

Lameque Maciel Santos Filho

Uma Introdução ao Efeito Casimir
no Contexto do Campo de Dirac

João Pessoa - PB

2023

Lameque Maciel Santos Filho

**Uma Introdução ao Efeito Casimir
no Contexto do Campo de Dirac**

Trabalho de conclusão do curso de graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Centro de Ciências Exatas e da Natureza – CCEN

Departamento de Física – DF

Orientador: Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota

João Pessoa - PB

2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S237i Santos Filho, Lameque Maciel.

Uma introdução ao efeito Casimir no contexto do
Campo de Dirac / Lameque Maciel Santos Filho. - João
Pessoa, 2023.

41 p. : il.

Orientação: Herondy Francisco Santana Mota.

TCC (Curso de Bacharelado em Física) - UFPB/CCEN.

1. Efeito Casimir. 2. Campo de Dirac. 3. Vácuo
quântico. I. Mota, Herondy Francisco Santana. II.
Título.

UFPB/CCEN

CDU 53(043.2)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Coordenação dos Cursos de Graduação em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa do Trabalho
de Conclusão de Curso de Bacharelado em
Física, do discente Lameque Maciel Santos
Filho.

Aos 27 dias do mês de outubro do ano de 2023, às 10h, na sala 202 - Departamento de Física/CCEN/UFPB, realizou-se a Sessão Pública da Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso de Bacharelado em Física, do discente Lameque Maciel Santos Filho, sendo a Banca Examinadora constituída pelos docentes Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota (UFPB), orientador e presidente da banca, Prof. Dr. Eugenio Ramos Bezerra de Mello (UFPB) e Prof. Dr. Jansen Brasileiro Formiga (UFPB). Dando início aos trabalhos, o professor orientador e presidente da banca examinadora comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, concedeu a palavra ao discente para que fizesse a explanação de seu Trabalho de Conclusão de Curso, intitulado "*Um introdução ao efeito Casimir no contexto do Campo de Dirac*". Concluída a exposição, o discente foi arguido pelos membros presentes da Banca Examinadora. Após as arguições, a Banca, de comum acordo, declarou que o Trabalho apresentado foi aprovado com nota 10. E para constar, encerrada a sessão, lavrou-se esta ata que será assinada pelos presentes. João Pessoa, 27 de outubro de 2023.

Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota
UFPB – Orientador

Prof. Dr. Eugenio Ramos Bezerra de Mello
UFPB

Prof. Dr. Jansen Brasileiro Formiga
UFRB

Dedico esse trabalho ao meu pai, Lameque Maciel Santos (in memoriam).

Agradecimentos

Devido ao longo e árduo caminho percorrido muito antes de ingressar nesta instituição, agradeço inicialmente a minha capacidade de enxergar o mundo com satisfatória clareza, sem que haja a necessidade de atribuições divinas. Além disso, os obstáculos provenientes do processo acadêmico que culminaram nesta monografia foram superados pelo refinamento dessa mesma capacidade.

Nas demais instâncias, agradeço grandiosamente aos meus avós maternos, Severino Fernandes de Souza e Maria do Carmo de Souza Fernandes. Em especial, essa última figura, minha vovó Poruca, por ter decidido a favor do meu futuro sem ao menos esperar que eu fosse retribuí-la minimamente algum dia, dado caráter desconhecido de sua intervenção. Pode-se dizer que “dona” Poruca forjou o alicerce de uma grande estrutura na minha vida. Não é à toa que meu pai a amava, assim como eu a amo. Obrigado, vovó.

Agradeço também aos meus tios-avós, Gilda Gomes de Menezes Oliveira e José Severino de Oliveira (engenheiro civil formado na turma de 1972, aqui nessa mesma instituição). Juntos, esses dois me apoiaram de uma forma que jamais irei conseguir retribuir. Certamente, eles formam a espinha dorsal que me possibilitou ir além e conquistar grandes oportunidades.

Por fim, mas não menos importante, agradeço à minha mãe, Telma de Souza Fernandes Maciel. Que suportou e superou grandes desafios ao longo da vida ao mesmo tempo em que conseguia cuidar de mim. Obrigado, mamãe.

A minha namorada (e futura esposa), Euryellen Ferreira de Melo, pelo companheirismo e compreensão em todos os momentos referentes aos quase 3 anos juntos. Obrigado, amor.

Ao meu orientador, Herondy Francisco Santana Mota, por acreditar em mim e traçar os caminhos para a obtenção do conhecimento que tenho hoje referente ao conteúdo exibido neste trabalho.

Aos amigos e amigas da graduação e da pós-graduação, pelos momentos de discussão e descontração. Em especial, Robson Alves Dantas, Crizam Cesar da Silva Rodrigues, Giulia Aleixo, João Artur Cordeiro Duarte, Luan Thallys Brandão, Claudio Alves Pessoa Junior e Gessiane Cipriano Galdino da Silva.

Fora do âmbito acadêmico, agradeço a minha grande amiga (e futura delegada) Larissa Kelly Cavalcante da Silva, Adriano Alves da Silva, Netzer Cardoso e os membros do IPV.

A UFPB e CNPq, pelo apoio financeiro.

*"Increscunt animi, virescit volnere virtus."
(Friedrich Nietzsche)*

Resumo

Na intenção de estudarmos o efeito Casimir para o campo fermiônico, tratamos inicialmente de entender a equação de Dirac: sua motivação, aspectos matemáticos e físicos. Efetuamos a resolução desta equação através das coordenadas cartesianas, de modo a obter suas soluções gerais normalizadas, ou seja, as soluções livres. Por conseguinte, consideramos a densidade lagrangiana e obtivemos, daí, o respectivo tensor energia-momento do campo de Dirac. Uma vez conhecida estas soluções, promovemos o campo à operador com a chamada segunda quantização. Feito isso, tornou-se possível a investigação de algumas quantidades fundamentais acerca da natureza, provenientes das flutuações no vácuo quântico do campo. Nesse sentido, nossa primeira abordagem consistiu na análise do campo espinorial submetido a condição de contorno de sacola, cujos resultados manifestam o nosso fenômeno de interesse, o efeito Casimir. Em nossa segunda abordagem, submetemos o campo à condição de anti-hélice e nos certificamos da influência que a topologia possui nas flutuações do vácuo quântico fermiônico, ao vislucrar novamente o efeito Casimir, dessa vez conhecido na literatura como efeito Casimir topológico. Por fim, vale enfatizar que todo o estudo contido neste trabalho se deu em um espaço-tempo plano, constituído por $(3 + 1)$ dimensões. Para ser mais específico, o cenário matemático considerado é o espaço-tempo de Minkowski.

Palavras-chave: Efeito Casimir. Campo de Dirac. Vácuo Quântico.

Abstract

In order to study the Casimir effect for the fermionic field, it was first necessary to understand the Dirac equation: its motivation, mathematical and physical aspects. We solve such an equation in Cartesian coordinates, and obtain its normalized general solutions, that is, the free solutions. Furthermore, we consider the Lagrangian density referring to those free solutions and obtain the corresponding energy-momentum tensor of the Dirac field. Once these solutions are known, we promote the field to an operator with the so-called second quantization. Once this was done, it became possible to investigate some fundamental quantities about nature, arising from fluctuations in the quantum vacuum of the field. In this sense, our first approach consisted of analyzing the spin field subjected to the bag boundary condition, the results of which manifest our interest phenomenon, the Casimir effect. In our second approach, we subject the field to the anti-helix condition and make sure of the influence that topology has on the fluctuations of the fermionic quantum vacuum, by once again seeing the Casimir effect manifestation, this time known as the topological Casimir effect. Finally, it is worth emphasizing that the entire study contained in this work took place in a flat space-time, in $(3 + 1)$ dimensions. To be more specific, the mathematical scenario considered is the Minkowski spacetime.

Keywords: Casimir Effect. Dirac Field. Quantum Vacuum.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	A EQUAÇÃO DE DIRAC	12
2.1	Consequências da Linearização de Dirac	12
2.2	Forma Covariante da Equação	15
2.3	Partícula Livre de Dirac e Confinamento no Eixo Oz	17
2.4	O campo de Dirac	20
2.5	Tensor Energia-momento	20
2.6	Propriedades das matrizes γ	21
3	O EFEITO CASIMIR	23
3.1	Condição de sacola do MIT	23
3.2	Energia de Casimir I	24
3.3	Caso não-massivo	25
3.4	Caso massivo	29
4	O EFEITO CASIMIR TOPOLÓGICO	33
4.1	Forma Geral da Energia	33
4.2	Manipulações na Expressão Geral	34
4.3	Energia de Casimir II	36
4.3.1	Caso não-massivo	36
4.3.2	Caso massivo	37
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	38
	REFERÊNCIAS	40

1 Introdução

Nas considerações mais comuns, o conceito de vácuo se resume em um espaço completamente vazio. Já na Mecânica e no Eletromagnetismo clássicos, por exemplo, essa interpretação evoluiu: assim como um meio material é o substrato para a propagação das ondas mecânicas, o vácuo, agora, inclui a propagação de ondas eletromagnéticas. Não obstante, o vácuo permanece sendo um meio que não responde à estímulos externos. Por outro lado, no contexto quântico, o vácuo é definido como um estado quântico de mais baixa energia, estado este que flutua constantemente devido a criação e aniquilação de partículas virtuais¹. Essas partículas estão em uma escala de espaço e tempo muito diminuta, de modo que o princípio da incerteza de Heisenberg tem sua validade fortemente considerada. Durante suas existências, tais partículas podem interagir entre si e com agentes externos, sejam eles campos ou objetos macroscópicos.

Portanto, o vácuo descrito no contexto quântico é capaz de se desestabilizar, decaindo em pares de partículas reais carregadas. Constituindo, dessa forma, uma estrutura ativa e complexa responsável pela existência do efeito Casimir. Assim conhecido porque, em 1948, H.B.G Casimir previu a existência de uma força atrativa entre duas placas metálicas neutras quando inseridas no vácuo de um campo quântico. A distância entre as placas era considerada diminuta quando comparada com suas dimensões. A previsão de Casimir, no entanto, só pôde ser experimentalmente verificada dez anos depois por Sparnaay [8], cujo experimento, embora de baixa precisão, forneceu resultados que estavam de acordo com a previsão de Casimir. Mais tarde, em 1997, Lamoreaux [9] foi o responsável por elaborar um experimento de alta precisão, confirmando o fenômeno, uma das manifestações mais diretas da existência de flutuações quânticas do vácuo. A partir daí, o interesse por este efeito foi crescendo cada vez mais dentro do contexto da Teoria Quântica de Campos (TQC).

As bases da TQC foram estabelecidas por Dirac. A partir da quantização dos campos bosônicos (ou escalares), somos levados naturalmente à fazer o mesmo com qualquer outro campo clássico, bastando levar em consideração as propriedades bem definidas das suas respectivas partículas. Nesse sentido, o conteúdo deste trabalho é voltado unicamente ao tratamento dos campos fermiônicos no contexto do efeito Casimir, embora a maneira mais simples de se obter as quantidades responsáveis pela caracterização do fenômeno seja através de campos escalares. Além disso, os campos fermiônicos são assim conhecidos por representarem partículas de spin $\frac{1}{2}$ e, portanto, estaremos o tempo todo lidando com um objeto matemático fundamental, dito espinor.

¹ O leitor deve perceber que acabamos de caracterizar três cenários distintos, cujo conceito de vácuo é próprio em cada um deles.

Diversos detalhes inerentes ao tratamento desse tipo de objeto serão expostos, levando em conta o objetivo final que é a contemplação do efeito Casimir. Tanto na sua configuração padrão, que consiste em inserir objetos macroscópicos no vácuo do campo, quanto sob a influência de alterações topológicas. Em ambos os casos, tem-se resultados para o campo de Dirac massivo e não-massivo em um espaço-tempo plano com assinatura $(+1, -1, -1, -1)$, tendo sido adotado o sistema de unidades naturais, no qual a velocidade da luz c e a constante de Planck \hbar são iguais a unidade: $c = \hbar = 1$.

2 A equação de Dirac

Historicamente, em 1928, Dirac buscava uma equação de onda relativística que possuísse a forma da equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad (2.1)$$

por ela fornecer uma densidade de probabilidade positiva definida. De fato, haviam dúvidas acerca da equação de Klein-Gordon (KG), pois esta não resulta em uma tal densidade [11]. Na época, a interpretação da densidade de carga não era conhecida e teria pouco sentido físico, dado que os mésons π^+ e π^- (dotados de spin 0) ainda eram desconhecidos. Assim sendo, na tentativa de contornar a então falta de sentido atribuída à equação de KG, Dirac, observando que o lado esquerdo da equação (2.1) é linear no tempo, buscou um hamiltoniano que também fosse linear nas coordenadas espaciais². Para tanto, desejamos que a equação (2.1) possua a seguinte forma³:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar c}{i} \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \beta mc^2 \right] \psi \equiv \hat{H}\psi. \quad (2.2)$$

Naturalmente, essa equação deve retornar grandezas físicas já conhecidas, como, por exemplo, a relação de dispersão relativística para a partícula livre,

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (2.3)$$

Deve, ainda, fornecer uma equação de continuidade para a densidade de probabilidade e ser covariante mediante transformação de Lorentz.

2.1 Consequências da Linearização de Dirac

De acordo com a equação (2.2), somos capazes de associar os operadores energia e momento aos seus respectivos auto-valores, isto é,

$$E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad p_i \longrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (2.4)$$

de modo que seja possível reescrevê-la de maneira mais conveniente:

$$E = c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc^2 \equiv c \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

² Devido a estrutura do espaço-tempo que considera tempo e espaço de modo equivalente ou, em outras palavras, ambos são tratados como coordenadas.

³ Inicialmente, ignoramos a natureza dos coeficientes α_i e β . Descobriremos no decorrer da construção.

Se multiplicarmos a equação (2.5) por ela mesma e usarmos a convenção da soma de Einstein para inibir o somatório⁴,

$$\begin{aligned} E^2 &= \left(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 \right)^2 \\ &= \left(c\alpha_i p_i + \beta mc^2 \right) \left(c\alpha_j p_j + \beta mc^2 \right) \\ &= \left[c^2 \alpha_i \alpha_j p_i p_j + \beta^2 m^2 c^4 \right] + \alpha_i p_i \beta mc^3 + \beta mc^3 \alpha_j p_j, \end{aligned}$$

e se, além disso, observarmos o caráter tensorial da expressão, podemos escrever:

$$E^2 = \left[c^2 \alpha^2 p^2 + \beta^2 m^2 c^4 \right] + mc^3 \left(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i \right) p_i. \quad (2.6)$$

Portanto, recuperar a relação de dispersão relativística, (2.3), implicará, primeiramente, na anulação dos termos cruzados. Isso só é possível se α e β forem quantidades anticomutativas, naturalmente representadas através de matrizes $n \times n$ denominadas, a partir de agora, matrizes de Dirac. Por conseguinte, ao compararmos as equações (2.3) e (2.6), seremos conduzidos às seguintes relações:

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 2\delta_{ij} \mathbb{1} \quad i, k = 1, 2, 3 \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= \mathbf{0} \quad i = 1, 2, 3 \\ \beta^2 &= \mathbb{1}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde δ_{ik} é o delta de Kronecker, $\mathbb{1}$ e $\mathbf{0}$ são as matrizes unitária e nula, respectivamente. Outra característica necessária dessas matrizes é a hermiticidade, isto permite que sejamos coerentes com a mecânica quântica, afinal, o hamiltoniano está associado a um observável e este, por sua vez, refere-se à operadores hermitianos. Dito isto, teremos:

$$\hat{\alpha}_i^\dagger = \hat{\alpha}_i, \quad \hat{\beta}^\dagger = \hat{\beta}, \quad (2.8)$$

onde o símbolo \dagger representa o complexo conjugado transposto.

Vamos agora determinar a mínima dimensão n das matrizes de Dirac. Primeiro, notamos que de acordo com as relações (2.7), o traço tr será

$$\text{tr} \alpha_i = \text{tr} \beta^2 \alpha_i = -\text{tr} \beta \alpha_i \beta = -\text{tr} \alpha_i \quad \Rightarrow \text{tr} \alpha_i = 0. \quad (2.9)$$

Afinal, utilizando as duas últimas relações em (2.7), obtemos

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad \Rightarrow \alpha_i \beta = -\beta \alpha_i \quad \Rightarrow \alpha_i \beta^2 = -\beta \alpha_i \beta \quad \Rightarrow -\alpha_i = \beta \alpha_i \beta.$$

⁴ A partir de agora, ao longo de todo o texto, sempre será admitida esta convenção. O leitor interessado em mais detalhes poderá consultar, por exemplo, o livro [11].

Observando a primeira linha da equação (2.7), vemos que $\alpha_i^2 = 1$. Isto é, os autovalores de α_i são ± 1 . Portanto, para concordar com a equação (2.9), a dimensão n das matrizes deve ser par. Supondo $n = 2$, haverão, no máximo, três matrizes anticomutativas linearmente independentes. Por exemplo, as matrizes de Pauli [11],

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

mais a matriz identidade, formam uma base hermitiana 2×2 . No entanto, a matriz β não poderá ser considerada em duas dimensões. Assim sendo, tomamos $n = 4$ dimensões. Daí, as relações (2.7) serão satisfeitas bastando escolher, para isso,

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.11)$$

Como o fez Dirac [19]. Com isso, poderemos escrever explicitamente a equação na forma desejada, isto é, de acordo com a equação (2.2):

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{\hbar c}{i} \left(\hat{\alpha}_k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) + \hat{\beta} m c^2 \right] \psi \quad (2.12)$$

onde o hamiltoniano é dado pelo termo entre colchetes:

$$\hat{H} = -i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m c^2 = \begin{pmatrix} m c^2 \mathbb{1} & -i\hbar c \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \\ -i\hbar c \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} & -m c^2 \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

e as matrizes são

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

Ora, mas toda essa estrutura matemática exige que a função de onda $\psi(x)$ na equação (2.12) seja um objeto matemático denominado espinor, escrito como se fosse um simples vetor coluna:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Agora, iremos encontrar a equação da continuidade composta por grandezas de extrema importância que serão discutidas logo em seguida. Para isto, nosso primeiro passo será multiplicar à esquerda da equação (2.12) por ψ^\dagger , isto é, pelo complexo conjugado transposto do espinor:

$$i\hbar \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \psi^\dagger \hat{\alpha}_k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + m c^2 \psi^\dagger \hat{\beta} \psi. \quad (2.15)$$

Por conseguinte, consideramos a equação (2.12) conjugada⁵ e a multiplicamos pela direita por ψ :

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar c}{i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} \hat{\alpha}_k \psi + m c^2 \psi^\dagger \hat{\beta} \psi. \quad (2.16)$$

⁵ Nessa etapa, é útil relembrar a hermiticidade das matrizes que explicitamos na equação (2.8).

A subtração da equação (2.16) na equação anterior, isto é, (2.15) nos conduzirá a seguinte expressão:

$$i\hbar \frac{\partial(\psi^\dagger \psi)}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \frac{\partial(\psi^\dagger \hat{\alpha}_k \psi)}{\partial x^k}, \quad (2.17)$$

que pode ser reescrita na forma conhecida abaixo [11]:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = 0, \quad (2.18)$$

onde definimos as densidades de probabilidade e de corrente, respectivamente:

$$\varrho \equiv \psi^\dagger \psi, \quad j^k \equiv c\psi^\dagger \hat{\alpha}^k \psi. \quad (2.19)$$

Há algo de muito satisfatório aqui: a densidade de probabilidade definida acima está de acordo com o esperado, uma vez que ela é positiva definida! Como desejou Dirac, sua equação solucionou o problema da densidade de probabilidade que poderia ser negativa de acordo com a equação de KG. No entanto, como veremos nas seguintes seções, as soluções de energias negativas mantêm-se existentes.

2.2 Forma Covariante da Equação

Nesta seção, apresentaremos a forma covariante da equação de Dirac e, além disso, convencionaremos o uso das unidades naturais a fim de facilitar as manipulações algébricas que se darão ao longo de todo o texto. Feito isso, utilizaremos as equações (2.18) e (2.19) para escrevermos a 4-corrente. Por fim, é útil apresentarmos algumas propriedades das matrizes γ .

Primeiramente, reescrevemos a equação de Dirac (2.12) da seguinte forma:

$$i\partial_t \psi + ic\hbar \left(\alpha_j \partial_j \psi \right) - \beta mc^2 \psi = 0. \quad (2.20)$$

De modo que, ao multiplicarmos ambos os lados por β/c e considerarmos as relações (2.7), teremos:

$$i\beta \frac{\partial \psi}{\partial(ct)} + i\beta \left(\alpha_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) - \frac{mc}{\hbar} \psi = 0. \quad (2.21)$$

A partir de agora, faremos $\hbar = c = 1$ e trataremos os índices gregos distintamente dos índices latinos: o primeiro indicará o conjunto de coordenadas do espaço-tempo, enquanto o último será responsável unicamente pela parte espacial. Daí, tem-se que

$$x \equiv x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x^j) \quad (2.22)$$

e, conseqüentemente, a equação (2.21) pode ser escrita na forma

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (2.23)$$

ou simplesmente

$$(i\rlap{-}\not{\partial} - m)\psi = 0, \quad \rlap{-}\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu. \quad (2.24)$$

Sendo definidas as famosas matrizes γ :

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^j = \beta\alpha^j. \quad (2.25)$$

cujas propriedades iremos exibir no final do capítulo.

Embora tenhamos apresentado essas duas maneiras de escrevermos a equação de Dirac, neste texto usaremos a forma dada por (2.23). Uma vez que ela é conveniente ao nosso propósito. É importante ressaltar que a equação adjunta, ou seja, que envolve o ψ^\dagger , exigirá a definição de um $\bar{\psi}$ para que seja coerente com a forma covariante recém exibida. Vejamos, então, como proceder.

Primeiramente, se explicitarmos as partes temporal e espacial da equação (2.23), ao tomarmos a equação conjugada, somos conduzidos à

$$\psi^\dagger(i\partial_0\gamma^{0\dagger} + i\partial_j\gamma^{j\dagger} + m) = 0,$$

onde a derivada, nesse caso, atua no espinor à esquerda. No entanto, $\gamma^{j\dagger} = -\gamma^j$ e, dessa forma,⁶

$$\psi^\dagger(i\partial_0\gamma^0 - i\partial_j\gamma^j + m) = 0. \quad (2.26)$$

Devido o sinal negativo no segundo termo entre parênteses, essa expressão não pode ser reescrita de maneira que ela seja a conjugação da equação (2.23). Para revertermos a situação, multiplica-se por γ^0 de modo que a relação de anticomutação dessas matrizes nos permita escrever o seguinte:

$$\bar{\psi}(i\partial_0\gamma^0 + i\partial_j\gamma^j + m) = 0, \quad \bar{\psi} \equiv \psi\gamma^0. \quad (2.27)$$

Conseqüentemente, a equação de Dirac conjugada em sua forma covariante será dada por

$$\bar{\psi}(i\overleftarrow{\partial}_\mu\gamma^\mu + m) = 0. \quad (2.28)$$

Aqui, a notação $\overleftarrow{\partial}_\mu$ é usada apenas para assegurar que a atuação da derivada parcial ∂_μ será à esquerda do $\bar{\psi}$. Não é necessário carregá-la por todo o tratamento, desde que se tenha em mente a atuação correta.

Assim, as expressões (2.23) e (2.28) constituem a forma covariante da equação de Dirac, cujas soluções ψ e $\bar{\psi}$ serão analisadas a partir da próxima seção mediante o estudo da partícula livre. Mas, antes disso, vamos reescrever a equação (2.18) para construirmos a 4-corrente⁷. Sabendo que $\partial_i = \text{div}$, então,

$$\partial_i \varrho + \partial_i j^i = 0$$

⁶ Veremos isso no fim da seção, ao tratarmos unicamente da álgebra das matrizes γ .

⁷ Embora seja uma densidade de corrente no espaço-tempo, é usual chamarmos apenas de "4-corrente".

pode ser reescrita na estrutura de 4-vetor, resultando na conservação da 4-corrente $j^\mu = (\varrho, j^i)$:

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.29)$$

2.3 Partícula Livre de Dirac e Confinamento no Eixo Oz

Iremos, agora, examinar as soluções da equação de Dirac para o caso de uma partícula livre. O espinor $\psi(x)$ deve, obviamente, obedecer a equação de Dirac (2.23):

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0, \quad (2.30)$$

cuja solução pode ser escrita, em geral, como uma onda livre:

$$\psi(x) = Nu e^{-ik_\mu x^\mu} = N \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-ik_\mu x^\mu}. \quad (2.31)$$

Onde N é uma constante de normalização e u é nada mais que um espinor constante da solução. A substituição dessa solução na equação (2.30) nos conduzirá à

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)u = 0. \quad (2.32)$$

O caso não trivial pressupõe $u \neq 0$ e, portanto, devemos ter

$$\gamma^\mu k_\mu = m \quad \Rightarrow \quad \gamma^\mu \gamma^\nu k_\mu k_\nu = m^2. \quad (2.33)$$

que, tendo levado em conta as relações das matrizes γ , resultará em

$$k_\mu k^\mu = m^2. \quad (2.34)$$

Notemos o seguinte detalhe: esse resultado expresso pela equação (2.34) nos permite identificar o 4-vetor k_μ com o 4-momento, pois se trata de uma relação estabelecida por este último, p^μ , cuja contração fornece a equação da energia relativística

$$E^2 = p^2 + m^2. \quad (2.35)$$

Verifiquemos isto rapidamente a seguir.

Seja $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ o 4-momento já conhecido, então,

$$p^\mu p_\mu = m^2, \quad (2.36)$$

mas como estamos utilizando unidades naturais o vínculo entre p^μ e k^μ se dá através da expressão [1]

$$p^\mu = k^\mu, \quad (2.37)$$

então fica evidente a identificação.

Retornemos agora à equação (2.32) expressando o espinor u na forma matricial explicitada conforme solução (2.31). Ao separarmos a parte temporal $\mu = 0$ da parte espacial nos termos entre parênteses, teremos

$$\left\{ \begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^j p_j \\ -\sigma^j p_j & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \quad (2.38)$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{pmatrix} (E - m) & \sigma^j p_j \\ -\sigma^j p_j & -(E + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \quad (2.39)$$

A resolução do sistema estabelecido pela equação acima nos permitirá escrever χ em termos de φ ; tem-se o resultado abaixo:

$$\chi = -\frac{\sigma^j p_j}{m + E} \varphi. \quad (2.40)$$

Com isso, podemos reescrever a solução (2.31) na forma⁸

$$\psi = N e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} e^{-ik_j x^j} \varphi \\ -\frac{\sigma^j k_j}{m + \omega} e^{-ik_j x^j} \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

uma vez que será mais conveniente para nossas futuras manipulações.

A esta altura, é importante notar a existência das soluções com modos de vibrações positivos e negativos, que já podem ser presumidas mediante breve atenção na equação (2.35): Ao efetuarmos a raiz quadrada em ambos os lados, as energias positiva e negativa são responsáveis, respectivamente, pelas soluções

$$\psi^{(+)} = N^{(+)} e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} e^{-ik_j x^j} \varphi \\ -\frac{\sigma^j k_j}{m + \omega} e^{-ik_j x^j} \varphi \end{pmatrix}, \quad \psi^{(-)} = N^{(-)} e^{i\omega t} \begin{pmatrix} \frac{\sigma^j p_j}{m + \omega} e^{-ik_j x^j} \chi \\ e^{-ik_j x^j} \chi \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Onde adicionamos o índice (+) na solução (2.41) apenas para distinguir daquela que poderá ser obtida de forma totalmente análoga e que possui o índice (-), caracterizando o sinal da energia, conforme (2.42).

Apenas na intenção de familiarizar o leitor com alguns aspectos algébricos do formalismo que permeia toda nossa discussão, vejamos como encontrar as auto-freqüências ω do sistema físico em análise. Partiremos das equações (2.38) e (2.39)⁹,

$$\varepsilon \varphi = \hat{\sigma} \cdot \hat{p} \chi + m \varphi$$

$$(\varepsilon - m) \varphi = c \hat{\sigma} \cdot \hat{p} \chi \quad \chi = \left(\frac{\hat{\sigma} \cdot \hat{p}}{m + \varepsilon} \right) \varphi$$

⁸ Para essa passagem, é importante lembrar que $E = \hbar\omega$, mas $\hbar = 1$, devido a utilização das unidades naturais estabelecida na seção anterior.

⁹ Aqui, fizemos a substituição $E = \varepsilon$.

A substituição de χ na equação do lado esquerdo nos permitirá escrever, após algumas manipulações e a utilização da forma explícita do operador 3-momento, $\hat{p} = -i\nabla$,

$$(\varepsilon^2 - m^2)\varphi = (\hat{\sigma} \cdot \hat{p})(\hat{\sigma} \cdot \hat{p}\varphi) = -(\hat{\sigma} \cdot \nabla)(\hat{\sigma} \cdot \nabla)\varphi.$$

Notando que

$$(\hat{\sigma} \cdot \nabla)(\hat{\sigma} \cdot \nabla)\varphi = (\sigma_i \nabla_i)(\sigma_j \nabla_j \varphi) = \sigma_i \sigma_j \nabla_i (\nabla_j \varphi),$$

tem-se

$$(\hat{\sigma} \cdot \nabla)(\hat{\sigma} \cdot \nabla)\varphi = \mathbb{1}\nabla^2\varphi$$

e, conseqüentemente,

$$(\varepsilon^2 - m^2)\varphi + \nabla^2\varphi = 0$$

Cujas soluções, para o caso em que desejamos confinar o campo no eixo Oz , podem ser superpostas na seguinte forma geral:

$$\varphi(\mathbf{r}) = e^{i(k_x x + k_y y)}(ue^{ik_z z} + ve^{-ik_z z}). \quad (2.43)$$

Onde u e v são bi-espinores, isto é, espinores contendo duas componentes. Assim, ao explicitarmos os termos tal como

$$\nabla^2\varphi = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right),$$

onde, por pura conveniência, escrevemos

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -k_x^2\varphi, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -k_y^2\varphi, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -k_z^2\varphi,$$

e, portanto,

$$(\omega^2 - m^2)\varphi = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\varphi$$

exigirá que as auto-frequências sejam dadas por

$$\omega^2 - m^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

A fim de simplificar a expressão, somos tentados a definir $k_{\perp}^2 \equiv k_x^2 + k_y^2$. Feito isso, teremos

$$\omega^2 = m^2 + k_{\perp}^2 + k_z^2. \quad (2.44)$$

onde o símbolo \perp denotará as direções ortogonais àquela em que se dá o confinamento, isto é, o eixo Oz ¹⁰. Esta equação é idêntica à (2.35), com as devidas identificações já comentadas. De modo que o detalhamento efetuado anteriormente seria dispensável se não fosse motivado pelo objetivo de familiarizar o leitor, como havíamos dito.

¹⁰ O leitor pode se deparar com textos onde o autor prefere usar a notação k_{\parallel} , significando que são direções paralelas às superfícies.

2.4 O campo de Dirac

Na intenção de facilitar nossas manipulações, reescrevemos as soluções de frequências positiva e negativa, dadas na equação (2.42), da seguinte maneira:

$$\psi_{J,\alpha}^{(+)}(x) = e^{-i\omega_J t} \chi_{J,\alpha}^{(+)}(\mathbf{r}), \quad \psi_{J,\alpha}^{(-)}(x) = e^{i\omega_J t} \chi_{J,\alpha}^{(-)}(\mathbf{r}). \quad (2.45)$$

Tais soluções obedecem as relações abaixo [1]:

$$(\psi_{J,\alpha}^{(\pm)}(x), \psi_{J',\alpha'}^{(\pm)}(x)) = \delta_{JJ'} \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (\psi_{J,\alpha}^{(\pm)}(x), \psi_{J',\alpha'}^{(\mp)}(x)) = 0. \quad (2.46)$$

J é o vetor de onda generalizado e $\alpha = 1, 2$ é o índice do spin. Ademais, o produto escalar de duas soluções da equação de Dirac possui a seguinte forma:

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_V d\mathbf{r} \psi_1^\dagger \psi_2. \quad (2.47)$$

Operador campo é [1]:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_J \sum_{\alpha=1,2} \left[\psi_{J,\alpha}^{(+)}(x) b_{J,\alpha} + \psi_{J,\alpha}^{(-)}(x) d_{J,\alpha}^\dagger \right], \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_J \sum_{\alpha=1,2} \left[\bar{\psi}_{J,\alpha}^{(+)}(x) b_{J,\alpha}^\dagger + \bar{\psi}_{J,\alpha}^{(-)}(x) d_{J,\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Onde $b_{J,\alpha}$, $b_{J,\alpha}^\dagger$ são operadores de aniquilação e criação de partículas e $d_{J,\alpha}$, $d_{J,\alpha}^\dagger$ são operadores de aniquilação e criação de antipartículas, respectivamente. Suas relações são representadas pelos anticomutadores abaixo:

$$\{b_{J,\alpha}, b_{J',\alpha'}^\dagger\} = \{d_{J,\alpha}, d_{J',\alpha'}^\dagger\} = \delta_{JJ'} \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (2.49)$$

$$\{b_{J,\alpha}, b_{J',\alpha'}\} = \{b_{J,\alpha}^\dagger, b_{J',\alpha'}^\dagger\} = \{d_{J,\alpha}, d_{J',\alpha'}\} = \{d_{J,\alpha}^\dagger, d_{J',\alpha'}^\dagger\} = 0.$$

Definimos, ainda, o estado de vácuo $|0\rangle$ de modo que:

$$b_{J,\alpha}|0\rangle = d_{J,\alpha}|0\rangle = 0. \quad (2.50)$$

2.5 Tensor Energia-momento

Veremos, agora, como escrever o tensor energia-momento do campo de Dirac. Para tanto, faz-se necessário explicitar algumas etapas do desenvolvimento algébrico. Dessa forma, estaremos evitando possíveis confusões àqueles que não estão familiarizados com o algebrismo contido ao longo de todo o texto. Primeiro, como é padrão, dá-se a lagrangiana do campo:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (2.51)$$

que também pode ser escrita na forma

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right] - m \bar{\psi} \psi. \quad (2.52)$$

Para obtermos o tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, utilizamos a lagrangiana na forma dada pela equação (2.52), cujos passos de obtenção são relativamente simples e, por isso, o faremos abaixo:

$$\begin{aligned} i \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) &= \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) + \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) \right] + \frac{i}{2} \left[(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right] \\ &= \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right] + \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right] \\ &= \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi \right] + \frac{i}{2} \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi). \end{aligned}$$

O último termo do lado direito é nulo e a verificação desse fato é facilmente notada ao somarmos à equação de Dirac (2.23) sua respectiva equação conjugada (2.28). A substituição desse resultado na equação (2.51) nos conduzirá à (2.52), como queríamos mostrar. Daí, mediante a utilização da expressão geral para o tensor $T_{\mu\nu}$, a saber,

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\nu \psi + \partial_\nu \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.53)$$

teremos

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\nu \psi) - (\partial_\nu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi \right]. \quad (2.54)$$

É importante notar que, se o cálculo de $T_{\mu\nu}$ for efetuado a partir da equação (2.51), podemos, já de antemão, escrever

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\nu \psi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.55)$$

pois, em (2.53), o segundo termo do lado direito será nulo de modo que o resultado (2.54) é reobtido. Evidentemente, não importa qual expressão será utilizada, a física não depende disso. Ou seja, poderíamos simplesmente escolher a mais conveniente e seguir adiante, mas, como havíamos dito, a motivação aqui é justamente alertar o leitor das variações existentes na literatura.

2.6 Propriedades das matrizes γ

Como já vimos na equação (2.7), as matrizes hermitianas α e β definem as tão conhecidas matrizes gamas:

$$\gamma^0 \equiv \beta \quad \gamma^i \equiv \beta \alpha^i, \quad (2.56)$$

onde $i = 1, 2, 3$. A partir de então, podemos expressá-las na forma compactada por γ^μ , como podemos observar na equação (2.23), com $\mu = 0, \dots, 3$. Essas matrizes, por sua vez, satisfazem as relações de anticomutação¹¹

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1} \quad (2.57)$$

e a condição de hermiticidade

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0. \quad (2.58)$$

As demais propriedades são consequências dessas acima e independem da representação escolhida para as matrizes γ .

Podemos, ainda, definir uma outra matriz:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (2.59)$$

obedecendo as propriedades abaixo.

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5. \quad (2.60)$$

Não devemos nos enganar quanto aos índices gregos, pois esses ainda continuam representando apenas os valores 0, 1, 2, 3. Além disso, podemos escrever as matrizes gama com índice covariante:

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu. \quad (2.61)$$

A seguir, vejamos algumas manipulações de nosso interesse que resultam da equação (2.58):

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j, \quad \gamma^j\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^j. \quad (2.62)$$

Para finalizar esta seção, demonstraremos as duas últimas relações exibidas acima:

$$\gamma^{j\dagger} = (\beta\alpha^j)^\dagger = \alpha^{j\dagger}\beta^\dagger = \alpha^j\beta = -\beta\alpha^j = -\gamma^j,$$

$$\gamma^j\gamma^0 = \gamma^0\gamma^0\gamma^j\gamma^0 = \gamma^0\gamma^{j\dagger} = -\gamma^0\gamma^j.$$

Essas e outras propriedades envolvendo as matrizes gama poderão ser encontradas no apêndice A da referência [1].

¹¹ O leitor deve ter em mente que o lado esquerdo da equação abaixo representa uma matriz 4×4 , de modo que o lado direito também deve cumprir essa característica. Por este motivo, o lado direito da equação possui uma matriz unitária de mesma ordem e esse fato poderá ser omitido em diversas partes do texto.

3 O efeito Casimir

Neste capítulo, será considerada a presença de duas placas neutras e perfeitamente condutoras, que estão localizadas no vácuo quântico do campo fermiônico. Vamos considerar, ainda, que as placas estejam paralelas e separadas por uma distância a , muito menor que as dimensões das placas, de modo que o vácuo quântico sentirá e responderá à condição de contorno imposta ao campo.

3.1 Condição de sacola do MIT

É comum iniciar a análise dos campos submetendo-os à condição de contorno de Dirichlet. No entanto, a equação de Dirac é incompatível com tal condição, como podemos notar em um estudo do efeito Aharonov-Bohm para um elétron relativístico [24] no qual encontram-se soluções da equação de Dirac que são incompatíveis com a condição de contorno de Dirichlet por exibirem apenas a solução em que o campo desaparece. Nesse primeiro caso, a condição de impenetrabilidade na superfície de um cilindro não é possível para um elétron que obedece a equação de Dirac. Em uma segunda análise, o problema de uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ confinada em uma caixa unidimensional [25] é levado em consideração, na intenção de conhecer os autovalores de energia mediante condição de Dirichlet. Mais uma vez, o único resultado jaz na nulidade do campo¹². Uma maneira de superar esta dificuldade consiste em impor que o fluxo de partículas seja zero nos contornos, como foi feito no conhecido modelo de sacola do MIT, ou simplesmente condição de sacola [28].

A condição de sacola do MIT, inspirada no confinamento de quarks, possui a seguinte expressão¹³:

$$(i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n} + \mathbb{1})\psi(x) |_{S=0}, \quad (3.1)$$

onde \mathbf{n} é o vetor unitário normal às superfícies S , localizadas em $z = 0$ e $z = a$, de acordo com a imagem 1. Sendo

$$\mathbf{n} = \begin{cases} (0, 0, 1), & z = 0; \\ (0, 0, -1), & z = a. \end{cases} \quad (3.2)$$

Para estarmos de acordo com a inexistência de fluxo fermiônico, isto é, com o confinamento das partículas de Dirac, basta perceber que a 3-corrente fluindo através da superfície é nula. Esta verificação se dá, primeiramente, ao multiplicarmos à esquerda da (3.1) por $\bar{\psi}$,

¹² Outros exemplos podem ser encontrados em [26][27].

¹³ O leitor que desejar mais detalhes no que se refere a construção dessa expressão poderá contemplar o desenvolvimento em [6].

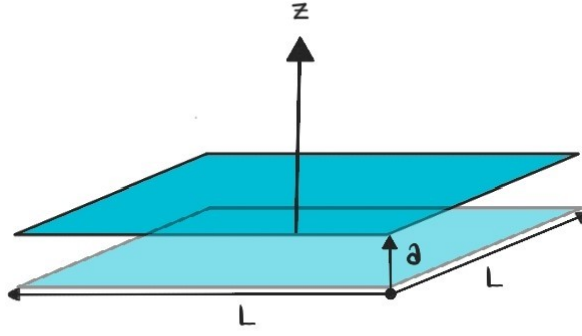


Figura 1 – Placas paralelas com área $S = L^2$ separadas por uma distância a .

de modo que¹⁴

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} |_{S=0} = i\bar{\psi}\psi |_{S=0}. \quad (3.3)$$

Em seguida, ao tomarmos o complexo conjugado da equação (3.1), não esquecendo da álgebra das matrizes γ , tem-se

$$(-i\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n} + \bar{\psi}) |_{S=0} = 0, \quad (3.4)$$

e multiplicando à direita por ψ , resultará em

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} |_{S=0} = -i\bar{\psi}(x)\psi(x) |_{S=0}. \quad (3.5)$$

Ao compararmos (3.3) com (3.5), seremos levados a concluir que, de fato, não existe partículas fluindo através das superfícies do nosso confinamento. Em outras palavras,

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} |_{S=0} = 0. \quad (3.6)$$

É fácil ver que poderíamos reduzir a condição (3.1) à seguinte [10]:

$$\left[(m + \omega)\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\varphi + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\varphi \right] |_{S=0} = 0.$$

Para isso, bastaria utilizar a solução (2.41) e aplicar em (3.1), como sugere o autor na referência [10]. No entanto, iremos preferir usar a forma não reduzida, como ficará claro logo mais.

3.2 Energia de Casimir I

A componente zero-zero do tensor energia-momento do campo espinorial, dado pela equação (2.54), é [10]

$$T_{00} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi}\gamma_0(\partial_0\psi) - (\partial_0\bar{\psi})\gamma_0\psi \right]. \quad (3.7)$$

¹⁴ Basta lembrar da definição para 4-corrente que a identificação com a parte espacial será imediata.

A substituição do operador campo, exibido na equação (2.48), nos permite reescrever T_{00} da seguinte maneira:

$$T_{00} = - \sum_{J,\alpha} \omega_J \left[- \chi_{J,\alpha}^{\dagger(+)} \chi_{J,\alpha}^{(+)} b_{J,\alpha}^\dagger b_{J,\alpha} + \chi_{J,\alpha}^{\dagger(-)} \chi_{J,\alpha}^{(-)} d_{J,\alpha}^\dagger d_{J,\alpha} \right].$$

Utilizando as relações (2.49) e (2.50), a densidade de energia do vácuo, fornecida pelo produto interno da componente T_{00} com o estado de vácuo, será dada por [10]:

$$\langle 0|T_{00}|0\rangle = - \sum_{J,\alpha} \omega_J \chi_{J,\alpha}^{\dagger(-)} \chi_{J,\alpha}^{(-)}. \quad (3.8)$$

Agora, estamos aptos para exibir a energia total do vácuo espinorial, bastando apenas tomar a integral da equação acima com relação ao volume espacial, isto é,

$$E = \int_V d\mathbf{r} \langle 0|T_{00}(x)|0\rangle = - \sum_{J,\alpha} \omega_J \int_V \chi_{J,\alpha}^{\dagger(-)}(\mathbf{r}) \chi_{J,\alpha}^{(-)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (3.9)$$

Como estamos considerando espinores normalizados, então $\chi^\dagger \chi = 1$, restando apenas a integral nas coordenadas espaciais cujo resultado é o volume em consideração. Daí, somos levados à

$$E = -V \sum_{J,\alpha} \omega_J = -2V \sum_J \omega_J, \quad (3.10)$$

que é a energia total do vácuo discretizada [10].

3.3 Caso não-massivo

Aplicando a condição de contorno de sacola na forma não reduzida, dada pela equação (3.1), ao campo em (2.41), ou seja,

$$\begin{aligned} & (i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n} + \mathbb{1})\psi(t, x, y, z) |_{S=0} \\ \Rightarrow & (i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{n} + \mathbb{1})e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} \varphi \\ -\frac{i\sigma^j \partial_j \varphi}{(m+\omega)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde, afim de facilitarmos a manipulação, fizemos $\varphi(\mathbf{r}) = N\varphi e^{-ik_j x^j}$. Daí, explicitando a matriz constituída pela soma das matrizes entre parênteses, a equação acima tomará a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & i\sigma^3 \\ -i\sigma^3 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ -\frac{i\sigma^j \partial_j \varphi}{(m+\omega)} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.12)$$

Isso, por sua vez, resulta em um sistema de equações, a saber,

$$\begin{cases} \mathbb{1}\varphi + \frac{\sigma^3 \sigma^j \partial_j \varphi}{(m+\omega)} = 0 \\ -i\sigma^3 \varphi - \mathbb{1} \frac{i\sigma^j \partial_j \varphi}{(m+\omega)} = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Como as duas equações fornecidas pelo sistema são equivalentes, basta levar em consideração a primeira delas, isto é,

$$\mathbb{1}\varphi + \sigma^3 \frac{\sigma^j \partial_j \varphi}{(m + \omega)} = 0. \quad (3.14)$$

Inserindo, portanto, a solução geral do espinor $\varphi(\mathbf{r})$, que já foi apresentada (2.43),

$$\varphi(x, y, z) = e^{i(k_x x + k_y y)} (ue^{ik_z z} + ve^{-ik_z z}), \quad (3.15)$$

na equação (3.14) e calculando primeiramente na placa em $z = a$, teremos, após algumas manipulações algébricas, a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} e^{i(k_x x + k_y y)} (ue^{ik_z a} + ve^{-ik_z a}) + \frac{\sigma^3}{(m + \omega)} \left[(\sigma^1 ik_x + \sigma^2 ik_y) e^{i(k_x x + k_y y)} (ue^{ik_z a} + ve^{-ik_z a}) + \right. \\ \left. + \sigma^3 ik_z e^{i(k_x x + k_y y)} (ue^{ik_z a} - ve^{-ik_z a}) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

cuja simplificação toma a forma dada por

$$\left[(m + \omega) + ik_z + i\sigma^3(\sigma^1 k_x + \sigma^2 k_y) \right] ue^{ik_z a} + \left[(m + \omega) - ik_z + i\sigma^3(\sigma^1 k_x + \sigma^2 k_y) \right] ve^{-ik_z a} = 0. \quad (3.17)$$

Agora, multiplicando toda a equação por

$$\left[(m + \omega) + ik_z - i\sigma^3(\sigma^1 k_x + \sigma^2 k_y) \right] \quad (3.18)$$

e levando em consideração a álgebra das matrizes de Dirac, é possível escrever as expressões abaixo:

$$(m + \omega)(m + \omega) + 2i(m + \omega)k_z - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 = 2(m + \omega)(m + ik_z), \quad (i)$$

$$(m + \omega)(m + \omega) + k_z^2 - 2\sigma^3 k_z(\sigma^1 k_x + \sigma^2 k_y) - k_x^2 - k_y^2 = 2 \left[m(\omega + m) + k_z^2 - k_z \sigma^3(\sigma^1 k_x + \sigma^2 k_y) \right], \quad (ii)$$

onde (i) e (ii) são resultados das manipulações ao multiplicarmos o primeiro e o segundo termo em (3.17) pela expressão em (3.18), respectivamente. Com esses resultados, portanto, somos conduzidos à

$$\frac{(m + ik_z)}{(m - ik_z)} ue^{ik_z a} + \frac{[m(\omega + m) + k_z^2 - k_z \sigma^3(\sigma^1 k_x + \sigma^2 k_y)]}{(m - ik_z)(\omega + m)} ve^{-ik_z a} = 0. \quad (3.19)$$

Podemos, ainda, escrever u em termos de v , bastando, para isso, usar a condição em $z = 0$. Resultará em [4]

$$u = -\frac{[m(\omega + m) + k_z^2 - k_z \sigma^3(\sigma^1 k_x + \sigma^2 k_y)]}{(m - ik_z)(\omega + m)} v, \quad (3.20)$$

de modo que a equação (3.19) se resumirá à

$$\frac{(m + ik_z)}{(m - ik_z)} ue^{ik_z a} - ue^{-ik_z a} = 0. \quad (3.21)$$

Não é difícil, a partir da expressão acima, encontrarmos a seguinte equação transcendental [14]:

$$\frac{ma}{k_z a} \sin(k_z a) + \cos(k_z a) = 0. \quad (3.22)$$

Em outras palavras, para que a condição de sacola aplicada ao espinor seja satisfeita, é necessário o cumprimento da equação (3.22).

Agora, para calcularmos a energia total do vácuo em $(3 + 1)$ dimensões levando em consideração a discretização no eixo z , limitado ao intervalo $[0, a]$, retomamos a equação (3.9) com o cuidado de que as coordenadas x e y jazem no contínuo, ou melhor, na extensão das placas, de modo que nossa equação poderá ser escrita da seguinte maneira [10]:

$$E_{C(0)} = -2S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = -2S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n. \quad (3.23)$$

Reescrevendo em coordenadas polares, fica

$$E_{C(0)} = -2S \int_0^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n. \quad (3.24)$$

Note que S é a área da superfície das placas. Ademais, a energia do vácuo considerando a discretização, como podemos perceber, é uma quantidade infinita. Para contornarmos essa inconveniência, reescrevemos $E_{C(0)}$ fazendo com que a soma dependa de um parâmetro s , tal que, para $s = -1/2$, nossa soma original seja recuperada [22]:

$$E_{C(0)} = -2S \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^{-2s}. \quad (3.25)$$

Sabendo que

$$\frac{1}{\omega^{2s}} = \frac{2}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{2s-1} e^{-\omega^2 \tau^2},$$

segue

$$E_{C(0)} = -\frac{2S}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{2s-1} e^{-\omega^2 \tau^2} \right].$$

Tratando do caso não massivo, a relação de dispersão é simplesmente

$$\omega^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2,$$

onde, de acordo com a equação (3.22) para $m = 0$,

$$k_{zn} = \frac{\pi}{a} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.26)$$

Assim,

$$E_{C(0)} = -\frac{2S}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{2s-1} e^{-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \tau^2} \right].$$

Ora, mas

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k_x^2 \tau^2} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k_y^2 \tau^2} dk_y = \sqrt{\frac{\pi}{\tau^2}} \sqrt{\frac{\pi}{\tau^2}} = \frac{\pi}{\tau^2}$$

e, portanto,

$$E_{C(0)} = -\frac{2S}{(2\pi)^2} \frac{2\pi}{\Gamma(s)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \left(\frac{\tau^{2s-1}}{\tau^2} \right) e^{-k_{nz}^2 \tau^2} = -\frac{2S}{(2\pi)^2} \frac{2\pi}{\Gamma(s)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau (\tau^{2s-3}) e^{-k_{nz}^2 \tau^2}.$$

Após passos intermediários e fazendo $s = -1/2$ como havíamos dito, restará

$$E_{C(0)} = -\frac{2S\pi}{(2\pi)^2} \frac{\Gamma(-3/2)}{\Gamma(-1/2)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right)^3.$$

Agora, faremos uso da função zeta de Hurwitz [22] na intenção de manipular a soma da equação anterior:

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}. \quad (3.27)$$

Podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s} = \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \left[\sin(\pi s/2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi an)}{n^{1-s}} + \cos(\pi s/2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi an)}{n^{1-s}} \right].$$

No nosso caso, $s = -3$ e $a = 1/2$. Procedendo de forma análoga ao caso anterior, nos restará

$$\begin{aligned} \zeta(-3, 1/2) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2)^{-3} = \frac{2\Gamma(4)}{(2\pi)^4} \left[\sin(-3\pi/2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^4} + \cos(-3\pi/2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n)}{n^4} \right]. \\ \Rightarrow \zeta(-3, 1/2) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2)^{-3} = \frac{2\Gamma(4)}{(2\pi)^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^4} = \frac{2\Gamma(4)}{(2\pi)^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\zeta(-3, 1/2) = \frac{2\Gamma(4)}{(2\pi)^4} \left(-\frac{7\pi^4}{720} \right).$$

Consequentemente,

$$\frac{E_{C(0)}}{S} = -\frac{2\pi}{(2\pi)^2} \frac{\Gamma(-3/2)}{\Gamma(-1/2)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^3 \left[\frac{2\Gamma(4)}{(2\pi)^4} \left(-\frac{7\pi^4}{720} \right) \right] = -\frac{7\pi^2}{2880a^3}. \quad (3.28)$$

Esta é a energia de Casimir (ou densidade de energia de Casimir) para o campo fermiônico para o caso não massivo, considerando $z \in [0, a]$. É importante notar que o procedimento adotado na obtenção desse resultado automaticamente removeu o infinito, fornecendo diretamente a quantidade finita. No entanto, poderíamos ter adotado um outro processo, no qual a subtração de energias seria necessária para removê-lo e, só então, obtermos a esperada finitude. Isto é, teríamos que renormalizar os resultados infinitos

concernentes ao intervalo em questão e a todo o espaço de Minkowski. Neste caso, a energia do vácuo em todo o espaço de Minkowski, a saber,

$$E = -\frac{2aS}{\pi} \int_0^\infty \frac{k_\perp dk_\perp}{2\pi} \int_0^\infty dk_z \omega_k, \quad (3.29)$$

seria necessária [10] e procedimento poderia ser mais complicado. Vamos finalizar esta seção exibindo a pressão de Casimir logo abaixo, como resultado da equação (3.28).

$$P_{C(0)} = -\frac{7\pi^2}{960a^4}. \quad (3.30)$$

3.4 Caso massivo

Nesta seção, iremos calcular a energia de Casimir massiva utilizando a fórmula de soma de Abel-Plana [18],

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi f(\alpha_n)}{1 - \frac{\sin(2\alpha_n)}{2\alpha_n}} = -\frac{\pi am f(0)}{2(am+1)} + \int_0^\infty dz f(z) - i \int_0^\infty dt \frac{f(it) - f(-it)}{\frac{t+am}{t-am} e^{2t} + 1}, \quad (3.31)$$

na intenção de diversificar os métodos de regularização apresentados até então. Primeiro, consideramos a equação (3.22) reescrita em termos do parâmetro, $\alpha_n \equiv k_z a$:

$$\frac{am}{\alpha_n} \sin(\alpha_n) + \cos(\alpha_n) = 0. \quad (3.32)$$

É importante notar que o índice n indica discretização em k_z . Agora, desenvolvendo o denominador do lado esquerdo da equação (3.31), e utilizando a expressão acima¹⁵ teremos [4]:

$$1 - \frac{\sin(2\alpha_n)}{2\alpha_n} = 1 + \frac{ma}{m^2 a^2 + \alpha_n^2}. \quad (3.33)$$

As auto-frequências, contendo o termo de massa, agora poderão ser escritas da seguinte maneira:

$$\omega_n^2 = k_\perp^2 + \frac{\alpha_n^2}{a^2} + m^2. \quad (3.34)$$

Neste momento, é conveniente identificarmos a função $f(z)$:

$$f(z) = \omega(z) \left[1 + \frac{ma}{m^2 a^2 + z^2} \right], \quad (3.35)$$

de modo que

$$\omega(z) = \sqrt{k_\perp^2 a^2 + z^2 + a^2 m^2} = \frac{f(z)}{\left(1 + \frac{ma}{m^2 a^2 + z^2} \right)}. \quad (3.36)$$

¹⁵ Basta isolar o $\cos(\alpha_n)$ e substituir na expressão desenvolvida. Em seguida, será necessário lembrar que $\sin^2(\alpha_n) + \cos^2(\alpha_n) = 1$.

Como já sabemos, a energia total do vácuo será dada por¹⁶ [4]

$$E = -\frac{L^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\alpha_n}{a}\right)^2 + m^2}. \quad (3.37)$$

Por E se tratar de uma quantidade infinita, faz-se necessário regularizá-la. E é para esse procedimento que usaremos a fórmula (3.31). Nosso primeiro passo é reescrever o somatório da expressão acima considerando (3.35) e (3.33), a fim de exibir o lado esquerdo da fórmula de Abel-Plana. Feito isso, tem-se o seguinte resultado:

$$E = -\frac{L^2}{2a\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \left[-\frac{\pi am f(0)}{2(am+1)} + \int_0^{\infty} dz f(z) - i \int_0^{\infty} dt \frac{f(it) - f(-it)}{\frac{t+am}{t-am} e^{2t} + 1} \right]. \quad (3.38)$$

Ou seja, a energia total do vácuo fermiônico regularizada. Note que no interior do colchetes existem três termos. Devido a renormalização, dois deles desaparecem, a saber, o primeiro referente à uma única placa e o segundo, referente à ausência de placas. Com isso, nos restará a energia de Casimir entre as duas placas:

$$E_{C(m)} = -\frac{L^2}{2a\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \left[-i \int_0^{\infty} dt \frac{f(it) - f(-it)}{\frac{t+am}{t-am} e^{2t} + 1} \right]. \quad (3.39)$$

O cálculo de $f(z = it)$ e $f(z = -it)$ na equação (3.35), sendo efetuada a substituição $t = au$, nos permite escrever E na forma abaixo:

$$E_{C(m)} = \frac{iL^2 a}{2\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \left[\int_0^{\infty} du \frac{u-m}{(u+m)e^{2au} + (u-m)} \left(1 + \frac{m}{am^2 - au^2} \right) \times \left(\sqrt{k_{\perp}^2 + m^2 + (iu)^2} - \sqrt{k_{\perp}^2 + m^2 + (-iu)^2} \right) \right]. \quad (3.40)$$

Neste ponto, devemos usar a seguinte identidade:

$$\sqrt{(\pm is)^2 + k^2} = \begin{cases} \pm i\sqrt{s^2 - k^2}, & s > k \\ \sqrt{k^2 - s^2}, & s < k. \end{cases} \quad (3.41)$$

Essa expressão possibilita dividirmos a integral em u em outros dois intervalos. No primeiro deles, $[0, \sqrt{k_{\perp}^2 + m^2}]$, a integral será zero, restando apenas o termo referente à $[\sqrt{k_{\perp}^2 + m^2}, \infty)$. Consequentemente, após um processo relativamente longo de manipulações algébricas, seremos capazes de exibir a energia de Casimir na seguinte forma [4]:

$$E_{C(m)} = \frac{-L^2}{\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{k} \int_{\sqrt{k_{\perp}^2 + m^2}}^{\infty} du \sqrt{u^2 - k_{\perp}^2 - m^2} \left[\frac{a(u-m) - \frac{m}{(u+m)}}{(u+m)e^{2ua} + u-m} \right] \quad (3.42)$$

Dando continuidade, faremos uso da identidade [18]:

$$\int d\mathbf{k}_p \int_{\sqrt{k_p^2 + c^2}}^{\infty} dz (z^2 - \mathbf{k}_p^2 - c^2)^{\frac{s+1}{2}} f(z) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s+3}{2})}{\Gamma(\frac{p+s+3}{2})} \int_c^{\infty} dx (x^2 - c^2)^{\frac{p+s+1}{2}} f(x) \quad (3.43)$$

¹⁶ Agora estamos tomando $S = L^2$ apenas para caracterizar as dimensões das placas. No entanto, poderíamos continuar escrevendo S , como foi feito no tratamento da seção anterior.

juntamente com a identificação

$$\frac{a(x-m) - m/(x+m)}{(x+m)e^{2xa} + x-m} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln \left(1 + \frac{x-m}{x+m} e^{-2ax} \right). \quad (3.44)$$

Tomando $s = 0$ e $p = 2$ na equação (3.43), podemos reescrever (3.42) da seguinte maneira:

$$E_{C(m)} = \frac{L^2}{3\pi^2} \int_m^\infty dx (x^2 - m^2)^{3/2} \frac{d}{dx} \ln \left(1 + \frac{x-m}{x+m} e^{-2ax} \right). \quad (3.45)$$

A integração por partes da expressão acima, levando em conta a substituição $ax = y + am$, nos conduz à forma final da energia de Casimir fermiônica massiva:

$$E_{C(m)} = -\frac{L^2}{\pi^2 a^3} \int_0^\infty dy (y + am) \sqrt{y(y + 2am)} \ln \left(1 + \frac{y}{y + 2ma} e^{-2(y+am)} \right). \quad (3.46)$$

Onde os limites de integração derivam da equação (3.45), cuja substituição de variáveis indicada anteriormente fornece $y \in [0, \infty)$.

Infelizmente, os resultados dessa última equação não podem ser obtidos de maneira analítica. No entanto, somos capazes de obter resultados exatos através de métodos numéricos para os limites assintóticos correspondentes aos casos de curtas distâncias entre as placas e/ou massas pequenas, e de longas distâncias e/ou massas grandes, ou seja, tomando $am \ll 1$ e $am \gg 1$, respectivamente.

No limite em que $am \ll 1$, expandimos o integrando em potências de am via série de Taylor, até primeira ordem. O resultado será

$$x^2 \ln(1 + e^{-2x}) - \left[2 \frac{x e^{-2x}(x+1)}{1 + e^{-2x}} - 2x \ln(1 + e^{-2x}) \right] am. \quad (3.47)$$

Por outro lado, quando $am \gg 1$, utilizamos a representação em série para o logaritmo, expandida até primeira ordem:

$$\ln(1 + u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} u^{n+1} \simeq u - \frac{u^2}{2}, \quad u = \frac{y}{y + 2ma} e^{-2(y+am)}. \quad (3.48)$$

Percebe-se que o termo de primeira ordem na equação (3.48) vai à zero quando $am \gg 1$, pois u depende inversamente de am . De modo que nos restará apenas o termo dado por u . Ao substituirmos isso no integrando da equação (3.46) e manipularmos os termos, teremos

$$(y + am) \sqrt{y(y + 2am)} \ln \left(1 + \frac{y}{y + 2ma} e^{-2(y+am)} \right) \simeq e^{-2(ma+y)} y^{3/2} \sqrt{\frac{am}{2}}. \quad (3.49)$$

Agora, vamos resolver a integral em (3.46) substituindo os integrandos referentes a cada caso de interesse. Iniciando pelo caso em que se dá a expressão (3.47), de onde teremos a seguinte expressão:

$$E_{C(m)} = -\frac{L^2}{\pi^2 a^3} \left\{ \frac{7\pi^4}{2880} - 2am \int_0^\infty \frac{x e^{-2x}(x+1)}{1 + e^{-2x}} dx + 2am \frac{3\zeta(3)}{16} \right\}. \quad (3.50)$$

No desenvolvimento da integral que nos restou acima, basta perceber que $\frac{d}{dx} \ln(1 + e^{-2x}) = -\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ e efetuar a integração por partes. Feito isso, surgirá um termo negativo idêntico a aquele que contém $\zeta(3)$, o que nos livra de um problema, pois a função zeta calculada nesse ponto geraria dificuldades. A expressão resultante, dividida pela área das placas, pode ser finalmente escrita:

$$\frac{E_{C(m)}}{L^2} = -\frac{7\pi^2}{2880a^3} \left(1 - \frac{120am}{7\pi^2}\right). \quad (3.51)$$

Ou seja, a densidade de energia de Casimir para um campo fermiônico com massa m confinado entre duas placas metálicas neutras e paralelas de área L^2 , com espaçamento entre elas dado por a . Claramente, a equação acima retoma o caso não massivo obtido em (3.27) e, além disso, adiciona um termo de correção. Segue, ainda, que a pressão de Casimir fermiônica será dada por

$$P_{C(m)} = -\frac{\partial E_{C(m)}/L^2}{\partial a} = -\frac{7\pi^2 - 80am}{960a^4}. \quad (3.52)$$

Em se tratando do caso referente a equação (3.49), temos

$$E_{C(m)} = -\frac{L^2}{\pi^2 a^3} \int_0^\infty e^{-2(ma+x)} x^{3/2} \sqrt{\frac{am}{2}} dx. \quad (3.53)$$

Daí, ao levarmos em consideração a forma geral¹⁷

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^b} dx = \frac{\zeta\left(\frac{n+1}{b}\right)}{ba^{(n+1)/b}}, \quad (3.54)$$

com $n = \frac{3}{2}$, $a = 2$, $b = 1$, obtém-se a expressão abaixo.

$$\frac{E_{C(m)}}{L^2} = -\frac{3m^{1/2}e^{-2ma}}{32\pi^{3/2}a^{5/2}}. \quad (3.55)$$

¹⁷ O leitor deve atentar para o abuso de notação caracterizado pelo uso do a na identidade (3.54). Uma vez que este parâmetro já possui significado para nós, a saber, o espaçamento entre as placas, basta lembrar que na identidade não se trata do mesmo a .

4 O Efeito Casimir Topológico

No capítulo anterior, tratamos da resposta do campo espinorial em relação às placas, ou seja, o surgimento do fenômeno devido a interação com corpos macroscópicos. Neste capítulo, o efeito Casimir deriva da própria topologia do espaço-tempo, que influencia as flutuações quânticas do vácuo. A análise desenvolvida se dará mediante uma topologia de hélice, de modo que o vácuo quântico fermiônico sentirá e responderá a perturbação gerada por este tipo de estrutura topológica, dita não-trivial.

4.1 Forma Geral da Energia

Iremos utilizar, agora, a solução $\psi^{(+)}$ dada em (2.41) na forma

$$\psi = Ne^{-i\omega t} \begin{pmatrix} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)\varphi} \\ -\frac{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla}{\omega + m} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)\varphi} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

O objetivo será submeter o espinor ψ à condição de contorno de hélice que, na verdade, para o caso fermiônico, trata-se de uma condição anti-hélice:

$$\psi(t, x + a, y, z) = -\psi(t, x, y + h, z), \quad (4.2)$$

onde a e h são responsáveis por caracterizarem os parâmetros da hélice, ou seja, o raio e o passo, respectivamente. Observe que essa condição está sendo aplicada em duas direções distintas, a saber, x e y . Além disso, ao deslocar-se $2a$ e $2h$, a solução será exatamente a mesma em ambos os eixos:

$$\psi(t, x + 2a, y, z) = \psi(t, x, y + 2h, z). \quad (4.3)$$

Ao submetermos a solução (4.1) à condição (4.2), encontramos a seguinte expressão:

$$\cos(k_x a - k_y h) + i \sin(k_x a - k_y h) = -1.$$

Notamos que o lado direito da equação é um número real e, portanto, será satisfeita pela parte real no lado esquerdo, de modo que seremos conduzidos à

$$k_x a - k_y h = 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.4)$$

Assim, ao resolvermos para k_y ou k_x e substituirmos na expressão geral das auto-freqüências ω ,

$$\omega^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + m^2, \quad (4.5)$$

conheceremos os modos discretizados, isto é,

$$\omega_n^2 = k_z^2 + k_x^2 + \left[-\frac{2\pi}{h} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{k_x a}{h} \right]^2 + m^2 = k_z^2 + k_y^2 + \left[\frac{2\pi}{a} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{k_y h}{a} \right]^2 + m^2. \quad (4.6)$$

No estado de vácuo, cada um desses modos contribuem com uma energia de $\frac{\omega_n}{2}$.

Agora, após promovermos o campo a operador e calcularmos a componente T_{00} do tensor energia-momento, seremos capazes de obter a expressão para a energia, cuja expressão em $(D + 1)$ dimensões possui a seguinte forma geral [20]:

$$E^D = -\frac{1}{2a} \int \frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \omega_n. \quad (4.7)$$

No entanto, nosso estudo se restringe ao caso (3+1)-dimensional e, dessa forma, podemos escrever

$$E = -\frac{1}{2a} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{k_z^2 + k_y^2 + \left[\frac{2\pi}{a} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{k_y h}{a} \right]^2 + m^2}. \quad (4.8)$$

Note que a equação acima possui duas variáveis contínuas e uma discreta. O somatório se dá na direção discretizada, x . Todos os resultados também são obtidos para a direção referente ao passo h , por isso dispensaremos repetições e exibiremos apenas os resultados com relação a direção do parâmetro a .

4.2 Manipulações na Expressão Geral

Na intenção de reescrevermos a equação (4.8), será efetuado uma substituição de variável mediante manipulação dos termos no interior da raiz. Vejamos a seguir alguns detalhes do procedimento adotado.

Primeiro, ao abrirmos o produto notável e agruparmos os termos,

$$\begin{aligned} & k_z^2 + k_y^2 + \left[\frac{2\pi}{a} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{k_y h}{a} \right]^2 + m^2 = \\ & = k_z^2 + k_y^2 \left(1 + \frac{h^2}{a^2} \right) + \left(\frac{2\pi(n + 1/2)}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{2\pi(n + 1/2)}{a} \right) \left(\frac{k_y h}{a} \right) + m^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

torna-se conveniente definirmos o parâmetro $d^2 \equiv h^2 + a^2$, juntamente com uma forma explícita para o k_y [23],

$$k_y = \frac{a}{d} \left(u - \frac{2\pi(n + 1/2)h}{ad} \right). \quad (4.10)$$

Ao substituírmos (4.10) em (4.9), levando em consideração a forma do parâmetro d definido acima, seremos conduzidos à

$$k_z^2 + u^2 + \left(\frac{2\pi(n + 1/2)}{a} \right)^2 \left(\frac{a^2}{a^2 + h^2} \right) + m^2, \quad (4.11)$$

que também pode ser escrita na forma

$$k_z^2 + u^2 + \left(\frac{2\pi(n + 1/2)}{a\sqrt{\gamma}} \right)^2 + m^2, \quad (4.12)$$

onde $\frac{1}{\gamma} \equiv \frac{a^2}{a^2 + h^2}$. Finalmente, somos capazes de reescrever a equação (4.8) na forma seguinte:

$$E = -\frac{1}{2a\sqrt{\gamma}} \int \frac{d^2u}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{u^2 + \left(\frac{2\pi(n + 1/2)}{a\sqrt{\gamma}} \right)^2 + m^2}. \quad (4.13)$$

Mediante uso da identidade abaixo [20]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) d^{D-1}u = \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \int_0^{\infty} u^{D-2} f(u) du, \quad (4.14)$$

cuja redução em (3 + 1) dimensões é dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^2u = 2\pi \int_0^{\infty} u f(u) du, \quad (4.15)$$

torna-se possível reescrever a equação (4.13), como podemos ver abaixo:

$$E = -\frac{1}{2a\sqrt{\gamma}2\pi} \sum_n \int_0^{\infty} u \left[u^2 + \left(\frac{2\pi(n + 1/2)}{a\sqrt{\gamma}} \right)^2 + m^2 \right]^{1/2} du. \quad (4.16)$$

Faremos uso, agora, da seguinte identidade:

$$\frac{1}{\omega^{2s}} = \frac{2}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{2s-1} e^{-\omega^2 \tau^2}, \quad (4.17)$$

onde será usado $s = -\frac{1}{2}$ para corresponder ao nosso caso, uma vez conhecido ω via equação (4.6): seja

$$\omega = \sqrt{u^2 + \left(\frac{2\pi(n + \frac{1}{2})}{a\sqrt{\gamma}} \right)^2}, \quad (4.18)$$

então,

$$\omega = \frac{2}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{-2} e^{-u^2 \tau^2} e^{-\left(\frac{2\pi(n + \frac{1}{2})}{a\sqrt{\gamma}} \right)^2 \tau^2} e^{-m^2 \tau^2}. \quad (4.19)$$

Substituindo essa última expressão na equação (4.16) e notando que

$$\int_0^{\infty} u e^{-u^2 \tau^2} du = \frac{2}{\tau^2}, \quad \tau > 0, \quad (4.20)$$

restará

$$E = -\frac{1}{2a\sqrt{\gamma}2\pi} \sum_n \frac{4}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} d\tau \frac{1}{\tau^4} e^{-\bar{\omega}^2 \tau^2}. \quad (4.21)$$

Onde foi definido

$$\bar{\omega}^2 = \left(\frac{2\pi(n + \frac{1}{2})}{a\sqrt{\gamma}} \right)^2 + m^2. \quad (4.22)$$

Finalmente, resolvendo a equação (4.21) e manipulando devidamente, obtém-se o resultado abaixo:

$$E = \frac{\Gamma(-\frac{3}{2})}{4a\pi^{3/2}\sqrt{\gamma}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi(n + \frac{1}{2})}{a\sqrt{\gamma}} \right)^2 + m^2 \right]^{3/2}. \quad (4.23)$$

4.3 Energia de Casimir II

4.3.1 Caso não-massivo

Para o caso não-massivo, $m = 0$, a equação (4.23) se resume à

$$E = \frac{\Gamma(-\frac{3}{2})}{4a\pi^{3/2}\sqrt{\gamma}} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi(n + \frac{1}{2})}{a\sqrt{\gamma}} \right)^2 \right]^{3/2} = \frac{\Gamma(-\frac{3}{2})2\pi^3}{\pi^{3/2}a^4\gamma^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| n + \frac{1}{2} \right|^3. \quad (4.24)$$

Notando que

$$\left| n + \frac{1}{2} \right| = \begin{cases} (n + \frac{1}{2}), & n \geq -\frac{1}{2}; \\ -(n + \frac{1}{2}), & n \leq -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad (4.25)$$

a soma será reescrita da seguinte maneira:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| n + \frac{1}{2} \right|^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right)^3 + \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^3 \left(n + \frac{1}{2} \right)^3. \quad (4.26)$$

Manipulando a segunda soma do lado direito e utilizando a substituição $-n = n' + 1$, as duas somas possuirão o mesmo intervalo, de modo que a equação (4.24) será dada por

$$E = \frac{4\Gamma(-\frac{3}{2})}{\pi^{-3/2}a^4\gamma^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right)^3 = \frac{4\Gamma(-\frac{3}{2})}{\pi^{-3/2}a^4\gamma^2} \zeta\left(-3, \frac{1}{2}\right), \quad (4.27)$$

onde utilizamos a função zeta de Hurwitz,

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}, \quad (4.28)$$

com $a = \frac{1}{2}$ e $s = -3$ para reescrever o somatório. Assim, de acordo com as seguintes relações:

$$\zeta(s, a) = (2^s - 1)\zeta(s), \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s), \quad (4.29)$$

seremos levados à

$$E = \frac{4(2^{-3} - 1)\zeta(4)}{\pi^2(a^2 + h^2)^2}, \quad (4.30)$$

ou, finalmente, a energia de Casimir não-massiva, $E_{C(0)}$, regularizada para (3+1) dimensões:

$$E_{C(0)} = -\frac{7\zeta(4)}{2\pi^2(a^2 + h^2)^2}. \quad (4.31)$$

Consequentemente, a força de Casimir na direção x será:

$$F_{C(0)} = -\frac{\partial E}{\partial a} = -\frac{14a\zeta(4)}{\pi^2(a^2 + h^2)^3}. \quad (4.32)$$

4.3.2 Caso massivo

No caso massivo, a equação (4.23) aparenta ser mais difícil de lidar, devido o termo de massa. No entanto, teremos nosso trabalho facilitado graças ao uso direto da fórmula de Chowla-Selberg [20]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{a'}{2}(n+c)^2 + b \right]^{-s} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}-s} \Gamma(s - \frac{1}{2})}{\sqrt{a'} \Gamma(s)} + \frac{2^{\frac{s}{2} + \frac{1}{4} + 2} \pi^s b^{-\frac{s}{2} + \frac{1}{4}}}{\sqrt{a'} \Gamma(s)} \quad (4.33)$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi nc) \left(\frac{n^2}{a'} \right)^{\frac{s}{2} - \frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}-s} \left(2\pi n \sqrt{\frac{2b}{a'}} \right).$$

Na expressão acima, $K_{\frac{1}{2}-s}$ é a função de Bessel modificada.

Para atingirmos nosso objetivo, isto é, encontrar a energia de Casimir massiva, comparamos o somatório da equação (4.23) com a fórmula (4.33). Feito isso, efetua-se as seguintes identificações:

$$c = \frac{1}{2}, \quad \frac{a'}{2} = \frac{(2\pi)^2}{a^2 \gamma}, \quad b = m^2, \quad s = -\frac{3}{2}. \quad (4.34)$$

Conseqüentemente, somos levados à seguinte expressão:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi(n + \frac{1}{2})}{a\sqrt{\gamma}} \right)^2 + m^2 \right]^{3/2} = \frac{\Gamma(-2) m^4 a \sqrt{2\pi} \sqrt{\gamma}}{\Gamma(-\frac{3}{2}) 2\pi \sqrt{2}} + \frac{2^{\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{3}{2}} m^2 a \sqrt{\gamma}}{2\pi \Gamma(-\frac{3}{2}) \sqrt{2}} \quad (4.35)$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \left(\frac{n^2 a^2 \gamma}{2(2\pi)^2} \right)^{-1} K_2(nma\sqrt{\gamma})$$

$$= \frac{4\pi^{\frac{3}{2}} m^4 \Gamma(-2)}{a\sqrt{\gamma} \Gamma(-\frac{3}{2})} + \frac{8\pi^{-\frac{1}{2}} m^2}{\Gamma(-\frac{3}{2}) a\sqrt{\gamma}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) n^{-2} K_2(nm\sqrt{a^2 + h^2}). \quad (4.36)$$

No procedimento de regularização em um espaço-tempo plano com topologia trivial, a energia do vácuo renormalizada vai à zero. Em outras palavras, na expressão para a energia do vácuo renormalizada, o primeiro termo entre chaves da equação (4.36) deve ser omitido. Daí, ao substituirmos na expressão da energia (4.23), lembrando da nossa definição para o parâmetro γ , o resultado finalmente pode ser escrito como segue:

$$E_{C(m)} = 8 \left(\frac{m}{2\pi\sqrt{a^2 + h^2}} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) n^{-2} K_2(nm\sqrt{a^2 + h^2}). \quad (4.37)$$

Ou seja, a energia de Casimir para o caso massivo em $(3+1)$ dimensões, responsável pela força de Casimir $F_{C(m)}$:

$$F_{C(m)} = \frac{2ma[(ma)^2 + (mh)^2]}{(a^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) n^{-1} K_3(nm\sqrt{a^2 + h^2}). \quad (4.38)$$

5 Considerações finais

Como foi possível observar ao longo de todo o estudo exibido nesta monografia, as flutuações quânticas no vácuo do campo fermiônico, à medida em que sofrem perturbações, suscitam um fenômeno conhecido como efeito Casimir. Tais perturbações, por sua vez, não se limitam às interações entre campos e corpos macroscópicos, de modo que até mesmo certos tipos de alterações topológicas no espaço-tempo de Minkowski podem ser causas únicas do efeito.

Primeiramente, analisamos a resposta do campo massivo e não-massivo ao inserirmos nele duas placas condutoras paralelas e eletricamente neutras, sob a perspectiva de um espaço-tempo plano em (3+1) dimensões. Devido à atração das placas, pudemos contemplar o caráter puramente quântico-relativístico do fenômeno. Em geral, as Teorias Quânticas de Campos são constituídas por aparentes divergências, como foi possível observar na obtenção das energias. Assim, para tratar o problema, adotamos procedimentos padrões que se dão em duas importantes etapas, a saber, a regularização da energia total (ou de ponto zero) proveniente do vácuo e sua renormalização, tomada posteriormente.

Na primeira etapa, ou seja, na regularização, as quantidades divergentes na teoria são modificadas convenientemente. Obtém-se, daí, uma teoria regularizada que possibilita a renormalização. Diversas são as maneiras de realizar a regularização, dentre elas podemos mencionar o método de corte (Cut-Off), regularização dimensional e via soma de Abel-Plana. O procedimento de renormalização consiste em subtrair o infinito através de um processo de regularização, de modo que, por fim, o parâmetro de regularização δ tende à zero:

$$E_{ren} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[E_{reg}(\delta) - E(\delta) \right].$$

A equação acima envolve duas energias infinitas E e E_{reg} . A primeira, E , coincide com a contribuição de Minkowski no espaço-tempo plano. Já a segunda, E_{reg} , trata-se da energia regularizada do problema, obtida de acordo com possíveis condições de contorno. Normalmente, no espaço-tempo plano, a parte divergente de E_{reg} coincide com a contribuição de Minkowski. Conseqüentemente, a quantidade resultante E_{ren} será finita e dita quantidade física, por se tratar daquilo que realmente medimos nos experimentos. Vale ressaltar, ainda, que alguns procedimentos de regularização já fornecem diretamente a quantidade finita de interesse, como foi o caso do método da função Zeta que também fizemos uso.

Na abordagem seguinte, analisamos o efeito Casimir proveniente de uma topologia não-trivial (ou não-euclidiana), mais especificamente, usamos a topologia da hélice. Observamos como o campo fermiônico reage a esse tipo de modificação e obtivemos, daí, os resultados exatos da energia e força de Casimir para os casos massivo e não-massivo,

também em $(3+1)$ dimensões. Foi possível notar que a força gerada aqui é muito parecida com a força em uma mola regida pela lei de Hooke na mecânica clássica. No entanto, trata-se aqui de uma quantidade proveniente de aspectos puramente quânticos.

Por fim, vale mencionar que atualmente estamos na fase de conclusão da implementação de correções de temperaturas referente ao estudo exibido no capítulo 4, sobre o efeito Casimir topológico. Resultados satisfatórios já foram obtidos e, nesse processo, foi possível notar claramente a escassez da literatura com relação ao tratamento do campo espinorial. A exibição de vários detalhes na obtenção das quantidades físicas fazem deste trabalho, portanto, uma ótima fonte de estudos quando estamos diante de campos espinoriais.

Referências

- [1] F. Mandl e S. Shaw; *Quantum Field Theory*; Wiley, 2th ed., 2010.
- [2] M. B. Cruz, E. R. Bezerra de Mello and A. Yu. Petrov, Phys. Rev. **D 96**, 045019 (2017).
- [3] M. B. Cruz, E. R. Bezerra de Mello and A. Yu. Petrov, Mod. Phys. Lett. **A 20**, 1850115 (2018).
- [4] M. B. Cruz, E. R. Bezerra de Mello and A. Yu. Petrov, Phys. Rev. **D 99**, 085012 (2019).
- [5] A. F. Ferrari et al., Mod. Phys. Lett. **A 28**, 1350052 (2013); I. J. Morales Ulion, E. R. Bezerra de Mello and A. Yu. Petrov, Int. J. Mod. Phys. **A 30**, 1550220 (2015).
- [6] Dêivid R. da Silva, M. B. Cruz and E. R. Bezerra de Mello, Int. J. Mod. Phys. **A 34**, 1950107 (2019).
- [7] H. G. B. Casimir; Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
- [8] M. J. Sparnaay; Physica **24**, 751 (1958).
- [9] S. K. Lamoreaux; Phys. Rev. Lett. **78**, 5 (1997).
- [10] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko; *Advances in the Casimir Effect*; Oxford Science Publications (2009).
- [11] W. Greiner; *Relativistic Quantum Mechanics*; Springer, 2th ed., 1997.
- [12] G. B. Arfken e H. J. Webber; *Mathematical Methods for Physicists*; Elsevier, 6th ed., 2005.
- [13] J. B. Neto; *Teoria de Campos e a Natureza*; Livraria da Física, 1th ed., 2017.
- [14] V. M. Mostepanenko and N. N. Trunov; *The Casimir Effect and its Applications*; Clarendon Press, 1th ed., 1997.
- [15] Chao-Jun Feng and Xin-Zhou Li, J. Phys. Lett. **B 691**, 167 (2010); Giulia Aleixo and Herondy F. Santana Mota, Phys. Rev. **D 104**, 045012 (2021).
- [16] U. Mohideen and Anushree Roy, Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1998).
- [17] S. G. Mamayev, V. M. Mostepanenko and A. A. Starobinsky, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **70**, 1577 (1976).

-
- [18] S. Bellucci and A. A. Saharian, [arXiv:0907.4942v1].
- [19] Bernd Thaller, *The Dirac Equation*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg NewYork, 1992.
- [20] Xiang-hua Zhai, Xin-zhou Li, Chao-Jun Feng, Fermionic Casimir effect with helix boundary condition, *Eur. Phys. J. C*, 2011, 71:1654.
- [21] LEWIS H. RYDER, *Quantum Field Theory*, 2nd ed. Cambridge University Press, 1996.
- [22] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, 2nd ed. Intitute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 2003.
- [23] A. J. D. Farias Junior and Herondy F. Santana Mota; *International Journal of Modern Physics D*, 16 (2022).
- [24] Umberto PERCOCO and Victor M. VILLALBA, *Phys. Rev. Lett.* **A**, 140 (1989).
- [25] P Alberto et al 1996 *Eur. J. Phys.* **17** 19.
- [26] Vidal Alonso et al 1997 *Eur. J. Phys.* **18** 315.
- [27] Pedro Alberto, Saurya Das, Elias C. Vagenas; *Phys. Lett.* **A** 375 (2011).
- [28] Chodos A et al 1974 *Phys. Rev. D* **9** 3471.