



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

Uma introdução à Teoria da Medida e Integração no $\mathbb{R}^n$

Edson de Souza Silva

João Pessoa
2023

Edson de Souza Silva

Uma introdução à Teoria da Medida e Integração no $\mathbb{R}^n$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação de Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Felipe W. Chaves-Silva

João Pessoa
2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586i Silva, Edson de Souza.

Uma introdução à Teoria da Medida e Integração no $\mathbb{R}^n$
/ Edson de Souza Silva. - João Pessoa, 2023.
103 p. : il.

Orientação: Felipe Wallison Chaves Silva.
TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Teoria da Medida. 2. Integral de Lebesgue. 3. .
I. Silva, Felipe Wallison Chaves. II. Título.

UFPB/CCEN

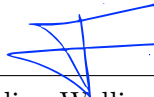
CDU 51(043.2)

Edson de Souza Silva

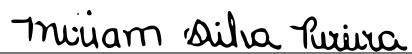
Uma introdução à Teoria da Medida e Integração no $\mathbb{R}^n$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Matemática. Orientador: Felipe Wallison Chaves Silva Aprovado em: 27/10/2023.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Felipe Wallison Chaves Silva
Orientador – UFPB Campus I



Prof. Dr. Miriam da Silva Pereira
Avaliador – UFPB Campus I



Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo
Avaliador – UFPB Campus I

Dedico este trabalho aos meus pais por todo o apoio oferecido.

Agradecimentos

Agradeço à minha família por todo o apoio oferecido durante esse trajeto. À minha mãe, Nilma Silva, e ao meu pai, Francisco Silva, por me apoiarem desde o início. Aos meus irmãos, Eliézio Silva e Elisson Silva, por sempre contribuírem quando foi preciso. À minha namorada, Leila Denise, que, além de me motivar diariamente, foi minha “psicóloga” durante todo esse caminho.

A todos os meus amigos que tornaram esse caminho menos doloroso com todos os risos descontraídos no dia a dia e longas noites mal dormidas em períodos de prova. Em especial, Assuério Cavalcante, Fylype Araújo, Gabriel Frazão, Mateus Barreto, Matheus Chacon e Matheus Mestre.

Ao meu professor e orientador, Felipe Wallisson, que contribuiu bastante para o meu aprendizado durante toda a minha jornada na UFPB.

Aos professores Uberlandio Severo e Miriam Pereira por aceitarem examinar este trabalho.

Resumo

Este trabalho estuda de maneira abrangente os conceitos, definições, propriedades e resultados fundamentais da Teoria da Medida e Integração no $\mathbb{R}^n$. Iniciamos com as definições básicas de retângulos e cubos. Depois introduzimos a definição de medida exterior, conjunto mensurável, medida de Lebesgue e da sigma-álgebra de Borel. Em seguida, adentramos nas definições essenciais de função mensurável e integral de Lebesgue, detalhando suas propriedades fundamentais.

Além disso, este trabalho destaca resultados de grande relevância nesta área, incluindo o Teorema da aproximação por funções simples, os três Princípios de Littlewood, o Lema de Fatou, o Teorema da convergência monótona e o Teorema da convergência dominada. Abordamos também os Teoremas de Fubini e Tonelli, que são cruciais para estender a teoria de integração a múltiplas dimensões.

Por fim, investigamos a relação entre diferenciabilidade e integrabilidade dentro deste contexto, e apresentamos o importante Teorema da diferenciação de Lebesgue. Encerramos o trabalho com uma versão do Teorema fundamental do cálculo aplicada a esta situação.

Palavras chave: Teoria da Medida. Função mensurável. Integral de Lebesgue. Teorema de Fubini.

Abstract

In this work, we study some fundamental concepts, definitions, properties and results of Integration and Measure theory in $\mathbb{R}^n$. We begin with the basic definitions of rectangles and cubes. Then, we introduce the concepts of exterior measure, measurable sets, Lebesgue measure, and the Borel sigma-algebra. After, we focus on measurable functions and the Lebesgue integral, detailing some of their fundamental properties.

In the second part, we study some important results in the theory of integration, such as the theorem of approximation by simple functions, the three Littlewood Principles, Fatou's Lemma, the Monotone convergence theorem, and the Dominated convergence theorem. We also prove the known theorems of Fubini and Tonelli, which are crucial for extending the integration theory to multiple dimensions.

Finally, we investigate the relationship between integration and differentiation in this new context of measurable functions and present the important Lebesgue differentiation theorem. We conclude presenting a version of the Fundamental theorem of calculus applied to measurable functions.

Keywords: Measure Theory. Measurable functions. Lebesgue Integral. Fubini's Theorem.

Sumário

Introdução	9
1 Medida	11
1.1 Retângulos e cubos	11
1.2 Conjunto de Cantor	13
1.3 Medida exterior	14
1.3.1 Propriedades da medida exterior	18
1.4 Conjuntos mensuráveis e a medida de Lebesgue	21
1.5 σ -álgebras e conjuntos de Borel	26
1.6 Funções mensuráveis	29
1.6.1 Definições e propriedades básicas	29
1.6.2 Aproximação por funções simples	32
1.6.3 Três princípios de Littlewood	35
2 Integração	38
2.1 A integral de Lebesgue: Algumas propriedades e teoremas de convergência	38
2.1.1 Funções simples	38
2.1.2 Funções limitadas suportadas em um conjunto de medida finita	40
2.1.3 Funções não negativas	43
2.1.4 O caso geral	46
2.2 O espaço $L^1(\mathbb{R}^n)$ de funções integráveis	49
2.3 Teorema de Fubini	54
2.3.1 Enunciado e prova do teorema	55
2.3.2 Aplicações do Teorema de Fubini	60
3 Diferenciação e Integração	67
3.1 Diferenciação da integral	67
3.1.1 A função maximal de Hardy-Littlewood	69
3.1.2 Teorema da diferenciação de Lebesgue	73
3.2 Diferenciabilidade de funções	76
3.2.1 Funções de variação limitada	77
3.2.2 Funções absolutamente contínuas	89
3.2.3 Diferenciabilidade de funções “jump”	95
A Algumas definições e resultados básicos	99
Referências Bibliográficas	102

Introdução

Através do Cálculo Diferencial e Integral podemos realizar integrações e derivações de funções, o que nos permite calcular áreas e volumes de uma grande variedade de conjuntos. Por muito tempo, esta teoria foi suficiente para o estudo matemático de vários problemas. Entretanto, com o avanço da matemática e a necessidade de resolver problemas cada vez mais complexos, percebeu-se que as ideias do cálculo já não eram suficientes para resolver uma grande variedade de problemas e era necessário o desenvolvimento de novas ferramentas matemáticas. Com isto em mente, por volta de 1902, o matemático Henri Léon Lebesgue introduziu, em sua tese de doutorado, um método inovador de integração. Este estudo apresentou uma abordagem revolucionária que englobava um espectro mais amplo de funções e não somente aquelas tratadas pelo Cálculo Diferencial e Integral clássico. A nova teoria buscava fazer mudanças na estrutura matemática, permitindo uma transformação e generalização das noções fundamentais como o de funções, diferenciabilidade e integrabilidade.

Em outras palavras, essa teoria introduziu um novo método de calcular “volume” de conjuntos, explorando os subconjuntos não apenas de retas e planos, mas também de espaços mais abstratos. Além disso, a generalização do conceito de “medida” proposto por Lebesgue permitiu atribuir uma medida a muitos conjuntos que não conseguimos medir com o cálculo elementar, fornecendo um novo nível de precisão e rigor à análise matemática.

Não há dúvidas que o cálculo diferencial e integral tradicional trouxe ferramentas essenciais para a compreensão de problemas matemáticos, mas foi a genialidade de Henri Léon Lebesgue que desencadeou uma revolução na forma como enxergamos e manipulamos funções, conjuntos e medidas, ampliando os horizontes da matemática moderna.

Tendo em vista a importância da Teoria da Medida e Integração para a matemática produzida atualmente, a motivação para a realização desta monografia surgiu partindo desse fato e da participação do autor deste trabalho no Curso de Verão da UFPB, ocorrido entre 03 de janeiro e 11 de março de 2022. Durante aquele curso, observou-se que vários estudantes enfrentam dificuldades para compreender as noções intuitivas da teoria, uma vez que o material de referência principal, o livro “The Elements of Integration and Lebesgue Measure” de Robert Gardner Bartle (referência [2]), começa abordando definições e propriedades de conjuntos abstratos. Essa abordagem torna a compreensão dos conceitos mais desafiadora para os alunos, o que pode prejudicar uma boa parte do desenvolvimento do curso, onde em nível de mestrado essa estrutura de ementa é frequentemente adotada.

No período de 01 de setembro de 2021 a 31 de agosto de 2022, o autor se envolveu em um estudo de Teoria da Medida e Integração por meio de um Projeto de Iniciação Científica. Nesse estudo, utilizou o livro “Real Analysis - Measure Theory, Integration, e Hilbert Spaces” escrito por Elias M. Stein e Rami Shakarchi (referência [1]). Esse livro aborda inicialmente os resultados para subconjuntos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e depois expande para subconjuntos de natureza mais geral. Essa sequência de aprendizagem permitiu uma melhor assimilação das noções intuitivas e conhecimentos fundamentais

da teoria, especialmente no contexto de conjuntos abstratos.

Com base nessa experiência, o autor deste trabalho decidiu realizar um estudo focado no livro de Stein e Shakarchi, com o objetivo de auxiliar os alunos que buscam estabelecer uma base prévia de conhecimentos. Essa abordagem propõe a compreensão dos aspectos intuitivos da teoria, trabalhando com subconjuntos do $\mathbb{R}^n$, e assim obtendo uma melhor compreensão dos conceitos mais abstratos a posteriori. Para realizar o estudo dessa importante teoria, seguimos fielmente a referência [1], atribuindo alguns detalhes quando necessário.

Para deixar o trabalho ainda mais autocontido, o leitor pode consultar o Apêndice A para relembrar alguns resultados básicos que serão utilizados durante o desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 1 deste trabalho, apresentamos as definições de retângulos, cubos e de medida exterior e suas propriedades, no caso do $\mathbb{R}^n$, o que nos permitirá entender as definições de conjunto mensurável e de medida de Lebesgue. Após isso, introduzimos a σ -álgebra de Borel. Com todas as definições em mente, definimos as funções mensuráveis e apresentamos alguns resultados importantes como o Teorema da aproximação por funções simples e os três princípios de Littlewood.

No capítulo 2 definiremos a Integral de Lebesgue e enunciaremos suas propriedades. Nessa parte também iremos definir o importante espaço $L^1(\mathbb{R}^n)$ de funções integráveis, apresentar o Teorema da convergência limitada, Lema de Fatou, Teorema da convergência monótona, Teorema da convergência dominada e os Teoremas de Fubini e Tonelli e algumas de suas aplicações.

Por fim, no capítulo 3, veremos o Teorema fundamental do cálculo nessa perspectiva da Teoria da Medida e Integração. Para isso, precisaremos do Teorema da diferenciação de Lebesgue que, para sua demonstração, necessitamos um bom entendimento da função maximal de Hardy-Littlewood e de uma das versões do Teorema do recobrimento de Vitali.

1 Medida

Este capítulo é destinado à definição de medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$. Antes daremos alguns resultados preliminares.

1.1 Retângulos e cubos

Para dar uma base a nossa intuição, veremos agora a definição de retângulos e cubos.

Definição 1.1. Um retângulo fechado R no $\mathbb{R}^n$ é o produto de n intervalos unidimensionais fechados e limitados, isto é,

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

com $a_j < b_j$ números reais, $j = 1, 2, \dots, n$.

Definição 1.2. O volume de um retângulo R é dado por $|R| = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$.

No que segue, diremos que a união de retângulos é **quase disjunta** quando os interiores dos retângulos são disjuntos.

Agora, introduziremos os seguintes lemas, cujas demonstrações serão omitidas, mas uma prova para esses resultados é apresentada na página 5 na referência [II].

Lema 1.1. Se um retângulo é formado pela união quase disjuntas de outros retângulos, isto é, $R = \bigcup_{k=1}^N R_k$, então

$$|R| = \sum_{k=1}^N |R_k|.$$

Lema 1.2. Sejam $R, R_1, \dots, R_N$ retângulos e $R \subset \bigcup_{k=1}^N R_k$, então

$$|R| \leq \sum_{k=1}^N |R_k|.$$

Vejamos agora que é possível representar subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$ como união de cubos. Por simplicidade, começamos com o caso de $\mathbb{R}$.

Teorema 1.1. Todo subconjunto aberto $A \subset \mathbb{R}$ pode ser escrito de modo único como uma união enumerável de intervalos abertos disjuntos.

Prova: Para cada $x \in A$, seja I_x o maior intervalo aberto contendo x e contido em A . Mais precisamente, uma vez que A é aberto, x está contido em algum intervalo pequeno e, portanto, se

$$a_x = \inf\{a < x : (a, x) \subset A\} \text{ e } b_x = \sup\{b > x : (x, b) \subset A\}$$

devemos ter $a_x < x < b_x$ (podendo-se ter a_x e b_x infinitos). Seja $I_x = (a_x, b_x)$, então por construção temos $x \in I_x$, assim como $I_x \subset A$. Portanto

$$A = \bigcup_{x \in A} I_x.$$

Agora, suponha que dois intervalos I_x e I_y se intersectam. Então, sua união (que também é um intervalo aberto) está contida em A e contém x . Visto que I_x é máximo, devemos ter $(I_x \cup I_y) \subset I_x$, e da mesma forma $(I_x \cup I_y) \subset I_y$. Então, temos que $I_x = I_y$. Portanto quaisquer dois intervalos distintos na coleção $I = \{I_x\}_{x \in A}$ serão disjuntos. A prova estará completa, uma vez que tenhamos mostrado que existem enumeráveis intervalos distintos na coleção I . Isso, no entanto, é fácil de ver, uma vez que cada intervalo aberto I_x contém um número racional. Como intervalos diferentes são disjuntos, eles devem conter racionais distintos e, portanto, I é enumerável, pois os números racionais formam um conjunto enumerável. Isto conclui a prova.

□

Teorema 1.2. *Todo subconjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, pode ser escrito como uma união enumerável de cubos fechados quase disjuntos.*

Prova: Devemos construir uma coleção enumerável $\mathcal{Q}$ de cubos fechados cujos interiores sejam disjuntos, e de forma que $A = \cup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$.

Como um primeiro passo, considere a malha em $\mathbb{R}^n$ dada por um feixe de paralelas separadas entre si de uma distância constante “ D ”. Em seguida, marque um outro feixe de paralelas ortogonal à direção anterior, também separadas a uma distância “ D ”. Aqui consideramos a malha de linhas paralelas aos eixos e distância $D = 1$ entre uma linha e outra. Aceitamos ou rejeitamos cubos na malha inicial como parte de $\mathcal{Q}$ de acordo com a seguinte regra: se Q estiver inteiramente contido em A , então aceitamos; se Q intersecta A e A^C , então o aceitamos provisoriamente; e se Q está inteiramente contido em A^C , então o rejeitamos.

Como uma segunda etapa, dividimos os cubos provisoriamente aceitos em cubos com comprimento lateral $\frac{1}{2}$. Em seguida, repetimos nosso procedimento, aceitando os cubos menores se estiverem completamente contidos em A , aceitando-os provisoriamente se eles intersectarem tanto A quanto A^C , e rejeitando-os se estiverem contidos em A^C (para melhor entendimento ver a Figura 1).

Repetindo esse processo indutivamente chegamos à conclusão do resultado.

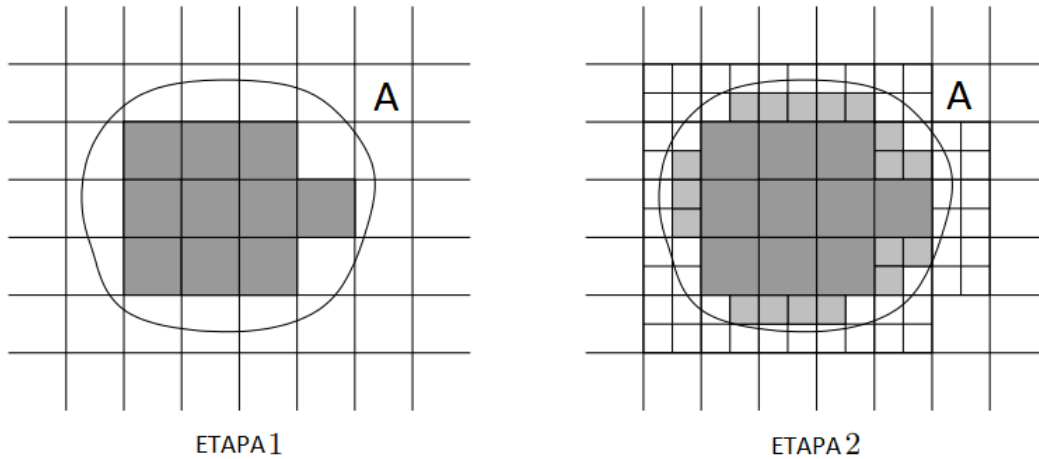


Figura 1: Malha da prova do Teorema 1.2 Figura adaptada de [1].

□

1.2 Conjunto de Cantor

Antes de dar continuidade no assunto, definiremos um importante conjunto para nossa teoria, o conjunto de Cantor, o qual será fonte de exemplos posteriormente.

Começamos introduzindo o intervalo fechado $C_0 = [0, 1]$ e denotamos C_1 o conjunto obtido a partir da exclusão do terço médio do intervalo aberto de $[0, 1]$, ou seja,

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Em seguida, repetimos este procedimento para cada subintervalo de C_1 , ou seja, excluimos o terço médio do intervalo aberto de $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$. Assim na segunda etapa, obtemos:

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],$$

e assim por diante. Este procedimento produz uma sequência C_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ de conjuntos compactos com

$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_k \supset C_{k+1} \supset \dots$$

O conjunto Cantor C é definido como a interseção de todos os C_k 's, ou seja,

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

Note que o conjunto C é não vazio, uma vez que todos os pontos finais dos intervalos em C_k pertencem a C .

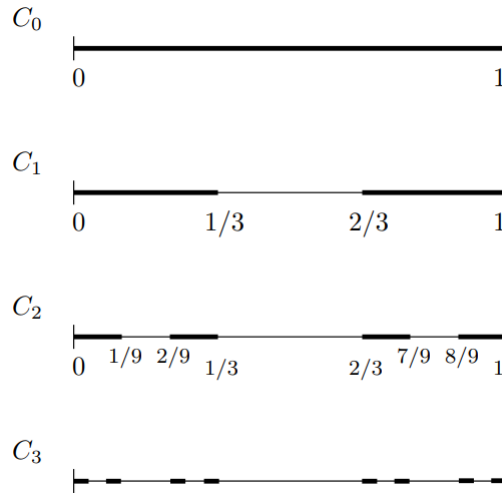


Figura 2: Representação dos conjuntos C_k 's. Figura retirada de [1]

O conjunto de Cantor possui muitas propriedades topológicas e analíticas interessantes. Por exemplo, o conjunto de Cantor tem interior vazio, é não enumerável, todo ponto do conjunto de Cantor é de acumulação de C . Além disso, C é totalmente desconexo: dado qualquer $x, y \in C$, existe $z \notin C$ que fica entre x e y . Como não faz parte do foco do trabalho, a prova dessas propriedades ficará como exercício para o leitor.

Como futuramente pretende-se falar em medida, podemos pensar em qual é o “tamanho” do conjunto de Cantor. É possível analisar isto de duas maneiras. A primeira é em termos de cardinalidade, dessa forma, o conjunto de Cantor é consideravelmente grande, pois é não enumerável. É possível mostrar que C pode ser mapeado no intervalo $[0, 1]$, logo o conjunto de Cantor tem a cardinalidade do contínuo. Por outro lado, se pensado do ponto de vista de comprimento (distância) C é pequeno, pode-se dizer até que tem comprimento zero. E de fato, por construção o conjunto C é coberto pelos conjuntos C_k cujos comprimentos tendem a zero, e realmente, veja que C_k é uma união disjunta de 2^k intervalos de comprimento $\frac{1}{3^k}$, logo o comprimento total de C_k é igual a $(\frac{2}{3})^k$. Mas, por definição, $C \subset C_k$ para todo k , e $(\frac{2}{3})^k \rightarrow 0$ quando k tende ao infinito. Portanto, C tem comprimento zero.

1.3 Medida exterior

Nesta seção, introduziremos uma definição bastante importante para a construção da nossa teoria, a definição de **medida exterior**. Em poucas palavras, a medida exterior fornece uma noção de “volume” a qualquer subconjunto do $\mathbb{R}^n$. Como veremos posteriormente, a medida exterior tem algumas limitações e deve ser refinada de modo a introduzir corretamente a definição de volume a conjuntos do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.3. *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$, a medida exterior de E é dada por:*

$$m_*(E) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \quad (\text{sendo } |Q_j| \text{ o volume de } Q_j),$$

no qual os Q_j são cubos fechados e o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas enumeráveis

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

de cubos fechados.

Se $E \subset \mathbb{R}^n$, denotamos por C o conjunto de todas as coberturas de E formada de cubos fechados, isto é,

$$C = \{\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}; E \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j\}$$

e V o conjunto dos volumes de tais coberturas, ou seja,

$$V = \{\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \mid \{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in C\}.$$

Deste modo, a medida exterior de E , denotada por $m_*(E)$, é o número que melhor se aproxima do que seria o volume do conjunto E , isto é,

$$m_*(E) = \inf(V).$$

Vale mencionar que essa aproximação pode não ser necessariamente “boa”. Trataremos disso com mais detalhes nas seções seguintes.

Exemplo 1.1. *A medida exterior de um ponto é zero. Basta notar que um ponto é um cubo com volume igual a zero e que cobre a si mesmo.*

Proposição 1.1. *A medida exterior de um cubo fechado é igual ao seu volume.*

Prova: De fato, suponhamos Q um cubo fechado do $\mathbb{R}^n$. Como Q cobre a si mesmo, então, por definição de ínfimo, sua medida exterior é menor ou igual ao seu volume, isto é,

$$Q \subset Q \longrightarrow m_*(Q) \leq |Q|.$$

Logo, basta provar que para uma cobertura arbitrária $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset Q$, temos que

$$|Q| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|.$$

Para isso, fixe $\epsilon > 0$, para cada j tome um cubo aberto S_j contendo Q_j , tal que

$$|S_j| \leq (1 + \epsilon)|Q_j|.$$

Note que

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \implies \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \bigcup_{j=1}^N S_j \supset Q,$$

pois Q é compacto (ver Definição [A.3](#) no Apêndice [A](#)). Pelo Lema [1.2](#), temos que

$$|Q| \leq \sum_{j=1}^N |S_j|,$$

isto é,

$$|Q| \leq (1 + \epsilon) \sum_{j=1}^N |Q_j| \leq (1 + \epsilon) \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|.$$

Como ϵ é arbitrário, então

$$|Q| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|,$$

ou seja, $|Q|$ é menor ou igual que o volume de qualquer cobertura, em particular

$$|Q| \leq \inf \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| = m_*(Q).$$

Portanto,

$$m_*(Q) \leq |Q| \text{ e } m_*(Q) \geq |Q| \longrightarrow m_*(Q) = |Q|.$$

□

Proposição 1.2. *Se Q é um cubo aberto, então $m_*(Q) = |Q|$.*

Prova: De fato, veja que

$$Q \subset \overline{Q} \text{ e } |\overline{Q}| = |Q| \longrightarrow m_*(Q) \leq |\overline{Q}| = |Q| \text{ (sendo } \overline{Q} \text{ o fecho de } Q).$$

Por outro lado, considere Q_0 um cubo fechado contido em Q , então

$$m_*(Q_0) = |Q_0| \leq m_*(Q).$$

Como podemos escolher Q_0 tão próximo de Q o quanto queiramos, temos que

$$|Q| \leq m_*(Q).$$

Portanto,

$$m_*(Q) \leq |Q| \text{ e } m_*(Q) \geq |Q| \longrightarrow m_*(Q) = |Q|.$$

□

Proposição 1.3. *A medida exterior de um retângulo R é igual ao seu volume.*

Prova: Pelo mesmo argumento da Proposição 1.1, podemos concluir que

$$|R| \leq m_*(R).$$

Por outro lado, considere uma malha em $\mathbb{R}^n$ formada por cubos de tamanho $\frac{1}{k}$.

Sejam agora,

- $\mathcal{Q}$: Coleção (finita) dos cubos contidos em R ;
- $\mathcal{Q}'$: Coleção dos cubos que intersectam o R^C .

Note que $R \subset \bigcup_{Q \in (\mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}')} Q$ e como $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q \subset R$, então $\sum_{Q \in \mathcal{Q}} |Q| \leq |R|$. Além disso, como $O\left(\frac{1}{k}\right) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}'} |Q|$, temos que

$$\sum_{Q \in (\mathcal{Q} \cup \mathcal{Q}')} |Q| \leq |R| + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Fazendo k tender ao infinito, obtemos:

$$m_*(R) \leq |R|,$$

pois, a medida que k cresce, a malha é cada vez mais refinada, e o número de cubos que intersectam R^C vai diminuindo.

Portanto,

$$m_*(R) \geq |R| \text{ e } m_*(R) \leq |R| \longrightarrow m_*(R) = |R|.$$

□

Exemplo 1.2. A medida exterior do $\mathbb{R}^n$ é infinita.

Isso decorre do fato de que qualquer cobertura do $\mathbb{R}^n$ é também uma cobertura de qualquer cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$, portanto $|Q| \leq m_*(\mathbb{R}^n)$. Como Q pode ter um volume arbitrariamente grande, devemos ter que $m_*(\mathbb{R}^n) = \infty$.

Exemplo 1.3. O conjunto Cantor C tem medida exterior 0.

Da construção de C , sabemos que $C \subset C_k$, onde cada C_k é uma união disjunta de 2^k intervalos fechados, cada um de comprimento $\frac{1}{3^k}$. Consequentemente, $m_*(C) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$ para todo k , portanto $m_*(C) = 0$. Veja que interessante, C é um conjunto não enumerável de medida exterior zero.

A seguinte observação será bastante útil no decorrer deste trabalho.

Observação 1.1. Para todo $\epsilon > 0$, existe uma cobertura $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ com

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) \leq m_*(E) + \epsilon.$$

Note que essa observação decorre simplesmente da definição de ínfimo.

1.3.1 Propriedades da medida exterior

Depois de termos visto a definição e exemplos de medida exterior, assim obtendo uma base intuitiva, apresentaremos agora cinco propriedades que serão úteis mais adiante.

Afirmção 1. (Monotonicidade) Se $E_1 \subset E_2$, então $m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$.

Prova: Note que qualquer cobertura enumerável de cubos fechados de E_2 , também será uma cobertura de E_1 . Isto é, o volume da menor cobertura de E_2 é maior ou igual que o volume de qualquer cobertura de E_1 . Em particular, a monotonicidade implica que cada subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$ tem medida exterior finita. □

Afirmção 2. (Subaditividade enumerável) Se $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$, então $m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j)$.

Prova: Em primeiro lugar, podemos assumir que cada $m_*(E_j) < \infty$, caso contrário, a desigualdade claramente se mantém. Para qualquer $\epsilon > 0$, a definição de medida exterior nos dá para cada j uma cobertura $E_j \subset \cup_{k=1}^{\infty} Q_{k,j}$ de cubos fechados e da Observação 1.1, temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_{k,j}| \leq m_*(E_j) + \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Então, $E \subset \cup_{j,k=1}^{\infty} Q_{k,j}$ é uma cobertura de E por cubos fechados, e portanto

$$\begin{aligned} m_*(E) &\leq \sum_{j,k} |Q_{k,j}| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |Q_{k,j}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(m_*(E_j) + \frac{\epsilon}{2^j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como isso vale para qualquer $\epsilon > 0$, concluímos que

$$m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j).$$
□

Afirmção 3. Se $E \subset \mathbb{R}^n$, então $m_*(E) = \inf m_*(A)$, onde o ínfimo é tomado sobre todos os conjuntos abertos A contendo E .

Prova: Da monotonicidade (Afirmção 1) temos que $m_*(E) \leq \inf m_*(A)$. Agora, devemos provar a desigualdade contrária, para isso tome $\epsilon > 0$ e escolha cubos Q_j tal que $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} Q_j$, com

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \stackrel{(\text{Observação } \textcolor{red}{1.1})}{\leq} m_*(E) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Vamos denotar por Q_J^0 um cubo aberto que contém Q_J , tal que $|Q_J^0| \leq |Q_J| + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}$. Então $A = \cup_{j=1}^{\infty} Q_J^0$ é aberto, e da Afirmação 2 acima, temos:

$$\begin{aligned} m_*(A) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_J^0) = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_J^0| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(|Q_J| + \frac{\epsilon}{2^{j+1}} \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_J| + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq m_*(E) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, então

$$m_*(A) \leq m_*(E) \longrightarrow \inf m_*(A) \leq m_*(E).$$

Portanto,

$$m_*(E) \leq \inf m_*(A) \text{ e } m_*(E) \geq \inf m_*(A) \longrightarrow m_*(E) = \inf m_*(A).$$

□

Definição 1.4. *Seja (E, d) um espaço métrico (ver Apêndice A), definimos a distancia entre dois subconjuntos A e B não vazios de E como o ínfimo das distâncias entre um ponto do conjunto A e um ponto do conjunto B , isto é,*

$$\text{dist}(A, B) := \inf \{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Afirmação 4. Se $E = E_1 \cup E_2$, e $d(E_1, E_2) > 0$, então

$$m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2).$$

Prova: Da Afirmação 2 acima, temos que $m_*(E) \leq m_*(E_1) + m_*(E_2)$, então basta provar a desigualdade contrária. Para isso, escolha δ tal que $d(E_1, E_2) = \delta > 0$. Agora, iremos escolher uma cobertura $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} Q_j$ de cubos fechados, com $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E) + \epsilon$. Vamos subdividir os cubos Q_j , de modo que cada Q_j tenha aresta menor que δ . Neste caso, cada Q_j pode interceptar no máximo um dos dois conjuntos E_1 ou E_2 . Se denotarmos por J_1 e J_2 os conjuntos de índices j para os quais Q_j intersecta E_1 e E_2 , respectivamente, então $J_1 \cap J_2 = \emptyset$, e temos

$$E_1 \subset \bigcup_{j \in J_1} Q_j \text{ e } E_2 \subset \bigcup_{j \in J_2} Q_j.$$

Então,

$$\begin{aligned} m_*(E_1) + m_*(E_2) &\leq \sum_{j \in J_1} |Q_j| + \sum_{j \in J_2} |Q_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \\ &\leq m_*(E) + \epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, temos na verdade que

$$m_*(E_1) + m_*(E_2) \leq m_*(E).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} m_*(E) &\leq m_*(E_1) + m_*(E_2) \text{ e } m_*(E) \geq m_*(E_1) + m_*(E_2) \\ &\longrightarrow m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2). \end{aligned}$$

□

Afirmção 5. Se o conjunto E é a união enumerável de cubos quase disjuntos, isto é, $E = \cup_{j=1}^{\infty} Q_j$, então

$$m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|.$$

Prova: Denote $\tilde{Q}_j$ um cubo que está estritamente contido em Q_j , de modo que $|Q_j| \leq |\tilde{Q}_j| + \frac{\epsilon}{2^j}$, onde ϵ é um número arbitrário fixo. Então, para todo N , os cubos $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \dots, \tilde{Q}_N$ são disjuntos, portanto, a uma distância finita um do outro, e da Afirmção 4 acima, temos que

$$m_*\left(\bigcup_{j=1}^N \tilde{Q}_j\right) = \sum_{j=1}^N m_*(\tilde{Q}_j) = \sum_{j=1}^N |\tilde{Q}_j| \geq \sum_{j=1}^N \left(|Q_j| - \frac{\epsilon}{2^j}\right).$$

Como $\cup_{j=1}^N \tilde{Q}_j \subset E$, concluímos para cada N inteiro que

$$m_*(E) \geq \sum_{j=1}^N |Q_j| - \epsilon.$$

Fazendo N tender ao infinito, e pelo fato de ϵ ser arbitrário obtemos

$$m_*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|.$$

Para completar a prova, fica faltando a desigualdade contrária, ou seja,

$$m_*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|,$$

a qual decorre da Afirmção 2 acima.

□

1.4 Conjuntos mensuráveis e a medida de Lebesgue

Nesta seção iremos definir medida de Lebesgue para subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. Porém, precisaremos de alguns conceitos preliminares.

Definição 1.5. Um subconjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ é **Lebesgue mensurável**, ou simplesmente **mensurável**, se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um conjunto aberto A com $E \subset A$ e

$$m_*(A - E) \leq \epsilon.$$

Observe que podemos comparar isto à Afirmação 3, assim obtendo que um subconjunto E do $\mathbb{R}^n$ é **Lebesgue mensurável** se podemos *aproximar* E por um conjunto aberto A tal que $E \subset A$. Aqui, *aproximar* está no sentido da $m_*(E) = m_*(A)$.

Definição 1.6. Se E é mensurável, definimos sua medida de Lebesgue (ou medida) $m(E)$ por

$$m(E) = m_*(E).$$

Claramente, a medida de Lebesgue herda todas as características contidas nas afirmações de 1 a 5 da medida exterior.

Partindo da definição, temos as seguintes propriedades para conjuntos mensuráveis.

Propriedade 1.1. Todo conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ é mensurável.

Prova: Segue da definição.

□

Propriedade 1.2. Se $m_*(E) = 0$, então E é mensurável. Em particular, se F é um subconjunto de um conjunto com medida exterior 0, então F é mensurável.

Prova: Pela Afirmação 3, para cada $\epsilon > 0$ existe um conjunto aberto A com $E \subset A$ e $m_*(A) \leq \epsilon$, pois $m_*(E) = 0$. Como $(A - E) \subset A$, a monotonicidade (Afirmação 1) implica $m_*(A - E) \leq m_*(A) \leq \epsilon$, como queríamos.

□

Propriedade 1.3. A união enumerável de conjuntos mensuráveis é mensurável.

Prova: Suponha que $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, onde cada E_j é mensurável. Assim, dado $\epsilon > 0$, podemos escolher para cada j um conjunto aberto A_j com $E_j \subset A_j$ e $m_*(A_j - E_j) \leq \frac{\epsilon}{2^j}$. Então, a união $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ é aberto, $E \subset A$, e $(A - E) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j - E_j)$, da monotonicidade (Afirmação 1) e subaditividade (Afirmação 2) de medida exterior, temos que

$$m_*(A - E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(A_j - E_j) \leq \epsilon.$$

□

Antes de irmos para a próxima propriedade, enunciaremos um resultado que vamos precisar para provar a mesma.

Lema 1.3. *Se F é fechado, K é compacto, e esses conjuntos são disjuntos, então $d(F, K) > 0$.*

Prova: Como F é fechado, dado $x \in K$, temos $d(x, F) > 3\delta_x > 0$, para algum $\delta_x > 0$. De fato, suponha que $d(x, F) = \inf\{d(x, y) : y \in F\} = 0$, então

$$\forall \epsilon > 0, \exists y_0 \in F \text{ t.q. } d(x, y_0) < \epsilon \longrightarrow x \in F \text{ (} x \text{ seria aderente)}.$$

O que é uma contradição.

Note que

$$\bigcup_{x \in K} B_{2\delta_x}(x) \supset K \xrightarrow{K \text{ é compacto}} \exists x_1, \dots, x_n \text{ t.q. } \bigcup_{j=1}^N B_{2\delta_j}(x_j) \supset K.$$

Assim, tomando $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_N)$, veja que se $x \in K$, então $x \in B_{2\delta_j}(x_j)$. Portanto, dado $y \in F$, temos

$$|y - x| \geq |y - x_j| - |x_j - x| \geq 3\delta_j - 2\delta_j \geq \delta > 0.$$

□

Propriedade 1.4. *Conjuntos fechados são mensuráveis.*

Prova: Em primeiro lugar, observamos que basta provar que os conjuntos compactos são mensuráveis. De fato, qualquer conjunto fechado F pode ser escrito como a união de conjuntos compactos, digamos $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F \cap B_k$, onde B_k denota a bola fechada de raio k centrada na origem; assim a Propriedade 1.3 se aplica.

Então, suponha que F é compacto (de modo que em particular $m_*(F) < \infty$), e $\epsilon > 0$. Pela Afirmação 3, podemos selecionar um conjunto aberto A com $F \subset A$ e $m_*(A) \leq m_*(F) + \epsilon$ (veja a Observação 1.1). Uma vez que F é fechado, a diferença $A - F$ é aberta, e pelo Teorema 1.2 podemos escrever esta diferença como uma união enumerável de cubos quase disjuntos, isto é,

$$A - F = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j.$$

Para um N fixo, a união finita $K = \bigcup_{j=1}^N Q_j$ é compacta; portanto, $d(K, F) > 0$ (veja o Lema 1.3). Uma vez que $(K \cup F) \subset A$, as Afirmações 1, 4 e 5 da medida exterior implicam que

$$m_*(A) \geq m_*(F) + m_*(K)$$

$$= m_*(F) + \sum_{j=1}^N m_*(Q_j).$$

Logo, $\sum_{j=1}^N m_*(Q_j) \leq m_*(A) - m_*(F) \leq \epsilon$, e isso também é válido para $N \rightarrow \infty$. Invocando a propriedade de subaditividade (Afirmção 2) de medida exterior, finalmente obtemos:

$$m_*(A - F) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) \leq \epsilon.$$

□

Propriedade 1.5. *O complementar de um conjunto mensurável é mensurável.*

Prova: Se E for mensurável, então para cada inteiro positivo n podemos escolher um conjunto aberto A_n com $E \subset A_n$ de modo que $m_*(A_n - E) \leq \frac{1}{n}$. O complementar A_n^C é fechado, portanto mensurável (veja a Propriedade 1.4), o que implica que a união $S = \cup_{n=1}^{\infty} A_n^C$ também é mensurável pela Propriedade 1.3. Agora, notemos que para $S \subset E^C$, temos

$$(E^C - S) \subset (A_n - E),$$

então, $m_*(E^C - S) \leq \frac{1}{n}$ para todo n . Portanto, $m_*(E^C - S) = 0$, e $E^C - S$ é mensurável pela Propriedade 1.2. Veja que $E^C = (E^C - S) \cup S$, portanto E^C pela Propriedade 1.3 é mensurável já que é a união de dois conjuntos mensuráveis.

□

Propriedade 1.6. *A interseção enumerável de conjuntos mensuráveis é mensurável.*

Prova: Isso decorre das Propriedades 1.3 e 1.5, uma vez que

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^C \right)^C.$$

□

Veja no próximo teorema que diferentemente da medida exterior, que só permite a subaditividade enumerável, a medida de Lebesgue satisfaz a aditividade enumerável.

Teorema 1.3. *Se $E_1, E_2, \dots$ são conjuntos mensuráveis disjuntos, e $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$, então*

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

Prova: Primeiro, assumimos que cada E_j é limitado. Então para cada j , aplicando a definição de mensurabilidade a E_j^C , podemos escolher um subconjunto fechado F_j de E_j com $m_*(E_j - F_j) \leq \frac{\epsilon}{2^j}$. Para cada N fixo, os conjuntos $F_1, \dots, F_N$ são compactos

e disjuntos, de forma que $m_*\left(\bigcup_{j=1}^N F_j\right) = \sum_{j=1}^N m_*(F_j)$. Uma vez que $\bigcup_{j=1}^N F_j \subset E$, devemos ter

$$m(E) \geq \sum_{j=1}^N m(F_j) \geq \sum_{j=1}^N \left(m(E_j) - \frac{\epsilon}{2^j}\right).$$

Fazendo N tender ao infinito, uma vez que ϵ é arbitrário, temos que

$$m(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) + \epsilon \longrightarrow m(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

Visto que a desigualdade contrária é válida (por subaditividade na Afirmação 2), isso conclui a prova quando cada E_j é limitado.

No caso geral, selecionamos qualquer sequência de cubos $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ que aumente no $\mathbb{R}^n$, no sentido de que $Q_k \subset Q_{k+1}$ para todo $k \geq 1$ e $\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k = \mathbb{R}^n$. Então, tomamos $S_1 = Q_1$ e $S_k = Q_k - Q_{k-1}$ para $k \geq 2$. Se definirmos conjuntos mensuráveis por $E_{j,k} = E_j \cap S_k$, então

$$E = \bigcup_{j,k} E_{j,k}.$$

A união acima é disjunta e todo $E_{j,k}$ é limitado. Além disso, $E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k}$, e esta união também é disjunta. Juntando esses fatos e usando o que já foi provado, obtemos:

$$m(E) = \sum_{j,k} m(E_{j,k}) = \sum_j \sum_k m(E_{j,k}) = \sum_j m(E_j).$$

□

Agora, iremos adicionar duas definições que precisaremos para enunciar um resultado posteriormente.

Definição 1.7. Se $E_1, E_2, \dots$ é uma coleção enumerável de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ que é crescente para E no sentido de que $E_k \subset E_{k+1}$ para todo k , e $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, então escrevemos $E_k \nearrow E$.

Definição 1.8. Se $E_1, E_2, \dots$ é uma coleção enumerável de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ que é decrescente para E no sentido de que $E_k \supset E_{k+1}$ para todo k , e $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, então escrevemos $E_k \searrow E$.

Corolário 1.1. Suponha que $E_1, E_2, \dots$ são subconjuntos mensuráveis do $\mathbb{R}^n$.

1. Se $E_k \nearrow E$, então $m(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} m(E_N)$;
2. Se $E_k \searrow E$ e $m(E_k) < \infty$ para algum k , então $m(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} m(E_N)$.

Prova: Provemos primeiro o item [1](#). Sejam $G_1 = E_1, G_2 = E_2 - E_1$, e em geral $G_k = E_k - E_{k-1}$ para $k \geq 2$. Por sua construção, os conjuntos G_k são mensuráveis, disjuntos e $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. Portanto,

$$m(E) \stackrel{\text{Teorema 1.3}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N m(G_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{k=1}^N G_k\right),$$

e como $\bigcup_{k=1}^N G_k = E_N$ chegamos no que queríamos.

Provemos agora o item [2](#). Para isso podemos assumir que $m(E_1) < \infty$. Seja $G_k = E_k - E_{k+1}$ para cada k , de modo que

$$E_1 = E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$$

é uma união disjunta de conjuntos mensuráveis. Assim temos que

$$\begin{aligned} m(E_1) &= m(E) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N-1} (m(E_k) - m(E_{k+1})) \\ &= m(E) + m(E_1) - \lim_{N \rightarrow \infty} m(E_N). \end{aligned}$$

Portanto, como $m(E_1) < \infty$, vemos que $m(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} m(E_N)$, e a prova está completa. □

Observação 1.2. A hipótese $m(E_k) < \infty$ para algum k no item [2](#) do Corolário [1.1](#) é essencial. Para ver isso, considere $E_n = (n, \infty) \subset \mathbb{R}$, para todo n .

Dando continuidade na teoria, apresentamos um resultado que nos dará um bom entendimento intuitivo sobre a essência dos conjuntos mensuráveis em termos de sua relação aos conjuntos abertos e fechados. A proposta do resultado é mostrar que um conjunto mensurável pode ter uma boa aproximação dos conjuntos abertos que o contêm e uma boa aproximação dos conjuntos fechados que ele contém.

Teorema 1.4. Suponha que E seja um subconjunto mensurável do $\mathbb{R}^n$. Então, para cada $\epsilon > 0$:

1. Existe um conjunto aberto A com $E \subset A$ e $m(A - E) \leq \epsilon$.
2. Existe um conjunto fechado F com $F \subset E$ e $m(E - F) \leq \epsilon$.
3. Se $m(E)$ é finita, existe um conjunto compacto K com $K \subset E$ e $m(E - K) \leq \epsilon$.
4. Se $m(E)$ é finita, existe uma união finita $F = \bigcup_{j=1}^N Q_j$ de cubos fechados tais que

$$m(E \triangle F) \leq \epsilon.$$

A notação $E \Delta F$ representa a diferença simétrica entre os conjuntos E e F , definida por $E \Delta F = (E - F) \cup (F - E)$, que consiste naqueles pontos que pertencem apenas a um dos dois conjuntos E ou F .

Prova:

1. A parte 1 é apenas a definição de mensurabilidade.
2. Para a parte 2, sabemos que E^C é mensurável, então existe um conjunto aberto A com $E^C \subset A$ e $m(A - E^C) \leq \epsilon$. Se fizermos $F = A^C$, então F é fechado, $F \subset E$, e $E - F = A - E^C$. Portanto, $m(E - F) \leq \epsilon$ conforme desejado.
3. Para o item 3, primeiro escolhemos um conjunto fechado F de forma que $F \subset E$ e $m(E - F) \leq \frac{\epsilon}{2}$. E para cada n , denotemos B_n a bola centrada na origem de raio n , e definamos conjuntos compactos como $K_n = F \cap B_n$. Então $E - K_n$ é uma sequência de conjuntos mensuráveis que diminui para $E - F$, e como $m(E) < \infty$, concluímos que para n grande, tem-se $m(E - K_n) \leq \epsilon$.
4. Para a parte 4, escolha uma família de cubos fechados $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ de modo que

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m(E) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $m(E) < \infty$, a série converge e existe $N > 0$ tal que $\sum_{j=N+1}^{\infty} |Q_j| < \frac{\epsilon}{2}$. Se $F = \bigcup_{j=1}^N Q_j$, então

$$\begin{aligned} m(E \Delta F) &= m(E - F) + m(F - E) \\ &\leq m\left(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} Q_j\right) + m\left(\bigcup_{j=1}^N Q_j - E\right) \\ &\leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |Q_j| + \sum_{j=1}^N |Q_j| - m(E) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

1.5 σ -álgebras e conjuntos de Borel

Muito importante para a teoria desenvolvida neste trabalho, será apresentado agora a definição de σ -álgebra (lê-se sigma álgebra) para subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. Uma σ -álgebra consiste em uma estrutura matemática que facilitará na construção de medidas, uma vez que os conjuntos mensuráveis se encaixam perfeitamente nessa estrutura. Essa definição é muito importante na matemática, principalmente na área de Probabilidade e Estatística.

Definição 1.9. Uma σ -álgebra A sobre $\mathbb{R}^n$ é uma coleção de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ tal que:

1. $\emptyset, \mathbb{R}^n \in A$;
2. $\forall E \in A, \mathbb{R}^n \setminus E \in A$;
3. Se $A_1, A_2, \dots \in A$ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A$.

Em outras palavras, uma σ -álgebra é uma coleção de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ que é fechada em uniões enumeráveis, interseções enumeráveis e complementares.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.4. A coleção de todos os subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ é uma σ -álgebra.

Exemplo 1.5. A coleção de todos os conjuntos mensuráveis em $\mathbb{R}^n$ é uma σ -álgebra. A verificação deste fato consiste nas propriedades de conjunto mensuráveis vistas anteriormente.

Proposição 1.4. Seja A uma coleção não vazia de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. A interseção de todas as σ -álgebras sobre o $\mathbb{R}^n$ contendo A é uma σ -álgebra e é a menor σ -álgebra contendo A . Esta é a chamada σ -álgebra sobre o $\mathbb{R}^n$ gerada por A .

Prova: Seja $\{F_\lambda\}_{\lambda \in E}$ uma coleção arbitrária de σ -álgebras sobre o $\mathbb{R}^n$ contendo A , sendo E um conjunto de índices qualquer. Primeiro provemos que $\bigcap_{\lambda \in E} F_\lambda$ é uma σ -álgebra contendo A . De fato,

1. $\mathbb{R}^n \in \bigcap_{\lambda \in E} F_\lambda$, pois $\mathbb{R}^n \in F_\lambda, \forall \lambda \in E$.
2. Se $F \in \bigcap_{\lambda \in E} F_\lambda$, então $F \in F_\lambda, \forall \lambda \in E$. Assim, como por hipótese $\mathbb{R}^n \setminus F \in F_\lambda, \forall \lambda \in E$, logo $\mathbb{R}^n \setminus F \in \bigcap_{\lambda \in E} F_\lambda$.
3. Seja $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de conjuntos em $\bigcap_{\lambda \in E} F_\lambda$. Por definição, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \in F_\lambda, \forall \lambda \in E$, assim por hipótese $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in F_\lambda, \forall \lambda \in E$. Portanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \bigcap_{\lambda \in E} F_\lambda$.

É fácil ver que $A \subset \bigcap_{\lambda \in E} F_\lambda$, já que $A \subset F_\lambda, \forall \lambda \in E$.

Agora provemos que $\bigcap_{\lambda \in E} F_\lambda$ é a menor σ -álgebra sobre o $\mathbb{R}^n$ contendo A . De fato, seja G uma σ -álgebra sobre o $\mathbb{R}^n$ contendo A , i.e., $\exists \lambda_0 \in E$ t.q. $G = F_{\lambda_0} \supset \bigcap_{\lambda \in E} F_\lambda$.

□

Exemplo 1.6. A σ -álgebra sobre $\mathbb{R}^n$ gerada por todos os conjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$ é chamada de σ -álgebra de Borel do $\mathbb{R}^n$ e é denotada por $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Os elementos da σ -álgebra de Borel são chamados de Borelianos ou conjuntos de Borel.

Através dos dois últimos exemplos, podemos observar que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ é a interseção de todas as σ -álgebras sobre o $\mathbb{R}^n$ contendo os abertos do $\mathbb{R}^n$. Logo, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ é a menor σ -álgebra contendo os abertos do $\mathbb{R}^n$. E como os abertos são mensuráveis, temos que a σ -álgebra de Borel está contida na σ -álgebra dos conjuntos mensuráveis. Dessa forma, podemos nos perguntar se essa inclusão é estrita, ou seja, existem conjuntos Lebesgue mensuráveis

que não sejam conjuntos de Borel? A resposta para essa pergunta é “sim”. Para uma prova desta afirmação, veja o Teorema 14.8 na referência [2].

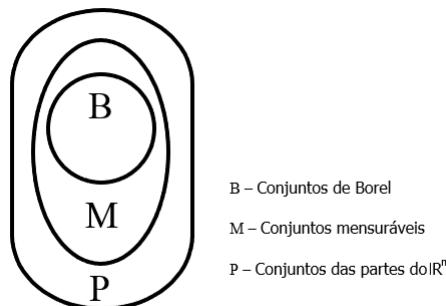


Figura 3: Representação das inclusões entre os conjuntos das partes, mensuráveis e de Borel.

Uma pergunta que também pode ser feita é: todos os subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ são mensuráveis? Como percebe-se na Figura 3 acima, a resposta é “não”, nem todos os conjuntos são mensuráveis. Uma construção um tanto trabalhosa, de um conjunto não mensurável, utilizando o axioma da escolha, pode ser vista no Capítulo 1, pag.24 na referência [1].

Para finalizar esta seção, enunciaremos um resultado que nos auxiliara no futuro. Antes disso, considere G_δ um conjunto formado pela interseção enumerável de conjuntos abertos, e F_σ um conjunto formado pela união enumerável de conjuntos fechados.

Teorema 1.5. *Um subconjunto E do $\mathbb{R}^n$ é mensurável*

1. *se, e somente se, E difere de G_δ por um conjunto de medida nula.*
2. *se, e somente se, E difere de F_σ por um conjunto de medida nula.*

Prova: ($\Leftarrow$) A prova de um lado da demonstração é óbvia, pois se E satisfaz os itens 1 e 2, como tanto G_δ e F_σ quanto os conjuntos de medida nula são mensuráveis, logo E é mensurável, uma vez que E pode ser escrito como uma união de conjuntos mensuráveis.

($\Rightarrow$) Para primeira parte, se E é mensurável, então para cada inteiro $n \geq 1$, podemos selecionar um conjunto aberto A_n que contém E tal que $m(A_n - E) \leq 1/n$. Assim, $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é um G_δ que contém E , e $(S - E) \subset (A_n - E)$ para todo n . Dessa forma, $m(S - E) \leq 1/n$ para todo n , logo $S - E$ possui medida exterior nula, e portanto é mensurável.

Para segunda implicação, aplica-se o item 2 do Teorema 1.4 com $\epsilon = 1/n$ e o resultado segue analogamente ao que fizemos para a primeira parte.

□

1.6 Funções mensuráveis

Introduzidas as definições de conjunto mensurável e suas propriedades, apresentaremos agora a noção de funções mensuráveis, que será um objeto essencial para a construção da integral de Lebesgue.

Começamos com a noção de uma função característica de um conjunto E , que é definida por:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E, \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases} \quad (1)$$

Definição 1.10. Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **função degrau** se puder ser escrita na forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{R_k}(x), \quad (2)$$

com R_k retângulos e a_k constante para cada $k = 1, \dots, N$.

Em seguida, definamos as funções simples, essas funções estão na base da construção da teoria da integração.

Definição 1.11. Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **simples** se puder ser escrita na forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k}(x), \quad (3)$$

com $E_k \subset \mathbb{R}^n$ mensurável e a_k constante para cada $k = 1, \dots, N$.

Em outras palavras, as funções simples são combinações lineares finitas de funções características. Veremos mais a frente que toda função mensurável pode ser aproximada por funções simples.

1.6.1 Definições e propriedades básicas

Definição 1.12. Seja $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, onde E é mensurável e $\overline{\mathbb{R}}$ é a reta estendida. Diremos que f é mensurável quando

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in E : f(x) < a\}$$

é mensurável.

Nossa motivação é definir função mensurável como sendo uma função tal que $f^{-1}(\mathcal{A})$ é mensurável sempre que $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{R}}$ for um mensurável.

Observação 1.3.

1. Note que uma definição equivalente de função mensurável pode ser obtida substituindo $[-\infty, a)$ por $(a, +\infty]$;

2. Diremos que f tem valor finito se $-\infty < f(x) < \infty$ para todo x . Além disso, se f é finita, vale mencionar que f é mensurável se, e somente se, $\{a < f < b\} = f^{-1}((a, b))$ é mensurável para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.7. Temos como exemplo de função mensurável a função característica definida como $\chi_E : [1, +\infty) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, dada por χ_E para E conjunto mensurável. Veja que $\chi_E^{-1}([1, +\infty)) = E$. Portanto χ_E é mensurável.

Propriedade 1.7. Uma função finita f é mensurável se, e somente se, $f^{-1}(A)$ é mensurável para todo conjunto aberto A , e se, e somente se, $f^{-1}(F)$ é mensurável para todo conjunto fechado F .

Prova: Para a primeira equivalência, seja $A \subset \mathbb{R}$ um aberto, isto é, existem intervalos abertos I_n tais que, $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Onde $f^{-1}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(I_n)$, como f é finita e mensurável, $f^{-1}(I_n)$ é mensurável, ou seja, $f^{-1}(A)$ é mensurável. Reciprocamente, suponha $f^{-1}(A)$ mensurável para todo aberto A . Daí, basta notar que $f^{-1}((a, b))$ é mensurável, logo f é mensurável, pois é finita.

Para a outra equivalência, basta notar que

$$f^{-1}(F^C) = \left(f^{-1}(F)\right)^C \iff \left(f^{-1}(F^C)\right)^C = f^{-1}(F).$$

□

Propriedade 1.8.

1. Se f é contínua em $\mathbb{R}^n$, então f é mensurável;
2. Se f é mensurável e finita, e Φ é contínua, então $\Phi \circ f$ é mensurável.

Prova:

1. Se f é contínua, então $f^{-1}((-\infty, a))$ é aberto para todo $a \in \mathbb{R}$. Como todo aberto do $\mathbb{R}^n$ é mensurável, segue que f é mensurável.
2. $(\Phi \circ f)^{-1}((-\infty, a)) = (f^{-1} \circ \Phi^{-1})((-\infty, a)) = f^{-1}(\Phi^{-1}((-\infty, a))) = f^{-1}(A)$.

□

Observação 1.4. Vale ressaltar que, em geral, se f é mensurável e Φ é contínua, $f \circ \Phi$ não é mensurável.

Para um melhor entendimento da propriedade seguinte, o Apêndice A contém uma breve revisão de limites superiores e inferiores.

Propriedade 1.9. Seja $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções mensuráveis, com $f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Então, dado $x \in \mathbb{R}^n$, temos que:

$$\sup_n f_n(x), \quad \inf_n f_n(x), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

são mensuráveis.

Prova: Basta notar que

$$\{\sup f_n > a\} = (\sup f_n)^{-1}([a, +\infty)) = \bigcup_n \{f_n > a\} = \bigcup_n f_n^{-1}([a, +\infty)).$$

Que decorre do seguinte fato:

$$(\sup f_n)^{-1}([a, +\infty)) \supset \bigcup f_n^{-1}([a, +\infty)) \iff (\sup f_n)^{-1}([a, +\infty)) \supset f_n^{-1}([a, +\infty)), \forall n.$$

Com efeito, se

$$x \in f_n^{-1}([a, +\infty)) \implies f_n(x) \in [a, +\infty),$$

como

$$f_n(x) \leq \sup f_n(x) \in [a, +\infty),$$

isso implica que

$$x \in (\sup f_n(x))^{-1}([a, +\infty)).$$

Reciprocamente, se

$$x \in (\sup f_n)^{-1}([a, +\infty)) \longrightarrow \sup f_n(x) \in [a, +\infty),$$

então, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup f_n(x) - \epsilon < f_{n_0}(x) \in [a, +\infty) \longrightarrow x \in f_{n_0}^{-1}([a, +\infty)) \subset \bigcup_n f_n^{-1}([a, +\infty)).$$

Os demais casos seguem da observação de que $\inf_n f_n(x) = -\sup_n -f_n(x)$ e da definição de $\limsup$ e $\liminf$.

□

Propriedade 1.10. *Seja $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ uma sequência de funções mensuráveis tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

então f é mensurável.

Prova: Basta usar que

$$f(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Assim, o resultado segue da Propriedade 1.9.

□

Propriedade 1.11. *Se f e g são mensuráveis, então:*

1. *As potências inteiras f^k , $k \geq 1$, são mensuráveis;*

2. $f + g$ e fg são mensuráveis se f e g são finitas.

Prova: Para o primeiro item, dividamos em casos:

- Se k for ímpar, então $\{f^k > a\} = \{f > a^{1/k}\}$.
- Se k for par e $a \geq 0$, então $\{f^k > a\} = \{f > a^{1/k}\} \cup \{f < -a^{1/k}\}$.

Para o segundo item, vemos que $f + g$ é mensurável a partir de que

$$\{f + g > a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f > a - r\} \cap \{g > r\}.$$

E, finalmente, para mostrar que fg é mensurável, basta notar que

$$fg = \frac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2].$$

□

Diremos que duas funções f e g definidas em E são iguais em **quase todo ponto**, ou de modo mais sucinto,

$$f(x) = g(x) \quad \text{q.t.p. } x \in E,$$

se o conjunto $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ tiver medida nula. Será comum escrevermos de modo mais abreviado $f = g$ **q.t.p.**

Observação 1.5. *Veja que se f é mensurável e $g = f$ q.t.p., então g é mensurável, isso porque os conjuntos $\{f < a\}$ e $\{g < a\}$ diferem por um conjunto de medida nula. Na verdade, todas as propriedades vista acima, permanecem válidas quando tratamos de funções iguais em quase todo ponto.*

Da última observação, segue a seguinte propriedade:

Propriedade 1.12. *Seja f mensurável, e $f(x) = g(x)$ q.t.p.. Então, g é mensurável.*

1.6.2 Aproximação por funções simples

Nesta seção discutiremos três teoremas de mesma natureza que estabelecem uma maneira simples de olhar para funções mensuráveis.

Teorema 1.6. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ uma função mensurável. Então, existe uma sequência não decrescente de funções simples não negativas $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ que converge pontualmente para f , ou seja,*

$$\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x) \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Além disso, $\varphi \rightarrow f$ uniformemente em todo subconjunto do $\mathbb{R}^n$ onde f é limitada.

Prova: A ideia geométrica da demonstração está dada nas Figuras 4 e 5 abaixo. De fato, construir uma malha formada por retas paralelas ao eixo das abscissas, de modo que refinando essa malha obtemos aproximações cada vez melhores para f a partir de funções simples. No que segue, precedemos da seguinte forma:

- Fixe uma altura $M = 2^n$ para esta malha, donde considere 2^{2n} intervalos de comprimento $\frac{1}{2^n}$, e seja $F_n = f^{-1}([M, +\infty])$;
- Para cada $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq 2^{2n}$, tome o conjunto $f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right) = E_n^k$.

Agora, definimos $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ por

$$\varphi_n = M \cdot \chi_{F_n} + \sum_{k=1}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_n^k}.$$

Nas Figuras 4 e 5, temos um esboço do gráfico de φ_n no caso $n = 1$ e $n = 2$, respectivamente.

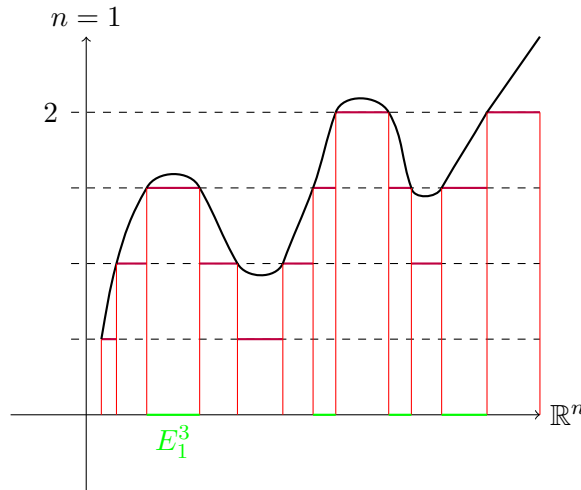


Figura 4: Esboço do gráfico de φ_n para $n = 1$.

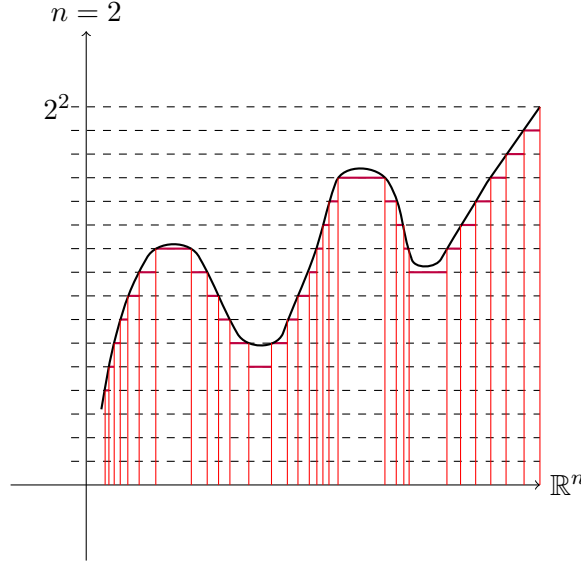


Figura 5: Esboço do gráfico de φ_n para $n = 2$.

Agora, provemos as propriedades requeridas de $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

1. Monotonicidade: Dado $x \in \mathbb{R}^n$, existe E_n^k tal que $x \in E_n^k$ e $\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}$, e existe $E_{n+1}^{k'}$ tal que $x \in E_{n+1}^{k'}$ e $\varphi_{n+1}(x) = \frac{k'}{2^{n+1}}$. Neste caso, note que $x \in E_{n+1}^{k'}$, então

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{k'}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} \quad \text{ou} \quad \frac{k'}{2^{n+1}} > \frac{k}{2^n}$$

Logo, φ_n é monótona não decrescente, por construção.

2. Convergência pontual: Fixe $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, existe E_n^k tal que $x \in E_n^k$ com $0 \leq k \leq 2^n - 1$, ou seja, $f(x) \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$. Daí,

$$0 \leq f(x) - \varphi_n(x) = f(x) - \frac{k}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \quad \text{onde } f \leq 2^n.$$

Em outras palavras,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

3. Convergência uniforme: Suponha que f seja limitada em algum subconjunto $E \subset \mathbb{R}^n$, i.e., existe $M_E > 0$ tal que $f(x) \leq M_E$, para qualquer que seja $x \in E$. Como $2^n > M_E$, para todo n suficientemente grande, dado $\epsilon > 0$ seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon$. Então,

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \text{ e } \forall x \in E.$$

Observe que a desigualdade $|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ decorre do fato que, se $x \in E$, então $f(x) \leq M_E < 2^n$, logo $x \in E_n^k$ com $0 \leq k \leq 2^n - 1$, portanto, vale que $0 \leq f(x) - \varphi_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$. Com isso, obtemos que $\varphi_n \rightarrow f$ uniformemente em E .

□

É importante destacar que o Teorema 1.6 mantém sua validade em espaços mensuráveis de qualquer natureza. A prova para esse contexto é essencialmente análoga àquela realizada no caso específico do $\mathbb{R}^n$, exigindo apenas ajustes mínimos e adequados.

Teorema 1.7. *Seja f uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$. Então, existe uma sequência de funções simples $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ que satisfaz:*

$$|\varphi_k(x)| \leq |\varphi_{k+1}(x)| \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Prova: Basta notar que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ e aplicar o Teorema 1.6 em $f^+(x)$ e $f^-(x)$. Vale lembrar que

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad \text{e} \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$

□

Teorema 1.8. *Suponha f uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$. Então, existe uma sequência de funções degrau $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ que converge pontualmente para f q.t.p.*

Prova: Como consequência do Teorema 1.6, basta provar que se $f = \chi_E$, com E mensurável, então existe uma sequência de funções degrau $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ que converge pontualmente para f . E de fato, como E tem medida finita, pelo Teorema 1.4, existe uma coleção de cubos $\{Q_j\}_{j=1}^N$ tal que $m(E \Delta \bigcup_{j=1}^N Q_j) \leq \epsilon$. Daí, considere uma malha sobre tais cubos, de modo que se obtenha uma coleção de retângulos $\{R_j\}_{j=1}^M$ tais que $\bigcup_{j=1}^N Q_j = \bigcup_{j=1}^M R_j$. Desta forma, $m(E \Delta \bigcup_{j=1}^M R_j) \leq \epsilon$. E, portanto,

$$f(x) = \sum_{j=1}^M \chi_{R_j}(x),$$

com exceção para um conjunto de medida $\leq \epsilon$.

□

1.6.3 Três princípios de Littlewood

Agora, veremos que as noções de conjunto mensurável e função mensurável, apesar de novas ferramentas, possuem relação com conceitos conhecidos do cálculo elementar. Estas relações são dadas pelos seguintes princípios:

1. Todo conjunto é quase uma união finita de intervalos.

Esse princípio é uma maneira de interpretar o item 4 do Teorema 1.4;

2. Toda função é quase contínua;

3. Toda sequência convergente é quase uniformemente convergente.

O terceiro princípio é sintetizado pelo resultado a seguir.

Teorema 1.9. (Egorov) Suponha que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ seja uma sequência de funções mensuráveis definidas em um conjunto mensurável E com $m(E) < \infty$, e assumamos que $f_k \rightarrow f$ q.t.p. em E . Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar um conjunto fechado $F_\epsilon \subset E$ tal que $m(E - F_\epsilon) \leq \epsilon$ e $f_k \rightarrow f$ uniformemente em F_ϵ .

Prova: Podemos supor, sem perda de generalidade, que $f_k(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in E$. Para cada par de inteiros não negativos n e k , seja

$$E_k^n = \left\{ x \in E : |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{n}, \forall j > k \right\}.$$

Agora, fixe n e observe que $E_k^n \subset E_{k+1}^n$, e $E_k^n \nearrow E$ quando k tende ao infinito. Pelo Corolário 1.1, existe k_n tal que $m(E - E_{k_n}^n) < 1/2^n$. Por construção, temos então

$$|f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \text{ sempre que } j > k_n \text{ e } x \in E_{k_n}^n.$$

Escolhemos N de forma que $\sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} < \epsilon/2$, e consideramos

$$\tilde{F}_\epsilon = \bigcap_{n \geq N} E_{k_n}^n.$$

Primeiro, observamos que

$$m(E - \tilde{F}_\epsilon) \leq \sum_{n=N}^{\infty} m(E - E_{k_n}^n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, se $\delta > 0$, escolhemos $n \geq N$ tal que $1/n < \delta$, e notamos que $x \in \tilde{F}_\epsilon$ implica em $x \in E_{k_n}^n$. Vemos, portanto, que $|f_j(x) - f(x)| < \delta$ sempre que $j > k_n$. Portanto, f_k converge uniformemente para f em $\tilde{F}_\epsilon$.

Finalmente, usando o Teorema 1.4 escolha um subconjunto fechado $F_\epsilon \subset \tilde{F}_\epsilon$ com $m(\tilde{F}_\epsilon - F_\epsilon) < \epsilon/2$. Como resultado, temos $m(E - F_\epsilon) < \epsilon$ e o teorema está provado.

□

Por fim, temos o teorema que formaliza o segundo princípio de Littlewood.

Teorema 1.10. (Lusin) Suponha f mensurável e finita em E , com $m(E) < \infty$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe um fechado F_ϵ , com

$$F_\epsilon \subset E, \quad e \quad m(E - F_\epsilon) \leq \epsilon,$$

e tal que $f|_{F_\epsilon}$ é contínua.

Prova: Seja f_n uma sequência de funções degrau tal que $f_n \rightarrow f$ q.t.p.. Logo, podemos encontrar conjuntos E_n de modo que $m(E_n) < 1/2^n$ e f_n é contínua fora de E_n . Pelo Teorema de Egorov, pode-se obter $A_{\epsilon/3}$ onde $f_n \rightarrow f$ uniformemente e $m(E - A_{\epsilon/3}) \leq \epsilon/3$. Dessa forma, consideramos

$$F' = A_{\epsilon/3} - \bigcup_{n \geq N} E_n,$$

para N suficientemente grande tal que $\sum_{n \geq N} 1/2^n < \epsilon/3$. Agora, para todo $n \geq N$ a função f_n é contínua em F' ; como $f_n \rightarrow f$ uniformemente, f é contínua em F' . Para finalizar a prova, podemos aproximar o conjunto F' por um fechado $F_\epsilon \subset F'$ tal que $m(F' - F_\epsilon) < \epsilon/3$.

□

2 Integração

Neste capítulo, definiremos a integral de Lebesgue. É um processo bastante construtivo, onde cada passo deve ser visto com muita atenção.

2.1 A integral de Lebesgue: Algumas propriedades e teoremas de convergência

Para deixar o processo menos cansativo, iremos dividir o procedimento em quatro etapas:

- Funções simples;
- Funções limitadas suportadas em um conjunto de medida finita;
- Funções não negativas;
- Funções integráveis (o caso geral).

Inicialmente, consideraremos as funções mensuráveis e finitas, ou seja, que assumem valores reais. Posteriormente, consideraremos funções com valores na reta estendida.

2.1.1 Funções simples

Seja

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^N a_k \chi_{E_k}, \quad (4)$$

a representação “standard” de uma função simples, com E_k mensurável e a_k constante para cada $k = 1, \dots, N$.

Definição 2.1. Definimos a *integral de Lebesgue* de uma função simples ϕ por

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = \sum_{k=1}^N a_k m(E_k).$$

Se E é um subconjunto mensurável do $\mathbb{R}^n$ com medida finita, então $\phi(x)\chi_E(x)$ também é uma função simples, e definimos

$$\int_E \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \chi_E(x) dx.$$

Observação 2.1. Em vez $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$, escreveremos por simplicidade de notação $\int f$ se não houver perigo de confusão.

Teorema 2.1. A integral de funções simples satisfaz as seguintes propriedades:

1. (Linearidade) Se ϕ e ψ são funções simples, e $a, b \in \mathbb{R}$, então

$$\int (a\phi + b\psi) = a \int \phi + b \int \psi.$$

2. (Aditividade) Se E e F são subconjuntos disjuntos do $\mathbb{R}^n$ com medida finita, então

$$\int_{E \cup F} \phi = \int_E \phi + \int_F \phi.$$

3. (Monotonicidade) Se $\phi \leq \psi$ são funções simples, então

$$\int \phi \leq \int \psi.$$

4. (Desigualdade triangular) Se ϕ é uma função simples, então $|\phi|$ também é, e

$$\left| \int \phi \right| \leq \int |\phi|.$$

Prova:

1. Para cada $k = 1, \dots, N$, sejam c_k e d_k constantes da representação standard das funções ϕ e ψ , respectivamente. Por definição, temos que

$$\begin{aligned} \int (a\phi + b\psi) &= \sum_{k=1}^N \left(ac_k m(E_k) + bd_k m(F_k) \right) = \sum_{k=1}^N ac_k m(E_k) + \sum_{k=1}^N bd_k m(F_k) \\ &= a \sum_{k=1}^N c_k m(E_k) + b \sum_{k=1}^N d_k m(F_k) = a \int \phi + b \int \psi. \end{aligned}$$

2. Como E e F são disjuntos, $\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{E \cup F} \phi &= \int \phi \chi_{E \cup F} = \int \phi (\chi_E + \chi_F) \\ &= \int (\phi \chi_E + \phi \chi_F) = \int \phi \chi_E + \int \phi \chi_F = \int_E \phi + \int_F \phi. \end{aligned}$$

3. Seja $\eta(x) = \sum_{k=1}^N l_k \chi_{E_k}$ uma função simples. Se $\eta \geq 0$ então $\sum_{k=1}^N l_k \chi_{E_k} \geq 0$ para todo $k = 1, \dots, N$. Assim, por definição $\int \eta \geq 0$. Por hipótese, como $\psi \geq \phi$, temos que $\psi - \phi \geq 0$, seguindo o mesmo raciocínio que fizemos para η , obtemos:

$$\int \phi \leq \int \psi.$$

4. Se ϕ uma função simples, $|\phi|$ também o é, pois $|\phi| = \sum_{k=1}^N |a_k| \chi_{E_k}$. Pela desigualdade triangular aplicada à definição da integral, temos

$$\left| \int \phi \right| = \left| \sum_{k=1}^N a_k m(E_k) \right| \leq \sum_{k=1}^N |a_k| m(E_k) = \int |\phi|.$$

□

2.1.2 Funções limitadas suportadas em um conjunto de medida finita

Começamos definindo o suporte de uma função mensurável.

Definição 2.2. *O suporte de uma função mensurável f é definido como o fecho do conjunto de todos os pontos onde f não é nula, isto é,*

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

Diremos também que f é suportada em um conjunto E se $f(x) = 0$ sempre que $x \notin E$.

Como f é mensurável, o conjunto $\text{supp}(f)$ é um conjunto mensurável.

O lema a seguir nos permite definir a integral para a classe de funções limitadas suportadas em conjuntos de medida finita.

Lema 2.1. *Seja f uma função limitada suportada em um conjunto E de medida finita. Se $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência de funções simples limitadas por $M \in \mathbb{R}$, suportada em E , com $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p., então:*

1. *Existe o $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n$;*
2. *Se $f = 0$ q.t.p., então o $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n = 0$.*

Prova: Se tivéssemos ϕ_n convergindo uniformemente para f em E , a demonstração seria imediata. De fato, para qualquer $\epsilon > 0$ e qualquer $x \in E$, existiria $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_\epsilon$ então

$$|\phi_n - f| < \epsilon,$$

donde

$$\left| \int \phi_n - \int f \right| = \left| \int (\phi_n - f) \right| \leq \int |\phi_n - f| \leq \int \epsilon = \epsilon m(E).$$

Como não temos convergência uniforme, lembramos um dos princípios de Littlewood, que afirma que a convergência de uma sequência de funções mensuráveis é “quase” uniforme. A afirmação precisa por trás desse princípio é o Teorema de Egorov, que provamos anteriormente e que aplicaremos aqui.

Como E tem medida finita, dado $\epsilon > 0$, o Teorema de Egorov garante que existe um subconjunto fechado $F_\epsilon \subset E$ tal que $m(E - F_\epsilon) \leq \epsilon$ e $\phi_n \rightarrow f$ uniformemente em F_ϵ . Portanto, definindo $I_n = \int \phi_n$, temos

$$\begin{aligned} |I_n - I_m| &\leq \int_E |\phi_n(x) - \phi_m(x)| dx \\ &= \int_{F_\epsilon} |\phi_n(x) - \phi_m(x)| dx + \int_{E-F_\epsilon} |\phi_n(x) - \phi_m(x)| dx \\ &\leq \int_{F_\epsilon} |\phi_n(x) - \phi_m(x)| dx + 2M m(E - F_\epsilon) \\ &\leq \int_{F_\epsilon} |\phi_n(x) - \phi_m(x)| dx + 2M\epsilon. \end{aligned}$$

Pela convergência uniforme, temos que para todo $x \in F_\epsilon$ e n e m suficientemente grandes $|\phi_n(x) - \phi_m(x)| < \epsilon$. Então

$$|I_n - I_m| \leq m(E)\epsilon + 2M\epsilon, \forall m, n \text{ grandes.}$$

Como ϵ é arbitrário e $m(E) < \infty$, mostramos que $\{I_n\}_n$ é uma sequência de Cauchy e portanto convergente.

Para segunda parte, se $f = 0$, repetindo o mesmo argumento feito acima chegamos em

$$|I_n| \leq m(E)\epsilon + M\epsilon,$$

logo $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

□

Usando o Lema 2.1, definimos agora a integração de funções limitadas que são suportadas em conjuntos de medida finita.

Definição 2.3. *Seja f uma função limitada e suportada em um conjunto de medida finita. Definimos sua integral de Lebesgue por*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_n(x) dx, \quad (5)$$

com $\{\phi_n\}_n$ qualquer sequência de funções simples satisfazendo:

- Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|\phi_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $\text{supp}(\phi_n) \subset \text{supp}(f)$ para todo n ;
- $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$ para q.t.p. quando n tende ao infinito.

Pelo Lema 2.1, sabemos que o limite (5) existe.

Proposição 2.1. A integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_n(x)dx$ independente da sequência limitada $\{\phi_n\}_n$ tomada, desde que a sequência de funções simples satisfaça as propriedades dadas na Definição 2.3.

Prova: Suponha que $\{\psi_n\}_n$ é uma outra sequência limitada por $K \in \mathbb{R}$, com $\text{supp}(\psi_n) \subset \text{supp}(f)$ e $\psi_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. quando n tende ao infinito. Então, se $\eta_n = \phi_n - \psi_n$, a sequência $\{\eta_n\}_n$ consiste em funções simples limitadas por $M + K$, suportadas em um conjunto de medida finita, e tal que $\eta \rightarrow 0$ q.t.p. quando n tende ao infinito. Podemos, portanto, concluir, pela segunda parte do Lema 2.1, que $\int \eta_n \rightarrow 0$ quando n tende ao infinito. Consequentemente, os dois limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n(x)dx \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n(x)dx,$$

(que existem pelo Lema 2.1) são iguais. □

Se E é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ com medida finita, e f é limitada com $m(\text{supp}(f)) < \infty$, definimos

$$\int_E f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_E(x)dx.$$

Se f é uma função simples, então $\int f$ como definido acima coincide com a integral de funções simples estudadas anteriormente. Assim como a integral de funções simples, esta extensão da definição de integração também satisfaz todas as propriedades de linearidade, aditividade, monotonicidade e desigualdade triangular.

Agora, vamos provar o primeiro teorema de convergência.

Teorema 2.2. (Teorema da convergência limitada) Seja $\{f_n\}_n$ uma sequência de funções mensuráveis, limitada por $M \in \mathbb{R}$, suportada em um conjunto E de medida finita e tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. quando $n \rightarrow \infty$. Então, f é mensurável, limitada, suportada em E q.t.p., e

$$\int |f_n - f| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Consequentemente,

$$\int f_n \rightarrow \int f, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Prova: A partir das hipóteses, é possível ver que f é limitada por M q.t.p. e $f(x) = 0$ quando $x \notin E$. De fato, a menos de um conjunto de medida nula, temos

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < M + \epsilon.$$

Da desigualdade triangular para integrais, temos

$$\left| \int f_n - \int f \right| = \left| \int f_n - f \right| \leq \int |f_n - f|.$$

Logo, basta provar que $\int |f_n - f| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

A prova é um argumento análogo ao que usamos no Lema 2.1. Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar, pelo Teorema de Egorov, um subconjunto mensurável $F_\epsilon \subset E$ tal que $m(E - F_\epsilon) < \epsilon$ e $f_n \rightarrow f$ uniformemente em F_ϵ . Então, para n suficientemente grande, $|f_n - f| \leq \epsilon$ para todo $x \in F_\epsilon$. Assim,

$$\begin{aligned} \int |f_n - f| dx &\leq \int_{F_\epsilon} |f_n - f| dx + \int_{E - F_\epsilon} |f_n - f| dx \\ &\leq \epsilon m(E) + 2Mm(E - F_\epsilon) \end{aligned}$$

para n grande. Como ϵ é arbitrário, o resultado segue. □

Observação 2.2. O Teorema 2.2 quer dizer, em outras palavras, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

2.1.3 Funções não negativas

Continuamos nosso processo de construção da integral de Lebesgue, agora definindo para funções que são mensuráveis e não negativas, mas não necessariamente limitadas.

Definição 2.4. Seja f uma função mensurável definida na reta estendida e não negativa. Definimos sua **integral de Lebesgue** por

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \sup_g \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx,$$

com o supremo tomado sobre todas as funções mensuráveis g tais que $0 \leq g \leq f$, e g limitada e suportada em um conjunto de medida finita.

Com a definição de integral acima, existem apenas dois casos possíveis: o supremo ser finito ou infinito. No primeiro caso, quando $\int f(x) dx < +\infty$, diremos que f é Lebesgue integrável ou simplesmente integrável, no segundo caso diremos que a integral de f é divergente.

Se E é qualquer subconjunto mensurável do $\mathbb{R}^n$, e $f \geq 0$, então $f\chi_E$ também é positiva, e definimos

$$\int_E f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_E(x) dx.$$

Teorema 2.3. A integral de funções mensuráveis não negativas satisfaz as seguintes propriedades:

1. (Linearidade) Se $f, g \geq 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$, então

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g;$$

2. (Aditividade) Se E e F são subconjuntos disjuntos do $\mathbb{R}^n$ e $f \geq 0$, então

$$\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f;$$

3. (Monotonicidade) Se $0 \leq f \leq g$, então

$$\int f \leq \int g;$$

4. Se g é integrável e $0 \leq f \leq g$, então f é integrável;

5. Se f é integrável, então $f(x) < \infty$ q.t.p.;

6. Se $\int f = 0$ se, e somente se, $f(x) = 0$ q.t.p.

Prova:

1. Tomando $a = b = 1$ sem perda de generalidade. Note que se $\phi \leq f$ e $\psi \leq g$, com ϕ e ψ limitadas e suportadas por um conjunto de medida finita, então $\phi + \psi \leq f + g$, e $\phi + \psi$ é limitada e suportada em um conjunto de medida finita. Consequentemente,

$$\int (\phi + \psi) = \int \phi + \int \psi \leq \int f + \int g \leq \int (f + g).$$

Para provar a desigualdade contrária, suponha η limitada e suportada em um conjunto de medida finita, e $\eta \leq f + g$. Se definimos $\eta_1(x) = \min(f(x), \eta(x))$ e $\eta_2 = \eta - \eta_1$, temos

$$\eta_1 \leq f \text{ e } \eta_2 \leq g.$$

De fato, para última desigualdade, note que $\eta_2 \leq f + g - \eta_1$, logo temos dois casos:

- $\eta_1 = f$: $\eta_2 \leq f + g - f = g$;
- $\eta_1 = \eta$: $\eta_2 = \eta - \eta = 0 < g$.

Além disso, η_1, η_2 são limitadas e suportadas em um conjunto de medida finita. Portanto,

$$\int \eta = \int (\eta_1 + \eta_2) = \int \eta_1 + \int \eta_2 \leq \int f + \int g.$$

Tomando o supremo sobre η obtemos a desigualdade necessária.

2. Segue da definição da integral de Lebesgue.
3. Segue da definição da integral de Lebesgue.
4. Segue da definição da integral de Lebesgue.

5. Suponha $E_k = \{x : f(x) \geq k\}$ e $E_\infty = \{x : f(x) = \infty\}$. Então,

$$\int f \geq \int \chi_{E_k} f \geq km(E_k).$$

Portanto, $m(E_k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Como $E_k \searrow E_\infty$, o Corolário 1.1 implica que $m(E_\infty) = 0$.

6. A prova segue do Teorema 2.2

□

Lema 2.2. (Fatou) Suponha $\{f_n\}_n$ uma sequência de funções mensuráveis com $f_n \geq 0$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ q.t.p., então

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Prova: Suponha $0 \leq g \leq f$, com g mensurável, limitada e suportada em um conjunto E de medida finita. Definindo $g_n = \min(g(x), f_n(x))$, então g_n é mensurável suportada em E , e $g_n(x) \rightarrow g(x)$ q.t.p. quando $n \rightarrow \infty$. Logo, pelo Teorema da convergência limitada

$$\int g_n \rightarrow \int g.$$

Por construção, também temos $g_n \leq f_n$, assim $\int g_n \leq \int f_n$, e portanto

$$\int g \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

Tomando o supremo sobre todo g , obtemos a desigualdade desejada.

□

Corolário 2.1. Suponha que f é uma função mensurável não negativa e $\{f_n\}_n$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas com $f_n(x) \leq f(x)$ e $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p.. Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

Prova: Como $f_n(x) \leq f(x)$ q.t.p., temos necessariamente $\int f_n \leq \int f$ para todo n . Portanto,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \leq \int f.$$

Esta desigualdade combinada com o lema de Fatou prova o limite desejado.

□

Observação 2.3. O Corolário 2.1 nos diz que, em condições adequadas, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Observação 2.4. Seja $\{f_n\}_n$ uma sequência de funções. Denotaremos por $f_n \nearrow f$ quando a sequência $\{f_n\}_n$ convergir crescentemente para f , ou seja, $f_n \leq f_{n+1}$ e $f_n \rightarrow f$. Analogamente, diremos que $f_n \searrow f$ quando a sequência $\{f_n\}_n$ convergir de modo decrescente para f .

Corolário 2.2. (Teorema da convergência monótona) Suponha que $\{f_n\}_n$ é uma sequência não negativa de funções mensuráveis com $f_n \nearrow f$ q.t.p.. Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

Corolário 2.3. Considere $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$, com $a_k(x) \geq 0$ mensuráveis para todo $k \geq 1$. Então,

$$\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int a_k(x) dx \right)$$

Se $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int a_k(x) dx \right)$ é finita, então a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ converge q.t.p.

Prova: Sejam $f_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)$ e $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$. As funções f_n são mensuráveis, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, e $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quando $n \rightarrow \infty$. Se

$$\int f_n = \sum_{k=1}^n \int a_k(x) dx,$$

do Teorema da convergência monótona, temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int a_k(x) dx \right) = \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \right) dx.$$

Se $\sum \int a_k < \infty$, então a igualdade acima implica que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ é integrável, e $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ é finita q.t.p.

□

2.1.4 O caso geral

Finalmente chegamos à última etapa do processo. Agora, definiremos a integral de Lebesgue para o caso geral, isto é, para qualquer função em $\mathbb{R}^n$. Primeiro definimos

$$f^+(x) := \max(f(x), 0) \text{ e } f^-(x) := \max(-f(x), 0).$$

Definição 2.5. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é qualquer função mensurável, dizemos que f é **Lebesgue integrável** (ou apenas integrável) se a função mensurável não negativa $|f|$ é integrável no sentido da seção anterior.

Se f é **Lebesgue integrável**, definimos sua integral por

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ - \int_{\mathbb{R}^n} f^-.$$

Denotaremos o conjunto das funções Lebesgue integrável por $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Temos que se $E \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável, então

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Se f é mensurável e $f = f_1 - f_2$, com f_1 e f_2 integráveis e não negativas, é natural esperar que, independentemente da decomposição de f , sempre tenhamos

$$\int f = \int f_1 - \int f_2.$$

Em outras palavras, a definição da integral deve ser independente da decomposição $f = f_1 - f_2$. De fato, suponha que $f = g_1 - g_2$ seja outra decomposição de f com g_1 e g_2 funções não negativas e integráveis. Como $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ temos

$$f_1 + g_2 = g_1 + f_2, \quad (6)$$

mas ambos os lados da identidade (6) consistem em funções mensuráveis e positivas, então da linearidade da integral, obtemos

$$\int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2. \quad (7)$$

Como todas as integrais em (7) são finitas, então

$$\int f_1 - \int f_2 = \int g_1 - \int g_2.$$

Teorema 2.4. A integral de Lebesgue é linear, aditiva, monotônica e satisfaz a desigualdade triangular.

Teorema 2.5. Suponha que f seja integrável em $\mathbb{R}^n$. Para cada $\epsilon > 0$, temos:

1. Existe um conjunto de medida finita B tal que

$$\int_{B^c} |f| < \epsilon.$$

2. Existe um $\delta > 0$ tal que

$$\int_E |f| < \epsilon \quad \text{sempre que } m(E) < \delta.$$

A última condição é conhecida como continuidade absoluta.

Prova: No lugar de $|f|$, para facilitar a notação, trabalharemos com f tal que $f \geq 0$.

Começaremos provando o item 1. Seja B_N uma bola de raio N centrada na origem, e note que se $f_N(x) = f(x)\chi_{B_N}(x)$, então, $f_N \geq 0$ é mensurável, $f_N(x) \leq f_{N+1}(x)$ e $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x) = f(x)$. Do Teorema da convergência monótona, temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int f_N = \int \lim_{N \rightarrow \infty} f_N = \int f.$$

Em particular, para N grande,

$$0 \leq \int f - \int f\chi_{B_N} < \epsilon,$$

como $1 - \chi_{B_N} = \chi_{B_N^C}$, isso implica que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int f - \int f \cdot (1 - \chi_{B_N^C}) &= \int f - f + f\chi_{B_N^C} \\ &= \int_{B_N^C} f < \epsilon. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova do item 1.

Agora, provemos o item 2. Fazendo $f_N(x) = f(x)\chi_{E_N}$, com

$$E_N = \{x : f(x) < N\}.$$

Observe que novamente $f_N(x) \geq 0$ é mensurável, $f_N(x) \leq f_{N+1}(x)$, e dado $\epsilon > 0$ existe (do Teorema da convergência monótona) um inteiro $N > 0$ tal que

$$\int (f - f_N) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Agora, escolhemos $\delta > 0$ tal que $N\delta < \frac{\epsilon}{2}$. Se $m(E) < \delta$, então

$$\begin{aligned} \int_E f &= \int_E (f - f_N) + \int_E f_N \\ &\leq \int (f - f_N) + \int_E f_N \\ &\leq \int (f - f_N) + Nm(E) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Concluindo a prova.

□

Teorema 2.6. (Teorema da convergência dominada)

Suponha que $\{f_n\}_n$ é uma sequência de funções mensuráveis tal que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p., quando $n \rightarrow \infty$. Se $|f_n(x)| \leq g(x)$, onde g é integrável, então

$$\int |f_n - f| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

e, conseqüentemente,

$$\int f_n \rightarrow \int f, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Prova: Para $N \geq 0$, seja $E_N = \{x : |x| \leq N \text{ e } g(x) \leq N\}$. Dado $\epsilon > 0$, podemos argumentar como na primeira parte do Teorema 2.5, ver que existe N tal que $\int_{E_N^C} g < \epsilon$. Então, as funções $f_n \chi_{E_N}$ são limitadas por N e suportadas por um conjunto de medida finita, de modo que do Teorema da convergência limitada, temos que

$$\int_{E_N} |f_n - f| < \epsilon, \text{ para todo } n \text{ grande.}$$

Assim, obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \int |f_n - f| &= \int_{E_N} |f_n - f| + \int_{E_N^C} |f_n - f| \\ &\leq \int_{E_N} |f_n - f| + 2 \int_{E_N^C} g \\ &\leq \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon, \end{aligned}$$

para todo n grande.

□

2.2 O espaço $L^1(\mathbb{R}^n)$ de funções integráveis

O Teorema 2.4 nos diz que o espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial. Além disso, também nos diz que a função

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \right)$$

é uma seminorma em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Passando ao quociente, isto é, identificando as funções que são iguais q.t.p. (observe que $f = 0 \Leftrightarrow \int |f| = 0$ pelo item 3 do Teorema 2.7 abaixo), obtemos um espaço normado que denotaremos por $L^1(\mathbb{R}^n)$. A norma de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ será denotada por $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ (veja o Apêndice A para relembrar as definições de norma e seminorma).

Teorema 2.7. *Suponha que f e g são duas funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Então,*

1. $\|af\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = |a|\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, para todo $a \in \mathbb{R}$;
2. $\|f + g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$;
3. $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 0$ se, e somente se, $f = 0$ q.t.p.;
4. $d(f, g) = \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ é uma métrica em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Prova:

1.

$$\|af\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |af| = \int_{\mathbb{R}^n} |a||f| = |a| \int_{\mathbb{R}^n} |f| = |a|\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)};$$

2.

$$\|f + g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |f + g| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| + \int_{\mathbb{R}^n} |g| = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)};$$

3. A prova decorre do item [6](#) do Teorema [2.3](#);

4. Nessa propriedade queremos provar que $d(f, g)$ é uma métrica em $L^1(\mathbb{R}^n)$, isto é, queremos provar que:

- $d(f, g) > 0$;
- $d(f, g) = 0$ se, e somente se, $f = g$ q.t.p.;
- $d(f, g) = d(g, f)$;
- $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$ para todo $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

E de fato, sem muitas dificuldades, verifica-se que as propriedades são satisfeitas.

□

Lembramos que um espaço V com a métrica d é dito completo se toda sequência de Cauchy em V converge (veja o Apêndice [A](#) para relembrar definição de espaço métrico).

O próximo resultado destacará uma das vantagens fundamentais de trabalhar com funções Lebesgue integráveis: a completude do espaço $(L^1(\mathbb{R}^n), d)$, com a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

Teorema 2.8. *(Riesz-Fischer) O espaço vetorial $L^1(\mathbb{R}^n)$ é completo em sua métrica, isto é, $(L^1(\mathbb{R}^n), d)$ é um espaço métrico completo.*

Prova: Suponha que $\{f_n\}_n$ seja uma sequência de Cauchy na norma de $L^1(\mathbb{R}^n)$, isto é, $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$ quando $n, m \rightarrow \infty$.

Temos que $\{f_n\}_n$ ser Cauchy na norma de $L^1(\mathbb{R}^n)$ não garante que $\{f_n\}_n$ convergirá para uma f em quase todo ponto (ver Observação [2.5](#) abaixo).

A estratégia da prova é extrair uma subsequência $\{f_{n_k}\}_k$ de $\{f_n\}_n$ que converge para f mensurável em quase todo ponto.

Como $\{f_n\}_n$ é Cauchy, então, para cada $k \geq 1$ e $\epsilon = 2^{-k}$, existe n_k tal que

$$\|f_n - f_m\| \leq 2^{-k}, \text{ para todo } n, m \geq n_k.$$

Escolhendo n_{k+1} de modo que $n_k \leq n_{k+1}$, vemos que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq 2^{-k}.$$

Agora, definimos as funções:

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}),$$

e

$$g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})|.$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty.$$

Do Teorema da convergência monótona (Corolário 2.2), temos que g é integrável, e por construção $|f| \leq g$, portanto f é integrável. Em particular, a série que define f converge em quase todo o ponto e, como se trata de uma série telescópica, temos que

$$\begin{aligned} f_{n_1} + \sum_{k=1}^N (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) &= f_{n_{N+1}}(x) \\ \implies f(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} f_{n_{N+1}} \quad q.t.p., \end{aligned}$$

em outras palavras,

$$f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x) \quad q.t.p.$$

Para provar que $f_{n_k} \longrightarrow f$ também em $L^1(\mathbb{R}^n)$, simplesmente observamos que $|f - f_{n_k}| \leq g$ para todo k , e aplicando o Teorema da convergência dominada (Teorema 2.6) obtemos $\|f_{n_k} - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$.

Finalmente, lembremos que $\{f_n\}_n$ é Cauchy. Logo, dado ϵ , existe N tal que para todo $n, m > N$ temos que $\|f_n - f_m\| < \frac{\epsilon}{2}$. Se $n_k > N$, e $\|f_{n_k} - f\| < \frac{\epsilon}{2}$, então a desigualdade triangular implica que

$$\|f_n - f\| \leq \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\| < \epsilon,$$

para todo $n > N$. Assim, $\{f_n\}_n$ possui o limite f em $L^1(\mathbb{R}^n)$, e a prova do teorema está completa. □

Observação 2.5. Vejamos agora que mesmo que tenhamos uma sequência de Cauchy no $L^1(\mathbb{R}^n)$, isso não implica que essa sequência converge para uma função f q.t.p.

Seja

$$f_n = \chi_{\left[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n-2^k+1}{2^k}\right]},$$

com $2^k \leq n < 2^{k+1}$ para todo $k > 0$. Note que $\left[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n-2^k+1}{2^k}\right] \subseteq [0, 1]$ para todo $n \geq 1$ e

$$m\left(\left[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n-2^k+1}{2^k}\right]\right) = \frac{1}{2^k}.$$

Logo, quando $n \rightarrow \infty$, temos que

$$m\left(\left[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n-2^k+1}{2^k}\right]\right) \rightarrow 0, \text{ sempre que } k \rightarrow \infty.$$

E como

$$\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |f_n| = m\left(\left[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n-2^k+1}{2^k}\right]\right),$$

obtemos que $\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ quando $n, k \rightarrow \infty$.

Afirmção: $\{f_n\}_n$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(\mathbb{R}^n)$, mas não existe f mensurável tal que $f_n \rightarrow f$ q.t.p.

De fato, observe que:

- Para nenhum $x \in [0, 1]$ temos $f_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$;
- Suponha que $f_n \rightarrow f$ q.t.p.. Então:

1. $f = 0$ fora de $[0, 1]$;
2. $0 \leq f < 1$ em $[0, 1]$.

Assim,

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

pois, como $|f_n - f| \leq 1\chi_{[0,1]}$, com $1\chi_{[0,1]}$ integrável. Pelo Teorema da convergência dominada (Teorema 2.6) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_n - f| = \|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

E já vimos que $\|f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$, isso implica que $f = 0$ q.t.p.. Absurdo.

Corolário 2.4. Se $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge para f em $L^1(\mathbb{R}^n)$, então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ tal que

$$f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \text{ q.t.p.}$$

Prova: Como $f_n \rightarrow f$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$, então temos que $\{f_n\}_n$ é sequência de Cauchy em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e qualquer subsequência $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ converge para f em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Em particular tomando a subsequência $\{f_{n_k}\}_k$ construída na demonstração do Teorema de Riesz-Fischer. Pelo Teorema da convergência monótona, existe $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $|f| \leq g$, assim a sequência $f_{n_k} \rightarrow f$ q.t.p.

□

Diz-se que uma família $\mathcal{G}$ de funções integráveis é densa em $L^1(\mathbb{R}^n)$ quando, para qualquer elemento $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, é possível encontrar um elemento de $\mathcal{G}$ que esteja arbitrariamente próximo de f na norma $L^1(\mathbb{R}^n)$. Mais precisamente, temos:

Definição 2.6. Dizemos que uma família $\mathcal{G}$ de funções integráveis é densa em $L^1(\mathbb{R}^n)$ se para qualquer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\epsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \epsilon$.

Teorema 2.9. As seguintes famílias de funções são densas em $L^1(\mathbb{R}^n)$:

1. As funções simples;
2. As funções degrau;
3. As funções contínuas de suporte compacto.

Prova: Seja f uma função integrável em $\mathbb{R}^n$. Sabemos que podemos escrever $f = f^+ - f^-$, onde $f^+, f^- \geq 0$, e agora basta provar o teorema quando $f \geq 0$.

1. O Teorema 1.6 visto anteriormente garante a existência de uma sequência $\{\phi_k\}_k$ de funções simples não negativas que convergem para f pontualmente. Pelo Teorema da convergência dominada (ou mesmo simplesmente pelo Teorema da convergência monótona) temos então

$$\|f - \phi_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Assim, existem funções simples que são arbitrariamente próximas de f na norma $L^1(\mathbb{R}^n)$.

2. É suficiente mostrar que podemos aproximar qualquer função simples f por funções degrau no sentido da norma $L^1(\mathbb{R}^n)$. Isso significa que, dado qualquer f simples, existem funções degrau que se aproximam dela tão bem quanto quisermos em termos da norma $L^1(\mathbb{R}^n)$. De fato, como a família de funções simples são densas em $L^1(\mathbb{R}^n)$, a família de funções degrau também o será. No que segue, mostremos que toda função característica, pode ser aproximada por funções degrau, isto é, dados $\epsilon > 0$ e χ_E uma função característica, com $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável, devemos encontrar uma função degrau $\psi = \sum_j a_k \chi_{R_j}$ tal que

$$\|\chi_E - \psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \epsilon.$$

No entanto, lembramos agora que este argumento já foi demonstrado na prova do Teorema 1.8 anteriormente. De fato, é mostrado que existe uma família quase

disjunta de retângulos $\{R_j\}$ com $m(E \Delta \cup_{j=1}^M R_j) \leq \epsilon$. Então, χ_E e ψ diferem no máximo em um conjunto de medida ϵ , assim segue que

$$\begin{aligned} \|\chi_E - \psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int |\chi_E - \psi| \\ &= \int (\chi_E - \psi) = \int \chi_E - \int \psi \\ &= m(E) - m(\cup_{j=1}^\infty R_j) < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, se E é um conjunto mensurável qualquer, χ_E pode ser aproximada por funções degrau.

Finalmente, como uma função simples é, por definição, uma combinação linear finita de funções características de conjuntos mensuráveis, e como uma combinação linear finita de funções degrau ainda é uma função degrau, o resultado segue.

3. Pelo item 2, basta estabelecer o terceiro item quando f é a função característica de um retângulo. No caso unidimensional, com f a função característica de um intervalo $[a, b]$. Podemos escolher uma função linear contínua por partes g definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{se } x \leq a - \epsilon \text{ ou } x \geq b + \epsilon, \end{cases}$$

e com g linear nos intervalos $[a - \epsilon, a]$ e $[b, b + \epsilon]$. Então $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < 2\epsilon$. Em n dimensões, basta notar que a função característica de um retângulo é o produto de funções características de intervalos. Então, a função contínua desejada de suporte compacto é simplesmente o produto de funções como g definidas acima.

□

Observação 2.6. Os resultados vistos acima para $L^1(\mathbb{R}^n)$ levam imediatamente a uma extensão na qual $\mathbb{R}^n$ pode ser substituído por qualquer subconjunto fixo E de medida positiva. De fato, se E é tal subconjunto, podemos definir $L^1(E)$ e valerá de modo análogo os resultados de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Ou ainda, basta estender qualquer função f em E definindo $\tilde{f} = f$ em E e $\tilde{f} = 0$ em E^C , e definindo $\|f\|_{L^1(E)} = \|\tilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

Observação 2.7. As integrais são invariantes por translações. Isto é, se f é integrável, então $f_h(x) = f(x - h)$, que é a função f transladada por um vetor $h \in \mathbb{R}^n$, também é.

2.3 Teorema de Fubini

No cálculo elementar (no cálculo das funções integráveis a Riemann) as integrações das funções contínuas de várias variáveis são realizadas pela iteração de integrais unidimensionais, isto é, calculamos a integral com relação a uma variável por vez. É natural pensar como funciona esse método do ponto de vista da integral de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$, ou seja, como é a Teoria da Medida e Integração para produtos cartesianos.

Em geral, podemos escrever $\mathbb{R}^n$ como o seguinte produto:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}, \text{ com } n = n_1 + n_2 \text{ e } n_1, n_2 \geq 1.$$

Dessa forma, os pontos do $\mathbb{R}^n$ assumem a forma (x, y) , donde $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ e $y \in \mathbb{R}^{n_2}$. A partir dessa decomposição, podemos dividir o conjunto das imagens desses pontos por seções. Seções essas formada pela fixação de uma variável, isto é, se f é uma função definida em $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, a seção de f correspondente a $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ é a função f^y de variável $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ dada por

$$f^y(x) = f(x, y).$$

De modo análogo, temos que a seção de f para $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ fixado é $f_x(y) = f(x, y)$.

No caso de um conjunto $E \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ definimos suas seções por

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{n_1} | (x, y) \in E\} \text{ e } E_x = \{y \in \mathbb{R}^{n_2} | (x, y) \in E\}.$$

como podemos ver na Figura 6.

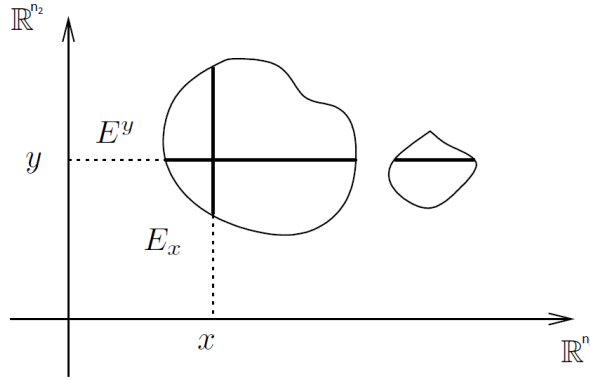


Figura 6: Representações das seções E^y e E_x . Figura adaptada de [1].

Se E um conjunto mensurável, pode ocorrer de E^y não ser mensurável em $\mathbb{R}^{n_1}$, para algum y . Observe isso no exemplo abaixo.

Exemplo 2.1. *Seja $E \subset \mathbb{R}^2$ enumerável, colocando um conjunto não mensurável sobre o eixo x , temos que E tem medida zero em $\mathbb{R}^2$, por ser enumerável, logo E é mensurável (veja Propriedade 1.2), porém E^y não é mensurável para $y = 0$.*

2.3.1 Enunciado e prova do teorema

Segue abaixo o Teorema de Fubini.

Teorema 2.10. *Suponha que $f(x, y)$ seja integrável em $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$. Então, para quase todo $y \in \mathbb{R}^{n_2}$:*

1. *A seção f^y é integrável em $\mathbb{R}^{n_1}$;*

2. A função definida por $\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x)dx$ é integrável em $\mathbb{R}^{n_2}$;

3. $\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x, y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f$.

O Teorema de Fubini é simétrico em x e y , ou seja, podemos concluir que a seção f_x é integrável em $\mathbb{R}^{n_2}$ para q.t.p. x . Além disso, $\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f_x(y)dy$ é integrável em $\mathbb{R}^{n_1}$ e

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(x, y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

Em particular, o Teorema 2.10 afirma que a integral de f em $\mathbb{R}^n$ pode ser calculada iterando integrais de dimensão inferior e que as iterações podem ser tomadas em qualquer ordem, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x, y)dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_2}} f(x, y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

A prova do Teorema de Fubini que faremos a seguir consiste em uma sequência de seis passos. Denotaremos por $\mathcal{F}$ o conjunto de funções integráveis em $\mathbb{R}^n$ que satisfazem todas as três conclusões do teorema. Observe que para demonstrar o teorema basta mostrar que $\mathcal{F} = L^1(\mathbb{R}^n)$.

Prova:

Passo 1: Qualquer combinação linear finita de funções em $\mathcal{F}$ também pertence a $\mathcal{F}$.

De fato, seja $\{f_k\}_{k=1}^N \subset \mathcal{F}$. Por hipótese, para cada k , existe um conjunto $A_k \subset \mathbb{R}^{n_2}$ de medida 0 tal que f_k^y é integrável em $\mathbb{R}^{n_1}$ sempre que $y \notin A_k$. Então, se $A = \cup_{k=1}^N A_k$, o conjunto A tem medida 0, e no complementar de A , a seção y correspondente a qualquer combinação linear finita de f_k é mensurável e também integrável em $\mathbb{R}^{n_1}$. Portanto, pela linearidade da integral, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} (a_1 f_1(x, y) + \cdots + a_N f_N(x, y)) dx \right) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(a_1 \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f_1(x, y) dx + \cdots + a_N \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f_N(x, y) dx \right) dy \\ &= a_1 \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f_1(x, y) dx \right) dy + \cdots + a_N \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f_N(x, y) dx \right) dy. \end{aligned}$$

Concluimos então que qualquer combinação linear dos f_k 's pertence a $\mathcal{F}$.

Passo 2: Considere uma sequência de funções mensuráveis $\{f_k\}_k$ definida no conjunto $\mathcal{F}$ e f uma função integrável no $\mathbb{R}^n$ tal que $f_k \nearrow f$ ou $f_k \searrow f$ (ver Observação 2.4). Mostremos que $f \in \mathcal{F}$.

Primeiramente, observe que, se necessário, podemos tomar $-f_k$ em vez de f_k , o que nos permite considerar apenas o caso de uma sequência crescente sem perda de generalidade. Além disso, podemos substituir f_k por $f_k - f_1$ e supor que todas as funções f_k são não negativas.

Agora, aplicando o Teorema da Convergência Monótona (Corolário 2.2), temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx dy. \quad (8)$$

Por hipótese, para cada k , existe um conjunto $A_k \subset \mathbb{R}^{n_2}$, de modo que f_k^y é integrável em $\mathbb{R}^{n_1}$ sempre que $y \notin A_k$. Se $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$, então $m(A) = 0$ em $\mathbb{R}^{n_2}$. Se $y \notin A$, então f_k^y é integrável em $\mathbb{R}^{n_1}$ para todo k . Pelo Teorema da convergência monótona, obtemos

$$g_k(y) = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f_k^y(x) dx \nearrow g(y) = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x) dx,$$

quando $k \rightarrow \infty$. Por hipótese, cada $g_k(y)$ é integrável, e aplicando novamente o Teorema da convergência monótona, vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} g_k(y) dy \rightarrow \int_{\mathbb{R}^{n_2}} g(y) dy \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Pela hipótese de que $f_k \in \mathcal{F}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} g_k(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x, y) dx dy.$$

Assim, de (8) e (9), concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx dy.$$

Como f é integrável, a integral da direita é finita, e isso prova que g é integrável em $\mathbb{R}^{n_2}$, isto é, $g(y) < \infty$ q.t.p. y . Portanto, f^y é integrável em q.t.p. y e

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x, y) dx \right) dy.$$

Isso prova que $f \in \mathcal{F}$.

Passo 3: Seja G_δ um conjunto formado pela interseção enumerável de conjuntos abertos. Qualquer função característica de um conjunto E que é um G_δ de medida finita pertence a $\mathcal{F}$.

Para provar este passo, avançaremos em etapas, aumentando o nível de generalidade gradualmente.

1. Primeiro, suponha que E seja um cubo aberto limitado em $\mathbb{R}^n$ tal que $E = Q_1 \times Q_2$, com Q_1 e Q_2 cubos abertos em $\mathbb{R}^{n_1}$ e $\mathbb{R}^{n_2}$, respectivamente. Então, para cada y , a função $\chi_E(x, y)$ é mensurável em x e integrável em $\mathbb{R}^{n_1}$, com

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_E(x, y) dx = \begin{cases} |Q_1| & \text{se } y \in Q_2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Consequentemente, $g(y) = |Q_1| \chi_{Q_2}(y)$ também é mensurável e integrável em $\mathbb{R}^{n_2}$, com

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} g(y) dy = |Q_1| |Q_2|.$$

Como inicialmente temos $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x, y) dx dy = |E| = |Q_1| |Q_2|$, obtemos $\chi_E \in \mathcal{F}$.

2. Agora, suponha que E é um subconjunto da fronteira de algum cubo fechado. Então, como a fronteira de um cubo tem medida 0 em $\mathbb{R}^n$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x, y) dx dy = m(E) = 0.$$

Também temos que E^y tem medida 0 em $\mathbb{R}^{n_1}$ para q.t.p. y , assim

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_E(x, y) dx \implies g(y) = 0 \text{ q.t.p. } y.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} g(y) dy = 0 = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x, y) dx dy.$$

Logo, $\chi_E \in \mathcal{F}$.

3. Suponha agora E a união finita de cubos fechados quase disjuntos, $E = \bigcup_{k=1}^K Q_k$. Se $\tilde{Q}_k$ denota o interior de Q_k para cada k , podemos escrever χ_E como uma combinação linear do $\chi_{\tilde{Q}_k}$ e χ_{A_k} com A_k a fronteira de Q_k para $k = 1, \dots, K$.

Com base na nossa análise anterior nos itens 1 e 2 deste passo, sabemos que tanto $\chi_{\tilde{Q}_k}$ quanto χ_{A_k} pertencem ao conjunto $\mathcal{F}$. Além disso, o Passo 1 assegura que $\mathcal{F}$ é fechado sob combinações lineares finitas. Portanto, podemos concluir que χ_E também pertence a $\mathcal{F}$.

4. Provemos agora que se E é aberto e de medida finita então $\chi_E \in \mathcal{F}$. Observe que isso decorre de tomar o limite no item 3 deste passo. De fato, pelo Teorema [1.2](#), podemos escrever E como uma união enumerável de cubos fechados quase disjuntos

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j.$$

Dessa forma, definindo $f_k = \sum_{j=1}^k \chi_{Q_j}$, notamos que as funções f_k convergem para $f = \chi_E$, que é integrável já que $m(E)$ é finita. Portanto, podemos concluir pelo Passo 2 que $f \in \mathcal{F}$.

5. Se E é um G_δ de medida finita, então $\chi_E \in \mathcal{F}$. De fato, por definição, existem conjuntos abertos $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots$ tal que

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k.$$

Como E tem medida finita, existe um conjunto aberto $\tilde{A}_0$ de medida finita com $E \subset \tilde{A}_0$. Definindo

$$A_k = \tilde{A}_0 \cap \bigcap_{j=1}^k \tilde{A}_j,$$

notamos que temos uma sequência decrescente de conjuntos abertos de medida finita $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ com

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Consequentemente, a sequência de funções $f_k = \chi_{A_k}$ converge de forma decrescente para $f = \chi_E$. Como pelo item 4 deste passo $\chi_{A_k} \in \mathcal{F}$ para todo k , podemos concluir, com base no Passo 2, que $\chi_E \in \mathcal{F}$.

Passo 4: Se E tem medida 0, então $\chi_E \in \mathcal{F}$.

De fato, como E tem medida 0, temos que E é mensurável. Assim, podemos escolher um conjunto G do tipo G_δ com $E \subset G$ e $m(G) = 0$. Como $\chi_G \in \mathcal{F}$ (pelo Passo 3), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_G(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_G(x, y) dx dy = 0.$$

Isto implica que

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_G(x, y) dx = 0 \text{ para q.t.p. } y.$$

Consequentemente, a seção G^y tem medida 0 para q.t.p. y . Observe que $E^y \subset G^y$, então E^y tem medida 0 para q.t.p. y e $\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_E(x, y) dx = 0$ para q.t.p. y . Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_E(x, y) dx \right) dy = 0 = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x, y) dx dy.$$

Dessa forma, concluímos que $\chi_E \in \mathcal{F}$.

Passo 5: Se E é qualquer subconjunto mensurável do $\mathbb{R}^n$ com medida finita, então $\chi_E \in \mathcal{F}$.

De fato, temos que existe um conjunto de medida finita G do tipo G_δ , com $E \subset G$ e $m(G - E) < \epsilon$ (ver Teorema 1.4). Como

$$\chi_E = \chi_G - \chi_{G-E},$$

e $\mathcal{F}$ é fechado para combinações lineares, obtemos $\chi_E \in \mathcal{F}$, como queríamos.

Passo 6: Se f é integrável, então $f \in \mathcal{F}$.

Primeiramente, note que f tem a decomposição $f = f^+ - f^-$, onde tanto f^+ quanto f^- são não-negativas e integráveis. Então, pelo Passo 1, podemos assumir que f é ela própria não-negativa. Pelo Teorema 1.6, existe uma sequência $\{\phi_k\}_k$ de funções simples tal que $\phi_k \nearrow f$ quando $k \rightarrow \infty$. Como cada ϕ_k é uma combinação linear finita de funções características de conjuntos com medida finita, temos $\phi_k \in \mathcal{F}$ pelos Passos 5 e 1. Portanto, pelo Passo 2, $f \in \mathcal{F}$.

□

2.3.2 Aplicações do Teorema de Fubini

Vejam agora algumas aplicações do Teorema de Fubini.

Teorema 2.11. (*Teorema de Tonelli*) Suponha que $f(x, y)$ seja uma função mensurável não negativa em $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$. Então, para quase todo $y \in \mathbb{R}^{n_2}$:

1. A seção f^y é mensurável em $\mathbb{R}^{n_1}$;
2. A função definida por $\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f^y(x) dx$ é mensurável em $\mathbb{R}^{n_2}$;
3. $\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f$.

Prova: Considere os truncamentos

$$f_k(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } |(x, y)| < k \text{ e } f(x, y) < k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (10)$$

Por definição, cada função f_k é integrável uma vez que $|f(x, y)| < k$ para todos os pontos (x, y) localizados dentro da bola de raio k . Dessa forma, pelo item 1 do Teorema de Fubini, existe um conjunto $A_k \subset \mathbb{R}^{n_2}$ com $m(A_k) = 0$ tal que a seção $f_k^y(x)$ é mensurável para todo $y \in A_k^C$. Vamos considerar a união de todos esses conjuntos A_k , ou seja, $A = \bigcup_k A_k$. Como resultado, temos que $m(A) = 0$. Portanto, $f_k^y(x)$ é mensurável para todo $y \in A^C$ e todo k . Como $f_k^y \nearrow f^y$, o Teorema da convergência monótona (Corolário 2.2) implica

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f_k(x, y) dx \nearrow \int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x, y) dx,$$

quando $k \rightarrow \infty$. Pelo Teorema de Fubini, $\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f_k(x, y) dx$ é mensurável para todo $y \in A^C$, donde $\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x, y) dx$ também o é (veja Propriedade 1.10). Aplicando o Teorema da convergência monótona, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f_k(x, y) dx \right) dy \rightarrow \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x, y) dx \right) dy. \quad (11)$$

Pelo item 3 do Teorema de Fubini sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f_k(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x, y) dx dy. \quad (12)$$

Aplicando mais uma vez o Teorema da convergência monótona a f_k , vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x, y) dx dy \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx dy. \quad (13)$$

Por (11), (12) e (13), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx dy.$$

□

Observação 2.8. O Teorema de Tonelli é frequentemente usado em conjunto com o Teorema de Fubini. Por exemplo, seja uma função mensurável f em $\mathbb{R}^n$ que queremos calcular $\int_{\mathbb{R}^n} f$. Para isso, primeiro aplicamos o Teorema de Tonelli em $|f|$, o qual nos permite calcular (ou estimar) livremente as integrais iteradas da função não negativa $|f|$. Se as integrais iteradas são finitas, o Teorema de Tonelli garante que f é integrável, ou seja, $\int_{\mathbb{R}^n} |f| < \infty$, o que implica que as hipóteses do Teorema de Fubini são satisfeitas.

Corolário 2.5. Seja E é um conjunto mensurável em $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$. Então, para quase todo $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, a seção

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{n_1} : (x, y) \in E\} \subset \mathbb{R}^{n_1}$$

é mensurável. Além disso, $m(E^y)$ é uma função mensurável de y e

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} m(E^y) dy.$$

Prova: Segue diretamente do Teorema 2.11 aplicado à função χ_E (analogamente esses resultados são válidos para as seções x). De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^{n_2}} m(E^y) dy = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_{E^y}(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x, y) dx dy = m(E).$$

□

Observação 2.9. Se E é mensurável em $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, para quase todo $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, a seção E^y é mensurável em $\mathbb{R}^{n_1}$ (e também vale se trocarmos a seção y por a seção x). Porém, observe que a recíproca não é válida. Para ver isso, seja $\mathcal{N}$ um subconjunto não mensurável de $\mathbb{R}$ e considere

$$E = [0, 1] \times \mathcal{N} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Então,

$$E^y = \begin{cases} [0, 1] & \text{se } y \in \mathcal{N}, \\ \emptyset & \text{se } y \notin \mathcal{N}, \end{cases}$$

e E^y é mensurável para todo y . No entanto, se E fosse mensurável, o Corolário 2.5 implicaria que $E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ é mensurável para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}$. Entretanto, isso não é verdade pois E_x é igual a $\mathcal{N}$ para todo $x \in [0, 1]$.

Proposição 2.2. Se $E = E_1 \times E_2$ é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ mensurável e $m_*(E_2) > 0$, então E_1 é mensurável.

Prova: Do Corolário 2.5 sabemos que, para q.t.p. $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, a função

$$(\chi_{E_1 \times E_2})^y(x) = \chi_{E_1}(x) \chi_{E_2}(y) \tag{14}$$

é mensurável em relação a x .

Afirmação: Existe $y \in E_2$ tal que a função $(\chi_{E_1 \times E_2})^y$ é mensurável em relação a x e, para esse y , teremos $\chi_{E_1 \times E_2}(x, y) = \chi_{E_1}(x)$, o que implica que E_1 é mensurável.

De fato, seja F o conjunto dos $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ para os quais a seção E^y é mensurável. Então, $m(F^C) = 0$ (pelo Corolário 2.5). No entanto, $E_2 \cap F$ não é vazio, pois $m_*(E_2 \cap F) > 0$. Para ver isso, observe que $E_2 = (E_2 \cap F) \cup (E_2 \cap F^C)$, logo

$$0 < m_*(E_2) \leq m_*(E_2 \cap F) + m_*(E_2 \cap F^C) = m_*(E_2 \cap F).$$

Note que $E_2 \cap F^C$ é um subconjunto de um conjunto de medida zero.

□

Para obter uma recíproca do resultado acima, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.3. Se $E_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ e $E_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$, então

$$m_*(E_1 \times E_2) \leq m_*(E_1)m_*(E_2).$$

Em particular, se um dos conjuntos E_j tem medida exterior zero, então $m_*(E_1 \times E_2) = 0$.

Prova: Seja $\epsilon > 0$. Por definição, existem cubos $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ em $\mathbb{R}^{n_1}$ e $\{Q'_j\}_{j=1}^\infty$ em $\mathbb{R}^{n_2}$ tais que

$$E_1 \subset \bigcup_{k=1}^\infty Q_k \quad \text{e} \quad E_2 \subset \bigcup_{j=1}^\infty Q'_j$$

e

$$\sum_{k=1}^\infty |Q_k| \leq m_*(E_1) + \epsilon \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^\infty |Q'_j| \leq m_*(E_2) + \epsilon$$

(ver Observação 1.1). Como $E_1 \times E_2 \subset \bigcup_{k,j=1}^\infty (Q_k \times Q'_j)$, da subaditividade da medida exterior, obtemos

$$\begin{aligned} m_*(E_1 \times E_2) &\leq \sum_{k,j=1}^\infty |Q_k \times Q'_j| \\ &= \left(\sum_{k=1}^\infty |Q_k| \right) \left(\sum_{j=1}^\infty |Q'_j| \right) \\ &\leq (m_*(E_1) + \epsilon)(m_*(E_2) + \epsilon). \end{aligned}$$

Agora, temos dois casos:

- $m_*(E_1) \neq 0$ e $m_*(E_2) \neq 0$:

$$m_*(E_1 \times E_2) \leq m_*(E_1)m_*(E_2) + O(\epsilon),$$

e, como ϵ é arbitrário, segue

$$m_*(E_1 \times E_2) \leq m_*(E_1)m_*(E_2).$$

- $m_*(E_1) = 0$: Considere para cada inteiro positivo j , o conjunto

$$E_2^j = E_2 \cap \{y \in \mathbb{R}^{n_2} : |y| \leq j\}.$$

Pelo primeiro caso, temos que $m_*(E_1 \times E_2^j) = 0$. Uma vez que $(E_1 \times E_2^j) \nearrow (E_1 \times E_2)$ quando $j \rightarrow \infty$, concluímos

$$m_*(E_1 \times E_2) = 0.$$

Note que se $m_*(E_2) = 0$ o resultado seria análogo.

□

Proposição 2.3. *Suponha que E_1 e E_2 sejam subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^{n_1}$ e $\mathbb{R}^{n_2}$, respectivamente. Então, $E = E_1 \times E_2$ é um subconjunto mensurável do $\mathbb{R}^n$. Além disso,*

$$m(E) = m(E_1)m(E_2).$$

Em particular, se um dos conjuntos E_j tem medida zero, então $m(E) = 0$.

Prova: Primeiramente, provemos que E é mensurável. Como cada conjunto E_j é mensurável, existem conjuntos $G_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$ do tipo G_δ , com $G_j \supset E_j$ e $m_*(G_j - E_j) = 0$ para cada $j = 1, 2$ (ver Teorema 1.5). Assim, $G = G_1 \times G_2$ é mensurável em $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ e

$$(G_1 \times G_2) - (E_1 \times E_2) \subset ((G_1 - E_1) \times G_2) \cup (G_1 \times (G_2 - E_2)).$$

Pelo Lema 2.3, concluímos que $m_*(G - E) = 0$, pois $G - E$ é subconjunto de um conjunto de medida zero. Logo, E é mensurável. Agora, observe que

$$\begin{aligned} m(E) &\stackrel{\text{Corolário 2.5}}{=} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} m(E^y) dy = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_{E^y}(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_{(E_1 \times E_2)^y}(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \chi_{E_1}(x) \chi_{E_2}(y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_2}} m(E_1) \chi_{E_2}(y) dy \\ &= m(E_1) m(E_2). \end{aligned}$$

□

Corolário 2.6. *Suponha que f é uma função mensurável em $\mathbb{R}^{n_1}$. Então, a função $\tilde{f}$ definida por $\tilde{f}(x, y) = f(x)$ é mensurável em $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$.*

Prova: Primeiramente, lembremos que se $a \in \mathbb{R}$ e $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n_1} | f(x) < a\}$, então E_1 é mensurável por definição. Como

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} : \tilde{f}(x, y) < a\} = E_1 \times \mathbb{R}^{n_2},$$

a Proposição 2.3 mostra que $\{\tilde{f}(x, y) < a\}$ é mensurável para cada $a \in \mathbb{R}$. Assim, $\tilde{f}(x, y)$ é uma função mensurável em $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, como queríamos. □

No cálculo Diferencial e Integral clássico podemos fazer a seguinte interpretação: $\int f$ descreve a “área” sob o gráfico de f . Agora, pensaremos como essa noção se estende ao nosso caso mais geral.

Corolário 2.7. *Suponha que f seja uma função não negativa em $\mathbb{R}^n$ e seja*

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Então:

1. f é mensurável em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, $\mathcal{A}$ é mensurável em $\mathbb{R}^{n+1}$;
2. Se o item 1 vale, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = m(\mathcal{A}).$$

Prova:

1. ($\implies$) Se f é mensurável em $\mathbb{R}^n$, então $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 0\}$ é mensurável. Seja $F(x, y) = y - f(x)$ definida em $\mathbb{R}^{n+1}$. Observe que $F(x, y)$ é mensurável pelo Corolário 2.6, isto é, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y - f(x) \leq 0\}$ é mensurável. Dessa forma,

$$\mathcal{A} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : F(x, y) \leq 0\}$$

é mensurável, uma vez que é a interseção de dois conjuntos mensuráveis.

($\impliedby$) Suponha que $\mathcal{A}$ é mensurável em $\mathbb{R}^{n+1}$. Note que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a seção $\mathcal{A}_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \mathcal{A}\}$ é um intervalo fechado, ou seja, $\mathcal{A}_x = [0, f(x)]$. Pelo Corolário 2.5 (para a seção x), temos que $\mathcal{A}_x$ é mensurável para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, logo $f^{-1}([0, f(x)])$ é mensurável. Portanto, f é mensurável.

2. Observe que $m(\mathcal{A}_x) = f(x)$. Além disso,

$$m(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi_{\mathcal{A}}(x, y) dx dy \stackrel{\text{Teorema 2.11}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} m(\mathcal{A}_x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

□

Teorema 2.12. *Se f é uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$, então a função $\tilde{f}(x, y) = f(x - y)$ é mensurável em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.*

Prova: Suponha f mensurável. Para cada subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, definamos

$$\tilde{A} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x - y \in A\}. \quad (15)$$

Agora, fixe $a \in \mathbb{R}$ e fixe $E := \{z \in \mathbb{R}^n : f(z) < a\} = \{f < a\}$. Como f é mensurável, então o conjunto E é mensurável. Note que $\tilde{E} = \{(x, y) : x - y \in E\} = \{(x, y) : f(x - y) < a\} = \{\tilde{f} < a\}$. Logo, para mostrar que $\tilde{f}$ é mensurável, é suficiente mostrar que $\tilde{E} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é mensurável.

Afirmção 1: Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $\tilde{A}$ é aberto.

De fato, suponha $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Defina $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $g(x, y) := x - y$. Note que $\tilde{A} = g^{-1}(A)$. Como g é linear, g é contínua. Assim, como A é aberto, $\tilde{A}$ é aberto.

Afirmção 2: Se $G \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto do tipo G_δ , então $\tilde{G}$ também o é.

Com efeito, suponha $G = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$, com cada $A_j \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Seja g a função definida na Afirmção 1. Observe que

$$\tilde{G} = g^{-1}(G) = g^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} g^{-1}(A_j) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \tilde{A}_j.$$

Cada $\tilde{A}_j$ é aberto pela Afirmção 1, então $\tilde{G}$ é um conjunto do tipo G_δ .

Para próxima afirmação, para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $B_k := \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < k\}$ e $C_k := \mathbb{R}^n \times B_k$.

Afirmção 3: Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então $m(\tilde{A} \cap C_k) = m(A)m(B_k)$.

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então, $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é aberto (Pela Afirmção 1) e, portanto, mensurável. Pela Proposição 2.3, $C_k := \mathbb{R}^n \times B_k$ é mensurável. Agora, observe que

$$\chi_{\tilde{A} \cap C_k}(x, y) = \chi_A(x - y)\chi_{B_k}(y)$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Portanto,

$$\begin{aligned} m(\tilde{A} \cap C_k) &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \chi_{\tilde{A} \cap C_k}(x, y) dx dy \\ &\stackrel{\text{Teorema 2.11}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x - y) \chi_{B_k}(y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_k}(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x - y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_k}(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) dx \right) dy \quad (\text{inv. por translação de } \int_{\mathbb{R}^n}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_k}(y) m(A) dy \\ &= m(A)m(B_k). \end{aligned}$$

Afirmção 4: Seja $N \subset \mathbb{R}^n$ e defina $\tilde{N}$ como em (15). Se $m(N) = 0$, então $m(\tilde{N}) = 0$.

De fato, seja $N \subset \mathbb{R}^n$ e suponha $m(N) = 0$. Por definição, existe uma sequência de conjuntos abertos $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ tal que $N \subset A_n$ para cada n e $m(A_n) \rightarrow 0$. Dessa forma, $\tilde{N} \subset \tilde{A}_n$ e $\tilde{N} \cap C_k \subset \tilde{A}_n \cap C_k$ para todo n e k . Logo, $m(\tilde{N} \cap C_k) \leq m(\tilde{A}_n \cap C_k) = m(A_n)m(B_k)$, pela Afirmação 3. Portanto,

$$m(\tilde{N} \cap C_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n)m(B_k) = 0,$$

pois $\lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) = 0$ e $m(B_k) < \infty$. Assim, $m(\tilde{N} \cap C_k) = 0$ para cada k . Como $\tilde{N} \cap C_k \nearrow \tilde{N}$ quando $k \rightarrow \infty$, temos

$$m(\tilde{N}) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(\tilde{N} \cap C_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Provemos agora o Teorema 2.12. Para isso, seja E mensurável. Temos que $E = G \setminus N$ com G um conjunto do tipo G_δ e N um conjunto de medida zero (ver Teorema 1.5). Note que $\tilde{E} = \tilde{G} \setminus \tilde{N}$, com $\tilde{G}$ um conjunto do tipo G_δ pela Afirmação 2 e $\tilde{N}$ um conjunto de medida zero pela Afirmação 4. Portanto, $\tilde{E} = \{\tilde{f} < a\}$ é mensurável. E como $a \in \mathbb{R}$ é arbitrário, $\tilde{f}$ é uma função mensurável.

□

3 Diferenciação e Integração

É sabido do estudo do cálculo elementar que a integração e a diferenciação são operações inversas. Agora, iremos introduzir essa ideia básica na teoria estudada até então. O objetivo deste capítulo é a formulação e prova do Teorema fundamental do cálculo neste caso mais geral, e também alguns outros resultados ao decorrer do desenvolvimento.

Uma vez que o Teorema fundamental do cálculo faz uma relação entre diferenciação e integração, faremos esse estudo respondendo a duas perguntas, cada uma expressando uma das formas de representar a reciprocidade entre esses dois conceitos.

As perguntas são as seguintes:

1. Suponha que f seja integrável em $[a, b]$ e F é sua integral indefinida $F(x) = \int_a^x f(y)dy$. Isso implica que F é diferenciável (pelo menos para quase todo x) e que $F' = f$?
2. Quais as condições que uma função F em $[a, b]$ precisa para garantirmos que $F'(x)$ exista (para q.t.p. x), seja integrável e que além disso

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx?$$

3.1 Diferenciação da integral

Começamos com a primeira pergunta, isto é, o estudo da diferenciação da integral. Seja f definida em $[a, b]$, integrável em $[a, b]$, e seja

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy, \quad a \leq x \leq b.$$

Para lidar com $F'(x)$, lembramos a definição da derivada como o limite do quociente

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \text{ quando } h \rightarrow 0.$$

Note que da definição de $F(x)$, este quociente tem a forma (para $h > 0$)

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)dy = \frac{1}{|I|} \int_I f(y)dy,$$

usando a notação $I = (x, x+h)$ e $|I|$ para o comprimento desse intervalo. Neste ponto, paramos para observar que a expressão acima é o valor médio de f sobre I , e que no limite, como $|I| \rightarrow 0$, podemos esperar que essas médias tendam a $f(x)$. Dessa forma, podemos reformular a questão e fazer agora a seguinte pergunta:

$$\lim_{|I| \rightarrow 0} \frac{1}{|I|} \int_I f(y)dy = f(x), \text{ com } x \in I?$$

Analogamente, podemos fazer essa pergunta para dimensões superiores, onde agora as médias são tomadas sobre conjuntos mais gerais que os intervalos em uma dimensão. Estudaremos este problema considerando as bolas B contendo x , com volume $m(B)$ substituindo o comprimento $|I|$ de I . Dito isto, vejamos a primeira pergunta agora no contexto do $\mathbb{R}^n$.

Problema da média: Suponha que f seja integrável em $\mathbb{R}^n$. É verdade que

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy = f(x), \text{ para q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n?$$

O limite é tomado quando o volume das bolas abertas B contendo x vai para 0.

Proposição 3.1. *No Problema da média, se f é contínua em x , o limite converge para $f(x)$.*

Prova: De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ sempre que $|x - y| < \delta$. Assim

$$f(x) - \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy = \frac{1}{m(B)} \int_B (f(x) - f(y)) dy.$$

Então, sempre que B é uma bola que contém x de raio menor que $\frac{\delta}{2}$, temos

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy \right| &\leq \frac{1}{m(B)} \int_B |f(x) - f(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{m(B)} \int_B \epsilon dy \\ &\leq \epsilon \frac{m(B)}{m(B)} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.2. *Se B é qualquer bola de raio r em $\mathbb{R}^n$, então $m(B) = v_n r^n$, com v_n a medida da bola unitária.*

Prova: Com efeito, seja $v_n = m(B_1)$ com $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Dado $\epsilon > 0$, escolha uma cobertura de cubos $\{Q_j\}_j$ de B_1 com volume inferior a

$$m(B_1) + \frac{\epsilon}{r^n}.$$

Tal cobertura existe, pois por definição $m(B_1)$ é o ínfimo dos volumes dessas coberturas. Aplicando a homotetia $x \mapsto rx$ do $\mathbb{R}^n$, cada cubo Q_j é levado em um cubo $\tilde{Q}_j$, cujo o comprimento do seu lado é r vezes o lado de Q_j . Agora, $\{\tilde{Q}_j\}_j$ é uma cobertura de cubos de B_r com volume inferior a

$$r^n m(B_1) + \epsilon.$$

Isso vale para todo $\epsilon > 0$, então devemos ter

$$m(B_r) \leq r^n m(B_1). \quad (16)$$

Reciprocamente, se $\{R_j\}_j$ é uma cobertura de cubos de B_r com volume inferior a

$$m(B_r) + \epsilon.$$

Aplicando a homotetia $x \mapsto (1/r)x$, obtemos assim uma cobertura de cubos $\{\tilde{R}_j\}_j$ de B_1 com volume inferior a

$$\frac{1}{r^n}(m(B_r) + \epsilon).$$

Como vale para todo $\epsilon > 0$, isso mostra que

$$m(B_1) \leq \frac{1}{r^n} m(B_r). \quad (17)$$

Portanto, juntando as desigualdades (16) e (17), obtemos:

$$m(B_r) = r^n m(B_1).$$

□

A Proposição 3.1 responde afirmativamente o Problema da média quando f é contínua. Para resolver problema no caso geral será necessário realizar algumas estimativas relacionadas ao comportamento geral das médias da função f . Essas estimativas serão baseadas nas médias máximas de $|f|$, que serão abordadas na próxima seção.

3.1.1 A função maximal de Hardy-Littlewood

A função maximal que veremos a seguir foi tratada por Hardy e Littlewood e é bastante utilizada na análise.

Definição 3.1. Se f é integrável em $\mathbb{R}^n$, definimos sua função maximal f^* por

$$f^*(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as bolas contendo o ponto x .

Note que, na Definição 3.1, o que fizemos foi substituir o limite no enunciado do Problema da média por um supremo e f por $|f|$.

A seguir, apresentamos as principais propriedades da função maximal f^* . Para estas propriedades, considere que f é integrável.

Propriedade 3.1. A função f^* é mensurável.

Prova: Basta ver que o conjunto $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \alpha\} = (f^*)^{-1}(\alpha, \infty)$ é aberto, logo E_α é mensurável.

Afirmação: E_α é aberto.

Primeiro mostremos que se $x \in E_\alpha$ existe uma bola B_x tal que $x \in B_x$ e

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| dy > \alpha.$$

De fato, caso para toda bola contendo x tivéssemos

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| dy \leq \alpha,$$

tomando o supremo, teríamos

$$f^*(x) \leq \alpha,$$

o que é absurdo. Agora, seja $\tilde{x}$ um ponto suficientemente próximo de x , com $\tilde{x} \in B_x$. Para mostrar que E_α é aberto, temos que mostrar que $\tilde{x} \in E_\alpha$, isto é, $f^*(\tilde{x}) > \alpha$.

O resultado segue de

$$f^*(\tilde{x}) = \sup_{\tilde{x} \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy \geq \frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| dy > \alpha.$$

□

Propriedade 3.2. A função f^* satisfaz

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad (18)$$

para todo $\alpha > 0$, com $A = 3^n$ e $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$.

Mostraremos mais adiante que $f^*(x) \geq |f(x)|$ para q.t.p. x . A Propriedade 3.2 nos diz que, em certo sentido, a f^* não pode ser excessivamente maior que $|f|$, pois caso contrário teríamos que $f^*(x) \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ (veja isso tomando como exemplo uma bola $B(x, 2|x|)$ e observe que $f^*(x) \geq \frac{C}{|x|^n} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ e faça $x \rightarrow \infty$). Deste modo, a partir da Propriedade 3.2, gostaríamos de concluir que f^* é integrável, uma vez que supomos f integrável. No entanto, este não é o caso, e a desigualdade (18) acima é a melhor estimativa para f^* .

A desigualdade (18) é, muitas vezes, chamada de desigualdade do tipo fraco porque é mais fraca do que a desigualdade correspondente para as normas $L^1(\mathbb{R}^n)$. De fato, isso pode ser visto na desigualdade de Tchebychev, que afirma que para uma função integrável arbitrária g e $G_\alpha = \{x : |g(x)| > \alpha\}$, temos que

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx \geq \int_{G_\alpha} |g(x)| dx \geq \alpha \int_{G_\alpha} 1 dx = \alpha m(G_\alpha) \\ \implies m(G_\alpha) &\leq \frac{1}{\alpha} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \text{ para todo } \alpha > 0. \end{aligned}$$

Devemos acrescentar que o valor exato de A na desigualdade (18) não é importante. O que importa é que essa constante seja independente de α e f .

A prova da desigualdade (18) baseia-se em uma versão elementar de um argumento de cobertura de Vitali (recobrimento de Vitali).

Lema 3.1. *Se $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_N\}$ é uma coleção finita de bolas abertas em $\mathbb{R}^n$, então existe uma subcoleção disjunta $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k}$ em $\mathcal{B}$ que satisfaz*

$$m\left(\bigcup_{l=1}^N B_l\right) \leq 3^n \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}).$$

O Lema 3.1 diz que podemos sempre encontrar uma subcoleção de bolas disjuntas que cobrem uma fração da região coberta pela coleção original de bolas.

Prova: O argumento para provarmos o lema é construtivo e se baseia na seguinte observação: Sejam B e B' bolas que se intersectam com o raio de B' não sendo maior que o de B . Então B' está contida na bola $\tilde{B}$ que é concêntrica com B , mas com 3 vezes o seu raio (ver Figura 7).

Como primeiro passo, tomamos a bola B_{i_1} em $\mathcal{B}$ com o maior raio e, em seguida, excluimos de $\mathcal{B}$ as bolas que interceptam B_{i_1} . Assim todas as bolas que são deletadas estão contidas na bola $\tilde{B}_{i_1}$ concêntrica com B_{i_1} , mas com 3 vezes o seu raio.

As bolas restantes resultam em uma nova coleção $\mathcal{B}'$, para a qual repetimos o procedimento. Escolhemos B_{i_2} com maior raio em $\mathcal{B}'$ e, em seguida, excluimos de $\mathcal{B}'$ as bolas que interceptam B_{i_2} . Continuando assim encontramos, após no máximo N passos, uma coleção de bolas disjuntas $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k}$.

Finalmente, para provar que esta coleção disjunta de bolas satisfaz a desigualdade do lema, usamos a observação feita no início da prova. Tomando $\tilde{B}_{i_j}$ como a bola concêntrica com B_{i_j} , mas com 3 vezes o seu raio. Como qualquer bola B em $\mathcal{B}$ deve interceptar uma bola B_{i_j} e ter raio menor ou igual que B_{i_j} , devemos ter $B \subset \tilde{B}_{i_j}$. Portanto,

$$m\left(\bigcup_{l=1}^N B_l\right) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^k \tilde{B}_{i_j}\right) \leq \sum_{j=1}^k m(\tilde{B}_{i_j}) = 3^n \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}). \quad (19)$$

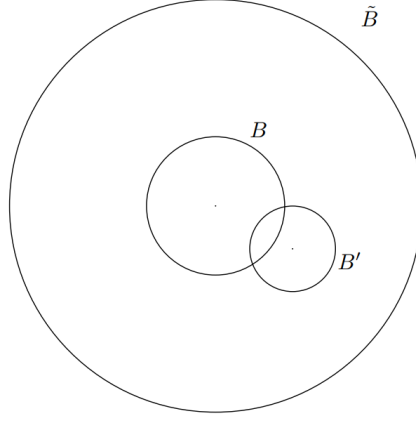


Figura 7: Representação das bolas $B, B', \tilde{B}$. Figura retirada de [1].

Na última igualdade em (19) usamos o fato de que no $\mathbb{R}^n$ dilatar um conjunto por $\delta > 0$ implica em multiplicar a medida de Lebesgue do conjunto por δ^n .

□

Prova da Propriedade 3.2: Se definimos $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n; f^*(x) > \alpha\}$, então para cada $x \in E_\alpha$ existe uma bola B_x que contém x tal que

$$\frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| dy > \alpha.$$

Portanto, para cada bola B_x temos que

$$m(B_x) < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)| dy. \quad (20)$$

Fixe um subconjunto compacto K de E_α . Como K é coberto por $\cup_{x \in E_\alpha} B_x$, podemos selecionar uma subcobertura finita de K , digamos $K \subset \cup_{l=1}^N B_l$. O Lema 3.1 (recobrimento de Vitali) garante a existência de uma subcoleção $B_{i_1}, \dots, B_{i_k}$ de bolas disjuntas com

$$m\left(\bigcup_{l=1}^N B_l\right) \leq 3^n \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}). \quad (21)$$

Como as bolas $B_{i_1}, \dots, B_{i_k}$ são disjuntas e satisfazem (20) e (21), obtemos

$$\begin{aligned} m(K) &\leq m\left(\bigcup_{l=1}^N B_l\right) \stackrel{(21)}{\leq} 3^n \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}) \stackrel{(20)}{\leq} \frac{3^n}{\alpha} \sum_{j=1}^k \int_{B_{i_j}} |f(y)| dy \\ &= \frac{3^n}{\alpha} \int_{\cup_{j=1}^k B_{i_j}} |f(y)| dy \\ &\leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy = \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Como essa desigualdade é verdadeira para qualquer subconjunto compactos K de E_α , pelo item 3 do Teorema 1.4 o resultado segue.

□

Propriedade 3.3. *A função $f^* < \infty$ em q.t.p. x .*

Prova: Observe que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) = \infty\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \alpha\},$$

para todo α . Tomando o limite com α tendendo ao infinito, a Propriedade 3.2 nos dá $m(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) = \infty\}) = 0$, isto é, o conjunto dos pontos onde $f^*(x) = \infty$ tem medida zero. Portanto, $f^* < \infty$ em q.t.p. x .

□

3.1.2 Teorema da diferenciação de Lebesgue

A partir dos resultados obtidos para a função maximal, podemos agora obter uma solução geral para o Problema da média.

Teorema 3.1. *(Teorema da diferenciação de Lebesgue) Se f é integrável em $\mathbb{R}^n$, então*

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy = f(x), \text{ para q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Prova: Queremos provar que

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B (f(y) - f(x)) dy = 0, \text{ para q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n. \quad (22)$$

Entretanto, provaremos o resultado mais forte

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| dy = 0, \text{ para q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n. \quad (23)$$

Note que se (23) ocorre, então (22) também ocorrerá.

Observe que, se o limite (23) não for zero, então ou o limite não existe ou é positivo. Como o $\limsup$ e o $\liminf$ de uma função sempre estão definidos e

$$\begin{aligned} 0 \leq \liminf_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| dy &\leq \lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| dy \\ &\leq \limsup_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| dy. \end{aligned} \quad (24)$$

Para mostrar que (23) ocorre, é suficiente mostrar que para cada $\alpha > 0$ o conjunto

$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \limsup_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| dy > 2\alpha \right\}$$

tem medida zero. Pois, dessa forma,

$$\limsup_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| dy = 0, \text{ para q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n,$$

e as desigualdades em (24) implicam

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| dy = 0, \text{ para q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

No que segue, provemos que $m(E_\alpha) = 0$. Fixamos α e lembramos do Teorema 2.9 visto anteriormente, que afirma que para cada $\epsilon > 0$ podemos selecionar uma função contínua g de suporte compacto com $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \epsilon$. Como observamos anteriormente, a continuidade de g implica que

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B g(y) dy = g(x), \text{ para todo } x.$$

Podemos reescrever a diferença

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| dy = \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - g(y) + g(y) - g(x) + g(x) - f(x)| dy.$$

Assim, da desigualdade triangular, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| dy &\leq \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - g(y)| dy + \frac{1}{m(B)} \int_B |g(y) - g(x)| dy \\ &\quad + \frac{1}{m(B)} \int_B |g(x) - f(x)| dy \\ \implies \limsup_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| dy &\leq (f - g)^*(x) + |g(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

Sejam

$$F_\alpha = \{x : (f - g)^*(x) > \alpha\} \text{ e } G_\alpha = \{x : |f(x) - g(x)| > \alpha\}.$$

Por definição de E_α , temos que $E_\alpha \subset (F_\alpha \cup G_\alpha)$.

Por um lado, a desigualdade de Tchebychev nos dá

$$m(G_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Por outro lado, da estimativa (18) para a função maximal, temos

$$m(F_\alpha) \leq \frac{A}{\alpha} \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Para cada $\epsilon > 0$ a função g foi escolhida de modo que $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \epsilon$. Assim,

$$m(E_\alpha) \leq m(G_\alpha) + m(F_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \epsilon + \frac{A}{\alpha} \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, devemos ter $m(E_\alpha) = 0$, e a prova do teorema está completa. $\square$

Os pontos $x \in \mathbb{R}^n$ onde (23) vale, são chamados de “pontos de Lebesgue”. E o conjunto desses pontos é chamado de “conjunto de Lebesgue”.

Observação 3.1. Note que aplicando o Teorema da diferenciação de Lebesgue em $|f|$, imediatamente vemos que $f^*(x) \geq |f(x)|$ para q.t.p. x .

Até o presente momento, desenvolvemos os resultados supondo que f é integrável. Levando em consideração que estamos trabalhando com diferenciabilidade, que possui na sua definição uma noção “local”, nossa suposição está um pouco deslocada, uma vez que trata-se de uma noção “global”. Entretanto, o limite no Teorema da diferenciação de Lebesgue é tomado sobre bolas que convergem ao ponto x , logo o comportamento de f longe de x é irrelevante. Dessa forma, esperamos que o resultado permaneça válido se simplesmente assumirmos a integrabilidade de f em cada bola.

Definição 3.2. Uma função mensurável f em $\mathbb{R}^n$ é localmente integrável se para cada bola aberta B a função $f(x)\chi_B(x)$ for integrável. Denotaremos $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ o espaço de todas as funções localmente integráveis.

Da definição, vemos que o comportamento no infinito não afeta a integrabilidade local de uma função. Por exemplo, as funções $e^{|x|}$ e $|x|^{\frac{1}{2}}$ são ambas localmente integráveis, mas não integráveis em $\mathbb{R}^n$.

Evidentemente a conclusão do Teorema 3.1 permanece válida mesmo quando se assume a condição de que f seja localmente integrável. Portanto, podemos inserir o seguinte teorema.

Teorema 3.2. (Teorema da diferenciação de Lebesgue) Se $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy = f(x), \text{ para q.t.p. } x \in \mathbb{R}^n.$$

A seguir veremos uma aplicação que o Teorema da diferenciação de Lebesgue nos fornece. Essa aplicação nos dá uma visão interessante sobre a natureza dos conjuntos mensuráveis.

Definição 3.3. Se E é um conjunto mensurável e $x \in \mathbb{R}^n$, dizemos que x é um ponto de densidade de Lebesgue de E se

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{m(B \cap E)}{m(B)} = 1.$$

Note que se x é ponto de densidade de Lebesgue de E então pequenas bolas em torno de x são quase inteiramente cobertas por E . Mais precisamente, para cada $\alpha < 1$ próximo de 1, e cada bola de raio suficientemente pequeno contendo x , temos

$$m(B \cap E) \geq \alpha m(B).$$

Assim, E cobre pelo menos uma proporção α de B .

Uma aplicação direta do Teorema 3.2 à função característica de E nos fornece o seguinte corolário.

Corolário 3.1. Suponha que E seja um subconjunto mensurável do $\mathbb{R}^n$. Então:

1. Quase todo $x \in E$ é um ponto de densidade de Lebesgue de E .
2. Quase todo $x \notin E$ não é um ponto de densidade de Lebesgue de E .

De fato, observe que se $x \in E$, então $\chi_E = 1$ e

$$\lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B \chi_E dy = \lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_{B \cap E} 1 dy = \lim_{\substack{m(B) \rightarrow 0 \\ x \in B}} \frac{m(B \cap E)}{m(B)} = \chi_E(x) = 1.$$

3.2 Diferenciabilidade de funções

Respondida a primeira pergunta feita no início deste capítulo, relacionada ao estudo da diferenciação da integral, nesta presente seção iremos nos voltar para a segunda pergunta, isto é, o de encontrar uma condição ampla nas funções F que garanta a identidade

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx. \quad (25)$$

Observe que nos aparece dois problemas para essa identidade ser validada:

- Por causa da existência de funções não diferenciáveis, o lado direito de (25) pode não fazer sentido se apenas assumimos que F é contínua;
- Mesmo que $F'(x)$ existisse para todo x , a função F' não seria necessariamente Lebesgue integrável.

Uma forma de lidarmos com esses obstáculos é nos limitarmos a uma classe de funções chamada de funções de *variação limitada*. Essas funções estão intimamente relacionadas com a questão da retificabilidade das curvas. Vamos estudar essa classe de funções na seção seguinte.

3.2.1 Funções de variação limitada

A seguinte definição nos diz quando uma curva é retificável.

Definição 3.4. *Seja γ uma curva parametrizada no plano dado por $z(t) = (x(t), y(t))$, com $a \leq t \leq b$ e $x(t)$ e $y(t)$ funções contínuas de valor real em $[a, b]$. A curva γ é retificável se existir $M < \infty$ tal que para qualquer partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ de $[a, b]$,*

$$\sum_{j=1}^N |z(t_j) - z(t_{j-1})| \leq M. \quad (26)$$

Por definição, o comprimento $\mathcal{C}(\gamma)$ da curva é o supremo sobre todas as partições da soma do lado esquerdo de (26), ou seja,

$$\mathcal{C}(\gamma) := \sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_N=b} \sum_{j=1}^N |z(t_j) - z(t_{j-1})|.$$

Dessa forma, observe que $\mathcal{C}(\gamma)$ é o ínfimo de todos os $M > 0$ que satisfazem (26). Geometricamente, o valor $\mathcal{C}(\gamma)$ é obtido “aproximando” a curva por linhas poligonais e depois somando o comprimento de cada linha. Aqui, o termo aproximar significa que cada vez mais vamos adicionando pontos à curva e traçando mais linhas nesses pontos. Em outras palavras, estamos cada vez mais refinando a quantidade de linhas, como se estivéssemos refinando as partições de um intervalo $[a, b]$. Veja a figura a seguir para melhor entendimento.

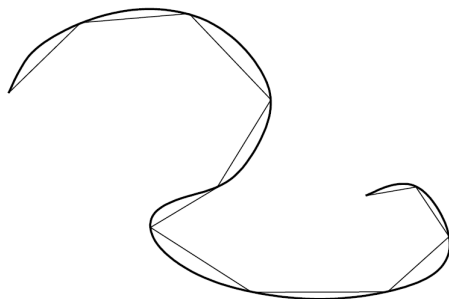


Figura 8: Representação da aproximação de uma curva por linhas poligonais. Figura retirada de [11].

Agora, suponha $F(t)$ uma função a valores complexos definida em $[a, b]$ e $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ uma partição de $[a, b]$. A variação de F nesta partição é definida por $\sum_{j=1}^N |F(t_j) - F(t_{j-1})|$.

Definição 3.5. *A função F é dita de variação limitada se sua variação em qualquer partição for limitada, ou seja, existe $M < \infty$ tal que*

$$\sum_{j=1}^N |F(t_j) - F(t_{j-1})| \leq M$$

para qualquer partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$.

Nesta definição não assumimos que F seja contínua, entretanto, ao aplicá-la ao caso de curvas, vamos supor que $F(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ é contínua.

Observação 3.2. Uma partição $\tilde{\mathcal{P}}$ dada por $a = \tilde{t}_0 < \tilde{t}_1 < \dots < \tilde{t}_M = b$ é um refinamento de uma partição $\mathcal{P}$ dada por $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$, então a variação de F em $\tilde{\mathcal{P}}$ é maior ou igual à variação de F em $\mathcal{P}$.

Em outras palavras, as funções de variação limitada são funções que podemos medir o comprimento da sua imagem, isto é, podemos medir o comprimento do gráfico.

O próximo teorema nos dá as condições analíticas sobre $x(t)$ e $y(t)$ para garantir que uma curva seja retificável.

Teorema 3.3. Uma curva parametrizada por $(x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, é retificável se, e somente se, ambas $x(t)$ e $y(t)$ são de variação limitada.

Prova:

($\implies$) Suponha que γ é uma curva parametrizada por $z(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, é retificável. Então, por definição, existe $M < \infty$ tal que, para qualquer partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ de $[a, b]$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |z(t_j) - z(t_{j-1})| &= \sum_{j=1}^N \left| (x(t_j) - x(t_{j-1}), y(t_j) - y(t_{j-1})) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N |(x(t_j) - x(t_{j-1}))| + \sum_{j=1}^N |(y(t_j) - y(t_{j-1}))| \leq M. \end{aligned}$$

Logo, $x(t)$ e $y(t)$ são de variação limitada.

($\impliedby$) Suponha que $x(t)$ e $y(t)$ são de variação limitada. Logo, por definição, para qualquer partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ de $[a, b]$ existem $M_1, M_2 < \infty$ tais que

$$\sum_{j=1}^N |(x(t_j) - x(t_{j-1}))| \leq M_1 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^N |(y(t_j) - y(t_{j-1}))| \leq M_2.$$

Dessa forma, seja γ uma curva parametrizada por $z(t) = (x(t), y(t))$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |z(t_j) - z(t_{j-1})| &= \sum_{j=1}^N \left| (x(t_j) - x(t_{j-1}), y(t_j) - y(t_{j-1})) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N |(x(t_j) - x(t_{j-1}))| + \sum_{j=1}^N |(y(t_j) - y(t_{j-1}))| \\ &\leq M_1 + M_2. \end{aligned}$$

Portanto, γ é retificável.

□

Para darmos prosseguimento a nossa teoria, apresentamos a seguinte definição básica.

Definição 3.6. Uma função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente se $F(t_1) \leq F(t_2)$ sempre que $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$. Se a desigualdade for estrita, dizemos que F é estritamente crescente.

Intuitivamente, uma função de variação limitada não pode oscilar com muita frequência, isto é, não pode possuir amplitudes muito grandes em seu gráfico. Veremos isso com mais clareza no Exemplo 3.1 a seguir.

Proposição 3.3. Se $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é monotônica e limitada, então F é de variação limitada.

Prova: Suponha, sem perda de generalidade, F crescente e limitada por M . Se $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N = b$ é uma partição qualquer de $[a, b]$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |F(t_j) - F(t_{j-1})| &= \sum_{j=1}^N F(t_j) - F(t_{j-1}) \\ &= F(b) - F(a) \leq 2M. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.4. Se $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em todos os pontos e F' é limitada, então F é de variação limitada.

Prova: Suponha $|F'| \leq M$. O Teorema do valor médio implica

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|, \text{ para todo } x, y \in [a, b].$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^N |F(t_j) - F(t_{j-1})| \leq M(b - a).$$

□

Exemplo 3.1. Seja

$$F(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}) & \text{para } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

com $a, b \in (0, +\infty)$. Então, F é de variação limitada em $[0, 1]$ se, e somente se, $a > b$. A Figura 9 ilustra os três casos: $a > b$, $a = b$ e $a < b$.

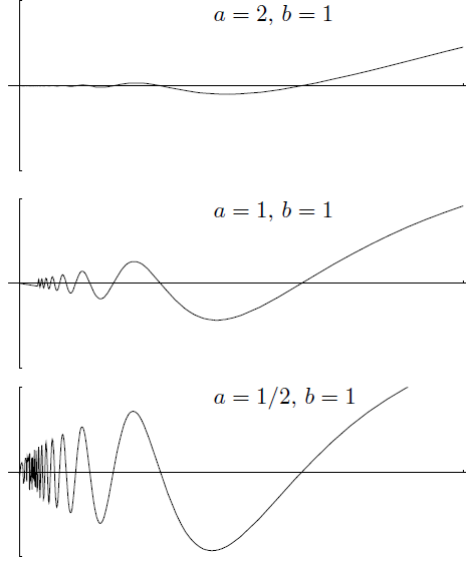


Figura 9: Gráficos de $x^a \sin(x^{-b})$ para alguns valores de a e b . Figura retirada de [11].

O próximo resultado que veremos, de uma certa forma, mostra que as funções consideradas na Proposição 3.3, “exaurem” toda a classe das funções de variação limitada. Antes de enunciar o resultado veremos algumas definições necessárias.

A variação total de F sobre $[a, x]$ (com $a \leq x \leq b$) é definida por

$$T_F(a, x) = \sup \sum_{j=1}^N |F(t_j) - F(t_{j-1})|,$$

com o supremo tomado sobre todas as partições de $[a, x]$. A variação positiva de F em $[a, x]$ é dada por

$$P_F(a, x) = \sup_{(+)} \sum F(t_j) - F(t_{j-1}),$$

na qual a soma é sobre todo j tal que $F(t_j) \geq F(t_{j-1})$, e o supremo é tomado sobre todas as partições de $[a, x]$. Por fim, a variação negativa de F sobre $[a, x]$ é definida por

$$N_F(a, x) = \sup_{(-)} \sum -[F(t_j) - F(t_{j-1})],$$

na qual a soma é sobre todo j tal que $F(t_j) \leq F(t_{j-1})$, e o supremo é tomado sobre todas as partições de $[a, x]$.

Lema 3.2. *Se $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de variação limitada, então para todo $a \leq x \leq b$ temos que*

$$F(x) - F(a) = P_F(a, x) - N_F(a, x) \quad (27)$$

e

$$T_F(a, x) = P_F(a, x) + N_F(a, x). \quad (28)$$

Prova: Supondo que F é de variação limitada, dado $\epsilon > 0$, mostremos que existe uma partição P de $[a, x]$ dada por $a = t_0 < \dots < t_N = x$ que satisfaz simultaneamente as somas em (29) e (30) abaixo,

$$\left| P_F - \sum_{(+)} F(t_j) - F(t_{j-1}) \right| < \epsilon \quad (29)$$

e

$$\left| N_F - \sum_{(-)} -[F(t_j) - F(t_{j-1})] \right| < \epsilon. \quad (30)$$

Para isso, considere a partição $\tilde{P}$ dada por $a = \tilde{t}_0 \leq \tilde{t}_1 \leq \dots \leq \tilde{t}_{N_1} = x$, que satisfaz a soma em (29) e partição $\bar{P}$ dada por $a = \bar{t}_0 \leq \bar{t}_1 \leq \dots \leq \bar{t}_{N_2} = x$, que satisfaz a soma em (30). Note que $\tilde{P}$ e $\bar{P}$ existem pela definição de variação positiva e negativa.

Agora, a partir das duas partições $\tilde{P}$ e $\bar{P}$, definiremos a partição P , dada por $a = t_0 < \dots < t_N = x$. Para cada t_j em P , temos que $t_j \in \tilde{P} \cup \bar{P}$ com $j \in \{0, \dots, N\}$.

Dado t_j e t_{j-1} em P , temos duas possibilidades:

- $F(t_j) \geq F(t_{j-1})$, assim $t_j, t_{j-1} \in \tilde{P}$ e $F(t_j) - F(t_{j-1})$ está na soma em (29);
- $F(t_j) \leq F(t_{j-1})$, assim $t_j, t_{j-1} \in \bar{P}$ e $F(t_j) - F(t_{j-1})$ está na soma em (30).

Portanto, a partição P é um refinamento comum das partições $\tilde{P}$ e $\bar{P}$, dessa forma, P existe e satisfaz as duas somas em (29) e (30) simultaneamente.

Uma vez que

$$F(x) - F(a) = \sum_{(+)} F(t_j) - F(t_{j-1}) - \sum_{(-)} -[F(t_j) - F(t_{j-1})],$$

obtemos $|F(x) - F(a) - [P_F - N_F]| < 2\epsilon$, provando a primeira identidade (27).

Para a segunda identidade (28), note que para qualquer partição de $a = t_0 < \dots < t_N = x$ de $[a, x]$, temos

$$\sum_{j=1}^N |F(t_j) - F(t_{j-1})| = \sum_{(+)} F(t_j) - F(t_{j-1}) + \sum_{(-)} -[F(t_j) - F(t_{j-1})].$$

Assim, podemos argumentar como na prova da primeira identidade (27), usando refinamentos comuns de partições nas definições de P_F e N_F , obtendo $T_F \leq P_F + N_F$ e $P_F + N_F \leq T_F$.

□

Teorema 3.4. *Uma função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada se, e somente se, F é a diferença de duas funções limitadas e crescentes.*

Prova:

($\Leftarrow$) Pela Proposição 3.3, se $F = F_1 - F_2$, com F_1 e F_2 limitadas e crescentes, então F é de variação limitada.

($\Rightarrow$) Se F é de variação limitada, então fazemos $F_1(x) = P_F(a, x) + F(a)$ e $F_2(x) = N_F(a, x)$. Observe que tanto F_1 quanto F_2 são crescentes, de variação limitada, e pelo Lema 3.2 $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$.

□

Observação 3.3. Do Teorema 3.4, é notório que a classe das funções de variação limitada é mais abrangente do que a classe das funções deriváveis.

O próximo resultado é extremamente importante para desenvolver a teoria da diferenciação.

Teorema 3.5. Se $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada, então F é diferenciável em quase todos os pontos de $[a, b]$. Ou seja, se F é de variação limitada e contínua, então o quociente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

existe para quase todo $x \in [a, b]$.

Para provar o Teorema 3.5 veja que, do Teorema 3.4, basta considerarmos o caso em que F é crescente. Primeiramente, veremos a demonstração do teorema supondo F contínua. O caso mais geral será visto a posteriori.

Antes de apresentarmos a demonstração do Teorema 3.5, iremos enunciar alguns resultados que serão necessários para a prova do mesmo. Começaremos com um lema técnico de F. Riesz, que tem o efeito de um argumento de cobertura.

Lema 3.3. Seja $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere E o conjunto de pontos x tais que

$$G(x+h) > G(x) \text{ para algum } h = h(x) > 0.$$

Se E é não vazio, então E deve ser aberto e, portanto, pode ser escrito como uma união enumerável de intervalos abertos e disjuntos, isto é, $E = \bigcup (a_k, b_k)$. Se (a_k, b_k) é um intervalo finito nesta união, então

$$G(b_k) - G(a_k) = 0.$$

Prova: Como G é contínua (ou seja, a imagem inversa de aberto é aberto), fica claro que E é aberto sempre que é não vazio, e pode, portanto, ser escrito como uma união enumerável de intervalos abertos e disjuntos (Teorema 1.1), digamos $E = \bigcup (a_k, b_k)$.

Se (a_k, b_k) denota um intervalo finito nesta composição, então $a_k \notin E$, logo não podemos ter $G(a_k+h) > G(a_k)$ o que implica que não pode acontecer de $G(b_k) > G(a_k)$.

Suponhamos agora que, $G(b_k) < G(a_k)$. Por continuidade (utilizando o Teorema do valor intermediário), existe $a_k < c < b_k$ tal que

$$G(c) = \frac{G(a_k) + G(b_k)}{2} = z.$$

Escolha o c mais distante da origem no intervalo (a_k, b_k) , isto é, escolha $c = \sup\{\tilde{c} \in (a_k, b_k) : f(\tilde{c}) = z\}$. Como $c \in E$, existe $d > c$ ($d = c + h$) tal que $G(d) > G(c)$. Como $b_k \notin E$, devemos ter $G(x) \leq G(b_k)$ para todo $x \geq b_k$, portanto $d < b_k$. Como $G(d) > G(c)$, existe (pelo Teorema do valor intermediário) $c' \in (d, b_k)$ com $G(c') = G(c)$, o que é uma contradição pelo modo que c foi escolhido.

Portanto, devemos ter $G(a_k) = G(b_k)$.

□

Observação 3.4. A referência [7] que estamos seguindo trás uma ótima reflexão intuitiva sobre o Lema 3.3. O autor nos diz que às vezes o Lema 3.3 é chamado de “Lema do Sol Nascente” pelo seguinte motivo: Se pensarmos no sol nascendo do leste (à direita) com os raios de luz paralelos ao eixo x , então os pontos $(x, G(x))$ no gráfico de G , com $x \in E$, são precisamente os pontos que estão na sombra. Esses pontos aparecem em negrito na figura a seguir.

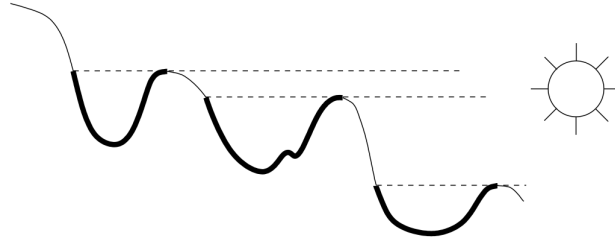


Figura 10: Representação dos pontos $(x, G(x))$. Figura retirada de [1].

Do Lema 3.3, podemos chegar no seguinte resultado.

Corolário 3.2. Suponha que $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Se E denota o conjunto de pontos x em (a, b) tal que $G(x + h) > G(x)$ para algum $h > 0$, então E é vazio ou aberto. Se E for aberto, ele deve ser uma união enumerável de intervalos disjuntos (a_k, b_k) , e $G(a_k) = G(b_k)$, exceto possivelmente quando $a = a_k$, caso em que temos apenas $G(a_k) \leq G(b_k)$.

Prova do Teorema 3.5: Assumiremos inicialmente que F é crescente, limitada e contínua em $[a, b]$. Para provar o resultado, precisaremos dos chamados números de Dini (ou derivadas de Dini). Primeiramente, considere

$$\Delta_h(F)(x) = \frac{F(x + h) - F(x)}{h}.$$

Os números de Dini são dados por

$$D^+(F)(x) = \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \Delta_h(F)(x), \quad D_+(F)(x) = \liminf_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \Delta_h(F)(x)$$

$$D^-(F)(x) = \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \Delta_h(F)(x), \quad D_-(F)(x) = \liminf_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \Delta_h(F)(x).$$

Da definição, temos $D_+ \leq D^+$ e $D_- \leq D^-$. Assim, para demonstrar o Teorema 3.5, basta mostrar que

1. $D^+(F)(x) < \infty$ para q.t.p. x ,
2. $D^+(F)(x) \leq D_-(F)(x)$ para q.t.p. x .

De fato, se esses resultados forem válidos, então aplicando o item 2 a $-F(-x)$ em vez de $F(x)$, obtemos $D^-(F)(x) \leq D_+(F)(x)$ para q.t.p. x . Portanto,

$$D^+ \leq D_- \leq D^- \leq D_+ \leq D^+ < \infty \text{ para q.t.p. } x$$

e todos os quatro números de Dini são finitos e iguais em quase todos os pontos, dessa forma, $F'(x)$ existe para quase todos os pontos x .

No que segue, provaremos os itens 1 e 2 acima. Para um $\gamma > 0$ fixo, seja

$$E_\gamma = \{x \in (a, b) : D^+(F)(x) > \gamma\}.$$

Afirmação: E_γ é mensurável.

Como $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, para mostrar que E_γ é mensurável, basta provar que a função

$$D^+(F)(x) = \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

é Borel mensurável. Podemos estender o domínio de F a todo $\mathbb{R}$, definindo $F(x) = F(a)$ para todo $x \in (-\infty, a)$ e $F(x) = F(b)$ para todo $x \in (b, \infty)$. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que

$$g(x) = \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Temos então o seguinte fato: Para cada $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h \in (0, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Para ver isso, basta mostrar que

$$\sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \sup_{h \in (0, \frac{1}{n})} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Como

$$\left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} : h \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \cap \mathbb{Q} \right\} \subseteq \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} : h \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \right\},$$

temos um lado da desigualdade,

$$\sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq \sup_{h \in (0, \frac{1}{n})} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Para o outro lado da desigualdade, seja $\epsilon > 0$ qualquer e seja $h \in (0, \frac{1}{n})$ fixado. Observe que a função $t \mapsto \frac{F(x+t) - F(x)}{t}$ é contínua em $t = h$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{F(x+t) - F(x)}{t} - \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right| < \epsilon$$

sempre que $t \in (h - \delta, h + \delta)$. Da densidade de $\mathbb{Q}$, escolhemos $t \in (0, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q} \cap (h - \delta, h + \delta)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &\leq \frac{F(x+t) - F(x)}{t} + \epsilon \\ &\leq \sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \epsilon. \end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, obtemos

$$\sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \geq \sup_{h \in (0, \frac{1}{n})} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Assim, para cada $h \in \mathbb{Q}^+$, seja $f_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f_h := \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Observe que f_h é contínua, já que F é contínua. Dessa forma, f_h é Borel mensurável. Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ a família $\{f_h : h \in (0, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}\}$ é no máximo enumerável, então $\sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}} f_h$ também é uma função Borel mensurável. Logo, temos que

$$g(x) = \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h \in (0, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}}} f_h,$$

é uma função Borel mensurável. Como F é uma restrição de g , a afirmação está provada.

Agora, aplicamos o Corolário 3.2 à função $G(x) = F(x) - \gamma x$ e notemos que $E_\gamma \subset \bigcup_k (a_k, b_k)$, com $F(b_k) - F(a_k) \geq \gamma(b_k - a_k)$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} m(E_\gamma) &\leq \sum_k m((a_k, b_k)) \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \sum_k F(b_k) - F(a_k) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\gamma}(F(b) - F(a)).$$

Portanto, $m(E_\gamma) \rightarrow 0$ quando γ tende ao infinito, e como $\{x : D^+(F)(x) = \infty\} \subset E_\gamma$ para todo γ , isso prova que $D^+(F)(x) < \infty$ em quase todo ponto, isto é, o conjunto de pontos onde $D^+(F)(x) = \infty$ tem medida nula.

Fixando números reais r e R tais que $R > r$, definamos

$$E = \{x \in [a, b] : D^+(F)(x) > R \text{ e } r > D_-(F)(x)\}.$$

Se provarmos que $m(E) = 0$, teremos mostrado que $D^+(F)(x) \leq D_-(F)(x)$ em quase todo ponto.

Para provar que $m(E) = 0$, vamos assumir por absurdo que $m(E) > 0$. Como $\frac{R}{r} > 1$, podemos encontrar um conjunto aberto O tal que $E \subset O \subset (a, b)$, com $m(O) < m(E) \cdot \frac{R}{r}$.

Temos que O pode ser escrito como $\bigcup_n I_n$, com I_n intervalos abertos e disjuntos (ver Teorema 1.1). Fixe n e aplique o Corolário 3.2 à função $H(x) = -F(-x) + rx$ no intervalo $-I_n$. Pensando como fizemos anteriormente para a função $G(x)$, obtemos um conjunto aberto $\bigcup_k (a_k, b_k)$ contido em I_n , com os intervalos (a_k, b_k) disjuntos, com

$$F(b_k) - F(a_k) \leq r(b_k - a_k).$$

No entanto, em cada intervalo (a_k, b_k) aplicamos o Corolário 3.2, desta vez para $L(x) = F(x) - Rx$. Obtemos assim um conjunto aberto $A_n = \bigcup_{k,j} (a_{k,j}, b_{k,j})$ de intervalos abertos e disjuntos $(a_{k,j}, b_{k,j})$, com $(a_{k,j}, b_{k,j}) \subset (a_k, b_k)$ para cada j e

$$F(b_{k,j}) - F(a_{k,j}) \geq R(b_{k,j} - a_{k,j}).$$

Então, usando o fato de que F é crescente, obtemos que

$$\begin{aligned} m(A_n) = \sum_{k,j} (b_{k,j} - a_{k,j}) &\leq \frac{1}{R} \sum_{k,j} F(b_{k,j}) - F(a_{k,j}) \\ &\leq \frac{1}{R} \sum_k F(b_k) - F(a_k) \leq \frac{r}{R} \sum_k (b_k - a_k) \\ &\leq \frac{r}{R} m(I_n). \end{aligned}$$

Note que $A_n \supset E \cap I_n$, pois $D^+(F)(x) > R$ e $r > D_-(F)(x)$ para cada $x \in E$, e é claro que $I_n \supset A_n$. Agora, somamos em n :

$$m(E) = \sum_n m(E \cap I_n) \leq \sum_n m(A_n) \leq \frac{r}{R} \sum_n m(I_n) = \frac{r}{R} m(O) < m(E).$$

O que é um absurdo e o teorema está provado quando F é contínua.

□

A prova do Teorema 3.5 no caso geral, será vista na Seção 3.2.3. Antes disso, vejamos o que podemos obter da identidade (25) supondo que F é monotônica.

Corolário 3.3. Se $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente e contínua, então F' existe em quase todos os pontos. Além disso, F' é mensurável, não-negativa e

$$\int_a^b F'(x)dx \leq F(b) - F(a).$$

Em particular, se F é limitada em $\mathbb{R}$, então F' é integrável em $\mathbb{R}$.

Prova: Para $n \geq 1$, consideramos o quociente

$$G_n(x) = \frac{F(x + 1/n) - F(x)}{1/n}.$$

Pelo Teorema 3.5, temos que $G_n(x) \rightarrow F'(x)$ para q.t.p. x quando $n \rightarrow \infty$, o que mostra em particular que F' é mensurável (pela definição de G_n e por F ser mensurável) e não-negativa (pois F é crescente).

Agora, estendemos F como uma função contínua em todo $\mathbb{R}$. Pelo lema de Fatou (Lema 2.2) sabemos que

$$\int_a^b F'(x)dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b G_n(x)dx.$$

Para completar a prova, basta notar que

$$\begin{aligned} \int_a^b G_n(x)dx &= \frac{1}{1/n} \int_a^b F(x + 1/n)dx - \frac{1}{1/n} \int_a^b F(x)dx \\ &= \frac{1}{1/n} \int_{a+1/n}^{b+1/n} F(x)dx - \frac{1}{1/n} \int_a^b F(x)dx \\ &= \frac{1}{1/n} \int_b^{b+1/n} F(x)dx - \frac{1}{1/n} \int_a^{a+1/n} F(x)dx. \end{aligned}$$

Como F é contínua, o primeiro e o segundo termo do lado direito da última igualdade convergem para $F(b)$ e $F(a)$, respectivamente, à medida que n vai para o infinito (veja a Proposição 3.1). Assim, obtemos

$$\int_a^b G_n(x)dx = F(b) - F(a).$$

Com isso, o resultado segue. □

Quando F é uma função crescente e contínua, a melhor estimativa que conseguimos para $\int_a^b F'(x)dx$ é a desigualdade apresentada no Corolário 3.3. De fato, observe isso no seguinte exemplo.

A função Cantor-Lebesgue

Iremos construir uma função $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ contínua e crescente com $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ e $F'(x) = 0$ em quase todos os pontos. Dessa forma, F é de variação limitada, mas

$$\int_a^b F'(x)dx \neq F(b) - F(a).$$

Considere o conjunto de Cantor $C \subset [0, 1]$ visto anteriormente (Seção 1.2). Temos

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k,$$

com cada C_k uma união disjunta de 2^k intervalos fechados. Seja $F_1(x)$ uma função crescente e contínua em $[0, 1]$ associada a $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ com

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ 1/2 & \text{se } 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ \text{linear em } C_1. \end{cases}$$

Da mesma forma, seja $F_2(x)$ crescente e contínua com

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ 1/4 & \text{se } 1/9 \leq x \leq 2/9, \\ 1/2 & \text{se } 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ 3/4 & \text{se } 7/9 \leq x \leq 8/9, \\ 1 & \text{se } x = 1, \\ \text{linear em } C_2. \end{cases}$$

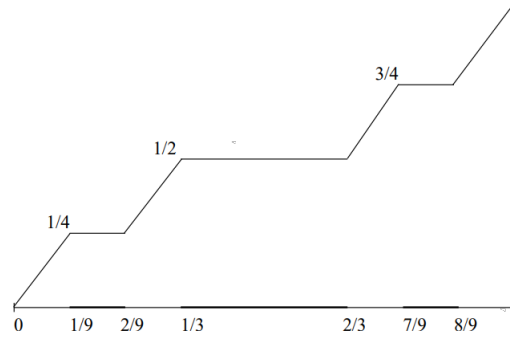


Figura 11: Gráfico da função F_2 . Figura retirada de [11].

Este processo nos dá uma sequência de funções crescentes e contínuas $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Note que a sequência $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ é Cauchy para todo $x \in [0, 1]$. Logo, está bem definido o $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$. Assim, a sequência F_n converge uniformemente para a função F contínua dada por

$$\begin{aligned} F : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x). \end{aligned} \quad (31)$$

A função F definida em (31) é a **Função de Cantor-Lebesgue** (ver Figura 12). Por construção, F é crescente, $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, e vemos que F é constante em cada intervalo do complementar do conjunto de Cantor. Como $m(C) = 0$, temos que $F'(x) = 0$ quase em todos os pontos.

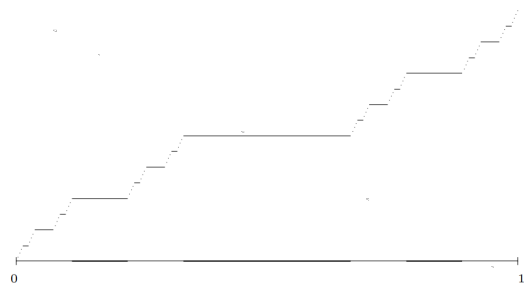


Figura 12: Gráfico da função de Cantor-Lebesgue. Figura retirada de [1].

O que foi abordado nesta seção é que a suposição de variação limitada garante a existência de uma derivada em quase todos os pontos, mas não a confirmação da validade da identidade (25). Porém, na próxima seção, apresentaremos uma condição que resolverá completamente o problema de estabelecer a identidade (25).

3.2.2 Funções absolutamente contínuas

Começaremos a seção com a seguinte definição.

Definição 3.7. A função F definida em $[a, b]$ é **absolutamente contínua** se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^N |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon \text{ sempre que } \sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta,$$

para qualquer coleção de intervalos (a_k, b_k) disjuntos e contidos em $[a, b]$, $k = 1, \dots, N$.

Da definição de função absolutamente contínua, obtemos as seguintes afirmações.

Afirmção 1: Funções absolutamente contínuas são uniformemente contínuas, logo contínuas.

Prova: Seja $\epsilon > 0$. Como F é absolutamente contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^N |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon \text{ sempre que } \sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta,$$

com (a_k, b_k) disjuntos e pertencem a uma coleção de intervalos de $[a, b]$, com $k = 1, \dots, N$.

Considere especificamente o caso $N = 1$ e suponha que $a \leq x \leq y \leq b$. Assim, como $b - a < \delta$ temos

$$0 \leq y - x \leq \delta,$$

donde

$$|x - y| < \delta.$$

Da continuidade absoluta de f , temos

$$|f(y) - f(x)| < \epsilon,$$

Agora, se $y < x$ com

$$|x - y| < \delta,$$

então

$$0 < x - y < \delta$$

e

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Portanto, para todo $x, y \in [a, b]$ com

$$|x - y| < \delta,$$

temos que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Assim, como ϵ é arbitrário, f é uniformemente contínua, logo contínua.

□

Afirmção 2: Se F é absolutamente contínua em um intervalo limitado, então F também é de variação limitada no mesmo intervalo. Além disso, sua variação total é absolutamente contínua, logo contínua.

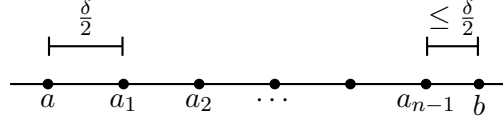
Como consequência desta afirmação, a decomposição de F em duas funções monotônicas dadas na seção anterior Teorema 3.4 mostra que cada uma dessas funções é contínua.

Prova: Suponha F absolutamente contínua. Logo, dado $\epsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^N |F(b_k) - F(a_k)| < 1 \text{ sempre que } \sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta,$$

com (a_k, b_k) disjuntos e pertencentes a uma coleção de intervalos de $[a, b]$, para todo $k = 1, \dots, N$.

Seja $P^* = \{a = a_0, a_1, \dots, a_n = b\}$ a partição de $[a, b]$ com a propriedade que $a_i - a_{i-1} = \delta/2$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, e tal que $a_n - a_{n-1} \leq \delta/2$ (Veja a figura abaixo).



Agora escolheremos n apropriado. Para isso dividimos $b - a$ por $\delta/2$. Isso nos dá o número de intervalos de tamanho $\delta/2$ aparece em $b - a$. Adicionamos $+1$ para levar em conta o intervalo restante (a_{n-1}, a_n) cujo é menor ou igual a $\delta/2$. Tomamos então

$$n = \left\lceil \frac{2(b-a)}{\delta} \right\rceil + 1.$$

Agora, seja P uma partição qualquer de $[a, b]$ e considere

$$P' = P \cup P^*.$$

A partição P' é um refinamento de P e P^* , e denotamos $P' = \{z_0 = a, z_1, \dots, z_m = b\}$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ introduzimos

$$P'_i = \{z_{i_k} \in P' : z_{i_k} \in [a_{i-1}, a_i]\}.$$

Isto é, para cada i , P'_i é o conjunto de pontos em P_i que estão contidos no intervalo fechado $[a_{i-1}, a_i]$ da partição P^* . Então, denotando $V(F, P)$ a variação de F em relação a partição P , temos

$$V(F, P) \leq V(F, P') = \sum_{i=1}^n \sum_k |F(z_{i_k}) - F(z_{i_{k-1}})| \leq n = \left\lceil \frac{2(b-a)}{\delta} \right\rceil + 1.$$

Portanto, a variação $V(F, P)$ é sempre limitada por $\left\lceil \frac{2(b-a)}{\delta} \right\rceil + 1$. Como P é uma partição qualquer de $[a, b]$, segue que F é de variação limitada em $[a, b]$.

□

Afirmção 3: Seja $F(x) = \int_a^x f(y)dy$, com f é integrável, então F é absolutamente contínua.

Isso segue imediatamente de [2](#) no Teorema [2.5](#).

A Afirmção 3 mostra que a continuidade absoluta é uma condição necessária para impor a F se esperamos provar que $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$.

Teorema 3.6. Se F é absolutamente contínua em $[a, b]$, então $F'(x)$ existe em quase todos os pontos. Além disso, se $F'(x) = 0$ q.t.p. x , então F é constante.

Vimos na Afirmação 2 que uma função absolutamente contínua é de variação limitada, e anteriormente no Teorema 3.4, vimos que uma função de variação limitada é a diferença de duas funções monotônicas contínuas. Logo, uma função absolutamente contínua é a diferença de duas funções monotônicas contínuas. Assim, a existência de $F'(x)$ para q.t.p. x segue do Corolário 3.3. Dessa forma, iremos provar só a segunda parte do Teorema 3.6.

Para provar que $F'(x) = 0$ q.t.p. implica que F é constante, necessitamos de uma versão mais elaborada do argumento de cobertura do Lema 3.1.

Definição 3.8. *Seja $E \subset \mathbb{R}$. Diz-se que uma coleção $\mathcal{B}$ de bolas é uma cobertura Vitali de um conjunto E se para todo $x \in E$ e qualquer $\eta > 0$ existe uma bola $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ e $m(B) < \eta$. Assim, cada ponto é coberto por bolas de medida arbitrariamente pequena.*

Lema 3.4. *Seja $E \subset \mathbb{R}$. Se E é um conjunto de medida finita e $\mathcal{B}$ uma cobertura Vitali de E , então para qualquer $\delta > 0$ podemos encontrar um número finito de bolas $B_1, \dots, B_N$ em $\mathcal{B}$ que são disjuntas e*

$$\sum_{i=1}^N m(B_i) \geq m(E) - \delta.$$

Prova: Aplicaremos o Lema 3.1 várias vezes, com o objetivo de compor todo o conjunto E . Note que para chegarmos na conclusão do resultado basta tomar δ suficientemente pequeno, digamos $\delta < m(E)$, e usar o Lema 3.1, para encontrar uma coleção finita de bolas disjuntas $B_1, B_2, \dots, B_{N_1}$ em $\mathcal{B}$ tal que $\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) \geq \gamma \cdot \delta$ (para simplificar a notação, escrevemos $\gamma = 3^{-n}$). De fato, primeiro tome E' um subconjunto compacto de E tal que $m(E') \geq \delta$. Por causa da compacidade de E' , podemos cobri-lo por um número finito de bolas de $\mathcal{B}$, isto é, $\bigcup_{l=1}^N \tilde{B}_l \supset E'$, com $\tilde{B}_l \in \mathcal{B}$ para todo $l = 1, \dots, N$, então o Lema 3.1 nos permite selecionar uma subcoleção disjunta dessas bolas, digamos $B_1, B_2, \dots, B_{N_1}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) \geq \gamma m\left(\bigcup_{l=1}^N \tilde{B}_l\right) \geq \gamma m(E') \geq \gamma \cdot \delta.$$

Com $B_1, \dots, B_{N_1}$ como nossa sequência inicial de bolas, consideramos duas possibilidades: ou $\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) \geq m(E) - \delta$ e terminamos com $N = N_1$, ou ao contrário $\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) < m(E) - \delta$. Na segunda possibilidade, com $E_2 = E - \bigcup_{i=1}^{N_1} B_i$, temos $m(E_2) > \delta$ (lembre que $m(\overline{B_i}) = m(B_i)$). Repetimos então o argumento anterior, escolhendo um subconjunto compacto E'_2 de E_2 com $m(E'_2) \geq \delta$, e notando que as bolas em $\mathcal{B}$ que são disjuntas de $\bigcup_{i=1}^{N_1} B_i$ ainda cobrem E_2 e de fato dão uma cobertura Vitali para E_2 e, portanto, para E'_2 . Assim, podemos escolher uma coleção disjunta finita dessas bolas $B_i, N_1 < i \leq N_2$, de modo que $\sum_{N_1 < i \leq N_2} m(B_i) \geq \gamma \cdot \delta$. Portanto, agora $\sum_{i=1}^{N_2} m(B_i) \geq 2\gamma \cdot \delta$, e as bolas $B_i, 1 \leq i \leq N_2$, são disjuntas.

Consideramos novamente duas alternativas, se $\sum_{i=1}^{N_2} m(B_i) \geq m(E) - \delta$. No primeiro caso, terminamos com $N_2 = N$ e, no segundo caso, procedemos como antes. Se, continuando assim, tivéssemos chegado à k -ésima etapa e não parado antes disso, teríamos selecionado uma coleção de bolas disjuntas com a soma de suas medidas maior ou igual a $k\gamma \cdot \delta$. Em qualquer caso, nosso processo atinge o objetivo desejado na k -ésima etapa se $k \geq (m(E) - \delta)/\gamma \cdot \delta$, pois neste caso $\sum_{i=1}^{N_k} m(B_i) \geq m(E) - \delta$.

□

Uma consequência do resultado anterior é a seguinte.

Corolário 3.4. *Nas condições do Lema 3.4, podemos organizar a escolha das bolas de modo que*

$$m\left(E - \bigcup_{i=1}^N B_i\right) < 2\delta.$$

Prova: Seja A um conjunto aberto, com $A \supset E$ e $m(A - E) < \delta$. Como estamos lidando com uma cobertura Vitali de E , podemos restringir todas as nossas escolhas acima a bolas contidas em A . Se fizermos isso, então $(E - \bigcup_{i=1}^N B_i) \cup (\bigcup_{i=1}^N B_i) \subset A$, onde a união no lado esquerdo é uma união disjunta. Portanto,

$$m\left(E - \bigcup_{i=1}^N B_i\right) \leq m(A) - m\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right) \leq m(E) + \delta - (m(E) - \delta) = 2\delta.$$

□

Prova do Teorema 3.6: Note que para demonstrar o teorema basta mostrar que $F(b) = F(a)$, pois caso isto seja provado, podemos substituir o intervalo $[a, b]$ por qualquer subintervalo. Agora, seja E o conjunto dos $x \in (a, b)$ para os quais $F'(x)$ existe e é zero. Lembramos que $m(E) = b - a$. Em seguida fixe momentaneamente $\epsilon > 0$. Como para cada $x \in E$ temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right| = 0,$$

então para cada $\eta > 0$ temos um intervalo aberto $I = (a_x, b_x) \subset [a, b]$ contendo x , com

$$|F(b_x) - F(a_x)| \leq \epsilon(b_x - a_x) \text{ e } b_x - a_x < \eta.$$

A coleção desses intervalos formam uma cobertura Vitali de E e, portanto, pelo Lema 3.4, para $\delta > 0$, podemos selecionar uma quantidade finita de intervalos disjuntos $I_j = (a_j, b_j)$, com $1 \leq j \leq N$, tais que

$$\sum_{j=1}^N m(I_j) \geq m(E) - \delta = (b - a) - \delta. \quad (32)$$

Como $|F(b_j) - F(a_j)| \leq \epsilon(b_i - a_i)$, vemos que

$$\sum_{j=1}^N |F(b_j) - F(a_j)| \leq \epsilon(b - a),$$

já que os intervalos I_j são disjuntos e estão em $[a, b]$. Em seguida, considere o complementar de $\bigcup_{j=1}^N I_j$ em $[a, b]$, que consiste em um número finito de intervalos fechados $\bigcup_{k=1}^M [\alpha_k, \beta_k]$ com comprimento total $\leq \delta$ por causa de (32), isto é,

$$m\left(\bigcup_{k=1}^M [\alpha_k, \beta_k]\right) = m\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^N I_j\right) = m(E) - m\left(\bigcup_{j=1}^N I_j\right) = m(E) - \sum_{j=1}^N m(I_j) \leq \delta.$$

Pela continuidade absoluta de F (se δ for escolhido apropriadamente em termos de ϵ), $\sum_{k=1}^M |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| \leq \epsilon$. Dessa forma, temos que

$$|F(b) - F(a)| \leq \sum_{j=1}^N |F(b_j) - F(a_j)| + \sum_{k=1}^M |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| \leq \epsilon(b - a) + \epsilon.$$

Deste modo, concluímos que $F(b) - F(a) = 0$.

□

O próximo resultado resolve nosso segundo problema de estabelecer a reciprocidade entre diferenciação e integração, como desejamos desde o início do capítulo.

Teorema 3.7. *Suponha que F é absolutamente contínua em $[a, b]$. Então, F' existe em quase todo ponto e é uma função mensurável. Além disso,*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(y)dy, \text{ para todo } a \leq x \leq b.$$

Em particular, fazendo $x = b$, obtemos $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(y)dy$.

Por outro lado, se f é uma função integrável em $[a, b]$, então existe uma função absolutamente contínua F tal que $F'(x) = f(x)$ em quase todos os pontos. Neste caso, podemos tomar $F(x) = \int_a^x f(y)dy$.

Prova: Como sabemos que uma função absolutamente contínua de valor real é a diferença de duas funções crescentes contínuas, o Corolário 3.3 mostra que F' é integrável em $[a, b]$. Agora, seja $G(x) = \int_a^x F'(y)dy$. Então, G é absolutamente contínua (pois G é Lipschitz, ver Apêndice A). Assim, a diferença $G(x) - F(x)$ também é. Pelo Teorema da diferenciação de Lebesgue (Teorema 3.1), sabemos que $G'(x) = F'(x)$ para q.t.p. x . Portanto, a diferença $F - G$ tem derivada 0 em quase todos os pontos. Pelo Teorema 3.6 concluímos que $F - G$ é igual a uma constante, digamos C . Como

$$F(x) - G(x) = C \implies F(x) = C + \int_a^x F'(y)dy,$$

para $x = a$, temos

$$F(a) = C \implies F(x) - F(a) = \int_a^x F'(y) dy.$$

□

3.2.3 Diferenciabilidade de funções “jump”

Recordemos que, na prova do Teorema 3.5, supomos que a função F é contínua. Agora, iremos apresentar uma classe de funções monotônicas que irá nos permitir retirar essa suposição na prova do daquele teorema.

Como antes, podemos assumir que F é crescente e limitada. Em particular, estas duas condições garantem que os limites

$$F(x^-) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y < x}} F(y) \quad \text{e} \quad F(x^+) = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} F(y)$$

existem. De fato, para qualquer $x_0 \in \mathcal{D}(F)$, com $\mathcal{D}(F)$ o domínio de F , se $x \leq x_0$ e $x_0 \leq y$, por hipótese, temos

$$F(x) \leq F(x_0) \leq F(y) < M.$$

Dada qualquer sequência $\{x_n\}_n$ com $x_n < x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e convergindo para x_0 , temos que $\{F(x_n)\}_n$ será monótona e limitada, portanto convergente. Portanto, $F(x_0^-)$ existe. Analogamente, mostra-se que $F(x_0^+)$ existe.

Deste modo, sempre teremos $F(x^-) \leq F(x) \leq F(x^+)$. É fácil ver que a função F é contínua em x se $F(x^+) = F(x^-)$, caso contrário, diremos que F tem uma descontinuidade de salto em x .

A seguir, veremos que é possível lidar com descontinuidades de salto, uma vez que só haverá uma quantidade enumerável delas.

Lema 3.5. *Uma função crescente e limitada F em $[a, b]$ tem, no máximo, uma quantidade enumerável de descontinuidades.*

Em particular, o conjunto de pontos que uma função crescente e limitada em $[a, b]$ é descontínua, tem medida nula.

Prova: Se F é descontínua em x , podemos escolher um número racional r_x de modo que $F(x^-) < r_x < F(x^+)$ (pois os racionais são densos na reta). Se f é descontínua em x , para todo $x < z$, devemos ter $F(x^+) \leq F(z^-)$, logo $r_x < r_z$. Consequentemente, a cada número racional corresponde no máximo uma descontinuidade de F . Portanto, F pode ter no máximo um número enumerável de descontinuidades, uma vez que o conjunto dos números racionais é um conjunto enumerável.

□

Sejam $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a sequência de pontos onde F é descontínua, e seja α_n o salto de F em x_n , ou seja, $\alpha_n = F(x_n^+) - F(x_n^-)$. Então,

$$F(x_n^+) = F(x_n^-) + \alpha_n,$$

e

$$F(x_n) = F(x_n^-) + \theta_n \alpha_n,$$

para algum $0 \leq \theta_n \leq 1$. Definimos

$$j_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_n, \\ \theta_n & \text{se } x = x_n, \\ 1 & \text{se } x > x_n. \end{cases}$$

A função *jump* associada a F será dada por

$$J_F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(x).$$

Por simplicidade, e quando nenhuma confusão for possível, escreveremos J em vez de J_F .

Como F é crescente e limitada, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq F(b) - F(a) < \infty.$$

Portanto, a série que define J converge absolutamente e uniformemente (pelo Teste M de Weierstrass).

□

Lema 3.6. *Se F é crescente e limitada em $[a, b]$, então:*

1. *$J(x)$ é descontínua precisamente nos pontos $\{x_n\}$ e tem um salto em x_n igual ao salto de F em x_n ;*
2. *A diferença $F(x) - J(x)$ é crescente e contínua.*

Prova: Se $x \neq x_n$ para todo n , cada j_n é contínuo em x , e como a série converge uniformemente, J deve ser contínua em x . Se $x = x_N$ para algum N , então escrevemos

$$J(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n j_n(x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n j_n(x).$$

Pelo mesmo argumento acima, a última série do lado direito é contínua em x e a soma finita tem uma descontinuidade de salto em x_N de tamanho α_N .

Para o item 2 notamos que o item 1 implica imediatamente que $F - J$ é contínua. Finalmente, se $y > x$, como F é crescente, temos

$$J(y) - J(x) \leq \sum_{x < x_n \leq y} \alpha_n \leq F(y) - F(x),$$

Assim,

$$F(x) - J(x) \leq F(y) - J(y)$$

e a diferença $F - J$ é crescente, conforme desejado.

□

Uma vez que podemos escrever $F(x) = [F(x) - J(x)] + J(x)$, nossa tarefa final será provar que J é diferenciável em quase todos os pontos.

Teorema 3.8. *Se J é a função jump considerada acima, então $J'(x)$ existe e é zero em quase todos os pontos.*

Prova: Dado qualquer $\epsilon > 0$, observe que o conjunto E dos x tal que

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{J(x+h) - J(x)}{h} > \epsilon, \quad (33)$$

é um conjunto mensurável. Seja $\delta = m(E)$ e mostremos que $\delta = 0$.

Como a série $\sum \alpha_n$ que surge na definição de J converge, para qualquer η , a ser escolhido posteriormente, podemos encontrar N tal que $\sum_{n>N} \alpha_n < \eta$.

Em seguida, tomamos

$$J_0(x) = \sum_{n>N} \alpha_n j_n(x),$$

e, por causa de nossa escolha de N temos

$$J_0(b) - J_0(a) < \eta. \quad (34)$$

Note que, $J - J_0$ é uma soma finita. Portanto, o conjunto de pontos onde (33) vale, com J substituído por J_0 , difere de E por no máximo um conjunto finito de pontos $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. Assim podemos encontrar um conjunto compacto K , com $m(K) \geq \frac{\delta}{2}$, de modo que $\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{J_0(x+h) - J_0(x)}{h} > \epsilon$ para cada $x \in K$ (veja o item 3 do Teorema 1.4). Logo, existem intervalos (a_x, b_x) contendo x , $x \in K$, de modo que $J_0(b_x) - J_0(a_x) > \epsilon(b_x - a_x)$. Dessa forma, podemos escolher uma coleção finita desses intervalos que cobre K . Em seguida, aplicamos o Lema 3.1 para selecionar intervalos disjuntos $I_1, I_2, \dots, I_n$, e para os quais $\sum_{j=1}^n m(I_j) \geq m(K)/3$. Os intervalos $I_j = (a_j, b_j)$ satisfazem

$$J_0(b_j) - J_0(a_j) > \epsilon(b_j - a_j),$$

pois são subintervalos de (a_x, b_x) .

Agora, veja que

$$J_0(b) - J_0(a) \geq \sum_{j=1}^N J_0(b_j) - J_0(a_j) > \sum \epsilon(b_j - a_j) \geq \frac{\epsilon}{3}m(K) \geq \frac{\epsilon}{6}\delta.$$

Assim, por (34), $\epsilon\delta/6 < \eta$, e como η é qualquer, segue que $\delta = 0$ e o teorema está provado.

□

Apêndice A

A Algumas definições e resultados básicos

Neste apêndice vamos relembrar algumas definições e resultados básicos.

Definição A.1. *Bola aberta no $\mathbb{R}^n$ centrada em x e raio r :*

$$B(x, r) = B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}.$$

Definição A.2. *Um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ é aberto quando, para todo $x \in E$, existir $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset E$.*

Por definição, **um conjunto é fechado**, se o seu complementar é aberto.

Observação A.1.

1. *A união arbitrária de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

Prova: Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma família de conjuntos abertos, onde $A_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, para todo $\lambda \in L$, com L um conjunto qualquer de índices.

Afirmção: $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = A$ é um conjunto aberto.

De fato,

$$x \in A \longrightarrow \exists \lambda_0 \in L, \text{ tal que } x \in A_{\lambda_0} \xrightarrow{(H)} \exists B_r(x) \subset A_{\lambda_0} \subset A.$$

2. *A interseção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

Prova: Seja $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ uma família de conjuntos abertos, onde $A_i \subset \mathbb{R}^n$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Tome $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, então $x \in A_i$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Assim, temos que para cada $A_i, i = 1, 2, \dots, n$,

$$\exists r_i > 0, \text{ tal que } B_{r_i}(x) \subset A_i.$$

Tome $r = \min\{r_i\}$, então

$$B_r(x) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

Por outro lado, para interseções infinitas a observação não vale. Para isso, basta ver que $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$ não é aberto.

3. A interseção arbitrária de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Prova: Seja $\{F_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma família de conjuntos fechados, onde $F_\lambda \subset \mathbb{R}^n$, para todo $\lambda \in L$, com L um conjunto qualquer de índices. Precisamos mostrar que $\left(\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda\right)^C$ é aberto. E de fato, das leis de De Morgan, temos

$$\left(\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda\right)^C = \bigcup_{\lambda \in L} F_\lambda^C \text{ que é aberto.}$$

Então, $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é fechado.

4. A união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Prova: Seja $\{F_i\}_{1 \leq i \leq n}$ uma família de conjuntos fechados, com $F_i \subset \mathbb{R}^n$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Novamente pelas leis de De Morgan, temos

$$\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right)^C = \bigcap_{i=1}^n F_i^C \text{ que é aberto.}$$

Então, $\bigcup_{i=1}^n F_i$ é fechado.

Veja que para união arbitrária a observação não vale, pois $(0, 1) = \bigcup_{0 < x < 1} \{x\}$ é aberto e cada $\{x\}$ é fechado em $\mathbb{R}$.

Temos que um conjunto K é limitado se ele estiver contido em uma bola de raio finito. Um conjunto fechado e limitado no $\mathbb{R}^n$, será chamado **conjunto compacto**. A definição a seguir serve para definir conjuntos compactos em espaços métricos quaisquer, contudo no $\mathbb{R}^n$ esta definição é equivalente a ser fechado e limitado.

Definição A.3. Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto quando dado uma coleção $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$, com A_α aberto, satisfazendo $K \subset \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$, existem $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \dots, A_{\alpha_N}$ tais que $K \subset \bigcup_{j=1}^N A_{\alpha_j}$.

Esta definição diz que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, dada qualquer cobertura aberta, dele pode-se extrair subcobertura finita.

Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, definimos:

- $\limsup x_n := \inf_{k \geq 1} \left(\sup_{n \geq k} x_n \right),$
- $\liminf x_n := \sup_{k \geq 1} \left(\inf_{n \geq k} x_n \right),$

ou, equivalentemente,

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k > n} x_k \right),$
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k > n} x_k \right).$

Definição A.4. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma seminorma em E é uma função $n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $x, y \in E$ e $c \in \mathbb{R}$, vale:*

- $n(x) \geq 0$;
- $n(x) = 0$ se e somente se $x = 0$;
- $n(cx) = |c|N(x)$;
- $n(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Definição A.5. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma norma sobre E é uma função $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $x, y \in E$ e $c \in \mathbb{R}$:*

- $N(x) \geq 0$;
- $N(x) = 0$ se e somente se $x = 0$;
- $N(cx) = |c|N(x)$;
- $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Neste caso, a estrutura (E, N) é chamada um espaço vetorial normado.

Definição A.6. *(Espaços métricos, métrica) Um espaço métrico é um par (X, d) , com X um conjunto e d uma métrica em X (ou função de distância em X), ou seja, d é uma função definida em $X \times X$ tal que para todo $x, y, z \in X$ temos:*

1. d é real, finito e não negativo;
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria);
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdade triangular).

Proposição A.1. *Se a função f definida em $[a, b]$ é lipschitziana, então f é absolutamente contínua em $[a, b]$.*

Prova: Seja $\epsilon > 0$ e escolha $\delta = \epsilon/M$, com M a constante de Lipschitz de f . Então, para qualquer coleção $\{[a_i, y_i]\}$ de intervalos quase disjuntos de $[a, b]$, com $\sum_i |x_i - y_i| < \delta$, obtemos

$$\sum_i |f(x_i) - f(y_i)| < M \sum_i |x_i - y_i| < M\delta = \epsilon.$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] Elias M. Stein e Rami Shakarchi, *Real Analysis - Measure Theory, Integration, e Hilbert Spaces*, Princeton Lectures in Analysis, 2005.
- [2] Robert Gardner Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library, 1995.