Universidade Federal da Paraíba

Departamento de Física

Estudo do efeito Casimir e geração da massa topológica via potencial efetivo em cenários com e sem violação da invariância de Lorentz

Antonio Jorge Dantas Farias Junior

Orientador: Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota

Tese apresentada ao Programa de Pós -Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota
Prof. Dr. Albert Petrov
Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello
Prof. Dr. Tiago Carlos Adorno de Freitas
Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos

João Pessoa
2023

Federal University of Paraíba

Department of Physics

On the Casimir effect and topological mass generation via effective potential in scenarios with and without violation of Lorentz invariance

Antonio Jorge Dantas Farias Junior

Advisor: Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota

Thesis submitted to the Graduate Program in Physics of the Federal University of Paraíba, as a partial requirement for the degree of Doctor in Physics.

Examining Committee:
Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota
Prof. Dr. Albert Petrov
Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello
Prof. Dr. Tiago Carlos Adorno de Freitas
Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos

João Pessoa
2023

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F224e Farias Junior, Antonio Jorge Dantas.
Estudo do efeito Casimir e geração da massa topológica via potencial efetivo em cenários com e sem violação da invariância de Lorentz / Antonio Jorge Dantas Farias Junior. - João Pessoa, 2023.
101 f.

Orientação: Herondy Francisco Santana Mota.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Energia de Casimir. 2. Violação de Lorentz. 3. Massa topológica. 4. Correção de loop. 5. Campos interagentes. 6. Estabilidade do vácuo. I. Mota, Herondy Francisco Santana. II. Título.

UFPB/BC CDU 530.145(043)

Elaborado por ANNA REGINA DA SILVA RIBEIRO - CRB-15/24

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de tese de Doutorado do aluno Antonio Jorge Dantas Farias Junior , candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física de Partículas Elementares e Campos.

Aos onze dias do mês de agosto do ano de dois mil e vinte e três, às 10h00, na sala virtual https://meet.google.com/eaa-xkpt-bpt, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a tese de Doutorado, na área de Física de Partículas Elementares e Campos, de **Antonio Jorge Dantas Farias Junior** . A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Herondy Francisco de Santana Mota (PPGF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Eugênio Ramos Bezerra de Mello (PPGF/UFPB), Albert Petrov (PPGF/UFPB), Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos (UFCG) e Tiago Carlos Adorno de Freitas (XJTLU). Dando início aos trabalhos, o Prof. Herondy Francisco de Santana Mota comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de tese intitulada "*Estudo do efeito Casimir e geração de massa topológica via potencial efetivo em cenários com e sem violação da invariância de Lorentz*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer **"aprovado".** Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **11 de agosto de 2023**.

Herondy F. S. Mota
Prof. Dr. Herondy Francisco de Santana Mota
Orientador - PPGF/UFPB

Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Albert Petrov
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Tiago Carlos Adorno de Freitas
XJTLU

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
UFCG

Dedico este trabalho à minha mãe,
Magna Nunes Paiva,
e ao meu pai,
Antônio Jorge Dantas Farias
(este in memoriam)

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha mais profunda gratidão ao meu orientador Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota, por toda ajuda, orientação e conhecimento que me foi passado. Sem ele, parte alguma deste trabalho seria realizada.

Ao meu professor Dr. Andrei Smirnov, por todas lições, conselhos e amizade.

Aos professores do Departamento de Física da UFPB, em especial aos professores Dr. Fábio Leal de Melo Dahia, Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello, Dr. Valdir Barbosa Bezerra e Dr. Bertúlio de Lima Bernardo, por todo conhecimento passado durante as aulas que foram de suma importância para minha formação.

À Amanda Ingrid dos Santos Barbosa, por todo companheirismo e apoio ao longo desses anos.

À Rafaela Simias Aragão de Lima, por toda amizade e ajuda.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Publicações

Em conexão com os estudos apresentados nessa tese, foram publicados os seguintes trabalhos:

- Título: Loop correction to the scalar Casimir energy density and generation of topological mass due to a helix boundary condition in a scenario with Lorentz violation

  Jornal: International Journal of Modern Physics D

  Doi: 10.1142/S0218271822501267

  Autores: Antonio Jorge Dantas Farias Junior, Herondy Francisco Santana Mota

  Referência completa: A. J. D. Farias Junior and H. F. Mota Santana, *Loop correction to the scalar Casimir energy density and generation of topological mass due to a helix boundary condition in a scenario with Lorentz violation*, Int. J. Mod. Phys. D **31** (2022) 2250126, [2204.09400].

- Título: Casimir effect, loop corrections, and topological mass generation for interacting real and complex scalar fields in minkowski spacetime with different conditions

  Jornal: Physical Review D

  Doi: 10.1103/PhysRevD.107.125019

  Autores: Antonio Jorge Dantas Farias Junior, Herondy Francisco Santana Mota

  Referência completa: A. J. D. F. Junior and H. F. S. Mota, *Casimir effect, loop corrections, and topological mass generation for interacting real and complex scalar fields in minkowski spacetime with different conditions*, Phys. Rev. D **107** (Jun, 2023) 125019.

Resumo

Na presente tese, a abordagem do potencial efetivo da teoria quântica de campos é usada com o objetivo de investigar a correção de loop de auto-interação para a densidade de energia de Casimir, assim como a geração da massa topológica para os casos de um campo escalar real massivo e sem massa, os quais obedecem uma condição de contorno do tipo hélice. Além disso, é considerado um cenário em que a simetria de Lorentz sofre uma violação do tipo éter CPT-par, em que CPT representa as simetrias por conjugação da carga, paridade ou inversão espacial e reversão temporal, respectivamente. Na ausência da quebra de simetria de Lorentz, obtemos expressões analíticas para a correção em loop da densidade de energia de Casimir e também para a massa do campo escalar. Em seguida, consideramos o mesmo sistema levando em consideração a violação do tipo éter CPT-par em cada direção do espaço tempo e analisamos seu efeito na densidade de energia de Casimir e também na massa topológica gerada. Os resultados obtidos são analisados graficamente.

Além do sistema mencionado, consideramos ainda um sistema interagente, consistindo de um campo escalar real e um campo escalar complexo. A interação considerada é dada pelo produto do quadrado do campo real pelo módulo quadrado do campo complexo e, incluímos os termos de auto-interação associado a cada campo. Nessa teoria o campo escalar real é submetido à condições periódicas, ao passo que no campo complexo foram consideradas duas condições separadamente, sendo uma a condição quasi-periódica e a outra a condição mista. Além da obtenção das correções da densidade de energia de Casimir e da massa topológica, uma análise dos possíveis estados de vácuo estáveis foi realizada fornecendo as correspondentes condições de estabilidade. Nossos resultados, para este sistema, também são exibidos graficamente.

Palavras-chave: Energia de Casimir; massa topológica; violação de Lorentz; correção de loop; campos interagentes; estabilidade do vácuo.

Abstract

In this work, the effective potential approach in quantum field theory is used in order to investigate self-interaction loop correction to the Casimir energy density and generation of topological mass for both massless and massive real scalar fiels, which obey a helix type boundary condition. In addition, it is also considered a CPT-even aether-type violation of the Lorentz symmetry, where CPT stands for the symmetries of charge conjugation, parity or space inversion and time reversal, respectively. In the absence of the Lorentz violation, we obtain analytical expressions for the loop correction to the Casimir energy density and to the mass of the scalar field. Afterwards, we consider the same system taking into account the CPT-even aether-type violation, in each spacetime direction and we analyse its effect in the Casimir energy density and also in the topological mass generated. The obtained results are shown in graphics.

Besides, we also consider a system of interacting quantum fields, which consists of a real scalar field and a complex field. The interaction considered here is the quartic one, which is a product of the modulus square of the complex field and the square of the real field. It is included the self-interaction associated with each field. In this theory, the scalar field is constrained to obey periodic condition while the complex field obeys in one case a quasiperiodic condition and in other case mixed boundary conditions. In addition to the loop corrections to the Casimir energy density and the topological mass, an analysis of the possible different stable vacuum states and the corresponding stability condition is also provided. Our results, for this system, are also shown in graphics.

Keywords: Casimir energy; topological mass; Lorentz violation; loop correction; interacting fields; vacuum stability.

Sumário

Introdução **6**

1 Integrais de trajetória na teoria quântica e o potencial efetivo **9**
1.1 Integrais de trajetória na mecânica quântica 9
1.1.1 Propagadores 9
1.1.2 Integral de trajetória 10
1.1.3 Integral de trajetória de Feynman 12
1.1.4 Função de n-pontos 13
1.1.5 Persistência da amplitude de vácuo $Z[J]$ 15
1.2 Integrais de trajetória em teoria de campos 17
1.2.1 Campo escalar quântico 17
1.2.2 Propagador de Feynman 19
1.2.3 Funcional gerador das funções de Green 20
1.2.4 Campo escalar com interação 21
1.3 Potencial efetivo 22

2 Correção de loop para a densidade de energia de Casimir escalar e geração da massa topológica devido à condição de contorno tipo hélice **27**
2.1 Campo escalar auto-interagente 27
2.2 Condição de contorno tipo hélice no espaço tempo de Minkowski 31
2.2.1 Potencial efetivo até correção de um loop 32
2.2.2 Correção de dois loops 37
Apêndice: Autovalores e a relação com o caso periódico 40

3 Correção de loop para a densidade de energia de Casimir escalar e geração da massa topológica devido à condição de contorno tipo hélice com violação de Lorentz **43**
3.1 Campo escalar auto-interagente com violação da simetria de Lorentz 43
3.1.1 Violação de Lorentz na direção do tempo: $u^t = (1, 0, 0, 0)$ 44
3.1.2 Violação de Lorentz na direção espacial: $u^x = (0, 1, 0, 0)$ 49
3.1.3 Violação de Lorentz na direção espacial: $u^y = (0, 0, 1, 0)$ 54
Apêndice: Relação com o caso periódico 58

4 Efeito Casimir, correção de loop e geração da massa topológica para campos escalares real e complexo interagindo **61**
4.1 Potencial efetivo para um campo real interagindo com um campo complexo 61
4.2 Condições periódica e quasi-periódica 65

4.2.1 Correção de um loop 66
4.2.2 Correção de dois loops 72
4.2.3 Estabilidade do vácuo 76
4.3 Condições periódica e mista 79
4.3.1 Correção de um loop 80
4.3.2 Correção de dois loops 83
4.3.3 Estabilidade do vácuo 87

5 Comentários finais **89**

Apêndice 1 **91**

Apêndice 2 **93**

Apêndice 3 **96**

Introdução

Um fenômeno ao mesmo tempo interessante e intrigante, que é de natureza puramente quântica, é o chamado efeito Casimir. Este foi previsto por H. Casimir [1] no ano de 1948 e consiste no aparecimento de uma força de natureza quântica e atrativa, entre duas placas paralelas e eletricamente neutras posicionadas à uma distância pequena entre si quando comparada as dimensões das placas. Essa força de atração é descrita no contexto do campo eletromagnético quantizado e é devida às flutuações do seu estado fundamental, também chamado de vácuo quântico. Desde sua previsão, o efeito Casimir tem sido confirmado por vários experimentos de alta precisão [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. No contexto do efeito Casimir, também foram considerados outros campos quânticos, tais como campos escalares e fermiônicos que produzem efeitos do tipo Casimir sob certas condições externas, i.e., condições de contorno, efeitos de temperatura, condições de calibre e assim por diante. Por exemplo, o efeito Casimir associado com um campo escalar real submetido a condição de contorno do tipo hélice, com correções de temperatura é considerando na Ref. [9], submetido a condições de contorno de Robin na Ref. [10] e, na Ref. [11], a energia de Casimir para um campo escalar real e o campo spinorial neutro de Elko em uma teoria de campo no ponto fixo de Lifshitz, é obtida. Uma revisão sobre o efeito Casimir pode ser encontrada na Ref. [12] (veja também as Refs. [13] e [14]).

A abordagem mais comum no estudo do efeito Casimir é assumir que a simetria de Lorentz é preservada. Entretanto, todas as tentativas de construir uma teoria em uma escala de altas energias, parecem falhar na preservação da simetria de Lorentz, até mesmo de forma local como no caso em que se leva a gravidade em consideração. Em alguns modelos de violação efetiva da simetria de Lorentz, o espaço tempo torna-se anisotrópico em alguma direção (incluindo o tempo), onde a direção é comumente determinada por um 4-vetor unitário. A violação de simetria de Lorentz é um tópico que atrai atenção até os dias atuais, principalmente por ser uma alternativa de se obter uma nova física além do modelo padrão. No contexto da teoria das cordas, por exemplo, a violação da simetria de Lorentz é estudada na Ref. [15] e no caso de uma escala de baixas energias nas Refs. [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26]. Como consequência de tais modificações no espaço tempo introduzidas pela violação de simetria de Lorentz, os modos de energia do campo quântico sofrem alterações que interferem na densidade de energia de Casimir. No contexto da teoria das cordas e em uma escala de baixas energias com violação de Lorentz, a energia de Casimir é investigada nos trabalhos [27] e [28] e nas Refs. [29, 30, 31], respectivamente. O efeito Casimir em um cenário de violação de Lorentz, considerando derivadas de ordem superior, foi considerado na Ref. [32].

É importante apontar que as condições de contorno do espaço tempo desempenham um papel crucial na investigação da energia de Casimir. Uma condição de contorno interessante é a que simula uma hélice. A energia de Casimir produzida por essa escolha particular de condição de contorno tipo hélice, foi considerada nos trabalhos [33, 34, 35] e uma generalização incluindo efeitos térmicos na Ref. [9]. Na presente tese consideramos um campo escalar quântico auto-interagente sujeito à condição de contorno tipo hélice. A escolha de tal condição de contorno é motivada por um grande número de estruturas da natureza com geometria em forma de hélice, para citar algumas dessas formas temos o DNA e a membrana de proteinas celulares. Uma aplicação do efeito Casimir nesse contexto é estudada na Ref. [36]. Além disso, consideramos o cenário em que permitimos uma violação da simetria de Lorentz. Para investigar a energia de Casimir nesse contexto, usamos o formalismo da integral de trajetória para um campo quantizado e construímos o potencial efetivo que pode ser escrito em termos de uma expansão de loop. Esse formalismo foi desenvolvido por Jackiw [37] e permite obter tanto a densidade de energia, bem como a massa topológica que é gerada pela não trivialidade do espaço tempo. Para um campo escalar auto-interagente e não massivo considerando diferentes condições de contorno, a densidade de energia de Casimir e geração de massa topológica

foram analisados na Ref. [38]. Seguiremos passos similares aos apresentados na Ref. [39], em que um campo escalar massivo com violação da simetria de Lorentz é considerado. Aqui, consideraremos primeiramente um campo escalar massivo auto-interagente, obedecendo à condição de contorno tipo hélice e além disso, consideraremos esse sistema no contexto do modelo de violação de simetria de Lorentz do tipo éter CPT-par [39] e [40].

Ademais, consideramos um sistema de campos interagentes em que um campo escalar real, é submetido a uma interação com um campo escalar complexo. A investigação de campos quânticos interagentes é importante pois os campos encontrados na natureza estão, de certa forma, interagindo. A interação usualmente considerada nos trabalhos mencionados é a auto-interação quártica, que é descrita matematicamente por um termo de quarta potência do próprio campo. Considerando a estrutura de dois campos quânticos interagentes, usando a abordagem do potencial efetivo, Toms na Ref. [41] considerou dois campos escalares reais, um *twisted* e o outro *untwisted*, interagindo via interação quártica, i.e., o produto entre o quadrado dos dois campos, para investigar a quebra de simetria e a geração de massa como consequência da topologia não trivial, produzida pelas condições periódicas e antiperiódicas.

Para investigar a densidade de energia de Casimir, correções de loop e a geração da massa topológica, consideramos um sistema que consiste de um campo escalar real, interagindo com um campo escalar complexo. A interação estabelecida é na forma de interação quártica, i.e., o produto entre o quadrado do campo real e o módulo quadrado do campo complexo. Além dessa interação, incluímos os termos correspondentes a auto-interação quártica de cada campo, que é normalmente considerada nos trabalhos mencionados acima. O campo real sempre obedece à condição periódica, ao passo que o campo complexo é restrito a obedecer uma condição quasi-periódica e, posteriormente, condições mistas aplicadas em dois planos paralelos e idênticos, perfeitamente refletores e separados por uma distância L. Esses dois cenários, generalizam resultados obtidos anteriormente nas Refs. [38] e [42], em que foram considerados campos reais auto-interagentes obedecendo condições periódicas, Ref. [43] em que o campo real obedece a condições quasi-periódicas e Refs. [39, 44] em que o campo está sujeito às condições mistas. Nesse sentido, estendemos a análise realizada na Ref. [41], para o caso de campo complexo e considerando outras condições. A escolha da condição de contorno deve ser matematicamente consistente e a escolha da condição de contorno mista é natural, por exemplo, no caso de gravidade quântica, teoria de campo spinorial e supergravidade [45]. Além disso, a condição quasi-periódica desempenha um papel importante quando consideramos nanotubos para um campo quântico [46]. Por exemplo, se a fase angular for zero (caso periódico), obtemos um sistema descrevendo nanotubos metálicos, ao passo que os valores $\pm 2\pi/3$ correspondem a um nanotubo semicondutor. Em adição à densidade de energia de Casimir e a massa topológica na teoria de campos interagentes, analisamos a possibilidade de estados de vácuo distintos. A investigação dos possíveis estados de vácuo fornece a condição de estabilidade correspondente a cada estado possível.

A presente tese está organizada da seguinte forma: o capítulo 1 é reservado para uma revisão das integrais de trajetória aplicadas na mecânica quântica, bem como à teoria quântica de campos escalares. Ademais, revisamos a abordagem do potencial efetivo, aplicado para o cálculo da energia de Casimir, correções de loop e geração da massa topológica. No capítulo 2 consideramos um campo escalar real φ, com auto-interação quártica, isto é, descrita na forma de um termo proporcional a φ^4. O campo escalar é submetido à condição de contorno tipo hélice, em um cenário em que a simetria de Lorentz é preservada. Nesse contexto, a densidade de energia de Casimir e sua correção de loop é analisada. É considerada também a geração da massa topológica para este sistema. No capítulo 3 consideramos o mesmo sistema descrito no capítulo 2, mas em um cenário em que a violação da simetria de Lorentz se estabelece. Nesse caso, o efeito Casimir e a geração de massa topológica são investigados, tendo como foco a influência da violação de Lorentz em tais quantidades. O capítulo

4 é reservado para a investigação do efeito Casimir e geração de massa topológica, considerando campos interagentes, isto é, consideramos a interação entre campos diferentes. O sistema analisado aqui consiste em um campo escalar real interagindo com um campo escalar complexo e, em adição, os temos de auto-interação associados a cada campo são considerados. O campo real é submetido à condição periódica, ao passo que o campo complexo é submetido primeiramente à condição quasi-periódica e, posteriormente, à condição mista. No capítulo 5 apresentamos os comentários finais dos estudos realizados nessa tese.

Capítulo 1

Integrais de trajetória na teoria quântica e o potencial efetivo

Neste capítulo apresentamos uma revisão das integrais de trajetória aplicadas na mecânica quântica, estendendo os resultados obtidos para a teoria quântica de campos. São apresentados os passos necessários para a descrição da teoria quântica em termos das integrais de trajetória e para a obtenção da amplitude de transição que é o objeto central da teoria. Esta revisão é baseada nos livros didáticos [47], [48], [49] e [50], enfatizando as partes principais para o propósito da presente tese. Revisamos também o formalismo que permite a construção do potencial efetivo, como uma expansão de loop em termos das integrais de trajetória tendo como base os trabalhos do Jackiw [37] e do Toms [38].

O entendimento da integral de trajetória é essencial para a aplicação do potencial efetivo e, portanto, para o cálculo da densidade de energia de Casimir e também da massa topológica.

1.1 Integrais de trajetória na mecânica quântica

Usualmente a mecânica quântica é descrita em termos das formulações de Schrödinger e Heisenberg, entretanto uma formulação equivalente em termos das integrais de trajetória, que é creditada a Feynman[1], é empregada de forma eficiente em certos contextos da mecânica quântica. Na presente seção, estudaremos a mecânica quântica do ponto de vista proposto por Feynman. Inicialmente, abordamos o conceito de propagadores e então construiremos as amplitudes de transição que dão origem às integrais de trajetória.

1.1.1 Propagadores

Conforme amplamente difundido, a equação de Schrödinger pode ser transformada em uma equação integral que deve satisfazer determinadas condições de contorno. A partir de um estado quântico em determinado tempo t, isto é, $|\psi, t\rangle$, podemos escrever sua evolução temporal da seguinte forma:

$$|\psi, t'\rangle = \hat{U}(t', t)\,|\psi, t\rangle\,, \tag{1.1.1}$$

[1]Richard Phillips Feynman foi um físico teórico que, pelas suas contribuições no campo da eletrodinâmica quântica, recebeu o prêmio Nobel de física em 1965, junto com Julian Schwinger e Sin-Itiro Tomonaga. Na Ref. [51], Feynman introduziu o conceito da integral de trajetória aplicado à mecânica quântica.

em que $\hat{U}(t',t)$ é o operador unitário de evolução temporal. Este operador unitário é solução da equação diferencial que segue:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\hat{U}(t',t) = \hat{H}(t')\,\hat{U}(t',t)\,, \tag{1.1.2}$$

em que $\hat{H}(t')$ é o operador Hamiltoniano que descreve o sistema considerado. A partir de Eq. (1.1.1) obtemos uma equação integral por meio da aplição do estado $\langle q|$, relativo à posição e introduzindo a relação de completeza, isto é,

$$\int dq\ \ |q\rangle\langle q| = 1.$$

A equação resultante é escrita na forma:

$$\psi(q',t') = \int dq\ K(q'\ t';q\ t)\,\psi(q,t)\,, \qquad\qquad t' > t, \tag{1.1.3}$$

em que $\psi(q',t') = \langle q'\,|\psi,t'\rangle$ e introduzimos o *propagador* $K(q'\ t';q\ t)$ para tempos futuros, como segue

$$K(q'\ t';q\ t) = \langle q'|\,\hat{U}(t',t)\,|q\rangle\,\Theta(t'-t)\,. \tag{1.1.4}$$

A função de Heaviside, designada por $\Theta(x)$, garante que a evolução do estado é estabelecida para tempos futuros, ou seja, $t' > t$. A forma explícita da função de Heaviside, bem como sua relação com a função delta de Dirac, $\delta(x)$, são dadas por:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}\,, \qquad\qquad \frac{d}{dx}\Theta(x) = \delta(x)\,. \tag{1.1.5}$$

De acordo com a definição do propagador $K(q'\ t';q\ t)$, apresentado na Eq. (1.1.4), fica claro que ele corresponde à amplitude de probabilidade de encontrar o sistema no ponto (q',t'), do espaço de configuração, dado que o sistema estava anteriormente no ponto (q,t). A Eq. (1.1.3) é uma equação integral que descreve a evolução temporal de um sistema quântico e é equivalente à equação diferencial de Schrödinger, usualmente encontrada nos livros texto de mecânica quântica. Assim, obtendo o propagador do sistema, somos capazes de resolver a Eq. (1.1.3) e, consequentemente, determinar a evolução temporal dos estados desejados.

Na seção que segue, escrevemos o propagador definido na Eq. (1.1.4) em termos da integral de trajetória.

1.1.2 Integral de trajetória

A integral de trajetória tem por objetivo expressar o propagador $K(q'\ t';q\ t)$, Eq. (1.1.4), como uma soma coerente de infinitas amplitudes que são relacionadas às infinitas trajetórias no espaço de fase. Nesse estágio, consideramos que o operador Hamiltoniano do sistema é independente do tempo, isto é, $\hat{H}(t') = \hat{H}$, o que resulta em uma simplificação no operador de evolução temporal $\hat{U}(t')$, que nesse caso é escrito na forma $\hat{U}(t') = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t'\right)$. Além disso, é conveniente utilizarmos os estados que constituem a chamada "base em movimento" da representação de Heisenberg (para mais detalhes sobre as representações de Schrödinger e Heisenberg, veja o Apêndice 1) definidos como:

$$\hat{q}(t)\,|q\ t\rangle = q\,|q\ t\rangle\,, \qquad |q\ t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,|q\rangle\,, \qquad \int dq\ \ |q\ t\rangle\langle q\ t| = 1. \tag{1.1.6}$$

Utilizando as relações acima e considerando que o operador Hamiltoniano é independente do tempo, podemos reescrever o propagador definido na Eq. (1.1.4) na seguinte forma:

$$K\left(q'\ t';q\ t\right)=\left\langle q'\right|\hat{U}\left(t',t\right)\left|q\right\rangle=\left\langle q'\right|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)}\left|q\right\rangle=\left\langle q'\ t'\ \right|q\ t\rangle\,, \tag{1.1.7}$$

em que consideramos $t'>t$.

A integral de trajetória é construída a partir do propagador $K\left(q'\ t';q\ t\right)$, dividindo-se o intervalo de tempo, que vai de t até t', em N partes de tamanhos iguais a δt, isto é, $\left(t'-t\right)/N=\delta t$. Após a divisão do intervalo de tempo, inserimos a relação de completeza na representação de Heisenberg, Eq. (1.1.6), em cada ponto de separação dos intervalos do tempo, gerando assim várias amplitudes de transição. Então, realizando os passos mencionados, podemos escrever o propagador $K\left(q'\ t';q\ t\right)=\left\langle q'\ t'\ \right|q\ t\rangle$, como segue:

$$\left\langle q'\ t'\ \right|q\ t\rangle=\int dq_1dq_2...dq_{N-1}\left\langle q'\ t'\ \right|q_{N-1}\ t_{N-1}\rangle\ ...\left\langle q_2\ t_2\ \right|q_1\ t_1\rangle\left\langle q_1\ t_1\ \right|q\ t\rangle\,, \tag{1.1.8}$$

em que cada amplitude é dada por

$$\left\langle q_{i+1}\ t_{i+1}\ \right|q_i\ t_i\rangle=\left\langle q_{i+1}\right|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t\right)\left|q_i\right\rangle\,,\qquad\qquad \delta t=t_{i+1}-t_i. \tag{1.1.9}$$

Note que estamos dividindo o espaço de fase por caminhos infinitesimais que se originam no ponto (q,t), indo até o ponto (q',t'). Vamos analisar separadamente uma amplitude arbitrária, que denotaremos por $\left\langle q_{n+1}\ t_{n+1}\ \right|q_n\ t_n\rangle=\left\langle q_{n+1}\right|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t\right)\left|q_n\right\rangle$, dentre as escritas no lado direito da Eq. (1.1.8). Tendo em mente que δt é uma quantidade infinitesimal, podemos expandir o operador $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\delta t\right)$ até primeira ordem e inserir a relação de completeza para os estados de momento, isto é:

$$\int\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\ \left|p_n\right\rangle\left\langle p_n\right|=1. \tag{1.1.10}$$

Além disso, assumindo que o operador Hamiltoniano depende apenas do momento e da posição, podemos escrever

$$\left\langle p_n\right|\hat{H}\left(\hat{p},\hat{q}\right)\left|q_n\right\rangle=H\left(p_n,q_n\right)\left\langle p_n\ \right|q_n\rangle\,, \tag{1.1.11}$$

em que $H\left(p_n,q_n\right)$ é o Hamiltoniano do sistema substituindo os operadores $\hat{p}$ e $\hat{q}$, pelos seus correspondentes autovalores p_n e q_n. Assim, a amplitude escolhida é escrita na forma,

$$\left\langle q_{n+1}\ t_{n+1}\ \right|q_n\ t_n\rangle=\int\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\left\langle q_{n+1}\ \right|p_n\rangle\left\langle p_n\ \right|q_n\rangle\left(1-\frac{i\delta t}{\hbar}H\left(p_n,q_n\right)\right). \tag{1.1.12}$$

Agora, voltamos o último termo do lado direito da Eq. (1.1.12) à sua escrita original, isto é, como uma exponencial. Podemos efetuar esse passo pois eventualmente iremos tomar o limite de $\delta t\to 0$, o que é equivalente a fazer $N\to\infty$. Ademais, utilizamos a representação de onda plana que segue,

$$\left\langle p_n\ \right|q_n\rangle=e^{-\frac{i}{\hbar}p_nq_n},$$

para obter a amplitude desejada, i.e.:

$$\left\langle q_{n+1}\ t_{n+1}\ \right|q_n\ t_n\rangle=\int\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{i\delta t}{\hbar}\left[p_n\frac{\left(q_{n+1}-q_n\right)}{\delta t}-H\left(p_n,q_n\right)\right]\right\}. \tag{1.1.13}$$

Assim, podemos usar o resultado obtido na Eq. (1.1.13), para escrever cada amplitude do lado direito da Eq. (1.1.8). Dessa forma, obtemos o propagador $\langle q'\ t'\ |q\ t\rangle$ como um produto de várias amplitudes semelhantes à escrita na equação acima, isto é:

$$\langle q'\ t'\ |q\ t\rangle = \left(\int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n\right)\left(\int \prod_{n=0}^{N-1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar}\right) \exp\left\{\frac{i\delta t}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}\left[p_n\frac{(q_{n+1}-q_n)}{\delta t} - H\left(p_n,q_n\right)\right]\right\}, \quad (1.1.14)$$

em que o termo com $n=0$ no expoente do lado direito da equação acima corresponde à amplitude $\langle q_1\ t_1\ |q\ t\rangle$ da Eq. (1.1.8), ou seja, $q_0 = q$. De forma semelhante, o termo com $n = N-1$ corresponde à amplitude $\langle q'\ t'\ |q_{N-1}\ t_{N-1}\rangle$, ou seja, $q_N = q'$. Note que no limite $N\to\infty$, as quantidades $q_n = q\left(t_n\right)$ e $p_n = p\left(t_n\right)$ são funções de t , isto é, $q\left(t\right)$ e $p\left(t\right)$. Além disso, considerando o mesmo limite, $N\to\infty$, temos que o infinitesimal δt vai a zero, mas o intervalo de tempo $t'-t$ continua fixo, logo podemos escrever às seguintes relações:

$$\frac{(q_{n+1}-q_n)}{\delta t} \to \dot{q}\left(t_n\right), \qquad \delta t\sum_{n=0}^{N-1} f\left(t_n\right) \to \int_t^{t'} d\tau\ f\left(\tau\right). \quad (1.1.15)$$

Assim, utilizando as relações acima, podemos escrever o propagador, ou amplitude de transição, como uma integral de trajetória introduzindo uma notação especial, como segue,

$$\langle q'\ t'\ |q\ t\rangle = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} d\tau\left[p\dot{q} - H\left(p,q\right)\right]\right\},$$
$$\left(\int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n\right) \to \int \mathcal{D}q, \qquad \left(\int \prod_{n=0}^{N-1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar}\right) \to \int \mathcal{D}p. \quad (1.1.16)$$

A expressão acima representa uma soma sobre todas as funções $q\left(t\right)$ e $p\left(t\right)$, que satisfazem à condição de contorno expressa por:

$$q\left(t\right) = q, \quad q\left(t'\right) = q'. \quad (1.1.17)$$

Para os casos em que o Hamiltoniano do sistema considerado é da forma mais usual, isto é, a dependência em relação ao momento é quadrática e o potencial depende apenas da posição, podemos dar um passo adiante e obter a chamada integral de trajetória de Feynman. Este passo é realizado a seguir.

1.1.3 Integral de trajetória de Feynman

A integral de trajetória de Feynman é obtida após a substituição do Hamiltoniano, $H\left(p_n,q_n\right)$, no expoente do lado direito da Eq. (1.1.13) por sua forma explícita. Considerando o Hamiltoniano na forma mais usual, i.e.:

$$H\left(p_n,q_n\right) = \frac{p_n^2}{2m} + V\left(q_n\right), \quad (1.1.18)$$

reescrevemos a amplitude de transição apresentada na Eq. (1.1.13), na forma:

$$\langle q_{n+1}\ t_{n+1}\ |q_n\ t_n\rangle = \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{i\delta t}{\hbar}\left[p_n\dot{q}_n - \frac{p_n^2}{2m} - V\left(q_n\right)\right]\right\}, \quad (1.1.19)$$

em que foi usada a primeira relação da Eq. (1.1.15). Note que a integral apresentada no lado direito da última equação é uma Gaussiana, que pode ser resolvida de forma direta, resultando na equação que segue:

$$\langle q_{n+1}\ t_{n+1}\ |q_n\ t_n\rangle = \left(\frac{2\pi i\hbar\delta t}{m}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{i\delta t}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\dot{q}_n^2 - V\left(q_n\right)\right]\right\}. \tag{1.1.20}$$

Cada amplitude escrita no lado direito da Eq. (1.1.8) é então substituida pela correspondente expressão similar a escrita na Eq. (1.1.20). Após realizar a substituição descrita, obtemos a seguinte expressão:

$$\langle q'\ t'\ |q\ t\rangle = \left(\frac{2\pi i\hbar\delta t}{m}\right)^{-\frac{N}{2}} \int dq_1 dq_2 ... dq_{N-1} \exp\left\{\frac{i\delta t}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{m}{2}\dot{q}_n^2 - V\left(q_n\right)\right]\right\}. \tag{1.1.21}$$

Neste ponto, realizamos o limite $N \to \infty$, ou seja, $\delta t \to 0$, tendo em mente as relações apresentadas na Eq. (1.1.15), para obter a integral de trajetória de Feynman, i.e.:

$$\begin{aligned}
&\langle q'\ t'\ |q\ t\rangle = \mathcal{N}\int \mathcal{D}q \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S\left[q,\dot{q}\right]\right\}, \qquad \mathcal{N} = \left(\frac{2\pi i\hbar\delta t}{m}\right)^{-\frac{N}{2}}, \\
&S\left[q,\dot{q}\right] = \int_t^{t'} d\tau \left[\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V\left(q\right)\right] = \int_t^{t'} d\tau\ L\left(q,\dot{q}\right).
\end{aligned} \tag{1.1.22}$$

Nesse importante resultado, vemos que o termo no expoente do lado direito da primeira linha da Eq. (1.1.22), $S\left[q,\dot{q}\right]$ é de fato a ação *clássica* do sistema. Note que a constante de normalização $\mathcal{N}$, é divergente quando tomamos o limite $N \to \infty$. Entretanto, estamos interessados apenas na dependência funcional e não no valor absoluto de $\langle q'\ t'\ |q\ t\rangle$. Além disso, podemos adiantar que essa constante será cancelada no cálculo da obtenção da função de n-pontos, que é o objeto central da teoria. É importante mencionar que o limite semi-clássico emerge de forma natural, pois quando consideramos o limite $\hbar << 1$, ou de forma equivalente $\hbar << S\left[q,\dot{q}\right]$, a integral da primeira linha na Eq. (1.1.22) é dominada pelos pontos críticos do expoente, i.e., pelas trajetórias que satisfazem a equação que segue,

$$\frac{\delta}{\delta q}S\left[q,\dot{q}\right] = 0, \tag{1.1.23}$$

obedecendo ainda as condições de contorno com $q\left(t'\right) = q'$ e $q\left(t\right) = q$. De fato estamos descrevendo o método do ponto sela. Lembrando que a ação $S\left[q,\dot{q}\right]$ é de fato a ação clássica do sistema, vemos que a trajetória que satisfaz a equação Eq. (1.1.23), é justamente a trajetória clássica.

Após obter a integral de trajetória de Feynman, o próximo passo é usar a amplitude de transição para calcular elementos de matriz importantes e valores esperados de quantidades físicas. Isso é alcançado por meio da chamada função de n-pontos.

1.1.4 Função de n-pontos

Conforme mencionado na seção anterior, a amplitude de transição $\langle q'\ t'\ |q\ t\rangle$ é usada para avaliar vários elementos de matriz e valores esperados de quantidades que descrevem o sistema considerado. O elemento de matriz que estamos interessados é obtido quando inserimos operadores de posição em tempos diferentes, ou seja, $\hat{q}\left(t_1\right)\hat{q}\left(t_2\right)...\hat{q}\left(t_i\right)$, na amplitude de transição $\langle q'\ t'\ |q\ t\rangle$, com t_i pertencendo ao intervalo de tempo $[t,t']$. Visto que t_i pertencente ao intervalo de tempo $[t,t']$, podemos inserir o operador $\hat{q}\left(t_i\right)$ na amplitude mais conveniente, isto é, a amplitude que contém o seu autoestado, i.e., $\langle q_{i+1}\ t_{i+1}|\,\hat{q}\left(t_i\right)|q_i\ t_i\rangle = q\left(t_i\right)\langle q_{i+1}\ t_{i+1}\ |q_i\ t_i\rangle$. Entretanto, como os tempos são em geral

diferentes, os operadores $\hat{q}(t_i)$ não necessariamente comutam. Então, respeitando o curso temporal, devemos escrever o elemento de matriz na forma que segue:

$$\langle q'\ t'|\,\mathrm{T}\left[\hat{q}(t_1)\,\hat{q}(t_2)\ldots\hat{q}(t_N)\right]|q\ t\rangle = \mathcal{N}\int \mathcal{D}q\left[q(t_1)\,q(t_1)\ldots q(t_N)\right]\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S\left[q,\dot{q}\right]\right\}. \tag{1.1.24}$$

O ordenamento temporal T é o responsável por manter o curso progressivo do tempo e definido como

$$\mathrm{T}\left[\hat{A}(t_1)\,\hat{B}(t_2)\right] = \begin{cases} \hat{A}(t_1)\,\hat{B}(t_2), & \text{se } t_1 > t_2 \\ \hat{B}(t_2)\,\hat{A}(t_1), & \text{se } t_2 > t_1 \end{cases}. \tag{1.1.25}$$

Nosso objetivo é obter a chamada função de n-pontos (ou, como também é conhecida, amplitude de vácuo), que é uma função de Green dada pela relação

$$G(t_1,t_2,...,t_N) = \langle 0|\,\mathrm{T}\left[\hat{q}(t_1)\,\hat{q}(t_2)\ldots\hat{q}(t_N)\right]|0\rangle, \tag{1.1.26}$$

a partir do elemento apresentado na Eq. (1.1.24). O primeiro passo para realizar essa tarefa é considerar autoestados $|n\rangle$ do operador Hamiltoniano, ou seja, estados que satisfazem

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle, \qquad \sum_n |n\rangle\langle n| = 1. \tag{1.1.27}$$

Inserimos a relação de completeza da Eq. (1.1.27) na base movimento de Heisenberg, obtendo assim,

$$|q\ t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|q\rangle = \sum_n e^{\frac{i}{\hbar}E_n t}\langle n\,|q\rangle\,|n\rangle = \sum_n e^{\frac{i}{\hbar}E_n t}\psi_n^*(q)\,|n\rangle, \tag{1.1.28}$$

em que definimos $\langle n\,|q\rangle = \psi_n^*(q)$. Então, usando a equação acima, podemos ver que o lado esquerdo da Eq. (1.1.24) resulta na seguinte expressão,

$$\langle q'\ t'|\,\mathrm{T}\left[\hat{q}(t_1)\,\hat{q}(t_2)\ldots\hat{q}(t_N)\right]|q\ t\rangle = \sum_{nn'}\psi_n^*(q,t)\,\psi_{n'}(q',t')\,\langle n'|\,\mathrm{T}\left[\hat{q}(t_1)\,\hat{q}(t_2)\ldots\hat{q}(t_N)\right]|n\rangle, \tag{1.1.29}$$

em que $\psi_n(q,t) = e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t}\psi_n(q) = \langle q\ t\,|n\rangle$. Note que a função de n-pontos, $G(t_1,t_2,...,t_N)$, está inclusa no somatório do lado direito da Eq. (1.1.29), especificamente no termo com $n' = n = 0$. Para extrair a função $G(t_1,t_2,...,t_N)$ a partir da última equação, precisamos do conceito de *tempo imaginário*, que é apresentado a seguir.

O operador unitário $\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)$ é bem definido mesmo considerando valores complexos para o tempo t, desde que a parte imaginária do tempo seja negativa, isto é, $\mathrm{Im}\,t \leq 0$. Este fato pode ser demonstrado facilmente fazendo uma decomposição espectral do operador $\hat{U}(t)$ e, substituindo o tempo t por um tempo imaginário, i.e., $t \to -i\tau$. De fato, realizando os passos mencionados, escrevemos o operador unitário como um somatório, isto é:

$$\hat{U}(-i\tau) = \sum_n \exp\left(-\frac{\tau}{\hbar}E_n\right)|n\rangle\langle n|. \tag{1.1.30}$$

Note que a soma acima é convergente devido ao expoente negativo, considerando $E_n > 0$. A mudança de variável $t \to -i\tau$, corresponde à passagem do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano. Dessa forma, podemos definir o operador de evolução temporal no espaço Euclidiano que denotamos por $\hat{U}_E(\tau)$, na forma:

$$\hat{U}_E(\tau) = \hat{U}(-i\tau). \tag{1.1.31}$$

O processo descrito acima, que consiste em expandir o tempo para valores imaginários, é comumente conhecido como rotação de Wick.

Realizando a rotação de Wick na Eq. (1.1.29), vemos que conforme os valores de n e n' aumentam, a energia também aumenta, tal que, tomando o limite com $\tau' \to \infty$ e $\tau \to -\infty$ (isto é $t' \to -i\infty$ e $t \to i\infty$), apenas os termos com menor energia contribuem de forma não trivial, em outras palavras, apenas o termo com $n' = n = 0$ sobrevive. Portanto, realizando o limite $\tau' \to \infty$ e $\tau \to -\infty$ na Eq. (1.1.29), obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{t' \to -i\infty \\ t \to i\infty}} \langle q'\ t' | \operatorname{T}\left[\hat{q}\left(t_1\right)\hat{q}\left(t_2\right)...\hat{q}\left(t_N\right)\right]|q\ t\rangle = \\ &= \lim_{\substack{\tau' \to \infty \\ \tau \to -\infty}} \psi_0^*\left(q,\tau\right)\psi_0\left(q',\tau'\right)\langle 0|\operatorname{T}\left[\hat{q}\left(t_1\right)\hat{q}\left(t_2\right)...\hat{q}\left(t_N\right)\right]|0\rangle\,,\end{aligned} \tag{1.1.32}$$

em que definimos $\psi_0\left(q',\tau'\right) = e^{-\frac{E_0}{\hbar}\tau'}\psi_0\left(q'\right) = \langle q'\ t'\ |0\rangle$ com $t' = -i\tau'$. Note que, no lado direito da Eq. (1.1.32), a função de n-pontos é obtida de forma indireta, pois um fator multiplicativo se faz presente, o qual é possível obter a partir da amplitude de transição $\langle q'\ t'\ |q\ t\rangle$, inserindo a relação de completeza dos autoestados do operador Hamiltoniano, Eq. (1.1.27), realizando a transformação para o tempo imaginário e considerando o limite $\tau' \to \infty$ e $\tau \to -\infty$. O resultado obtido é escrito como segue:

$$\lim_{\substack{t' \to -i\infty \\ t \to i\infty}} \langle q'\ t'\ |q\ t\rangle = \lim_{\substack{\tau' \to \infty \\ \tau \to -\infty}} \langle q', -i\tau'\ |q, -i\tau\rangle = \lim_{\substack{\tau' \to \infty \\ \tau \to -\infty}} \psi_0^*\left(q,\tau\right)\psi_0\left(q',\tau'\right). \tag{1.1.33}$$

Portanto, considerando as Eqs. (1.1.26), (1.1.32) e (1.1.33), podemos escrever a função de n-pontos da seguinte forma:

$$G\left(t_1,t_2,...,t_N\right) = \langle 0|\operatorname{T}\left[\hat{q}\left(t_1\right)\hat{q}\left(t_2\right)...\hat{q}\left(t_N\right)\right]|0\rangle = \lim_{\substack{t' \to -i\infty \\ t \to i\infty}} \frac{\langle q'\ t'|\operatorname{T}\left[\hat{q}\left(t_1\right)\hat{q}\left(t_2\right)...\hat{q}\left(t_N\right)\right]|q\ t\rangle}{\langle q'\ t'\ |q\ t\rangle}. \tag{1.1.34}$$

Note que não escrevemos a transformação $t \to -i\tau$ explicitamente na equação acima para não sobrecarregar a notação. Usando a integral de trajetória de Feynman, é possível reescrever a função de n-pontos, $G\left(t_1,t_2,...,t_N\right)$, de uma forma mais familiar. A partir das Eqs. (1.1.22) e (1.1.24), é possível reescrever a função de n-pontos da Eq. (1.1.34) como segue:

$$G\left(t_1,t_2,...,t_N\right) = \lim_{\substack{t' \to -i\infty \\ t \to i\infty}} \frac{\int \mathcal{D}q\left[q\left(t_1\right)q\left(t_1\right)...q\left(t_N\right)\right]\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} dt''\ L\left(q,\dot{q}\right)\right]}{\int \mathcal{D}q \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} dt''\ L\left(q,\dot{q}\right)\right]}. \tag{1.1.35}$$

Note que de acordo com as Eqs. (1.1.22) e (1.1.24), o fator de normalização $\mathcal{N}$ é cancelado, conforme foi adiantado na discussão abaixo da Eq. (1.1.22).

Tendo em mente que a função de n-pontos, $G\left(t_1,t_2,...,t_N\right)$, é a peça central na formulação da teoria quântica em termos das integrais de trajetórias (e também na teoria quântica de campos como veremos), devemos encontrar formas convenientes para sua obtenção. A seguir, estudaremos a persistência da amplitude de vácuo que resulta em uma forma elegante para a obtenção da função de n-pontos.

1.1.5 Persistência da amplitude de vácuo $Z\left[J\right]$

Nesta seção assumimos que o sistema sob estudo, está sujeito a um agente externo dependente do tempo, descrita classicamente por $J\left(t\right)$. O acoplamento com o agente externo é estabelecido pela

inserção do produto $J(t)\,q$, na ação que descreve o sistema em questão. Então, considerando a perturbação externa, podemos escrever uma nova amplitude de transição, a partir da Eq. (1.1.16), como segue

$$\langle q'\ t'\ |q\ t\rangle_J = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} d\tau\,[p\dot{q} - H(p,q) + J(t)\,q]\right\}, \tag{1.1.36}$$

em que o subíndice $J(t)$, no lado esquerdo da equação acima, diferencia o caso em que há perturbação externa do caso sem perturbação. Doravante, é assumido que a pertubação age de forma adiabática, isto é, existe um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, em que a perturbação age de forma efetiva, ou seja, $J(t) \neq 0$ e, fora deste intervalo de tempo, não há perturbação, $J(t) = 0$. Assim, podemos reescrever a Eq. (1.1.36), separando a amplitude em que a perturbação atua efetivamente, i.e.,

$$\langle q'\ t'\ |q\ t\rangle_J = \int dq_2 \int dq_1\,\langle q'\ t'\ |q_2\ t_2\rangle\,\langle q_2\ t_2\ |q_1\ t_1\rangle_J\,\langle q_1\ t_1\ |q\ t\rangle\,. \tag{1.1.37}$$

O próximo passo é inserir um conjunto completo de autoestados do operador Hamiltoniano nos termos extremos do lado direito da Eq. (1.1.37). Em seguida, introduzimos o tempo imaginário e tomamos o limite para tempos remotos. O resultado obtido é expresso pela equação:

$$\lim_{\substack{t'\to -i\infty \\ t\to i\infty}} \langle q'\ t'\ |q\ t\rangle_J = \lim_{\substack{\tau'\to\infty \\ \tau\to -\infty}} \psi_0(q',\tau')\,\psi_0^*(q,\tau) \int dq_2 \int dq_1\,\langle 0\ |q_2\ t_2\rangle\,\langle q_2\ t_2\ |q_1\ t_1\rangle_J\,\langle q_1\ t_1\ |0\rangle\,. \tag{1.1.38}$$

Identificamos o último termo do lado direito da Eq. (1.1.38) (incluindo as integrais) como sendo a amplitude de probabilidade para o estado de vácuo $|0\rangle$ permanecer sem alterações sob a ação da perturbação $J(t)$ que age no intervalo de tempo dado por $[t_1, t_2]$. Esse termo é conhecido por amplitude de transição *vácuo-vácuo* ou amplitude de *persistência do vácuo* e é denotado por $Z[J] = \langle 0\ |0\rangle_J$. Então, podemos isolar a amplitude de transição vácuo-vácuo da Eq. (1.1.38) e, lembrando do resultado expresso na Eq. (1.1.33), escrever a seguinte expressão:

$$Z[J] = \langle 0\ |0\rangle_J = \int dq_2 \int dq_1\,\langle 0\ |q_2\ t_2\rangle\,\langle q_2\ t_2\ |q_1\ t_1\rangle_J\,\langle q_1\ t_1\ |0\rangle = \lim_{\substack{t'\to -i\infty \\ t\to i\infty}} \frac{\langle q'\ t'\ |q\ t\rangle_J}{\langle q'\ t'\ |q\ t\rangle}. \tag{1.1.39}$$

Note que a amplitude de transição apresentada na Eq. (1.1.36), difere da integral de trajetória escrita na Eq. (1.1.16), por conta da presença da fonte de perturbação $J(t)$ e, por um fator de normalização. Assim, é possível reescrever a amplitude *vácuo-vácuo* da Eq. (1.1.39) de uma forma familiar, i.e.,

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int dt\,[p\dot{q} - H(p,q) + J(t)\,q]\right\}. \tag{1.1.40}$$

Na Eq. (1.1.40) estamos tomando o limite para tempos remotos e a constante de normalização $\mathcal{N}$ da equação acima não é a mesma que a escrita na Eq. (1.1.22). Considerando um Hamiltoniano da forma usual, isto é, com dependência quadrática nos momentos e o potencial dependendo apenas da posição, podemos realizar a integral em p e reescrever a amplitude $Z[J]$ na forma:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int dt\,[L(q,\dot{q}) + J(t)\,q]\right\}. \tag{1.1.41}$$

Após a realização da integração em p, temos uma nova constante que é incorporada à constante $\mathcal{N}$. A constante de normalização $\mathcal{N}$ na equação acima é fixada pela normalização do vácuo, isto é, $\langle 0\ |0\rangle = 1$, o que leva a

$$Z[0] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int dt\ L(q,\dot{q})\right] = 1. \tag{1.1.42}$$

Logo, podemos escrever

$$\mathcal{N} = \{Z[0]\}^{-1}. \tag{1.1.43}$$

Assim, vemos que o fator de normalização concorda com o denominador escrito no lado direito da Eq. (1.1.35), pois estamos tomando o limite para tempos remotos na equação acima. Observe que a amplitude $Z[J]$, escrita na Eq. (1.1.41), é de fato um funcional que dependente da perturbação $J(t)$.

Agora estamos em posição de escrever a relação entre a amplitude de transição vácuo-vácuo $Z[J]$, Eq. (1.1.41), e a função de n-pontos escrita na Eq. (1.1.35). A relação é estabelecida via derivada funcional[2] de $Z[J]$ com respeito a $J(t)$. Então, tomando a derivada funcional de $Z[J]$ em relação à perturbação $J(t_i)$ n vezes, obtemos a expressão abaixo:

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)...\delta J(t_n)} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \mathcal{N}\int \mathcal{D}q\,[q(t_1)\,q(t_2)...q(t_N)]\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int dt\,[L(q,\dot{q}) + J(t)\,q]\right\}. \tag{1.1.44}$$

Comparando a expressão (1.1.44) com a Eq. (1.1.35), tendo em mente o fator de normalização da Eq. (1.1.42), obtemos o resultado desejado, i.e.:

$$G(t_1,t_2,...,t_N) = \langle 0|\,\mathrm{T}\,[\hat{q}(t_1)\,\hat{q}(t_2)...\hat{q}(t_N)]\,|0\rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)...\delta J(t_n)}\right|_{J=0}. \tag{1.1.45}$$

O resultado expresso na Eq. (1.1.45) nos diz que a função de n-pontos, $G(t_1,t_2,...,t_N)$, que é o objeto central da teoria, pode ser facilmente calculada se conhecermos a amplitude de transição vácuo-vácuo $Z[J]$, na presença da perturbação $J(t)$.

Os resultados apresentados até aqui foram obtidos no contexto da mecânica quântica. Estamos interessados em extender estes resultados para a teoria quântica de campos. Assim, na seção que segue generalizamos as expressões apresentados nas Eqs. (1.1.16), (1.1.36), (1.1.41) e (1.1.45) para a teoria quântica de campos, tendo como foco o campo escalar quântico.

1.2 Integrais de trajetória em teoria de campos

1.2.1 Campo escalar quântico

Nesta seção consideramos um campo escalar clássico $\varphi(x^\mu) = \varphi(x) = \varphi(t,\mathbf{x})$, que depende da posição $\mathbf{x}$ e do tempo t. No caso em consideração, temos infinitos graus de liberdade que são percebidos facilmente por analogia com um sistema de partículas clássicas tais que a posição do sistema é definida por $q_i(t)$ e, no caso do campo, estamos substituindo o índice discreto i pelo índice contínuo $\mathbf{x}$. Além disso, é assumido que o campo é descrito por uma teoria local cuja dinâmica é determinada pela Lagrangiana, que pode ser escrita na forma,

$$L = \int d^3x\ \mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi). \tag{1.2.1}$$

A quantidade $\mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi)$ é chamada de *densidade Langrangiana*, entretanto, na literatura amplamente utilizada no assunto, o termo $\mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi)$ é denotado apenas por Lagrangiana. Note que usamos a

[2]Dado um funcional $F[\varphi]$ que depende de uma função $\varphi(x)$, definimos a derivada funcional de $F[\varphi]$ com respeito à $\varphi(x)$ como [48],

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(y)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F[\varphi+\varepsilon\delta(x-y)] - F[\varphi]}{\varepsilon}.$$

notação $\partial_\mu \varphi = \partial\varphi/\partial x^\mu$, com $\mu = 0, 1, 2, 3$. Para construir o Hamiltoniano do sistema é necessário definir o momento conjugado ao campo, denotado por $\pi(x)$, como segue:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)}. \tag{1.2.2}$$

Assim, o Hamiltoniano do sistema é escrito em termos do campo, sua derivada temporal, momento conjugado e a Lagrangiana $\mathcal{L}$, i.e.,

$$H = \int d^3x \; \mathcal{H}(\varphi, \pi) = \int d^3x \left[\pi(\partial_0 \varphi) - \mathcal{L}\right], \tag{1.2.3}$$

onde foi definida a densidade Hamiltoniana $\mathcal{H}(\varphi, \pi)$. A forma explicita da Langrangiana do sistema, $\mathcal{L}$, é escolhida de maneira a produzir as equações de movimento, via equações de Euler-Lagrange, que temos interesse. Aqui estamos interessados no campo escalar que obedece à equação de Klein-Gordon, tal que a Lagrangiana do sistema e o momento conjugado são escritos na seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - U(\varphi), \qquad \pi = \hbar^2 \partial_0 \varphi, \tag{1.2.4}$$

em que $U(\varphi)$ é o potencial que depende do campo e, considerando um campo massivo, deve incluir também o termo de massa. Note que a soma de Einstein para índices repetidos é aplicada e estamos no espaço tempo de Minkowski, em que a métrica possui assinatura dada por $(+, -, -, -)$. Aplicando as equações de Euler-Lagrange, isto é:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \varphi)}, \tag{1.2.5}$$

no caso do campo escalar sem interação, ou seja, o potencial é dado apenas pelo termo massivo $U(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$, vemos que o campo φ satisfaz a equação de Klein-Gordo,

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right)\varphi = \left(\Box + m^2\right)\varphi = 0, \tag{1.2.6}$$

em que escrevemos o operador D'Alembertiano $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$. Visto que o campo escalar φ satisfaz a equação acima, ele é muitas vezes chamado de campo de Klein-Gordon.

Fazendo uma analogia com a mecânica quântica, podemos escrever a amplitude de transição apresentada na Eq. (1.1.16), para o caso da teoria do campo escalar na seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\langle \varphi' \; t' \; | \varphi \; t \rangle = \int \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\pi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} d\tau \int d^3x \left[\pi\dot{\varphi} - \mathcal{H}(\varphi, \pi)\right]\right\}, \\ &\varphi(t', \mathbf{x}) = \varphi'(\mathbf{x}), \qquad \varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \qquad \dot{\varphi} = \partial_0 \varphi, \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

a qual consideramos as condições de contorno para o campo φ. A partir da equação acima, realizamos cálculos semelhantes aos feitos anteriormente no caso da mecânica quântica, para obter a integral de Feynman para a teoria do campo escalar, i.e.,

$$\langle \varphi' \; t' \; | \varphi \; t \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} d\tau \int d^3x \; \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi})\right]. \tag{1.2.8}$$

Os resultados obtidos anteriormente no contexto da mecânica quântica são generalizados para a teoria do campo escalar de forma imediata. Assim, considerando uma perturbação externa $J(x)$

que se acopla ao campo de forma usual, percebemos que os resultados das amplitudes de transição da Eq. (1.1.36), transição vácuo-vácuo da Eq. (1.1.40), bem como a relação entre a amplitude de transição vácuo-vácuo e a função de n-pontos, são generalizados para a teoria do campo escalar na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi' \ t' \ | \varphi \ t \rangle_J = \mathcal{N} \int_{\varphi}^{\varphi'} \mathcal{D}\varphi \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} d^4x \left[\mathcal{L}\left(\varphi, \dot{\varphi}\right) + J\varphi \right] \right\}, \\
&Z\left[J\right] = \langle 0 \ | 0 \rangle_J = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \left[\mathcal{L}\left(\varphi, \dot{\varphi}\right) + J\varphi \right] \right\}, \\
&\langle 0 | \, \mathrm{T}\left[\hat{\varphi}\left(x_1\right) ... \hat{\varphi}\left(x_n\right) \right] | 0 \rangle = \left(\frac{\hbar}{i} \right)^n \left. \frac{\delta^n Z\left[J\right]}{\delta J\left(x_1\right) ... \delta J\left(x_n\right)} \right|_{J=0}.
\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Evidenciamos que a diferença entre as equações escritas na primeira e segunda da Eq. (1.2.9), reside nos limites de integração. Ademais, no lado esquerdo da última linha da equação acima, usamos $\hat{\varphi}\left(x\right)$ para denotar o operador de campo escalar, que satisfaz $\hat{\varphi}\left(x\right) | \varphi \ t \rangle = \varphi\left(x\right) | \varphi \ t \rangle$.

Munidos dos conhecimentos apresentados até esta seção, estamos completamente equipados para prosseguir com exito na obtenção do propagador de Feynman, relacionado ao campo escalar quântico, bem como na obtenção das funções de n-pontos.

1.2.2 Propagador de Feynman

Conforme vimos anteriormente, para calcular a função de n-pontos devemos realizar a chamada rotação de Wick, ou seja, devemos tomar o tempo como sendo imaginário. Este procedimento remete à passagem do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano. As transformações que relacionam as coordenadas do espaço de Minkowski, x_μ, com as coordenadas do espaço Euclidiano são dadas por:

$$x_0 = -ix_4^{\mathrm{E}}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathrm{E}}, \quad p_0 = ip_4^{\mathrm{E}}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_{\mathrm{E}}. \tag{1.2.10}$$

Sendo assim, transformação no tempo é de fato a rotação de Wick discutida anteriormente. O índice E denota o espaço Euclidiano.

Vamos considerar a teoria do campo escalar massivo sem interação, ou seja, $U\left(\varphi\right) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$, no espaço Euclidiano. Por meio das transformações que relacionam o espaço de Minkowski com o espaço Euclidiano, podemos reescrever a Lagrangiana da Eq. (1.2.4) no espaço Euclidiano como segue:

$$\mathcal{L}_0^{\mathrm{E}} = -\frac{\hbar^2}{2}\partial_\mu^{\mathrm{E}}\varphi\partial_\mu^{\mathrm{E}}\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \tag{1.2.11}$$

em que usamos o subíndice zero para denotar que estamos considerando uma teoria livre, ou seja, sem interação. Similarmente, podemos reescrever a amplitude de transição vácuo-vácuo, escrita na segunda linha da Eq. (1.2.9), no espaço Euclidiano $Z_0^E\left[J\right]$. Após uma integração por partes e, desprezando o termo de superfície, podemos escrever a amplitude de transição vácuo-vácuo $Z_0^E\left[J\right]$ na forma:

$$Z_0^{\mathrm{E}}\left[J\right] = \mathcal{N}_{\mathrm{E}} \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} \int d^4x_{\mathrm{E}} \left[\frac{1}{2}\varphi\left(-\hbar^2\partial_\mu^{\mathrm{E}}\partial_\mu^{\mathrm{E}} + m^2 \right)\varphi - J\varphi \right] \right\}. \tag{1.2.12}$$

Note que realizamos a mudança $d^4x = -id^4x_{\mathrm{E}}$, que está de acordo com as transformações apresentadas na Eq. (1.2.10).

Queremos resolver a integral de trajetória e, como consequência, obter o propagador de Feynman. Os cálculos demonstrando os passos necessários para a resolução da integral de trajetória são apresentados no Apêndice 2. O resultado final toma a seguinte forma:

$$Z_0^{\mathrm{E}}[J] = \exp\left[\frac{1}{2\hbar}\int d^4x'_{\mathrm{E}} d^4x_{\mathrm{E}}\; J(x'_{\mathrm{E}})\,\Delta_F^{\mathrm{E}}(x'_{\mathrm{E}} - x_{\mathrm{E}})\,J(x_{\mathrm{E}})\right], \tag{1.2.13}$$

em que o *propagador de Feynman* no espaço Euclidiano, $\Delta_F^{\mathrm{E}}(x'_{\mathrm{E}} - x_{\mathrm{E}})$, é dado por

$$\Delta_F^{\mathrm{E}}(x'_{\mathrm{E}} - x_{\mathrm{E}}) = \int \frac{d^4p_{\mathrm{E}}}{(2\pi\hbar)^4}\frac{\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p_{\mathrm{E}}(x_{\mathrm{E}} - x'_{\mathrm{E}})\right]}{(p_{\mathrm{E}})^2 + m^2}. \tag{1.2.14}$$

Realizando uma continuação analítica para voltar ao espaço de Minkowski, obtemos a amplitude $Z_0[J]$ como segue

$$Z_0[J] = \exp\left[-\frac{i}{2\hbar}\int d^4x' d^4x\; J(x')\,\Delta_F(x' - x)\,J(x)\right], \tag{1.2.15}$$

em que a função $\Delta_F(x' - x)$ é o propagador de Feynman no espaço de Minkowski,

$$\Delta_F(x - x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4}\frac{\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p(x - x')\right]}{p^2 - m^2}. \tag{1.2.16}$$

Note que a forma final de $Z_0[J]$, apresentada na Eq. (1.2.15), é conveniente para a aplicação da derivada funcional, ou seja, podemos usar a relação da última linha de Eq. (1.2.9), para obter a função de n-pontos. Este passo é realizado a seguir.

1.2.3 Funcional gerador das funções de Green

Conhecendo a forma de $Z_0[J]$ da Eq. (1.2.15), aplicamos a derivada funcional, conforme escrito na Eq. (1.2.9), para obtermos a função de n-pontos (função de Green).

Aplicando a derivada funcional à amplitude $Z_0[J]$, resulta em uma quantidade proporcional a $J(x)$ que vai a zero, uma vez que precisamos fazer $J(x) = 0$ para obter a função de 1-ponto. Assim, vemos que a função de 1-ponto é zero, isto é, $G_0^1(x_1) = 0$. De fato, todas as funções de n-pontos, com n ímpar, resultam em zero pois todos os termos provenientes de derivadas ímpares são proporcionais à $J(x)$, ou seja, $G_0^{2m+1} = 0$, $m \in \mathbb{N}$. Novamente usamos o subíndice zero para denotar que estamos em uma teoria sem interação.

Para a função de 2-pontos, aplicamos a derivada duas vezes e tomamos $J(x) = 0$, conforme escrito na Eq. (1.2.9). Assim, obtemos $G_0^{(2)}(x_1, x_2)$ na forma:

$$G_0^{(2)}(x_1, x_2) = i\hbar\Delta_F(x_1 - x_2), \tag{1.2.17}$$

que coincide com o propagador de Feynamn escrito na Eq. (1.2.16). A próxima função diferente de zero é a função de 4-pontos, então aplicando a derivada quatro vezes e tomando $J(x) = 0$, chegaremos à expressão

$$\begin{aligned} G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (i\hbar)^2 [&\Delta_F(x_1 - x_2)\,\Delta_F(x_3 - x_4) + \\ &+\Delta_F(x_1 - x_3)\,\Delta_F(x_2 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_4)\,\Delta_F(x_2 - x_3)]. \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

Dada a forma da função $G_0^{(4)}$ obtida acima, pode ser inferido que as funções de ordem maiores de $G_0^{(2)}$, são expressas em termos de combinações das próprias funções de 2-pontos. Visto que toda informação

física reside no propagador de Feynman, i.e., as funções de 2-pontos, vemos que as funções de ordem maiores que $G_0^{(2)}$ contribuem de forma trivial.

Para eliminar as contribuições triviais das funções de n-pontos, obtendo assim apenas as funções conectadas, podemos usar um novo funcional gerador que denotaremos por $W[J]$. O funcional gerador $W[J]$ está relacionado com a amplitude de transição vácuo-vácuo, de acordo com as seguintes relações:

$$Z[J] = e^{\frac{i}{\hbar}W[J]}, \qquad Z[0] = 1, \qquad W[0] = 0. \tag{1.2.19}$$

O funcional $W[J]$ é usado para obter as funções de n-pontos conectadas (irredutíveis) $G_c^{(n)}(x_1, ..., x_n)$, por meio da derivada funcional, isto é:

$$G_c^{(n)}(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{n-1} \left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) ... \delta J(x_n)}\right|_{J=0}. \tag{1.2.20}$$

Note que o subíndice c é empregado para lembrar que estamos calculando as funções conectadas. Considerando o caso do campo escalar sem interação, vemos que a única função conectada, diferente de zero, é

$$G_{0c}^{(2)}(x_1, x_2) = \left(\frac{\hbar}{i}\right) \left.\frac{\delta^2 W_0[J]}{\delta J(x_1)\, \delta J(x_2)}\right|_{J=0} = i\hbar \Delta_F(x_1 - x_2), \tag{1.2.21}$$

que coincide com a função de 2-pontos $G_0^{(2)}(x_1, x_2)$ da Eq. (1.2.17), ou seja, com o propagador de Feynman. O subíndice de $G_{0c}^{(2)}$ identifica o caso sem interação e que temos uma função conectada e introduzimos o índice zero também no funcional $W[J]$.

Uma vez que descrevemos a teoria do campo escalar livre, podemos prosseguir e considerar uma teoria com interação, que é estabelecida por meio de um potencial que depende do campo.

1.2.4 Campo escalar com interação

Nesta seção consideramos o campo escalar com uma interação. Isso significa que, na teoria de um campo massivo, além do termo $\frac{1}{2}m\varphi^2$, adicionamos um termo que descreve o potencial devido à interação, que denotaremos por $gV(\varphi)$, em que g é a constante de acoplamento da interação e $V(\varphi)$ é um funcional que depende do campo.

Nesse caso, a Lagrangiana do sistema considerado, é escrita na seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} = \frac{\hbar^2}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - gV(\varphi). \tag{1.2.22}$$

Assim, vemos que a amplitude de transição vácuo-vácuo, na presença de uma fonte externa, pode ser escrita separando o termo de interação e termos livres, i.e.,

$$Z[J] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\varphi \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ gV(\varphi)\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4x\,(\mathcal{L}_0 + J\varphi)\right]. \tag{1.2.23}$$

A integral acima não pode ser resolvida em geral, porém é possível utilizar aproximações para estudar o sistema. Note que a exponencial que contém o termo de interação pode ser expandinda em série, ou seja,

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ gV(\varphi)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[-\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ gV(\varphi)\right]^n. \tag{1.2.24}$$

Neste ponto, assumimos que o potencial de interação $V(\varphi)$ é formado por termos de potências de $\varphi(x)$. Dessa forma, podemos escrever o integrando da Eq. (1.2.23) como uma soma de produtos

entre potências do campo $\varphi(x)$ e a $\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4x\,(\mathcal{L}_0 + J\varphi)\right]$. Além disso, o produto de potências do campo pela exponencial mencionada pode ser substituido por aplicações da derivada na exponencial, i.e.,

$$\frac{\delta^n}{\delta J^n}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4x\,(\mathcal{L}_0 + J\varphi)\right] = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \varphi^n(x)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4x\,(\mathcal{L}_0 + J\varphi)\right]. \tag{1.2.25}$$

Então, podemos substituir o campo $\varphi(x)$ contido no funcional $V(\varphi)$, pela derivada funcional $\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}$, o que permite retirar o termo de interação da integral do campo $\varphi(x)$, isto é, podemos reescrever a amplitude escrita na Eq. (1.2.23), como segue:

$$Z[J] = \mathcal{N}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int d^4x\; gV\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]\int \mathcal{D}\varphi\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4x\,(\mathcal{L}_0 + J\varphi)\right]. \tag{1.2.26}$$

Realizando a integral de trajetória da equação acima, encontramos a amplitude de transição vácuo-vácuo, na seguinte forma:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \mathcal{N}\exp\left[-\frac{ig}{\hbar}\int d^4x\; V\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right] Z_0[J], \\ \mathcal{N}^{-1} &= \exp\left[-\frac{ig}{\hbar}\int d^4x\; V\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right] Z_0[J]\Big|_{J=0}, \end{aligned} \tag{1.2.27}$$

em que usamos a condição de normalização $Z[0] = 1$ para obtermos o fator $\mathcal{N}$. Note que $Z_0[J]$ é a amplitude de transição para o caso sem interação, Eq. (1.2.15). O passo seguinte é expandir o expoente em uma série de potências na constante de acoplamento g. A série em questão é obtida no Apêndice 3, onde usamos como exemplo o campo escalar quântico, com auto-interação na forma $gV(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$.

Agora estamos bem equipados para prosseguir e entender o funcionamento do potencial efetivo. É importante mencionar que, para um estudo mais aprofundado das integrais de trajetória na teoria quântica de campos, considerando por exemplo os campos eletromagnético e fermiônico, o leitor deve consultar as referências indicadas no início deste capítulo.

1.3 Potencial efetivo

Nesta seção seguiremos os passos apresentados por Jackiw na Ref. [37], para a obtenção do potencial efetivo em termos das integrais de trajetória. Usaremos como referência também o artigo do Toms [38]. Nosso objetivo é escrever uma expansão em série de $\hbar$ para o potencial efetivo.

Iniciamos escrevendo a ação do sistema $S[\varphi, J]$, na presença de uma perturbação externa $J(x)$, na forma

$$S[\varphi, J] = \int d^4x\,[\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) + J\varphi]. \tag{1.3.1}$$

O sistema em consideração possui uma interação, ou seja, a Lagrangiana $\mathcal{L}$ contém o potencial $U(\varphi)$, que inclui enventuais termos de interação. O próximo passo é escrever a amplitude de transição vácuo-vácuo $Z[J]$, como um expoente, isto é:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[\varphi, J]\right\} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}W[J]\right\}, \tag{1.3.2}$$

em que $W[J]$ é o funcional especial usado para obter as funções de n-pontos conectadas, apresentado anteriormente na Eq. (1.2.19). Agora precisamos definir duas quantidades de interesse, sendo a

primeira delas o campo denotado por $\varphi_c(x)$, o qual vamos definir como sendo o valor esperado do operador de campo $\hat{\varphi}(x)$ no estado de vácuo, considerando a presença da perturbação $J(x)$. De fato $\varphi_c(x)$ é igual à derivada funcional de $W[J]$ com respeito à fonte $J(x)$, i.e.,

$$\varphi_c(x) = \left(\frac{\langle 0| \hat{\varphi}(x) |0\rangle}{\langle 0 |0\rangle} \right)_J = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \ \varphi(x) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S[\varphi, J] \right\}}{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S[\varphi, J] \right\}}. \tag{1.3.3}$$

A segunda quantidade de interesse é um funcional que depende exclusivamente do campo $\varphi_c(x)$, Eq. (1.3.3), denotado por $\Gamma[\varphi_c]$. Tal funcional é definido via uma transformada de Legendre da seguinte forma:

$$\Gamma[\varphi_c] = W[J] - \int d^4x \ \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} J(x) = W[J] - \int d^4x \ \varphi_c(x) J(x). \tag{1.3.4}$$

De acordo com a definição acima, podemos verificar de forma direta que, a relação

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi_c]}{\delta \varphi_c(x)} = -J(x), \tag{1.3.5}$$

entre o funcional $\Gamma[\varphi_c]$ e o campo $\varphi_c(x)$ é verdadeira. Por analogia com a relação entre a ação $S[\varphi]$ e o campo φ, a relação escrita na Eq. (1.3.5), sugere que o funcional $\Gamma[\varphi_c]$ se comporta como uma ação para o campo $\varphi_c(x)$, por este motivo o funcional $\Gamma[\varphi_c]$ é conhecido como *ação efetiva*. É pertinente apontar que a diferença entre a ação efetiva $\Gamma[\varphi_c]$ e a ação $S[\varphi]$ reside nas correções quânticas que estão contidas em $\Gamma[\varphi_c]$, enquanto que $S[\varphi]$ é uma ação clássica que não contém tais correções.

Uma vez que definimos as quantidades $\varphi_c(x)$ e $\Gamma[\varphi_c]$, devemos expandir a ação $S[\varphi, J]$, escrita na Eq. (1.3.1), em torno da solução clássica que denotaremos por $\varphi_0(x)$. Sendo que $\varphi_0(x)$ é uma solução clássica, ele deve satisfazer à relação:

$$\left. \frac{\delta S[\varphi, J]}{\delta \varphi(x)} \right|_{\varphi=\varphi_0} = 0. \tag{1.3.6}$$

A expansão do funcional $S[\varphi, J]$ em torno de $\varphi_0(x)$ é similar à expansão de uma função de várias variáveis em série de Taylor e, é dada por:

$$S[\varphi, J] = \sum_{n=0} \int ... \int d^4x_1 ... d^4x_n \frac{1}{n!} \left. \frac{\delta^{(n)} S[\varphi, J]}{\delta\varphi(x_1) ... \delta\varphi(x_n)} \right|_{\varphi=\varphi_0} [\varphi(x_1) - \varphi_0] ... [\varphi(x_n) - \varphi_0]. \tag{1.3.7}$$

O primeiro termo do somatório, isto é, o termo com $n = 0$, é a ação avaliada na solução clássica $\varphi_0(x)$, i.e., $S[\varphi_0, J]$. O segundo termo, $(n = 1)$, não contribui devido à Eq. (1.3.6).

Para escrever o termo com $n = 2$, é conveniente escrever a ação do sistema como segue:

$$S[\varphi, J] = \frac{1}{2} \int d^4x \ \varphi(x) \hat{A} \ \varphi(x) + \int d^4x \ J(x) \varphi(x), \tag{1.3.8}$$

em que $\hat{A}$ é um operador que depende da teoria considerada. Assim, aplicando a segunda derivada funcional, obtemos o termo da expansão da ação com $n = 2$ como:

$$\frac{1}{2} \int \int d^4x_1 d^4x_2 \ \phi(x_1) \left. \frac{\delta^{(2)} S[\varphi, J]}{\delta\varphi(x_1) \delta\varphi(x_2)} \right|_{\varphi=\varphi_0} \phi(x_2) = \frac{1}{2} \int d^4x \ \phi(x) \left(\hat{A} \right)_{\varphi=\varphi_0} \phi(x), \tag{1.3.9}$$

em que $\phi(x) = \varphi(x) - \varphi_0$ corresponde à flutuações quânticas. É pertinente mencionar que pode ser demonstrado que o operador $\left(\hat{A}\right)_{\varphi=\varphi_0}$ pode ser escrito como o inverso do progador de Feynman, isto é, $\left(\Delta_F^{-1}\right)_{\varphi=\varphi_0}$ [37]. O subíndice φ_0 age como um lembrete de que estamos calculando a segunda derivada com $\varphi(x) = \varphi_0$. Entretanto, no que segue vamos omitir essa notação para uma melhor visualização das equações.

Assim, considerando a expansão até $n = 2$, escrevemos a ação da Eq. (1.3.7) como a soma de dois termos:

$$S[\varphi, J] \approx S[\varphi_0, J] + \frac{1}{2}\int d^4x\ \phi(x)\,\hat{A}\,\phi(x). \tag{1.3.10}$$

Substituindo a ação acima na amplitude e transição da Eq. (1.3.2), obtemos $Z[J]$ na seguinte forma:

$$Z[J] = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[\varphi_0, J]\right\}\int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{2\hbar}\int d^4x\ \phi(x)\,\hat{A}\,\phi(x)\right]. \tag{1.3.11}$$

Note que escrevemos a integração do campo $\phi(x)$ no lugar da integração em $\varphi(x)$, pois os dois são relacionados apenas por um deslocamento designado por φ_0. Portanto, substituindo a amplitude $Z[J]$ da Eq. (1.3.11) na Eq. (1.3.2), podemos isolar a função geradora das funções de n-pontos conectadas $W[J]$, obtendo assim:

$$W[J] = -i\hbar \ln Z[J] = S[\varphi_0, J] - i\hbar \ln \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{2\hbar}\int d^4x\ \phi(x)\,\hat{A}\,\phi(x)\right]. \tag{1.3.12}$$

A Eq. (1.3.12) corresponde à expansão de $W[J]$ em série de $\hbar$ até ordem $\hbar^{(1)}$. Os termos de ordem $\hbar^{(0)}$ e ordem $\hbar^{(1)}$ são, respectivamente:

$$\begin{aligned} W^{(0)}[J] &= S[\varphi_0, J], \\ W^{(1)}[J] &= -i\hbar \ln \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{2\hbar}\int d^4x\ \phi(x)\,\hat{A}\,\phi(x)\right]. \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

O termo de ordem $\hbar^{(2)}$ é obtido de forma semelhante, porém muito mais elaborada e os passos necessários para a sua obtenção são encontrados de forma detalhada na Ref. [37]. Então, seguindo os cálculos apresentados na Ref. [37], é possível escrever o termo de ordem $\hbar^{(2)}$ na forma:

$$\begin{aligned} W^{(2)}[J] &= -i\hbar^2 \ln Z^{(2)}[J], \\ Z^{(2)}[J] &= \frac{\int \mathcal{D}\phi\ \phi(x) \exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\int d^4x\ \phi(x)\,\hat{A}\,\phi(x) + \frac{i}{\hbar}I[\varphi_0;\phi]\right\}}{\int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{2\hbar}\int d^4x\ \phi(x)\,\hat{A}\,\phi(x)\right]}. \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

A quantidade $I[\varphi_0;\phi]$ que aparece no expoente do numerador da última linha da equação acima, envolve os termos com $n = 3$ e $n = 4$ da Eq. (1.3.7). Aqui não se faz necessário apresentar este termo de forma explícita, uma vez que usaremos os gráficos de Feynman para a obtenção do termo de ordem $\hbar^{(2)}$ no potencial efetivo.

Nossa tarefa agora é escrever a ação efetiva $\Gamma[\varphi_c]$, escrita na Eq. (1.3.4), como uma série de potências de $\hbar$. Para realizar esta tarefa, devemos eliminar $J(x)$ em favor de $\varphi_c(x)$ na ação efetiva. Uma vez que o operador $\hat{A}$ e o termo $W^{(2)}$ são funcionais apenas da solução clássica φ_0, podemos fazer uma expansão de φ_0 em torno de φ_c, ou seja:

$$\varphi_0 = \varphi_c + \varphi_1. \tag{1.3.15}$$

Esta expansão resulta em vários termos quando incluímos os termos com $n > 2$ na expansão de $W[J]$ e em adição, a expansão escrita na Eq. (1.3.15). Para obter a expansão da ação efetiva $\Gamma[\varphi_c]$, até ordem $\hbar^{(1)}$, devemos substituir a expansão de $W[J]$ até $n = 2$, ou seja, a Eq. (1.3.12), na definição da ação efetiva apresentada na Eq. (1.3.4). Nesse caso, é suficiente considerar apenas uma primeira aproximação para o campo, isto é, $\varphi_0 = \varphi_c$. Assim, obtemos a ação efetiva até ordem $\hbar^{(1)}$, isto é:

$$\begin{aligned}\Gamma[\varphi_c] &= S[\varphi_c, J] - i\hbar \ln \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{2\hbar}\int d^4x\ \phi(x)\,\hat{A}\,\phi(x)\right] - \int d^4x\ \varphi_c(x)\,J(x) \\ &= S[\varphi_c] - i\hbar \ln \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{2\hbar}\int d^4x\ \phi(x)\,\hat{A}\,\phi(x)\right]. \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

Perceba que o termo que contém a fonte $J(x)$ na ação $S[\varphi_c, J]$ se cancela com o último termo da primeira linha da equação acima. Por este motivo, é comum não incluir a fonte $J(x)$ nos trabalhos que envolvem o cálculo da correção de loop usando o potencial efetivo. No trabalho do Jackiw, Ref. [37], cada termo da expansão de $\Gamma[\varphi_c]$ em torno de φ_0, é analisado separadamente e o termo de ordem $\hbar^{(2)}$ é escrito como sendo as correções de dois loops-conectados de uma partícula, onde o propagador é o propagador de Feynman Δ_F e a ação do sistema é,

$$\frac{1}{2}\int d^4x\ \phi(x)\,\hat{A}\,\phi(x) + I[\varphi_0;\phi]. \tag{1.3.17}$$

Nesse caso, conhecendo o propagador Δ_F, podemos obter o termo de ordem $O(\hbar^2)$ apenas usando as regras de Feynman da teoria sob estudo. Uma vez que a ação efetiva $\Gamma[\varphi_c]$ foi obtida, podemos seguir para o estudo do potencial efetivo.

Como é bem conhecido [48], a ação efetiva $\Gamma[\varphi_c]$ pode ser expandida como uma integral de certas quantidades relativas ao campo φ_c, i.e.,

$$\Gamma[\varphi_c] = \int d^4x\left[-V_{\text{eff}}(\varphi_c) + F(\varphi_c)\,\partial_\mu\varphi_c\partial^\mu\varphi_c + \text{derivadas superiores}\right], \tag{1.3.18}$$

em que $V_{\text{eff}}(\varphi_c)$ é denominado de *potencial efetivo*. Desse modo, se considerarmos $\varphi_c = \Phi =$ constante, os termos evolvendo as derivadas do campo vão a zero, o que permite escrever $V_{\text{eff}}(\Phi)$ em termos da ação efetiva $\Gamma[\varphi_c]$ avaliada em $\varphi_c = \Phi$, que foi expandida em uma série de $\hbar$ na equação (1.3.16). Assim, o potencial efetivo pode ser escrito como uma série de potências de $\hbar$ na seguinte forma:

$$V_{\text{eff}}(\Phi) = -\frac{1}{\Omega_4}\,\Gamma[\varphi_c]|_{\varphi_c=\Phi} = V^{(0)}(\Phi) + \hbar V^{(1)}(\Phi) + \hbar^2 V^{(2)}(\Phi) + ... \tag{1.3.19}$$

A quantidade $\Omega_4 = \int d^4x$, representa o volume do espaço tempo que depende da topologia e condições de contorno do mesmo. Comparando a Eq. (1.3.16) com a Eq. (1.3.19), podemos concluir que os termos de ordem zero $V^{(0)}(\Phi)$ e ordem um $V^{(1)}(\Phi)$, são escritos como,

$$V^{(0)}(\Phi) = -\frac{1}{\Omega_4}S[\Phi], \quad V^{(1)}(\Phi) = \frac{i}{\Omega_4}\ln\int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{i}{2\hbar}\int d^4x\ \phi(x)\,\hat{A}\,\phi(x)\right]. \tag{1.3.20}$$

O termo de ordem $\hbar^{(0)}$, isto é, $V^{(0)}(\Phi)$ é o potencial clássico ou a contribuição a nível de árvore. Note que, o fator que corresponde ao volume do espaço tempo, Ω_4, é cancelado pois a ação avaliada no campo constante Φ é

$$S[\Phi] = -\Omega_4 U(\Phi), \tag{1.3.21}$$

em que $U(\Phi)$ é o potencial que contém os termos de interação, calculado no campo constante Φ. O termo seguinte é de ordem $\hbar^{(1)}$, ou seja, $V^{(1)}(\Phi)$, é a primeira correção, ou correção de um loop, do potencial efetivo. Este termo, $V^{(1)}(\Phi)$, pode ser avaliado de diferentes maneiras, entretanto, por conveniência, escolhemos o método da função zeta de Riemann para a sua obtenção. A função zeta usada para o cálculo da primeira correção é construída a partir dos autovalores do operador $\hat{A}$, que depende da forma da ação da teoria e foi escrito na Eq. (1.3.9). Além disso, trabalharemos no espaço Euclidiano, uma vez que se faz necessário a aplicação da rotação de Wick. O termo de ordem $\hbar^{(2)}$, isto é, $V^{(2)}(\Phi)$, é calculado de forma mais conveniente usando os gráficos em conjunto com as regras de Feynman da teoria considerada. Este termo contém as derivadas de ordem três e quatro da ação, ou seja, os termos com $n = 3$ e $n = 4$ da Eq. (1.3.7). Sendo que estamos interessados no estado de vácuo, apenas um gráfico fornece uma contribuição não trivial e esta contribuição será obtida também por intermédio da função zeta mencionada.

Com a escolha da teoria do campo escalar quântico, podemos considerar diferentes situações de condições de contorno e topologia do espaço e usar o potencial efetivo para calcular a densidade de energia de Casimir, bem como investigar a geração da massa topológica. Devemos adiantar que, após a obtenção do potencial efetivo como um série de $\hbar$, devemos renormalizá-lo. Após realizar o processo de renormalização, obtemos o potencial efetivo renormalizado, denotado por $V^{R}_{\text{eff}}(\Phi)$, que fornece a densidade de energia de Casimir e sua correção de loop, quando calculado no estado de vácuo. $V^{R}_{\text{eff}}(\Phi)$ fornece ainda a massa topológica, quando aplicamos a condição de renormalização relativa à massa. O processo de renormalização e suas condições serão descritos no próximo capítulo, em que consideramos um campo escalar que obedece a condição de contorno tipo hélice.

Capítulo 2

Correção de loop para a densidade de energia de Casimir escalar e geração da massa topológica devido à condição de contorno tipo hélice

No presente capítulo, a abordagem em termos do potencial efetivo na teoria quântica de campos é usada para investigar as correções de auto-interação na densidade de energia de Casimir e na geração da massa topológica para campos escalares reais, massivos e não massivos. É assumido que o campo escalar obedece à condição de contorno tipo hélice. Para o sistema considerado, foram obtidas expressões analíticas para a correção de loop da densidade de energia de Casimir, bem como para a massa do campo escalar. Para uma melhor visualização de como a correção de loop afeta a densidade de energia de Casimir e a massa do campo escalar, alguns gráficos são exibidos. Devemos mencionar que os resultados apresentados neste capítulo foram publicados na Ref. [52].

Doravante, usaremos as conhecidas unidades naturais, que são defininas de forma que a constante de Planck e a velocidade da luz são igualadas à unidade, i.e., $\hbar = c = 1$. Além disso, por conveniência, trabalharemos no espaço tempo Euclidiano de quatro dimensões, em que a assinatura da métrica é dada por $(-,-,-,-)$.

2.1 Campo escalar auto-interagente

Nesta seção, revisamos de forma breve, alguns aspectos importantes do modelo de um campo escalar real e, posteriormente, o formalismo do potencial efetivo para as correções de loop para a densidade de energia de Casimir que, no caso em consideração, será tomada até a segunda ordem. Assim, considerando um campo escalar massivo φ, no espaço tempo Euclidiano de quatro dimensões, a ação que descreve o modelo, incluindo o termo de auto-interação, é escrita na forma [38],

$$S_{\mathrm{E}}\left[\varphi\right] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2}(\partial^\mu\varphi)(\partial_\mu\varphi) - U\left(\varphi\right)\right], \tag{2.1.1}$$

em que $U\left(\varphi\right)$ é o potencial clássico. O potencial do sistema, inclui o termo massivo, o termo de auto-interação e os contra-termos de renormalização. Explicitamente, escrevemos o potencial como:

$$U\left(\varphi\right) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{C_1}{4!}\varphi^4 + \frac{C_2}{2}\varphi^2 + C_3, \tag{2.1.2}$$

em que m é a massa do campo escalar, λ é a constante de acoplamento da auto-interação e C_i são as constantes de renormalização que serão obtidas posteriormente no processo de renormalização do potencial efetivo.

A abordagem das integrais de trajetória que leva à construção do potencial efetivo foi descrita no capítulo anterior e pode ser encontrada de forma detalhada nas Refs. [38, 50, 48] (veja também [39, 43]). Todavia, para a conveniência do leitor, vamos destacar alguns passos importantes do procedimento. A construção do potencial efetivo, $V_{\text{eff}}(\Phi)$, é realizada permitindo que o campo φ possa flutuar em torno de um campo de fundo fixo Φ, isto é, $\varphi = \Phi + \phi$, com ϕ representado as flutuações quânticas. Considerando a expansão do potencial efetivo até segunda ordem, podemos escrever:

$$V_{\text{eff}}(\Phi) = V^{(0)}(\Phi) + V^{(1)}(\Phi) + V^{(2)}(\Phi). \tag{2.1.3}$$

O termo de ordem zero do potencial efetivo, $V^{(0)}(\Phi)$, é apenas o potencial clássico, isto é, a contribuição a nível de árvore para o potencial efetivo. Conforme visto na Eq. (1.3.21), o termo $V^{(0)}(\Phi)$ corresponde à ação tomada no campo de fundo fixo Φ, i.e.,

$$V^{(0)}(\Phi) = -\frac{1}{\Omega_4} S[\Phi] = U(\Phi). \tag{2.1.4}$$

Lembramos que o campo Φ é constante, então o termo com derivadas do campo não contribui para $V^{(0)}(\Phi)$ acima.

O termo seguinte, $V^{(1)}(\Phi)$, é a correção de um loop do potencial clássico e pode ser escrito em termos da integral de trajetória no espaço Euclidiano [38]. A amplitude de transição Eq. (1.3.2), no espaço Euclidiano, possui a seguinte forma:

$$Z_{\text{E}}[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{(\varphi, J) + S_{\text{E}}[\varphi]\right\} = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-\int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(-\Box)\varphi + U(\varphi) - J\varphi\right]\right\}, \tag{2.1.5}$$

em que usamos a notação

$$(\varphi, J) = \int d^4x \; J(x)\varphi(x), \tag{2.1.6}$$

e $\Box$ é o operador D'Alembertiano escrito em coordenadas Euclidianas, isto é:

$$\Box = \partial_\tau^2 + \boldsymbol{\nabla}^2. \tag{2.1.7}$$

Sendo assim, a segunda igualdade da Eq. (2.1.5) é obtida após uma integração por partes do termo cinético da ação $S_{\text{E}}[\varphi]$, em que o termo de superfície é desprezado. De acordo com as Eqs. (1.3.9) e (1.3.20), precisamos calcular a segunda derivada do expoente da Eq. (2.1.5), para prosseguir com a obtenção da correção de um loop. Assim, aplicando a segunda derivada no expoente da Eq. (2.1.5), que é de fato a ação do sistema, obtemos

$$\frac{1}{2}\int\int d^4x_1 d^4x_2 \; \varphi(x_1) \left.\frac{\delta^{(2)} S_{\text{E}}[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\,\delta\varphi(x_2)}\right|_{\varphi=\Phi} \varphi(x_2) = -\frac{1}{2}\int d^4x \; \varphi(x)\left[U''(\Phi) - \Box\right]\varphi(x), \tag{2.1.8}$$

em que $U''(\Phi)$ é a segunda derivada do potencial clássico com respeito ao campo φ, calculado no campo de fundo fixo Φ. Note que na equação acima escrevemos o campo φ no lugar das flutuações ϕ, pois iremos realizar a integral de trajetória, tornando o campo ϕ em uma variável de integração, conforme foi mencionado abaixo da Eq. (1.3.11). Assim, podemos escrever a correção de um loop do potencial efetivo como segue:

$$V^{(1)}(\Phi) = -\frac{1}{\Omega_4}\ln\int \mathcal{D}\varphi \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^4x \; \varphi(x)\,\hat{A}_{\text{E}}\,\varphi(x)\right], \tag{2.1.9}$$

em que o operador elíptico auto-adjunto $\hat{A}_{\mathrm{E}}$ é definido via

$$\hat{A}_{\mathrm{E}} = U''(\Phi) - \Box. \tag{2.1.10}$$

O termo Ω_4 é o volume 4-dimensional do espaço tempo Euclidiano, que leva em consideração a topologia do espaço. Observe que a diferença entre as equações (1.3.20) e (2.1.9) reside no fato de que a primeira está escrita no espaço tempo de Minkowski, enquanto que a última está escrita no espaço tempo Euclidiano. O subíndice E no operador $\hat{A}_{\mathrm{E}}$ escrito na Eq. (2.1.10) foi colocado para evidenciar que existe uma diferença entre $\hat{A}_{\mathrm{E}}$ e o operador $\hat{A}$ que aparece no último termo da Eq. (1.3.20). Logicamente as duas expressões, Eqs. (1.3.20) e (2.1.9), resultam na mesma correção. No que segue, omitimos o subíndice E do operador $\hat{A}_{\mathrm{E}}$, uma vez que estamos trabalhando apenas no espaço tempo Euclidiano. Conforme mencionado anteriormente, o formalismo Eucliando é obtido quando fazemos uma rotação de Wick na coordenada t de tempo, introduzindo a coordenada de tempo imaginário τ, isto é, $t = -i\tau$ [9, 53].

Para escrever a correção de um loop $V^{(1)}(\Phi)$ do potencial clássico de uma forma prática e conveniente, seguimos os passos apresentados na Ref. [38]. Dessa forma, assumimos que o operador $\hat{A}$, apresentado na Eq. (2.1.10), possui um conjunto completo de autofunções e autovalores que são designados, respectivamente, por:

$$\{\phi_\sigma(x)\}, \quad \{\alpha_\sigma\}. \tag{2.1.11}$$

Visto que as autofunções $\phi_\sigma(x)$ formam um conjunto completo, podemos escrever o campo $\varphi(x)$ como uma combinação linear das autofunções $\phi_\sigma(x)$, i.e.,

$$\varphi(x) = \sum_\sigma c_\sigma \phi_\sigma(x), \tag{2.1.12}$$

em que c_σ são coeficientes de decomposição. Note que o diferencial funcional $\mathcal{D}\varphi$, da integral de trajetória da Eq. (2.1.9) é modificado levando em consideração a Eq. (2.1.12) e, pode ser escrito na forma:

$$\mathcal{D}\varphi = \prod_\sigma \frac{\mu}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} dc_\sigma. \tag{2.1.13}$$

O fator μ na Eq. (2.1.13) tem dimensão de massa e representa uma medida no espaço funcional. Este fator será removido durante o processo de renormalização do potencial efetivo. Substituindo as expressões (2.1.12) e (2.1.13) na Eq. (2.1.9), obtemos a correção de um loop do potencial efetivo como segue:

$$V^{(1)}(\Phi) = -\frac{1}{\Omega_4} \ln \int \prod_\sigma \frac{\mu}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} dc_\sigma \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_\sigma c_\sigma^2 \alpha_\sigma\right). \tag{2.1.14}$$

Nesse contexto a integral presente no lado direito da Eq. (2.1.14) é uma Gaussiana, podendo então ser realizada facilmente. Após a integração Gaussiana obtemos o seguinte resultado para a correção de um loop,

$$V^{(1)}(\Phi) = -\frac{1}{\Omega_4} \ln \prod_\sigma \left(\frac{\mu}{\sqrt{\alpha_\sigma}}\right), \tag{2.1.15}$$

ou, de uma forma mais conveniente:

$$V^{(1)}(\Phi) = \frac{1}{2\Omega_4} \sum_\sigma \ln\left(\frac{\alpha_\sigma}{\mu^2}\right). \tag{2.1.16}$$

Pode ser demonstrado de forma direta que a correção de um loop, Eq. (2.1.16), pode ser escrita em termos da função zeta de Riemann generalizada $\zeta(s)$ [38, 53], que é construída a partir dos autovalores α_σ do operador $\hat{A}$, apresentados na Eq. (2.1.11), i.e.,

$$\zeta(s) = \sum_\sigma \alpha_\sigma^{-s}. \tag{2.1.17}$$

Note que o índice σ presente no somatório na equação acima representa um conjunto de números quânticos associados às autofunções $\phi_\sigma(x)$ do operador $\hat{A}$. Note também que o sinal de soma na Eq. (2.1.17) pode representar uma soma ou uma integral, dependendo se os autovalores são discretos ou contínuos, respectivamente. Calculando a derivada de $\zeta(s)$ com respeito a s e somando o resultado com o produto da própria função $\zeta(s)$ por $\ln\mu^2$, ambas tomadas no ponto $s = 0$, obtemos

$$\zeta'(0) + \zeta(0)\ln\mu^2 = -\sum_\sigma \ln\left(\frac{\alpha_\sigma}{\mu^2}\right). \tag{2.1.18}$$

Logo, comparando a Eq. (2.1.18) com a Eq. (2.1.16), vemos que a correção de um loop para o potencial efetivo, $V^{(1)}(\Phi)$, pode ser escrito na seguinte forma:

$$V^{(1)}(\Phi) = -\frac{1}{2\Omega_4}\left[\zeta'(0) + \zeta(0)\ln\mu^2\right]. \tag{2.1.19}$$

Lembramos que o termo μ será removido durante o processo de renormalização.

Por razões práticas, a contribuição de dois loops para o potencial efetivo é calculada a partir dos gráficos de dois loops e pode também ser escrita em termos da função zeta generalizada $\zeta(s)$, se estamos interessados em calcular a contribuição em $\Phi = 0$, que é de fato a contribuição do estado de vácuo para o modelo considerado [39, 43]. Vamos adiar a escrita da forma explícita da contribuição de dois loops até a sua investigação.

Após obter a correção de primeira ordem ou correção de um loop, escrita na Eq. (2.1.19), escrevemos o potencial efetivo até correção de um loop e devemos efetuar sua renormalização. O processo de renormalização do potencial efetivo consiste em aplicar as correspondentes condições de renormalização. A condição de renormalização que permite remover o termo $\zeta(0)\ln\mu^2$ da Eq. (2.1.19) e, além disso, fixar a constante C_1 na Eq. (2.1.2) e a constante de acoplamento λ, é escrita seguindo a prescrição de Coleman-Weinberg [54]. Explicitamente, essa condição é escrita na forma:

$$\left.\frac{d^4V_{\text{eff}}}{d\Phi^4}\right|_{\Phi=0} = \lambda. \tag{2.1.20}$$

Observe que considerando uma teoria de campo escalar sem massa, a constante λ deve ser fixada a uma certa escala de energia, isto é, $\Phi = M$ [38, 43].

A condição que fixa a constante C_2 da Eq. (2.1.2) e possibilita a obtenção da massa topológica é escrita como:

$$\left.\frac{d^2V_{\text{eff}}}{d\Phi^2}\right|_{\Phi=0} = m^2. \tag{2.1.21}$$

Logicamente, a condição expressa na Eq. (2.1.21) deve ser positiva, visto que ela é associada com a massa do campo escalar que constitui o sistema considerado. A Eq. (2.1.21) também fornece a massa topológica adquirida pelo campo, quando usamos o potencial efetivo renormalizado, que denotaremos por V_{eff}^R, no lugar de V_{eff}. Deve-se destacar que o valor zero para o campo fixo, $\Phi = 0$,

na Eq. (2.1.21), é o valor que minimiza o potencial efetivo e, representa o mínimo do potencial se ele obedece à seguinte condição de extremo:

$$\left.\frac{dV_{\text{eff}}}{d\Phi}\right|_{\Phi=0} = 0. \tag{2.1.22}$$

O mínimo do potencial efetivo em $\Phi = 0$ é exatamente o estado de vácuo que estamos interessados para calcular a energia de vácuo, suas correções de loop e a geração da massa topológica.

Por fim, para obtermos a constante de renormalização C_3, devemos usar uma condição de renormalização adicional [39], que é escrita como:

$$V_{\text{eff}}|_{\Phi=0} = 0. \tag{2.1.23}$$

É importante destacar que as condições de renormalização apresentadas nas Eqs. (2.1.20), (2.1.21) e (2.1.23), devem ser aplicadas no limite do espaço tempo de Minkowski, ou seja, o espaço plano sem restrições.

Com as ferramentas necessárias descritas na presente seção, podemos seguir para a investigação das correções de loop do potencial clássico e a geração da massa topológica, considerando que o campo escalar está sujeito à condição de contorno tipo hélice.

2.2 Condição de contorno tipo hélice no espaço tempo de Minkowski

Até aqui, nossa discussão e especificações do sistema são válidas para um campo escalar massivo, com auto-interação descrita pelo termo $\frac{\lambda}{4!}\varphi^4$ da Eq. (2.1.2). Nesta seção, devemos impor ao campo escalar a condição de contorno tipo hélice e investigar as correções de loop do potencial efetivo até segunda ordem. A condição de contorno tipo hélice, imposta ao campo escalar, dá origem à densidade de energia de Casimir. Em ordem zero da constante de acoplamento, ou seja, $\lambda^{(0)}$, a densidade de energia de Casimir é gerada pela primeira correção de loop do potencial efetivo. Então, considerando a ordem zero, $\lambda^{(0)}$, verificaremos que os resultados para o campo escalar com massa e sem massa estão de acordo com os resultados obtidos nas Refs. [9, 33, 34, 35], onde foram usadas diferentes abordagens da usada aqui, para a obtenção da densidade de energia de Casimir. Junto a isso, avaliamos a correção de segunda ordem para o potencial efetivo, isto é, a correção para a densidade de energia de Casimir de ordem $\lambda^{(1)}$, que surge devido a auto-interação considerada na Eq. (2.1.2). A geração de uma correção de ordem $\lambda^{(1)}$ para a massa é também obtida de forma analítica.

O conjunto de autofunções do operador $\hat{A}$, apresentado na Eq. (2.1.10), denotado por $\{\phi_\sigma\}$, deve satisfazer à equação de autovalor $\hat{A}\phi_\sigma = \alpha_\sigma\phi_\sigma$ considerando a condição tipo hélice abaixo:

$$\phi\left(\tau, x + a, y, z\right) = \phi\left(\tau, x, y + h, z\right). \tag{2.2.1}$$

Note que o parâmetro h representa o passo da hélice, enquanto que o parâmetro a representa o comprimento de sua circunferência. Assim, levando em consideração a condição acima, vemos que as autofunções devem ser escritas da seguinte forma:

$$\phi_\sigma = Ne^{-ik_\tau\tau + ik_x x + ik_y y + ik_z z}, \tag{2.2.2}$$

em que N é a constante de normalização[1]. Perceba que, a condição de contorno tipo hélice impõe um vínculo entre os momentos das direções x e y, ou seja, k_x e k_y. A condição de vínculo é dada por

[1] A constante de normalização N é irrelevante para os nossos estudos, mas sua forma explícita pode ser encontrada na Ref. [9].

$k_x a - k_y h = 2\pi n$, com $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$ [9, 33, 34, 35]. Então, os autovalores α_σ, do operador $\hat{A}$ da Eq. (2.1.10), são dados por:

$$\alpha_\sigma = k_\tau^2 + k_z^2 + k_x^2 + \left(\frac{k_x a}{h} - \frac{2\pi n}{h}\right)^2 + M_\Phi^2, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, ..., \tag{2.2.3}$$

em que $M_\Phi^2 = m^2 + \frac{\lambda}{2}\Phi^2$ é proveniente da segunda derivada do potencial, isto é, $U''(\Phi) = M_\Phi^2$, escrita na definição do operador $\hat{A}$, Eq. (2.1.10). Nesse estágio, não consideramos as constantes de renormalização no potencial clássico. O índice σ na equação acima representa um conjunto de números quânticos dados por $\sigma = (k_\tau, k_x, k_z, n)$. Para construir a função zeta de Riemann generalizada a partir dos autovalores apresentados na Eq. (2.2.3) e obter uma forma prática da referida função, seguimos os passos apresentados nas Refs. [39, 43].

2.2.1 Potencial efetivo até correção de um loop

Conhecendo os autovalores α_σ, escritos na Eq. (2.2.3), podemos construir a função zeta de Riemann generalizada, Eq. (2.1.17). Lembrando que nas variáveis contínuas devemos substituir o somatório por uma integral, vemos que a função zeta generalizada toma a seguinte forma:

$$\zeta(s) = \frac{\Omega_3}{(2\pi)^3}\int dk_\tau\, dk_x\, dk_z \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[k_\tau^2 + k_z^2 + k_x^2 + \left(\frac{k_x a}{h} - \frac{2\pi n}{h}\right)^2 + M_\Phi^2\right]^{-s}. \tag{2.2.4}$$

Note que Ω_3 é o elemento de volume de três dimensões, associado às coordenadas τ, x, z, necessário para fazer as integrais adimensionais. Devemos enfatizar que a condição de contorno tipo hélice impõe a condição de vínculo $k_x a - k_y h = 2\pi n$, o que permite escrever o momento na direção y como segue:

$$k_y = \frac{k_x a}{h} - \frac{2\pi n}{h}. \tag{2.2.5}$$

Entretanto, é possível também escrever k_x em termos de k_y. No apêndice escrito ao final deste capítulo, essa possibilidade de escrita do momento e a consequência para o elemento de volume do espaço são discutidas com detalhes. No que segue, escolhemos escrever o momento k_y em termos de k_x, conforme a Eq. (2.2.5).

A função zeta generalizada, escrita na Eq. (2.2.4), é simplificada com o uso da identidade abaixo

$$w^{-s} = \frac{2}{\Gamma(s)}\int_0^\infty d\tau\ \tau^{2s-1}e^{-w\tau^2}, \tag{2.2.6}$$

o que resulta na seguinte expressão:

$$\zeta(s) = \frac{2\Omega_3}{(2\pi)^3\Gamma(s)}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty d\tau\ \tau^{2s-1}\int d^3k \exp\left\{-\left[k^2 + \left(\frac{k_x a}{h} - \frac{2\pi n}{h}\right)^2 + M_\Phi^2\right]\tau^2\right\}. \tag{2.2.7}$$

Nessa conjuntura, utilizamos a notação $d^3k = dk_\tau\, dk_x\, dk_z$ e $k^2 = k_\tau^2 + k_z^2 + k_x^2$ na equação acima. As integrais em k_τ, k_x e k_z, são Gaussianas e podem ser resolvidas de forma direta. Assim, após a realização das integrais Gaussianas, obtemos a função zeta generalizada na forma:

$$\zeta(s) = \frac{\Omega_4}{(2\pi)^2 d}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(s)}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty d\tau\ \tau^{2s-4}\exp\left[-\tau^2\left(M_\Phi^2 + \frac{4\pi^2}{d^2}n^2\right)\right]. \tag{2.2.8}$$

Na passagem da função zeta escrita na Eq. (2.2.7) para a Eq. (2.2.8), foi definido o volume 4-dimensional $\Omega_4 = \Omega_3 h$ levando em consideração a topologia do espaço tempo. Além disso, foi definida também a quantidade d, dada pela seguinte relação:

$$d^2 = a^2 + h^2. \tag{2.2.9}$$

A função zeta escrita na Eq. (2.2.8), está em uma forma bem adequada para a identificação da representação integral da função gamma $\Gamma(z)$ [55],

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty d\mu\ \mu^{2z-1}e^{-\mu^2}. \tag{2.2.10}$$

Então, utilizando a representação da função gamma acima, é possível reescrever a função $\zeta(s)$ da Eq. (2.2.8), em termos apenas da soma em n, ou seja:

$$\zeta(s) = \frac{\Omega_4 \pi^{\frac{1}{2}}}{2\,(2\pi)^{2s-1}\,d^{4-2s}}\frac{\Gamma\left(s-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s)}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{M_\Phi d}{2\pi}\right)^2 + n^2\right]^{\frac{3}{2}-s}. \tag{2.2.11}$$

O último termo do lado direito da Eq. (2.2.11) envolve apenas a soma em n. Para efetuar o somatório em n e escrever a função zeta de uma forma mais prática, utilizamos a seguinte continuação analítica da função generalizada e não homogênea de Epstein [56, 46]:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[(n+\vartheta)^2+\kappa^2\right]^{-z} &= \pi^{\frac{1}{2}}\kappa^{1-2z}\frac{\Gamma\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(z)} + \\ &+\frac{4\pi^z\kappa^{\frac{1}{2}-z}}{\Gamma(z)}\sum_{j=1}^{\infty} j^{z-\frac{1}{2}}\cos(2\pi j\vartheta)\,K_{\left(\frac{1}{2}-z\right)}(2\pi j\kappa),\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

considerando $\vartheta = 0$. A função $K_\mu(x)$, presente no lado direito da equação acima, é a função de Bessel modificada do segundo tipo ou, como é bem conhecida na literatura, a função de Macdonald [55]. Após a realização da soma em n via definição apresentada na Eq. (2.2.12), obtemos a função zeta generalizada da Eq. (2.2.11), em uma forma prática e conveniente, escrita explicitamente na seguinte forma:

$$\zeta(s) = \frac{\Omega_4 M_\Phi^{4-2s}}{16\pi^2}\frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)} + \frac{\Omega_4}{2^s\pi^2\Gamma(s)}\left(\frac{M_\Phi}{d}\right)^{2-s}\sum_{j=1}^{\infty} j^{s-2}K_{(2-s)}(jM_\Phi d). \tag{2.2.13}$$

A partir da expressão da função zeta generalizada apresentada na Eq. (2.2.13), podemos calcular a corrreção de um loop, Eq. (2.1.19), para o potencial efetivo. Conforme escrito na Eq. (2.1.19), para obter a correção de um loop, é necessário calcular a função zeta generalizada, Eq. (2.2.13), e sua derivada com respeito a s, no ponto $s = 0$. Então, considerando a função zeta generalizada no ponto $s = 0$, obtemos um resultado finito que é proveniente do primeiro termo do lado direito da Eq. (2.2.13). O segundo termo vai a zero pois $\lim_{s\to 0} 1/\Gamma(s) \to 0$. Assim, a função zeta generalizada calculada no ponto $s = 0$ resulta na seguinte expressão:

$$\zeta(0) = \frac{\Omega_4 M_\Phi^4}{32\pi^2}. \tag{2.2.14}$$

O resultado obtido na equação acima é consistente com os trabalhos apresentados nas Refs. [38, 39, 43]. Note que o primeiro termo do lado direito da Eq. (2.2.13) é o responsável pela contribuição de

Minkowski, o que pode ser percebido pois este termo será dividido por Ω_4 na escrita da correção de um loop, não dependendo do parâmetro d relacionado à condição de contorno tipo hélice. Por isso, deve ser esperado que a expressão acima para $\zeta(0)$, seja removida no processo de renormalização quando calcularmos a constante C_1, por meio da condição apresentada na Eq. (2.1.20). Então, podemos concluir que a Eq. (2.2.14) fornece uma contribuição independente da condição de contorno para o potencial efetivo da Eq. (2.1.3), quando tomamos o limite de Minkowski, isto é, $d \to \infty$. A derivada da função zeta da Eq. (2.2.13), com respeito a s, tomada no ponto $s = 0$, resulta na expressão

$$\zeta'(0) = -\frac{\Omega_4 M_\Phi^4}{32\pi^2}\left[\ln(M_\Phi^2) - \frac{3}{2}\right] + \frac{\Omega_4 M_\Phi^4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty} f_2\left(jdM_\Phi\right), \tag{2.2.15}$$

em que definimos a função $f_\gamma(x)$ de acordo com a relação que segue:

$$f_\gamma(x) = \frac{K_\gamma(x)}{x^\gamma}. \tag{2.2.16}$$

Observe que na Eq. (2.2.15) os termos provenientes da derivada

$$\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{M_\Phi}{d}\right)^{2-s}\sum_{j=1}^{\infty} j^{s-2}K_{(2-s)}\left(jM_\Phi d\right)\right]\Bigg|_{s=0}, \tag{2.2.17}$$

não se fazem presente. Isso se deve ao limite $\lim_{s\to 0} 1/\Gamma(s) \to 0$ e sendo a derivada de K_γ com respeito a sua ordem uma função finita, como podemos confirmar a partir da seguinte expressão:

$$\left.\frac{\partial K_\gamma(z)}{\partial\gamma}\right|_{\gamma=n} = \frac{n!}{2\left(\frac{z}{2}\right)^n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^m K_m(z)}{m!\,(n-m)}. \tag{2.2.18}$$

A Eq. (2.2.15) nos diz que a derivada da função zeta calculada no ponto $s = 0$, isto é, $\zeta'(0)$, depende diretamente do parâmetro d relacionado à condição de contorno tipo hélice, descrita na Eq. (2.2.1). Então, podemos inferir que $\zeta'(0)$ é o termo que contribui de forma não trivial para o potencial efetivo após o processo de renormalização.

Substituindo as expressões apresentadas nas Eqs. (2.2.14) e (2.2.15) diretamente na Eq. (2.1.19), encontramos a correção de um loop, ou seja, a correção de primeira ordem para o potencial efetivo na forma:

$$V^{(1)}(\Phi) = \frac{M_\Phi^4}{64\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_\Phi^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2}\right] - \frac{M_\Phi^4}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty} f_2\left(jM_\Phi d\right). \tag{2.2.19}$$

Tendo obtido a correção de primeira ordem $V^{(1)}(\Phi)$, Eq. (2.2.19), conhecendo o potencial clássico, escrito na Eq. (2.1.2), em conjunto com a correção de ordem zero $V^{(0)}(\Phi)$ da Eq. (2.1.4), podemos escrever o potencial efetivo não renormalizado, até a correção de primeira ordem como segue

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\Phi) = {} & \frac{\lambda}{4!}\Phi^4 + \frac{C_1}{4!}\Phi^4 + \frac{m^2}{2!}\Phi^2 + \frac{C_2}{2!}\Phi^2 + C_3 + \\ & + \frac{M_\Phi^4}{64\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_\Phi^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2}\right] - \frac{M_\Phi^4}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty} f_2\left(jM_\Phi d\right). \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Observe que incluímos as constantes de renormalização na equação acima. Uma vez conhecido o potencial efetivo não renormalizado, nossa tarefa é a renormalização do mesmo. Este passo é realizado a seguir.

O processo de renormalização consiste em encontrar as constantes de renormalização C_1, C_2 e C_3 via condições apresentadas nas Eqs. (2.1.20), (2.1.21) e (2.1.23). Desse modo, para calcular a constante C_1, devemos usar a condição de renormalização expressa na Eq. (2.1.20), considerando o limite do espaço de Minkowski, isto é, $d \to \infty$ [38, 39, 43]. Note que, no limite com $d \to \infty$, o último termo da Eq. (2.2.20) vai a zero. Assim, após a aplicação da condição (2.1.20), C_1 é obtido explicitamente na forma,

$$\frac{C_1}{4!} = \frac{\lambda^2}{256\pi^2} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right). \tag{2.2.21}$$

Posto isto, a constante C_1 é a responsável por subtrair o termo que contém $\ln(\mu^2)$ vindo da função zeta generalizada escrita na Eq. (2.1.19). Similarmente, as condições expressas nas Eqs. (2.1.21) e (2.1.23), fornecem as constantes C_2 e C_3. Explicitamente, obtemos essas constantes como

$$\frac{C_2}{2!} = \frac{\lambda m^2}{64\pi^2} + \frac{\lambda m^2}{64\pi^2} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right), \tag{2.2.22}$$

e

$$C_3 = \frac{3m^4}{128\pi^2} + \frac{m^4}{64\pi^2} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right). \tag{2.2.23}$$

O próximo passo do processo de renormalização é substituir as constantes de renormalização que acabamos de encontrar no potencial efetivo da Eq. (2.2.20). Após substituição das constantes no potencial e realizando algumas simplificações que requerem pura álgebra, podemos escrever o potencial efetivo renormalizado na seguinte forma:

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^{R}(\Phi) = {} & \frac{\lambda}{4!}\Phi^4 + \frac{m^2}{2!}\Phi^2 + \frac{\lambda m^2 \Phi^2}{64\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_\Phi^2}{m^2}\right) - \frac{1}{2}\right] + \\ & + \frac{m^4}{64\pi^2}\ln\left(\frac{M_\Phi^2}{m^2}\right) + \frac{\lambda^2\Phi^4}{256\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_\Phi^2}{m^2}\right) - \frac{3}{2}\right] - \frac{M_\Phi^4}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty} f_2\left(jM_\Phi d\right). \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

A expressão para o potencial efetivo renormalizado $V_{\text{eff}}^{R}(\Phi)$ até correção de um loop, Eq. (2.2.24), claramente apresenta uma dependência no parâmetro da condição de contorno tipo hélice, isto é, $d = \sqrt{a^2 + h^2}$, que afeta o último termo da segunda linha da Eq. (2.2.24). Este termo vai a zero no limite do espaço de Minkowski, i.e., $d \to \infty$, permanecendo apenas o bem conhecido potencial efetivo renormalizado de Coleman-Weinberg. É fácil perceber este fato se usarmos o limite assimptótico para grandes argumentos da função de Macdonald, isto é, $K_\mu(w) \simeq \left(\frac{\pi}{2w}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-w}$ [55].

Uma vez conhecida a forma explícita do potencial efetivo renormalizado $V_{\text{eff}}^{R}(\Phi)$, obtida na Eq. (2.2.24), prosseguimos para o cálculo da densidade de energia de Casimir, esta é obtida de forma direta se conhecemos o estado de vácuo, que no caso considerado, é dado por $\Phi = 0$, como foi antecipado abaixo da Eq. (2.1.22). Assim, tomando o potencial efetivo no estado de vácuo, obtemos a densidade de energia de Casimir na forma:

$$\mathcal{E}_{\text{C}} = V_{\text{eff}}^{R}(\Phi)\big|_{\Phi=0} = -\frac{m^4}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty} f_2\left(jmd\right). \tag{2.2.25}$$

Então, concluímos que usando a abordagem do potencial efetivo, o fenômeno do efeito Casimir surge diretamente da primeira correção quântica do potencial efetivo, que é de ordem zero na constante de acoplamento, ou seja, $\lambda^{(0)}$, como deve ser.

A partir do resultado obtido na Eq. (2.2.25) para a densidade de energia de Casimir, podemos considerar o caso de um campo escalar não massivo, auto-interagente e sujeito à condição de contorno tipo hélice. Nesse caso, a densidade de energia de Casimir é encontrada facilmente considerando o limite de pequenos argumentos da função de Macdonald, isto é, $K_{\mu}(x) \approx \frac{\Gamma(\mu)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^{\mu}$ [55]. Assim, para um campo escalar sem massa, a densidade de energia de Casimir é obtida como

$$\mathcal{E}_{\mathrm{C}} = -\frac{m^4}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Gamma(2)}{2(jmd)^2}\left(\frac{2}{jmd}\right)^2 = -\frac{1}{\pi^2 d^4}\sum_{j=1}^{\infty} j^{-4}, \tag{2.2.26}$$

ou seja,

$$\mathcal{E}_{\mathrm{C}} = -\frac{\pi^2}{90d^4}. \tag{2.2.27}$$

Para obter o resultado acima, devemos usar o seguinte valor da função zeta de Riemann usual $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, [56, 57]. Os resultados apresentados nas Eqs. (2.2.25) e (2.2.27) para as densidades de energia de Casimir estão de acordo com os resultados apresentados nas Refs. [9, 33, 34, 35], onde foram obtidos por métodos diferentes dos aplicados aqui.

Estamos interessados em calcular a correção de loop para as densidades de energia (2.2.25) e (2.2.27). Para tanto, precisamos obter a correção de dois loops do potencial efetivo escrito na Eq. (2.2.20). No caso considerado, essa correção surge por conta da influência da condição de contorno tipo hélice. Antes de explorar a correção de dois loops do potencial efetivo, vamos investigar outro fenômeno interessante que é a influência das condições de contorno na massa m, do campo escalar auto-interagente, até correção de um loop. Usando a condição de renormalização que é associada à massa do sistema, escrita na Eq. (2.1.21), em conjunto com o potencial efetivo renormalizado dado na Eq. (2.2.24), encontramos a seguinte expressão:

$$m_{\mathrm{T}}^2 = m^2\left[1 + \frac{\lambda}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty} f_1(jmd)\right]. \tag{2.2.28}$$

Para a obtenção do resultado acima, foi utilizada a relação [55]

$$K'_{\mu}(x) = -\frac{1}{2}\left[K_{\mu-1}(x) + K_{\mu+1}(x)\right], \tag{2.2.29}$$

para a derivada da função de Macdonald $K'_{\mu}(x)$, em conjunto com a relação de recorrência:

$$K_{\mu}(x) = -\frac{x}{2\mu}\left[K_{\mu-1}(x) - K_{\mu+1}(x)\right]. \tag{2.2.30}$$

A Eq. (2.2.28) torna evidente o fato de que a massa m do campo escalar adquire uma correção de primeira ordem na constante de acoplamento, $\lambda^{(1)}$, que é dependente da condição de contorno codificada na quantidade d diretamente relacionada com o comprimento da circunferência a, e o passo h da hélice. Essa correção surge a nível de um loop e, sendo uma consequência da influência da condição de contorno, a expressão (2.2.28) é denominada de massa topológica. Na Fig. 2.1, a Eq. (2.2.28) é expressa graficamente, sendo a função $\frac{m_{\mathrm{T}}}{m}$ uma massa adimensional com respeito ao comprimento adimensional $\frac{a}{h}$, para valores diferentes da constante de acoplamento λ e assumindo $mh = 1$. Vemos claramente que o efeito da correção de um loop é aumentar a massa do campo, conforme aumentamos os valores da constante de acoplamento λ. A linha azul corresponde à menor correção com o valor $\lambda = 0.2$ enquanto que a linha vermelha corresponde à maior correção com o

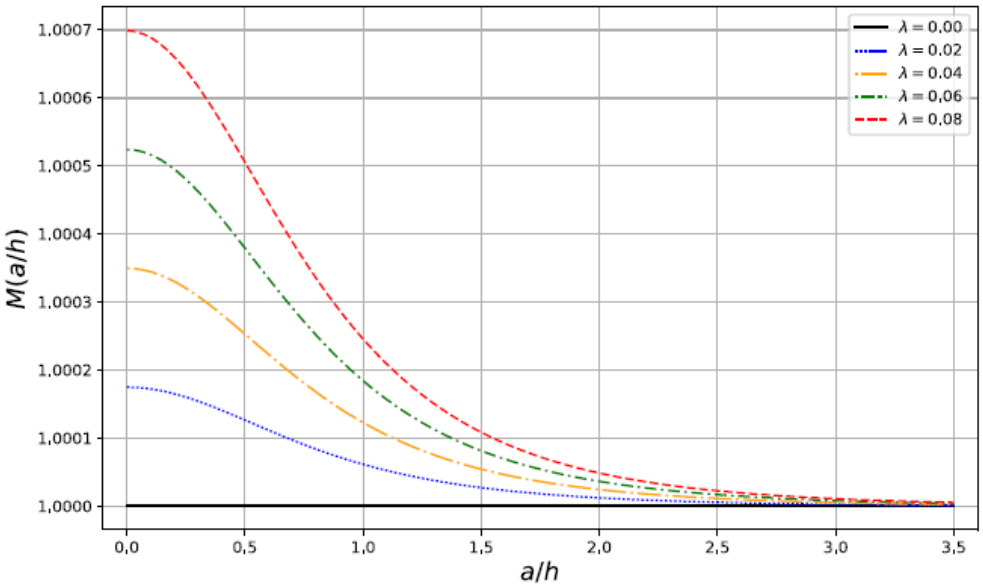

Figure 2.1: Considerando diferentes valores da constante λ, a figura mostra a curva da massa adimensional $M = \frac{m_{\mathrm{T}}}{m}$ como função do comprimento adimensional $\frac{a}{h}$ da Eq. (2.2.28). É assumido que $mh = 1$.

valor $\lambda = 0.8$. Entretanto, essa correção vai a zero para grandes valores de $\frac{a}{h}$, fazendo o termo de massa m ser dominante. Assim no limite de Minkowski, $d \to \infty$, a expressão (2.2.28) se reduz a apenas a massa original do campo escalar, ou seja, m.

Usando o mesmo artifício que foi empregado para calcular a densidade de energia de Casimir para o caso do campo sem massa, Eq. (2.2.27), podemos obter a massa topológica para o caso do campo escalar auto-interagente sem massa. O resultado é encontrado facilmente tomando o limite para pequenos argumentos da função de Macdonald e é escrito como

$$m_{\mathrm{T}}^2 = \frac{\lambda}{24d^2}, \tag{2.2.31}$$

em que foi usado o seguinte valor da função zeta de Riemann usual: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ [56, 57]. O resultado escrito na Eq. (2.2.31) é puramente uma massa topológica, o que significa que mesmo que o campo seja classicamente não massivo, a nível de correção quântica de um loop, como consequência da condição de contorno tipo hélice, o campo adquire uma contribuição do tipo massa.

Na seção que segue, consideramos a correção de dois loops para a densidade de energia de Casimir para ambos os casos do campo escalar massivo e sem massa.

2.2.2 Correção de dois loops

Conforme foi mencionado anteriormente, a contribuição de dois loops para o potencial efetivo $V_{\mathrm{eff}}(\Phi)$ da Eq. (2.1.3), pode ser obtida considerando os gráficos irredutíveis de dois loops para uma partícula [37, 38]. Visto que estamos interessados em calcular a contribuição de dois loops para a densidade de energia de Casimir, devemos considerar o estado de vácuo, ou seja, $\Phi = 0$. Nesse caso, apenas um

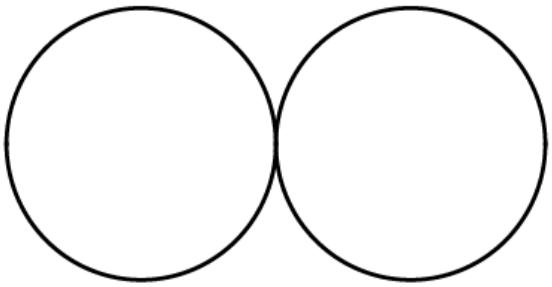

Figure 2.2: Gráfico de Feynman representando a única contribuição não trivial da auto-interação para a correção de dois loops calculada no estado $\Phi = 0$.

gráfico fornece uma contribuição não trivial [2], o qual é apresentado na Fig. 2.2.

De acordo com o gráfico exibido na na Fig. 2.2, temos um vértice de auto-interação que contribui com um termo da forma $-\frac{3\lambda}{4!}\Omega_4$. Além disso, dois propagadores Δ_F se fazem presente. Os propagadores são associados com a soma dos inversos dos autovalores α_σ do operador $\hat{A}$. Dessa forma, podemos escrever simbolicamente a relação que segue:

$$\Delta_F \leftrightarrow \frac{1}{\Omega_4}\sum_\sigma \alpha_\sigma^{-1}. \tag{2.2.32}$$

Então, a partir do gráfico exibido na Fig. 2.2, vemos que correção de dois loops pode ser escrita em termos dos autovalores apresentados na Eq. (2.2.3), i.e.,

$$V^{(2)}(\Phi)\big|_{\Phi=0} = -\frac{1}{\Omega_4}\left(-\frac{3\lambda}{4!}\Omega_4\right)\left(\frac{1}{\Omega_4}\sum_\sigma \alpha_\sigma^{-1}\right)^2\Bigg|_{\Phi=0} = \frac{\lambda}{8}\left(\frac{1}{\Omega_4}\sum_\sigma \alpha_\sigma^{-1}\right)^2\Bigg|_{\Phi=0}. \tag{2.2.33}$$

Tendo em mente a forma explícita da função zeta generalizada que foi obtida na equação (2.2.13), escrevemos a correção de dois loops $V^{(2)}(\Phi)$ da Eq. (2.2.33), na forma:

$$V^{(2)}(\Phi)\big|_{\Phi=0} = \lim_{s\to 1}\frac{\lambda}{8}\left(\frac{\zeta(s)}{\Omega_4}\right)^2\Bigg|_{\Phi=0}. \tag{2.2.34}$$

Um cuidado extra é requerido por conta de uma sutileza existente na equação acima. No limite com $s \to 1$, a função zeta $\zeta(s)$ apresenta uma divergência que deve ser eliminada. A parte divergente é dada pelo primeiro termo do lado direito da Eq. (2.2.13), pois o comportamento da razão entre as funções gamma em torno de $s = 1$ é da forma:

$$\frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)} \approx \frac{s}{s-1}, \tag{2.2.35}$$

que é uma expressão divergente no ponto $s = 1$. Após a eliminação da parte divergente da função zeta, a contribuição de dois loops é escrita em termos da função zeta generalizada, Eq. (2.2.13), como segue [39, 43]:

$$V^{(2)}(\Phi)\big|_{\Phi=0} = \lim_{s\to 1}\frac{\lambda}{8}\left(\frac{\zeta_R(s)}{\Omega_4}\right)^2\Bigg|_{\Phi=0}, \tag{2.2.36}$$

[2] Na Ref. [38] foi demonstrado que dos dois gráficos possíveis para essa correção de loop, apenas um contribui de forma não trivial no estado de vácuo, ou seja, $\Phi = 0$.

em que a função $\zeta_R(s)$ é definida como sendo a função zeta generalizada obtida na Eq. (2.2.13), menos o termo divergente, isto é:

$$\zeta_R(s) = \zeta(s) - \frac{\Omega_4 M_\Phi^{4-2s}}{16\pi^2}\frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)}. \tag{2.2.37}$$

Nesse enquadramento, o segundo termo do lado direito da Eq. (2.2.37) dá uma contribuição que é independente dos parâmetros a e h que caracterizam a condição de contorno tipo hélice e, como é usual, deve ser subtraído visto que o mesmo diverge no ponto $s = 1$ [39, 43]. Assim, levando em consideração as Eqs. (2.2.36) e (2.2.37), obtemos a contribuição de dois loops na forma:

$$V^{(2)}(\Phi)\big|_{\Phi=0} = \frac{\lambda m^4}{32\pi^4}\left[\sum_{j=1}^{\infty} f_1(jmd)\right]^2. \tag{2.2.38}$$

O resultado apresentado na Eq. (2.2.38) é a correção de dois loops da densidade de energia de Casimir da Eq. (2.2.25), associada ao campo escalar massivo e auto-interagente, que obedece à condição de contorno tipo hélice. Note que a Eq. (2.2.38) é uma expressão convergente e, de forma similar ao que foi realizado anteriormente, podemos calcular a correção de dois loops da densidade de energia de Casimir para o caso de um campo não massivo. Realizando o limite para argumentos pequenos na função Macdonald da Eq. (2.2.38), encontramos a correção de dois loops para o caso do campo não massivo, i.e.,

$$V^{(2)}(\Phi)\big|_{\Phi=0} = \frac{\lambda}{1152 d^4}. \tag{2.2.39}$$

Conhecendo as correções de dois loops obtidas nas Eqs. (2.2.38) e (2.2.39), para a densidade de energia de Casimir nos casos de um campo massivo e sem massa, respectivamete, podemos escrever a densidade de energia de Casimir com as correções de até dois loops. Então, as densidades de energia de Casimir, Eqs. (2.2.25) e (2.2.27), considerando as correções de dois loop acima, são escritas como

$$\mathcal{E}_{\rm C}^{\lambda} = \mathcal{E}_{\rm C} + \frac{\lambda m^4}{32\pi^4}\left[\sum_{j=1}^{\infty} f_1(jmd)\right]^2, \tag{2.2.40}$$

para o caso do campo massivo e

$$\mathcal{E}_{\rm C}^{\lambda} = \mathcal{E}_{\rm C} + \frac{\lambda}{1152 d^4}, \tag{2.2.41}$$

para o caso do campo sem massa. O primeiro termo do lado direito da Eq. (2.2.40) foi obtido na Eq. (2.2.25), enquanto que o primeiro termo do lado direito da Eq. (2.2.41) foi apresentado na Eq. (2.2.27). Além disso, em ambos os casos (massivo e não massivo), na ausência da auto-interação, isto é, $\lambda = 0$, recuperamos os resultados que foram obtidos nas Eqs. (2.2.25) e (2.2.27). Na Fig. 2.3, a Eq. (2.2.40) é exibida graficamente como uma densidade de energia adimensional $\frac{\mathcal{E}_{\rm C}^{\lambda}}{\mathcal{E}_{\rm C}}$, com respeito ao comprimento adimensional $\frac{a}{h}$, para diferentes valores da constante de acoplamento λ e, considerando $mh = 1$. O gráfico apresentado na Fig. 2.3 mostra que o efeito prático da correção de loop é diminuir a densidade de energia de Casimir. Conforme aumentamos o valor de λ a correção para a densidade de energia diminui, o que é confirmado quando comparamos a curva azul com $\lambda = 0.2$ com a curva vermelha para $\lambda = 0.8$. Entretanto, a correção vai a zero para valores grandes de $\frac{a}{h}$, fazendo com que a densidade de energia de Casimir da Eq. (2.2.25), seja dominante.

Então, considerando um campo escalar real que obedece à condição de contorno tipo hélice, obtemos a densidade de energia de Casimir até a correção de dois loops, ou seja, correção de ordem

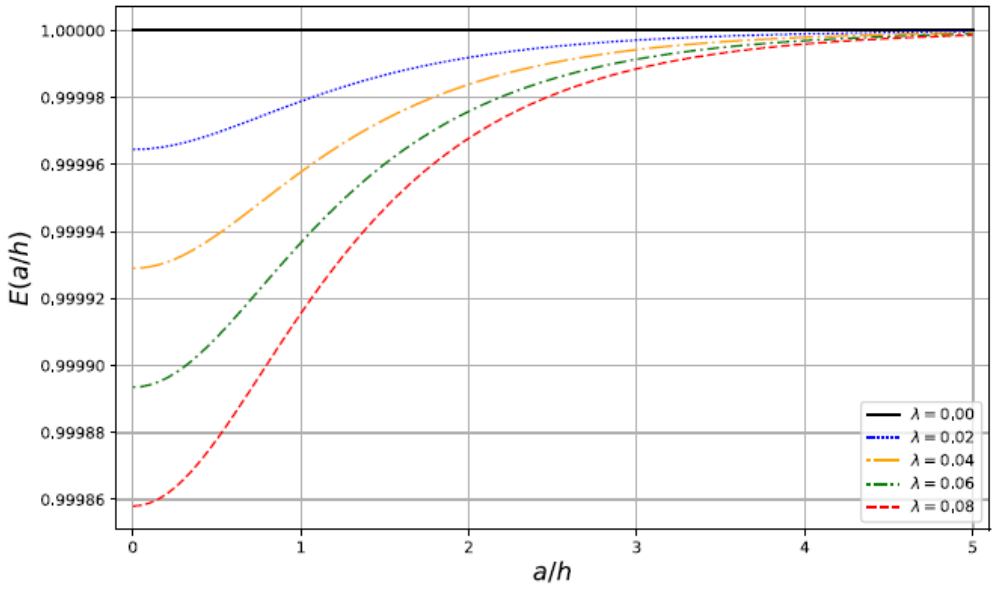

Figure 2.3: Para valores diferentes da constante λ, a figura mostra a curva da energia adimensional $E = \frac{\mathcal{E}_C^{\lambda}}{\mathcal{E}_C}$, em função do comprimento adimensional $\frac{a}{h}$, assumindo $mh = 1$.

$\lambda^{(1)}$, para ambos os casos do campo massivo e sem massa. Além disso, avaliamos a massa topológica que surge devido à condição de contorno tipo hélice, para ambos os casos do campo massivo e não massivo. No próximo capítulo, consideramos o mesmo sistema que foi considerado aqui, entretanto, além da condição de contorno tipo hélice e da auto-interação, o cenário agora permite que o campo escalar esteja sob ação da violação de simetria de Lorentz do tipo-éter CPT-par [40, 58, 59].

No apêndice que segue, descrevemos com maiores detalhes o volume 4-dimensional Ω_4, a relação entre os momentos na direção x e y, bem como uma relação entre o presente caso e o caso em que o campo escalar obedece à condição periódica.

Apêndice do capítulo 2: Autovalores e a relação com o caso periódico

Autovalores

Neste apêndice, analisamos o volume 4-dimensional Ω_4 em conjunto com os autovalores do operador $\hat{A}$, apresentado na Eq. (2.1.10), quando a condição de contorno tipo hélice é aplicada.

Conforme mencionado anteriormente, a condição de contorno tipo hélice leva à seguinte equação de vínculo dos autovalores:

$$k_x a - k_y h = 2\pi n. \tag{AV.1}$$

No presente capítulo, foi escolhido escrever o momento k_y em termos do momento k_x. Nesse caso, o volume 4-dimensional Ω_4, levando em consideração a topologia do espaço tempo, é escrito como segue

$$\Omega_4 = \int d^4x = \Omega_3 h, \tag{AV.2}$$

em que Ω_3 é o volume 3-dimensional associado às coordenadas τ, x, z do espaço Euclidiano. Entretando, outra escolha possível é escrever o momento k_x em termos do momento k_y, ou seja, $k_x = \frac{k_y h}{a} + \frac{2\pi n}{a}$. Com essa escolha, os autovalores escritos na Eq. (2.2.3) tomam a seguinte forma:

$$\alpha'_\sigma = k_\tau^2 + k_z^2 + k_y^2 + \left(\frac{k_y h}{a} + \frac{2\pi n}{a}\right)^2 + M_\Phi^2, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{AV.3}$$

Nesse caso, o volume 4-dimensional Ω_4 do espaço tempo passa a ser escrito na forma

$$\Omega_4 = \int d^4x = \Omega_3 a, \tag{AV.4}$$

em que Ω_3 é agora o volume 3-dimensional associado às coordenadas τ, y, z. É importante ressaltar que a função zeta de Riemann generalizada, associada aos autovalores da Eq. (AV.3), pode ser escrita explicitamente como

$$\zeta_{a'}(s) = \frac{\Omega_3}{(2\pi)^3} \int d\tau \; dk_y \; dk_z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[k_\tau^2 + k_z^2 + k_x^2 + \left(\frac{k_y h}{a} + \frac{2\pi n}{a}\right)^2 + M_\Phi^2\right]^{-s}. \tag{AV.5}$$

Adotando os mesmos procedimentos realizados nas seções anteriores, é possível reescrever a função zeta acima como segue:

$$\zeta_{a'}(s) = \frac{\Omega_4}{(2\pi)^2 d} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(s)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty d\tau \; \tau^{2s-4} \exp\left\{-\tau^2 \left[M_\Phi^2 + \frac{4\pi^2}{d^2} n^2\right]\right\}. \tag{AV.6}$$

Portanto a função zeta generalizada apresentada na Eq. (AV.6), coincide com a obtida anteriormente na Eq. (2.2.8), no caso em que foi escolhido escrever o momento k_y em termos do momento k_x.

Assim, concluímos que os resultados obtidos nas seções anteriores não dependem da escolha de como escrever os autovalores, ou seja, desde que a equação de vínculo seja respeitada, temos liberdade em escrever o momento k_x em termos do momento k_y e vice-versa. Além disso, o volume quadridimensional é uma quantidade que depende da topologia do espaço tempo e deve ser cancelado quando avançamos a partir da função zeta generalizada, para o cálculo da primeira correção do potencial efetivo.

Relação com o caso periódico

Aqui demonstramos que a função zeta de Riemann generalizada, exibida na Eq. (2.2.13), pode ser obtida a partir da função zeta generalizada associada ao caso de um campo escalar real que obedece à condição periódica.

Considerando a condição de contorno tipo hélice, a função zeta generalizada é escrita inicialmente como na Eq. (2.2.4), isto é:

$$\zeta(s) = \frac{\Omega_3}{(2\pi)^3} \int d\tau \; dk_x \; dk_z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[k_\tau^2 + k_x^2 + k_z^2 + \left(\frac{k_x a}{h} - \frac{2\pi n}{h}\right)^2 + M_\Phi^2\right]^{-s}. \tag{CP.1}$$

Realizando a seguinte mudança de variável de integração:

$$k_x = \frac{h}{d}\left(p_x + \frac{2a\pi n}{hd}\right), \qquad d^2 = h^2 + a^2, \tag{CP.2}$$

na Eq. (CP.1), obtemos a função zeta generalizada na forma:

$$\zeta(s) = \frac{h}{d}\frac{\Omega_3}{(2\pi)^3}\int dk_\tau\, dp_x\, dk_z \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[k_\tau^2 + p_x^2 + k_z^2 + \left(\frac{2\pi n}{d}\right)^2 + M_\Phi^2\right]^{-s}. \tag{CP.3}$$

O resultado escrito na Eq. (CP.3) é identificado com a função zeta generalizada, associada ao caso em que o campo escalar está sujeito à condição de contorno periódica, com período d. Essa identificação é facilmente percebida, escrevendo a função zeta generalizada $\zeta_{\rm p}(s, L)$ associada ao caso periódico, de forma explícita, isto é,

$$\zeta_{\rm p}(s, L) = \frac{\Omega_3}{(2\pi)^3}\int dk_\tau\, dp_x\, dk_z \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[k_\tau^2 + p_x^2 + k_z^2 + \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + M_\Phi^2\right]^{-s}, \tag{CP.4}$$

em que L representa o período. Assim, vemos que as Eqs. (CP.3) e (CP.4) são conectadas pela seguinte relação:

$$\zeta(s) = \frac{h}{d}\zeta_{\rm p}(s, d). \tag{CP.5}$$

No trabalho [43], a função zeta generalizada associada com o caso em que o campo escalar obedece à condição de contorno periódica foi obtida e é dada por:

$$\zeta_{\rm p}(s, d) = d\frac{\Omega_3 M_\Phi^{4-2s}}{16\pi^2}\frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)} + d\frac{\Omega_3}{2^s\pi^2\Gamma(s)}\left(\frac{M_\Phi}{d}\right)^{2-s}\sum_{j=1}^{\infty} j^{s-2}K_{(2-s)}(jM_\Phi d). \tag{CP.6}$$

Além disso, considerando a condição de contorno tipo hélice, lembramos que a forma final da função zeta generalizada é:

$$\zeta(s) = h\frac{\Omega_3 M_\Phi^{4-2s}}{16\pi^2}\frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)} + h\frac{\Omega_3}{2^s\pi^2\Gamma(s)}\left(\frac{M_\Phi}{d}\right)^{2-s}\sum_{j=1}^{\infty} j^{s-2}K_{(2-s)}(jM_\Phi d). \tag{CP.7}$$

Então, podemos ver que substituindo a função zeta $\zeta_{\rm p}(s, d)$ da Eq. (CP.6), do caso periódico, na relação (CP.5), a função zeta do caso de condição de contorno tipo hélice é obtida, Eq. (CP.7). Portanto, é possível associar o problema analisado aqui, considerando a condição de contorno tipo hélice, ao problema de um campo escalar auto-interagente que obedece à condição de contorno periódica, com período representado por d.

Capítulo 3

Correção de loop para a densidade de energia de Casimir escalar e geração da massa topológica devido à condição de contorno tipo hélice com violação de Lorentz

Conforme foi mencionado na introdução desta tese, a forma mais usual de investigar o efeito Casimir em um determinado sistema é assumindo que a simetria de Lorentz é preservada. Contudo, há indícios que a simetria de Lorentz pode ser violada em certos regimes. Em alguns cenários considerando a violação da simetria de Lorentz, o espaço tempo pode se tornar anisotrópico em alguma direção. No presente capítulo consideramos o mesmo sistema que foi considerado no capítulo anterior, isto é, um campo escalar com auto-interação que obedece à condição de contorno tipo hélice. Entretanto, o sistema agora está sujeito à violação de simetria de Lorentz do tipo-éter CPT-par [40, 58, 59]. O modelo desta violação de simetria foi considerado nas Refs. [39, 40, 58, 59].

Para investigar o sistema descrito acima, utilizamos a abordagem do potencial efetivo na teoria quântica de campos, que permite analisar como a violação de simetria de Lorentz influencia na densidade de energia de Casimir, suas correções de loop e na massa topológica do campo escalar. Apresentamos gráficos que facilitam a visualização do efeito que a violação de simetria de Lorentz exerce na densidade de energia de Casimir e na massa topológica. Devemos mencionar que os resultados apresentados neste capítulo foram publicados na Ref. [52].

3.1 Campo escalar auto-interagente com violação da simetria de Lorentz

Nesta seção um campo escalar massivo e auto-interagente com violação de simetria de Lorentz do tipo-éter CPT-par [40, 58, 59] é considerado. Esse sistema é descrito pela seguinte ação no espaço Euclidiano:

$$S_{\mathrm{E}}\left[\varphi\right]=\int d^{4}x\left[-\frac{1}{2}(\partial^{\mu}\varphi)(\partial_{\mu}\varphi)-\frac{1}{2}\chi\left(u^{0}\partial_{0}\varphi\right)^{2}+\frac{1}{2}\chi\left(u^{i}\partial_{i}\varphi\right)^{2}-U\left(\varphi\right)\right], \tag{3.1.1}$$

em que $U(\varphi)$ é o potencial que foi escrito anteriormente na Eq. (2.1.2), u^μ é um 4-vector unitário no espaço Euclidiano que aponta na direção em que a violação de simetria de Lorentz é assumida ocorrer e o parâmetro adimensional χ é um número pequeno que caracteriza a violação. À vista disso, o termo responsável pela quebra de simetria de Lorentz é dado por $\mathcal{L}_{\rm LV} = \frac{1}{2}\chi(u^\mu\partial_\mu\varphi)^2$, no espaço de Minkowski. Entretanto, em consequência da rotação de Wick, $t = -i\tau$, a componente temporal, que faz parte do termo de quebra de simetria, ganha um sinal de menos que se faz presente na ação Euclidiana da Eq. (3.1.1).

A ação apresentada na Eq. (3.1.1), define a teoria do campo escalar auto-interagente com violação de Lorentz. Além disso, o operador $\hat{A}$ originalmente escrito na Eq. (2.1.10) é reescrito na forma [39]

$$\hat{A} = U''(\Phi) + \chi u^0u^0\partial_0\partial_0 + \chi u^iu^j\partial_i\partial_j - \Box. \tag{3.1.2}$$

Observe que na ausência da violação de Lorentz, isto é, $\chi = 0$, o operador acima se reduz ao apresentado na Eq. (2.1.10). O conjunto de autofunções da equação de autovalor $\hat{A}\phi_\sigma = \alpha_\sigma\phi_\sigma$, sujeito à condição de contorno tipo hélice, Eq. (2.2.1), continua sendo o apresentado na Eq. (2.2.2). Contudo, o conjunto de autovalores α_σ do operador $\hat{A}$, agora é dado por

$$\alpha_\sigma = \chi u^0u^0k_0k_0 - \chi u^iu^jk_ik_j + k_\tau^2 + k_x^2 + \left(\frac{k_xa}{h} - \frac{2\pi n}{h}\right)^2 + k_z^2 + M_\Phi^2, \tag{3.1.3}$$

em que $M_\Phi^2 = m^2 + \frac{\lambda}{2}\Phi^2$ e $\sigma = (k_\tau, k_x, k_z, n)$ representa o conjunto de números quânticos com $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Para prosseguir com os cálculos e investigar como a violação de Lorentz afeta a densidade da energia de Casimir e a geração da massa topológica, a direção do 4-vector u^μ deve ser especificada. Conforme foi mencionado anteriormente, o 4-vetor unitário u^μ pode ser do tipo tempo, isto é $u^t = (1,0,0,0)$ ou do tipo espaço. No caso do vetor unitário ser do tipo espaço, temos três possibilidades: $u^x = (0,1,0,0)$, $u^y = (0,0,1,0)$ e $u^z = (0,0,0,1)$. A seguir consideramos cada direção do vetor unitário separadamente, iniciando com o caso em que u^μ é do tipo tempo.

3.1.1 Violação de Lorentz na direção do tempo: $u^t = (1,0,0,0)$

Primeiramente é considerado o caso em que o 4-vetor u^μ é do tipo tempo, ou seja, $u^t = (1,0,0,0)$. Consequentemente, os autovalores escritos na Eq. (3.1.3) tomam a seguinte forma:

$$\alpha_\sigma = (1+\chi)\,k_\tau^2 + k_x^2 + \left(\frac{k_xa}{h} - \frac{2\pi n}{h}\right)^2 + k_z^2 + M_\Phi^2, \tag{3.1.4}$$

em que fica evidente que a violação de Lorentz acontece na direção do tempo, sendo que o parâmetro de violação χ se faz presente apenas no termo do momento na direção τ, ou seja, k_τ. Nesse caso, a função zeta de Riemann generalizada, construída a partir dos autovalores escritos na Eq. (3.1.4), é dada por

$$\zeta_{\rm L\tau}(s) = \frac{\Omega_3}{(2\pi)^3}\int dk_\tau\, dk_x\, dk_z \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[(1+\chi)\,k_\tau^2 + k_x^2 + \left(\frac{k_xa}{h} - \frac{2\pi n}{h}\right)^2 + k_z^2 + M_\Phi^2\right]^{-s}. \tag{3.1.5}$$

Note que subíndice Lτ remete ao caso da quebra de simetria de Lorentz na direção do tempo. Os cálculos necessários para a obtenção da correção de um loop para o potencial efetivo, a partir da função zeta da Eq. (3.1.5), são realizados de forma similar aos realizados no capítulo anterior. Por isso, exibimos nesta seção apenas os principais resultados.

Para o caso em consideração, a correção de um loop, Eq. (2.1.19), resulta na seguinte expressão:

$$V_{\mathrm{L}\tau}^{(1)}(\Phi)=\frac{M_{\Phi}^{4}}{64\pi^{2}\left(1+\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\ln\left(\frac{M_{\Phi}^{2}}{\mu^{2}}\right)-\frac{3}{2}\right]-\frac{M_{\Phi}^{4}}{2\pi^{2}\left(1+\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{\infty}f_{2}\left(jM_{\Phi}d\right). \tag{3.1.6}$$

Lembramos que d foi escrito na Eq. (2.2.9) e a função $f_{\mu}(x)$ foi definada na Eq. (2.2.16). Comparando as expressões para a correção de um loop da Eq. (3.1.6) com o resultado obtido anteriormente apresentado na Eq. (2.2.19) para o caso em que não há violação da simetria de Lorentz, percebemos que quando a direção privilegiada para a violação de Lorentz for a direção do tempo, uma modificação aparece na forma de um fator $(1+\chi)^{\frac{1}{2}}$ no denominador dos termos no lado direito da Eq. (3.1.6). Assim, é possível escrever a correção de primeira ordem do potencial efetivo para o caso em que a simetria de Lorentz é violada na direção do tempo, $V_{\mathrm{L}\tau}^{(1)}(\Phi)$ da Eq. (3.1.6), em termos da correção de primeira ordem quando a simetria de Lorentz é preservada, $V^{(1)}(\Phi)$ da Eq. (2.2.19), isto é,

$$V_{\mathrm{L}\tau}^{(1)}(\Phi)=\frac{V^{(1)}(\Phi)}{\left(1+\chi\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.1.7}$$

Dessa forma, o potencial efetivo não renormalizado é escrito, até a primeira ordem, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}V_{\mathrm{eff}}(\Phi)&=\frac{\lambda}{4!}\Phi^{4}+\frac{C_{1}}{4!}\Phi^{4}+\frac{m^{2}}{2!}\Phi^{2}+\frac{C_{2}}{2!}\Phi^{2}+C_{3}+\\&+\frac{M_{\Phi}^{4}}{64\pi^{2}\left(1+\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\ln\left(\frac{M_{\Phi}^{2}}{\mu^{2}}\right)-\frac{3}{2}\right]-\frac{M_{\Phi}^{4}}{2\pi^{2}\left(1+\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{\infty}f_{2}\left(jM_{\Phi}d\right).\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Uma vez que a correção de um loop foi obtida, devemos renormalizar o potencial efetivo. Lembrando das condições de renormalização do potencial efetivo, isto é, Eqs. (2.1.20), (2.1.21) e (2.1.23), tendo em mente que estas devem ser consideradas no limite de Minkowski $d\rightarrow\infty$ [38, 43, 39], obtemos as constantes de renormalização C_i explicitamente como segue:

$$\begin{aligned}\frac{C_{1}}{4!}&=\frac{\lambda^{2}}{256\pi^{2}\left(1+\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\ln\left(\frac{\mu^{2}}{m^{2}}\right),\\\frac{C_{2}}{2!}&=\frac{\lambda m^{2}}{64\pi^{2}\left(1+\chi\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\lambda m^{2}}{64\pi^{2}\left(1+\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\ln\left(\frac{\mu^{2}}{m^{2}}\right),\\C_{3}&=\frac{3m^{4}}{128\pi^{2}\left(1+\chi\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{m^{4}}{64\pi^{2}\left(1+\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\ln\left(\frac{\mu^{2}}{m^{2}}\right).\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Conhecendo a forma explícita das constantes de renormalização C_i encontradas na equação acima, realizamos a substituição das mesmas na Eq. (3.1.8), obtendo assim o potencial efetivo renormalizado, até correção de um loop, na forma:

$$\begin{aligned}V_{\mathrm{eff}}^{R}(\Phi)&=\frac{\lambda}{4!}\Phi^{4}+\frac{m^{2}}{2}\Phi^{2}+\\&+\frac{\lambda m^{2}\Phi^{2}}{64\pi^{2}\left(1+\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\ln\left(\frac{M_{\Phi}^{2}}{m^{2}}\right)-\frac{1}{2}\right]+\frac{m^{4}}{64\pi^{2}\left(1+\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\ln\left(\frac{M_{\Phi}^{2}}{m^{2}}\right)+\\&+\frac{\lambda^{2}\Phi^{4}}{256\pi^{2}\left(1+\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\ln\left(\frac{M_{\Phi}^{2}}{m^{2}}\right)-\frac{3}{2}\right]-\frac{M_{\Phi}^{4}}{2\pi^{2}\left(1+\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{\infty}f_{2}\left(jM_{\Phi}d\right).\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

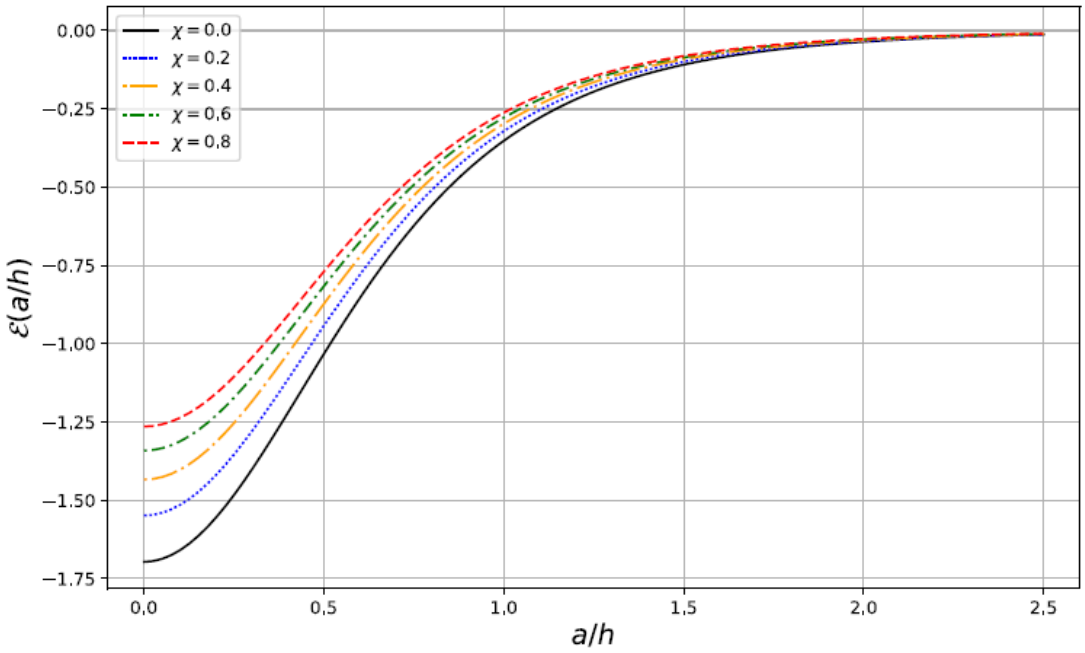

Figure 3.1: Curva da densidade de energia adimensional $\mathcal{E} = \frac{2\pi^2}{m^4}\mathcal{E}_{\rm C}$ com respeito ao comprimento adimensional $\frac{a}{h}$ da Eq. (3.1.11), para diferentes valores de χ, considerando a violação de Lorentz na direção do tempo. É assumido $mh = 1$.

A partir do potencial efetivo renormalizado obtido na Eq. (3.1.10), podemos considerar o estado de vácuo, i.e., $\Phi = 0$, que resulta na obtenção da densidade de energia de Casimir. Então, tomando o estado de vácuo $\Phi = 0$, no potencial efetivo renormalizado da Eq. (3.1.10), obtemos a densidade de energia de Casimir, para o caso em que a violação da simetria de Lorentz ocorre na direção do tempo, isto é:

$$\mathcal{E}_{\rm C} = V_{\rm eff}^{R}\left(\Phi\right)\big|_{\Phi=0} = -\frac{m^4}{2\pi^2\left(1+\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{\infty} f_2\left(jmd\right). \tag{3.1.11}$$

Assim, vemos que a densidade de energia de Casimir sofre uma modificação que se apresenta no fator $(1+\chi)^{-\frac{1}{2}}$, quando comparamos a Eq. (3.1.11) com a Eq. (2.2.25) do caso sem violação de simetria de Lorentz. Na Fig. 3.1, a Eq. (3.1.11) é mostrada graficamente como a função densidade de energia adimensional $\frac{2\pi^2}{m^4}\mathcal{E}_{\rm C}$, em termos do comprimento adimensional $\frac{a}{h}$, para diferentes valores do parâmetro χ, assumindo $mh = 1$. É visto que o efeito da violação da simetria de Lorentz na direção do tempo é aumentar a densidade de energia de Casimir. A linha escura corresponde ao caso sem violação de Lorentz, $\chi = 0$, enquanto que as curvas coloridas correspondem ao caso com a violação de Lorentz. Aumentado o valor de χ, vemos que a densidade de energia de Casimir aumenta, o que pode ser visto comparando a curva vermelha, $\chi = 0.8$, com a curva escura, $\chi = 0.0$. Contudo, para valores grandes de $\frac{a}{h}$, a densidade de energia de Casimir da Eq. (3.1.11) vai a zero, independente do valor do parâmetro de violação χ.

A densidade de energia de Casimir associada ao caso de um campo escalar sem massa é obtida a partir da Eq. (3.1.11) tomando o limite para argumentos pequenos da função de Macdonald. O

resultado obtido é expresso a seguir:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{C}} = -\frac{\pi^2}{90\,(1+\chi)^{\frac{1}{2}}\,d^4}. \tag{3.1.12}$$

Comparando o resultado acima com o resultado obtido na Eq. (2.2.27) do caso sem violação de simetria, vemos que a diferença surge novamente na forma de um fator $(1+\chi)^{\frac{1}{2}}$, que se apresenta no denominador do lado direito da Eq. (3.1.12).

É interessante investigar como a violação da simetria de Lorentz que ocorre na direção do tempo afeta a massa topológica adquirida pelo campo escalar. Então, usando a condição de renormalização Eq. (2.1.21) para o potencial efetivo renormalizado obtido na Eq. (3.1.10), encontramos a massa topológica na forma:

$$m_{\mathrm{T}}^2 = m^2\left[1 + \frac{\lambda}{4\pi^2\,(1+\chi)^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{\infty} f_1\,(jmd)\right]. \tag{3.1.13}$$

Assim, similarmente à densidade de energia de Casimir, vemos que a correção para a massa é multiplicada pelo fator $(1+\chi)^{-\frac{1}{2}}$, quando comparamos a massa topológica obtida na Eq. (3.1.13) com a obtida na Eq. (2.2.28). Na Fig. 3.2, a Eq. (3.1.13) é exibida como uma massa adimensional $\frac{m_{\mathrm{T}}}{m}$ com respeito ao comprimento adimensional $\frac{a}{h}$, para diferentes valores do parâmetro de violação χ, assumindo $mh = 1$ e $\lambda = 10^{-2}$. A partir do gráfico apresentado vemos que o efeito da violação de Lorentz é diminuir a massa topológica. A linha escura corresponde ao caso sem violação de Lorentz, enquanto que as linhas coloridas correspondem ao caso com violação da simetria de Lorentz. Comparando a curva vermelha, $\chi = 0.8$, com a curva escura, $\chi = 0.0$, confirmamos que a violação diminui a correção da massa. Entretanto, a correção de um loop para a massa vai a zero para valores grandes de $\frac{a}{h}$, fazendo a massa m ser dominante, independente do valor de χ.

A partir do resultado da massa topológica escrito na Eq. (3.1.13), podemos obter a massa m_{T} para o caso do campo escalar não massivo. Então, considerando o limite para argumentos pequenos da função de Macdonald, encontramos a seguinte expressão:

$$m_{\mathrm{T}}^2 = \frac{\lambda}{24\,(1+\chi)^{\frac{1}{2}}\,d^2}. \tag{3.1.14}$$

O resultado acima é uma contribuição puramente topológica, sendo uma consequência da imposição da condição de contorno tipo hélice e da quebra de simetria de Lorentz na direção temporal, presente no fator multiplicativo $(1+\chi)^{-\frac{1}{2}}$.

Tendo obtido a densidade de energia de Casimir e a massa topológica, até correção de um loop, concentraremos nossa atenção na correção de dois loops para o potencial efetivo da Eq. (3.1.10). Seguindo os mesmos passos que levaram ao resultado apresentado na Eq. (2.2.38), obtemos de forma direta a correção de ordem $\lambda^{(1)}$ da densidade de energia de Casimir escrita na Eq. (3.1.11). A contribuição de dois loops possui a seguinte forma:

$$V^{(2)}\,(\Phi)\big|_{\Phi=0} = \frac{\lambda m^4}{32\pi^4(1+\chi)}\left[\sum_{j=1}^{\infty} f_1\,(jmd)\right]^2. \tag{3.1.15}$$

Assim, de acordo com a equação acima, a influência da violação de Lorentz na correção de dois loops está codificada no fator $(1+\chi)^{-1}$.

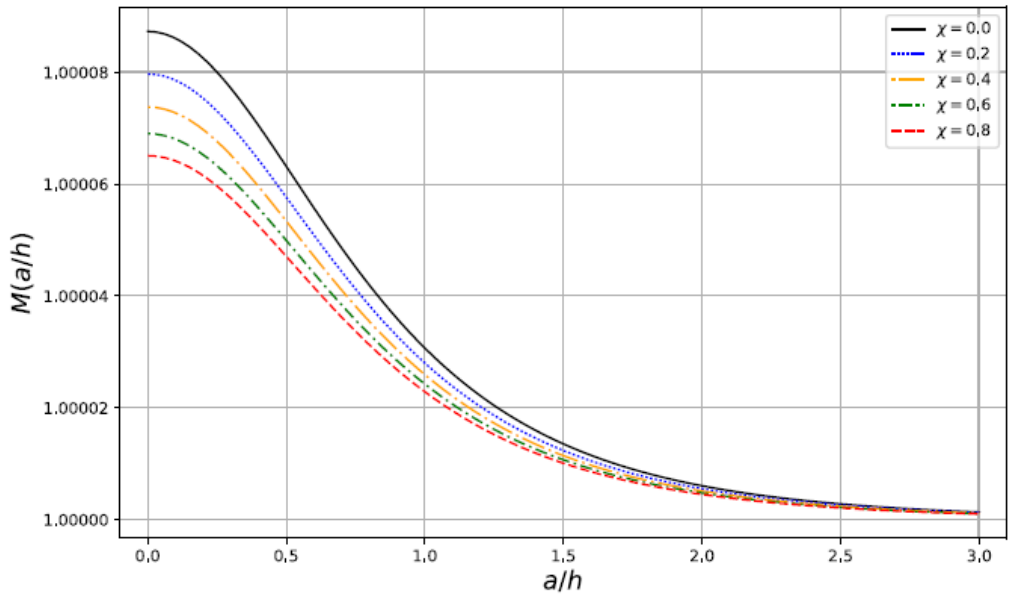

Figure 3.2: Para diferentes valores de χ, com a violação de Lorentz na direção do tempo, a Eq. (3.1.13) é exibida como a curva da massa adimensional $M = \frac{m_{\mathrm{T}}}{m}$ com respeito ao comprimento adimensional $\frac{a}{h}$, assumindo $mh = 1$ e $\lambda = 10^{-2}$

A partir da correção apresentada na Eq. (3.1.15), podemos considerar o caso do campo não massivo e obter a correção de dois loops na forma,

$$V^{(2)}(\Phi)\big|_{\Phi=0} = \frac{\lambda}{1152(1+\chi)d^4}. \tag{3.1.16}$$

Finalmente, considerando os resultados obtidos nas Eqs. (3.1.15) e (3.1.16), a densidade de energia de Casimir, com as correções de ordem $\lambda^{(1)}$, é escrita como:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{C}}^{\lambda} = \mathcal{E}_{\mathrm{C}} + \frac{\lambda m^4}{32\pi^4(1+\chi)}\left[\sum_{j=1}^{\infty} f_1(jmd)\right]^2, \tag{3.1.17}$$

para o caso do campo escalar massivo e

$$\mathcal{E}_{\mathrm{C}}^{\lambda} = \mathcal{E}_{\mathrm{C}} + \frac{\lambda}{1152(1+\chi)d^4}, \tag{3.1.18}$$

para o caso do campo escalar sem massa. Note que o primeiro termo do lado direito da Eq. (3.1.17) foi obtido na Eq. (3.1.11), enquanto que o primeiro termo no lado direito da Eq. (3.1.18) foi apresentado na Eq. (3.1.12). Na Fig. 3.3, é exibida a Eq. (3.1.17) como uma energia adimensional $\frac{\mathcal{E}_{\mathrm{C}}^{\lambda}}{\mathcal{E}_{\mathrm{C}}}$ em termos do comprimento adimensional $\frac{a}{h}$, para diferentes valores do parâmetro de violação χ, assumindo $mh = 1$ e $\lambda = 10^{-2}$. A partir do gráfico apresentado, percebemos que o efeito da correção de ordem $\lambda^{(1)}$ é aumentar a densidade de energia de Casimir Eq. (3.1.17). A linha escura corresponde ao caso sem violação, $\chi = 0$, enquanto que as linhas coloridas correspondem ao caso com a violação de Lorentz. Comparando a curva vermelha, $\chi = 0.8$, com a curva escura, $\chi = 0.0$, confirmamos que o efeito da violação é aumentar a densidade de energia de Casimir. Entretanto, a correção de dois loops vai

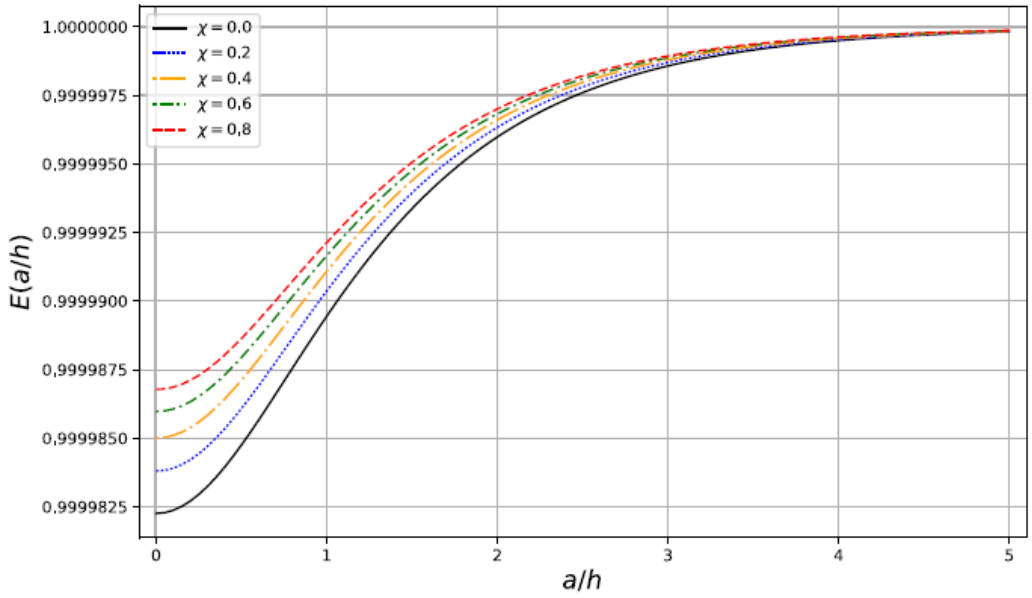

Figure 3.3: Para valores diferentes de χ, com a violação de Lorentz na direção do tempo, a Eq. (3.1.17) é exibida como a curva da densidade de energia de Casimir adimensional $E = \frac{\mathcal{E}_C^{\lambda}}{\mathcal{E}_C}$ com respeito ao comprimento adimensional $\frac{a}{h}$. É assumido $mh = 1$ e $\lambda = 10^{-2}$.

a zero para grandes valores de $\frac{a}{h}$, fazendo a densidade de energia de Casimir da Eq. (3.1.11) ser o termo dominante.

A investigação para o caso da violação de simetria de Lorentz ocorrer na direção do tempo está completa. A seguir, consideramos o caso que a violação ocorre na direção espacial x.

3.1.2 Violação de Lorentz na direção espacial: $u^x = (0, 1, 0, 0)$

Nesta seção é considerado o caso em que a direção que ocorre a violação de Lorentz é a direção espacial x. Logo, o 4-vetor unitário é dado por $u^x = (0, 1, 0, 0)$. Note que nesse caso, a violação de simetria de Lorentz afeta diretamente a componente que é relacionada com a condição de contorno tipo hélice (2.2.1), especificamente, o comprimento da circunferência a da hélice. Sob as condições descritas, os autovalores escritos na Eq. (3.1.3), tomam a seguinte forma:

$$a_\sigma = k_\tau^2 + (1-\chi)\, k_x^2 + \left(\frac{k_x a}{h} - \frac{2\pi n}{h}\right)^2 + k_z^2 + M_\Phi^2. \tag{3.1.19}$$

A função zeta generalizada construída a partir dos autovalores apresentados na Eq. (3.1.19) é dada por

$$\zeta_{\mathrm{L}x}(s) = \frac{\Omega_3}{(2\pi)^3} \int dk_\tau\, dk_x\, dk_z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[k_\tau^2 + (1+\chi)\, k_x^2 + \left(\frac{k_x a}{h} - \frac{2\pi n}{h}\right)^2 + k_z^2 + M_\Phi^2\right]^{-s}. \tag{3.1.20}$$

Note que o subíndice Lx usado acima é similar ao que foi apresentado na seção anterior. Desenvolvendo a função $\zeta_{\mathrm{L}x}(s)$ acima através de cálculos similares aos realizados no capítulo anterior,

encontramos a correção de um loop do potencial efetivo, i.e.,

$$V_{\mathrm{L}x}^{(1)}(\Phi)=\frac{M_{\Phi}^{4}}{64\pi^{2}\left(1-\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\ln\left(\frac{M_{\Phi}^{2}}{\mu^{2}}\right)-\frac{3}{2}\right]-\frac{M_{\Phi}^{4}}{2\pi^{2}\left(1-\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{\infty}f_{2}\left(jhM_{\Phi}\gamma_{x}\right), \tag{3.1.21}$$

em que foi introduzida a seguinte notação:

$$\gamma_{x}^{2}=1+r^{2}\left(1-\chi\right)^{-1}, \tag{3.1.22}$$

sendo o parâmentro $r=\frac{a}{h}$. Conforme foi evidenciado, a correção de um loop escrita na Eq. (3.1.21), diferentemente do caso em que a violação é na direção temporal, é afetada pelo parâmetro de violação χ também no argumento da função de Macdonald que aparece no último termo do lado direito. Dessa forma, vemos que não podemos escrever uma relação direta entre o presente caso e o caso em que não ocorre a quebra de simetria, como foi feito na Eq. (3.1.7). Vale salientar que o sinal na frente do perâmetro χ é oposto ao obtido no caso da violação na direção do tempo. Claramente esses aspectos diferentes se manifestam nas expressões da densidade de energia de Casimir, sua correção de loop e na massa topológica, conforme veremos a seguir.

A partir da correção de primeira ordem obtida na Eq. (3.1.21), escrevemos o potencial efetivo não renormalizado até primeira ordem como:

$$\begin{aligned}V_{\mathrm{eff}}(\Phi)&=\frac{\lambda}{4!}\Phi^{4}+\frac{C_{1}}{4!}\Phi^{4}+\frac{m^{2}}{2!}\Phi^{2}+\frac{C_{2}}{2!}\Phi^{2}+C_{3}+\\&+\frac{M_{\Phi}^{4}}{64\pi^{2}\left(1-\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\ln\left(\frac{M_{\Phi}^{2}}{\mu^{2}}\right)-\frac{3}{2}\right]-\frac{M_{\Phi}^{4}}{2\pi^{2}\left(1-\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{\infty}f_{2}\left(jhM_{\Phi}\gamma_{x}\right).\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

Continuando a investigação, devemos renormalizar o potencial efetivo para o caso considerado. É evidente que as constantes de renormalização C_i são diretamente afetadas pelo parâmetro de violação χ. Novamente, elas são encontradas via condições de renormalização apresentadas nas Eqs. (2.1.20), (2.1.21) e (2.1.23), o que resulta nas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\frac{C_{1}}{4!}&=\frac{\lambda^{2}}{256\pi^{2}\left(1-\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\ln\left(\frac{\mu^{2}}{m^{2}}\right),\\\frac{C_{2}}{2!}&=\frac{\lambda m^{2}}{64\pi^{2}\left(1-\chi\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\lambda m^{2}}{64\pi^{2}\left(1-\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\ln\left(\frac{\mu^{2}}{m^{2}}\right),\\C_{3}&=\frac{3m^{4}}{128\pi^{2}\left(1-\chi\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{m^{4}}{64\pi^{2}\left(1-\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\ln\left(\frac{\mu^{2}}{m^{2}}\right).\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

A quantidade de interesse aqui é o potencial efetivo renormalizado, até ordem de um loop. Substituindo as constantes de renormalização encontradas na Eq. (3.1.24) no potencial efetivo da Eq. (3.1.23), obtemos o potencial efetivo renormalizado, i.e.:

$$\begin{aligned}V_{\mathrm{eff}}^{R}(\Phi)&=\frac{\lambda\Phi^{4}}{4!}+\frac{m^{2}\Phi^{2}}{2}+\\&+\frac{m^{4}}{64\pi^{2}\left(1-\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\ln\left(\frac{M_{\Phi}^{2}}{m^{2}}\right)+\frac{\lambda m^{2}\Phi^{2}}{64\pi^{2}\left(1-\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\ln\left(\frac{M_{\Phi}^{2}}{m^{2}}\right)-\frac{1}{2}\right]+\\&+\frac{\lambda^{2}\Phi^{4}}{256\pi^{2}\left(1-\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\ln\left(\frac{M_{\Phi}^{2}}{m^{2}}\right)-\frac{3}{2}\right]-\frac{M_{\Phi}^{4}}{2\pi^{2}\left(1-\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{\infty}f_{2}\left(jhM_{\Phi}\gamma_{x}\right).\end{aligned} \tag{3.1.25}$$

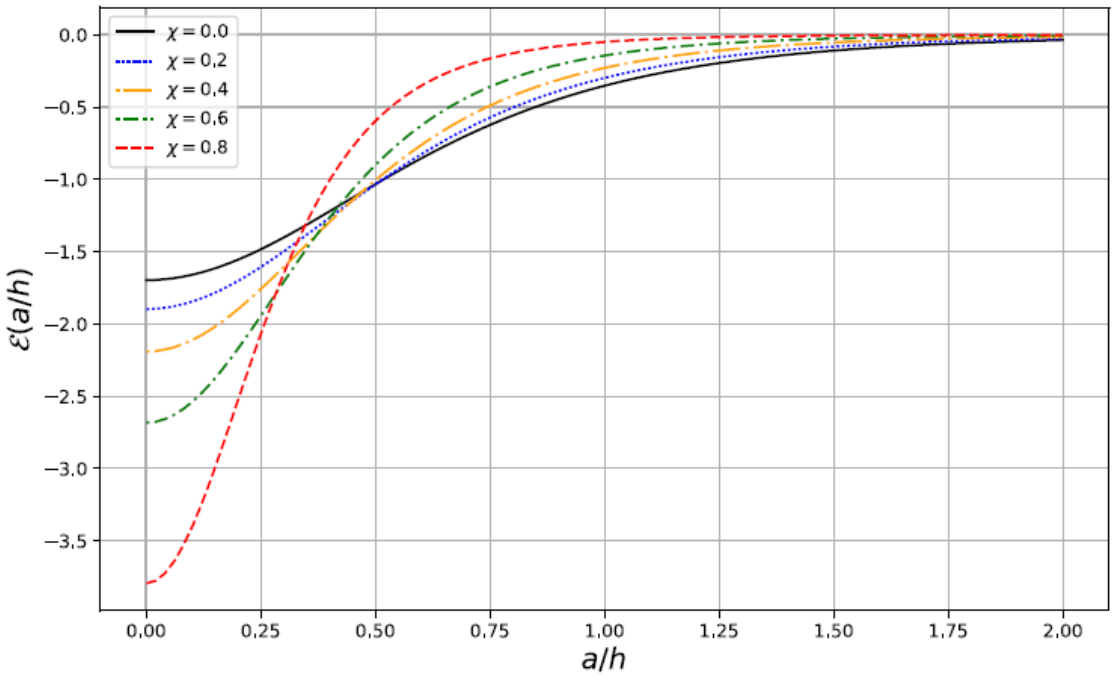

Figure 3.4: Curva da densidade de energia de Casimir adimensional $\mathcal{E} = \frac{2\pi^2}{m^4}\mathcal{E}_{\rm C}$ em termos do comprimento adimensional $\frac{a}{h}$ da Eq. (3.1.26), para diferentes valores do parâmetro χ, considerando a violação de Lorentz na direção x. É assumido $mh = 1$.

Tomando o potencial efetivo com correção de um loop, no estado de vácuo, i.e., $\Phi = 0$, obtemos a densidade de energia de Casimir quando u^μ é na direção x na forma:

$$\mathcal{E}_{\rm C} = V_{\rm eff}^{R}(\Phi)\big|_{\Phi=0} = -\frac{m^4}{2\pi^2(1-\chi)^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{\infty} f_2(jmh\gamma_x)\,. \tag{3.1.26}$$

Comparando a Eq. (3.1.26) com a densidade de energia de Casimir do caso em que u^μ é um 4-vetor do tipo tempo, Eq. (3.1.11), percebemos o importante papel desempenhado pela direção em que a violação de simetria de Lorentz acontece no efeito Casimir. Além disso, comparando a densidade de energia de Casimir acima com o caso em que não há quebra de simetria de Lorentz, Eq. (2.2.25), vemos que a diferença não é apenas um fator multiplicativo pois o termo γ_x aparece no próprio argumento da função de Macdonald da Eq. (3.1.26). Na Fig .3.4, a Eq. (3.1.26) é apresentada como uma densidade de energia adimensional $\frac{2\pi^2}{m^4}\mathcal{E}_{\rm C}$ em termos do comprimento adimensional $\frac{a}{h}$, para diferentes valores do parâmetro de violação χ, assumindo $mh = 1$. Podemos ver que a influência da violação de Lorentz na direção x é, inicialmente, diminuir a densidade de energia de Casimir para valores pequenos de $\frac{a}{h}$ e aumentar para valores maiores. A linha escura corresponde ao caso sem violação e as linhas coloridas correspondem ao caso com violação de Lorentz. Comparando a linha vermelha, $\chi = 0.8$, com a linha escura, $\chi = 0.0$, vemos que inicialmente a violação diminui o valor da densidade de energia de Casimir, mas conforme o valor de $\frac{a}{h}$ aumenta, a violação aumenta a densidade de energia. Contudo, considerando valores grandes o suficiente de $\frac{a}{h}$, a densidade de energia de Casimir Eq. (3.1.26) vai a zero, independente do valor do parâmetro de violação χ.

Considerando o caso do campo escalar sem massa, temos que a densidade de energia de Casimir é obtida a partir da Eq. (3.1.26), tomando o limite para argumentos pequenos da função de Macdonald

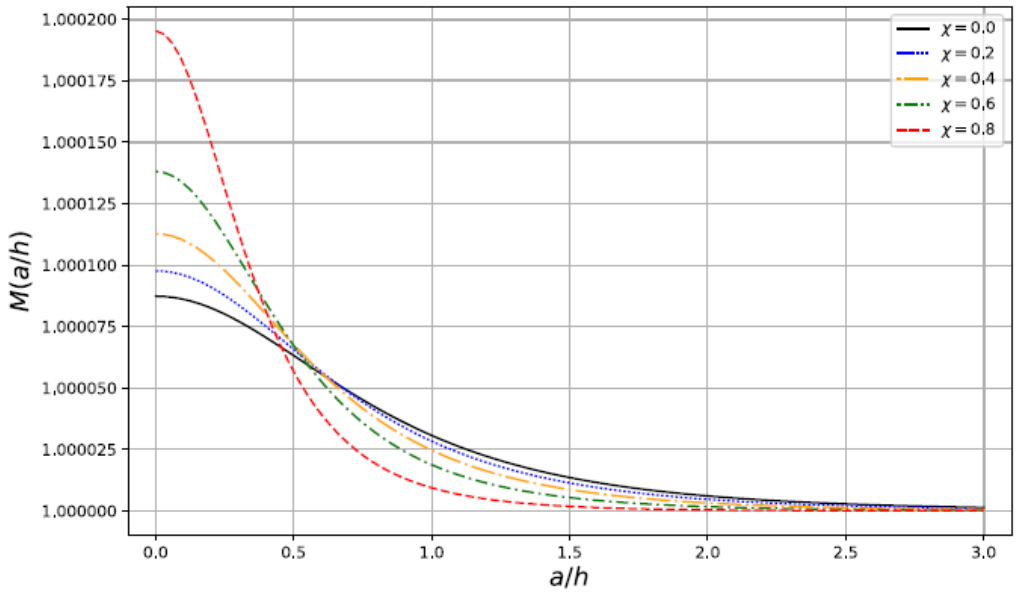

Figure 3.5: Para diferentes valores de χ, considerando a violação de Lorentz na direção x, a Eq. (3.1.28) é exibida como a curva da massa adimensional $M = \frac{m_{\mathrm{T}}}{m}$ em termos do comprimento adimensional $\frac{a}{h}$. É assumido $mh = 1$ e $\lambda = 10^{-2}$.

e resulta na seguinte expressão:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{C}} = -\frac{\pi^2}{90h^4\gamma_x^4\left(1-\chi\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.1.27}$$

Note que a densidade de energia obtida na Eq. (3.1.27) é afetada pela violação de simetria de Lorentz de uma forma diferente, quando comparada com a obtida no caso de u^μ ser um vetor do tipo tempo Eq. (3.1.12).

Investigamos agora como a violação de simetria de Lorentz na direção x afeta a massa topológica do campo escalar. Assim, usando a condição apresentada na Eq. (2.1.21), em conjunto com o potencial efetivo renormalizado da Eq. (3.1.25), obtemos a seguinte expressão para a massa topológica:

$$m_{\mathrm{T}}^2 = m^2\left[1 + \frac{\lambda}{4\pi^2\left(1-\chi\right)^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{\infty} f_1\left(jhm\gamma_x\right)\right]. \tag{3.1.28}$$

Observe que novamente o fator γ_x está incluso no argumento da função de Macdonald. Na Fig. 3.5, exibimos a Eq. (3.1.28) como a curva da massa adimensional $\frac{m_{\mathrm{T}}}{m}$ em termos do comprimento adimensional $\frac{a}{h}$, considerando diferentes valores para o parâmetro de violação χ, assumindo $mh = 1$ e $\lambda = 10^{-2}$. Note que como consequência inicial da violação de Lorentz, a massa topológica sofre um aumento para pequenos valores de $\frac{a}{h}$ e diminui para valores maiores. A linha escura corresponde ao caso sem violação de Lorentz e as linhas coloridas correspondem ao caso com violação. Podemos ver que inicialmente a linha vermelha, $\chi = 0.8$, aumenta a correção para a massa, quando comparada com a linha escura, $\chi = 0$, mas a medida que o valor de $\frac{a}{h}$ aumenta vemos que a linha vermelha diminui a correção da massa. No entanto, para valores suficientemente grandes de $\frac{a}{h}$, a massa m torna-se dominante, independente do valor do parâmetro de violação χ.

Considerando o caso do campo escalar sem massa, vemos que este adquire uma massa puramente

topológica na forma:

$$m_{\mathrm{T}}^2 = \frac{\lambda}{24h^2\gamma_x^2(1-\chi)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.1.29}$$

Ressaltamos que os últimos dois resultados obtidos são completamente diferentes dos encontrados para o caso em que a violação de simetria de Lorentz ocorre na direção temporal, apresentados nas Eqs. (3.1.13) e (3.1.14).

Podemos considerar também a correção de dois loops para o potencial efetivo. Por meio dos métodos explicados anteriormente e, considerando que a violação de Lorentz ocorre na direção x, a contribuição de dois loops no estado de vácuo toma a seguinte forma:

$$V^{(2)}(\Phi)\big|_{\Phi=0} = \frac{\lambda m^4}{32\pi^4(1-\chi)}\left[\sum_{j=1}^{\infty} f_1\left(jhm\gamma_x\right)\right]^2. \tag{3.1.30}$$

Conforme realizado anteriormente, consideramos o limite de pequenos argumentos da expressão acima, para obter correção de dois loops para o caso do campo não massivo. O resultado obtido é expresso por:

$$V^{(2)}(\Phi)\big|_{\Phi=0} = \frac{\lambda}{1152h^4\gamma_x^4(1-\chi)}. \tag{3.1.31}$$

Uma vez que obtemos a correção de um e dois loops para a densidade de energia de Casimir, podemos escrever a expressão completa da densidade de energia de Casimir, até correção de ordem $\lambda^{(1)}$, como a soma da Eq. (3.1.26) com a Eq. (3.1.30), isto é:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{C}}^{\lambda} = \mathcal{E}_{\mathrm{C}} + \frac{\lambda m^4}{32\pi^4(1-\chi)}\left[\sum_{j=1}^{\infty} f_1\left(jhm\gamma_x\right)\right]^2. \tag{3.1.32}$$

Semelhantemente, a expressão completa da densidade de energia de Casimir para o caso do campo escalar sem massa, até correção de ordem $\lambda^{(1)}$, é dada pela soma da Eq. (3.1.27) com a Eq. (3.1.31), o que resulta na seguinte expressão:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{C}}^{\lambda} = \mathcal{E}_{\mathrm{C}} + \frac{\lambda}{1152h^4\gamma_x^4(1-\chi)}. \tag{3.1.33}$$

Claramente a violação de simetria de Lorentz na direção x afeta a densidade de energia de Casimir e suas correções de loop de uma forma completamente diferente do caso em que não há violação da simetria de Lorentz e também, do caso em que a simetria é quebrada na direção temporal, sendo uma de suas principais características o fato do parâmetro de violação afetar o argumento da função de Macdonald presente na correção de loop da Eq. (3.1.30). Na Fig. 3.6, a Eq. (3.1.32) é exibida como a curva da densidade de energia adimensional $\frac{\mathcal{E}_{\mathrm{C}}^{\lambda}}{\mathcal{E}_{\mathrm{C}}}$ em termos do comprimento adimensional $\frac{a}{h}$, para diferentes valores do parâmetro de violação χ, assumindo $mh = 1$ e $\lambda = 10^{-2}$. Vemos que o efeito da violação da simetria de Lorentz na direção x é inicialmente diminuir a densidade de energia de Casimir (3.1.32) para valores pequenos de $\frac{a}{h}$ e aumentar para valores maiores. Podemos confirmar esse comportamento comparando a linha vermelha que corresponde ao caso com violação de Lorentz, $\chi = 0.8$, com a linha escura que corresponde ao caso sem violação, $\chi = 0.0$. Entretanto, considerando valores grandes o suficiente de $\frac{a}{h}$, a correção de loop da Eq. (3.1.30) vai a zero e a densidade de energia de Casimir (3.1.26) se torna dominante, independente do valor do parâmetro de violação χ.

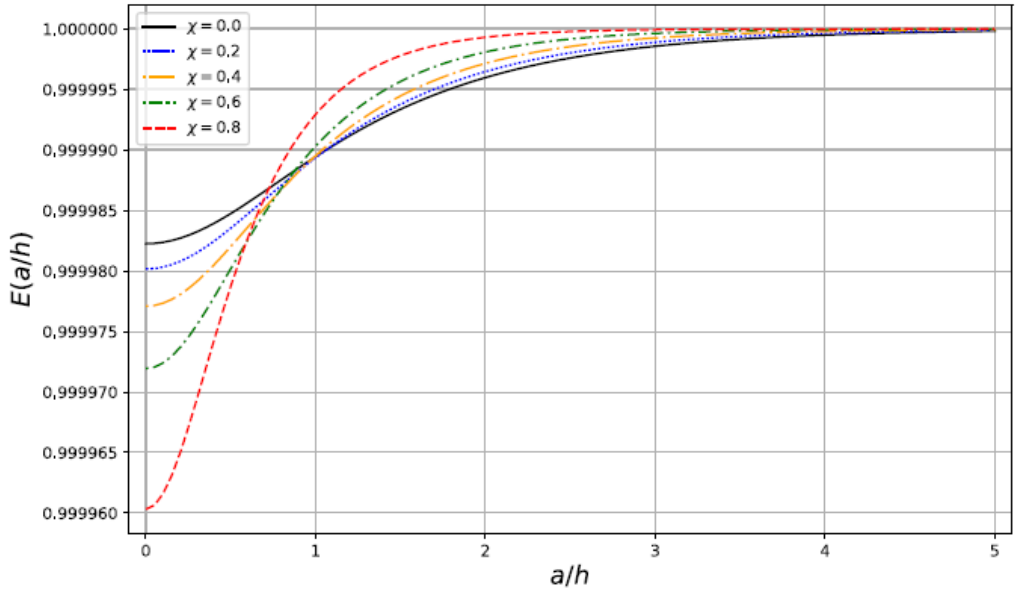

Figure 3.6: Para diferentes valores de χ, considerando a violação de Lorentz na direção x, a Eq. (3.1.32) é exibida como a curva da densidade de energia de Casimir adimensional $E = \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{C}}^{\lambda}}{\mathcal{E}_{\mathrm{C}}}$ com respeito ao comprimento $\frac{a}{h}$. É assumido $mh = 1$ e $\lambda = 10^{-2}$.

3.1.3 Violação de Lorentz na direção espacial: $u^y = (0, 0, 1, 0)$

Nesta seção, voltamos nossa atenção para o caso em que o 4-vetor u^μ aponta para a direção da coordenada y, i.e., $u^y = (0, 0, 1, 0)$. No caso especificado, os autovalores apresentados na Eq. (3.1.3) são reescritos na seguinte forma:

$$a_\sigma = k_\tau^2 + k_x^2 + (1-\chi)\left(\frac{k_x a}{h} - \frac{2\pi n}{h}\right)^2 + k_z^2 + M_\Phi^2. \tag{3.1.34}$$

Essencialmente a violação da simetria de Lorentz na direção y afeta o passo h da hélice da condição de contorno. A correção de um loop do potencial efetivo é obtido como feito nas seções anteriores e, no presente caso, é dada por:

$$V^{(1)}(\Phi) = \frac{M_\Phi^4}{64\pi^2(1-\chi)^{\frac{1}{2}}}\left[\ln\left(\frac{M_\Phi^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2}\right] - \frac{M_\Phi^4}{2\pi^2(1-\chi)^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{\infty} f_2\left(jhM_\Phi\gamma_y\right), \tag{3.1.35}$$

em que definimos a quantidade γ_y na forma:

$$\gamma_y^2 = (1-\chi)^{-1} + r^2, \tag{3.1.36}$$

sendo $r = \frac{a}{h}$. Note que a correção de um loop escrita na Eq. (3.1.35) é a mesma que a apresentada na Eq. (3.1.21), apenas substituindo γ_x por γ_y.

Novamente, realizando o processo de renormalização do potencial efetivo, as constantes de renormalização C_i, são encontradas exatamente na forma como as obtidas na Eq. (3.1.24). Esse resultado pode ser antecipado se percebermos que as direções x e y são relacionados pela condição de contorno tipo hélice Eq. (2.2.1). Assim, o potencial efetivo renormalizado do caso considerado obedece às

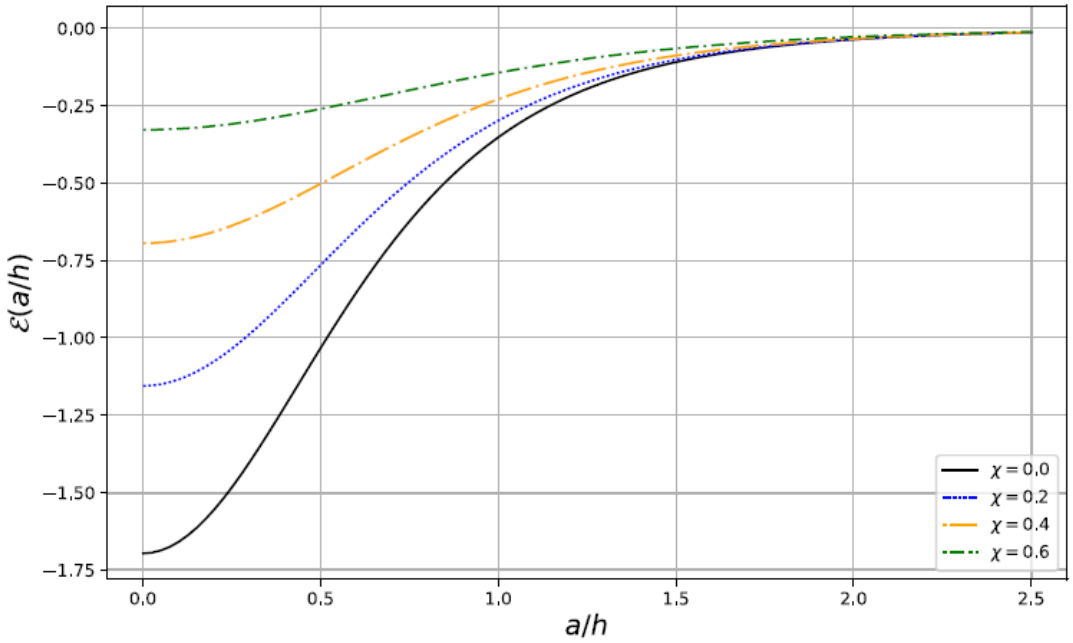

Figure 3.7: Curva da densidade de energia de Casimir adimensional $\mathcal{E} = \frac{2\pi^2}{m^4}\mathcal{E}_{\rm C}$ em termos de $\frac{a}{h}$ da Eq. (3.1.38), considerando diferentes valores de χ, com violação de simetria de Lorentz na direção y. Assumindo $mh = 1$.

mesmas simetrias que as da correção de um loop para o caso anterior, em que u^μ aponta na direção x. Em outras palavras, o potencial efetivo renormalizado para o caso em que a violação da simetria de Lorentz ocorre na direção y é dado pela expressão da Eq. (3.1.25), substituindo γ_x por γ_y, i.e.:

$$\begin{aligned} V^R_{\rm eff}(\Phi) &= \frac{\lambda\Phi^4}{4!} + \frac{m^2\Phi^2}{2} + \\ &+ \frac{m^4}{64\pi^2(1-\chi)^{\frac{1}{2}}}\ln\left(\frac{M^2_\Phi}{m^2}\right) + \frac{\lambda m^2\Phi^2}{64\pi^2(1-\chi)^{\frac{1}{2}}}\left[\ln\left(\frac{M^2_\Phi}{m^2}\right) - \frac{1}{2}\right] + \\ &+ \frac{\lambda^2\Phi^4}{256\pi^2(1-\chi)^{\frac{1}{2}}}\left[\ln\left(\frac{M^2_\Phi}{m^2}\right) - \frac{3}{2}\right] - \frac{M^4_\Phi}{2\pi^2(1-\chi)^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{\infty} f_2\left(jhM_\Phi\gamma_y\right). \end{aligned} \tag{3.1.37}$$

Assim, a densidade de energia de Casimir é obtida tomando o potencial efetivo renormalizado no estado de vácuo, $\Phi = 0$, o que produz o seguinte resultado:

$$\mathcal{E}_{\rm C} = V^R_{\rm eff}(\Phi)\big|_{\Phi=0} = -\frac{m^4}{2\pi^2(1-\chi)^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{\infty} f_2\left(jhm\gamma_y\right). \tag{3.1.38}$$

Na Fig. 3.7, a equação (3.1.38) é apresentada como uma densidade de energia adimensional $\frac{2\pi^2}{m^4}\mathcal{E}_{\rm C}$ em termos do comprimento adimensional $\frac{a}{h}$, para diferentes valores do parâmetro de violação χ, assumindo $mh = 1$. Analisando o gráfico, podemos perceber que o efeito da violação da simetria de Lorentz na direção y é de aumentar a densidade de energia de Casimir. A linha escura corresponde ao caso sem violação de Lorentz, enquanto que as linhas coloridas correspondem ao caso em que a violação é estabelecida. Vemos que conforme aumentamos o valor de χ, a densidade de energia de

Casimir também aumenta. Entretanto, para valores maiores de $\frac{a}{h}$, a densidade de energia de Casimir (3.1.38) vai a zero, independente do valor do parâmetro χ.

O limite do campo escalar sem massa é obtido da mesma forma que nos casos anteriores, a partir do caso massivo escrito na Eq. (3.1.38). Nesse caso, para o campo não massivo, obtemos a densidade de energia de Casimir como:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{C}} = -\frac{\pi^2}{90h^4\gamma_y^4\,(1-\chi)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.1.39}$$

Novamente podemos observar a simetria do último resultado, quando comparado ao caso anterior em que a violação de Lorentz ocorre na direção x. Assim, a densidade de energia de Casimir para o caso do campo não massivo quando a violação de Lorentz ocorre na direção y, Eq. (3.1.39), pode ser obtida a partir do caso quando a violação de Lorentz ocorre na direção x, Eq. (3.1.27), substituindo γ_x por γ_y.

Logicamente a simetria entre os casos de violação de Lorentz na direção x e y se estende para os resultados da massa topológica, isto é, Eqs. (3.1.28) e (3.1.29). No presente caso, essas quantidades são obtidas na forma:

$$m_{\mathrm{T}}^2 = m^2\left[1+\frac{\lambda}{4\pi^2(1-\chi)^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=1}^{\infty} f_1\left(jmh\gamma_y\right)\right], \tag{3.1.40}$$

para o caso do campo escalar massivo e:

$$m_{\mathrm{T}}^2 = \frac{\lambda}{24h^2\gamma_y^2(1-\chi)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.1.41}$$

para o caso do campo escalar sem massa. Na Fig. 3.8, a Eq. (3.1.40) é mostrada como a massa adimensional $\frac{m_{\mathrm{T}}}{m}$ em termos do comprimento $\frac{a}{h}$, para diferentes valores do parâmetro χ, assumindo $mh = 1$ e $\lambda = 10^{-2}$. Podemos ver que o efeito da violação de Lorentz é diminuir a massa topológica. Isso pode ser visto comparando a curva verde, $\chi = 0.6$, com a curva escura, $\chi = 0.0$, que corresponde ao caso sem violação de Lorentz. Contudo, para valores maiores de $\frac{a}{h}$, a massa m se torna dominante, independente do valor do parâmetro de violação χ.

Seguindo os mesmo passos que foram realizados nas seções anteriores, encontramos a contribuição de ordem $\lambda^{(1)}$ para a densidade de energia de Casimir da Eq. (3.1.38) na forma:

$$V^{(2)}\left(\Phi\right)\big|_{\Phi=0} = \frac{\lambda m^4}{32\pi^4(1-\chi)}\left[\sum_{j=1}^{\infty} f_1(jhm\gamma_y)\right]^2, \tag{3.1.42}$$

para o caso do campo escalar massivo e:

$$V^{(2)}\left(\Phi\right)\big|_{\Phi=0} = \frac{\lambda}{1152h^4\gamma_y^4(1-\chi)}, \tag{3.1.43}$$

para o caso do campo escalar sem massa. Como esperado, a simetria existente entre os casos de violação de Lorentz nas direções x e y se manifesta também nas correções de loop (3.1.42) e (3.1.43).

A expressão completa da densidade de energia de Casimir, até ordem $\lambda^{(1)}$, é dada pela soma da Eq. (3.1.38) mais sua correção de loop da Eq. (3.1.42), ou seja:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{C}}^{\lambda} = \mathcal{E}_{\mathrm{C}} + \frac{\lambda m^4}{32\pi^4(1-\chi)}\left[\sum_{j=1}^{\infty} f_1\left(jhm\gamma_y\right)\right]^2, \tag{3.1.44}$$

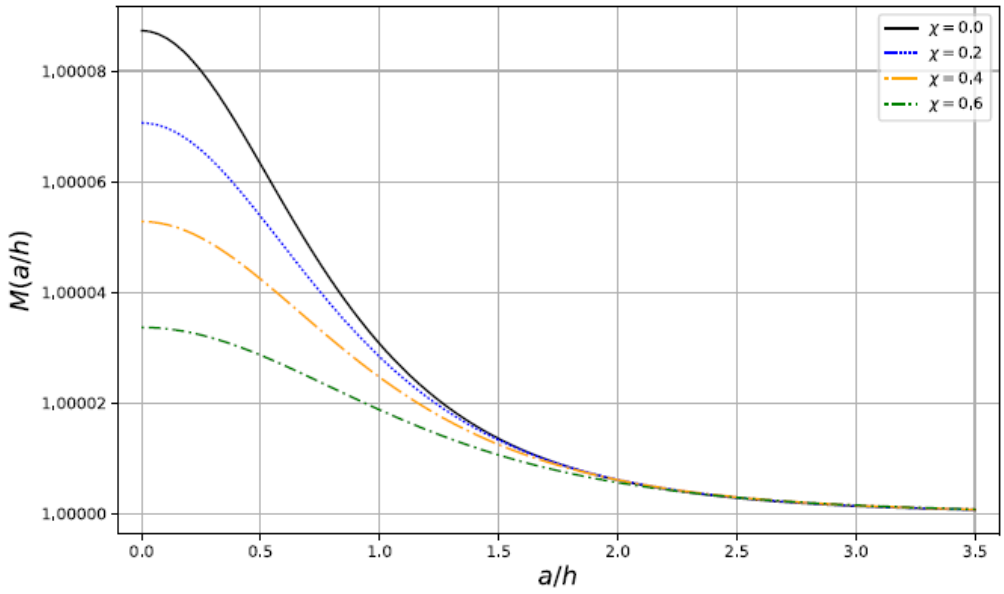

Figure 3.8: Para valores diferentes de χ, considerando a violação de Lorentz na direção y, a Eq. (3.1.40) é exibida como a curva da massa adimensional $M = \frac{m_{\rm T}}{m}$ em termos do comprimento adimensional $\frac{a}{h}$, assumindo $mh = 1$ e $\lambda = 10^{-2}$.

para o caso do campo escalar massivo e:

$$\mathcal{E}_{\rm C}^{\lambda} = \mathcal{E}_{\rm C} + \frac{\lambda}{1152h^4\gamma_y^4(1-\chi)}, \tag{3.1.45}$$

para o caso do campo escalar sem massa. Na Fig. 3.9, a equação Eq (3.1.44) é expressa como a curva da densidade de energia adimensional $\frac{\mathcal{E}_{\rm C}^{\lambda}}{\mathcal{E}_{\rm C}}$ em termos do comprimento adimensional $\frac{a}{h}$, para diferentes valores do parâmetro de violação χ, assumindo $mh = 1$ e $\lambda = 10^{-2}$. Percebemos que o efeito da violação de Lorentz na direção y é inicialmente aumentar a densidade de energia de Casimir Eq. (3.1.44) para alguns valores pequenos de $\frac{a}{h}$ e, ligeiramente diminuir para outros valores maiores. Comparando a linha verde, $\chi = 0.6$, com a linha escura, $\chi = 0.0$, que corresponde ao caso sem violação de Lorentz, podemos ver que inicialmente há um aumento na correção da densidade de energia de Casimir e conforme aumentamos o valor de $\frac{a}{h}$, a curva verde diminui a correção quando comparada com a linha escura. Entretanto, para valores suficientemente grandes de $\frac{a}{h}$, a correção de loop (3.1.42) vai a zero e a densidade de energia de Casimir Eq. (3.1.38) torna-se dominante, independente do valor do parâmetro de violação χ.

Encerramos a discussão ressaltando o fato de que, considerando a violação da simetria de Lorentz do tipo-éter CPT-par, todas as expressões relevantes, como o potencial efetivo renormalizado, a densidade de energia de Casimir e sua correção de ordem $\lambda^{(1)}$ e a geração da massa topológica são afetadas pelo parâmetro de violação χ. Em particular, os casos em que a violação de Lorentz ocorre nas direções x e y, exibem uma simetria entre si. Assim, foi possível obter as expressões de um caso a partir das expressões obtidas no outro caso, pela simples substituição do parâmetro γ_x por γ_y. Além disso, o caso em que o 4-vetor u^{μ} aponta na direção z, também exibe uma simetria com respeito ao caso de violação de Lorentz na direção do tempo. Em outras palavras, podemos obter as expressões do potencial efetivo renormalizado, a densidade de energia de Casimir com suas correções de ordem

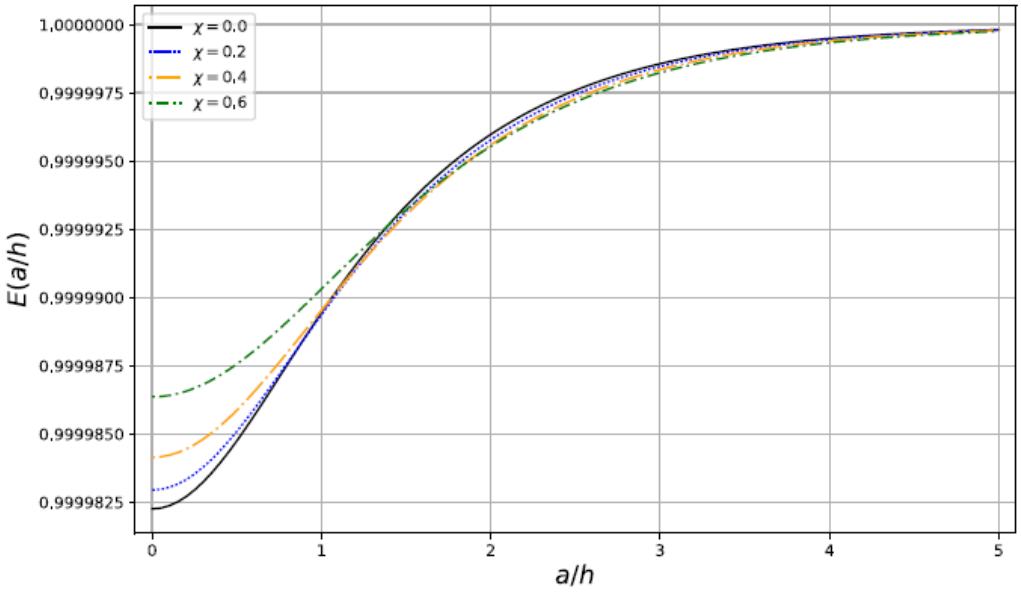

Figure 3.9: Para diferentes valores de χ, considerando a violação de Lorentz na direção y, a Eq. (3.1.44) é mostrada como a curva da densidade de energia de Casimir adimensional $E = \frac{\mathcal{E}_C^{\lambda}}{\mathcal{E}_C}$ em termos do comprimento adimensional $\frac{a}{h}$, assumindo $mh = 1$ e $\lambda = 10^{-2}$.

$\lambda^{(1)}$ e a geração da massa topológica para o caso em que a violação da simetria de Lorentz é na direção z, a partir do caso quando a violação se estabelece na direção do tempo, via substituição de χ por $-\chi$.

No próximo capítulo, consideramos um sistema interagente que consiste em um campo escalar real interagindo com um campo escalar complexo. O campo real é submetido à condição periódica, enquanto que o campo complexo obedece primeiramente à condição quasi-periódica e, posteriormente, à condição mista.

No que segue deste capítulo, estabelecemos a relação entre o caso do sistema apresentado aqui e o caso em que o campo obedece uma condição periódica.

Apêndice do capítulo 3: Relação com o caso periódico

Conforme foi levantado no capítulo anterior, é possível fazer uma conexão entre o caso considerado neste capítulo e o caso em que o campo escalar obedece à condição periódica. Nesta seção obtemos a conexão entre os casos mencionados de forma explícita.

Iniciamos considerando o caso em que a violação da simetria de Lorentz ocorre na direção do tempo. Nesse caso, a função zeta generalizada, após a transformação (CP.2), isto é:

$$k_x = \frac{h}{d}\left(p_x + \frac{2a\pi n}{hd}\right), \quad d^2 = h^2 + a^2, \tag{LP.1}$$

em conjunto com a mudança de variável de integração dada por $\sqrt{(1+\chi)}k_\tau = p_\tau$, é escrita como:

$$\zeta_{\mathrm{L}\tau}(s) = \frac{h}{d}\frac{\Omega_3}{(2\pi)^3\sqrt{(1+\chi)}}\int dp_\tau\, dp_x\, dk_z \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[p_\tau^2 + k_z^2 + p_x^2 + \left(\frac{2a\pi n}{d}\right)^2 + M_\Phi^2\right]^{-s}. \tag{LP.2}$$

Desse modo, é possível escrever a seguinte relação:

$$\zeta_{\mathrm{L}\tau}(s) = \frac{h}{\sqrt{(1+\chi)}d}\zeta_{\mathrm{p}}(s,d)\,, \tag{LP.3}$$

em que a função zeta do caso periódico, $\zeta_{\mathrm{p}}(s,d)$, foi apresentada na Eq. (CP.6). Assim, vemos que a função zeta associada ao caso em que a violação da simetria de Lorentz ocorre na direção temporal, $\zeta_{\mathrm{L}\tau}(s)$, pode ser obtida a partir da função zeta associada ao caso da condição periódica, $\zeta_{\mathrm{p}}(s,d)$, com período d. Note que, por simetria, a relação considerando o caso em que a violação de Lorentz ocorre na direção z é a mesma que a do caso em questão, Eq. (LP.3), apenas substituindo χ por $-\chi$.

Podemos obter também uma conexão entre o caso em que a violação de simetria de Lorentz se estabelece na direção x e o caso da condição periódica. A função zeta generalizada associada ao caso em que a violação de Lorentz ocorre na direção x é:

$$\zeta_{\mathrm{L}x}(s) = \frac{\Omega_3}{(2\pi)^3}\int dk_\tau\, dk_z\, dk_x \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[k_\tau^2 + k_z^2 + (1-\chi)\,k_x^2 + \left(\frac{k_x a}{h} - \frac{2\pi n}{h}\right)^2 + M_\Phi^2\right]^{-s}. \tag{LP.4}$$

Aplicando a seguinte mudança de variável de integração na função zeta acima,

$$\xi k_x = \frac{\xi h p_x}{\sqrt{\xi^2 h^2 + a^2}} + \frac{2\pi n a \xi}{\xi^2 h^2 + a^2}, \quad \xi = \sqrt{(1-\chi)}, \tag{LP.5}$$

obtemos a relação entre $\zeta_{\mathrm{L}x}$ e ζ_{p} na forma:

$$\zeta_{\mathrm{L}x}(s) = \frac{h}{\xi d_x}\zeta_{\mathrm{p}}(s,d_x)\,, \qquad\qquad d_x = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{\xi^2}}. \tag{LP.6}$$

Desse modo, a relação acima nos diz que a função zeta generalizada da Eq. (LP.4), associada ao caso com condição de contorno tipo hélice, pode ser obtida a partir da função zeta generalizada associada ao caso de condição periódica com período d_x. Note que a transformação acima não produz um simples fator multiplicativo como na Eq. (LP.3), mas sim uma modificação no próprio período da função $\zeta_{\mathrm{p}}(s,d_x)$. Este fato se manifesta também no caso em que a direção de violação é a direção y.

Finalmente, vamos considerar a função zeta para o caso em que a violação de Lorentz acontece na direção y. Nesse caso, a função zeta generalizada é escrita da seguinte forma:

$$\zeta_{\mathrm{L}y}(s) = \frac{\Omega_3}{(2\pi)^3}\int dk_\tau\, dk_z\, dk_x \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[k_\tau^2 + k_x^2 + (1-\chi)\left(\frac{k_x a}{h} - \frac{2\pi n}{h}\right)^2 + k_z^2 + M_\Phi^2\right]^{-s}. \tag{LP.7}$$

A transformação que relaciona a função zeta acima com a função zeta associada ao caso periódico é escrita como:

$$k_x = \frac{h p_x}{\sqrt{h^2 + a^2\xi^2}} + \frac{2\pi n a \xi^2}{h^2 + a^2\xi^2}. \tag{LP.8}$$

Então, aplicando a transformação (LP.8) na Eq. (LP.7), resulta na seguinte relação:

$$\zeta_{\mathrm{L}y}(s) = \frac{h}{\xi d_y}\zeta_{\mathrm{p}}(s,d_y)\,, \quad d_y = \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{\xi^2}}. \tag{LP.9}$$

Reiteradamente, a função zeta (LP.7), para o caso em que o campo escalar obedece a condição de contorno tipo hélice, pode ser obtida a partir da função zeta associada ao caso em que o campo está sujeita à condição de contorno periódica com período d_y.

Assim, concluímos este apêndice ressaltando que uma forma alternativa de obter a função zeta generalizada, associada ao caso em que o campo escalar obedece a condição de contorno tipo hélice, é realizar as mudanças de variáveis apresentadas aqui e no apêndice do capítulo anterior e mostar que os resultados podem ser escritos em termos da função zeta generalizada do caso em que o campo escalar obedece à uma condição periódica.

Capítulo 4

Efeito Casimir, correção de loop e geração da massa topológica para campos escalares real e complexo interagindo

Nesta seção, a densidade de energia de Casimir, correções de loop e geração da massa topológica são investigadas para um sistema que consiste de dois campos escalares, um real e um complexo, interagindo entre si. A interação considerada é na forma de interação quártica, que é estabelecida como o produto entre o módulo quadrado do campo complexo e o quadrado do campo real. Além disso, consideramos os termos de auto-interação quártica associados a cada campo. Nessa teoria, o campo escalar real é submetido à condição de contorno periódica, ao passo que o campo complexo obedece à condição quasi-periódica em um caso e, condição de contorno mista em outro. A densidade de energia de Casimir, correções de loop e a massa topológica são calculados de forma analítica para ambos os casos em que os campos são massivos e sem massa. Uma análise dos possíveis estados de vácuo e a correspondente condição de estabilidade são também fornecidas. A fim de um melhor entedimento dos resultados obtidos em nossa investigação, alguns gráficos se fazem presente. Para tal investigação, utilizamos o formalismo do potencial efetivo, que é escrito como uma expansão de loop via integral de trajetória na teoria quântica de campos, de forma similar ao realizado nos capítulos anteriores. Ressaltamos que os resultados apresentados neste capítulo foram publicados na Ref. [60].

4.1 Potencial efetivo para um campo real interagindo com um campo complexo

Na presente seção, consideramos um campo escalar real, que denotamos por ψ, interagindo com um campo complexo denotado por ϕ. O termo de interação é proporcional ao produto do módulo quadrado do campo complexo pelo quadrado do campo real. Essa escolha de interação preserva a simetria discreta $\psi \to -\psi$, bem como a simetria global $\phi \to e^{i\alpha}\phi$. A existência de simetrias na física de partículas é crucial para a previsibilidade de um dado modelo e, para uma melhor correlação com dados experimentais [61], sendo então de suma importância considerar esse tipo de interação na investigação do efeito Casimir, por exemplo. Além da interação entre os campos, consideramos também a auto-interação associada a cada campo.

A Lagrangiana que descreve um sistema que consiste apenas de um campo complexo, com auto-

interação, é dada por:

$$\mathcal{L}_\phi = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - \mu^2 \phi \phi^* - \frac{\lambda_\phi}{6} \left(\phi \phi^*\right)^2 , \tag{4.1.1}$$

em que μ representa a massa do campo complexo e λ_ϕ é a constante de acoplamento da auto-interação. É conveniente decompor o campo complexo em termos de suas componentes reais como segue,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_1 + i\varphi_2\right) , \quad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_1 - i\varphi_2\right) , \tag{4.1.2}$$

em que as componentes φ_i são campos reais. Em termos das componentes φ_i, a Lagrangiana da Eq. (4.1.1) toma a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \left[\partial^\mu \varphi_i \partial_\mu \varphi_i - \mu^2 \varphi_i^2\right] - \frac{\lambda_\phi}{6} \left(\varphi_1^4 + \varphi_2^4 + 2\varphi_1^2 \varphi_2^2\right) . \tag{4.1.3}$$

Salientamos que, as equações acima foram escritas no espaço de Minkowski.

A ação que descreve um modelo consistindo de um campo real acoplado ao campo complexo, considerando os termos de auto-interação de cada campo, em coordenadas Euclidianas é escrita na forma

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{E}}\left[\psi, \varphi_i\right] &= \frac{1}{2} \int d^4x \left[\psi \Box \psi + \sum_{i=1}^{2} \varphi_i \Box \varphi_i\right] - \int d^4x U\left(\psi, \varphi_i\right) , \\ U\left(\psi, \varphi_i\right) &= \frac{m^2 + C_2}{2} \psi^2 + \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 + \frac{g}{2} \varphi^2 \psi^2 + \frac{\lambda_\phi}{4!} \varphi^4 + \frac{\lambda_\psi + C_1}{4!} \psi^4 + C_3 . \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

A massa do campo real é designada por m, λ_ψ é a constante de acoplamento da auto-interação do campo real e g é a constante de acoplamento da interação entre os campos. Os parâmetros C_i são as constantes de renormalização e suas formas explícitas serão obtidas durante o processo de renormalização do potencial efetivo para cada caso considerado nas próximas seções. Note também que usamos a seguinte notação para as componentes do campo complexo: $\varphi^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$. Além disso, o operador D'Alembertiano $\Box$ é escrito no espaço Euclidiano e foi apresentado na Eq. (2.1.7).

A construção do potencial efetivo usando a abordagem da integral de trajetória foi descrita nos capítulos anteriores. Entretanto, apresentaremos alguns passos necessários para nossos propósitos, visto que estamos considerando dois campos interagentes, diferentemente dos capítulos anteriores em que foi considerado apenas um campo auto-interagente. Assim, a ação da Eq. (4.1.4) é expandida em torno de campos de fundo fixos Ψ e Φ_i, isto é, $\psi = \Psi + \chi$, $\varphi_i = \Phi_i + \varrho$, com χ e ϱ designando as flutuações quânticas dos campos real e complexo, respectivamente. Devemos destacar que na presente análise estamos interessados em estudar as influências das condições já mencionadas no campo escalar real e, como consequência, consideraremos o potencial efetivo como sendo função apenas de Ψ, i.e., $V_{\mathrm{eff}}\left(\Psi\right)$. Deste modo, é desnecessário transladar as componentes do campo complexo, o que é equivalente a fazer $\Phi_i = 0$ [37]. Por conta disso, não é necessário incluir termos de renormalização proporcionais a potências de φ_i na ação escrita na Eq. (4.1.4). É importante mencionar que, caso tentássemos prosseguir com os cálculos considerando a translação em φ_i, ou seja, considerando $\Phi_i \neq 0$, encontrariamos expressões que são extremamente incômodas. Por esta razão, a simplificação $\Phi_i = 0$ é justificada nos cálculos que seguem. Nas próximas seções iremos impor, às componentes do campo complexo, uma condição quasi-periódica e posteriormente uma condição de contorno mista. Essas condições requerem que o campo de fundo fixo seja de fato $\Phi_i = 0$, pois é a única escolha possível para um campo constante compatível com as condições impostas. Dessa forma, nas próximas seções

nosso interesse estará em analisar a influência do campo escalar complexo, sujeito às condições quasi-periódica e mista na densidade de energia de Casimir, bem como em sua correção de loop e na massa topológica gerada, associados ao campo escalar real submetido à uma condição periódica.

Lembramos que o potencial efetivo é expandido em potências de $\hbar$ e pode ser escrito até ordem de $\hbar^{(2)}$ como:

$$V_{\text{eff}}\left(\Psi\right)=V^{(0)}\left(\Psi\right)+V^{(1)}\left(\Psi\right)+V^{(2)}\left(\Psi\right). \tag{4.1.5}$$

Conforme mencionado nas seções anteriores, o termo de ordem zero, $V^{(0)}\left(\Psi\right)$, descreve o potencial clássico, i.e., a contribuição a nível de árvore, que no caso sob consideração é dado por

$$V^{(0)}\left(\Psi\right)=U\left(\Psi\right)=\frac{m^2+C_2}{2}\Psi^2+\frac{\lambda_\psi+C_1}{4!}\Psi^4+C_3. \tag{4.1.6}$$

O próximo termo, $V^{(1)}\left(\Psi\right)$, é a correção de um loop para o potencial clássico e, em termos da abordagem de integrais de trajetória, é escrito na seguinte forma [41]:

$$V^{(1)}\left(\Psi\right)=-\frac{1}{\Omega_4}\ln\int\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\varphi_1\mathcal{D}\varphi_2\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\psi,\hat{A}\psi\right)-\frac{1}{2}\left(\varphi_1,\hat{B}\varphi_1\right)-\frac{1}{2}\left(\varphi_2,\hat{B}\varphi_2\right)\right], \tag{4.1.7}$$

em que Ω_4 é o volume 4-dimensional do espaço tempo Euclidiano, que depende das condições impostas aos campos. Note que utilizamos a notação:

$$\left(\psi,\hat{A}\psi\right)=\int d^4x\ \psi\left(x\right)\hat{A}\ \psi\left(x\right), \tag{4.1.8}$$

e os operadores auto-adjuntos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são definidos como:

$$\hat{A}=-\Box+m^2+\frac{\lambda_\psi}{2}\Psi^2,\ \hat{B}=-\Box+\mu^2+g\Psi^2. \tag{4.1.9}$$

Destacamos que os operadores acima definidos, são provenientes da expansão da ação escrita na Eq. (4.1.4) em torno dos campos Ψ e $\Phi_i=0$, de forma análoga à expansão apresentada na Eq. (1.3.7). De forma semelhante ao escrito na Eq. (2.1.8), podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\int d^4x_1d^4x_2\psi\left(x_1\right)\left.\frac{\delta^2S_{\text{E}}\left[\psi,\varphi_i\right]}{\delta\psi\left(x_1\right)\delta\psi\left(x_2\right)}\right|_{\Psi,\Phi_i=0}\psi\left(x_2\right)=\int d^4x\ \psi\left(\Box-m^2-\frac{\lambda_\psi}{2}\Psi^2\right)\psi,\\
&\int d^4x_1d^4x_2\varphi_1\left(x_1\right)\left.\frac{\delta^2S_{\text{E}}\left[\psi,\varphi_i\right]}{\delta\varphi_1\left(x_1\right)\delta\varphi_1\left(x_2\right)}\right|_{\Psi,\Phi_i=0}\varphi_1\left(x_2\right)=\int d^4x\ \varphi_1\left(\Box-\mu^2-g\Psi^2\right)\varphi_1,\\
&\int d^4x_1d^4x_2\varphi_2\left(x_1\right)\left.\frac{\delta^2S_{\text{E}}\left[\psi,\varphi_i\right]}{\delta\varphi_2\left(x_1\right)\delta\varphi_2\left(x_2\right)}\right|_{\Psi,\Phi_i=0}\varphi_2\left(x_2\right)=\int d^4x\ \varphi_2\left(\Box-\mu^2-g\Psi^2\right)\varphi_2,
\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

em que observamos a forma explícita dos operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ no lado direito das expressões acima. Os termos provenientes de derivadas cruzadas, $\frac{\delta^2S_{\text{E}}[\psi,\varphi_i]}{\delta\psi(x_1)\delta\varphi_i(x_2)}$, não contribuem pois são proporcionais a $\Phi_i=0$. Reiteramos que, considerando $\Phi_i\neq0$, um termo proporcional a (ψ,φ_i) estaria presente no expoente do lado direito da Eq. (4.1.7). Este termo, em geral impõe grandes dificuldades quando aplicamos os métodos utilizados nesta tese. Felizmente, as condições de contorno obedecidas pelas componentes do campo complexo são satisfeitas apenas para $\Phi_i=0$. A correção de um loop para o potencial efetivo pode ser escrita em termos dos autovalores associados aos operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$, usando a função zeta de Riemann generalizada, de modo similar ao realizado nos capítulos anteriores [38].

Denotamos por α_σ e β_ρ os autovalores dos operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$, repectivamente. Então, construímos duas funções zeta de Riemann generalizadas, $\zeta_\alpha(s)$ e $\zeta_\beta(s)$, na forma:

$$\zeta_\alpha(s) = \sum_\sigma \alpha_\sigma^{-s}, \quad \zeta_\beta(s) = \sum_\rho \beta_\rho^{-s}, \tag{4.1.11}$$

em que σ e ρ denotam um conjunto de números quânticos associados às autofunções dos operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$, repectivamente.

Dada a forma da correção de um loop para o potencial efetivo Eq. (4.1.7), vemos que esta correção pode ser escrita como a soma de duas quantidades associadas às funções zeta escritas na Eq. (4.1.11). Assim, procedemos de forma similar ao capítulo 2 desta tese, escrevendo os campos ψ e φ_i como combinação linear das autofunções dos operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ dados na Eq. (4.1.9). Nesse caso, lembrando da Eq. (2.1.16), teremos uma contribuição na forma:

$$V_\alpha^{(1)}(\Psi) = \frac{1}{2\Omega_4} \sum_\sigma \ln\left(\frac{\alpha_\sigma}{\nu^2}\right), \tag{4.1.12}$$

proveniente da integração do campo ψ e duas contribuições provenientes das integrações das componentes φ_1 e φ_2, que resultam na seguinte expressão:

$$V_\beta^{(1)}(\Psi) = \frac{1}{\Omega_4} \sum_\rho \ln\left(\frac{\beta_\rho}{\nu^2}\right). \tag{4.1.13}$$

Usamos o parâmetro ν, que tem dimensão de massa, para designar uma medida no espaço funcional e será removido no processo de renormalização do potencial efetivo. Somando as correções escritas nas Eqs. (4.1.12) e (4.1.13), em conjunto com as funções zeta da Eq. (4.1.11) e tendo em mente a Eq. (2.1.18), podemos escrever a correção de ordem um para o potencial efetivo na seguinte forma [38, 53]:

$$\begin{aligned} V^{(1)}(\Psi) &= V_\alpha^{(1)}(\Psi) + V_\beta^{(1)}(\Psi), \\ V_\alpha^{(1)}(\Psi) &= -\frac{1}{2\Omega_4}\left[\zeta_\alpha'(0) + \zeta_\alpha(0)\ln\nu^2\right], \\ V_\beta^{(1)}(\Psi) &= -\frac{1}{\Omega_4}\left[\zeta_\beta'(0) + \zeta_\beta(0)\ln\nu^2\right]. \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Note que na contribuição $V_\beta^{(1)}(\Psi)$ associada ao campo complexo, não temos o fator de $1/2$, isso se deve ao fato de que o campo complexo possui duas componentes, diferentemente do campo real. A forma explícita da corrreção de dois loops, $V^{(2)}(\Psi)$, será apresentada quando a investigarmos. Lembramos que a correção de dois loops pode ser escrita em termos da função zeta generalizada se estamos interessados em calcular as contribuições no estado de vácuo [39, 43, 52].

Após obtermos a forma explícita do potencial efetivo e sua correção de ordem um, precisamos realizar o processo de renormalização. Para a conveniência do leitor e para fornecer alguns detalhes específicos do caso considerado aqui, reiteramos as condições necessárias para o processo de renormalização. A primeira condição, que fixa C_1 da Eq. (4.1.4) e também a constante de acoplamento λ_ψ, é dada por:

$$\left.\frac{d^4 V_{\text{eff}}(\Psi)}{d\Psi^4}\right|_{\Psi=M} = \lambda_\psi, \tag{4.1.15}$$

em que M é um parâmetro com dimensões de massa e, considerando um modelo em que o campo é massivo, pode ser tomado como sendo zero [39, 43, 52]. A segunda condição de renormalização é escrita como segue,

$$\left.\frac{d^2V_{\text{eff}}\left(\Psi\right)}{d\Psi^2}\right|_{\Psi=v}=m^2, \tag{4.1.16}$$

em que v é o valor que minimiza o potencial efetivo. Devemos mencionar que a expressão acima fornece a massa topológica quando usamos o potencial efetivo renormalizado no lugar de $V_{\text{eff}}\left(\Psi\right)$. Observe que $\Psi=v$ na Eq. (4.1.16) é o valor do campo que minimiza o potencial se ele obedecer à condição de extremo, isto é:

$$\left.\frac{dV_{\text{eff}}\left(\Psi\right)}{d\Psi}\right|_{\Psi=v}=0. \tag{4.1.17}$$

Na Sec.4.2.3 discutiremos a estabilidade do estado de vácuo e apresentaremos os valores do campo que obedecem à condição acima. A última condição que devemos usar é escrita na forma [39]:

$$V_{\text{eff}}\left(\Psi\right)|_{\Psi=0}=0, \tag{4.1.18}$$

sendo relevante apenas para o caso de um modelo que considera o campo massivo [39, 43, 52]. Salientamos que as condições de renormalização apresentadas nas Eqs. (4.1.15), (4.1.16) e (4.1.18) devem ser impostas considerando o limite do espaço tempo de Minkowski sem restrições.

Na próxima seção, investigamos a expansão de loop do potencial efetivo e a geração da massa topológica, devido à imposição da condição periódica no campo real e da condição quasi-periódica nas componentes do campo complexo. Ademais, consideramos que as componentes do campo complexo, φ_1 e φ_2, obedecem às mesmas condições.

4.2 Condições periódica e quasi-periódica

Nesta seção consideramos um campo escalar real ψ, interagindo com um campo complexo ϕ via interação quártica. A ação que descreve tal sistema foi apresentada na Eq. (4.1.4). Observe que o sistema leva em consideração também a auto-interação de cada campo. As condições impostas aos campos são a periódica para o campo real e quasi-periódica para as componentes do campo complexo.

Visto que o campo real está sujeito à condição periódica, ele deve satisfazer à seguinte relação:

$$\psi\left(\tau,x,y,z+L\right)=\psi\left(\tau,x,y,z\right), \tag{4.2.1}$$

em que L é o parâmetro de periodicidade. Note que a condição acima leva a uma compactificação da coordenada z em um comprimento L, como é mostrado na ilustração na Fig. 4.1. Levando em consideração a condição periódica, vemos que os autovalores do operador $\hat{A}$, exibido na Eq. (4.1.9), são escritos como:

$$\alpha_\sigma=k_\tau^2+k_x^2+k_y^2+\frac{4\pi^2}{L^2}n^2+M_\lambda^2, \qquad M_\lambda^2=m^2+\frac{\lambda_\psi}{2}\Psi^2, \tag{4.2.2}$$

em que $n=0,\pm1,\pm2,...$, e o subíndice σ representa o conjunto de números quânticos dados por (k_τ,k_x,k_y,n). Nesse caso os autovalores na Eq. (4.2.2) são bem conhecidos na literatura.

Para as componentes do campo complexo φ_i, aplicamos a condição quasi-periódica [46, 43], logo, as componentes φ_i devem satisfazer a relação que segue:

$$\varphi_i\left(\tau,x,y,z+L\right)=e^{2i\pi\theta}\varphi_i\left(\tau,x,y,z\right). \tag{4.2.3}$$

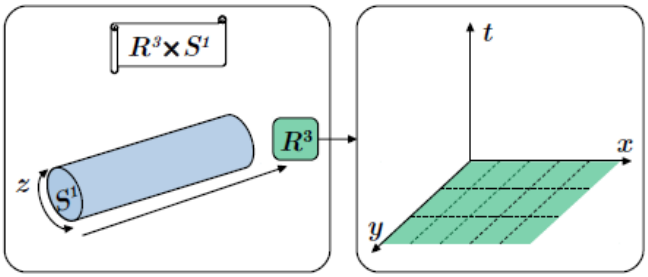

Figure 4.1: Representação ilustrativa de um espaço tempo 4-dimensional com uma coordenada espacial compactificada. O espaço tempo é composto de uma coordenada compactificada z, S^1, e um espaço 3-dimensional com coordenadas t, x, y.

Essa condição também compactifica a coordenada z em um comprimento L, mas agora existe a influência da fase θ, isto é, o parâmetro quasi-periódico que assume valores no intervalo $0 \leq \theta < 1$. Nesse sentido, a condição quasi-periódica restaura a condição periódica para o valor $\theta = 0$. O caso com $\theta = 1/2$ remete à condição anti-periódica. Dessa forma, sob uma condição quasi-periódica, os autovalores do operador $\hat{B}$, exposto na Eq. (4.1.9), tomam a seguinte forma:

$$\beta_\rho = p_\tau^2 + p_x^2 + p_y^2 + \frac{4\pi^2}{L^2}(n+\theta)^2 + M_g^2, \qquad M_g^2 = \mu^2 + g\Psi^2, \tag{4.2.4}$$

em que $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, e ρ representa o conjunto de números quânticos dado por (p_τ, p_x, p_y, n). Os valores $\theta = 0$ e $\theta = 1/2$ são conhecidos também como os casos para campos escalares *untwisted* e *twisted*, respectivamente.

Conhecendo a forma explícita dos autovalores α_σ e β_ρ, dados nas Eqs. (4.2.2) e (4.2.4), respectivamente, podemos construir a função zeta generalizada a partir da Eq. (4.1.11) e obter uma expressão analítica para a correção de primeira ordem do potencial efetivo da Eq. (4.1.14). Fazemos isso na próxima seção, obtendo também a massa topológica.

4.2.1 Correção de um loop

A partir dos autovalores apresentados na Eq. (4.2.2), que são associados com o campo escalar real ψ, construímos a função zeta de Riemann generalizada da Eq. (4.1.11), como:

$$\zeta_\alpha(s) = \frac{\Omega_3}{(2\pi)^3}\int dk_\tau \int dk_x \int dk_y \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[k_\tau^2 + k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + M_\lambda^2\right]^{-s}, \tag{4.2.5}$$

em que Ω_3 representa o volume de três dimensões associado com as coordenadas do espaço tempo Euclidiano τ, x, z, necessário para fazer as integrais adimensionais. Os passos essenciais para o desenvolvimento da função zeta generalizada da Eq. (4.2.5) são apresentados nas Refs. [52, 43] e nos capítulos anteriores, então indicaremos apenas os principais passos.

Primeiramente, utilizamos a identidade da Eq. (2.2.6) na expressão da função zeta da Eq. (4.2.5), o que resulta em integrais Gaussianas nos momentos k_τ, k_x e k_y. Após a realização das integrais Gaussianas, usamos a representação integral da função gamma da Eq. (2.2.10), obtendo assim a seguinte expressão:

$$\zeta_\alpha(s) = \frac{\Omega_4 \pi^{\frac{3}{2}-2s}}{2^{2s}L^{4-2s}}\frac{\Gamma\left(s-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s)}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[n^2 + \left(\frac{M_\lambda L}{2\pi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}-s}. \tag{4.2.6}$$

A quantidade Ω_4 representa o volume quadri-dimensional no espaço tempo Euclidiano, que leva em consideração a topologia do espaço tempo $S^1 \times R^3$, como consequência da condição periódica imposta no campo escalar real. No caso em consideração o volume 4-dimensional é escrito como $\Omega_4 = \Omega_3 L$. Para realizar a soma em n no último termo do lado direito da Eq. (4.2.6), valemo-nos da continuação analítica da função de Epstein generalizada não homogênea dada na Eq. (2.2.12). A expressão resultante é escrita na forma:

$$\zeta_\alpha(s) = \frac{\Omega_4 M_\lambda^{4-2s}}{2^4\pi^2\Gamma(s)}\left[\Gamma(s-2) + 2^{4-s}\sum_{j=1}^{\infty} f_{(2-s)}(jM_\lambda L)\right], \tag{4.2.7}$$

em que a função $f_\gamma(x)$ foi definida na Eq. (2.2.16). Considerando a função zeta generalizada acima e sua derivada, no limite $s \to 0$, encontramos a correção de um loop do potencial efetivo Eq. (4.1.14), como segue:

$$V_\alpha^{(1)}(\Psi) = \frac{M_\lambda^4}{64\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_\lambda^2}{\nu^2}\right) - \frac{3}{2}\right] - \frac{M_\lambda^4}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty} f_2(jM_\lambda L). \tag{4.2.8}$$

A expressão acima é a correção de primeira ordem, isto é, a correção de um loop, do potencial efetivo proveniente da condição periódica obedecida pelo campo real. Precisamos agora calcular a contribuição proveniente do campo complexo.

Considerando as componentes do campo escalar complexo, lançamos mão dos autovalores dados na Eq. (4.2.4) para construir a seguinte função zeta generalizada:

$$\zeta_\beta(s) = \frac{\Omega_3}{(2\pi)^3}\int dp_\tau \int dp_x \int dp_y \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[p_\tau^2 + p_x^2 + p_y^2 + \frac{(2\pi)^2}{L^2}(n+\theta)^2 + M_g^2\right]^{-s}. \tag{4.2.9}$$

A expressão da função zeta generalizada $\zeta_\beta(s)$, que surge devido ao campo escalar real foi obtida de forma detalhada na Ref. [43] e, logicamente, é similar ao caso do campo complexo considerado aqui, visto que as componentes do campo complexo são campos reais. Portanto, apresentamos apenas o resultado final, i.e.:

$$\zeta_\beta(s) = \frac{\Omega_4 M_g^{4-2s}}{16\pi^2\Gamma(s)}\left[\Gamma(s-2) + 2^{4-s}\sum_{j=1}^{\infty}\cos(2\pi j\theta) f_{(2-s)}(jM_g L)\right]. \tag{4.2.10}$$

A partir da função zeta obtida na equação acima, é possível escrever a correção de primeira ordem para o potencial efetivo, devido ao campo complexo como:

$$V_\beta^{(1)}(\Psi) = \frac{M_g^4}{32\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_g^2}{\nu^2}\right) - \frac{3}{2}\right] - \frac{M_g^4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\cos(2\pi j\theta) f_2(jM_g L). \tag{4.2.11}$$

Coletando os resultados obtidos nas Eqs. (4.2.8) e (4.2.11), podemos escrever a correção de primeira ordem, ou correção de um loop, para o potencial efetivo na seguinte forma:

$$\begin{aligned} V^{(1)}(\Psi) &= \frac{M_\lambda^4}{64\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_\lambda^2}{\nu^2}\right) - \frac{3}{2}\right] + \frac{M_g^4}{32\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_g^2}{\nu^2}\right) - \frac{3}{2}\right] + \\ &\quad - \frac{M_\lambda^4}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty} f_2(jM_\lambda L) - \frac{M_g^4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\cos(2\pi j\theta) f_2(jM_g L). \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Assim, a partir da correção acima, podemos escrever o potencial efetivo não renormalizado, escrito na Eq. (4.1.5), até ordem $\hbar^{(1)}$ como segue:

$$V_{\text{eff}}(\Psi) = \frac{m^2+C_2}{2}\Psi^2 + \frac{\lambda_\psi + C_1}{4!}\Psi^4 + C_3 + \frac{M_\lambda^4}{64\pi^2}\left[\ln\frac{M_\lambda^2}{\nu^2} - \frac{3}{2}\right] + \\ + \frac{M_g^4}{32\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_g^2}{\nu^2}\right) - \frac{3}{2}\right] - \frac{M_\lambda^4}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty} f_2(jM_\lambda L) - \frac{M_g^4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\cos(2\pi j\theta)\, f_2(jM_g L). \quad (4.2.13)$$

É evidente que as correções de um loop nas Eqs. (4.2.8) e (4.2.11), devido aos campos real e complexo, respectivamente, diferem por um fator de dois quando $\theta = 0$, que é o caso particular da condição periódica. A justificativa para isso é que o campo complexo possui duas componentes reais, ou seja, dois graus de liberdade. Nessa perspectiva, estamos considerando que os campos possuem massas diferentes, isto é, o campo escalar real tem massa m e o campo complexo possui massa μ.

Tendo obtido o potencial efetivo $V_{\text{eff}}(\Psi)$ na Eq. (4.2.13), nosso trabalho agora é realizar o processo de renormalização. Assim, seguindo o procedimento de renormalização, a partir das condições escritas nas Eqs. (4.1.15), (4.1.16) e (4.1.18), tendo em mente o limite de Minkowski, isto é, $L \to \infty$, obtemos as constantes de renormalização C_i de forma explícita:

$$C_1 = \frac{3\lambda_\psi^2}{32\pi^2}\ln\left(\frac{\nu^2}{m^2}\right) + \frac{3g^2}{4\pi^2}\ln\left(\frac{\nu^2}{m^2}\right), \\ C_2 = \frac{\lambda_\psi m^2}{32\pi^2}\left[\ln\left(\frac{\nu^2}{m^2}\right) + 1\right] + \frac{g\mu^2}{8\pi^2}\left[\ln\left(\frac{\nu^2}{\mu^2}\right) + 1\right], \\ C_3 = \frac{m^4}{64\pi^2}\left[\ln\frac{\nu^2}{m^2} + \frac{3}{2}\right] + \frac{\mu^4}{32\pi^2}\left[\ln\left(\frac{\nu^2}{\mu^2}\right) + \frac{3}{2}\right]. \quad (4.2.14)$$

Ademais, substituindo as constantes de renormalização que obtemos nas equações acima, diretamente no potencial efetivo da Eq. (4.2.13), encontramos o potencial efetivo renormalizado na seguinte forma:

$$V_{\text{eff}}^R(\Psi) = \frac{m^2}{2}\Psi^2 + \frac{\lambda_\psi}{4!}\Psi^4 + \frac{\mu^4}{32\pi^2}\ln\left(\frac{M_g^2}{\mu^2}\right) + \frac{m^4}{64\pi^2}\ln\left(\frac{M_\lambda^2}{m^2}\right) + \\ + \frac{g\mu^2\Psi^2}{16\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_g^2}{\mu^2}\right) - \frac{1}{2}\right] + \frac{\lambda_\psi^2\Psi^4}{256\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_\lambda^2}{m^2}\right) - \frac{3}{2}\right] + \frac{\lambda_\psi m^2\Psi^2}{64\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_\lambda^2}{m^2}\right) - \frac{1}{2}\right] + \\ + \frac{g^2\Psi^4}{32\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_g^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2}\right] - \frac{M_\lambda^4}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty} f_2(jM_\lambda L) - \frac{M_g^4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\cos(2\pi j\theta)\, f_2(jM_g L). \quad (4.2.15)$$

Conhecendo a forma explítica do potencial efetivo renormalizado apresentada na Eq. (4.2.15), podemos calcular a densidade de energia de Casimir e também a massa topológica, até correção de primeira ordem.

Para dar prosseguimento à nossa investigação e avaliar a densidade de energia de vácuo, vamos considerar que $\Psi = 0$ é um estado de vácuo estável da teoria, embora existam outros possíveis estados de vácuo estáveis, como analisaremos na Sec. 4.2.3. Assim, a partir do potencial efetivo renormalizado $V_{\text{eff}}^R(\Psi)$ da Eq. (4.2.15), podemos calcular a densidade de energia de Casimir de forma direta, pois o estado de vácuo é obtido fazendo $\Psi = 0$. Portanto, a densidade de energia de Casimir é encontrada como sendo:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{C}} &= V_{\text{eff}}^R(\Psi)\big|_{\Psi=0} \\ &= -\frac{m^4}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} f_2(nmL) - \frac{\mu^4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\cos(2\pi j\theta)\, f_2(j\mu L). \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

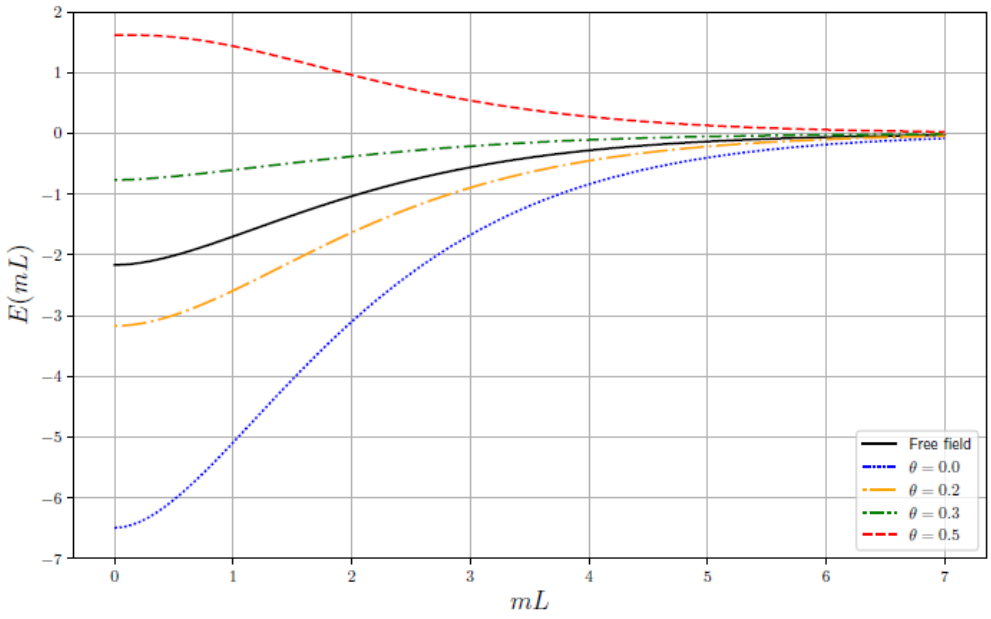

Figure 4.2: Gráfico da densidade de energia de Casimir adimensional, $E\left(mL\right) = 2\pi^2 L^4 \mathcal{E}_{\mathrm{C}}$, definida na Eq. (4.2.16), como função de mL, para diferentes valores do parâmetro θ e tomando $m = \mu$.

Reconhecemos que o primeiro termo no lado direito da Eq. (4.2.16) é a contribuição para a densidade de energia de Casimir proveniente do campo escalar real ψ, submetido à condição periódica, enquanto que o segundo termo é a contribuição do campo complexo que obedece à condição quasi-periódica [43]. Particularmente, considerando o caso com $\theta = 0$, vemos que a contribuição vinda do campo complexo é o dobro da contribuição proveniente do campo real se as massas dos campos forem iguais. Para uma melhor visualização da influência que o campo complexo, sob condição quasi-periódica, exerce na densidade de energia de Casimir do campo real, plotamos a expressão da Eq. (4.2.16) como função de mL, na Fig. 4.2, para diferentes valores de θ e considerando as massas iguais, isto é, $m = \mu$. A linha sólida escura é a densidade de energia de Casimir livre de interação com o campo complexo, apenas com o efeito da auto-interação do campo real. É evidente que, dependendo do valor do parâmetro quasi-periódico θ, a densidade de energia de Casimir pode ser maior ou menor que a energia do caso livre, incluindo a possibilidade de termos valores positivos e negativos. Note que as curvas tendem a repetir seu comportamento para valores tais que $\theta > 0.5$. Por exemplo, a curva representada pela linha verde pontilhada para $\theta = 0.3$ é a mesma que para $\theta = 0.7$ e assim por diante. Ademais, todas as curvas terminam nos seus respectivos valores constantes para o caso de campos sem massa, $mL = 0$, o que pode ser verificado na Eq. (4.2.17). Além disso, no regime $mL >> 1$, a densidade de energia de Casimir Eq. (4.2.16) vai a zero para todas as curvas, como é revelado pelo gráfico da Fig. 4.2. Isso é uma consequência do decaimento exponencial da função de Macdonald para argumentos grandes [55].

É relevante considerar o caso em que os campos não possuem massa, i.e., o limite $m, \mu \to 0$. Assim, devemos lembrar do limite para pequenos argumentos da função de Macdonald, isto é, $K_\mu\left(x\right) \approx \frac{\Gamma(\mu)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^\mu$ [55]. Então, a partir da expressão dada na Eq. (4.2.16), obtemos a densidade de

energia de Casimir para o caso dos campos sem massa, na forma:

$$\mathcal{E}_{\rm C} = -\frac{\pi^2}{90L^4} - \frac{2}{\pi^2 L^4}\sum_{j=1}^{\infty} j^{-4}\cos\left(2\pi j\theta\right), \tag{4.2.17}$$

em que empregamos o seguinte resultado da função zeta de Riemann usual $\zeta\left(4\right) = \frac{\pi^4}{90}$ [56, 57], no primeiro termo do lado direito da Eq. (4.2.17). Esse termo é o bem conhecido resultado do efeito Casimir para o caso de um campo real livre e sem massa, submetido à condição periódica [38]. Além disso, o segundo termo do lado direito da Eq. (4.2.17) pode ser reescrito em termos dos polinômios de Bernoulli, definidos por:

$$B_{2k}\left(\theta\right) = \frac{\left(-1\right)^{k-1} 2\left(2k\right)!}{\left(2\pi\right)^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2\pi n\theta\right)}{n^{2k}}. \tag{4.2.18}$$

Assim, a expressão da densidade de energia de Casimir para o caso dos campos não massivos é encontrada como sendo:

$$\mathcal{E}_{\rm C} = -\frac{\pi^2}{90L^4} + 2\frac{\pi^2}{3L^4}\left(\theta^4 - 2\theta^3 + \theta^2 - \frac{1}{30}\right), \tag{4.2.19}$$

em que fizemos uso do polinômio de Bernoulli de quarta ordem, isto é, $B_4\left(\theta\right) = \left(\theta^4 - 2\theta^3 + \theta^2 - \frac{1}{30}\right)$. Conforme é esperado, o primeiro termo do lado direito da Eq. (4.2.19) é consistente com o resultado encontrado na Ref. [38], enquanto que o segundo termo é consistente com o resultado obtido nas Refs. [46, 43] (levando em conta as duas componentes do campo complexo). Este último também fornece a expressão correta para os casos periódico ($\theta = 0$) e anti-periódico ($\theta = 1/2$).

Agora direcionamos nossa atenção para a investigação da influência das condições na massa m do campo escalar real, i.e., a geração da massa topológica a nível de um loop. A partir da condição apresentada na Eq. (4.1.16) e tendo em mente o potencial efetivo renormalizado obtido na Eq. (4.2.15), obtemos a seguinte expressão para a massa topológica do campo escalar real ψ:

$$m_{\rm T}^2 = m^2\left[1 + \frac{\lambda_\psi}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} f_1\left(nmL\right) + \frac{\mu^2}{m^2}\frac{g}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\cos\left(2\pi j\theta\right) f_1\left(j\mu L\right)\right]. \tag{4.2.20}$$

Note que a massa topológica m_T^2 não apresenta divergência alguma, o que permite considerar também o limite dos campos não massivos, isto é, $m, \mu \to 0$. Assim, usando a mesma aproximação para a função de Macdonald que foi aplicada para obter a Eq. (4.2.17) a partir de Eq. (4.2.16), obtemos a massa topológica para os campos sem massa na seguinte forma:

$$m_{\rm T}^2 = \frac{\lambda_\psi}{24L^2} + \frac{g}{L^2}\left(\theta^2 - \theta + \frac{1}{6}\right). \tag{4.2.21}$$

Na expressão acima recorremos à função zeta de Riemann usual, $\zeta\left(2\right) = \frac{\pi^2}{6}$ [56, 57] e também os polinômios de Bernoulli apresentados na Eq. (4.2.18), com $B_2\left(\theta\right) = \theta^2 - \theta + \frac{1}{6}$. Como pode ser visto, a correção para a massa é proveniente do termo de auto-interação, que é proporcional a λ_ψ e, também da interação entre os campos, que é proporcional à constante de acoplamento g. Note que o primeiro termo do lado direito da Eq. (4.2.21) foi obtido anteriormente na Ref. [38], considerando um campo escalar real com auto-interação apenas.

Outro aspecto interessante associado à massa topológica é que se $\lambda_\psi < g$, a Eq. (4.2.21) pode ser tornar negativa dependendo do valor de θ, o que em princípio indica instabilidade do estado de

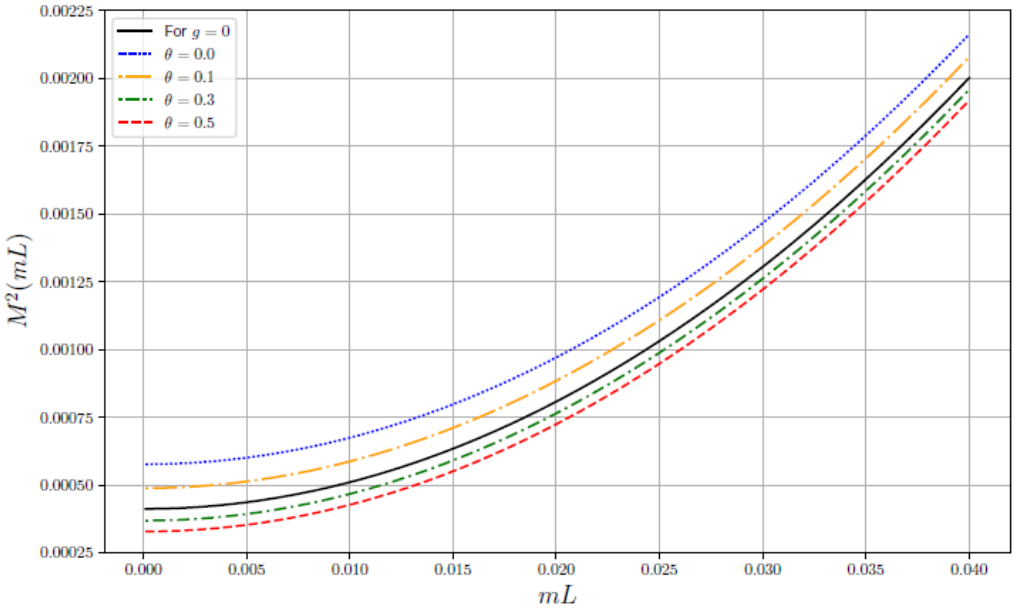

Figure 4.3: Gráfico da massa topológica ao quadrado e adimensional $M^2(mL) = m_{\mathrm{T}}^2 L^2$, definida na Eq. (4.2.20), como função de mL, para diferentes valores de θ e tomando $m = \mu$. Assuminido $\lambda_\psi = 10^{-2}$ e $g = 10^{-3}$.

vácuo. Se tivéssemos, por exemplo, considerado uma teoria do campo escalar complexo com apenas a auto-interação (sem interação entre os campos), isso seria um problema, visto que não faz sentido considerar um campo complexo, $\Phi_i \neq 0$, compatível com a condição quasi-periódica para $\theta \neq 0$. O caso com $\theta = 0$ não exibe tal problema e é por isso que submetemos o campo escalar real à condição periódica. No entanto, esse problema é resolvido levando em consideração uma teoria interagente como no presente caso (veja também a Ref. [41]). Assim, é possível estudar a estabilidade do vácuo, o que é feito na Sec. 4.2.3 considerando, por simplicidade, o caso em que os campos não possuem massa. A análise indica que o estado de vácuo $\Psi = 0$ é estável apenas se $\lambda_\psi > -24gB_2(\theta)$, caso contrário é necessário considerar as outras duas possibilidades de estado de vácuo estável que serão apresentadas nas próximas seções.

Na Fig. 4.3 plotamos a massa adimensional ao quadrado, $M^2(mL) = m_{\mathrm{T}}^2 L^2$, definida na Eq. (4.2.20), como função de mL, para diferentes valores de θ e tomando as massas iguais, isto é, $m = \mu$. O gráfico mostra as curvas para $\lambda_\psi = 10^{-2}$ e $g = 10^{-3}$, o que satisfaz a condição $\lambda_\psi > -24gB_2(\theta)$ que leva $\Psi = 0$ a ser um estado de vácuo estável. Esse gráfico fornece valores positivos da Eq. (4.2.21) para todos os valores possíveis do parâmetro quasi-periódico θ, como esperado. Dependendo do valor de θ, a correção para a massa pode ser maior ou menor que o caso sem interação (linha escura).

Na Fig. 4.4 plotamos a massa adimensional ao quadrado $M^2(mL) = m_{\mathrm{T}}^2 L^2$, definida na Eq. (4.2.20), como função de mL, para diferentes valores de θ e tomando as massas iguais, isto é, $m = \mu$. De forma diferente do gráfico apresentado na Fig. 4.3, aqui consideramos os valores $\lambda_\psi = 10^{-3}$ e $g = 10^{-2}$, o que satisfaz a condição $\lambda_\psi < -24gB_2(\theta)$. Nesse caso, existem valores negativos da Eq. (4.2.21) para $\theta = 0.3$ e $\theta = 0.5$, que levam $\Psi = 0$ a ser um estado de vácuo instável. Entretanto, em uma teoria massiva, $\Psi = 0$, se torna estável para grandes valores de mL mesmo que $\lambda_\psi < g$, conforme indicado na Fig. 4.4. Note que todas as curvas em $mL = 0$ terminam em seus correspondentes valores constantes para o caso dos campos sem massa da Eq. (4.2.21). Para grandes valores de mL a função

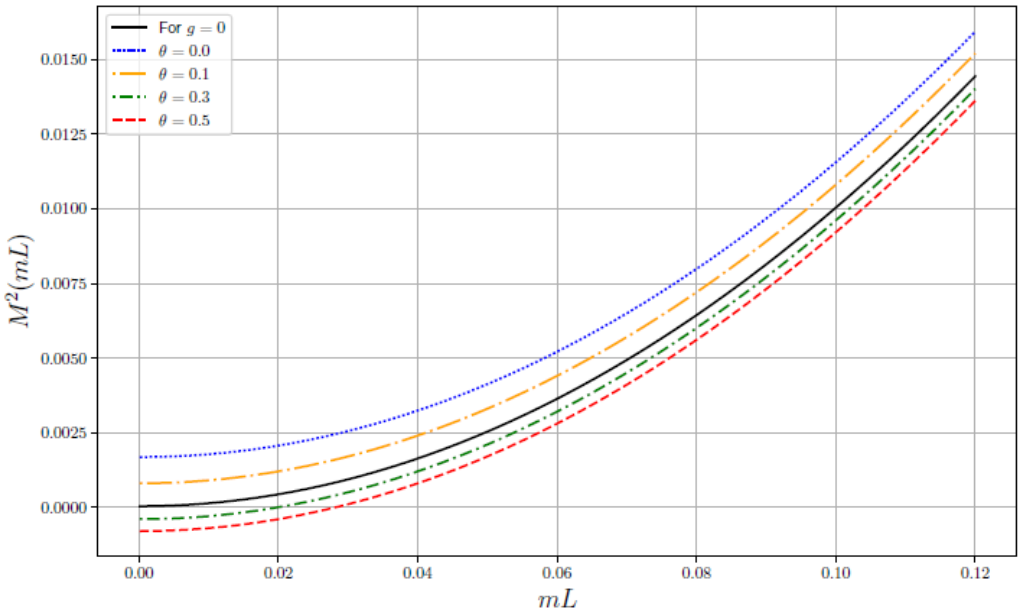

Figure 4.4: Gráfico da massa topológica ao quadrado e adimensional $M^2(mL) = m_{\mathrm{T}}^2 L^2$, definida da Eq. (4.2.20), como função de mL, para diferentes valores de θ e tomando $m = \mu$. Assumindo $\lambda_\psi = 10^{-3}$ e $g = 10^{-2}$.

de Macdonald decai exponencialmente e as curvas são dominadas pelo primeiro termo do lado direito da Eq. (4.2.20). Note ainda que as curvas tendem a se repetir para valores $\theta > 0.5$.

Aqui terminamos a análise da correção de um loop, tal que podemos prosseguir para a correção de dois loops, ainda considerando que $\Psi = 0$ é o estado de vácuo estável. Como já discutido acima, isso significa que estamos considerando a restrição $\lambda_\psi > -24gB_2(\theta)$.

4.2.2 Correção de dois loops

Nesta seção, analisamos a correção de loop da densidade de energia de Casimir obtida nas Eqs. (4.2.16) e (4.2.17). Isso pode ser feito considerando a correção de segunda ordem do potencial efetivo, que pode ser obtida a partir dos gráficos de Feynman de dois loops. Visto que temos mais de um termo que contribui, calculamos todas as contribuições de dois loops de cada gráfico de Feynman separadamente. Portanto, escrevemos a correção de loop $V^{(2)}(\Psi)$ na forma:

$$V^{(2)}(\Psi) = V^{(2)}_{\lambda_\psi}(\Psi) + V^{(2)}_{\lambda_\varphi}(\Psi) + V^{(2)}_{g}(\Psi) + V^{(2)}_{2\lambda_\varphi}(\Psi). \tag{4.2.22}$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima, $V^{(2)}_{\lambda_\psi}$, é a contribuição proveniente do termo de auto-interação do campo real, $\frac{\lambda_\psi}{4!}\psi^4$. O termo seguinte, $V^{(2)}_{\lambda_\varphi}$, é a contribuição do termo de auto-interação do campo complexo, isto é, $\frac{\lambda_\varphi}{4!}\varphi_1^4$ e $\frac{\lambda_\varphi}{4!}\varphi_2^4$. O terceiro termo, $V^{(2)}_{g}$, é associado com a interação entre os campos real e complexo, ou seja, $\frac{g}{2}\varphi_1^2\psi^2$ e $\frac{g}{2}\varphi_2^2\psi^2$. Por fim, o último termo do lado direito da equação acima, $V^{(2)}_{2\lambda_\varphi}$, é associado ao termo cruzado das componentes do campo complexo, isto é, $\frac{\lambda_\varphi}{4!}2\varphi_1^2\varphi_2^2$. Nessa circunstância, apenas por conveniência de escrita, mudamos a notação da constante de acoplamento da auto-interação do campo complexo de λ_ϕ para λ_φ.

Primeiramente consideramos a contribuição da auto-interação associada ao campo real, $V^{(2)}_{\lambda_\psi}(\Psi)$. Visto que estamos interessados no estado de vácuo $\Psi = 0$, a única contribuição não trivial é proveniente do gráfico de Feynman exibido na Fig. 2.2. Com a ajuda desse gráfico de Feynman, podemos escrever a contribuição de dois loops em termos da função zeta generalizada da Eq. (4.2.7) da seguinte forma [52, 43]:

$$V^{(2)}_{\lambda_\psi}(\Psi)\Big|_{\Psi=0} = \lim_{s\to 1}\frac{\lambda_\psi}{8}\left[\frac{\zeta^R_\alpha(s)}{\Omega_4}\right]^2\Bigg|_{\Psi=0}. \tag{4.2.23}$$

A função zeta $\zeta^R_\alpha(s)$ é definida como sendo a parte não divergente da função zeta generalizada dada na Eq. (4.2.7), no ponto $s = 1$ [52, 43], i.e.:

$$\zeta^R_\alpha(s) = \zeta_\alpha(s) - \frac{\Omega_4 M_\lambda^{4-2s}}{16\pi^2}\frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)}. \tag{4.2.24}$$

Note que o termo que esta sendo subtraído na equação acima é independente do parâmetro L, quando é dividido por Ω_4, que caracteriza a condição e, como é usual, deve ser descartado. Explicitamente, obtemos o seguinte resultado para a contribuição de dois loops, devido a auto-interação do campo escalar real:

$$V^{(2)}_{\lambda_\psi}(\Psi)\Big|_{\Psi=0} = \frac{\lambda_\psi m^4}{32\pi^4}\left[\sum_{j=1}^{\infty} f_1(jmL)\right]^2. \tag{4.2.25}$$

O resultado acima mostra que a contribuição de dois loops é proporcional à constante de acoplamento λ_ψ, como deve ser.

A segunda contribuição, $V^{(2)}_{\lambda_\varphi}(\Psi)$, para a correção de dois loops na Eq. (4.2.22) pode ser lida do mesmo gráfico apresentado na Fig. 2.2. Podemos construir a função $\zeta^R_\beta(s)$ a partir da função zeta generalizada (4.2.10), subtraíndo a parte divergente no ponto $s = 1$ e obter a contribuição da auto-interação do campo complexo, isto é,

$$V^{(2)}_{\lambda_\varphi}(\Psi)\Big|_{\Psi=0} = 2\frac{\lambda_\varphi \mu^4}{32\pi^4}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\cos(2\pi j\theta)\, f_1(j\mu L)\right]^2, \tag{4.2.26}$$

que é proporcional a λ_φ. O fator 2 é por conta das duas componentes do campo complexo, isto é, φ_1 e φ_2 que fornecem contribuições iguais.

Agora analisamos a contribuição proveniente do termo de interação entre os campos, $V^{(2)}_g(\Psi)$. Essa correção é lida a partir do gráfico de Feynman apresentado na Fig. 4.5. Considerando a parte não divergente das funções zeta das Eqs. (4.2.7) e (4.2.10), em $s = 1$, encontramos a contribuição proveniente do termo de interação entre os campos como segue:

$$V^{(2)}_g(\Psi)\Big|_{\Psi=0} = 2\frac{gm^2\mu^2}{8\pi^4}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_1(nmL)\right]\left[\sum_{j=1}^{\infty}\cos(2\pi j\theta)\, f_1(j\mu L)\right]. \tag{4.2.27}$$

Visto que a expressão (4.2.27) é obtida a partir do termo de interação, é proporcional à constante de acoplamento g.

Finalmente, a última contribuição, $V^{(2)}_{2\lambda_\varphi}(\Psi)$, vem da interação entre as componentes do campo complexo (também é uma auto-interação). A contribuição desse termo é obtida a partir do gráfico apresentado na Fig. 4.5, considerando a linha sólida representado o propagador associado ao campo

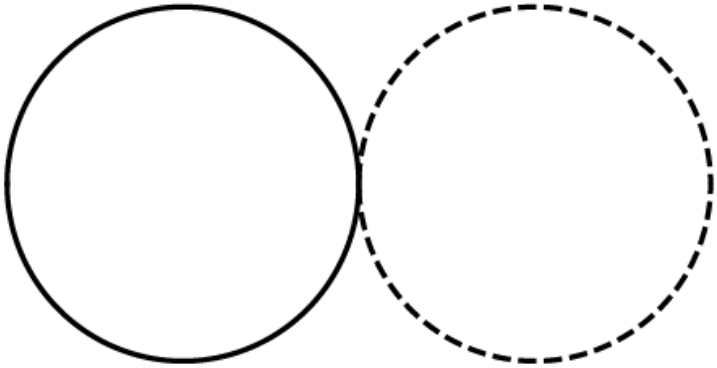

Figure 4.5: Gráfico de Feynman representando a única contribuição não trivial, para a correção de dois loops, avaliada em $\Psi = 0$, devido a interação entre os campos real e complexo. Esse gráfico também fornece a única contribuição não trivial, devido a interação entre as componentes do campo complexo. Nesse caso a linha sólida representa o propagador associado à componente φ_1, enquanto a linha tracejada representa o propagador associado à componente φ_2.

φ_1 e a linha tracejada associada ao campo φ_2. Portanto, usando a parte não divergente da função zeta (4.2.10), tomada em $s = 1$, obtemos o resultado na forma:

$$V^{(2)}_{2\lambda_\varphi}(\Psi)\Big|_{\Psi=0} = \frac{\lambda_\varphi \mu^4}{48\pi^4}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\cos(2\pi j\theta)\, f_1(j\mu L)\right]^2. \tag{4.2.28}$$

Observe que, da mesma forma que o resultado apresentado na Eq. (4.2.26), a expressão acima é proporcional a λ_φ.

Coletando todos os resultados obtidos nas Eqs (4.2.25), (4.2.27), (4.2.26) e (4.2.28), podemos escrever a correção total de dois loops para o potencial efetivo da Eq. (4.2.22), calculada no estado de vácuo $\Psi = 0$, na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{E}_{\rm C} &= V^{(2)}(\Psi)\big|_{\Psi=0} \\
&= \frac{\lambda_\psi m^4}{32\pi^4}\left[\sum_{j=1}^{\infty} f_1(jmL)\right]^2 + \frac{\lambda_\varphi \mu^4}{12\pi^4}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\cos(2\pi j\theta)\, f_1(j\mu L)\right]^2 + \\
&\quad + \frac{g m^2\mu^2}{4\pi^4}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_1(nmL)\right]\left[\sum_{j=1}^{\infty}\cos(2\pi j\theta)\, f_1(j\mu L)\right].
\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

Portanto, combinando os resultados apresentado nas Eqs. (4.2.16) e (4.2.29), obtemos a correção da densidade de energia de Casimir da Eq. (4.2.16), que é de primeira ordem em todas as constantes de acoplamento da teoria considerada. Como podemos notar, enquanto a correção de primeira ordem do potencial efetivo resulta na densidade de energia de Casimir associada a uma teoria de campos escalar e complexo livres, a correção de segunda ordem para o potencial efetivo na Eq. (4.2.29) fornece a contribuição para a densidade de energia de Casimir, que é linearmente proporcional a todas constantes de acoplamento.

Além disso, podemos considerar o caso em que tomamos o limite para os campos sem massa na

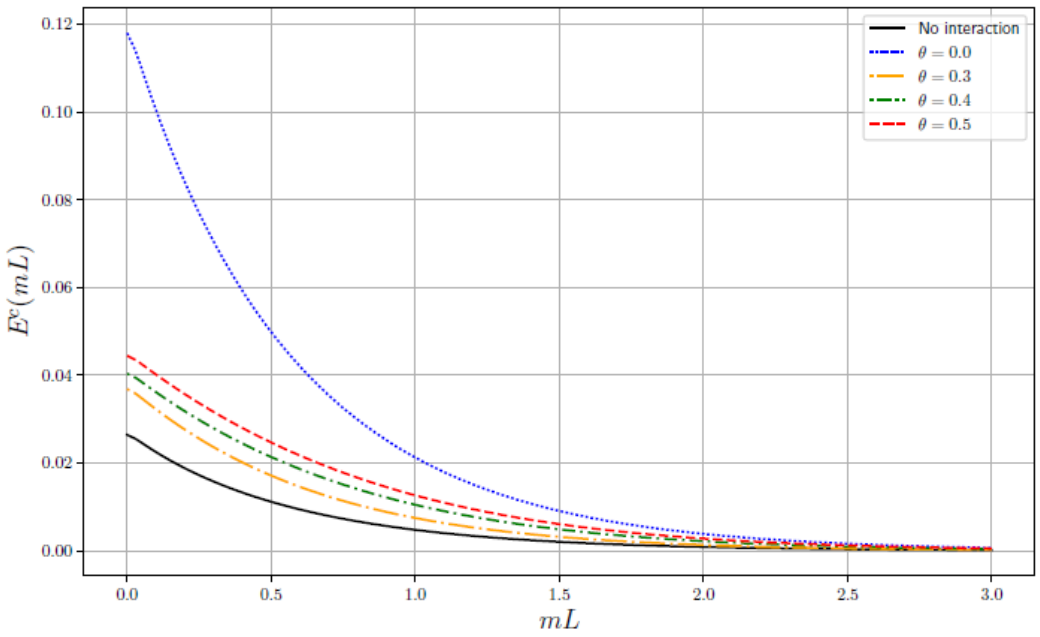

Figure 4.6: Gráfico da correção de dois loops para a densidade de energia de Casimir adimensional, $E^c\,(mL) = 32\pi^4 L^4 \Delta\mathcal{E}_{\rm C}$, definida na Eq. (4.2.29), como função de mL e considerando $\lambda_\psi = 10^{-2}$, $\lambda_\varphi = 10^{-2}$ e $g = 10^{-3}$ com $m = \mu$ e diferentes valores de θ.

Eq. (4.2.29), isto é, $m, \mu \to 0$. O resultado encontrado é dado por:

$$\Delta\mathcal{E}_{\rm C} = \frac{\lambda_\psi}{1152L^4} + \frac{\lambda_\varphi}{12L^4}\left(\theta^2 - \theta + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{g}{24L^4}\left(\theta^2 - \theta + \frac{1}{6}\right). \tag{4.2.30}$$

Assim, a expressão acima é a correção de primeira ordem, em todas as constantes de acoplamento da teoria para a densidade de energia de Casimir do caso em que os campos não possuem massa. Note que o primeiro termo do lado direito da Eq. (4.2.30) foi obtido na Ref. [38], enquanto que o segundo termo é consistente com o resultado obtido na Ref. [43] considerando uma teoria com campo escalar real e apenas o termo de auto-interação. Em contrapartida, o terceiro termo é completamente novo e surge a partir da interação entre os campos.

Na Fig. 4.6 o gráfico mostra a influência do campo complexo, sob condição quasi-periódica, na correção da Eq. (4.2.29) para a densidade de energia de Casimir. Assim, a expressão escrita na Eq. (4.2.29) foi plotada como uma função de mL para diferentes valores de θ e tomando $\mu = m$. Foram considerados também os seguintes valores para as constantes de acoplamento: $\lambda_\psi = 10^{-2}$, $\lambda_\varphi = 10^{-2}$ e $g = 10^{-3}$. A linha sólida escura é a correção livre de interação com o campo complexo, apenas com o efeito da auto-interação do campo real. Fica evidente que a curva para $g \neq 0$ aumenta a correção quando comparada com a linha sólida escura, para qualquer valor possível do parâmetro quasi-periódico θ. Desse modo, aqui também as curvas tendem a repertir seus comportamentos para valores tais que $\theta > 0.5$. Por exemplo, a curva representada pela linha pontilhada laranja para $\theta = 0.3$ é a mesma para uma curva com $\theta = 0.7$. Ademais, todas as curvas tendem aos seus correspondentes valores constantes para campos sem massa em $mL = 0$, como pode ser verificado na Eq. (4.2.30). Além disso, no regime em que $mL >> 1$, a correção na Eq. (4.2.29) vai a zero para todos as curvas, como é revelado pela figura em questão. Isso é uma consequência do decaimento exponencial da função de Macdonald para valores grandes de seu argumento [55].

A seguir, vamos analisar a estabilidade do vácuo da teoria, visto que o estado $\Psi = 0$ não é o único estado de vácuo possível, conforme foi antecipado.

4.2.3 Estabilidade do vácuo

Aqui neste segmento, analisaremos a estabilidade dos possíveis estados de vácuo associados ao potencial efetivo, até correção de primeira ordem em loop, da teoria descrita pela ação da Eq. (4.1.4). Por simplicidade consideramos o caso em que os campos não possuem massa, i.e., $m, \mu \to 0$. É pertinente reiterar que, para o campo complexo obedecendo a condição da Eq. (4.2.3), a única escolha para o campo constante satisfazer essa condição é o campo ser zero, assim, fazemos $\Phi_i = 0$. Essa aproximação torna a expressão (4.1.7) exata, mesmo sem considerar os termos cruzados.

Seguindo o mesmo caminho tomado para obter a Eq. (4.2.13), obtemos o potencial efetivo não renormalizado para o caso em que os campos escalares não possuem massa, i.e.:

$$V_{\text{eff}}(\Psi) = \frac{\lambda_\psi + C}{4!}\Psi^4 + \frac{\lambda_\psi^2 \Psi^4}{256\pi^2}\left[\ln\left(\frac{\lambda_\psi \Psi^2}{2\nu^2}\right) - \frac{3}{2}\right] + \frac{g^2\Psi^4}{32\pi^2}\left[\ln\left(\frac{g\Psi^2}{\nu^2}\right) - \frac{3}{2}\right] + \\ -\frac{\lambda_\psi^2\Psi^4}{8\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty} f_2\left(j\sqrt{\frac{\lambda_\psi}{2}\Psi^2}L\right) - \frac{g^2\Psi^4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\cos(2\pi j\theta)\, f_2\left(j\sqrt{g\Psi^2}L\right). \tag{4.2.31}$$

Além disso, a condição que fixa a constante de renormalização C da equação acima é dada por Eq. (4.1.15). Assim, aplicando essa condição no potencial efetivo da Eq. (4.2.31), considerando o limite de Minkowski $L \to \infty$, encontramos a constante C na forma:

$$C = \frac{3\lambda_\psi^2}{32\pi^2}\ln\left(\frac{2\nu^2}{\lambda_\psi M^2}\right) + \frac{3g^2}{4\pi^2}\ln\frac{\nu^2}{gM^2} - \frac{\lambda_\psi^2}{4\pi^2} - \frac{2g^2}{\pi^2}. \tag{4.2.32}$$

Agora, substituimos a recém obtida constante C no potencial efetivo da Eq. (4.2.31), para obtermos o potencial efetivo renormalizado para a teoria dos campos escalares sem massa, i.e.:

$$V_{\text{eff}}^R(\Psi) = \frac{\lambda_\psi}{4!}\Psi^4 + \left[\frac{\lambda_\psi^2}{8} + g^2\right]\frac{\Psi^4}{32\pi^2}\ln\left(\frac{\Psi^2}{M^2}\right) - \left[\frac{\lambda_\psi^2}{8} + g^2\right]\frac{25\Psi^4}{192\pi^2} + \\ -\frac{\lambda_\psi^2\Psi^4}{8\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty} f_2\left(j\sqrt{\frac{\lambda_\psi}{2}\Psi^2}L\right) - \frac{g^2\Psi^4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\cos(2\pi j\theta)\, f_2\left(j\sqrt{g\Psi^2}L\right). \tag{4.2.33}$$

Investigamos os possíveis estados de vácuo do potencial efetivo renormalizado da equação acima, até primeira ordem nas constantes de acoplamento λ_ψ e g, que é mais que o suficiente visto que consideramos correções para a densidade de energia de Casimir, bem como para a massa dos campos escalares, até primeira ordem nas constantes de acoplamento. Assim, expandindo o potencial efetivo renormalizado dado na Eq. (4.2.33) em potências de λ_ψ e g [41], até primeira ordem, obtemos a seguinte expressão:

$$V_{\text{eff}}^R(\Psi) \simeq -\frac{\pi^2}{90L^4} + \frac{2\pi^2}{3L^4}B_4(\theta) + \frac{\lambda_\psi}{4!}\Psi^4 + \frac{\Psi^2}{48L^2}\left[\lambda_\psi + 24gB_2(\theta)\right], \tag{4.2.34}$$

em que $B_4(\theta)$ e $B_2(\theta)$ são os polinômios de Bernoulli definidos na Eq. (4.2.18). O mínimo do potencial que corresponde ao estado de vácuo é obtido de forma usual tomando sua derivada e igualando o resultado a zero, isto é:

$$\frac{\lambda_\psi}{6}\Psi^3 + \frac{\Psi}{24L^2}\left[\lambda_\psi + 24gB_2(\theta)\right] = 0. \tag{4.2.35}$$

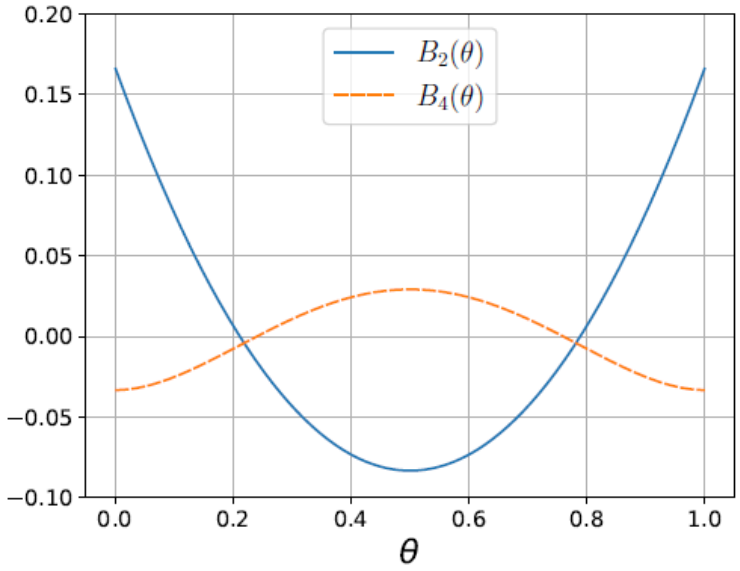

Figure 4.7: Polinômios de Bernoulli, $B_2(\theta)$ linha sólida e $B_4(\theta)$ linha tracejada, como funções do parâmetro quasi-periódico θ.

As raízes da Eq. (4.2.35) representam os possíveis estados de vácuo e são escritas explicitamente como:

$$\Psi = 0, \quad \Psi_{\pm} = \pm\sqrt{-\frac{1}{4\lambda_{\psi}L^2}\left[\lambda_{\psi} + 24gB_2(\theta)\right]}. \tag{4.2.36}$$

Para saber qual estado de vácuo pode ser considerado um estado físico, devemos analisar a condição de estabilidade do potencial efetivo escrito na Eq. (4.2.34). Isso é alcançado por meio da segunda derivada, i.e.:

$$\frac{d^2}{d\Psi^2}V_{\text{eff}}^{R}(\Psi) = \frac{\lambda_{\psi}}{2}\Psi^2 + \frac{1}{24L^2}\left[\lambda_{\psi} + 24gB_2(\theta)\right]. \tag{4.2.37}$$

Para o estado de vácuo ser estável, a segunda derivada do potencial efetivo calculada nos estados obtidos na Eq. (4.2.36) deve ser maior que zero. Nesse sentido, investigamos para quais valores do parâmetro θ da condição quasi-periódica e as constantes de acoplamento, a estabilidade é alcançada.

Vamos considerar inicialmente que o estado de vácuo é $\Psi = 0$, que foi o estado considerado na análise da densidade de energia de Casimir, sua correção em loop e a massa topológica nas seções anteriores. Assim, a partir da Eq. (4.2.37), evidenciamos que $\Psi = 0$ é estável apenas se a seguinte condição for satisfeita:

$$\lambda_{\psi} > -24gB_2(\theta). \tag{4.2.38}$$

Podemos ver que o parâmetro θ desempenha um papel crucial na determinação da estabilidade do estado de vácuo. Além disso, as constantes de acoplamento também exercem grande influência na estabilidade do estado de vácuo. Assim, tomando as constantes de acoplamento, λ_{ψ} e g, como positivas e para $B_2(\theta)$ também positivo, a condição acima será sempre satisfeita. Entretanto, se $B_2(\theta)$ for negativo, a condição da Eq. (4.2.38) pode ser violada se $\lambda_{\psi} < g$. Na Fig. 4.7 exibimos o gráfico dos polinômios de Bernoulli $B_2(\theta)$ e $B_4(\theta)$ em função do parâmetro θ, em que podemos ver seus valores positivos e negativos.

A partir da forma explícita do polinômio de Bernoulli de ordem dois, isto é, $B_2(\theta) = \theta^2 - \theta + \frac{1}{6}$, encontramos que o polinômio é negativo para os valores de θ no intervalo:

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} < \theta < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}. \tag{4.2.39}$$

Logicamente, os valores de θ para $B_2(\theta)$ ser posivito residem fora do intervalo acima.

Como um exemplo, vamos considerar o caso particular em que $\theta = 1/2$. Consequetemente, a condição de estabilidade escrita na Eq. (4.2.38) se torna:

$$\lambda_\psi > 2g. \tag{4.2.40}$$

A condição acima está de acordo com a encontrada na Ref. [41]. Entretanto, atentamos ao fato de que estamos considerando um campo escalar complexo. A massa topológica, nesse caso, toma a seguinte forma:

$$m_T^2 = \frac{(\lambda_\psi - 2g)}{24L^2}, \tag{4.2.41}$$

que está de acordo com o resultado obtido na Eq. (4.2.21) com $\theta = 1/2$. vejamos que, na ausência de interação entre os campos, isto é, $g = 0$, restauramos os resultados obtidos nas Refs. [38, 42].

De acordo com a Eq. (4.2.36), é possível considerar $\Psi = \Psi_\pm$ como sendo o estado de vácuo, no lugar de $\Psi = 0$. Nesse caso, tomando a segunda derivada do potencial da Eq. (4.2.37), no estado $\Psi = \Psi_\pm$ e, visto que o resultado deve ser maior que zero para o estado ser estável, obtemos a condição de estabilidade do vácuo como:

$$\lambda_\psi < -24gB_2(\theta). \tag{4.2.42}$$

Considerando que as constantes de acoplamento sejam positivas, a condição acima pode ser satisfeita apenas se o polinômio de Bernoulli, $B_2(\theta)$, for negativo. Isso é de fato possível para valores de θ dentro do intervalo apresentado na Eq. (4.2.39). Considerando o mesmo exemplo anterior, isto é, $\theta = 1/2$, obtemos a condição de estabilidade para o caso do campo escalar *twisted* na forma:

$$\lambda_\psi < 2g. \tag{4.2.43}$$

Consequentemente, a massa topológica para esse caso é dada por:

$$m_T^2 = \frac{2g - \lambda_\psi}{12L^2}. \tag{4.2.44}$$

Note que o resultado acima para a massa topológica, difere do apresentado na Eq. (4.2.21) para $\theta = 1/2$. Essa diferença aparece devido ao fato que o vácuo considerado para a Eq. (4.2.44), isto é, $\Psi = \Psi_\pm$, não é o mesmo que o da Eq. (4.2.21), isto é, $\Psi = 0$. Para que esse último seja estável, como vimos acima, é necessário considerar a restrição escrita na Eq. (4.2.38). O resultado da Eq. (4.2.44) está de acodo com o encontrado na Ref. [38].

A densidade de energia de Casimir pode ser obtida considerando $\Psi = \Psi_\pm$ como o estado de vácuo estável. Assim, a partir da Eq. (4.2.36), o potencial efetivo escrito na Eq. (4.2.34) fornece a seguinte expressão para a densidade de energia de Casimir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\rm C} &= V_{\rm eff}^R(\Psi)\big|_{\Psi_\pm} \\
&\simeq -\frac{\pi^2}{90L^4} + 2\frac{\pi^2}{3L^4}B_4(\theta) - \frac{1}{384\lambda_\psi L^4}\left[\lambda_\psi + 24gB_2(\theta)\right]^2.
\end{aligned} \tag{4.2.45}$$

É possível observar que os primeiros dois termos do lado direito da Eq. (4.2.45) estão de acordo com a densidade de energia de Casimir apresentada na Eq. (4.2.19). Entretanto, o terceiro termo apresenta uma dependência nas constantes de acoplamento λ_ψ e g, o que não aparece no caso do vácuo estável ser $\Psi = 0$. É importante destacar que a Eq. (4.2.45) é apenas uma aproximação, até primeira ordem nas constantes de acoplamento, visto que estamos considerando a expansão do potencial efetivo da Eq. (4.2.34). O primeiro e o terceiro termos são sempre negativos, enquanto que o segundo termo pode ser positivo ou negativo, dependendo do valor do polinômio de Bernoulli $B_4(\theta)$, conforme exibido na Fig. 4.7.

Para calcular a correção de dois loops para a densidade de energia de Casimir na Eq. (4.2.45), seria necessário considerar gráficos de Feynman adicionais, diferentes dos apresentados nas Fig. 2.2 e 4.5. Esses gráficos de Feynman adicionais são provenientes do segundo termo do lado direito da Eq. (24) na Ref. [38], que resulta em zero no caso de $\Psi = 0$ ser o vácuo estável. A consideração da contribuição de dois loops faria nosso problema ser extremamente difícil tal que restringimos nossa análise à correção de apenas um loop, fornecendo a densidade de energia de Casimir da Eq. (4.2.45).

A partir das Eqs. (4.2.38) e (4.2.42), podemos concluir que a estabilidade do estado de vácuo é determinada pelos valores das constantes de acoplamento λ_ψ e g, bem como pelo parâmentro quasi-periódico θ da condição imposta ao campo complexo. Entretando, não há dependência do parâmetro L.

Na próxima seção consideramos o mesmo sistema considerado na presente seção, ou seja, um campo escalar real interagindo com um campo escalar complexo, mas agora com o campo complexo devendo satisfazer condições mistas.

4.3 Condições periódica e mista

Aqui consideramos o campo escalar real obedecendo a condição de contorno periódica como antes, mas agora o campo escalar complexo é submetido à condição de contorno mista. Na prática, a correção de primeira ordem de loop para o potencial efetivo associado com o campo escalar real é a mesma que a obtida na Eq. (4.2.8), diferentemente do campo complexo que resulta em uma contribuição diferente pois obedece a uma condição diferente. Nesse caso, é suficiente avaliar apenas a correção associada ao campo complexo. Assumiremos que $\Psi = 0$ é o estado de vácuo estável na análise que segue, embora uma discussão sobre os outros possíveis estado de vácuo seja realizada na Sec. 4.3.3.

As componentes reais do campo complexo são submetidas às seguintes condições de contorno mistas aplicadas nos planos apresentados na Fig. 4.8 [39, 44]:

$$\varphi_i(w)|_{z=0} = \left.\frac{\partial\varphi_i(w)}{\partial z}\right|_{z=L}, \qquad \left.\frac{\partial\varphi_i(w)}{\partial z}\right|_{z=0} = \varphi_i(w)|_{z=L}, \tag{4.3.1}$$

em que $w = (\tau, x, y, z)$. Levando em consideração a condição de contorno acima, vemos que os autovalores do operador $\hat{B}$ dado na Eq. (4.1.9), tomam a seguinte forma [39, 44]:

$$\beta_\rho = k_\tau^2 + k_x^2 + k_y^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{L^2} + M_g^2, \qquad M_g^2 = \mu^2 + g\Psi^2, \tag{4.3.2}$$

em que $n = 0, 1, 2, ...$, e o subíndice ρ representa o conjunto de números quânticos (k_τ, k_x, k_y, n). Devemos mencionar que, a partir da Eq. (4.3.1), são possíveis duas configurações nos planos paralelos da Fig. 4.8. Para o plano em $z = 0$ podemos ter a condição de contorno de Dirichlet enquanto que

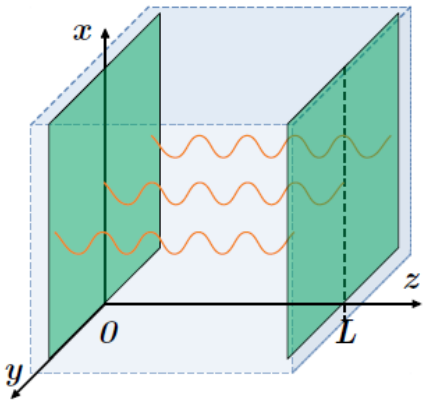

Figure 4.8: Dois planos paralelos idênticos e perfeitamente refletores, colocados em $z = 0$ e $z = L$, confinando os modos do campo escalar complexo. Nos planos são aplicadas as condições de contorno mistas.

no plano em $z = L$, podemos ter a condição de Neumann. Reciprocamente, para o plano em $z = 0$ podemos ter a condição de contorno de Neumann enquanto que em $z = L$, podemos ter a condição de Dirichlet. Entretanto, ambas configurações fornecem os mesmos autovalores da Eq. (4.3.2).

Tendo obtido os autovalores apresentados na Eq. (4.3.2), podemos prosseguir para a investigação da correção de primeira ordem, isto é, a correção de um loop para o potencial efetivo associado ao campo escalar complexo, submetido às condições de contorno nos planos apresentadas na Fig. 4.8.

4.3.1 Correção de um loop

As etapas necessárias para a obtenção da função zeta generalizada do caso em consideração são similares às realizadas nas seções anteriores e também na Ref. [39]. Portanto, apresentamos apenas os principais passos para a conveniência do leitor. A função zeta generalizada, associada ao campo complexo, é construída a partir dos autovalores apresentados na Eq. (4.3.2). Após o uso da dentidade da Eq. (2.2.6), obtemos integrais Gaussianas que são realizadas de forma imediata. Nesse estágio, usando a representação integral da função gamma apresentada na Eq. (2.2.10), obtemos a expressão que segue para a função zeta de Riemann generalizada:

$$\zeta_{\beta}(s) = \frac{\Omega_4 \pi^{\frac{3}{2}-2s}}{8L^{4-2s}} \frac{\Gamma\left(s-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(s)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{M_g L}{\pi}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}-s}, \tag{4.3.3}$$

em que Ω_4 é o volume 4-dimensional escrito como $\Omega_4 = \Omega_3 L$, com Ω_3 sendo o volume 3-dimensional associado com as coordenadas Euclidianas (τ, x, y). Para realizar a soma em n da Eq. (4.3.3), escrevemos ela como a soma de dois termos [39, 12], i.e.:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \vartheta^2 \right]^{\frac{3}{2}-s} = \frac{1}{2^{3-2s}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 + (2\vartheta)^2 \right]^{\frac{3}{2}-s} - 2^{3-2s} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 + \vartheta^2 \right]^{\frac{3}{2}-s} \right\}. \tag{4.3.4}$$

Cada soma do lado direito da Eq. (4.3.4) pode ser escrita em termos da função zeta de Epstein-Hurwitz [62], definida por:

$$\begin{aligned}\zeta_{EH}(z,\kappa) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^2+\kappa^2\right)^{-z} \\ &= -\frac{\kappa^{-2z}}{2}+\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\frac{\Gamma\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(z)}\kappa^{1-2z}+\frac{2^{1-z}(2\pi)^{2z-\frac{1}{2}}}{\Gamma(z)}\sum_{n=1}^{\infty}n^{2z-1}f_{\left(z-\frac{1}{2}\right)}(2\pi n\kappa). \quad (4.3.5)\end{aligned}$$

Assim, com a ajuda da função $\zeta_{EH}(z,\kappa)$ escrita acima, obtemos a função zeta generalizada associada ao campo complexo como segue:

$$\zeta_{\beta}(s)=\frac{\Omega_4}{16\pi^2\Gamma(s)}\left\{M_g^{4-2s}\Gamma(s-2)+\frac{2^s}{L^{4-2s}}\sum_{n=1}^{\infty}n^{2s-4}\left[2^{2s-3}f_{(s-2)}(4nM_gL)-f_{(s-2)}(2nM_gL)\right]\right\}. \quad (4.3.6)$$

Calculando a expressão acima e sua derivada no limite $s\to 0$, encontramos a contribuição, devido ao campo complexo, para a correção em primeira ordem de loop do potencial efetivo da Eq. (4.1.14), na seguinte forma:

$$V_{\beta}^{(1)}(\Psi)=\frac{M_g^4}{32\pi^2}\left[\ln\frac{M_g^2}{\nu^2}-\frac{3}{2}\right]-\frac{M_g^4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[2f_2(4nM_gL)-f_2(2nM_gL)\right]. \quad (4.3.7)$$

Levando em consideração a contribuição devido ao campo escalar real obtida na Eq. (4.2.8), em conjunto com a contribuição do campo complexo obtida na Eq. (4.3.7), o potencial efetivo até correção de um loop, é apresentado na forma:

$$\begin{aligned}V_{\text{eff}}(\Psi) &= \frac{m^2+C_2}{2}\Psi^2+\frac{\lambda_{\psi}+C_1}{4!}\Psi^4+C_3+\frac{M_{\lambda}^4}{64\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_{\lambda}^2}{\nu^2}\right)-\frac{3}{2}\right]+ \\ &+\frac{M_g^4}{32\pi^2}\left[\ln\frac{M_g^2}{\nu^2}-\frac{3}{2}\right]-\frac{M_{\lambda}^4}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}f_2(jM_{\lambda}L)-\frac{M_g^4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[2f_2(4nM_gL)-f_2(2nM_gL)\right]. \quad (4.3.8)\end{aligned}$$

Conhecendo o potencial efetivo escrito na Eq. (4.3.8), devemos realizar o processo de renormalização para prosseguir com o estudo da energia de Casimir e da geração da massa topológica. Portanto, aplicando as condições de renormalização dadas nas Eqs. (4.1.15), (4.1.16) e (4.1.18), obtemos as constantes de renormalização C_i coincidindo com as obtidas na Eq. (4.2.14), como deve ser. Após a substituição das constantes de renormalização no potencial efetivo escrito na Eq. (4.3.8), obtemos o potencial efetivo renormalizado na seguinte forma:

$$\begin{aligned}V_{\text{eff}}^{R}(\Psi) &= \frac{m^2}{2}\Psi^2+\frac{\lambda_{\psi}}{4!}\Psi^4+\frac{\mu^4}{32\pi^2}\ln\left(\frac{M_g^2}{\mu^2}\right)+\frac{m^4}{64\pi^2}\ln\left(\frac{M_{\lambda}^2}{m^2}\right)+ \\ &+\frac{\lambda_{\psi}^2\Psi^4}{256\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_{\lambda}^2}{m^2}\right)-\frac{3}{2}\right]+\frac{g\mu^2\Psi^2}{16\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_g^2}{\mu^2}\right)-\frac{1}{2}\right]+\frac{\lambda_{\psi}m^2\Psi^2}{64\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_{\lambda}^2}{m^2}\right)-\frac{1}{2}\right]+ \\ &+\frac{g^2\Psi^4}{32\pi^2}\left[\ln\left(\frac{M_g^2}{\mu^2}\right)-\frac{3}{2}\right]-\frac{M_{\lambda}^4}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}f_2(jM_{\lambda}L)-\frac{M_g^4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[2f_2(4nM_gL)-f_2(2nM_gL)\right] \quad (4.3.9)\end{aligned}$$

Uma vez que obtemos o potencial efetivo renormalizado apresentado na Eq. (4.3.9), a densidade de energia de Casimir é escrita de forma direta considerando o estado de vácuo $\Psi=0$, i.e.:

$$\mathcal{E}_{\text{C}}=V_{\text{eff}}^{R}(\Psi)\big|_{\Psi=0}=-\frac{m^4}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}f_2(jmL)-\frac{\mu^4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[2f_2(4n\mu L)-f_2(2n\mu L)\right]. \quad (4.3.10)$$

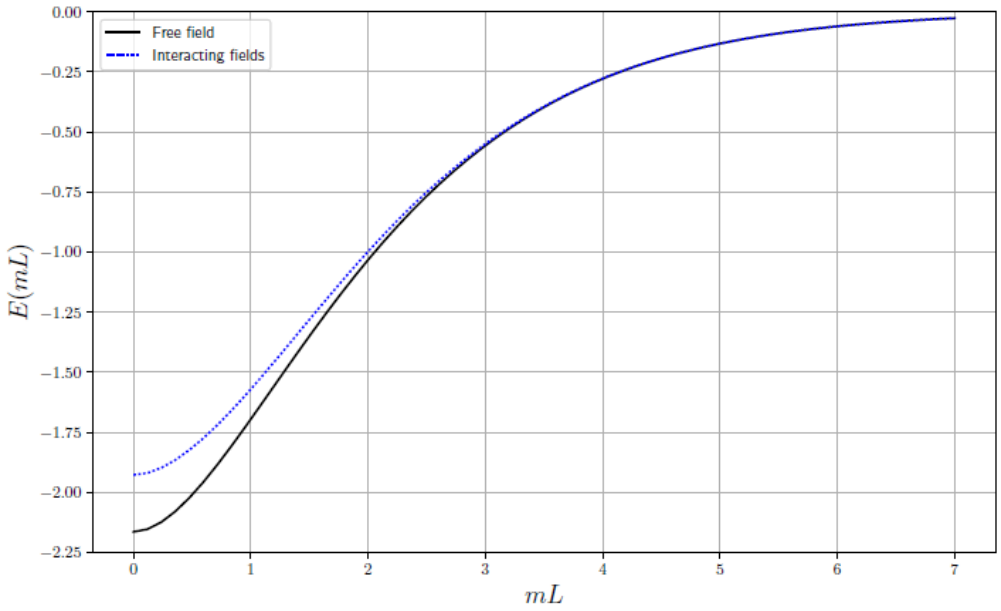

Figure 4.9: Gráfico da densidade de energia de Casimir adimensional $E\left(mL\right) = 2\pi^2 L^4 \mathcal{E}_{\rm C}$, definda na Eq. (4.3.10), como função de mL e considerando $m = \mu$.

O primeiro termo do lado direito da Eq. (4.3.10) é a contribuição devido ao campo real que é igual a da Eq. (4.2.16), como deve ser, visto que a condição aplicada ao campo real é a mesma. Entretanto, o segundo termo do lado direito da Eq. (4.3.10) é a contribuição proveniente do campo complexo e ela difere do caso em que a condição quasi-periódica é aplicada, Eq. (4.2.16). Essa contribuição é consistente com o resultado apresentado na Ref. [44] em que o autores consideraram um campo escalar real e auto-interagente.

O caso em que os campos não possuem massa é obtido tomando o limite para argumentos pequenos da função de Macdonald [55]. Isso produz o seguinte resultado da densidade de energia de Casimir:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\rm C} &= -\frac{\pi^2}{90L^4}\left[1 - \frac{7}{64}\right] \\ &= \frac{57}{64} \times \left(-\frac{\pi^2}{90L^4}\right), \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

em que podemos ver que o efeito da interação com o campo complexo submetido à condições mistas é aumentar a densidade de energia de Casimir do campo escalar real sob condição periódica.

Na Fig. 4.9 exibimos o gráfico a densidade de energia de Casimir da Eq. (4.3.10) como função de mL e tomando $m = \mu$. O gráfico mostra como a curva para o campo escalar real livre (linha sólida escura) difere da curva quando consideramos a influência da interação (linha pontilhada azul). De fato, a interação aumenta o valor da densidade de energia de Casimir, conforme demonstrado nas curvas. O gráfico mostra também que a densidade de energia de Casimir vai a zero para grandes valores de mL. Isso é consequência do decaimento exponencial da função de Macdonald para grandes argumentos [55]. Além disso, as duas curvas terminam nos seus correspondentes valores constantes para campos sem massa em $mL = 0$, o que pode ser verificado na Eq. (4.3.11).

Investigaremos agora como a massa topológica associada ao campo real sofre modificações sob a influência da condição mista imposta ao campo escalar complexo. Então, aplicando a condição de

renormalização (4.1.16) com o potencial efetivo renormalizado da Eq. (4.3.9), vemos que a massa topológica pode ser escrita como:

$$m_T^2 = m^2 \left\{ 1 + \frac{\lambda_\psi}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} f_1\left(jmL\right) + \frac{\mu^2}{m^2}\frac{g}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[2f_1\left(4n\mu L\right) - f_1\left(2n\mu L\right)\right] \right\}. \tag{4.3.12}$$

Claramente a diferença do resultado acima e a massa topológica obtida na Eq. (4.2.20), reside no terceiro termo do lado direito da Eq. (4.3.12). Ademais, considerando o limite para campos sem massa $m, \mu \to 0$, obtemos a massa topológica para o caso dos campos não massivos como segue:

$$m_T^2 = \frac{2\lambda_\psi - g}{48L^2}. \tag{4.3.13}$$

Note que a massa topológica obtida na equação acima coincide com o caso particular da condição quasi-periódica na Eq. (4.2.21), para valores $\theta = 1/4, 3/4$, que estão inclusos no intervalo apresentado na Eq. (4.2.39).

Similarmente à discussão apresentada nas seções anteriores, aqui o quadrado da massa topológica pode também ser negativo dependendo se λ_ψ é maior ou menor que g. Por exemplo, se $2\lambda_\psi < g$, a Eq. (4.3.13) se torna negativa, o que indica instabilidade do estado de vácuo. Novamente, se tivéssemos considerado uma teoria com o campo escalar complexo apenas com auto-interação (sem interação entre os campos), isso seria um problema, visto que não faz sentido considerar um campo complexo constante tal que $\Phi_i \neq 0$, compatível com as condição de contorno mista. Esse problema é resolvido considerando uma teoria com interação entre os campos como a considerada nas seções anteriores e na presente seção (veja também a Ref. [41]). Com essa teoria é possível estudar a estabilidade do vácuo, o que é feito na Sec. 4.3.3 para o caso dos campos sem massa. A análise indica que o estado de vácuo $\Psi = 0$ é estável apenas se $2\lambda_\psi > g$, do contrário devemos considerar outros possíveis estados de vácuo.

Na Fig. 4.10 exibimos o gráfico do quadrado da massa adimensional $M^2\left(mL\right) = m_{\rm T}^2 L^2$, definida na Eq. (4.3.12) como função de mL, tomando $m = \mu$. O gráfico exibe as curvas para $\lambda_\psi = 10^{-2}$ e $g = 10^{-3}$ que satisfaz a condição $2\lambda_\psi > g$, o que torna o estado $\Psi = 0$ um estado de vácuo estável. Vemos que o efeito da interação é diminuir a correção para a massa.

Na Fig. 4.11 mostramos a mesma quantidade que na Fig. 4.10, mas com os valores $\lambda_\psi = 10^{-3}$ e $g = 10^{-2}$, que satisfaz a condição $2\lambda_\psi < g$. Nesse caso, a Eq. (4.3.13) se torna negativa, o que indica que o estado $\Psi = 0$ é de fato um estado de vácuo instável. Note que na teoria de campos massivos interagentes, $\Psi = 0$ pode se torna estável, mesmo para $2\lambda_\psi < g$, se considerarmos valores grandes de mL, como demonstrado na Fig. 4.11. Note ainda que cada curva em $mL = 0$ termina em seus correspondentes valores constantes para o caso de campos sem massa da Eq. (4.3.13). Para grandes valores de mL, a função de Macdonald decai exponencialmente e as curvas são dominadas pelo primeiro termo do lado direito da Eq. (4.3.12).

Assim, encerramos a análise da correção de um loop e prosseguimos para investigação da correção de dois loops, considerando $\Psi = 0$ como sendo o estado de vácuo estável. Como sabemos, isso significa que devemos considerar a restrição $2\lambda_\psi > g$. A análise da estabilidade do estado de vácuo será realizada na Sec. 4.3.3.

4.3.2 Correção de dois loops

Aqui queremos considerar a correção de dois loops do potencial efetivo. Usaremos os mesmos gráficos de Feynman apresentados anteriormente, isto é, os gráficos apresentados nas Figs. 2.2 e 4.5, em

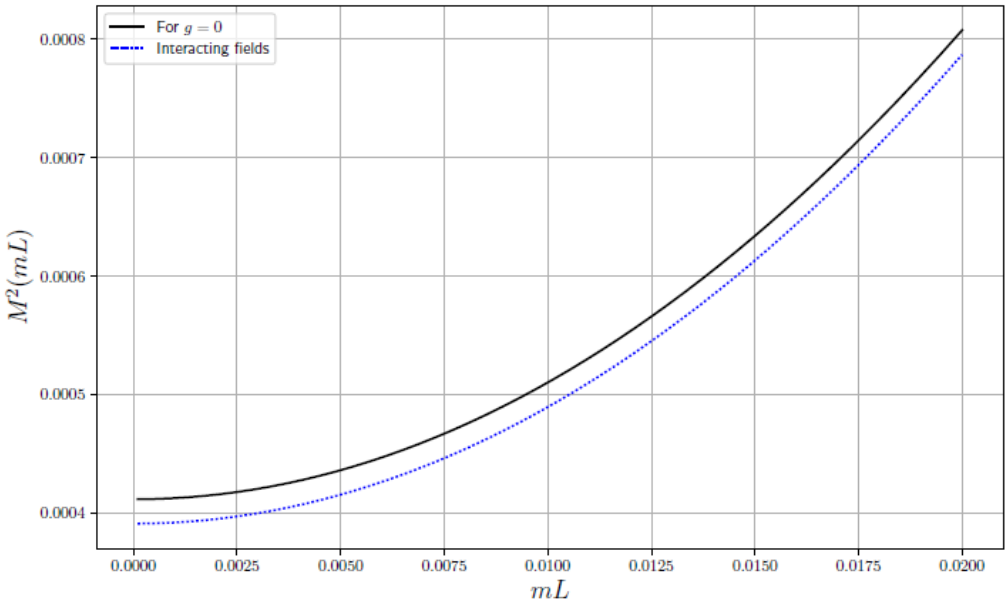

Figure 4.10: Gráfico do quadrado da massa topológica adimensional $M^2\,(mL) = m_{\mathrm{T}}^2 L^2$, definida na Eq. (4.3.12), como função de mL, tomando $\mu = m$ e $\lambda_\psi = 10^{-2}$ e $g = 10^{-3}$.

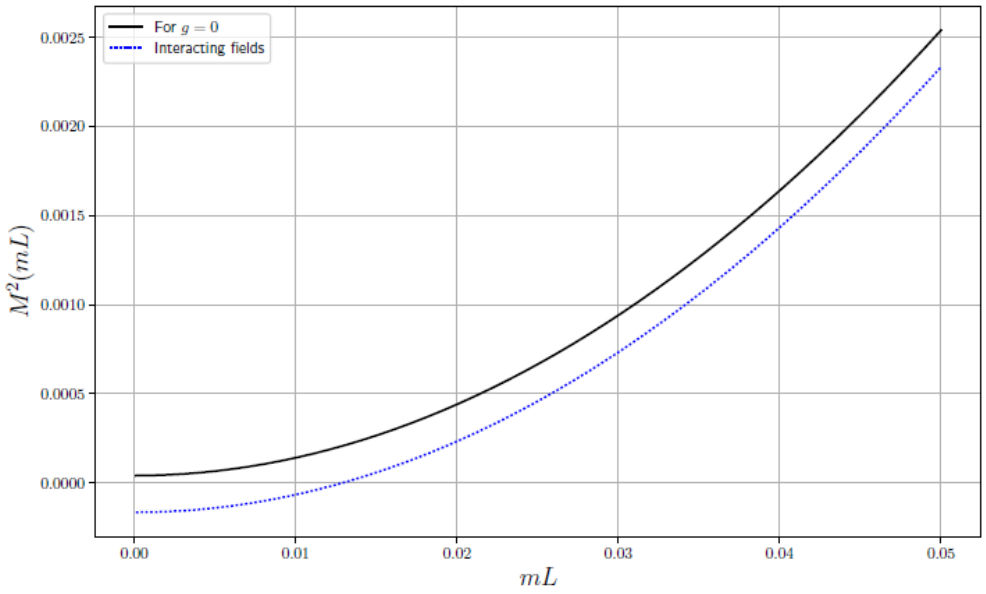

Figure 4.11: Gráfico do quadrado da massa topológica adimensional $M^2\,(mL) = m_{\mathrm{T}}^2 L^2$, definida na Eq. (4.3.12), como função de mL, tomando $\mu = m$ e $\lambda_\psi = 10^{-3}$ e $g = 10^{-2}$.

conjunto com uma notação similar a usada na Sec. 4.2.2. A primeira correção é devido ao termo de auto-interação do campo escalar real, isto é, $\frac{\lambda_\psi}{4!}\psi^4$. Visto que estamos interessados no estado de vácuo, $\Psi = 0$, a única contribuição não trivial é a mesma que a obtida na Eq. (4.2.25).

A segunda contribuição advém da auto-interação do campo complexo, i.e., $\frac{\lambda_\varphi}{4!}\varphi_i^4$. Para o caso em consideração, essa contribuição é escrita na forma:

$$V^{(2)}_{\lambda_\varphi}(\Psi)\Big|_{\Psi=0} = \lim_{s\to 1} 2\frac{\lambda_\psi}{8}\left[\frac{\zeta^R_\beta(s)}{\Omega_4}\right]^2\Bigg|_{\Psi=0} = 2\frac{\lambda_\varphi \mu^4}{32\pi^4}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[2f_1(4n\mu L) - f_1(2n\mu L)\right]\right\}^2. \tag{4.3.14}$$

Note que na expressão acima, $\zeta^R_\beta(1)$ representa a parte não divergente da função zeta $\zeta_\beta(s)$, dada na Eq. (4.3.6), tomanda em $s = 1$ e o fator 2 na frente da constante λ_φ é para lembrar que estamos considerando duas componentes do campo complexo.

A seguir, obtemos a contribuição devido a interação entre os campos, isto é, devido ao termo $\frac{g}{2}\varphi_i^2\psi^2$. Este termo produz a seguinte correção para o potencial efetivo no estado de vácuo:

$$V^{(2)}_g(\Psi)\big|_{\Psi=0} = 2\frac{gm^2\mu^2}{8\pi^4}\left[\sum_{j=1}^{\infty} f_1(jmL)\right]\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[2f_1(4n\mu L) - f_1(2n\mu L)\right]\right\}. \tag{4.3.15}$$

A última correção para o potencial efetivo é proveniente da interação entre as componentes reais do campo complexo (sendo também uma auto-interação), isto é, devido ao termo $\frac{\lambda_\varphi}{4!}2\varphi_1^2\varphi_2^2$. Assim, podemos escrever essa correção como:

$$V^{(2)}_{2\lambda_\varphi}(\Psi)\Big|_{\Psi=0} = \frac{\lambda_\varphi\mu^4}{48\pi^4}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[2f_1(4n\mu L) - f_1(2n\mu L)\right]\right\}^2. \tag{4.3.16}$$

Portanto, a partir dos resultados obtidos nas Eqs. (4.2.25), (4.3.14), (4.3.15) e (4.3.16), é possível escrever a correção total de dois loops para o potencial efetivo, calculada no estado de vácuo $\Psi = 0$, na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{E}_{\rm C} &= V^{(2)}(\Psi)\big|_{\Psi=0} \\
&= \frac{\lambda_\psi m^4}{32\pi^4}\left[\sum_{j=1}^{\infty} f_1(jmL)\right]^2 + \frac{\lambda_\varphi\mu^4}{12\pi^4}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[2f_1(4n\mu L) - f_1(2n\mu L)\right]\right\}^2 + \\
&\quad + \frac{gm^2\mu^2}{4\pi^4}\left[\sum_{j=1}^{\infty} f_1(jmL)\right]\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[2f_1(4n\mu L) - f_1(2n\mu L)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

A expressão acima é proporcional às constantes de acoplamento $\lambda_\psi, \lambda_\varphi$ e g, representado a auto-interação de cada campo e também a interação entre os campos. Ademais, a partir da correção da densidade de energia de Casimir apresentada na Eq. (4.3.17), podemos considerar o limite para campos não massivos, $m, \mu \to 0$. Lembrando do limite para argumentos pequenos da função de Macdonald, i.e., $K_\mu(x) \approx \frac{\Gamma(\mu)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^\mu$ [55], podemos obter a correção da Eq. (4.3.17) para o caso de campos sem massa como segue:

$$\Delta\mathcal{E}_{\rm C} = \frac{\lambda_\psi}{1152L^4} + \frac{\lambda_\varphi}{27648L^4} - \frac{g}{1152L^4}. \tag{4.3.18}$$

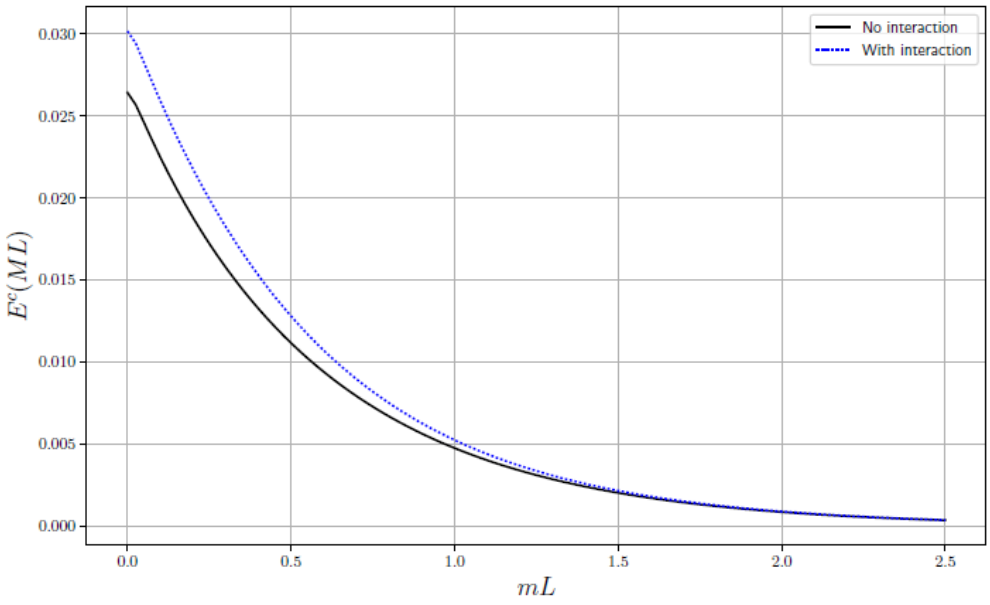

Figure 4.12: Gráfico da contribuição de dois loops da densidade de energia de Casimir adimensional, $E^c\,(mL) = 32\pi^2 L^4 \Delta\mathcal{E}_{\rm C}$, definda da Eq. (4.3.17), como função de mL, considerando $\lambda_\psi = 10^{-2}$, $\lambda_\varphi = 10^{-2}$ e $g = 10^{-3}$, tomando $m = \mu$.

Como podemos ver na equação acima, as correções proporcionais às constantes de acoplamento λ_ψ e λ_φ, que são proveniente da auto-interação dos campos, aumenta a densidade de energia de Casimir obtida na Eq. (4.3.11), ao passo que o termo proveniente da interação entre os campos, proporcional à constante de acoplamento g, tem o efeito de diminuir a densidade de energia de Casimir. Note que a contribuição proporcional a λ_φ presente na Eq. (4.3.18) não é a mesma que a obtida na Ref. [44] para o campo escalar real com auto-interação. De fato, nosso resultado para o segundo termo do lado direito de Eq. (4.3.18) é 8/3 maior que o apresentado na Ref. [44]. Essa diferença é devido ao fato que, além da contribuição apresentada na Eq. (4.3.14), temos ainda a contribuição adicional proporcional a λ_φ proveniente da interação entre as componentes do campo complexo, apresentada na Eq. (4.3.16). O mesmo é válido para a contribuição do caso massivo, isto é, o segundo termo do lado direito da Eq. (4.3.17), de modo que, para comparar os nossos resultados com os apresentados na Ref. [44], precisamos definir a correção da energia de Casimir, $\Delta E_{\rm C}$, por unidade de área A, dos planos como $\frac{\Delta E_{\rm C}}{A} = L\Delta\mathcal{E}_{\rm C}$.

A Fig. 4.12 mostra a influência do campo complexo, sob condições de contorno mista, na correção apresentada na Eq. (4.3.17) da densidade de energia de Casimir para o campo escalar real e massivo. A expressão da Eq. (4.3.17) foi exibida como função de mL, tomando $m = \mu$. Consideramos ainda os valores $\lambda_\psi = 10^{-2}$, $\lambda_\varphi = 10^{-2}$ e $g = 10^{-3}$. A linha sólida escura é a correção livre de interação com o campo complexo, isto é, considerando apenas o efeito da auto-interação, enquanto que a linha pontilhada azul é a correção obtida na Eq. (4.3.17) levando em consideração a interação com o campo complexo, submetido à condição de contorno mista. O efeito da interação é aumentar a correção, conforme é revelado pelo gráfico da Fig. 4.12. Note que as duas curvas tendem aos seus correspondentes valores constante para o caso dos campos sem massa, em $mL = 0$, como pode ser verificado na Eq. (4.3.18). Além disso, considerando o regime com $mL >> 1$, vemos que a correção da Eq. (4.3.17) vai a zero. Novamente isso é uma consequência do decaimento exponencial da função de Macdonald para grandes argumentos [55].

A seguir analisamos a estabilidade do vácuo da teoria, sendo que o estado $\Psi = 0$ não é o único estado de vácuo possível, conforme mencionado anteriormente. Por simplicidade, consideramos o caso da teoria dos campos escalares sem massa.

4.3.3 Estabilidade do vácuo

Vamos analisar a estabilidade dos possíveis estados de vácuo associados ao potencial efetivo, até primeira ordem de correção de loop, da teoria descrita pela ação dada na Eq. (4.1.4). Por simplicidade, consideramos o caso em que os campos não possuem massa, i.e., $m, \mu \to 0$. É importante reiterar novamente que, para o campo escalar complexo, submetido à condições de contorno descrita na Eq. (4.3.1), o único campo constante que satisfaz tal condição é o campo nulo, potanto, fazemos $\Phi_i = 0$. Isso faz com que a expressão (4.1.7) seja exata, mesmo sem considerar termos cruzados.

Seguindo as mesmas etapas necessárias para obter a Eq. (4.2.13), obtemos o potencial efetivo não renormalizado para o caso em que os campos escalares não possuem massa, ou seja:

$$V_{\text{eff}}(\Psi) = \frac{\lambda_\psi + C}{4!}\Psi^4 + \frac{\lambda_\psi^2\Psi^4}{256\pi^2}\left[\ln\left(\frac{\lambda_\psi\Psi^2}{2\nu^2}\right) - \frac{3}{2}\right] + \frac{g^2\Psi^4}{32\pi^2}\left[\ln\left(\frac{g\Psi^2}{\nu^2}\right) - \frac{3}{2}\right] + \\ -\frac{\lambda_\psi^2\Psi^4}{8\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty} f_2\left(j\sqrt{\frac{\lambda_\psi}{2}\Psi^2}L\right) - \frac{g^2\Psi^4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[2f_2\left(4n\sqrt{g\Psi^2}L\right) - f_2\left(2n\sqrt{g\Psi^2}L\right)\right]. \quad (4.3.19)$$

Agora devemos renormalizar o potencial efetivo da Eq. (4.3.19). Portanto, aplicando a condição de renormalização apresentada na Eq. (4.1.15), obtemos a contante de renormalização C, como sendo a mesma que a apresentada na Eq. (4.2.32). Então, substituindo a forma explícita da constante C no potencial efetivo da Eq. (4.3.19), encontramos o potencial efetivo renormalizado, i.e.:

$$V_{\text{eff}}^R(\Psi) = \frac{\lambda_\psi}{4!}\Psi^4 - \left[\frac{\lambda_\psi^2}{8} + g^2\right]\frac{25\Psi^4}{192\pi^2} + \left[\frac{\lambda_\psi^2}{8} + g^2\right]\frac{\Psi^4}{32\pi^2}\ln\left(\frac{\Psi^2}{M^2}\right) + \\ -\frac{\lambda_\psi^2\Psi^4}{8\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty} f_2\left(j\sqrt{\frac{\lambda_\psi}{2}\Psi^2}L\right) - \frac{g^2\Psi^4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[2f_2\left(4n\sqrt{g\Psi^2}L\right) - f_2\left(2n\sqrt{g\Psi^2}L\right)\right]. \quad (4.3.20)$$

Para analisarmos a estabilidade do vácuo, expandimos o potencial efetivo renormalizado da Eq. (4.3.20), em termos das constantes de acoplamento λ_ψ e g, mantendo apenas os termos de primeira ordem. A expansão resulta na seguinte expressão:

$$V_{\text{eff}}^R(\Psi) \simeq -\frac{19\pi^2}{30L^4} + \frac{\lambda_\psi\Psi^4}{4!} + \frac{\lambda_\psi\Psi^2}{48L^2} - \frac{g\Psi^2}{96L^2}. \quad (4.3.21)$$

Os possíveis estados de vácuo são obtidos como os valores de Ψ que minimizam o potencial efetivo expandido na Eq. (4.3.21). Portanto, derivando o potencial efetivo da Eq. (4.3.21) com respeito a Ψ e igualando o resultado a zero, produz os seguintes valores de Ψ, que correspondem aos possíveis estado de vácuo:

$$\Psi = 0, \quad \Psi_\pm = \pm\sqrt{\frac{g - 2\lambda_\psi}{8\lambda_\psi L^2}}. \quad (4.3.22)$$

A estabilidade dos estados obtidos acima é determinada a partir da segunda derivada do potecial efetivo expandido na Eq. (4.3.21).

Inicialmente consideramos que o estado de vácuo é $\Psi = 0$. Então, tomando a segunda derivada do potencial efetivo expandido na Eq. (4.3.21), calculada no estado $\Psi = 0$, obtemos a condição de estabilidade na forma:

$$2\lambda_\psi > g. \tag{4.3.23}$$

Para esse estado de vácuo a densidade de energia de Casimir é dada pela mesma expressão que a obtida na Eq. (4.3.11). Além disso, é perceptível que a massa topológica também não sofre mudanças, isto é, é dada pelo mesmo resultado que foi apresentado na Eq. (4.3.13).

Por outro lado, partindo da Eq. (4.3.22), podemos considerar o estado de vácuo como sendo $\Psi = \Psi_\pm$. Tomando a segunda derivada do potencial expandido no estado de vácuo $\Psi = \Psi_\pm$, vemos que a condição de estabilidade é escrita como:

$$g > 2\lambda_\psi. \tag{4.3.24}$$

Assim, a massa topológica para o caso em consideração toma a seguinte forma:

$$m_T^2 = \frac{g - 2\lambda_\psi}{24L^2}, \tag{4.3.25}$$

que é também uma quantidade consistente sendo que ela é estritamente positiva, de acordo com a restrição escrita na Eq. (4.3.24). Além disso, a densidade de energia de Casimir, considerando $\Psi = \Psi_\pm$ como sendo o estado de vácuo, é obtida pela substituição de $\Psi_\pm$ no potencial efetivo expandido na Eq. (4.3.22), o que resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\rm C} &= V_{\rm eff}^R(\Psi)\big|_{\Psi_\pm} \\ &\simeq -\frac{19\pi^2}{30L^4} - \frac{(g-2\lambda_\psi)^2}{1536\lambda_\psi L^4}. \end{aligned} \tag{4.3.26}$$

Enfatizamos que o resultado acima é apenas uma aproximação pois estamos considerando a expansão do potencial efetivo na Eq. (4.3.21), até primeira ordem nas constantes de acoplamento. Note que o primeiro termo do lado direito da Eq. (4.3.26) é a densidade de energia de Casimir obtida na Eq. (4.3.11), enquanto que o segundo termo apresenta correções com as constantes de acoplamento.

A discussão apresentada no final da Sec. 4.2.3 também se aplica aqui. Os cálculos da correção de dois loops da densidade de energia de Casimir da Eq. (4.3.26) necessita de gráficos de Feynman adicionais. A consideração da contribuição de dois loops faria nosso problema ser extremamente complicado, tal que restrigimos nossa análise a correção de um loop apenas, o que fornece a densidade de energia de Casimir na Eq. (4.3.26).

Considerando os resultados apresentados nas Eqs. (4.3.23) e (4.3.24), podemos concluir que a estabilidade do estado de vácuo é determinada pelos valores das constantes de acoplamento λ_ψ e g, entretanto, a estabilidade não depende de L, que é o parâmetro que caracteriza a condição de contorno.

Capítulo 5

Comentários finais

Na presente tese estudamos o efeito Casimir como consequência das flutuações de vácuo de um campo escalar real, auto-interagente, sujeito à condição de contorno tipo hélice, no espaço tempo de Minkowski em um cenário que preserva a simetria de Lorentz e, em adição, consideramos também o cenário em que se estabelece uma violação da simetria de Lorentz do tipo-éter CPT-par. Para realizar a investigação, utilizamos a abordagem do potencial efetivo, que é obtido por meio do método de integrais de trajetória. Assim, calculamos o potencial efetivo renormalizado até correção de um loop e demonstramos que, quando este é tomado no estado de vácuo, resultados conhecidos anteriormente para a densidade de energia de Casimir são recuperados [9, 33, 34, 35]. Além disso, considerando uma correção até um loop, mostramos que a massa do campo escalar adquire um termo topológico de ordem $\lambda^{(1)}$, que é proveniente da imposição da condição de contorno tipo hélice. Salientamos que esse termo não foi obtido na literatura anteriormente e caracteriza um novo resultado. Estendemos ainda os resultados apresentados nas Refs. [9, 33, 34, 35], pela análise de como a violação da simetria de Lorentz em cada direção do espaço tempo, afeta esses resultados e exibimos suas diferenças nos gráficos das figuras Figs. 3.1, 3.4 e 3.7. O efeito da correção, a nível de um loop, para a massa do campo escalar é apresentada na Fig. 2.1, preservando a simetria de Lorentz e nas Figs. 3.2, 3.5 e 3.8, assumindo um cenário com violação da simetria de Lorentz.

Além dos resultados descritos acima, obtemos também a correção a nível de dois loops para o potencial efetivo e demonstramos que no estado de vácuo, essa correção é da ordem $\lambda^{(1)}$ para a densidade de energia de Casimir considerada nas Refs. [9, 33, 34, 35]. O efeito dessa correção de loop na densidade de energia de Casimir é mostrado na Fig. 2.3, que exibe também a energia sem correção para efeito de comparação. Ademais, analisamos a correção de ordem $\lambda^{(1)}$ para a densidade de energia de Casimir, assumindo a violação da simetria de Lorentz em cada direção do espaço tempo separadamente. Os resultados são exibidos nos gráficos das Figs. 3.3, 3.6 e 3.9.

Devemos enfatizar que a geometria helicoidal, considerada neste trabalho como condição de contorno, se faz presente em uma variedade de estruturas da natureza tais como DNA e membranas celulares de proteínas. Nas conclusões da Ref. [9], uma possível aplicação foi mencionada, visto que as dimensões de comprimento da estrutura helicoidal do DNA ou RNA reside na escala dos nanometros, a escala exata em que os efeitos de flutuações de vácuo se tornam relevantes, a densidade de energia de Casimir pode induzir mutações genéticas tanto no DNA como no RNA. Nesse contexto, uma aplicação do efeito Casimir é investigada na Ref. [36]. Assim, considerando elementos extras, tais como as correções de temperatura e auto-interação, pode ser oferecida uma forma mais realística de investigar como a mutação genética é induzida.

Além de um campo escalar real obedecendo a condição de contorno tipo hélice, consideramos ainda um sistema que consiste de um campo escalar real, interagindo com um campo escalar complexo. A

interação é estabelecida via interação quártica e, em adição, incluímos os termos que correspondem às auto-interações de cada campo. A correção de loop para o efeito Casimir e geração da massa topológica, proveniente de uma topologia não trivial no espaço tempo de Minkowski, que se estabelece na forma de condições periódica e quasi-periódica, foram investigadas. Essas quantidades físicas também foram analisadas considerando condições mistas.

O campo escalar real foi submetido à condição periódica, enquanto o campo complexo foi submetido inicialmente à condição quasi-periódica e, posteriormente, à condição mista. A densidade de energia de Casimir, via correção de um loop do potencial efetivo, foi obtida na Eq. (4.2.16), para campos massivos e na Eq. (4.2.17), para campos não massivos, considerando o caso em que o campo complexo obedece à condição quasi-periódica. Nesse contexto, a massa topológica foi também obtida e apresentada nas Eqs. (4.2.20) e (4.2.21), para os casos dos campos com massa e sem massa, respectivamente. A contribuição da correção de dois loops para a densidade de energia de Casimir, considerando ambos os casos, campos massivo e sem massa, foram apresentadas, respectivamente, nas Eqs. (4.2.29) e (4.2.30) sendo essas correções proporcionais às constantes de acoplamento λ_ψ, λ_φ e g. Além disso, foram investigados os possíveis estados de vácuo e as respectivas condições de estabilidade de tais estados. Esses estados de vácuo foram apresentados na Eq. (4.2.36) e as correspondentes condições de estabilidade expressas nas Eqs. (4.2.38) e (4.2.42), que dependem dos valores das constantes de acoplamento λ_ψ, g e do parâmetro θ da condição quasi-periódica, mas não sofrem influência do parâmetro L que codifica a condição de periodicidade e a quasi-periodicidade.

Ademais, assumindo que o campo complexo satisfaz a condição mista, a densidade de energia de Casimir, até correção de um loop do potencial efetivo, para ambos os casos de campos massivo e não massivo foi apresentada nas Eqs. (4.3.10) e (4.3.11), respectivamente. A análise da massa topológica para tal sistema foi realizada e os resultados foram escritos nas Eqs. (4.3.12) e (4.3.13) para os campos massivo e sem massa, respectivamente. No caso considerado, a contribuição da correção de dois loops para a densidade de energia de Casimir foi apresentada na Eq. (4.3.17) para o caso em que os campos são massivos e na Eq. (4.3.18), para o caso que os campos não possuem massa. A investigação da estabilidade do estado de vácuo determinou os possíveis estados de vácuo, bem como a condição para alcançar a estabilidade em cada estado possível. Considerando os resultados apresentados nas Eqs. (4.3.23) e (4.3.24), foi possível concluir que a estabilidade do vácuo é determinado pelos valores das constantes de acoplamento λ_ψ e g, mas não sofre influência do parâmetro L que codifica a periodicidade e a escala de comprimento entre as placas onde as condições mistas foram consideradas.

Portanto, estendendo a análise realizada na Ref. [41] para o caso com o campo complexo e considerando condições quasi-periódicas e mistas, foi possível generalizar os resulados encontrados nas Refs. [38, 39, 42, 43, 44] para a teoria do campo escalar real com auto-interação.

Dando prosseguimento aos estudos realizados nessa tese, devemos investigar sistemas constituídos de campos interagentes em um cenário que permite a violação de simetria de Lorentz. Especificamente, pretendemos considerar um acoplamento de um campo escalar com um campo de calibre, tendo em vista diferentes condições incluindo a possibilidade de violação de simetria de Lorentz do tipo éter e correções térmicas na densidade de energia de Casimir. De fato essa linha de pesquisa deve envolver diferentes acoplamentos. Além disso, outro aspecto que deve ser considerado é o espaço-tempo curvo.

Apêndice 1: Representações de Schrödinger, Heisenberg e Interação

Neste apêndice descrevemos as representações de Schrödinger, Heisenberg e Interação. Seguindo os passos da Ref. [48], consideramos um sistema cuja Hamiltoniana total $\hat{H}$ pode ser escrita como a soma de duas parcelas:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}, \tag{A.1}$$

em que $\hat{H}_0$ é o operador Hamiltoniano livre, que não contém termos de interação e $\hat{H}_{\text{int}}$ é o operador Hamiltoniano que contém os termos que descrevem a interação.

Na representação de Schrödinger, temos que um operador arbitrário $\hat{O}^{\text{S}}$, que representa um observável do sistema, é constante em relação ao tempo. Por outro lado, a evolução temporal de um estado do sistema $|\psi(t)\rangle^{\text{S}}$ é descrita da seguinte forma:

$$i\partial_t |\psi(t)\rangle^{\text{S}} = \hat{H} |\psi(t)\rangle^{\text{S}} = \left(\hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}\right) |\psi(t)\rangle^{\text{S}}, \tag{A.2}$$

ou seja, a evolução temporal do estado depende do operador Hamiltoniano total do sistema. Note que utilizamos o índice S para denotar a representação de Schrödinger e de forma similar para as representações de Heisenberg e Interação, no que segue.

Em contrapartida, a representação de Heisenberg considera que um operador $\hat{O}^{\text{H}}(t)$ depende do tempo e satisfaz a seguinte equação:

$$i\partial_t \hat{O}^{\text{H}}(t) = \left[\hat{O}^{\text{H}}(t), \hat{H}\right] = \left[\hat{O}^{\text{H}}(t), \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}\right]. \tag{A.3}$$

Os estados do sistema $|\psi\rangle^{\text{H}}$, na representação de Heisenberg, são constantes no tempo.

As duas representações apresentadas, a representação de Schrödinger e de Heisenberg, são de fato equivalentes e conectadas pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} \hat{O}^{\text{H}}(t) &= \exp\left(i\hat{H}t\right)\ \hat{O}^{\text{S}}\ \exp\left(-i\hat{H}t\right), \\ |\psi\rangle^{\text{H}} &= \exp\left(i\hat{H}t\right) |\psi(t)\rangle^{\text{S}}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Dependendo da forma do operador $\hat{H}_{\text{int}}$, as equações (A.2) e (A.3) podem se tornar bastante complicadas. Nesse caso, a representação de interação (Dirac) se torna conveniente. A representação de interação é definida de tal forma que a evolução temporal do operador $\hat{O}^{\text{D}}(t)$ depende apenas da Hamiltoniana livre $\hat{H}_0$, enquanto que a evolução temporal dos estados $|\psi(t)\rangle^{\text{D}}$ é governada pela Hamiltoniana de interação $\hat{H}_{\text{int}}$. O operador $\hat{O}^{\text{D}}(t)$ e o estado $|\psi(t)\rangle^{\text{D}}$ satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{aligned} i\partial_t \hat{O}^{\text{D}}(t) &= \left[\hat{O}^{\text{D}}(t), \hat{H}_0\right], \\ i\partial_t |\psi(t)\rangle^{\text{D}} &= \hat{H}_{\text{int}}^{\text{D}} |\psi(t)\rangle^{\text{D}}, \end{aligned} \tag{A.5}$$

em que

$$\hat{H}_{\text{int}}^{\text{D}} = \exp\left(i\hat{H}_0 t\right)\ \hat{H}_{\text{int}} \exp\left(-i\hat{H}_0 t\right). \tag{A.6}$$

A conexão entre as três representações se estabelece por:

$$\begin{aligned} \hat{O}^{\text{D}}(t) &= e^{i\hat{H}_0 t}\hat{O}^{\text{S}}e^{-i\hat{H}_0 t} = e^{i\hat{H}_0 t}e^{-i\hat{H}t}\hat{O}^{\text{H}}e^{i\hat{H}t}e^{-i\hat{H}_0 t}, \\ |\psi(t)\rangle^{\text{D}} &= e^{i\hat{H}_0 t}\,|\psi(t)\rangle^{\text{S}} = e^{i\hat{H}_0 t}e^{-i\hat{H}t}\,|\psi\rangle^{\text{H}}. \end{aligned} \tag{A.7}$$

É fácil ver que o valor esperado do operador $\hat{O}$ é o mesmo em qualquer representação, i.e.:

$${}^{\text{D}}\langle\psi(t)|\,\hat{O}^{\text{D}}(t)\,|\psi(t)\rangle^{\text{D}} = {}^{\text{S}}\langle\psi(t)|\,\hat{O}^{\text{S}}\,|\psi(t)\rangle^{\text{S}} = {}^{\text{H}}\langle\psi|\,\hat{O}^{\text{H}}(t)\,|\psi\rangle^{\text{H}}. \tag{A.8}$$

Ressaltamos que as três representações descritas acima são equivalentes e descrevem os sistemas quânticos de forma satisfatória.

Apêndice 2: Propagador de Feynman no espaço Euclidiano

Neste apêndice seguimos os passos apresentados no livro [48] para obter uma forma explícita do propagador de Feynman para a teoria do campo escalar sem interação, Eq. (1.2.16). Nesse contexto, adotaremos o índice E para denotar que estamos operando no espaço Euclidiano.

Iniciamos relembrando da expressão da amplitude de transição vácuo-vácuo, para o campo escalar no espaço Euclidiano, Eq. (1.2.12):

$$Z_0^{\mathrm{E}}[J] = \mathcal{N}_{\mathrm{E}} \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int d^4x_{\mathrm{E}} \left[\frac{1}{2}\varphi\left(-\hbar^2\partial_\mu^{\mathrm{E}}\partial_\mu^{\mathrm{E}} + m^2\right)\varphi - J\phi\right]\right\}. \tag{B.1}$$

Para resolver a integral de trajetória usaremos o seguinte resultado [48, 49]:

$$\int \mathcal{D}\psi \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\psi, \hat{A}\psi\right) + (\rho,\psi)\right] = \left(\det \hat{A}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\left(\rho, \hat{A}^{-1}\rho\right)\right], \tag{B.2}$$

em que $\hat{A}$ é um operador, $\hat{A}^{-1}$ é o inverso do operador $\hat{A}$, ou seja, eles satisfazem a relação abaixo:

$$\int d^4x''_{\mathrm{E}}\ \hat{A}\left(x_{\mathrm{E}}, x''_{\mathrm{E}}\right)\hat{A}^{-1}\left(x''_{\mathrm{E}}, x'_{\mathrm{E}}\right) = \delta^4\left(x_{\mathrm{E}} - x'_{\mathrm{E}}\right). \tag{B.3}$$

Note que foram introduzidas as notações $\left(\psi, \hat{A}\psi\right)$ e (ρ,ψ) para designar o produto escalar, i.e.:

$$\begin{aligned}\left(\psi, \hat{A}\psi\right) &= \int d^4x'_{\mathrm{E}} \int d^4x_{\mathrm{E}}\ \psi\left(x'_{\mathrm{E}}\right)\hat{A}\left(x'_{\mathrm{E}}, x_{\mathrm{E}}\right)\psi\left(x_{\mathrm{E}}\right),\\ (\rho,\psi) &= \int d^4x_{\mathrm{E}}\ \psi\left(x_{\mathrm{E}}\right)\rho\left(x_{\mathrm{E}}\right).\end{aligned} \tag{B.4}$$

Lançando mão do resultado apresentado na Eq. (B.2), podemos resolver a integral da amplitude vácuo-vácuo dada na equação (B.1). A expressão resultante é escrita como:

$$Z_0^{\mathrm{E}}[J] = \mathcal{N}_{\mathrm{E}} \int \mathcal{D}\varphi \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\varphi, \hat{A}\varphi\right) + \frac{(\varphi, J)}{\hbar}\right] = \mathcal{N}_{\mathrm{E}}\left(\det \hat{A}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{1}{2\hbar^2}\left(J, \hat{A}^{-1}J\right)\right], \tag{B.5}$$

em que o operador $\hat{A}$ é definido como segue:

$$\hat{A}\left(x'_{\mathrm{E}}, x_{\mathrm{E}}\right) = \frac{1}{\hbar}\left(-\hbar^2\partial_\mu^{\mathrm{E}}\partial_\mu^{\mathrm{E}} + m^2\right)\delta^4\left(x'_{\mathrm{E}} - x_{\mathrm{E}}\right). \tag{B.6}$$

Normalizando a amplitude do vácuo na ausência de fonte externa, isto é, $J = 0$, obtemos a constante de normalização $\mathcal{N}_{\mathrm{E}}$, i.e.:

$$Z_0^{\mathrm{E}}[0] = \langle 0\,|0\rangle = 1 = \mathcal{N}_{\mathrm{E}}\left(\det \hat{A}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

que leva à seguinte expressão final:

$$Z_0^{\mathrm{E}}[J] = \exp\left[\frac{1}{2\hbar^2}\left(J, \hat{A}^{-1}J\right)\right]. \tag{B.7}$$

Assim, vemos que não é necessário calcular o determinante do operador $\hat{A}$ explicitamente. Entretanto, o operador inverso $\hat{A}^{-1}$ se faz presente no resultado acima e precisamos obter sua forma explícita e para tanto, utilizamos a definição apresentada na equação (B.3). Substituindo o operador $\hat{A}$, dado na equação (B.6), na definição (B.3), obtemos a seguinte expressão:

$$\left(-\hbar\partial_\mu^{\mathrm{E}}\partial_\mu^{\mathrm{E}} + \frac{m^2}{\hbar}\right)\hat{A}^{-1}\left(x_{\mathrm{E}}, x'_{\mathrm{E}}\right) = \delta^4\left(x_{\mathrm{E}} - x'_{\mathrm{E}}\right). \tag{B.8}$$

Nesse ponto é conveniente empregarmos as transformadas de Fourier no espaço Euclidiano e escrever o operador inverso $A^{-1}\left(x_{\mathrm{E}}, x'_{\mathrm{E}}\right)$ e a função delta $\delta^4\left(x_{\mathrm{E}} - x'_{\mathrm{E}}\right)$ na forma:

$$\begin{aligned}
\hat{A}^{-1}\left(x_{\mathrm{E}}, x'_{\mathrm{E}}\right) &= \int \frac{d^4p_{\mathrm{E}}}{\left(2\pi\hbar\right)^4}\exp\left[-i\frac{p_{\mathrm{E}}}{\hbar}\left(x_{\mathrm{E}} - x'_{\mathrm{E}}\right)\right]\hat{A}^{-1}\left(p_{\mathrm{E}}\right), \\
\delta^4\left(x_{\mathrm{E}} - x'_{\mathrm{E}}\right) &= \int \frac{d^4p_{\mathrm{E}}}{\left(2\pi\hbar\right)^4}\exp\left[-i\frac{p_{\mathrm{E}}}{\hbar}\left(x_{\mathrm{E}} - x'_{\mathrm{E}}\right)\right].
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Substituindo as transformadas de Fourier do operador $\hat{A}^{-1}$ e da função δ^4, Eq. (B.9), na equação (B.8), obtemos o operador inverso, i.e.:

$$\hat{A}^{-1}\left(x_{\mathrm{E}}, x'_{\mathrm{E}}\right) = \hbar\int \frac{d^4p_E}{\left(2\pi\hbar\right)^4}\frac{\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p_E\left(x_E - x'_E\right)\right]}{\left(p_E\right)^2 + m^2}. \tag{B.10}$$

O operador inverso $\hat{A}^{-1}\left(x_{\mathrm{E}}, x'_{\mathrm{E}}\right)$ é de fato relacionado com o *propagador de Feynman* $\Delta_F^E\left(x_E - x'_E\right)$, ambos escritos no espaço Euclidiano. A relação entre essas quantidades é dada por:

$$\Delta_F^{\mathrm{E}}\left(x_{\mathrm{E}} - x'_{\mathrm{E}}\right) = \frac{1}{\hbar}\hat{A}^{-1}\left(x_{\mathrm{E}}, x'_{\mathrm{E}}\right) = \int \frac{d^4p_{\mathrm{E}}}{\left(2\pi\hbar\right)^4}\frac{\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p_{\mathrm{E}}\left(x_{\mathrm{E}} - x'_{\mathrm{E}}\right)\right]}{\left(p_{\mathrm{E}}\right)^2 + m^2}. \tag{B.11}$$

Note que na equação (B.11), o limite de integração em p_4^{E} é de $-\infty$ a $+\infty$ e o denominador do lado direito da equação acima é $\left(p_{\mathrm{E}}\right)^2 + m^2 = \left(p_4^{\mathrm{E}}\right)^2 + \left(\mathbf{p}_{\mathrm{E}}\right)^2 + m^2$, ou seja, pólos se fazem presentes em $p_4^{\mathrm{E}} = \pm i\sqrt{\left(\mathbf{p}_{\mathrm{E}}\right)^2 + m^2}$, mas estes não são alcançados, uma vez que a integração em p_4^{E} é apenas no eixo real. Entretanto, quando fazemos uma continuação analítica para voltar ao espaço de Minkowski, os pólos são atingindos pois

$$\Delta_F^{\mathrm{E}}\left(i\left(x_0 - x'_0\right), \mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) = \int \frac{d^4p_{\mathrm{E}}}{\left(2\pi\hbar\right)^4}\frac{\exp\left[-\frac{i}{\hbar}ip_4^{\mathrm{E}}\left(x_0 - x'_0\right) - \frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right)\right]}{\left(p_4^E\right)^2 + \left(\mathbf{p}_{\mathrm{E}}\right)^2 + m^2}, \tag{B.12}$$

ou, fazendo $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, $p_0 = ip_4^{\mathrm{E}}$, $d^4p_{\mathrm{E}} = -id^4p$, chegamos a

$$\Delta_F^{\mathrm{E}}\left(i\left(x_0 - x'_0\right), \mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) = i\int \frac{d^4p}{\left(2\pi\hbar\right)^4}\frac{\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p\left(x - x'\right)\right]}{p^2 - m^2} = i\Delta_F\left(x - x'\right), \tag{B.13}$$

que é o propagador de Feynman no espaço de Minkowski, com o contorno sendo definido por p_0 indo de $-i\infty$ a $+i\infty$, que pode ser deformada para o eixo real se evitarmos os pólos em $p_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

Um processo equivalente é escrever o propagador de Feynman no espaço de Minkowski na seguinte forma:

$$\Delta_F\left(x-x'\right)=\int\frac{d^4p}{\left(2\pi\hbar\right)^4}\frac{\exp\left[-\frac{i}{\hbar}p\left(x-x'\right)\right]}{p^2-m^2+i\varepsilon}. \tag{B.14}$$

Fica evidente que a formulação da teoria de campos no espaço Euclidiano fornece automaticamente o propagador que satisfaz às condições de contorno corretas. Trabalhando diretamente no espaço de Minkowski não saberíamos qual, dentre várias funções de Green do operador de Klein-Gordon, a correta para construir $\hat{A}^{-1}\left(x_{\mathrm{E}},x'_{\mathrm{E}}\right)$, ou seja, o propagador de Feynman. Note ainda que a adição de $i\varepsilon$ para obter a integração correta é equivalente a escrever a Lagrangiana do sistema como segue:

$$\mathcal{L}_0=\frac{\hbar^2}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-\frac{1}{2}m^2\varphi^2+\frac{1}{2}i\varepsilon\varphi^2. \tag{B.15}$$

Resumidamente, temos que $\hat{A}^{-1}\left(x_{\mathrm{E}},x'_{\mathrm{E}}\right)=i\hbar\Delta_F\left(x-x'\right)$, com $\Delta_F\left(x-x'\right)$ dado na Eq. (B.14), o que implica na seguinte forma para a amplitude vácuo-vácuo para o campo escalar não interagente:

$$Z_0\left[J\right]=\exp\left[\frac{1}{2\hbar^2}\left(J,\hat{A}^{-1}J\right)\right]=\exp\left[-\frac{i}{2\hbar}\int d^4x'd^4x\ J\left(x'\right)\Delta_F\left(x'-x\right)J\left(x\right)\right]. \tag{B.16}$$

O resultado acima é aplicado também na teoria que considera campos interagentes, especificamente quando fazemos uma expansão em série da amplitude de transição vácuo-vácuo, conforme será visto no próxima apêndice.

Apêndice 3: Interação φ^4

No presente apêndice, consideramos um campo escalar com auto-interação na forma $\frac{g}{4!}\varphi^4$, em que g é a constante de acoplamento. Primeiramente, vamos considerar uma interação geral na forma $gV(\varphi)$. Nosso objetivo é escrever a amplitude de transição vácuo-vácuo dada na Eq. (1.2.27), isto é:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \mathcal{N}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ gV\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]Z_0[J], \\ [\mathcal{N}]^{-1} &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ gV\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]Z_0[J]\Big|_{J=0}, \end{aligned} \tag{C.1}$$

como uma série de potências da constante de acoplamento g.

Pode ser demonstrado que a expansão em série de $Z[J]$, toma a seguinte forma [48]:

$$Z[J] = Z_0[J]\left[1 + gz_1(J) + g^2 z_2(J) + g^3 z_3(J) + ...\right], \tag{C.2}$$

em que as funções z_i são dadas pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned} z_1(J) &= u_1(J) - u_1(0), \\ z_2(J) &= u_2(J) - u_2(0) - (u_1(J) - u_1(0))\,u_1(0), \\ z_3(J) &= ..., \end{aligned} \tag{C.3}$$

com as funções u_i sendo escritas como:

$$\begin{aligned} u_1(J) &= Z_0^{-1}[J]\left[-\frac{i}{\hbar}\int d^4x V\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]Z_0[J], \\ u_2(J) &= Z_0^{-1}[J]\,\frac{1}{2!}\left[-\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ V\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]\left[-\frac{i}{\hbar}\int d^4x\ V\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]Z_0[J] \\ u_3(J) &= .... \end{aligned} \tag{C.4}$$

Lembramos que $Z_0[J]$ é a amplitude de transição vácuo-vácuo, considerando o campo escalar sem interação Eq. (1.2.15).

Podemos expandir a função geradora das funções de n-pontos conectadas, $W[J]$, a partir da definição aprensentada na equação (1.2.19). Assim, podemos escrever:

$$\frac{i}{\hbar}W[J] = \ln Z[J]. \tag{C.5}$$

Deste modo, podemos ver que uma expansão em série de $W[J]$ pode ser obtida pela série de $Z[J]$.

O resultado final é escrito na forma:

$$\begin{aligned}\frac{i}{\hbar}W[J] &= \ln Z_0[J] + \ln\left[1 + gz_1(J) + g^2 z_2(J) + g^3 z_3(J) + ...\right] \\ &= \ln Z_0[J] + \left[gz_1(J) + g^2 z_2(J) + ...\right] - \frac{1}{2}\left[gz_1(J) + g^2 z_2(J) + ...\right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}\left[gz_1(J) + g^2 z_2(J) + ...\right]^3 + ..., \end{aligned} \tag{C.6}$$

em que os $z_i(J)$ foram apresentados na Eq. (C.3) em conjunto com a Eq. (C.4). Conhecendo as séries apresentadas nas equações (C.2) e (C.6) para os funcionais $Z[J]$ e $W[J]$, respectivamente, podemos considerar o caso do campo escalar com auto-interação φ^4.

Na teoria da auto-interação φ^4, o potencial $V(\varphi)$ é escrito explicitamente como:

$$V(\varphi) = \frac{1}{4!}\varphi^4(x), \tag{C.7}$$

e a amplitude vácuo-vácuo, sem interação é dada por:

$$Z_0[J] = \exp\left[-\frac{i}{2\hbar}(J, \Delta_F J)\right]. \tag{C.8}$$

Assim, o primeiro termo da série da Eq. (C.6) é escrito como:

$$\ln Z_0[J] = -\frac{i}{2\hbar}(J, \Delta_F J) = -\frac{i}{2\hbar}\int d^4x_1 \int d^4x_2 \; J(x_1)\,\Delta_F(x_1 - x)\,J(x_2). \tag{C.9}$$

O próximo termo é obtido na forma:

$$z_1(J) = u_1(J) - u_1(0). \tag{C.10}$$

No caso considerado, $u_1(J)$ é expresso pela seguinte equação:

$$u_1(J) = Z_0^{-1}[J]\left\{-\frac{i}{4!\hbar}\int d^4x \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right\} Z_0[J]. \tag{C.11}$$

Assim, precisamos calcular a quarta derivada funcional da amplitude $Z_0[J]$ da Eq. (C.8). Aplicando as quatro derivadas, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 Z_0[J] &= \left\{3\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 [\Delta_F(x-x)]^2 + \left[\int d^4x_1 \; \Delta_F(x - x_1)\,J(x_1)\right]^4 + \right. \\ &\quad \left. -\frac{6\hbar}{i}\Delta_F(x-x)\left[\int d^4x_1 \; \Delta_F(x - x_1)\,J(x_1)\right]^2\right\} Z_0[J]. \end{aligned} \tag{C.12}$$

A partir do resultado acima, podemos facilmente calcular $z_1(J)$, Eq. (C.10), para a teoria φ^4,

$$\begin{aligned}z_1(J) &= \frac{1}{4}\int d^4x \Delta_F(x-x)\left[\int d^4x_1 \; \Delta_F(x - x_1)\,J(x_1)\right]^2 + \\ &\quad -\frac{i}{4!\hbar}\int d^4x \left[\int d^4x_1 \; \Delta_F(x - x_1)\,J(x_1)\right]^4. \end{aligned} \tag{C.13}$$

Coletando os resultados expressos nas Eq. (C.9) e (C.13), podemos escrever a série de $W[J]$ da equação (C.6), até ordem de $g^{(1)}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{i}{\hbar}W[J] = -\frac{i}{2\hbar}\int d^4x_1 \int d^4x_2 \; J(x_1)\,\Delta_F(x_1-x_2)\,J(x_2) + \\
&+\frac{g}{4}\int d^4x \Delta_F(x-x)\int d^4x_2 \int d^4x_1 \; \Delta_F(x-x_1)\,J(x_1)\,\Delta_F(x-x_2)\,J(x_2) \\
&-\frac{g}{4!}\left(\frac{i}{\hbar}\right)\int d^4x \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \int d^4x_4 \times \\
&\times\Delta_F(x-x_1)\,J(x_1)\,\Delta_F(x-x_2)\,J(x_2)\,\Delta_F(x-x_3)\,J(x_3)\,\Delta_F(x-x_4)\,J(x_4)\,. \qquad \text{(C.14)}
\end{aligned}$$

Podemos continuar o processo descrito e obter correções de ordem superior.

Bibliography

[1] H. B. Casimir, *On the attraction between two perfectly conducting plates*, in *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, vol. 51, p. 793, 1948.

[2] G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio and G. Ruoso, *Measurement of the Casimir force between parallel metallic surfaces*, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 041804, [quant-ph/0203002].

[3] S. K. Lamoreaux, *Demonstration of the casimir casimir force in the 0.6 to 6 μ m range*, *Phys. Rev. Lett.* **78** (Jan, 1997) 5–8.

[4] S. Lamoreaux, *Erratum: Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μ m range [phys. rev. lett. 78, 5 (1997)]*, *Physical Review Letters* **81** (1998) 5475.

[5] U. Mohideen and A. Roy, *Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9 micrometers*, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 4549–4552, [physics/9805038].

[6] V. M. Mostepanenko, *New experimental results on the casimir effect*, *Brazilian Journal of Physics* **30** (2000) 309–315.

[7] W. J. Kim, M. Brown-Hayes, D. A. R. Dalvit, J. H. Brownell and R. Onofrio, *Anomalies in electrostatic calibrations for the measurement of the casimir force in a sphere-plane geometry*, *Phys. Rev. A* **78** (Aug, 2008) 020101.

[8] Q. Wei, D. A. R. Dalvit, F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli and R. Onofrio, *Results from electrostatic calibrations for measuring the casimir force in the cylinder-plane geometry*, *Phys. Rev. A* **81** (May, 2010) 052115.

[9] G. Aleixo and H. F. S. Mota, *Thermal Casimir effect for the scalar field in flat spacetime under a helix boundary condition*, *Phys. Rev. D* **104** (2021) 045012, [2105.08220].

[10] A. Romeo and A. A. Saharian, *Casimir effect for scalar fields under Robin boundary conditions on plates*, *J. Phys. A* **35** (2002) 1297–1320, [hep-th/0007242].

[11] R. V. Maluf, D. M. Dantas and C. A. S. Almeida, *The Casimir effect for the scalar and Elko fields in a Lifshitz-like field theory*, *Eur. Phys. J. C* **80** (2020) 442, [1905.04824].

[12] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir effect*, vol. 145. OUP Oxford, 2009.

[13] V. M. Mostepanenko and N. N. Trunov, *The Casimir effect and its applications*. Clarendon Press, Oxford, New York, 1997.

[14] K. A. Milton, *The Casimir effect: physical manifestations of zero-point energy*. World Scientific, 2001.

[15] V. A. Kostelecký and S. Samuel, *Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory*, *Physical Review D* **39** (1989) 683.

[16] D. Colladay and V. A. Kostelecký, CPT *violation and the standard model*, *Phys. Rev. D* **55** (Jun, 1997) 6760–6774.

[17] D. Colladay and V. A. Kostelecký, *Lorentz-violating extension of the standard model*, *Phys. Rev. D* **58** (Oct, 1998) 116002.

[18] A. Anisimov, T. Banks, M. Dine and M. Graesser, *Comments on noncommutative phenomenology*, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 085032, [hep-ph/0106356].

[19] C. E. Carlson, C. D. Carone and R. F. Lebed, *Bounding noncommutative qcd*, *Physics Letters B* **518** (2001) 201–206.

[20] J. L. Hewett, F. J. Petriello and T. G. Rizzo, *Signals for noncommutative interactions at linear colliders*, *Physical Review D* **64** (2001) 075012.

[21] O. Bertolami and L. Guisado, *Noncommutative field theory and violation of translation invariance*, *Journal of High Energy Physics* **2003** (2003) 013.

[22] V. A. Kostelecký, R. Lehnert and M. J. Perry, *Spacetime-varying couplings and lorentz violation*, *Physical Review D* **68** (2003) 123511.

[23] L. Anchordoqui and H. Goldberg, *Time variation of the fine structure constant driven by quintessence*, *Physical Review D* **68** (2003) 083513.

[24] O. Bertolami, *Lorentz invariance and the cosmological constant*, *Classical and Quantum Gravity* **14** (1997) 2785.

[25] J. Alfaro, H. A. Morales-Tecotl and L. F. Urrutia, *Quantum gravity corrections to neutrino propagation*, *Physical Review Letters* **84** (2000) 2318.

[26] J. Alfaro, H. A. Morales-Tecotl and L. F. Urrutia, *Loop quantum gravity and light propagation*, *Physical Review D* **65** (2002) 103509.

[27] R. K. Obousy and G. Cleaver, *Radius Destabilization in Five Dimensional Orbifolds from Lorentz Violating Fields*, *Mod. Phys. Lett. A* **24** (2009) 1495–1506, [0805.0019].

[28] R. Obousy and G. Cleaver, *Casimir Energy and Brane Stability*, *J. Geom. Phys.* **61** (2011) 577–588, [0810.1096].

[29] A. Martín-Ruiz and C. A. Escobar, *Casimir effect between ponderable media as modeled by the standard model extension*, *Phys. Rev. D* **94** (Oct, 2016) 076010.

[30] A. Martín-Ruiz and C. A. Escobar, *Local effects of the quantum vacuum in lorentz-violating electrodynamics*, *Phys. Rev. D* **95** (Feb, 2017) 036011.

[31] C. A. Escobar, L. Medel and A. Martín-Ruiz, *Casimir effect in lorentz-violating scalar field theory: A local approach*, *Phys. Rev. D* **101** (May, 2020) 095011.

[32] R. A. Dantas, H. F. S. Mota and E. R. Bezerra de Mello, *Bosonic casimir effect in an aether-like lorentz-violating scenario with higher order derivatives*, *Universe* **9** (2023) 241.

[33] C.-J. Feng and X.-Z. Li, *Quantum Spring from the Casimir Effect*, *Phys. Lett. B* **691** (2010) 167–172, [1007.2026].

[34] C.-J. Feng and X.-Z. Li, *Quantum Spring*, *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.* **7** (2012) 165–173, [1205.4475].

[35] X.-h. Zhai, X.-z. Li and C.-J. Feng, *The Casimir force of Quantum Spring in the (D+1)-dimensional spacetime*, *Mod. Phys. Lett. A* **26** (2011) 669–679, [1008.3020].

[36] B. Nogueira, I. Lavor and C. Muniz, *Ribonucleic acid genome mutations induced by the casimir effect*, *Biosystems* **226** (2023) 104888.

[37] R. Jackiw, *Functional evaluation of the effective potential*, *Phys. Rev. D* **9** (1974) 1686.

[38] D. J. Toms, *Symmetry Breaking and Mass Generation by Space-time Topology*, *Phys. Rev. D* **21** (1980) 2805.

[39] M. B. Cruz, E. R. Bezerra de Mello and H. F. Santana Mota, *Casimir energy and topological mass for a massive scalar field with Lorentz violation*, *Phys. Rev. D* **102** (2020) 045006, [2005.09513].

[40] S. M. Carroll and H. Tam, *Aether compactification*, *Physical Review D* **78** (2008) 044047.

[41] D. J. Toms, *Interacting Twisted and Untwisted Scalar Fields in a Nonsimply Connected Space-time*, *Annals Phys.* **129** (1980) 334.

[42] L. H. Ford and T. Yoshimura, *Mass Generation by Selfinteraction in Nonminkowskian Space-Times*, *Phys. Lett. A* **70** (1979) 89–91.

[43] P. J. Porfírio, H. F. Santana Mota and G. Q. Garcia, *Ground state energy and topological mass in spacetimes with nontrivial topology*, *Int. J. Mod. Phys. D* **30** (2021) 2150056, [1908.00511].

[44] F. A. Barone, R. M. Cavalcanti and C. Farina, *Radiative corrections to the Casimir effect for the massive scalar field*, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **127** (2004) 118–122, [hep-th/0306011].

[45] H. Luckock, *Mixed boundary conditions in quantum field theory*, *J. Math. Phys.* **32** (1991) 1755–1766.

[46] C.-J. Feng, X.-Z. Li and X.-H. Zhai, *Casimir Effect under Quasi-Periodic Boundary Condition Inspired by Nanotubes*, *Mod. Phys. Lett. A* **29** (2014) 1450004, [1312.1790].

[47] K. Gottfried, *Quantum mechanics: fundamentals*. CRC Press, 2018.

[48] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field quantization*. Springer Science & Business Media, 2013.

[49] A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*, vol. 7. Princeton university press, 2010.

[50] L. H. Ryder, *Quantum field theory*. Cambridge university press, 1996.

[51] R. P. Feynman, *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*, *Reviews of modern physics* **20** (1948) 367.

[52] A. J. D. Farias Junior and H. F. Mota Santana, *Loop correction to the scalar Casimir energy density and generation of topological mass due to a helix boundary condition in a scenario with Lorentz violation*, *Int. J. Mod. Phys. D* **31** (2022) 2250126, [2204.09400].

[53] S. W. Hawking, *Zeta Function Regularization of Path Integrals in Curved Space-Time*, *Commun. Math. Phys.* **55** (1977) 133.

[54] S. R. Coleman and E. J. Weinberg, *Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking*, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 1888–1910.

[55] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions dover publications*, *New York* **361** (1965) .

[56] E. Elizalde, *Ten physical applications of spectral zeta functions*, *Lecture Notes in Physics Monographs* **35** (1995) .

[57] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytsenko and S. Zerbini, *Zeta regularization techniques with applications*. World Scientific Publishing, Singapore, 1994, 10.1142/2065.

[58] A. Chatrabhuti, P. Patcharamaneepakorn and P. Wongjun, *Æther field, casimir energy and stabilization of the extra dimension*, *Journal of High Energy Physics* **2009** (2009) 019.

[59] M. Gomes, J. Nascimento, A. Y. Petrov and A. Da Silva, *Aetherlike lorentz-breaking actions*, *Physical Review D* **81** (2010) 045018.

[60] A. J. D. F. Junior and H. F. S. Mota, *Casimir effect, loop corrections, and topological mass generation for interacting real and complex scalar fields in minkowski spacetime with different conditions*, *Phys. Rev. D* **107** (Jun, 2023) 125019.

[61] H. E. Haber, O. Ogreid, P. Osland and M. N. Rebelo, *Implications of symmetries in the scalar sector*, in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1586, p. 012048, IOP Publishing, 2020.

[62] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*. Academic press, 2014.