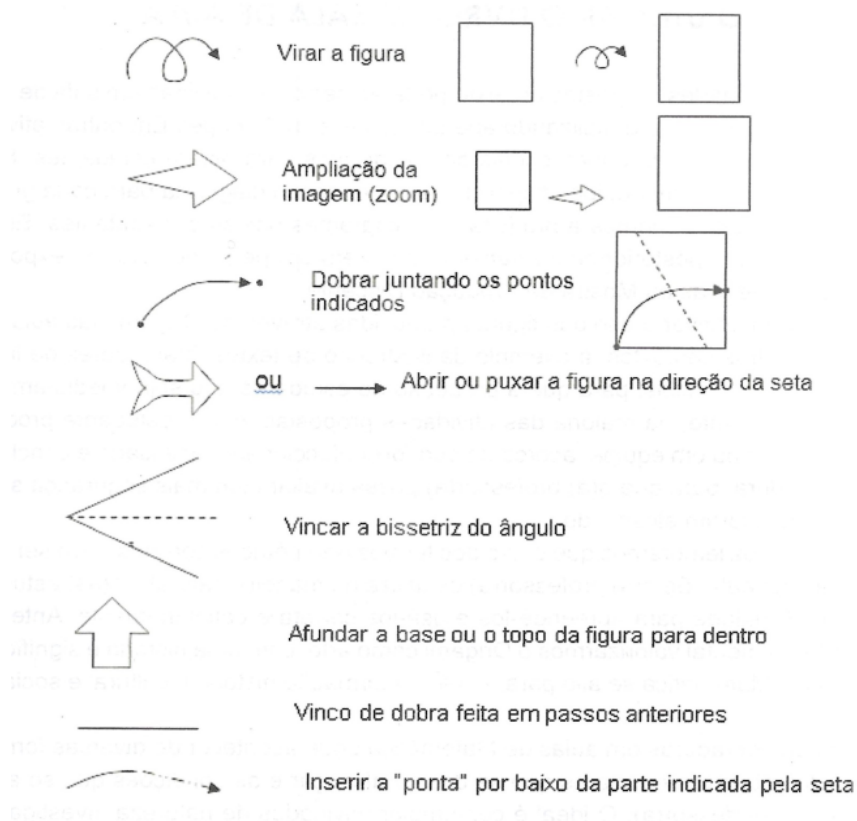
Figura 5: Simbologias utilizadas em diagramas de Origami.



Fonte: Rêgo, Rêgo e Gaudencio Júnior, 2018, p. 54.

Na figura 6, temos a simbologia usada para indicar ações necessárias em alguns processos de dobradura, como virar a figura para baixo, dobrar juntando pontos específicos do papel, dentre outras.

Figura 6: Mais simbologias utilizadas em diagramas de Origami.



Fonte: Rêgo, Rêgo e Gaudencio Júnior, 2018, p. 55.

As simbologias aqui destacadas são apenas parte da utilizada em diagramas de dobraduras em Origami, e que dependem do grau de complexidade destes. Para estudantes que estão começando a praticar essa técnica, a recomendação é selecionar cuidadosamente o diagrama a ser explorado, de modo que todos possam seguir adequadamente as instruções, que podem ser reforçadas pelo professor, que as repetirá usando um papel de tamanho maior.

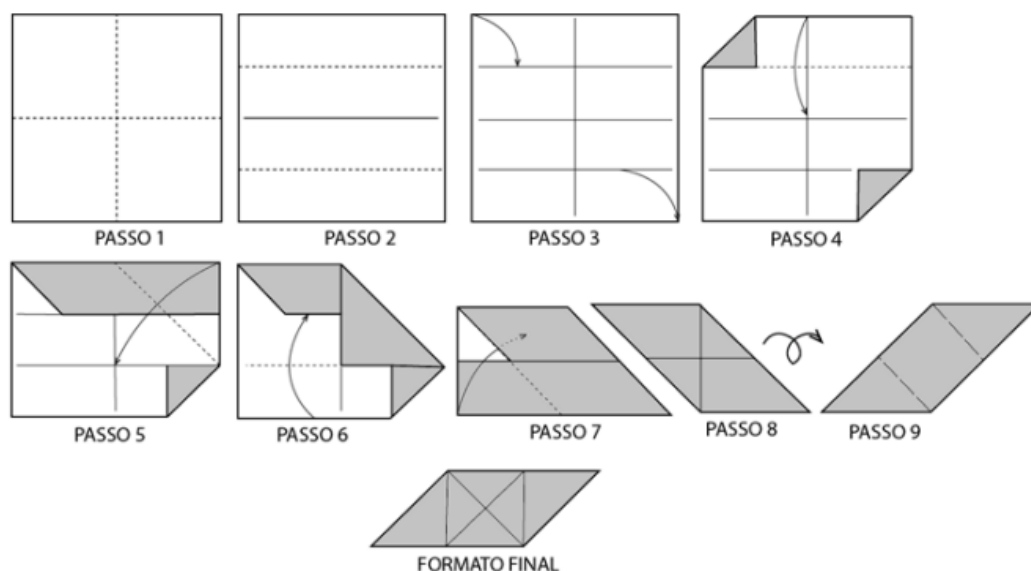
Durante o processo de confecção das dobraduras, podemos explorar a representação das figuras que resultam de cada passo, e utilizar instrumentos de medição, tais como transferidor e régua, para medir comprimentos e ângulos, respectivamente, de maneira precisa.

A confecção de dobraduras possibilita que o aluno que se encontra no Nível 0, de Reconhecimento, da Teoria Van Hiele progrida para níveis mais avançados, como Análise e Abstração (Van de Walle, 2009). Isso implica em aprofundar sua compreensão sobre a classificação de figuras geométricas, suas características e inter-relações. Por meio da exploração dos ângulos e das formas resultantes das dobras realizadas, o aluno pode estabelecer conexões entre as propriedades necessárias para compreender, por exemplo, que todos os quadrados são retângulos.

3.3.1 DIAGRAMA DO CUBO

Nesta proposta de atividade com Origami, confeccionamos o cubo com módulo SONOBI (Figura 7). Utilizando esse módulo podemos elaborar outros sólidos geométricos com as seguintes quantidades necessárias: “três módulos para o tetraedro; nove módulos para formar dois cubos siameses; 12 módulos para formar o octaedro estrelado; ou 30 módulos para construir o icosaedro estrelado” (Rêgo; Rêgo; Gaudencio Júnior, 2018, p. 116).

Figura 7: Diagrama do módulo do cubo.

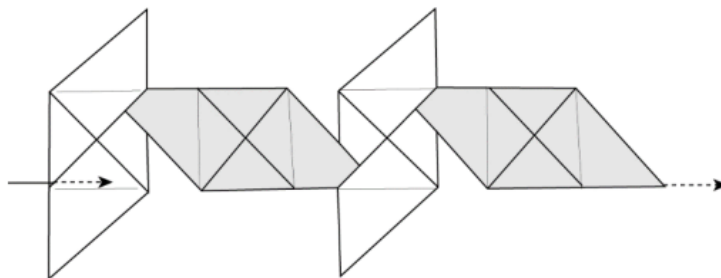


Fonte: Rêgo, Rêgo e Gaudencio Júnior, 2018, p. 117.

Para confeccionar o cubo, produzimos seis módulos e encaixamos quatro deles nos “bolsos”, formando um anel, ou seja, as laterais do cubo,

como indicado na Figura 8. Finalmente, fechamos a base e o topo do cubo com os dois módulos restantes, todos sendo encaixados de modo que não fiquem pontas soltas.

Figura 8: Encaixe dos módulos do cubo.



Fonte: Rêgo, Rêgo e Gaudencio Júnior, 2018, p. 118.

Na Figura 9 temos a imagem do cubo finalizado.

Figura 9: Cubo finalizado.



Fonte: Autoria própria.

Utilizando papéis com diferentes cores, podemos confeccionar cubos coloridos e realizar atividades com quebra-cabeças (sugerida no tópico 3.4); vistas ortogonais, encontradas, também, em questões do ENEM 2020, apresentada na Figura 10; construção de sequências figurais, completando o sequenciamento com cubos coloridos e possibilitando o desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo; e utilizar em confecção de dados numerados, para uso em jogos.

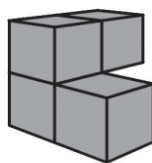
Figura 10: Questão do ENEM sobre vistas ortogonais.



enem2020
Exame Nacional do Ensino Médio

Questão 160

Em um jogo desenvolvido para uso no computador, objetos tridimensionais vão descendo do alto da tela até alcançarem o plano da base. O usuário pode mover ou girar cada objeto durante sua descida para posicioná-lo convenientemente no plano horizontal. Um desses objetos é formado pela justaposição de quatro cubos idênticos, formando assim um sólido rígido, como ilustrado na figura.



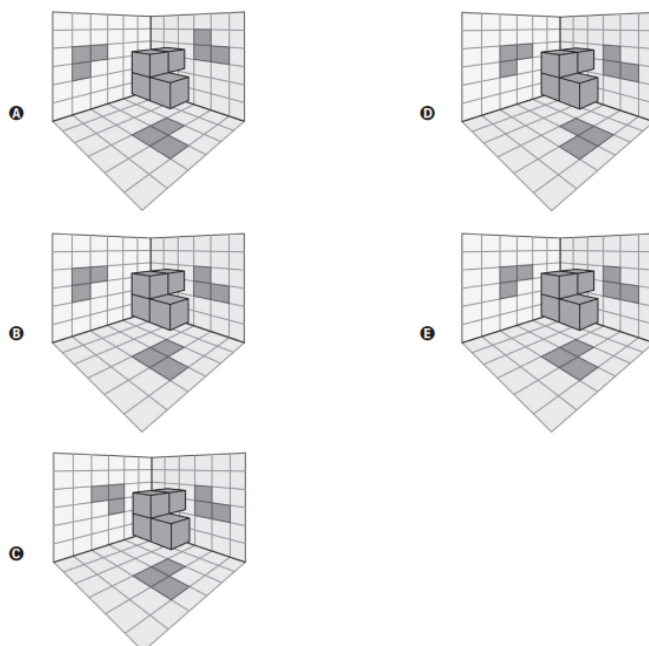
Para facilitar a movimentação do objeto pelo usuário, o programa projeta ortogonalmente esse sólido em três planos quadriculados perpendiculares entre si, durante sua descida.

A figura que apresenta uma possível posição desse sólido, com suas respectivas projeções ortogonais sobre os três planos citados, durante sua descida é

Fonte: download.inep.gov.br [Acesso: 23 de set. de 2023]

Na Figura 11 temos as alternativas de respostas apresentadas para a Questão presente na Figura 10.

Figura 11: Alternativas de respostas da questão do ENEM sobre vistas ortogonais.



Vale destacar que a capacidade de identificação de vistas de figuras espaciais precisa ser estimulada por meio de atividades com esse objetivo, e no caso de figuras constituídas por composições de cubos, o uso do cubo de papel aqui apresentado pode ser facilitado, caso a escola não tenha esse tipo de material manipulativo em madeira ou outro material comercial.

O cubo pode ser empregado na “construção de figuras semelhantes” (Brasil, 2018, p. 302), desenvolvendo a capacidade de ampliação e redução de figuras com a confecção de cubos de diferentes tamanhos, obtidos com o quadrado de papel inicial em tamanho menor ou maior. A habilidade relacionada ao Objeto de conhecimento citado é: “(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais” (Brasil, 2018, p. 303).

Com a Habilidade anterior, podemos trabalhar, também, com o Objeto de conhecimento: “Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado”. Ao realizar atividades de ampliação e redução de cubos, é possível relacioná-las a medidas de perímetro e área da face de cada cubo, apresentada na seguinte habilidade:

(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área (Brasil, 2018, p. 303).

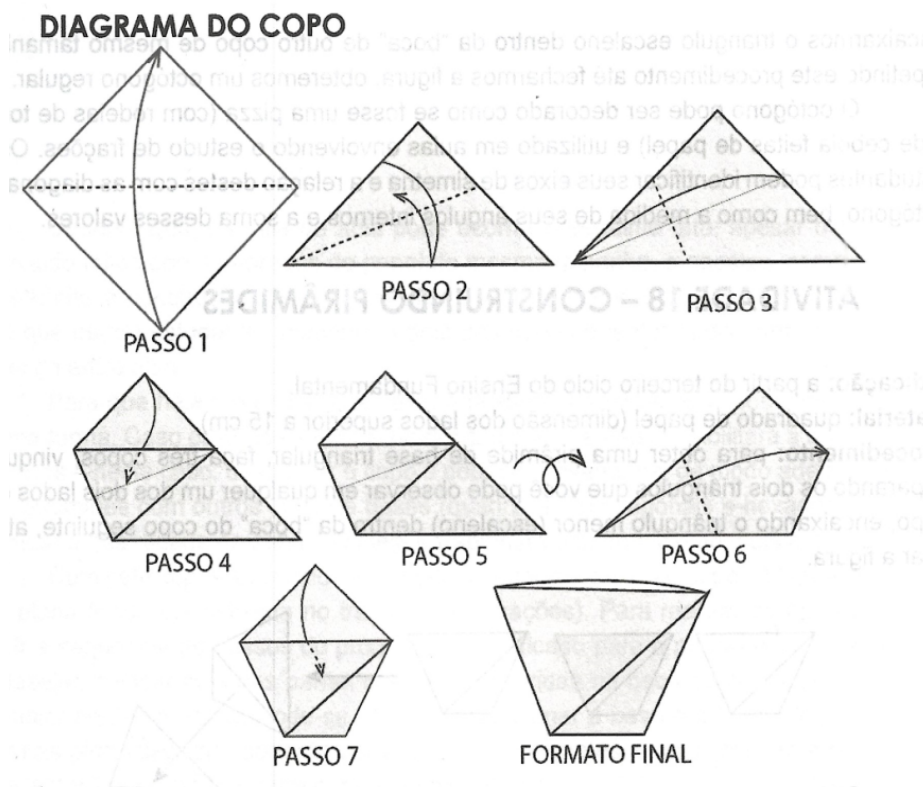
Dessa forma, com o mesmo material manipulativo podemos elaborar atividades para outros anos escolares, de acordo com as necessidades de cada turma, auxiliando, assim, no progresso do pensamento geométrico do aluno.

3.3.2 DIAGRAMA DO COPO

Nesta proposta de atividade com Origami, confeccionamos um copo de papel com o diagrama apresentado na Figura 12. Podemos realizar essa

confeção com crianças a partir do 4º ano do Ensino Fundamental, com as atividades adequadas para cada ano escolar.

Figura 12: Diagrama do copo.



Fonte: Rêgo, Rêgo e Gaudencio Júnior, 2018, p. 109.

Os objetivos propostos na realização do diagrama são explorar elementos geométricos como diagonal, ângulo, bissetriz, triângulo retângulo, trapézio e quadriláteros. Utilizamos como recurso um quadrado de papel com dimensão dos lados superior a 15cm e para que o copo seja confeccionado com sucesso, nos Passos 4 e 7 devemos colocar a parte solta do papel dentro dos “bolsos” formados nos Passos 3 e 6.

Durante a confecção do diagrama, podemos explorar elementos geométricos com os alunos, por exemplo, no Passo 2 questionar como poderíamos vincar a bissetriz de um dos ângulos agudos do triângulo retângulo, sem usar um transferidor.

Com o copo já finalizado, podemos observar que cada lado possui dois triângulos, o maior sendo isósceles e o menor, escaleno. Se fizermos oito copos, podemos encaixar o triângulo menor (escaleno) dentro da “boca” de

outro copo, e repetindo esse processo, obtemos um octógono regular (Figura 13).

Figura 13: Octógono regular construído com oito copos.



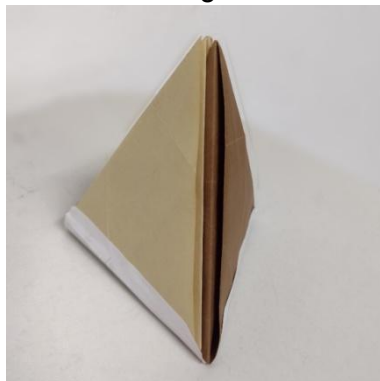
Fonte: Autoria própria.

A construção do octógono nos permite explorar, também, os polígonos e seus elementos (vértices, lados e ângulos), com realização de atividades que envolvem situações-problemas e que se relacionem com faces de sólidos geométricos, desenvolvendo a seguinte habilidade:

(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros (Brasil, 2018, p. 303).

Utilizando de três a seis copos finalizados, podemos formar pirâmides de bases abertas – de três até seis faces laterais. Para que sua base seja feita, basta colar as pirâmides em uma folha de papel e recortar o excesso, deixando uma borda que será colada nas faces. Para formar as pirâmides, encaixamos os triângulos escalenos na “boca” do copo seguinte e “fechamos” o sólido. A pirâmide utilizando três copos (Figura 14) tem a base triangular, a com quatro copos possui a base quadrática e, assim, sucessivamente.

Figura 14: Pirâmide de base triangular construída com três copos.



Fonte: Autoria própria.

Ao confeccionar o diagrama podemos explorar diversos elementos geométricos. Neste contexto, destacamos dois exemplos presentes na BNCC: o primeiro está relacionado ao Objeto de conhecimento “Ângulos: noção, usos e medida”, integrado ao conteúdo de Grandezas e Medidas do 6º ano, e, o segundo, diz respeito ao Objeto “Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas”, encontrado no conteúdo de Geometria do 8º ano do Ensino Fundamental. As habilidades relacionadas são:

(EF06MA25) Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas

(EF06MA26) Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão

(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas (Brasil, 2018, p. 315).

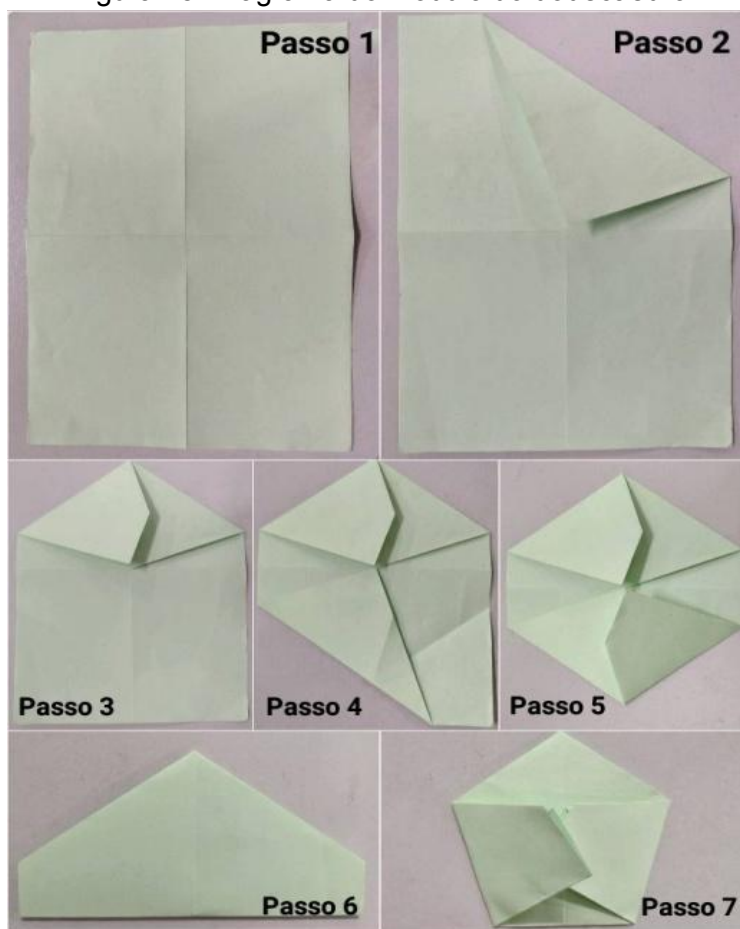
A cada passo do diagrama podemos fazer associações à habilidades específicas, como no Passo 2, solicitando a realização de dobrar na bissetriz de um ângulo da base do triângulo.

Ao longo do processo de confecção, notamos que são formados vários triângulos, proporcionando a oportunidade de explorar a semelhança entre eles, permitindo desenvolver a habilidade relacionada: “(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes” (Brasil, 2018, p. 317).

3.3.3 DIAGRAMA DO DODECAEDRO

Para confeccionarmos um dodecaedro, precisamos realizar doze módulos na forma de um pentágono regular, uma vez que suas faces são compostas por essa figura plana. O passo a passo da construção de um módulo do pentágono está ilustrado na Figura 15.

Figura 15: Diagrama do módulo do dodecaedro



Fonte: Autoria própria.

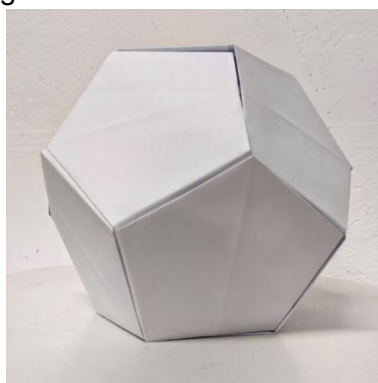
Utilizamos uma folha de papel A4 e dobramos duas vezes para encontrarmos o centro da folha. Em seguida, levamos cada vértice da folha em direção ao centro, seguindo um único sentido (horário ou anti horário) em cada vértice. Isso resulta na formação de duas abas opostas, para que seja realizado o encaixe, como podemos visualizar no Passo 5.

No Passo 6, a figura resultante apresenta uma marcação indicando a dobra realizada no centro do papel. Usamos essa marcação como referência para direcionarmos os vértices de ambos os lados em direção a ela. Isso forma

um triângulo retângulo, de modo que cada vértice compõe o ângulo reto do triângulo.

Tendo sido confeccionados doze módulos, encaixamos cada aba formada no Passo 7 nos "bolsos" do pentágono. Como nem todos os módulos podem ser encaixados entre si dessa forma, é necessário fazer algumas conexões entre faces vizinhas usando fita adesivo ou tiras de papel com cola. O dodecaedro resultante pode ser observado na Figura 16.

Figura 16: Dodecaedro finalizado.



Fonte: Autoria própria.

Para que o sólido se torne mais firme e não corra o risco de desmontar, sugerimos que use cola nas abas encaixadas em cada "bolso". O objeto geométrico apresentado compõe um dos cinco sólidos platônicos. Podemos realizar atividades envolvendo ângulos com as seguintes habilidades da BNCC relacionadas: “(EF06MA25) Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas”; e “(EF06MA26): Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão” (Brasil, 2018, p. 303).

Explorando a figura produzida observamos que as faces do dodecaedro são formadas por pentágonos regulares. Podemos realizar atividades de reconhecimento de polígonos e suas características, desenvolvendo a habilidade: “(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros” (Brasil, 2018, p. 303).

Da mesma forma, no 9º ano do Ensino Fundamental, resgatamos o conteúdo de polígonos regulares com a habilidade: “(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares” (Brasil, 2018, p. 319).

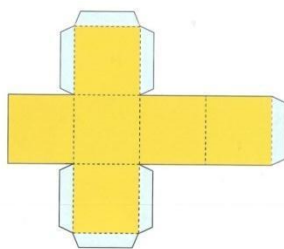
3.4 QUEBRA-CABEÇAS COM CUBOS

Nesta proposta de atividade, trabalhamos com quebra-cabeças tridimensionais e utilizamos cubos. Podemos realizá-la com cubos de Origami confeccionados com o diagrama do item 3.2.1, como também podemos utilizar cubos de madeira, acrílico, plástico ou outro material.

Uma orientação, antes de propor as atividades ou desafios, é que os alunos explorem o material livremente, em um determinado tempo, assim eles podem fazer construções e composições que desejarem. Após esse momento, podemos propor as atividades orientadas, como as que sugerimos a seguir.

Podemos solicitar aos alunos que desenhem em papel quadriculado diferentes representações da planificação do cubo e, a partir desses desenhos, questionar qual planificação é mais fácil (e qual é mais difícil) de visualizarmos o cubo montado. Assim, podemos trabalhar com novas planificações além da tradicional vista em livros didáticos (Figura 17).

Figura 17: Planificação do cubo apresentada em livros didáticos.



Fonte: Smole e Diniz, 2016, p. 139.

Utilizando cubos coloridos, é possível realizar atividades tanto nos anos iniciais do Ensino Fundamental quanto nos anos finais, auxiliando alunos que ainda não tenham adquirido as habilidades necessárias para o

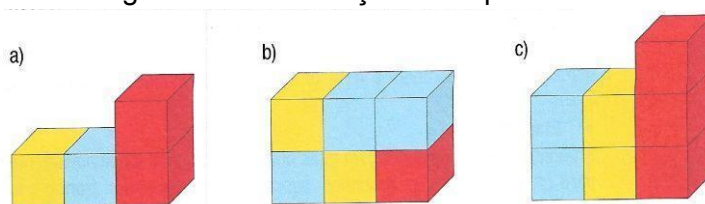
desenvolvimento do pensamento geométrico, particularmente da visualização espacial.

Duas das atividades que podem ser implementadas nos anos iniciais incluem as apresentadas por Smole e Diniz (2016). É sugerido que essas atividades sejam realizadas com turmas do 4º ano e 5º ano do Ensino Fundamental, mas podemos adaptá-las a qualquer ano de ensino: “De que forma você vê?”.

Dividimos a turma em grupos e cada um deles recebe cinco cubos de cada cor, papel e lápis correspondentes às cores dos cubos. Os objetivos a serem alcançados pelos alunos são identificar vistas e visualizar, comparar, desenhar e imaginar figuras em diferentes posições.

Além disso, essa abordagem permite que os alunos desenvolvam suas habilidades de processamento visual ao criar e representar vistas tridimensionais. Assim, fazemos construções com os cubos, como sugerido na Figura 18.

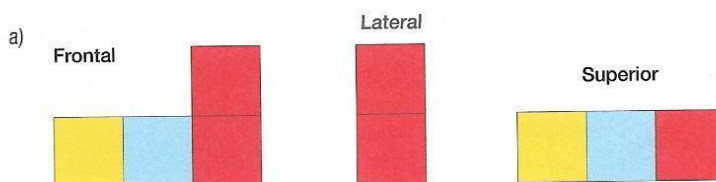
Figura 18: Sugestão de construção com quatro cubos coloridos.



Fonte: Smole e Diniz, 2016, p.71.

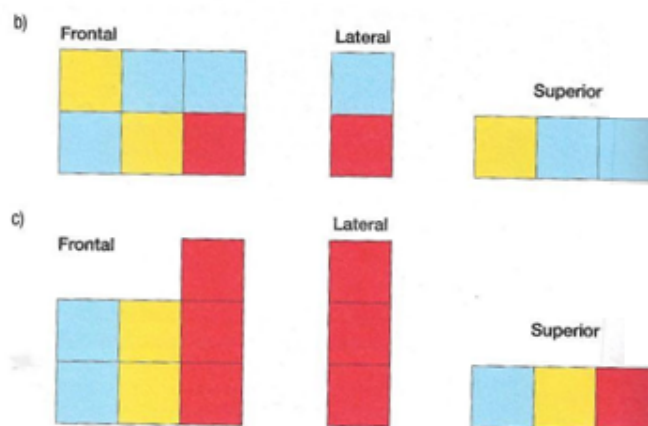
Após realizadas as construções, os alunos elaboram a representação das vistas superior, lateral e frontal com desenhos, para cada construção (Figuras 19 e 20), de preferência utilizando papel quadriculado ou malha pontilhada quadriculada.

Figura 19: Vistas ortogonais da primeira construção.



Fonte: Smole e Diniz, 2016, p. 71.

Figura 20: Vistas ortogonais da segunda e terceira construção, respectivamente.



Fonte: Smole e Diniz, 2016, p. 72.

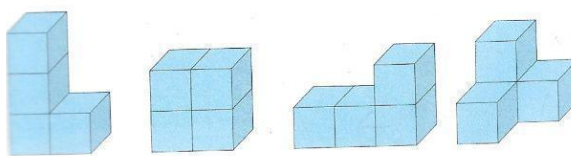
Uma ação que pode ser explorada com os alunos poderia ser: “Como seriam as vistas se todos os cubos fossem da mesma cor?”. Neste caso, a ideia é que os alunos identifiquem que modificações precisariam ser feitas nas vistas anteriormente traçadas.

Outra atividade sugerida pelas mesmas autoras é denominada de “Movendo cubos”. Nela dividimos a turma em grupos, atribuindo a cada equipe uma quantidade de cubos coloridos, lápis de cor e papel como recursos.

Para ilustrar esse processo, inicialmente, podemos distribuir quatro cubos azuis de mesmo tamanho por equipe e pedimos que os alunos empilhem os cubos em uma coluna, de modo que cubos vizinhos tenham as faces inteiramente coincidentes, colocando-os um sobre o outro.

Em seguida pedimos que elaborem outras construções a partir da coluna inicial de cubos, movendo apenas um cubo por vez. Na Figura 21 temos uma sequência de construções com cubos, geradas a partir do deslocamento de apenas um cubo da construção anterior, a partir da coluna inicial formada por quatro cubos.

Figura 21: Construções movendo um cubo da pilha inicial.

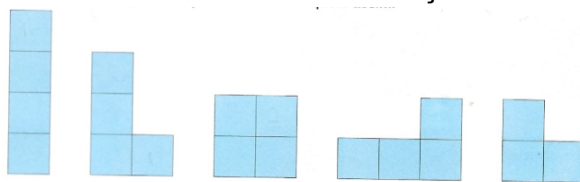


Fonte: Smole e Diniz, 2016, p. 73.

Podemos dispor mais dois cubos, além dos quatro iniciais, para cada equipe e desafiá-las a criarem novas composições movendo um cubo por vez, a partir de uma construção inicial.

Outra atividade que pode ser proposta é que sejam criados desafios envolvendo desenhos de diferentes vistas de construções já montadas. Nesses desafios, cada aluno registra em seu papel as representações das vistas correspondentes às pilhas construídas (Figura 22).

Figura 22: Vistas frontais de construções com cubos



Fonte: Smole e Diniz, 2016, p. 73.

Podemos realizar um desafio utilizando 10 cubos, propondo que os alunos construam uma figura com três cubos de largura e dois cubos de altura. Assim, podemos explorar se todas as soluções foram únicas e ver quais as possibilidades de realizar essa construção. Além disso, podemos solicitar que os alunos representem as vistas lateral, superior e frontal de suas soluções.

Esta proposta possibilita o desenvolvimento de atividades com “Vistas ortogonais de figuras espaciais”, referenciada na BNCC como Objeto de conhecimento do 9º ano, e sua habilidade relacionada: “(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva” (Brasil, 2018, p. 319).

De maneira idêntica, a habilidade “EM13MAT407” do Ensino Médio relacionada à Competência específica 4, sugere “Interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas” (Brasil, 2018, p. 531).

3.5 CONSTRUÇÃO DE MAQUETES COM EMBALAGENS

O uso de embalagens em atividades escolares permite que sejam confeccionados recursos manipulativos com material reciclável ou de baixo custo, auxiliando a participação dos alunos e professores na elaboração

desses recursos. Segundo Gitirana (2013), uma das razões para o professor fazer o uso de materiais reciclados em recursos manipulativos é possibilitar uma discussão com os alunos para formação da consciência sobre o reaproveitamento de materiais.

No ensino de Geometria, o uso de embalagens permite que sejam desenvolvidas atividades sobre o reconhecimento de forma e classificação das figuras; contorno de faces, através de desenhos ou carimbagem das embalagens; planificação e montagem de sólidos; e vistas e representações. Realizando, também, conexões com outros conteúdos matemáticos como Números e Grandezas e Medidas (Rêgo e Rêgo, 2010).

A construção de maquetes com embalagens permite explorar dois contextos. Um, usando a estrutura completa com as embalagens sobre a cartolina e, outro, usando o contorno da base das estruturas feitas com as caixas, configurando a Planta Baixa. Nesta atividade, disponibilizamos embalagens diversas e uma folha de cartolina para cada grupo de alunos, solicitando que construam a maquete de um quarteirão de um bairro.

Podemos combinar as maquetes de cada quarteirão, realizadas por cada grupo, para formar um bairro e, após isso, escolher dois pontos de referência para que os alunos indiquem como chegar de um ponto escolhido para outro. Explorando, assim, se existe apenas uma maneira de fazer o percurso, qual a menor e a maior distância e como podemos escolher um trajeto para ir de um ponto a outro do bairro.

Sugerimos colocar placas de trânsito, indicando o sentido das ruas, e refazer as orientações de deslocamento dos mesmos pontos escolhidos anteriormente, supondo que o caminho será feito em um carro. Considerando as mudanças realizadas, exploramos se o trajeto pode ser feito da mesma maneira e quais os melhores caminhos que podem ser feitos (Figura 23).

Figura 23: Maquete construída.



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=2VkJdbTrHrw>

A elaboração de maquetes com os alunos pode ser associada a construção de figuras semelhantes, com ampliação e redução dos objetos desenhados e embalagens com diferentes tamanhos, mas que se assemelham, como também na exploração de vistas ortogonais e plantas baixas. Essas atividades estão relacionadas às seguintes habilidades da BNCC:

- (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais
- (EF06MA28) Interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas
- (EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva (Brasil, 2018, p. 303-319).

Nesse contexto, podemos promover a exploração de situações-problemas com os alunos, oferecendo-lhes orientação na identificação de padrões presentes em cenários urbanos. Além disso, incentivamos explorar as diferentes perspectivas que podem ser observadas nas construções realizadas.

Utilizando embalagens como recursos didáticos manipulativos, podemos realizar atividades de planificação que envolvem diferentes tipos de caixas, permitindo que os alunos identifiquem os tipos de polígonos que compõem suas faces e suas características, tais como número de arestas, lados e vértices.

As habilidades da BNCC que envolvem tais conteúdos de Grandezas e Medidas no 6º ano do Ensino Fundamental são as citadas abaixo. Sugerem que sejam realizados problemas com medidas de sólidos geométricos que envolvem grandezas, como também analisar o perímetro de figuras planas ampliadas ou reduzidas.

(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.

(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área (Brasil, 2018, p. 303).

Nas habilidades que se referem ao cálculo de volumes de embalagens de formatos retangulares, prismas e cilindros, podemos citar no 7º ano utilizando unidades de medidas convencionais: “(EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico)” (Brasil, 2018, p. 309).

Durante o 8º ano, podemos citar duas habilidades a serem desenvolvidas que estão relacionadas ao conceito de volume de blocos retangulares e medidas de capacidade:

(EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.

(EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular (Brasil, 2018, p. 315)

A realização de atividades de planificação de embalagens, permite que os alunos desenhem as figuras planas obtidas e realizem resoluções de problemas envolvendo medidas de áreas, como citada na habilidade: “(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros,

triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos” (Brasil, 2018, p. 315).

No contexto do 9º ano, quanto a medidas de volumes de prismas e cilindro, podemos destacar a habilidade: “(EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas” (Brasil, 2018, p. 319).

O desenvolvimento das habilidades relacionadas a áreas e volumes pode ser realizado abordando atividades que solicitam aos alunos que realizem cálculos para determinar a área de cada face e a área total do sólido (embalagem), bem como seu volume. Essas atividades permitem identificar que embalagens de diferentes formatos podem ter área ou volume iguais (Figura 24).

Figura 24: Comparação de diferentes embalagens com mesma capacidade.



Fonte: Machado, 1990, p.10.

Na área de Matemática Financeira, podemos realizar atividades de investigação com panfletos de supermercados e embalagens, solicitando que os alunos levem para a aula e explorem os valores, interagindo com os demais colegas e comparando os preços dos produtos. Como também, trabalhar com criação e resolução de problemas a partir dos materiais dispostos pelos alunos.

O desenvolvimento de atividades que envolvem embalagens pode ser um recurso eficaz para auxiliar os alunos a atingirem o Nível 0 (Reconhecimento) da Teoria Van Hiele (Van de Walle, 2009). Essas atividades compreendem questões que incentivam o reconhecimento e a denominação das figuras com base nas características encontradas nas diversas embalagens. Além disso, ao explorar experiências geométricas apropriadas, os alunos têm a oportunidade de progredir para níveis mais avançados, como

Análise e, posteriormente, Abstração (Van de Walle, 2009), à medida que desenvolvem uma compreensão mais profunda das relações que existem entre as figuras e suas propriedades.

As atividades aqui destacadas constituem apenas algumas das possibilidades de desenvolvimento de uso de materiais manipulativos de baixo custo e/ou que podem ser facilmente coletadas para fins didáticos, como papel reutilizável e embalagens de produtos diversos, para o ensino de elementos de Geometria espacial.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O tema central da nossa investigação abordou materiais manipulativos para o ensino de Geometria Espacial na Educação Básica. Buscamos propor recursos manipulativos para o conteúdo de sólidos geométricos em atividades que podem ser exploradas ao longo do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, relacionando essas propostas a Objetos de conhecimento e Habilidades da BNCC (Brasil, 2018).

Em nosso referencial teórico abordamos dois documentos utilizados na organização curricular escolar brasileira, todavia, no levantamento das atividades propostas relacionamos apenas a Objetos de conhecimento e Habilidades encontrados no documento que atualmente regulamenta a Educação Básica do país. Também trazemos autores que discutem sobre a importância do uso de materiais manipulativos no ensino de Matemática, visando facilitar a compreensão de conteúdos da disciplina.

Com a leitura realizada dos documentos e dos textos de pesquisadores da área de Educação Matemática conseguimos melhorar nossa compreensão sobre as orientações propostas para o ensino de Geometria Espacial e o desenvolvimento dos conteúdos ao longo das diferentes etapas escolares da Educação Básica.

As atividades apresentadas e discutidas no presente trabalho foram selecionadas considerando o uso de materiais manipulativos de baixo custo em sua produção e/ou que pudessem ser facilmente encontradas para fins didáticos, tais como papel, canudos e embalagens de produtos, evitando, assim, atividades convencionais encontradas em livros didáticos ou que fossem difíceis de serem propostas em sala de aula, em especial de escolas da rede pública.

As atividades com recursos manipulativos buscam auxiliar o desenvolvimento da compreensão dos alunos através de experiências geométricas exploradas durante a realização das atividades com os materiais e o reforço de ideias com reflexões e desafios complementares.

A experiência de trabalhar com os recursos manipulativos com professores da Educação Básica durante as oficinas do Projeto PROBEX permitiu nossa mudança de perspectiva quanto às possibilidades de abordar os

conteúdos geométricos de forma interativa. Pudemos entender com a experiência prática, durante as oficinas do Projeto realizadas com os professores de Educação Básica, o desenvolvimento da confecção dos materiais, auxiliando os professores com instruções utilizando a linguagem matemática adequada, que muitas vezes não estão familiarizados a usar durante atividades interativas.

Com a elaboração do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), pudemos compreender as atividades com recursos concretos de modo teórico e prático, apresentando os conteúdos, os objetivos de acordo com a BNCC, as instruções passo a passo e as atividades exploratórias.

As atividades com materiais concretos são enriquecedoras para a formação profissional do educador, permitindo que suas aulas tenham um diferencial educativo. Outro recurso didático que podemos explorar são os jogos, realizados na disciplina de Estágio Supervisionado I e no Projeto de Extensão “Matemática em Ação: resgatando conteúdos não consolidados no período de aulas remotas” coordenado pelo Prof Dr Vinícius Martins Varela, vinculado ao Probex/UFPB 2022/2023, do qual participamos como monitória voluntária.

O processo de levantamento das atividades e das experiências durante os Projetos gerou o aumento de nosso interesse pelos diferentes recursos didáticos que podemos utilizar em sala de aula, que fogem do método convencional de apresentação de conteúdos com lousa e lápis, ressaltando aqui os do campo da Geometria. Esses recursos potencializam o desenvolvimento do pensamento geométrico, enriquecendo sua visão sobre o mundo físico e aumentando seu interesse pela Matemática.

REFERÊNCIAS

- ALVES, G. S.; SAMPAIO, F. F. **O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica**. Rio de Janeiro: NCE, UFRJ, 2002. 10 p. (Relatório Técnico, 20/02).
- BRASIL. Base Nacional Comum Curricular - Matemática: Ensino Fundamental e Ensino Médio. Brasília: 2018.
- BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática. Ensino de quinta à oitava série. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998: terceiro e quarto ciclos.
- BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática. Ensino Médio. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2002: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.
- GITIRANA, V. (org.). **Jogos com Sucata na Educação Matemática**. Recife: NEMAT, 2013.
- KALEFF, A. M. M. R. **Novas tecnologias no ensino da matemática: tópicos em ensino de geometria**. 2 ed. CEAD/UFF, 2016.
- KONZEN, S.; BERNARDI, L. T. M. S.; CECCO, B. L. **O CAMPO DO ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL: DO BRASIL COLÔNIA AO PERÍODO DO REGIME MILITAR**. Hipátia, Instituto Federal de São Paulo, v.2 n.2, p. 58-70, dez. 2017. Disponível em: <https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/712>. Acesso em: 01 de agosto de 2023.
- LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.
- MACHADO, N. J. **Os poliedros de platão e os dedos da mão**. 2 ed. São Paulo: Scipione, 1990.
- MENDES, I. A. **Tendências metodológicas no ensino de matemática**. Belém: EdUFPA, 2008.
- PRODANOV, C. C.; FREITAS, E.C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. – Novo Hamburgo: Feevale: 2013.
- RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M.; GAUDENCIO JUNIOR, S. **A geometria do origami: atividades de ensino com dobraduras**. 2 ed. João Pessoa: Editora do CCTA, 2018.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. **O Ensino da Geometria na Educação Básica: realidade e possibilidades**. 2009. Disponível em: <https://bit.ly/3gr6jsF>. Acesso em: 07 de outubro de 2023.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Materiais manipulativos para o ensino de sólidos geométricos**. Porto Alegre: Penso, 2016.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores em sala de aula**; tradução Paulo Henrique Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.