UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA À DISTÂNCIA

João Paulo dos Santos Santana

A problematização por meio do GeoGebra: Uma proposta de atividades para o ensino de funções

Mari – PB
2011

João Paulo dos Santos Santana

A problematização por meio do GeoGebra: Uma proposta de atividades para o ensino de funções

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Ms. Cristiane Borges Angelo

Mari – PB
2011

Catalogação na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

S232p Santana, João Paulo dos Santos.
A problematização por meio do GeoGebra: uma proposta de atividades para o ensino de funções / João Paulo dos Santos Santana. -Mari, 2011.
44f. : il. -

Monografia (Graduação) – UFPB/CCEN.
Orientadora: Cristiane Borges Angelo.
Inclui referências.

1. Matemática - Ensino. 2. Métodos matemáticos. 3. Matemática escolar. 4. Funções matemáticas. I. Título.

BS/CCEN

CDU: 51:37(043.2)

A problematização por meio do GeoGebra:
Uma proposta de atividades para o ensino de funções

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Profª. Ms. Cristiane Borges Angelo

Aprovado em: _____/______/______

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Profª. Ms Cristiane Borges Angelo (Orientadora)

____

Prof. Ms. Emmanuel de Sousa Fernandes Falcão

____

Prof. Ms. Luciélio Marinho da Costa

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, a minha avó, que me conceberam e ajudaram-me pra eu está aqui hoje e a minha noiva, pelo incentivo, carinho, apoio e paciência, propiciando vitória nesta minha caminhada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a **Deus**, por ter me concedido saúde para estudar e forças para perseverar até o fim, conseguindo superar os obstáculos que surgiram, agradeço pela oportunidade de ter passado por essa experiência.

Aos **meus pais** Maria de Lourdes e Manoel Joaquim, que por necessidade de trabalhar precisaram muito de minha contribuição, mas que entendem o que é melhor para mim e abriram mão de minha ajuda, para que eu, como estudante, pudesse realizasse as minhas atividades escolares; a minha avó Idalina, que é com quem eu resido e me dá todo o apoio nos estudos e sempre está ao meu lado, e também não posso esquecer de mencionar a minha noiva Rafaela, pela paciência que tem em está ao lado de um eterno estudante, agradeço a todos esses por me favorecerem este momento especial.

A **minha orientadora** Prof.ª Ms. Cristiane Borges Ângelo pelo estímulo e colaboração nessa trajetória, por está sempre preocupada com desenvolvimento do nosso TCC, pelos feedbacks e até pelas “puxadas de orelha”.

Aos **colegas**, pelas trocas de experiências, pelo convívio, pelas alegrias e incertezas, por todos esses momentos vividos juntos e partilhados, aos professores e tutores pelas contribuições e pela disposição que tiveram em nos ajudar.

Epígrafe

“Diga-me e eu esquecerei, ensine-me e eu lembrarei, envolva-me e eu aprenderei.”

Benjamin Franklin

RESUMO

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) e os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) aconselham que sejam integrados aos componentes curriculares básicos, como por exemplo, da matemática, da física e da química, recursos tecnológicos que venham potencializar o ensino-aprendizagem dos conteúdos didáticos abordados nesses componentes. No que diz respeito à matemática, há diversos softwares de geometria dinâmica que facilitam o trabalho tanto do docente quanto do aluno, um desses softwares é o GeoGebra, que além de ser um software livre, tem um grande potencial para explorar as propriedades de gráficos de funções, aqui serão apresentados atividades com as funções linear, afim , quadrática, exponencial e logarítmica; pode ser explorado questões como crescimento, decrescimento, além de ser possível relacionar as variáveis das funções em questão, um exemplo é relacionar a definição para calcular o tamanho da circunferência de um circulo $C(x)=2\pi x$, onde x é o raio o círculo com o próprio raio (x). Para realizar essa pesquisa foram propostas quatro atividades com suas respectivas soluções, por meio do GeoGebra, e análises pedagógicas. Ao fim o resultado esperado é que o professor tenha um material de apoio que o auxilie no processo da prática docente, especialmente para o aluno do primeiro ano do Ensino Médio, abordando o conceito de funções. Apresentamos uma sugestão de sequência didática que pode ser trabalhada com os estudantes na escola, a sequência é: objetivos, conteúdos, indicação, tempo estimado, material necessário, questões de investigação, avaliação, observações sobre a sequência.

Palavras-chave: OCEM, GeoGebra, Gráfico, Ensino-Aprendizagem.

ABSTRACT

The Curriculum Guidelines for Secondary Schools (OCEM) and the National Curriculum for Secondary Schools (PCNEM) advise that they are integrated into the basic curriculum components, such as mathematics, physics and chemistry, technological resources that will enhance the teaching-learning educational content covered in these components. With regard to mathematics, there are several dynamic geometry software to facilitate the work of both teacher and student, is one such software GeoGebra that besides being a free software has great potential to explore the properties of graphs functions, activities will be presented here with the linear functions, affine, quadratic, exponential and logarithmic functions, can be explored issues such as growth, decrease, and it is possible to relate the variables of the functions in question, an example is to relate the definition to calculate the size the circumference of a circle C(x)=2πx, where x is the radius of the circle with its radius (x). to accomplish this research were proposed four activities with their solutions, by means of GeoGebra, analysis and teaching. After the expected result is that the teacher has a tutorial which helps in the process of teaching practice, especially for the student's first year of high school, addressing the concept of functions. Here is a suggestion of instructional sequence that can be crafted with students at the school, the sequence is: objectives, content, indication, estimated time, materials needed, issues research, evaluation, observations on the sequence.

Keywords: OCEM, GeoGebra, Graphic, Teaching and Learning.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

1.1 APRESENTAÇÃO DO TEMA E ESTRUTURA DA MONOGRAFIA

As orientações curriculares para o ensino médio defendem o uso de tecnologias como um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da matemática. Um professor ministrando aulas referentes aos conteúdos dos anos finais do ensino fundamental e início do ensino médio, se estiver utilizando um software matemático como o GeoGebra poderá abstrair as dificuldades encontradas proporcionado aprendizagem ao aluno. Essas dificuldades encontradas podem ser superadas com a visualização de gráficos. O GeoGebra por ser um software dinâmico possibilita ao usuário alterar elementos das funções que de imediato haverá respectivas alterações na curva, no plano cartesiano do GeoGebra, possibilitando com que o usuário visualize essas alterações e com a experiência venha a aprender com maior facilidade. Nesse sentido, essa ferramenta é um grande potencial para o ensino-aprendizagem de funções (linear, afim, quadrática, exponencial e logarítmica).

Percebemos que o conteúdo relacionado a funções apresentam alta taxa de erros nos vestibulares e concursos. Assim, resta-nos pensar em possibilidades que façam com que os resultados na aprendizagem desse conteúdo tenha mais sucesso. Acredito que uma dessas possibilidades pode ser o uso de software como o GeoGebra para diminuir essa estatística da baixa taxa de acertos de problemas dessa natureza.

Neste trabalho serão apresentados meios que facilitem o ensino-aprendizagem de funções (linear, afim, quadrática, exponencial e logarítmica), principalmente para professores e alunos do ensino médio, já que poderemos tratar desse assunto com um pouco mais de formalidade, até porque muitos alunos desse nível escolar já estão familiarizados com computadores e com vários outros recursos tecnológicos, o que não dificultará tanto o manuseio com o GeoGebra.

Pretendemos apresentar e analisar algumas sugestões de atividades que trabalhem conteúdos relativos a funções por meio do software GeoGebra.

1.2 MEMORIAL E JUSTIFICATIVA

Lembro-me como se fosse hoje o meu primeiro dia de aula na Escola Estadual Luiz Maria de França, na minha cidade natal de Mari-PB[1]. Levado pela minha mãe e posto na fila para entrar na sala de aula, eu calmo, sem nenhum conhecido, passei toda a manhã na sala, juntamente com a minha professora, a qual, pediu pra ser chamada de tia Cleide, assim se passou o 1º ano e logo veio o 2º ano na mesma escola com os mesmos colegas e a tia Cleide. A partir do 3º ano até o 6º uma nova professora me orientou, Veronice era o nome dela. Com Veronice aprendi a ler melhor e realizar operações matemáticas. Lembro-me que eu fui um dos poucos alunos da classe a ganhar um gibi da turma da Mônica por já estar hábil na leitura.

Na mesma escola Estadual cursei o ensino Fundamental dois, sendo que a 7ª e 8ª série foi estudado no turno da noite. A 5ª e 6ª série, sendo estudado no turno da tarde, uma sala com aproximadamente cinquenta alunos eu não conseguia de maneira alguma acompanhar o raciocínio dos professores, sentava nas últimas cadeiras da fila, e lembro que tive que sair várias vezes da sala de aula, a pedido do professor de matemática, como punição por não ter resolvido os exercícios por ele proposto.

Lembro-me como hoje o dia em que fui à escola, para iniciar o ano letivo correspondente a 7ª série, e ao verificar a lista de alunos da turma, constatei que o meu nome não estava ali, entrei em pânico, e ao procurar à direção da escola, me informaram que eu não poderia estudar à tarde, por a sala de aula está muito cheia e por esse motivo teria que estudar no turno da noite. Fiz de tudo pra não estudar a noite, mas foram inúteis os meus esforços e argumentos, visto que não tinha outra saída, aceitei estudar à noite.

Ao chegar na sala de aula no turno da noite, no início estranhei bastante, mas pouco dias depois adaptei-me e não foi tão difícil, visto que alguns colegas que estudavam comigo à tarde também foram transferidos para estudar à noite. A sala naquele momento era diferente, além do silêncio da noite em cidade do interior, a quantidade de alunos na sala não passava de vinte. Muitos professores que lecionavam a tarde também ensinava à noite inclusive o de matemática. Passei a sentar-me próximo a mesa do professor, e passados alguns dias percebi que tinha adquirido uma grande facilidade em entender os conteúdos abordados pelos professores, passei a ler melhor os livros didáticos, principalmente os de matemática, de modo

---

Características do município de Mari/PB: Clima: O clima de Mari é seco no verão e úmido no inverno. Temperatura Média 25,2º C. Localização: Mata Paraibana. Limites: Mulungu (17 km), Gurinhém (14 km), Caldas Brandão (7 km), Riachão do Poço (14 km), Sapé (10 km), Cuité de Mamanguape (17 km) e Araçagi (26,5 km). Distâncias da Capital João Pessoa: 65 km.

que no dia das avaliações estava mais do que preparado para realizá-las, assim como, auxiliar os meus colegas antes das avaliações. De forma análoga foi na 8ª série, no mesmo colégio e no mesmo turno (noite) com os mesmos colegas. E ainda hoje agradeço aqueles que por algum motivo me colocaram pra estudar no turno da noite. Esses foram os dois anos em que despertei para os estudos e tudo o que hoje tenho, digo que é porque estudei a 7ª e a 8ª série no turno da noite.

Iniciando o Ensino Médio, numa outra escola do município de Mari, o qual tem como nome Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio José Paulo de França, com uma nova visão de estudo e freqüentando a mesma no turno da tarde, dei continuidade aquela minha boa fase da escola anterior e a cada dia que passava tomava mais gosto pelos estudos e principalmente pelas disciplinas da área de exatas (matemática, física, e química), gostava dos professores dessas disciplinas, eram todos bastante críticos, de certa forma motivadores, por isso me esforçava muito em casa para resolver os exercícios propostos, e quando na sala de aula chegava estava pronto para debater todo o conteúdo com eles. Assim passaram-se três anos.

Ao final do 3º ano do Ensino Médio, prestei vestibular para o curso de matemática para UFPB presencial, não fui aprovado por não obter a pontuação necessária. Sem desistir, no ano seguinte prestei vestibular novamente pretendendo entrar na mesma instituição, só que agora para o curso de Física, nesse obtive êxito, e ainda hoje estou cursando Física na UFPB, me deslocando todas as noites de Mari a João Pessoa. No ano seguinte surge o Polo da UAB[2] na minha cidade, Mari, oferecendo vagas para o curso de matemática. Interessado pelo curso, desde o fim do ensino médio fiz o vestibular e fui aprovado, fiquei muito feliz e foi ai que começou minha trajetória na UAB, lembrando que todos essas conquistas foram com o apoio de minha família.

Por sempre gostar de informática e de matemática os obstáculos encontrados nesse curso não foram significativos, ainda mais por eu estar cursando física no regime presencial e por já ter cursado muitas das disciplinas consideradas complexas, ao estudá-la novamente tomei como uma grande revisão, e tive a grande oportunidade de aprender muito mais repassando para meus colegas de curso o pouco que sabia, e era muito mais prazeroso ainda quando percebia que eles estavam compreendendo o que eu “ensinava”. Ao ingressar na

[2] **Código INEP**:PB01032079. **Coordenador do Polo:** HELIO JOSE HENRIQUE DA SILA. **Endereço do Polo:** RUA TEREZA SALES . Nº: S/N, **Bairro**: JOSÉ AMÉRICO, **CEP**: 58345000. **Município**: MARI-PB

UAB pensei que tudo seria muito trivial, já que era um curso virtual, mas hoje, prestes a me formar digo que não era com eu pensava, por isso todos nós que estamos encerrando este curso, somos vitoriosos e perseverantes, e merecemos ser respeitados, pois sofremos para chegar onde estamos hoje.

Durante toda essa trajetória de vida acadêmica, muitas novidades surgiram, além dos conteúdos nunca estudados no ensino básico, surgiram aplicativos computacionais matemáticos e não matemáticos que me fascinaram muito, entre esses o que mais me empenhei em aprender a utilizar foi o GeoGebra, um software matemático de Geometria Dinâmica, que dá assistências tanto a alunos quando a professores do ensino básico quanto para alunos de graduação. Confesso que, se tivesse conhecido esse fantástico software quando ainda estava cursando o ensino fundamental e/ou médio, não teria sofrido tanto em ter que relembrar todo o conteúdo matemático, assim que ingressei na graduação. É por esse motivo que neste trabalho de conclusão de curso abordarei como tema de pesquisa a utilização desse programa por alunos do ensino médio, no estudo de funções (linear, afim, quadráticas, exponencial e logarítmica).

1.3 QUESTÕES DA PESQUISA

- Quais as potencialidades do software GeoGebra para o ensino de funções?
- O que defendem as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) em relação ao uso de softwares para ensino-aprendizagem de matemática no ensino médio?
- Que atividades o professor de Matemática pode utilizar no ensino de funções com o software GeoGebra?

1.4 OBJETIVO GERAL

- Propor atividades de investigação para o ensino de funções utilizando o software GeoGebra, a fim de subsidiar o professor de Matemática em suas aulas.

1.5 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Elaborar problemas envolvendo o conteúdo sobre funções, apresentando à definição, o contexto histórico, a análise gráfica, a série em que é abordado o problema, como aplicá-lo numa atividade e como avaliar o exercício aplicado, de acordo com as orientações curriculares para o Ensino Médio;
2. Realizar um estudo bibliográfico acerca do software GeoGebra e quais ferramentas do seu menu usa-se para realizar atividades relacionadas a funções (plotar gráficos, fazer comparações, obter pontos de intercessão entre as curvas de funções, qual tipo de função que cresce ou decresce com maior "rapidez" e etc).
3. Apresentar meios que possibilite o professor a identificar potencialidades no software GeoGebra de forma que possa resolver problemas utilizando-o e desperte o interesse do aluno.

2. AS FUNÇÕES NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

2.1 AS FUNÇÕES E AS ORIENTAÇÕES CURRICULARES NACIONAIS (OCEM)

De acordo com as Orientações Curriculares Nacionais (BRASIL,1998) o estudo de *funções* pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional;tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. Também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os *gráficos* que representam essas relações, registrando os tipos decrescimento e decrescimento.

É orientado ainda solicitar aos alunos que possam expressar por meio de palavras uma função dada de forma algébrica, pois uma vez conseguido expressa-la verbalmente, por exemplo, $f(x)=2x+5$, como uma função que associa o dobro de algo exposto a priori adicionado de cinco unidades de algo da mesma espécie, o aluno tem uma nova e melhor compreensão da expressão algébrica. Partindo dessa simples compressão pode-se associar a diversas situações do cotidiano, tanto na resolução de problemas da física, quanto da economia ou de algo que possa empregá-la na realização de compras, etc. É importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes.

O estudo de *funções* pode prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola – modelos linear, quadrático e exponencial. As OCEM recomendam que o aluno seja apresentado a diferentes modelos,tomados em diferentes áreas do conhecimento (queda livre de um corpo,movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamento na corrente sangüínea, rendimentos financeiros, consumo doméstico de energia elétrica, etc.). Sempre que possível, os *gráficos* das funções devem ser traçados a partir de um entendimento global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis. A elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções.

Um tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das *funções trigonométricas* e da análise de seus *gráficos*. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Nesse sentido, um projeto envolvendo também a Física pode ser uma grande oportunidade de aprendizagem significativa.

2.2 O USO DE TECNOLOGIA: PERSPECTIVAS E POSSIBILIDADES

Existem diferentes maneiras de usar o computador na educação. Uma maneira é informatizando os métodos tradicionais de instrução. Nessas circunstâncias, de algum modo o professor se sente substituído em seu papel de transmissor de conhecimentos. Assim, se o professor se colocar na posição de somente passar informação para o aluno, ele certamente corre o risco de ser substituído. (VALENTE, 1993)

Do ponto de vista pedagógico, esse seria o paradigma instrucionista. No entanto, o computador pode enriquecer ambientes de aprendizagem onde o aluno, interagindo com os objetos desse ambiente, tem chance de construir o seu conhecimento. Nesse caso, o aluno não é mais instruído, ensinado, mas é o construtor do seu próprio conhecimento. Esse é o paradigma construcionista, concepção denominada por Seymour Papert (1985), em que o estudante construirá algo através do computador, como uma ferramenta educacional.

Nos dias hodiernos fala-se muito em formação básica e meios de acesso a essas informações, percebe-se que para se ter uma sociedade organizada e produtora de bens e conhecimentos, se faz necessário ter cidadãos conscientes de seus direitos e deveres.

Como não poderia ser diferente, ter acesso a conhecimentos matemáticos no meio social é de fundamental importância, já que para o bom desenvolvimento social, o ser humano deve-se deparar com situações de formas diversas e complexas, assim como no convívio com a matemática. O trabalho em conjunto facilita a obtenção de êxitos, por isso, o individuo antes de querer contribuir com desenvolvimento social, mesmo tendo total acesso a informação, deve ter essa habilidade/humildade. De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio,

> em função do desenvolvimento das tecnologia, uma característica contemporânea marcante no mundo do trabalho, exigem-se trabalhadores mais criativos e versáteis, capazes de entender o processo de trabalho como um todo, dotados de autonomia e iniciativas para resolver problemas em equipe e para utilizar diferentes tecnologias e linguagens (que vão além da comunicação oral e escrita). (BRASIL, 1998, pp 27-28).

Mesmo o avanço da tecnologia, não significa que suprimiu a necessidade do trabalho humano, precisa-se é de uma mão-de-obra qualificada, de profissionais que dominem as ferramentas tecnológicas, dessa forma a disputa por um emprego é grande na sociedade atual. “[...] mesmo que o cidadão esteja qualificado para o mundo do trabalho, é verdade que ele terá de enfrentar uma acirrada disputa no campo profissional” (Brasil, 1998, p. 27). Mas, para se ter mão-de-obra qualificada faz-se necessário o investimento em educação, para que esse processo de qualificação e atualização seja contínuo.

Nesse sentido, uma área do conhecimento que merece ser bem explorada é a matemática, pois nela encontramos meios que facilitam a compreensão das novas tecnologias e até meios de produzi-la, além de acompanhar e entender informações complexas como é o casa de informações relacionadas a política e a economia.

> Também é importante salientar que a compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais dependem da leitura crítica e interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos e índices divulgados pelos meios de comunicação. Ou seja, para exercer a cidadania é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente etc. (BRASIL, 1998, pp 27-28).

A respeito da importância da matemática no currículo escolar para a compreensão das novas tecnologias, melhor reflexão e consequentemente melhor entendimento do que se passa no meio social se faz necessário na atualidade que todos dominem essa área do conhecimento que é a matemática.

Em relação a resolução de problemas, Walle (2009) afirma que o ensino-aprendizagem da Matemática através de softwares deve ser baseado em situações-problemas que considerem: os processos cognitivos; o raciocínio; as estratégias adotadas durante o processo de resolução; os estágios de desenvolvimento relativos às habilidades envolvidas. Com relação à aprendizagem da matemática, os softwares mais proveitosos seriam aqueles que permitem interação do aluno com os conceitos ou ideias matemáticas, propiciando a descoberta, inferindo resultados, levantando e testando hipóteses, criando situações-problema.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 83), ao referirem-se aos programas de Geometria Dinâmica defendem que “esse suporte tecnológico permite o desenho, a manipulação e a construção de objetos geométricos, facilita a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal”. Os autores ainda acrescentam que “facilita a recolha de dados e o teste de conjecturas, apoiando, desse modo, explorações mais organizadas e completas e permitindo que os alunos se concentrem nas decisões em termos de processo”.

No que se refere a análise de erros, Cury (2007) sugere que se pense em “atividades em que se explore o erro com apoio da tecnologia informática” (CURY, 2007, p.88). Neste caso o erro é visto como um elemento inerente ao processo de aprendizagem e, ao invés de ser evitado, ele é observado pelo professor e refletido pelo próprio aluno. A autora sugere, por exemplo,que a partir da constatação do erro relacionado à falta de parênteses, na exploração de uma função, e na solicitação, aos estudantes, do esboço dos gráficos, fazer análise sobre as diferentes repostas.

Como percebemos, ressalta-se que a escolha para usar determinado software deve estar vinculada à uma filosofia educacional, à uma metodologia e ainda aos objetivos que se quer alcançar no desenvolvimento de conteúdos e conceitos relacionados ao conhecimento matemático.

2.3 O GEOGEBRACOMO RECURSO DE ENSINO DE FUNÇÕES

Anteriormente imaginava-se que o computador viesse a substituir o professor na sala de aula, trazendo um grande perigo tanto no que diz respeito à aprendizagem do aluno quanto a perda de emprego do educador, questões do tipo “se o estudante aperta uma tecla do computador e o gráfico da função já aparece, como ele conseguirá aprender a traçá-lo no papel?”.

Hoje, compreende-seque esses questionamentos estavam baseados em uma concepção equivocada e distorcida das reais potencialidades desses recursos auxiliares de ensino.

Existem muitos softwares de geometria dinâmica disponíveis no mercado com recursos e características em comum que podem ser utilizados por professores em sala de aula.

Para a pesquisa aqui relatada foi utilizado o GeoGebra. Este é um software livre, desenvolvido por Markus Hohenwater, que une geometria, álgebra e cálculo. De maneira bastante simples, é possível fazer construções incluindo pontos, vetores, segmentos, retas, e seções cônicas bem como os mais variados tipos de funções, as quais pretendo melhor destacar neste trabalho.

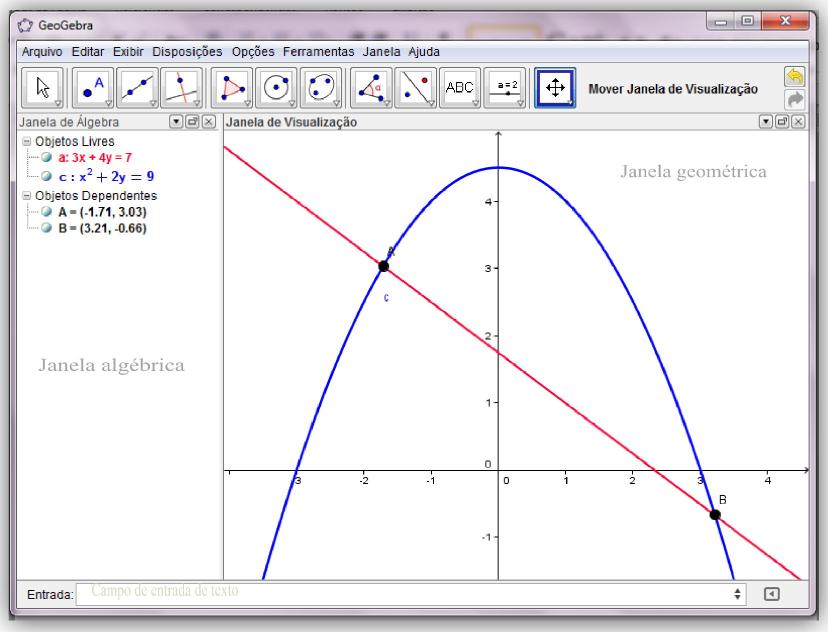
Em sua estrutura o software GeoGebra possui uma barra de menus, duas janelas de trabalho: a janela geométrica e a janela de álgebra. A janela geométrica, de cor branca, é o local em que os objetos são construídos. Nela é possível colorir os objetos, aumentar a espessura das linhas, medir os ângulos, medir a distância entre dois pontos, etc. Além disso, é possível habilitar as coordenadas cartesianas e polares.

Na janela de álgebra é possível visualizar a representação algébrica de todo objeto construído na janela geométrica. Essa dupla representação de objetos é a mais notável característica do GeoGebra.

O GeoGebra apresenta ainda um campo de entrada de texto, onde é possível escrever coordenadas, equações, funções e comandos de tal forma que, pressionando a tecla *enter*, eles são mostrados imediatamente na janela geométrica.

Usando-se esse software admite-se também, trabalhar com expressões do tipo: a: 3x+4y = 7 ou: b: (x+1).(x-1)+2y=8 e oferece uma variedade de comandos, incluindo cálculo de derivadas e integrais. A figura abaixo mostra a área de trabalho do software após se ter plotado os gráficos das funções mencionadas acima. À esquerda da figura encontra-se a janela de álgebra, à direita a janela geométrica e abaixo o campo de entrada de texto.

FIGURA 1 – Reta e Parábola, com desta que para os pontos em comum



FONTE: Figura construída pelo autor

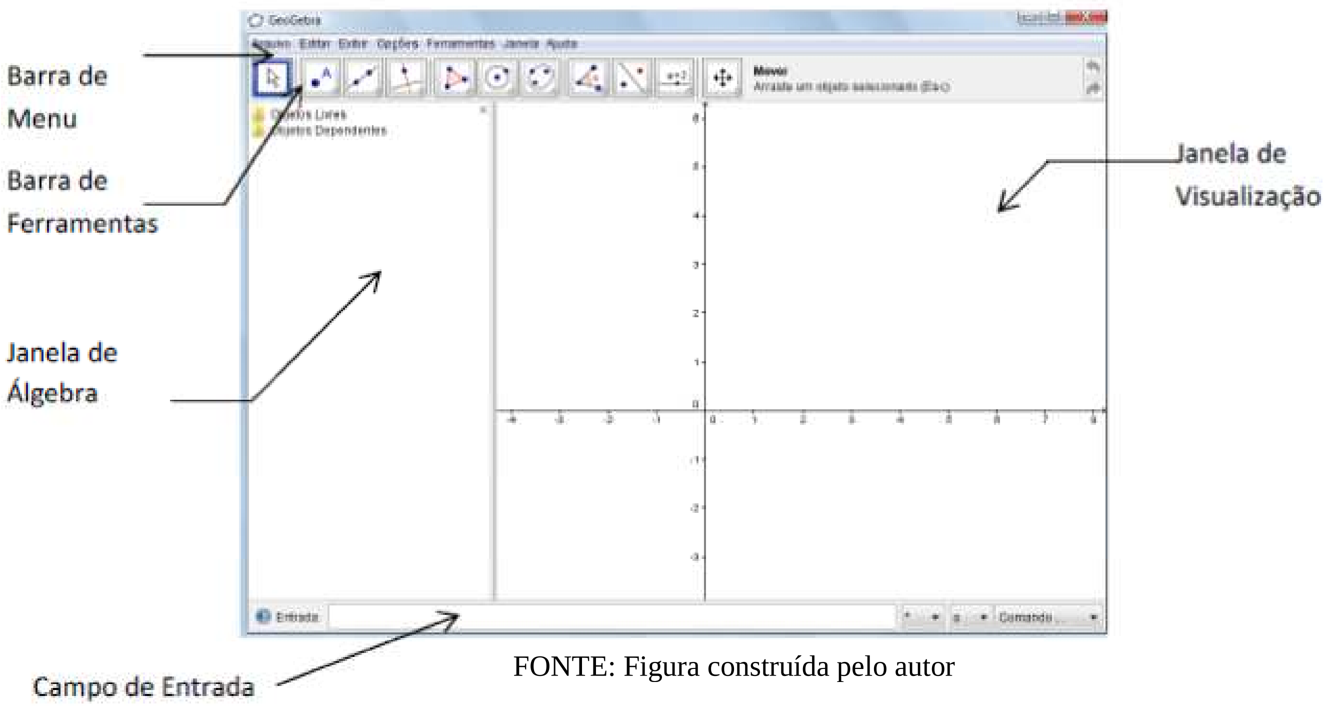
Uma grande utilidade do GeoGebra para o professor de Matemática e para os estudantes é que as construções podem ser salvas como arquivos ou como figuras. Clicando na Barra de Menu em Arquivo -Gravar como, o usuário poderá criar uma pasta para colocar as construções realizadas e dar nome ao artigo salvo,um arquivo com extensão “*.ggb” é criado. A extensão indica que um arquivo GeoGebra foi criado e que só pode ser aberto no GeoGebra.

O professor e o estudante ainda podem salvar os desenhos ou os gráficos para utilizá-los em seus trabalhos cotidianos (exercícios, exemplos e avaliações). Para tanto deve clicar na Barra de Menu, em Arquivo - Exportar – Janela de visualização como Figura. Em seguida, deve escolher o nome do arquivo e salve em uma pasta. Ou ainda pode copiar (clicar em Copiar para área de transferência) escolar a figura.

Com a Janela de Álgebra ativada, o GeoGebra exibe as informações algébricas dos objetos que estão na Janela de Visualização, por exemplo, pontos, retas, equações, polígonos. E ainda indicam quais deles são Objetos Livres (que pode se movimentar sem que eles dependam de outros objetos) ou quais são Objetos Dependentes (objetos feitos a partir de outros objetos).

Observemos a tela do GeoGebra na figura a seguir:

FIGURA 2 – Tela do GeoGebra



FONTE: Figura construída pelo autor

Acreditamos que a TIC (Tecnologia da Informação e Comunicação) pode ser inserida em todas as áreas da educação.

Borba e Penteado (2001) mostram diversos exemplos oriundos de pesquisa de como essa tecnologia pode ser inserida em situações de ensino e aprendizagem da Matemática. Um desses exemplos é o trabalho com a modelagem matemática feito com alunos do curso de Biologia da UNESP de Rio Claro. O grupo estudado pelos pesquisadores trabalhou com a germinação de sementes de melão relacionando a temperatura ambiente com o percentual de sementes que germinavam.

Uma possível contribuição desse ambiente está relacionada com o enfoque dado à ideia da figura. Nas aulas tradicionais de geometria ou funções (onde se faz necessário o esboço de gráficos), uma figura sempre foi utilizada para ilustrar fatos expressos em um texto ou ajudar a compreender uma demonstração. No ambiente de geometria dinâmica, além da ideia de ilustração, ela serve para indicar propriedades geométricas e algébricas por meio de gráficos

Muitas são as contribuições que a informática pode trazer para a Educação Matemática, pois de acordo com Penteado (2000, p.31), ela é um "*germe para práticas educacionais tais como a modelagem matemática, resolução de problemas e trabalhos de projetos que têm sido altamente valorizados nas propostas de Educação Matemática*".

No entanto, deve-se pensar nas formas de introduzi-la na prática de sala de aula de Matemática bem como na formação do professor para sua utilização. A utilização desses recursos no ensino da Matemática nem sempre é bem vista pelos docentes, pois pode significar a necessidade de assumir riscos.

Conforme afirma Penteado (2001) engajar-se em trabalhos que fazem uso de tecnologia informatizada é algo como sair de uma zona caracterizada pelo conforto proporcionado pela previsibilidade e o controle da situação, para atuar numa zona de risco em que se faz necessária uma avaliação constante das ações propostas.

Embora o GeoGebra tenha um potencial fantástico para abordagens investigativas, sabe-se também que existem diversas limitações em seu uso na sala de aula de Matemática tais como:disponibilidade de equipamentos, espaço físico, conhecimento operacional, entre outros.

2.4. FUNÇÕES MATEMÁTICAS

Muitas situações do cotidiano – por exemplo, a distância percorrida por um carro em função do tempo, explorada na área da Física, ou o crescimento do número de bactérias em função do tempo, na área da Biologia – podem ser analisadas como relações entre grandezas, denominadas funções, que são definidas por leis matemáticas. Usos como esses permitem aos alunos oportunidades para utilização da linguagem algébrica em situações aplicadas às ciências.

O estudo de funções permite estabelecer conexões interdisciplinar e intradisciplinares, envolvendo conceitos de diferentes campos de estudo da Matemática, como é o caso do estudo de funções afim, quadráticas, exponenciais e logarítmicas.

Apresentaremos o conceito de função e seus elementos, identificando a sua presença em diversos contextos, além da construção, interpretação e análise dos gráficos, por meio do GeoGebra, que as representam.

Conceito de Função

A ideia de função está muito presente em nosso cotidiano, foi por esse motivo que resolvemos abordar seu contexto nesse trabalho. Iniciaremos apresentando sua definição matemática para em seguida abordar diagramas que representam uma função, por meio do GeoGebra.

Considerando dois conjuntos, A e B, não vazios, dizemos que *f* é uma **função** de A em B (ou que y é uma função de x) se, e somente se, para cada elemento x de A existe em correspondência um único elemento y de B. Representamos assim:

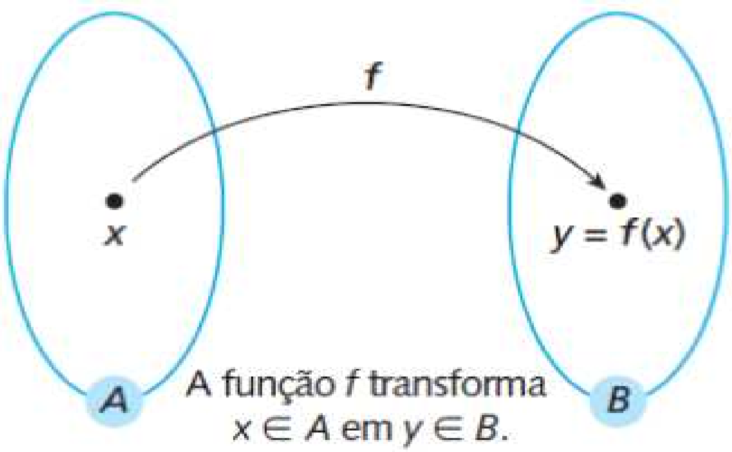
$$\mathbf{f : A \rightarrow B}$$

É importante observar que:

• A notação f: A→B (lemos “função f de A em B”) indica que a função **f leva** A para B, ou que f é uma **aplicação** de A em B, ou ainda que **f** é uma **transformação** de A em B.

• Se y está definido em função de x, chamamos x de **variável independente** e y de **variável dependente**.

• Para indicar o valor que a função ***f*** assume para x, escrevemos **f(x)**, lemos “**f de x**”, ou simplesmente y.



• As funções podem ser definidas por uma **lei matemática**. Por exemplo, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x)=3x$. Por essa lei entendemos que um número real x é transformado, pela função f, no triplo de x.

Gráfico de uma função

É bastante comum encontrarmos gráficos em revistas, jornais, internet, boletins governamentais e em outras fontes de informação. A representação gráfica auxilia a observação, a organização e a análise da variação de duas grandezas. Nos exemplos a seguir temos um tipo de função cujo gráfico é constituído apenas pelos pontos destacados em preto. Traçamos a linha de segmentos que unem esses pontos para facilitar a leitura da variação dos valores da função.

FIGURA 3: Gráfico Mostrando a Evolução de Arrecadação de Impostos

FONTE: O Estado de S. Paulo, 18 ago. 2006.

Pode-se concluir que:

• A arrecadação cresceu de setembro a outubro e de novembro a dezembro de 2005, e em fevereiro, março e maio de 2006.

• De agosto de 2005 a julho de 2006, a arrecadação cresceu cerca de 3,84 bilhões de reais.

Já na FIGURA 4 pode-se concluir que no período de julho de 2005 a julho de 2006:

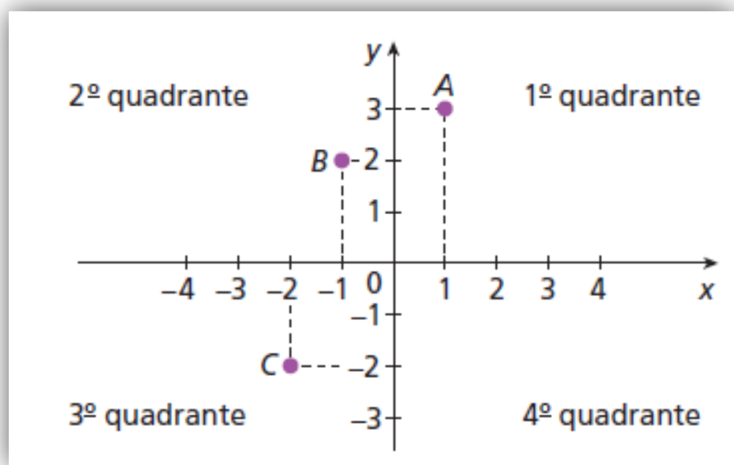
• A menor taxa de juro (6,08%) ocorreu em abril.

• A taxa de juro cresceu 0,11%, iniciando com 6,13% e terminando com 6,24%.

O plano Cartesiano

A interpretação de gráficos requer a noção de **plano cartesiano**, isto é, do plano determinado pelo sistema de eixos ortogonais x (**eixo das abscissas**) e y (**eixo das ordenadas**), que o dividem em quatro regiões chamadas **quadrantes**. Um ponto P, representado no plano cartesiano, tem uma referência horizontal (x) e uma referência vertical (y), que, juntas, definem o **par ordenado** (x, y). Dizemos que x e y são **coordenadas** do ponto $P(x, y)$.

FIGURA 5 – Plano Cartesiano



FONTE: Construída pelo autor

Nesse plano, observamos:

• $A(1, 3)$: tem abscissa 1, ordenada 3 e está no 1º quadrante.

• $B(-1, 2)$: tem abscissa -1, ordenada 2 e está no 2º quadrante.

• $C(-2,-2)$: tem abscissa -2, ordenada -2 e está no 3º quadrante.

Note que:

• A cada par ordenado corresponde um único ponto no plano cartesiano.

• A cada ponto do plano cartesiano corresponde um único par ordenado.

• Todo ponto $P(x, y)$ do 1º quadrante tem $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

• Todo ponto $P(x, y)$ do 2º quadrante tem $x \leq 0$ e $y \geq 0$.

• Todo ponto $P(x, y)$ do 3º quadrante tem $x \leq 0$ e $y \leq 0$.

• Todo ponto $P(x, y)$ do 4º quadrante tem $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

Para construir o gráfico de uma função, usamos o sistema de coordenadas cartesianas.O gráfico da função fica determinado por todos os pontos do plano cartesiano representados pelos pares ordenados $(x, f(x))$ que tenham $x \in$ D.

Nos softwares de Geometria Dinâmica, como é o caso do GeoGebra, a continuidade dos gráficos em seu plano cartesiano se dá pela união de uma infinidades de pontos que o próprio software define após se ter inserido o comando (função) no campo de entrada de textos.

3. UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

Com o auxilio do GeoGebra iremos plotar gráficos de funções e mostrar as potencialidades que se obtém ao utilizar esse software. Uma das vantagens é que múltiplas funções podem ser plotadas no mesmo plano. É normalmente possível localizar qualquer ponto ao longo de uma curva e ver suas coordenadas. As dimensões da área visualizadas podem ser mudadas facilmente de modo que seja tão fácil olhar um gráfico para x e y no intervalo -10 e +10 como olhar uma parte do gráfico, milhares de unidades longe da origem. Utilizando a ferramenta zoom na intercessão de dois gráficos, é possível encontrar o ponto de intercessão sem manipulação algébrica. Da mesma forma, o valor numérico do ponto onde um gráfico cruza o eixo pode ser encontrada com tantas casas decimais quanto for desejado.

Além disso, o GeoGebra apresenta velocidade, cor, clareza visual e uma variedade de outras características interessantes para ajudar os estudantes a analisar funções.

3.1 ATIVIDADE 1 – FUNÇÃO LINEAR/AFIM

Definição de função Afim

João resolve conhecer a cidade de João Pessoa. Para isso, resolve pegar um táxi, o qual tem que pagar um valor fixo de R$ 4,00, mais um valor de R$ 2,00 por quilômetro rodado pelo táxi. Quanto custará esse passeio?

Nessa situação, temos um gasto fixo que é de R$ 4,00. E temos um valor variável, correspondente a quantidade de quilômetros percorridos pelo táxi. Assim, o gasto do casal será composto destas duas parcelas:

Valor a Pagar = Valor fixo + Valor total de quilômetros percorridos

O valor a ser pago por João, por exemplo, se ele percorrer 10km é calculado da seguinte maneira: 4+2.10 = 4+20 = 24.

Portanto, João gastará R$ 24,00 para percorrer 10km.

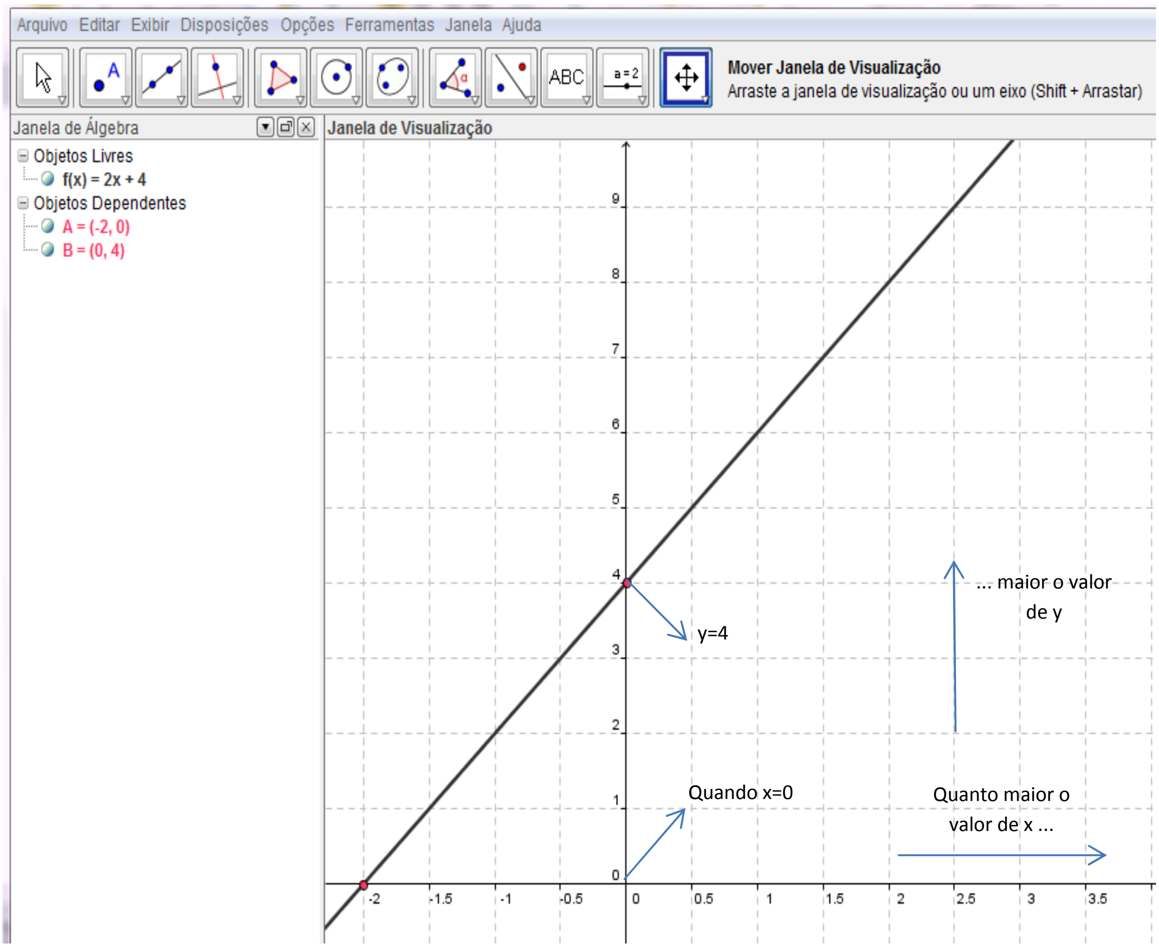
Percebemos que o valor $f(x)$ gasto no passeio é função da quantidade x de quilômetros rodados pelo táxi. Assim:

$$f(x) = 4+2x$$

Essa sentença é um exemplo de lei de formação de uma função afim.

Uma função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ chama-se **função afim** quando existem números reais a e b tal que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

FIGURA 6 – Gráfico de uma função afim

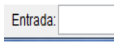
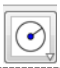
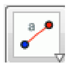
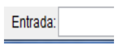


FONTE: Construída pelo autor

ATIVIDADE 1

Nesta atividade discutiremos as propriedades presentes no gráfico de uma função afim, mais precisamente utilizando o software de geometria dinâmica, GeoGebra. Apresentamos uma sugestão de sequência didática que pode ser trabalhada com os estudantes na escola.

Processo de construção: Observe a sequência de passos e as ferramentas que você precisará para a construção da atividade:

Sequência	Ferramentas	Procedimentos para construção
1		Na caixa de entrada digite o comando referente a fórmula da função afim, que é ***y=2πx***, que logo em seguida surge na Janela Geométrica a reta.
2		Construa um círculo, especificando o centro e um raio qualquer.
3		Faça um seguimento de reta com uma extremidade no centro da circunferência e a outra na borda da mesma.
4		Faça um controle deslizante, e configure-o para deslizar num intervalo de -10 a 10.
5		Peça que seja construído um ponto sobre a reta, use o comando "*ponto(x,c(x))*"

1) Objetivos: Com esta atividade esperamos que os alunos identifiquem algumas propriedades da função afim (linear) e percebam que a *equação da circunferência*, representa uma função linear, cujo comprimento da mesma depende do tamanho do raio, já que a equação da circunferência é ***C(x)=2πx***. Que relação há entre o tamanho do círculo e a função algébrica e ponto móvel no seu respectivo gráfico, e se possível, o que não é possível nesta folha de papel, fazer alterações na função algébrica, por meio de uma ferramenta *controle deslizante* do software GeoGebra e observar de imediato a alteração sofrida pelo raio do circulo e imediatamente pelo ponto móvel na reta.

2) Conteúdos: Em termos conceituais, dentro do bloco Funções serão abordadas as propriedade da função afim/linear, especificamente abordando a relação que há entre o raio e o comprimento de uma circunferência. No que se refere aos conteúdos atitudinais, esperamos envolver o aluno em atividades que motivem:

- Desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados.

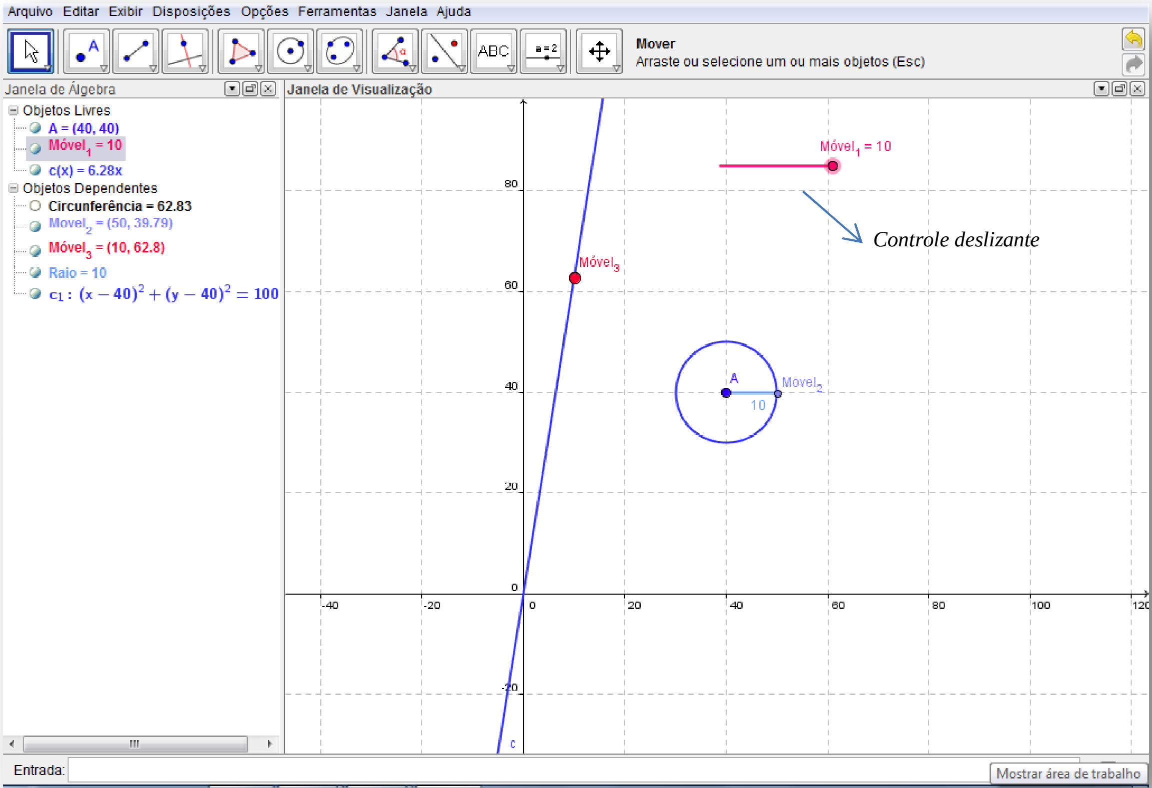
- Predisposição para alterar a estratégia prevista para resolver uma situação-problema quando o resultado não for satisfatório.
- Reconhecimento que pode haver diversas formas de resolução para uma mesma situação problema e conhecê-las.
- Valorização do trabalho coletivo, colaborando na interpretação de situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e na sua validação.
- Interesse pelo uso dos recursos tecnológicos, como instrumentos que podem auxiliar na realização de alguns trabalhos, sem anular o esforço da atividade compreensiva.

3) Indicação: A atividade pode ser trabalhada com alunos do 1º ano do ensino médio, dependendo do nível de complexidade a discussão pode ser proposta para alunos do 8º ou 9º ano do ensino fundamental.

4) Tempo estimado: 1 hora/aula;

5) Material necessário: Para a realização desta atividade faz-se necessário um laboratório de informática com a atividade já preparada e disponibilizada nos computadores. Papel e lápis para anotação dos alunos.

FIGURA 7 – Relação entre o raio e o comprimento da circunferência, exemplo de função linear, cujo gráfico é representado por uma reta



FONTE: Construída pelo autor

6) Questões de investigação:

a) Que figuras geométricas, a princípio, você reconhece;

b) Examine cada uma movimentando o ponto do controle deslizante com o mouse. Observe e anote os movimentos na Janela Geométrica assim com também na Algébrica;

c) Descubra o porquê do ponto vermelho denominado de Móvel_3 desloca-se sempre em cima da reta e descubra também o motivo pelo qual o círculo não existe quando movemos o controle deslizante para números menores ou iguais a zero;

d) Ao movimentar o ponto azul, Movel_2, sempre encima da borda do círculo, o que acontece com o ponto Móvel_3;

e) Tente conjecturar todo o sistema.

7) Avaliação:Como proposta de avaliação da atividade 1 sugere-se observar como os alunos elaboram as estratégias para plotar os gráficos e como fizeram para relacionar, no GeoGebra, a circunferência e o raio de um circulo. Explorar o motivo pelo qual o ponto vermelho (Móvel_3) move-se sempre sobre a reta, à medida que varia o valor do raio do círculo por meio do controle deslizante.

8) Observações sobre a sequência: Uma potencialidade do GeoGebra é a possibilidade que o usuário (aluno ou professor) tem para trocar os valores numéricos da função e observar o comportamento da curva, como por exemplo, verificar que o termo independente da função *b*, é sempre o valor numérico onde a curva interceptou o eixo das ordenadas, no caso da função que representa o comprimento da circunferência o termo independente *b* é igual a zero, veja que a curva intercepta o eixo de coordenadas, essa função afim tem um nome especifico, como foi lembrado acima, ***linear***.

3.2 ATIVIDADE 2 – FUNÇÃO QUADRÁTICA

Função Quadrática

É chamado *queda livre* o movimento na vertical que os corpos, soltos a partir do repouso,sofrem pela ação da gravidade, desprezando-se a resistência do ar.Um paraquedista, conhecendo seu tempo de queda livre — isto é, do momento em que salta da aeronave até o momento em que abre o pára-quedas —, pode determinar a distância que percorreu por meio de uma função. A distância percorrida Δs(em metros) pelo paraquedista em queda livre, depois de um intervalo de tempo *t* (medido em segundo a partir do zero), pode ser modelada pela função: $\Delta s = \frac{1}{2}gt^2$. A constante *g* corresponde à aceleração da gravidade que, nas proximidades da superfície da Terra, mede cerca de 9,8 m/s². Assim: $\Delta s = 4{,}9t^2$.

Essa sentença é um exemplo de lei de formação de uma função quadrática.

Uma função *f*: R→R chama-se **função quadrática** ou **função polinomial do 2° grau** quando existem números reais *a*, *b* e *c*, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$,para todo $x \in R$.

Uma situação física:

Considere a situação do paraquedista.

Qual foi a distância percorrida pelo paraquedista se o tempo em queda livre foi 15s?

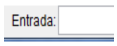
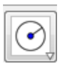
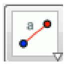
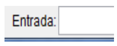
Considere a função: $\Delta s = 4{,}9t^2$.

De posse dessas informações e com a ferramenta GeoGebra, podemos escrever a função $f(x)=4{,}9t^2$, no campo de entrada, e em seguida escrever o comando **(15,f(15))**, que de imediato irá surgir na janela algébrica um novo item denominado *objetos dependentes* que é **A=(15,1102.5)** essa informação é a resposta para o nosso problema, logo quando o tempo de queda, que são os valores que estão no eixo dos x for 15, a distância caída pelo paraquedista será de 1.102,5 m.

ATIVIDADE 2

Passaremos agora a discutir as propriedades referentes a função do tipo quadrática, vamos utilizar o GeoGebra para plotar o gráfico dessa função. De forma análoga a atividade anterior (Atividade 1), essa apresentará uma sugestão de sequência didática que pode ser trabalhada com os estudantes na escola. Vamos inserir a função que representa a área de um círculo em função de seu raio e verificar qual o resultado.

Processo de construção: Sequência de etapas e as ferramentas para realização da atividade:

Sequência	**Ferramentas**	**Procedimentos para construção**
1		Na caixa de entrada digite o comando referente a fórmula da função quadrática, que no caso é $\boldsymbol{y=\pi x^2}$.
2		Construa um círculo, especificando o centro e um raio qualquer.
3		Faça um seguimento de reta com uma extremidade no centro da circunferência e a outra na borda da mesma.
4		Faça um controle deslizante, e configure-o para deslizar num intervalo de -1 a 1.
5		Peça que seja construído um ponto sobre a parábola, use o comando "*ponto(x,c(x))*"

1) Objetivos: Espero que os alunos identifiquem algumas propriedades da função quadrática e percebam que a *equação* que nos dá a área do círculo, representa uma função quadrática, cuja área da circunferência depende do tamanho do raio, já que a equação que representa a sua área é $\boldsymbol{A(r)=\pi r^2}$. Relacionar o que ocorre com a área e com o ponto móvel na curva parabólica após alterar os valores no *controle deslizante*.

2) Conteúdos: Dentro do bloco de Funções serão abordadas as propriedade da função quadrática, especificamente abordando a relação que há entre o raio e a área de um círculo. No que se refere aos conteúdos atitudinais, esperamos envolver o aluno em atividades que motivem:

- Desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados.
- Predisposição para alterar a estratégia prevista para resolver uma situação-problema quando o resultado não for satisfatório.

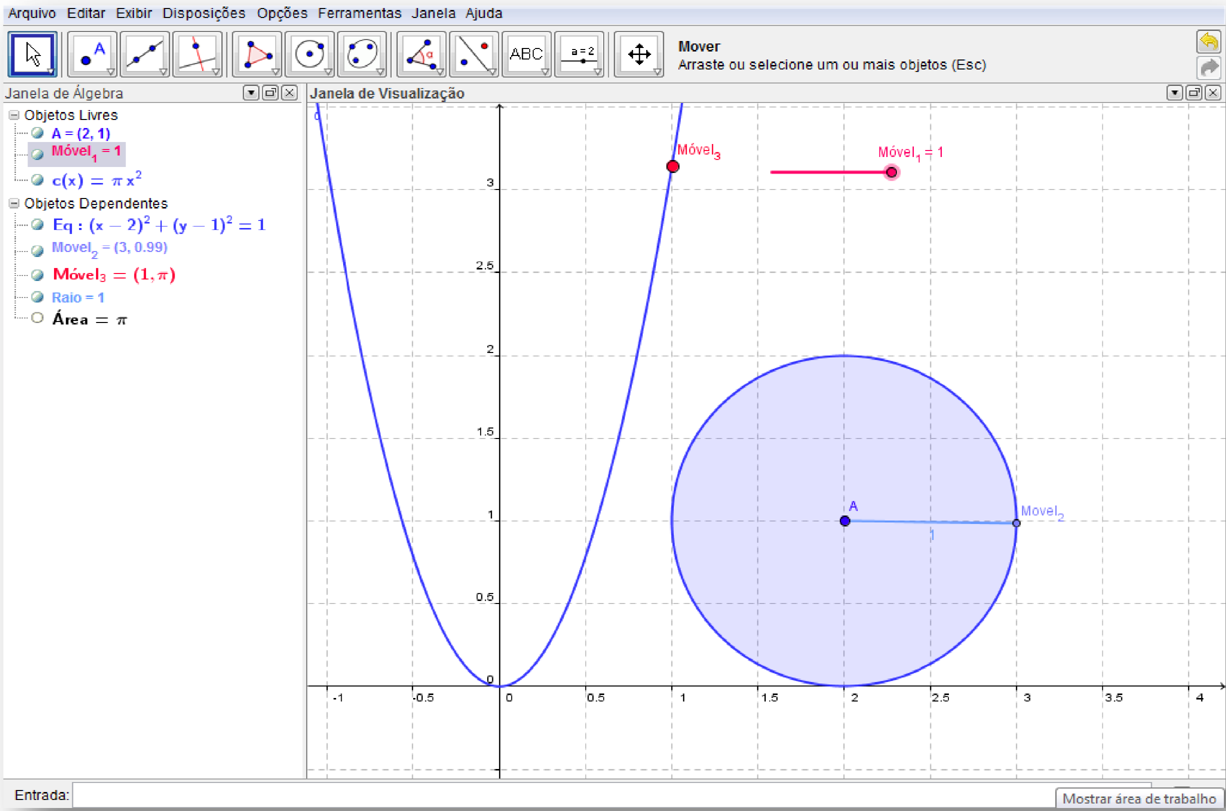
- ➢ Reconhecimento que pode haver diversas formas de resolução para uma mesma situação problema e conhecê-las.
- ➢ Valorização do trabalho coletivo, colaborando na interpretação de situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e na sua validação.
- ➢ Interesse pelo uso dos recursos tecnológicos, como instrumentos que podem auxiliar na realização de alguns trabalhos, sem anular o esforço da atividade compreensiva.

3) Indicação: A atividade pode ser trabalhada com alunos do 1º ano do ensino médio.

4) Tempo estimado: 2 hora/aula;

5) Material necessário: Para a realização desta atividade faz-se necessário um laboratório de informática com a atividade já preparada e disponibilizada nos computadores. Papel e lápis para anotação dos alunos.

FIGURA 8 – Relação entre o raio e a área do círculo,
exemplo de função quadrática, cujo gráfico é uma parábola



FONTE: Construída pelo autor

Obs.: Ao se trabalhar com esse tipo de problemas deve-se levar em consideração que todas as grandezas têm as mesmas unidades de medida.

6) Questões de investigação:

a) Que figuras geométricas, a princípio, você reconhece?

b) Examine cada uma movimentando o ponto do controle deslizante com o mouse. Observe os resultados nas Janelas Geométricas e Algébricas.

c) Descubra o porquê do ponto vermelho denominado de Móvel$_3$ desloca-se sempre em cima da parábola cuja equação é a da área de um círculo, descubra também o motivo pelo qual o círculo não existe quando movemos o controle deslizante para números menores ou igual a zero.

d) Ao movimentar o ponto azul, Movel$_2$, sempre encima da borda do círculo, o que acontece com o ponto Móvel$_3$e com a área do círculo?

e) Tente conjecturar todo o sistema.

7) Avaliação:Como proposta de avaliação da atividade 2 sugere-se observar como os alunos elaboram as estratégias para plotar os gráficos e como fizeram para relacionar, no GeoGebra, a área de um círculo com o seu raio. Explorar o motivo pelo qual o ponto vermelho (Móvel$_3$) move-se sempre sobre a parábola, a medida que varia o valor do raio do círculo por meio do controle deslizante. Nessa relação entre área e raio de um círculo, qual o domínio da função quadrática. Usam a interatividade para resolver os problemas?

8) Observações sobre a sequência: Após a realização dessa sequência de passos e ter obtido êxito na execução da atividade, o aluno deve está preparado para realizar atividades mais complexas, utilizando os mesmos métodos utilizados aqui.

3.3ATIVIDADE 3 E 4 – FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Função Exponencial

A função exponencial está presente na descrição e análise de muitos fenômenos da vida real, tais como cálculos financeiros, datação de materiais arqueológicos por meio de técnicas que utilizam a radioatividade, estudo do crescimento ou decrescimento de uma população etc.

Quando o número de componentes de uma colônia de bactérias dobra, a nova colônia mantém as mesmas características da anterior, duplicando em número no mesmo período de tempo que a original. Sabendo que determinada colônia, iniciada por uma única bactéria, dobra seu número a cada 20 minutos, quantas bactérias existirão após 2 horas e 40 minutos?

Após um período de 20 minutos, teremos $2 = 2^1$ bactérias. Após dois períodos de 20 minutos, teremos $4 = 2^2$ bactérias. Após 2 horas e 40 minutos, ou seja, 8 períodos de 20 minutos, teremos $256 = 2^8$ bactérias.

Da mesma maneira, após x períodos de 20 minutos, o número n de bactérias será dado por $n = 2^x$. Esse é um exemplo de função com variável no expoente.

Uma função f: $R \to R^*_+$ chama-se **função exponencial** quando existe um número real *a*, com *a>0* e *a≠1*, tal que f(x)=ax para todo x∈R

O número *e*

Um número irracional de grande importância é o número *e*, que aparece em aplicações a várias áreas do conhecimento, tais como Economia, Biologia, Psicologia e Engenharia. Esse número é denominado número de Euler, em homenagem ao matemático suíço Leonard Euler[3].

Obtemos aproximações de *e* por meio da sequência de números *y* dada por

– em que n ∈ N*, atribuindo-se a *n* valores cada vez maiores.

n	y
10	2,5937...
100	2,7048...
1.000	2,7169...
10.000	2,7181...
100.000	2,7182...
⋮	⋮

[3] **Leonhard Paul Euler** (Nasceu em Basileia no dia 15 de abril de 1707 — Morreu em São Petersburgo em 18 de setembro de 1783) foi um grande matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha.

Função Logarítmica

Considere células que se multiplicam por divisões sucessivas, originando, diariamente, duas novas células é possível determinar o número *n* de células em função da quantidade *t* de dias por meio da equação $n=2^t$.

Aplicando algumas propriedades de logaritmo, é possível escrever uma igualdade que possa ser utilizada para determinar a quantidade *t* de dias necessários para que se obtenha *n* células:

$$n = 2^t \Rightarrow \log_2 n = \log_2 2^t \Rightarrow t = \log_2 n$$

Nesse caso, a quantidade *t* de dias é determinado em função da quantidade *n* de células. Observe que esse é um exemplo de função em que a variável está no logaritmando.

Uma função f: $\mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ chama-se **função logarítmica** quando existe um número real *a*, com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x)=\log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^*_+$.

Uma relação entre a função logarítmica e a função exponencial

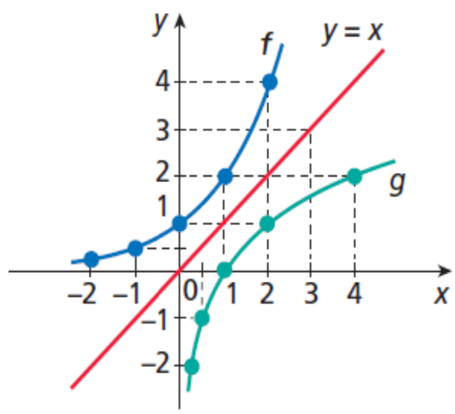
Vejamos agora uma importante relação entre a função logarítmica $g(x) = \log_a x$ e a função exponencial $f(x) = a^x$.

Pela definição de logaritmo, se $y = \log_a x$, então $x = a^y$. Considerando os respectivos domínios e contradomínios, as funções logarítmica e exponencial são inversas.

Os gráficos de duas funções inversas são simétrico sem relação à reta $y = x$, denominada bissetriz dos quadrantes ímpares. Como exemplo ilustrativo, compare as representações gráficas de $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$:

x	$f(x) = 2^x$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

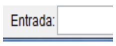
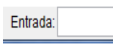
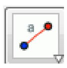
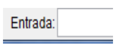
x	$g(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2



ATIVIDADE 3 E 4

Finalizaremos este capítulo de atividades investigativas abordando as características em comum ou opostas das funções exponenciais e logarítmicas, assim como foi feito com as outras atividades, iremos plotar os gráficos das funções mencionadas acima, ambas numa mesma Janela Geométrica do GeoGebra, isso para uma melhor visualizações de suas, e como se sabe que as funções exponenciais e logarítmicas são inversas, irei acrescentar junto as duas funções mais uma outra que é a *y=x*. E usando o GeoGebra concluir que as funções exponenciais e logarítmicas são simétricas a essa reta (*y=x*). Um outro ponto a destacar que será mostrado visualmente no gráfico é que a função exponencial "cresce" muito mais rápido que a sua inversa, a logarítmica.

Processo de construção: Sequência de etapas e as ferramentas para realização da atividade:

Sequência	Ferramentas	Procedimentos para construção
1		Na caixa de entrada, separadamente, digite o comando referente a definição das funções exponenciais, logarítmicas e linear, isto é, $f(x)=e^x$, $g(x)=ln(x)$ e $h(x)=x$.
2		Vá à barra de ferramentas e crie um controle deslizante com intervalos de -2 a 2.
3		Ainda usando a caixa de entrada, insira dois pontos ao sistema: *A(a,f(a))* e *B(a,ln(a))*
4		Faça dois seguimentos de reta, um iniciando em no ponto (0,1) e finalizando em qualquer ponto da reta *y=x*, e um segundo seguimento iniciando na extremidade final do outro e finalizando no ponto (1,0), o ponto da reta *y=x* é móvel.
5		Usando o comando "*distância*" calcule a distância do ponto B ao ponto D, e em seguida usando o mesmo comando calcule a distância do ponto E ao ponto D.

1) Objetivos: Espero que os alunos identifiquem algumas propriedades em comum ou não das funções exponenciais e logarítmicas. E concluir que a distancia de um ponto pertencente a $f(x)=e^x$,e que tem a mesma abscissa de um ponto que pertence a $g(x)=ln(x)$ têm a mesma distância a $h(x)=x$.

2) Conteúdos: Dentro do bloco de Funções serão abordadas as propriedade das funções logarítmicas e exponenciais, inversabilidade e crescimento das mesmas. No que se refere aos conteúdos atitudinais, esperamos envolver o aluno em atividades que motivem:

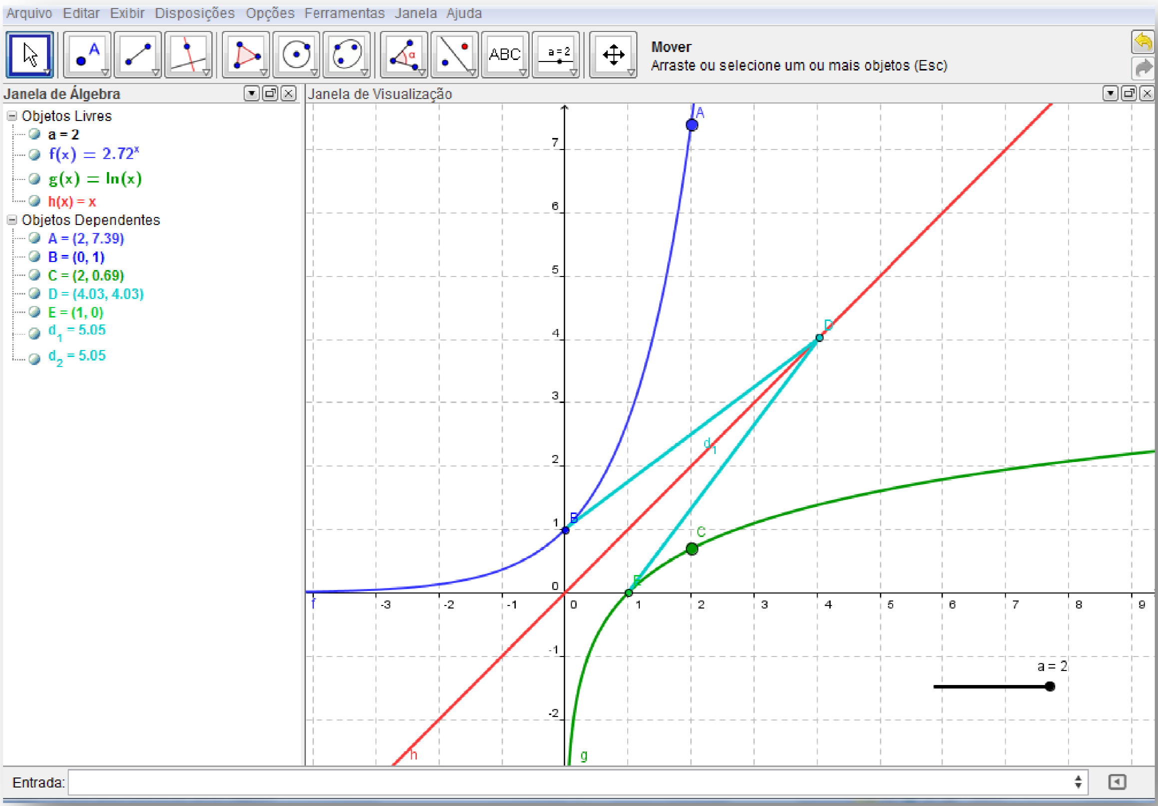
- Desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados.
- Predisposição para alterar a estratégia prevista para resolver uma situação-problema quando o resultado não for satisfatório.
- Reconhecimento que pode haver diversas formas de resolução para uma mesma situação problema e conhecê-las.
- Valorização do trabalho coletivo, colaborando na interpretação de situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e na sua validação.
- Interesse pelo uso dos recursos tecnológicos, como instrumentos que podem auxiliar na realização de alguns trabalhos, sem anular o esforço da atividade compreensiva.

3) Indicação: A atividade pode ser trabalhada com alunos do 1º, 2º e 3º ano do ensino médio.

4) Tempo estimado: 2 hora/aula;

5) Material necessário: Para a realização desta atividade faz-se necessário um laboratório de informática com a atividade já preparada e disponibilizada nos computadores. Papel e lápis para anotação dos alunos.

FIGURA 9 – Gráficos das funções exponencial e logarítmica, representação de sua inversibilidade, crescimento e decrescimento



FONTE: Construída pelo autor

6) Questões de investigação:

a) Que figuras geométricas, a princípio, você reconhece?

b) Examine cada uma movimentando o ponto do controle deslizante com o mouse. Observe os resultados nas Janelas Geométricas e Algébricas.

c) Que relação há entre as curvas das três funções, apresentadas na figura 9?

d) O que acontece com os seguimentos de reta BD e ED ao mover o ponto D sobre a reta y=x?

e) Tente conjecturar todo o sistema.

7) Avaliação:Como proposta de avaliação dessa atividade 3 e 4, sugere-se observar como os alunos elaboram as estratégias para plotar os gráficos e como fizeram para mostrar, no GeoGebra, que a função exponencial e logarítmica são funções inversas. Aconteceu um trabalho em conjunto.

8) Observações sobre a sequência: Nesta atividade foi discutido a questão da inversibilidade de funções, principalmente em relação as funções exponenciais e logarítmicas, foi construídos suas curvas geométricas, e através delas explorar as propriedades dessas funções como crescimento, decrescimento e etc. tudo isso utilizando o GeoGebra.

4.CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através desse estudo elaborado para conclusão de curso, pudemos observar dentre os escritos feitos e fundamentados em autores que pesquisam acerca dos processos de ensino e aprendizagem, com suas variadas formas, a importância de se refletir um ensino interativo e com o auxílio da tecnologia e dos conhecimentos de informática

Para prender a atenção dos adolescentes, jovens e até de adultos faz-se necessário apresenta-lhes algo que os fascine, e se tratando da relação professor-aluno em sala de aula, uma das possibilidades que pode contribuir para a motivação dos alunos é a utilização, de forma responsável, de recursos tecnológicos, tais como computador, internet, data show, e é claro um bom software previamente instalado nesse computador.

Foi pensando nesse modo, de chamar a atenção do aluno à aula, que resolvemos abordar nesse trabalho uma proposta de atividades para o ensino de funções utilizando o GeoGebra, apresentando quatro sequências didáticas em que objetivavam despertar no aluno o interesse pelo estudo de funções ao observaras suas propriedades gráficas por meio da janela geométrica desse software.

Com um roteiro de atividades procuramos traçar um caminho que parte da elaboração de problemas, utilizando o GeoGebra, destaca os passos executados para realizar tal atividade e por fim uma avaliação e observações sobre a sequência executada.

Nosso trabalho pretendeu subsidiar os professores que tenham interesse em ministrar uma aula de matemática com o auxilio de meios tecnológicos, que é atualmente um elemento motivados do público escolar, principalmente os mais jovens e, por conseguinte, pode contribuir para amenizar a falsa ideia de que a matemática é "chata" de se estudar.

Sabe-se que são reais as dificuldades de por em prática as teorias aqui destacadas, principalmente quando pretende-se inseri-la uma escola da rede pública municipal ou estadual de ensino, onde as ferramentas tecnológicas não são de fácil acesso, muitas das vezes por a escola não ter infraestrutura adequada para montar tal ambiente. Por outro lado, temos a desmotivação dos professores, devida a baixa remuneração financeira a eles oferecidas, em dedicar-se a preparar um modelo de aula dinamizada como a que foram apresentadas.

Contudo, devemos acreditar na necessidade de uma formação focada em teorias que visem às práticas pedagógicas em Matemática, destacando a relação entre a teoria e a prática, de forma que o educador tenha consciência do alcance de sua atuação profissional, implementando metodologias que possibilitem ao aluno se enxergar como sujeito competente e capaz de aproximar a teoria Matemática com a prática.

Finalizamos esse trabalho, sem a pretensão de esgotar o tema, enfatizando a importância de se trabalhar o ensino de Matemática, explorando o potencial dos softwares de geometria dinâmica, a exemplo do Geogebra, explorado nessa pesquisa.

Para tal, ratificamos a necessidade de o professor de Matemática ter uma formação consistente que aborde essa temática, de acordo com as orientações curriculares oficiais e as pesquisas que já apontam o potencial das tecnologias no ensino de Matemática.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORBA, M.C; PENTEADO, M.G. Informática e Educação Matemática. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.série, Brasília, SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Orientações curriculares para o Ensino Médio. Vol. 2, 1998b.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Parâmetros Curriculares Nacionais. 1998a.

CURY, H.N. Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica,2007.

PENTEADO, M.G. e Borba, M.C. (Org) A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão. São Paulo: Olho d´agua, 2000.

PONTE, J.P; BROCARDO, J.; OLIVEIRA,H. Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Belo Horizonte: Autêntica,2009.

PONTE, João Pedro da; CANAVARRO, Ana Paula. **Matemática e novas tecnologias**. Lisboa: Universidade Aberta. 1997.

SANTOS, M.C. O Cabri- Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: Borba, R. ; GUIMARÃES, G. A pesquisa em educação matemática: repercussões em sala de aula. São Paulo: Cortez,2009.

SILVA, M.C.L et al. Explorando conceitos de geometria elementar com o software Cabri-Géomètre. São Paulo: EDUC,1998

SKOVSMOSE, Olé. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Coleção Perspectivas em Educação Matemática. Campinas, SP: Papirus, 2008.

VALENTE, J. A. Diferentes usos do Computador na Educação. In: Valente, J. A. (org.), Computadores e Conhecimento: Repensando a Educação. Campinas, SP, Gráfica Central da Unicamp, 1993a.

WALLE, J.A.V.. Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução:Paulo Henrique Colonese. - 6.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.