



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA**  
**CENTRO DE ENERGIAS ALTERNATIVAS E RENOVÁVEIS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENERGIAS RENOVÁVEIS**



**TIAGO FONSECA COSTA**

**ANÁLISE DE UM MÉTODO QUASI-ISOTRÓPICO PARA MITIGAÇÃO DE EFEITO  
DE ORIENTAÇÃO DE MALHA EM SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO BIFÁSICO  
EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO**

**JOÃO PESSOA – PB**

**2020**

**TIAGO FONSECA COSTA**

**ANÁLISE DE UM MÉTODO QUASI-ISOTRÓPICO PARA MITIGAÇÃO DE EFEITO  
DE ORIENTAÇÃO DE MALHA EM SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO BIFÁSICO  
EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal da Paraíba, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Energias Alternativas e Renováveis, área de concentração em Sistemas de Energias Renováveis, para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador

Prof. Dr. Márcio Rodrigo de Araújo Souza

**JOÃO PESSOA – PB**

**2020**

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

C838a Costa, Tiago Fonseca.

Análise de um Método Quasi-Isotrópico para mitigação de efeito de orientação de malha em simulação de escoamento bifásico em reservatórios de petróleo / Tiago Fonseca Costa. - João Pessoa, 2020.  
80 f. : il.

Orientação: Márcio Rodrigo de Araújo Souza.  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CEAR.

1. Reservatórios - Simulação. 2. Efeito de orientação de malha. 3. Quarto de 5 poços. 4. Método de volumes finitos isotrópico. 5. Método Quasi-Isotrópico. I. Souza, Márcio Rodrigo de Araújo. II. Título.

UFPB/BC

CDU 627.81(043)



### ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

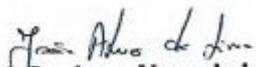
ATA nº 64 da Sessão de Defesa Dissertação do Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-Graduação em Energias Renováveis do Centro de Energias Alternativas e Renováveis, Universidade Federal da Paraíba.

Ao segundo dia do mês de dezembro de dois mil e vinte foi instalada a Banca de Defesa de Dissertação do Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-Graduação em Energias Renováveis do Centro de Energias Alternativas em Home Office, via Google Meet, a que se submeteu a defesa pública de TIAGO FONSECA COSTA, matrícula 20181009040, com o título "ANÁLISE DE UM MÉTODO QUASI-ISOTRÓPICO PARA MITIGAÇÃO DE EFEITO DE ORIENTAÇÃO DE MALHA EM SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO BIFÁSICO EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO". A Comissão Examinadora esteve constituída pelos professores: MARCIO RODRIGO DE ARAUJO SOUZA (UFPB), JOAO ALVES DE LIMA (UFPB), FERNANDO RAUL LICAPA CONTRERAS (UFPE) e JOÃO BOSCO DIAS MARQUES (PETROBRAS). Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o candidato foi .....**APROVADO**..... pela Comissão Examinadora. E, para constar, foi lavrada a presente ata, assinada pelos membros da Comissão.

Observações: O candidato deve adequar seu documento escrito às sugestões apresentadas pela banca examinadora no prazo de 45 dias

Membros da Banca Examinadora:

  
Prof. Dr. Márcio Rodrigo de Araújo Souza  
Orientador

  
Prof. Dr. Joao Alves de Lima  
Examinador

  
Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras  
Examinador Externo

  
Prof. Dr. João Bosco Dias Marques  
Examinador

Obs: O aluno deverá encaminhar à coordenação do PPGER, no prazo máximo de 45 dias a

A Deus e a Ivanna, minhas fontes de forças.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, que não desistiu de mim e que me deu forças a todo momento para prosseguir com este trabalho.

Também agradeço à minha família. Aos meus pais João e Catarina, que sempre me deram educação e estimularam em mim a paixão pela ciência. Ao meu irmão, André, companhia divertida e fonte de conselhos. À minha irmã, Beatriz, que me traz tanta alegria com seu jeito único.

Também à minha noiva querida, Ivanna, que me fez feliz quando estive triste, me animou quando perdi o ânimo, que esteve, está e estará para sempre ao meu lado. Este trabalho, Amor Meu, é uma conquista mais sua do que minha. Muito obrigado, pois é através do desejo de passar o resto da minha vida com você que encontro mais motivação na vida.

Ao meu orientador, Prof. Márcio Souza, que sempre confiou em mim e me deu liberdade suficiente de forma que eu aproveitasse melhor o meu potencial. Obrigado pelos ensinamentos e pela motivação!

À Fiat Chrysler Automobiles, representada na pessoa de Alisson Muniz, pelo apoio dado ao bom andamento deste mestrado. Sem este apoio, este projeto não seria possível!

Por fim, à Petrobras, que me forneceu experiência na prática sobre a área de Óleo & Gás e apoiou a realização deste trabalho.

## RESUMO

Modelos matemáticos de reservatórios de petróleo têm sido utilizados há décadas. Estes modelos consistem em um sistema de Equações Diferenciais Parciais que descrevem o escoamento de fluidos dentro de um meio poroso, juntamente com um conjunto de condições iniciais e de contorno. A confiabilidade das previsões atingidas depende do quão bem o modelo matemático representa a física do fenômeno. Como são feitas hipóteses simplificadoras para possibilitar a obtenção da solução numérica, erros são introduzidos. Desta forma, surgem diferentes resultados para um mesmo problema, a depender da orientação da malha, e este efeito, chamado de Efeito de Orientação de Malha, é o foco deste trabalho. Sua redução ou eliminação traz mais qualidade para os resultados obtidos. Este trabalho propõe um método Quasi-Isotrópico, que reconstrói valores de velocidade e mobilidade total na face do volume de controle de forma que leva o erro de truncamento a se tornar menos anisotrópico, para uma malha cartesiana, aplicando esta formulação na simulação de reservatórios de petróleo e comparando os resultados com as formulações convencionais. O método proposto é aplicado em malhas quadrangulares para três problemas: advecção-difusão linear; padrão 1/4 de 5 poços com relação constitutiva *piston-like*; problema de 3 poços com relação constitutiva *brooks-corey*. Ao analisar o desempenho do Método Quasi-Isotrópico nos dois problemas de petróleo, observa-se melhora em ambos, para todos os casos simulados, demonstrando o sucesso obtido na construção da formulação.

**Palavras-chave:** Simulação de Reservatórios; Efeito de Orientação de Malha; Quarto de 5 Poços; Método de Volumes Finitos Isotrópico; Método Quasi-Isotrópico.

## ABSTRACT

Mathematical models of oil reservoirs have been used for decades. These models consist of system of Partial Differential Equations that describe the flow of fluids within a porous medium along with a set of initial and boundary conditions. The reliability of the predictions depends on how well the mathematical model represents the physics of the phenomenon. As simplifying hypotheses are made to enable the numerical solution to be obtained, errors are introduced. In this way, different results are obtained for the same problem, depending on the orientation of the grid, and this effect, called the Grid Orientation Effect, is the focus of this work. Its reduction or elimination brings more reliability to the results obtained. This work proposes a Quasi-Isotropic method, which reconstructs values of velocity and total mobility at the edge in a way that leads to the truncation error becoming less anisotropic, for a cartesian mesh, applying this formulation in the simulation of oil reservoirs and comparing results with conventional formulations. The proposed method is applied in square meshes for three problems: advection-linear diffusion; standard 1/4<sup>th</sup> of 5 wells with piston-like constitutive relation; 3-well problem with a constitutive brooks-corey relation. When analyzing the performance of the Quasi-Isotropic Method in both oil reservoir problems, an improvement is observed in both, for all simulated cases, demonstrating the success obtained in the construction of the formulation.

**Keywords:** Reservoir Simulation; Grid Orientation Effect; Quarter 5-Spot; Isotropic Finite Volume Method; Quasi-Isotropic Method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Algoritmo da Estratégia IMPES.....	28
Figura 2 – Domínio genérico a ser estudado.....	29
Figura 3 – Domínio genérico após a discretização.....	30
Figura 4 – Volume de controle em detalhe.....	30
Figura 5 – Malha cartesiana retangular.....	32
Figura 6 – Elemento bidimensional estudado.....	35
Figura 7 – Face e elementos utilizados na reconstrução Isotrópica.....	41
Figura 8 – Peso de cada elemento para o cálculo do valor médio na face .....	44
Figura 9 – Peso de cada elemento para o cálculo do gradiente na face .....	47
Figura 10 – Estêncil e pesos utilizados na reconstrução da velocidade na face de interesse.....	49
Figura 11 – Campo inicial (de 0 a 2.5) utilizado no problema de advecção-difusão linear .....	52
Figura 12 – Campo de erro em $t = 1.5s$ utilizando o método convencional.....	53
Figura 13 – Campo de erro em $t = 1.5s$ utilizando o método isotrópico .....	54
Figura 14 – Domínio de simulação do Quarto de 5 Poços .....	55
Figura 15 – Comportamento esperado ao iniciar a injeção de água no domínio .....	56
Figura 16 – Frente de Saturação do Método Convencional variando razão de mobilidade e malha .....	57
Figura 17 – Frente de Saturação do Método Quasi-Isotrópico variando razão de mobilidade e malha .....	58
Figura 18 – Comparativo entre os métodos Convencional e Quasi-Isotrópico para malha 20x20 e Razão de Mobilidade $M = 10$ .....	59
Figura 19 – Comparativo entre os métodos Convencional e Quasi-Isotrópico para malha 20x20 e Razão de Mobilidade $M = 100$ .....	59
Figura 20 – Comparativo entre os métodos Convencional e Quasi-Isotrópico para malha 40x40 e Razão de Mobilidade $M = 10$ .....	60
Figura 21 – Comparativo entre os métodos Convencional e Quasi-Isotrópico para malha 40x40 e Razão de Mobilidade $M = 100$ .....	60
Figura 22 – Domínio computacional utilizado demonstrando-se as malhas para duas das quatro rotações analisadas ( $0^\circ$ e $30^\circ$ ) .....	62

Figura 23 – Contornos de Saturação de Água para a Rotação de 0° .....	63
Figura 24 – Contornos de Saturação de Água para a Rotação de 15° .....	64
Figura 25 – Contornos de Saturação de Água para a Rotação de 22,5° .....	64
Figura 26 – Contornos de Saturação de Água para a Rotação de 30° .....	65
Figura 27 – Comparativo da Curva de Breakthrough com 0° .....	66
Figura 28 – Comparativo da Curva de Breakthrough com 15° .....	66
Figura 29 – Comparativo da Curva de Breakthrough com 22,5° .....	67
Figura 30 – Comparativo da Curva de Breakthrough com 30° .....	67

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CDS	Central Differencing Scheme
EDP	Equação Diferencial Parcial
ENO	Essentially Non-Oscillatory
EOM	Efeito de Orientação de Malha
FCT	Flux-Corrected Transport
GOE	Grid Orientation Effect
IMPES	Implicite Pressure Explicit Saturation
MPFA	Multi-Point Flux Approximation
MQI	Método Quasi-Isotrópico
MVF	Método dos Volumes Finitos
NNN	Next-Nearest-Neighbor
NNNN	Next-Next-Nearest-Neighbor
SUDS	Skew Opstream Differencing Scheme
SUWDS	Skew Upstream Weighted Differencing Scheme
TPFA	Two-Point Flux Approximation
TVD	Variation Diminishing
UDS	Upstream Differencing Scheme

## SUMÁRIO

<b>1.</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
1.1.	Apresentação	13
1.2.	Revisão Bibliográfica	14
1.3.	Objetivos	21
<b>2.</b>	<b>Modelo Matemático</b>	<b>22</b>
2.1.	Lei de Darcy	22
2.2.	Conservação da Massa e Equação da Saturação	22
2.3.	Equação da Pressão	25
<b>3.</b>	<b>Formulação Numérica</b>	<b>27</b>
3.1.	Estratégia IMPES	27
3.2.	Discretização da Equação da Pressão	29
3.3.	Discretização da Equação da Saturação	32
3.4.	Método dos Volumes Finitos Isotrópico	34
3.4.1.	Equação Governante Discretizada	34
3.4.2.	Valor Médio Integral por Expansão Multidimensional	36
3.4.3.	Anisotropia do Método Convencional	38
3.4.4.	Ponderação Isotrópica para Valor na Face	41
3.4.5.	Ponderação Isotrópica para Gradiente na Face	44
3.5.	Método Quasi-Isotrópico	47
3.5.1.	Reconstrução da Velocidade	48
3.5.2.	Reconstrução da Mobilidade Total	49
<b>4.</b>	<b>Resultados</b>	<b>51</b>
4.1.	Advecção-Difusão Linear	51
4.2.	Quarto de 5 Poços com relação constitutiva do tipo Piston-Like	54

<b>4.3. Injeção com 2 poços produtores com relação constitutiva do tipo Brooks-Corey</b>	<b>61</b>
<b>5. Conclusões</b> .....	<b>69</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>71</b>
<b>APÊNDICE A – Isotropia de Operadores Diferenciais</b> .....	<b>76</b>

## **1. Introdução**

### **1.1. Apresentação**

Modelos matemáticos de meios porosos têm sido utilizados desde a segunda metade do século XIX (DARCY, 1856). Estes modelos consistem em um conjunto de Equações Diferenciais Parciais (EDP) que descrevem o escoamento de fluidos dentro de um meio poroso, juntamente com um conjunto de condições iniciais e de contorno (CHEN; HUAN; MA, 2006). A confiabilidade das previsões atingidas com estes modelos depende do quão bem o modelo matemático representa a física do fenômeno.

No desenvolvimento de um modelo, para que o escoamento possa ser descrito de forma exata, é necessário tratar situações muito simples. No entanto, ao tratar de modelos reais, há inúmeros fatores que aumentam a complexidade e impossibilitam a obtenção da solução exata: seja do ponto de vista da geometria, da não-linearidade das propriedades, ou até mesmo do ponto de vista da homogeneidade e isotropia do reservatório. É nas restrições necessárias para obtenção da solução analítica que a necessidade pela solução numérica ganha força.

Desde a década de 50, quando os computadores digitais se tornaram mais acessíveis, métodos numéricos são usados para prever, entender e otimizar escoamentos em reservatórios de petróleo. De acordo com Chen, Huan e Ma (2006), em simulações com malhas na ordem de 100.000 elementos, cerca de 80 a 90% do tempo computacional é gasto resolvendo sistemas lineares, por isso a necessidade de uma boa programação, bons métodos para solução de sistemas, e principalmente de um bom computador.

Na solução numérica dos problemas de transporte usando a maioria dos métodos numéricos da literatura, incluindo o Método dos Volumes Finitos, é necessária uma malha computacional, isto é, uma subdivisão do domínio em pequenos volumes de controle que não se interceptam. Por ser uma solução aproximada, há erros relacionados ao truncamento devido à representação por série de Taylor (BRAND; HEINEMANN; AZIZ, 1991; KUMAR, 2004; SHUKLA; GIRI, 2014).

A grande problemática abordada neste trabalho é o chamado Efeito de Orientação de Malha, descrito pela primeira vez no trabalho de Todd, O'Dell e Hirasaki (1972). Consiste na obtenção de diferentes resultados para um mesmo problema simulado, devido à diferença na orientação da malha. Neste primeiro trabalho, o problema analisado foi um quarto de 5 poços, em que as malhas paralelas e diagonais geraram resultados diferentes.

Como bem observado por Kumar (2004) e Shukla e Giri (2014), há termos anisotrópicos (isto é, que variam com a direção) no erro de truncamento, quando se utiliza a metodologia convencional de discretização das equações. Como observado também por Brand, Heinemann e Aziz (1991) e Hurtado, Maliska e Silva (2007), para simulação do escoamento em reservatórios de petróleo, este erro de truncamento também depende da razão de mobilidade, do esquema de interpolação usado e do grau de refinamento da malha. Contra-intuitivamente, Brand, Heinemann e Aziz (1991) observaram um termo exponencial inversamente dependente da malha, isto é, quanto menores os volumes, mais crítico é o Efeito de Orientação de Malha.

Desta forma, o Efeito de Orientação de Malha é causado exatamente por causa dos termos anisotrópicos, ou rotacionalmente variantes, presentes no erro de truncamento gerado por cada esquema de interpolação.

## **1.2. Revisão Bibliográfica**

Desde o início da década de 70, antes mesmo do surgimento do Método de Volumes Finitos, há um esforço da comunidade científica em investigar e propor soluções para o Efeito de Orientação de Malha, principalmente devido à sua criticidade nos problemas de escoamento bifásico em meio poroso. Desde Todd, na década de 70, até os atuais trabalhos de Kozdon, Mallison e Gerritsen (2011), Edwards (2011s), Eymard, Guichard e Masson (2012), Lamine e Edwards (2015) e outros importantes autores da área, a atividade de simulação de reservatórios se preocupa em minimizar (ou até resolver) este efeito.

O primeiro trabalho a reportar Efeito de Orientação de Malha na literatura foi, como dito anteriormente, o de Todd, O'Dell e Hirasaki (1972). Foi publicado simulando

casos relacionados a reservatórios de petróleo usando diferenças finitas em malhas cartesianas uniformes retangulares. Neste artigo, que foi um marco importante, foi proposto o uso de ponderação da mobilidade usando dois pontos a montante, em oposição a de um ponto normalmente usada. Todd, O'Dell e Hirasaki (1972) concluíram que isto reduz a dispersão numérica das frentes de saturação e também que reduz a sensibilidade do seu deslocamento à orientação da malha. Os autores fizeram uma análise de estabilidade para limitar o passo de tempo e automatizaram a seleção deste passo com base em controle de *overshoot* e erros de truncamento. Mencionaram, nos resultados, que em um exemplo, o tempo computacional da aproximação por dois pontos para a mesma acurácia foi 40 vezes menor quando comparado à aproximação de um ponto. Mencionaram também que o tempo computacional pôde ser reduzido por causa do cálculo do passo de tempo ideal.

Poucos anos depois, Raithby (1976) tratou o problema do ponto de vista de aplicação na área de fluidodinâmica descrevendo quatro limitações das soluções obtidas pelo Esquema com Ponderação a Montante Convencional (Upstream Differencing Scheme, também chamado de UDS) para problemas de escoamento: fenômenos transientes de alta frequência; número de Peclet menor que 5; termos fonte com determinadas formas; desalinhamento entre a direção do escoamento e a malha. O autor propôs dois novos métodos de esquemas com ponderação a montante (Upstream Schemes), um mais simples, chamado Skew Upstream Differencing Scheme (SUDS), e outro mais complexo, chamado Skew Upstream Weighted Differencing Scheme (SUWDS). Reportou que o SUDS reduz erros devido ao desalinhamento do escoamento com relação à malha e que o SUWDS, além de reduzir ainda mais estes erros, também remove a restrição quanto ao número de Peclet.

Na linha de estudar novos esquemas para reduzir o Efeito de Orientação de Malha, surgiram vários trabalhos em seguida. Yanosik e McCracken (1979), em um trabalho que também foi um marco para este ramo da simulação, propuseram o chamado Esquema de Nove Pontos (Nine-Points Scheme), que torna o cálculo de fluxos multidimensional, melhorando a qualidade da solução. Da mesma forma, Christie e Bond (1985) analisaram um esquema com correção no fluxo (FCT - Flux Corrected Transport) já proposto na literatura, que é eficiente na redução da difusão numérica.

Shubin e Bell (1984) analisaram o Efeito de Orientação de Malha em escoamentos miscíveis. Comentaram problemas com razão de mobilidade adversa e indicaram o surgimento de uma nova família de esquemas de diferenças finitas que procuram minimizar a dependência da direção da malha na solução. Mostraram os efeitos em problemas de quarto de cinco poços e sete poços invertido devido à orientação da malha. De forma a complementar o trabalho, fizeram uma análise de estabilidade linear de Von Neumann para inúmeros casos e demonstraram o passo de tempo necessário. De forma importante também para melhor compreender o Efeito de Orientação de Malha, estudaram o efeito do estiramento da malha (malha com espaçamento em X diferente de Y) no escoamento da frente de saturação.

Nos anos seguintes, trabalho como Schneider e Raw (1986), Levy, Powell e Leer (1989) e Roe e Sidilkover (1992) trataram o Efeito de Orientação de Malha em problemas mais genéricos, saindo da linha de simulação de reservatórios.

Schneider e Raw (1986) propuseram um novo esquema que leva em consideração a direção do escoamento para solução de problemas de advecção-difusão, tendo conseguido bons resultados na redução da difusão numérica, baixa sensibilidade à orientação da malha e ausência de oscilações.

Já Levy, Powell e Leer (1989) trataram das equações de Euler em domínios bidimensionais em malhas distorcidas, tendo conseguido resultados melhores do que o método convencional, no entanto, mais caros computacionalmente.

Roe e Sidilkover (1992) apresentaram uma abordagem mais matemática para encontrar um método ótimo (com menor erro de truncamento) de ponderação a montante em 2 e 3 dimensões. De forma a contribuir nesta linha, o trabalho demonstrou que o Upwind convencional é a pior escolha possível, se tratando de ponderação bidimensional, com maior restrição no passo de tempo e maior difusão numérica. Ao otimizar a ponderação, criando o chamado N-Scheme (Narrow Scheme), melhorou o custo computacional, quando comparado ao esquema convencional, em cerca de 90 vezes para o caso bidimensional e cerca de 750 vezes para o tridimensional.

Bajor e Cormack (1989) discutiram um método de caracterização do Efeito de Orientação de Malha, a Geometria de Campo Radial (RFG - Radial Field Geometry).

O artigo comparou a solução para estêncis de 5 e 9 pontos, relacionando o erro com a razão de mobilidade e com o refinamento da malha, tal como Hurtado, Maliska e Silva (2007) alguns anos depois também fizeram, testando outros esquemas de interpolação.

Depois de 19 anos da primeira publicação na linha de estudo do Efeito de Orientação de Malha (TODD; O'DELL; HIRASAKI, 1972), o importante trabalho de Brand, Heinemann e Aziz (1991) demonstrou matematicamente que o erro de truncamento para escoamentos em reservatórios, quando enfrentando razão de mobilidade adversa, conta com um termo exponencial relacionado ao refinamento da malha, ou seja: quanto maior o refinamento, maior o erro.

Na área de pesquisa de soluções de alta ordem, que apesar de não ser a área de concentração deste trabalho, tem um importante papel no aumento da acurácia dos resultados obtidos em simuladores, como demonstrado em Todd, O'Dell e Hirasaki (1972), vários trabalhos desenvolveram e analisaram métodos importantes, como Chen et al. (1991), Bourgeat e Koebbe (1996), Ollivier-Gooch e Altena (2002), Maliska e Czesnat (2003), Tran, Masson e Smaïli (2005), Ollivier-Gooch, Nejat e Michalak (2007), Lamine e Edwards (2013), Lamine e Edwards (2015). As linhas de pesquisa em esquemas de alta ordem se desenvolveram por conta da redução na difusão numérica que estes esquemas trazem, melhorando substancialmente a qualidade da solução.

Já para os métodos chamados MPFA (Multipoints Flux Approximation, ou Aproximação de Fluxo por Múltiplos Pontos, em tradução livre), um dos trabalhos mais importantes foi o de Aavatsmark (2007), que propôs uma melhora no cálculo do fluxo, deixando a Aproximação de Fluxo de Dois Pontos (TPFA - Two Point Flux Approximation) e usando uma Aproximação de Fluxo de Multi-Pontos (MPFA - Multipoints Flux Approximation), dos tipos O e L. O método MPFA-O é o mais clássico e intuitivo, já o MPFA-L é mais novo, menos intuitivo, no entanto parece ser mais robusto. Foi discutida a monotonicidade e convergência dos dois métodos.

Uma família de métodos chamada de Verdadeiramente Multidimensionais também se desenvolveu bastante nas últimas décadas, com trabalhos importantes como Kozdon, Malisson e Gerritsen (2009), Lamine e Edwards (2010), Eymard, Guichard e Masson (2011), Edwards (2011), Kozdon, Mallison e Gerritsen (2011),

Eymard, Guichard e Masson (2012), Keilgavlen, Kozdon e Malisson (2012), Souza et al. (2018).

Kozdon, Malisson e Gerritsen (2009) investigaram esquemas verdadeiramente multidimensionais com ponderação a montante para simular escoamentos com razão de mobilidade adversa em meios porosos. Os autores usaram uma análise das equações modificadas para prever os ângulos preferidos de escoamento para malhas estruturadas com os métodos convencionais, e propuseram um esquema conservativo multidimensional.

Lamine e Edwards (2010) apresentaram um esquema verdadeiramente multidimensional com ponderação a montante que reduz a difusão cruzada para malhas não estruturadas de quadriláteros. Os benefícios foram demonstrados nas soluções de problemas como o quarto de cinco poços, feito com várias malhas e permeabilidades diferentes. O artigo tratou das condições de estabilidade, consistência e positividade (monotonicidade).

Eymard, Guichard e Masson (2011) propuseram um novo procedimento para eliminar o Efeito de Orientação de Malha em simulação de reservatórios, baseado na modificação do estêncil da equação de advecção, sem modificar o estêncil do cálculo de pressão. O método do artigo é considerado pelos autores como uma extensão natural dos métodos de 9 pontos, como em Yanosik e McCracken (1979), com a vantagem de que se aplica em malhas estruturadas não-regulares e demanda praticamente nenhuma intervenção nos códigos comerciais para ser implementado.

Edwards (2011) introduziu novos esquemas multidimensionais de ponderação a montante para simulação de reservatórios que reduzem significativamente a difusão cruzada, conseguem uma aproximação local de fluxo conservativa e não apresentam oscilações.

Kozdon, Mallison e Gerritsen (2011) desenvolveram um método monótono e multidimensional. Um acoplamento local dos fluxos foi introduzido através das chamadas Regiões de Interação, resultando em um estêncil compacto. O fluxo é uma composição que depende da orientação do escoamento, isto é, o método é do tipo Flow Oriented, ou seja, Orientado pelo Escoamento. O método garantiu valores

positivos de massa e saturação (que sempre somam 1, ou 100%). O artigo focou numa discretização robusta da equação hiperbólica em múltiplas dimensões.

Keilgavlen, Kozdon e Malisson (2012) apresentaram uma plataforma para esquemas multidimensionais com ponderação a montante (Upwind) para escoamentos multifásicos em malhas bidimensionais genéricas (não-estruturadas). Os métodos multidimensionais de transporte foram acoplados com o MPFA-L para resolver a equação de pressão. Os resultados mostraram redução considerável no Efeito de Orientação de Malha quando comparado ao UDS (Upwind convencional) e o método explícito multidimensional permitiu passos de tempo ainda maiores. Para o método implícito o número de iterações não-lineares também foi menor.

Kozdon, Gerritsen e Christie (2008) mostraram que há certos aspectos do Efeito de Orientação de Malha que podem surgir no tratamento do escoamento próximo ao poço no início da simulação. Mostraram dois possíveis métodos para reduzir a interação heterogênea próxima ao poço e tornar a solução independente da orientação da malha. O artigo foi capaz de estabelecer a combinação de fatores que causa este efeito: instabilidade física do escoamento com razão de mobilidade adversa, escoamento nas proximidades do poço de injeção e erros que dependem da rotação no esquema numérico. Não conseguiram retirar a dependência da instabilidade física, mas mostraram que ao remover os erros anisotrópicos, o Efeito de Orientação de Malha é reduzido.

Para modelagem de heterogeneidades e anisotropias, o trabalho de Crumpton, Shaw e WARE (1995) propôs um novo esquema para resolver equações de difusão elípticas com tensor variando fortemente. Este tipo de modelagem é útil quando a difusividade é representada por uma matriz não-diagonal, que pode ocorrer quando o meio é anisotrópico. Além deste novo esquema, o artigo também descreveu a aplicação de um esquema de Multigrid para solução numérica de forma eficiente do método proposto. O método demonstrou convergência de segunda ordem, e se mostrou adequado para casos com fortes descontinuidades, além do mais, quando utilizado com uma permeabilidade diagonal, é reduzido aos métodos convencionais (TPFA).

Já Lipnikov et al. (2007) propuseram um esquema de Volumes Finitos Não-Linear para resolver a equação de difusão permanente. Demonstraram que o

esquema é monótono (preserva a positividade da solução analítica) mesmo para malhas triangulares com coeficientes fortemente anisotrópicos e heterogêneos.

Para solução de problemas em malhas não-estruturadas, os trabalhos de Ollivier-Gooch (1997) e Lipnikov et al. (2007) desenvolveram melhor estas técnicas.

Ollivier-Gooch (1997) apresentou um novo esquema de reconstrução que é conservativo, permite apenas oscilações assintoticamente pequenas, é fácil de implementar em malhas arbitrárias, tem boas propriedades de convergência e é computacionalmente eficiente. O novo método é testado com problemas de propagação unidimensional de escalar, problemas de choque em tubos e de aerodinâmica bidimensional.

Dada a alta aplicabilidade destes métodos em diversas físicas e tipos de malhas, Herbin e Hubert (2008) apresentaram vários casos para serem testados em várias malhas desafiadoras para possibilitar benchmarking (validação de modelos). Em todos os casos, a equação tratada foi a de difusão, com tensor de difusividade anisotrópico (em alguns casos, o tensor ainda é heterogêneo ou descontínuo). As malhas foram triangulares ou quadrangulares, podendo ser distorcidas ou não-conformes.

Finalmente, uma outra família de métodos, que é o foco deste trabalho, são os chamados isotrópicos, ainda pouco explorados, com trabalhos significativos de Kumar (2004) e Shukla e Giri (2014).

Kumar (2004) propôs uma modificação ao Método de Diferenças Finitas, criando uma vertente chamada Diferenças Finitas Isotrópicas. O método envolve manipular a ponderação dos volumes vizinhos de modo a obter, no erro de truncamento, o primeiro termo rotacionalmente invariante, isto é, independente da direção, também chamado de isotrópico. O erro não é completamente isotrópico, apenas o primeiro termo, que representa uma grande parcela. O problema-exemplo é a solidificação simétrica de um dendrito de 6 pontas, no qual verifica-se a eficácia do método isotrópico na determinação do ângulo das pétalas.

Já o trabalho de Shukla e Giri (2014), motivador e maior base desta dissertação, propôs uma modificação ao Método de Volumes Finitos, criando uma vertente chamada Volumes Finitos Isotrópicos, similar ao trabalho feito por Kumar (2004),

porém no contexto de Método de Volumes Finitos. A grande limitação do trabalho é o tipo de malha, apenas Cartesiana Uniforme Quadrangular. Os autores, utilizando o método proposto, resolvem casos de: advecção-difusão linear, não-linear e anisotrópica; equação de reação-difusão; equação de Fisher-Kolmogorov; equação de Gray-Scott; Navier-Stokes bidimensional e incompressível. Resolve ainda casos 3D com as mesmas restrições, e utiliza duas ponderações diferentes, NNN (Next-Nearest-Neighbor) e NNNN (Next-Next-Nearest-Neighbor), simulando advecção-difusão linear e não linear.

Observa-se que há quase 50 anos se estuda o Efeito de Orientação de Malha, procurando entender sua origem, quais fatores mais o influenciam, e o mais importante: inúmeras formas de reduzi-lo, seja utilizando formulações orientadas pelo escoamento, de alta ordem, múltiplos pontos, isotrópicas. Isto é a prova de que esta preocupação não só é atual como é latente, tendo possibilidade de aplicação tanto na academia como em códigos comerciais.

### **1.3. Objetivos**

Este trabalho tem como objetivo propor e avaliar formas alternativas de reduzir o Efeito de Orientação de Malha na simulação de reservatório de petróleo, aplicando estas técnicas principalmente aos problemas do padrão de Quarto de 5 Poços (Quarter 5-Spot) e problema de 3 Poços.

Para isto, irá adaptar a ponderação isotrópica, proposta por Shukla e Giri (2014), para utilizar seus coeficientes no cálculo dos valores da velocidade e mobilidade total nas faces dos volumes de controle.

Também objetiva, por consequência, a obtenção de um Método Quasi-Isotrópico baseando-se na aproximação linear do Método de Volumes Finitos Isotrópico para uma malha quadrada (cartesiana com espaçamentos iguais).

Ao aplicar estas técnicas, irá comparar, do ponto de vista de Efeito de Orientação de Malha, a qualidade do resultado aos métodos convencionais.

## 2. Modelo Matemático

Neste capítulo, serão descritas as equações governantes que regem o escoamento bifásico água-óleo em um meio poroso. Também serão descritas as hipóteses simplificadoras utilizadas para representar o escoamento no reservatório.

### 2.1. Lei de Darcy

A Lei de Darcy, apresentada no trabalho de Darcy (1856), veio do experimento de um escoamento em um leito poroso. Quando generalizada como a equação da velocidade de Darcy ( $v_i$ ), para uma dada fase (em que o índice  $i$  pode ser  $w$  para água e  $o$  para o óleo) é dada por (CHEN; HUAN; MA, 2006):

$$\mathbf{v}_i = -\frac{1}{\mu_i} \mathbf{k}_i \nabla p_i \quad (1)$$

Em que  $\mu_i$  é a viscosidade dinâmica da fase  $i$ ,  $p_i$  a sua pressão e  $k_i$  a permeabilidade efetiva, que pode ser dada pelo produto da permeabilidade relativa e absoluta (tensor  $k$ ):

$$\mathbf{k}_i = k_{r_i} \tilde{\mathbf{k}} \quad (2)$$

### 2.2. Conservação da Massa e Equação da Saturação

Todo problema de escoamento envolve conservação da massa. Esta conservação estabelece que (ISLAM et al., 2010):

$$\text{Massa que Entra} + \text{Massa Injetada} = \text{Massa Acumulada} + \text{Massa que Sai} \quad (3)$$

No entanto, além da massa total na célula, deve haver a conservação da quantidade de cada espécie, de forma que:

$$\text{Espécie que Entra} + \text{Espécie Injetada} = \text{Espécie Acum.} + \text{Espécie que Sai} + \text{Espécie que Reage} \quad (4)$$

Resolvendo a conservação das concentrações, também chamadas de saturação, resolve-se, por consequência, a conservação da massa total.

O fato de que a saturação, ou fração mássica, é a razão entre a massa da espécie  $i$  e a massa total da célula, define-a de forma que:

$$S_i = \frac{m_i}{m} = \frac{m_i}{\sum_{j=w,o} m_j} \quad (5)$$

Logicamente, a soma de todas as frações deve ser unitária, constituindo uma equação de restrição para o sistema (HELMIG, 1997):

$$\sum_{i=w,o} S_i = 1 \quad (6)$$

O volume de uma célula em que é calculada a conservação é chamado de  $V_c$ , de forma que:

$$V_c = \int_{\Omega} d\Omega \quad (7)$$

Que para um volume de controle regular se obtém:

$$V_c = \Delta x \Delta y \Delta z \quad (8)$$

Na equação,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  são os espaçamentos na malha nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente. No entanto, devido à existência da porosidade do meio, o volume fluido na verdade é apenas uma fração do volume total da célula - o resto é a matriz rochosa.

Esta fração é, por definição, a porosidade do meio,  $\phi$ :

$$\phi = \frac{V_{vazio}}{V_c} \quad (9)$$

E equação para a saturação então é dada por (CHEN; HUAN; MA, 2006):

$$\frac{\partial(\phi \rho_i S_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v}_i) = q_i \quad (10)$$

Na equação acima foi considerado o escoamento imiscível (sem transferência de massa entre as fases), horizontal, sem efeito da capilaridade e da gravidade. Substituindo a Eq. (1) na Eq. (10), encontra-se:

$$\frac{\partial(\phi\rho_i S_i)}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{k}_i \nabla p_i) + q_i \quad (11)$$

Considerando os fluidos e a matriz incompressíveis, a equação se torna:

$$\phi \frac{\partial S_i}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu_i} \mathbf{k}_i \nabla p_i \right) + \frac{q_i}{\rho_i} \quad (12)$$

É importante observar que a substituição da velocidade (advinda da Lei de Darcy) na equação de saturação pode levar a uma formulação monolítica ou segregada. Na literatura, a formulação segregada é largamente utilizada, tornando o par de EDPs uma equação elíptica (Equação da Pressão) e uma outra hiperbólica (Equação da Saturação). (TODD; O'DELL; HIRASAKI, 1972; YANOSIK; MCCRAKEN, 1979; HURTADO; MALISKA; SILVA, 2007; KOZDON; MALLISON; GERRITSEN, 2011)

Após manipulações algébricas, a equação da saturação de água pode ser apresentada como (SOUZA, 2015):

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{F}_w(S_w) + Q_w \quad (13)$$

Em que  $Q_w = q_w/\rho_w$  e o fluxo  $\vec{F}_w(S_w)$ , desprezando o termo de gravidade, é dado pela equação:

$$\vec{F}_w(S_w) = f_w(S_w) \vec{v} \quad (14)$$

A variável  $f_w$  é bastante importante, chama-se fluxo fracionário de água (ou de óleo, caso o índice seja o), e significa a razão entre a vazão de água e a vazão total transportada no meio poroso. Nos casos em que os efeitos da gravidade e da capilaridade são desprezados, o fluxo fracionário é descrito por (FANCHI, 2001; CHEN; HUAN; MA, 2006):

$$f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda} \quad (15)$$

A letra  $\lambda$  indica mobilidade total ( $\lambda = \lambda_w + \lambda_o$ ), já o seu índice  $\lambda_w$  indica que a mesma é a mobilidade relativa da água:

$$\lambda_w = \frac{k_{rw}(S_w)}{\mu_w} \quad (16)$$

Como já foi dito anteriormente,  $k_{rw}$  é a permeabilidade relativa da água, e é função da sua saturação. Uma das formas de calcular a permeabilidade relativa é usando a relação constitutiva *piston-like* (SOUZA, 2015):

$$k_{rw} = \frac{S_w^2}{M(1 - S_w^2) + S_w^2}; k_{ro} = 1 - k_{rw} \quad (17)$$

Como pode ser visto em Yanosik e McCracken (1979) e Hurtado, Maliska e Silva (2007), o uso da relação piston-like leva a mais Efeito de Orientação de Malha. Por fim, o parâmetro M é a razão de mobilidade, ou seja,  $\mu_o/\mu_w$  (FANCHI, 2001).

Uma outra relação constitutiva para a permeabilidade relativa é a de Brooks-Corey (COREY, 1954 apud SOUZA, 2015):

$$k_{rw} = k_{w,max}(S_e)^{n_w}; k_{ro} = k_{o,max}(1 - S_e)^{n_o} \quad (18)$$

Em que a saturação efetiva,  $S_e$ , é dada por:

$$S_e = \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi} - S_{or}} \quad (19)$$

Que, quando desconsidera-se a saturação irreduzível de água e residual de óleo, se torna  $S_e = S_w$  e então resulta em:

$$k_{rw} = k_{w,max}(S_w)^{n_w}; k_{ro} = k_{o,max}(1 - S_w)^{n_o} \quad (20)$$

### 2.3. Equação da Pressão

Além da equação de transporte de saturação, obtida na seção anterior, após manipulações algébricas e desconsideração da gravidade, pode ser encontrada uma equação elíptica para o cálculo da pressão (SOUZA, 2015):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = Q \quad (21)$$

Em que  $Q = Q_w + Q_o = q_w/\rho_w + q_o/\rho_o$  é a vazão específica de injeção ou produção e  $u = u_w + u_o$  é a velocidade total:

$$\vec{v} = -\lambda \mathbf{k} \vec{\nabla} p \quad (22)$$

Substituindo, portanto, encontra-se:

$$\vec{\nabla} \cdot (-\lambda \mathbf{k} \vec{\nabla} p) = Q \quad (23)$$

### **3. Formulação Numérica**

O sistema de Equações Diferenciais Parciais (para pressão e saturação), ou EDPs, apresentado anteriormente, que modelam o escoamento bifásico em meio poroso, é aplicável para as mais variadas geometrias e condições de contorno. No entanto, quanto mais complexa a situação modelada, mais improvável que haja solução analítica.

Desta forma, a solução numérica se oferece como uma maneira viável de obter os resultados necessários deste modelo. A grande questão é que o sistema apresentado para modelagem é composto por EDPs, e o computador, principal ferramenta para obtenção de solução numérica, não é capaz sequer de compreender uma EDP.

Para possibilitar este tipo de solução através de máquinas binárias, é necessário transformar o sistema de EDPs em um sistema linear algébrico (que o computador consegue resolver). O procedimento de conversão de um sistema de EDPs para um sistema linear algébrico é a discretização numérica.

A discretização numérica transforma um domínio contínuo em vários pequenos volumes de controle que não se interceptam. Cada uma das Equações Diferenciais Parciais é resolvida através da integração nestes pequenos volumes de controle, chamados também de células ou elementos. Esta integração transforma as quantidades diferenciais e contínuas em quantidades discretas, resultado em um sistema finito e linear. Este é o propósito do Método de Volumes Finitos, utilizado neste trabalho para modelagem de reservatórios (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

#### **3.1. Estratégia IMPES**

A modelagem do escoamento bifásico em meio poroso é feita através de uma equação de pressão e outra de saturação. Além destas duas equações representarem juntas o fenômeno, é importante observar que as mesmas se encontram fortemente acopladas.

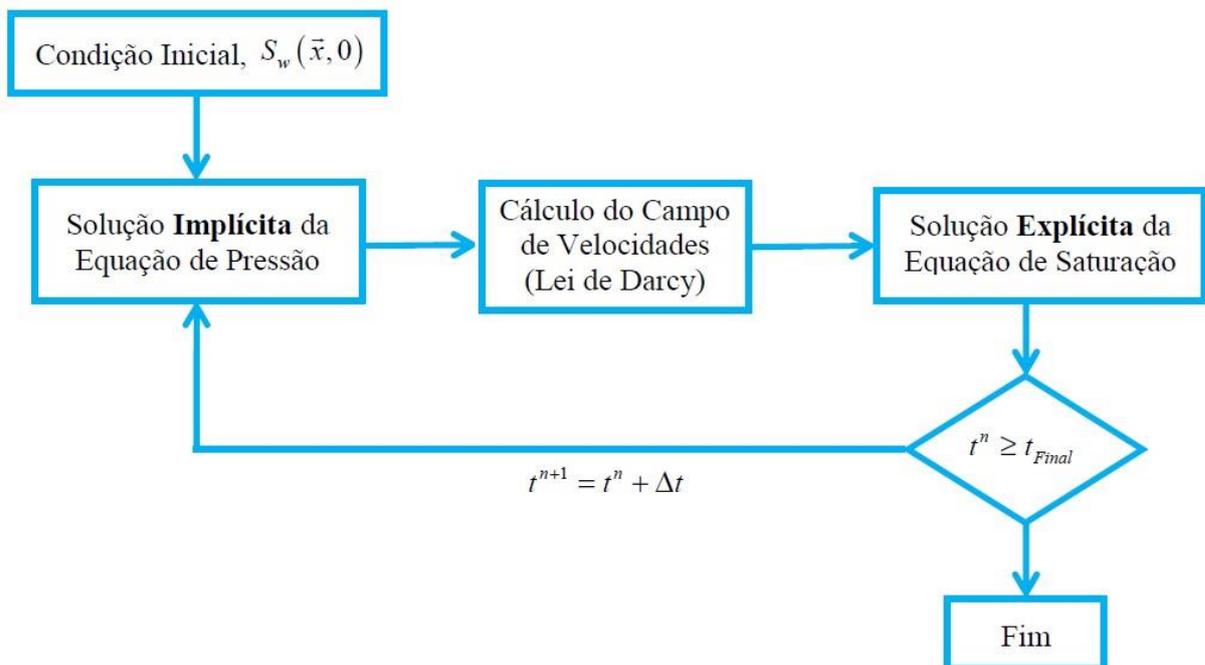
Neste trabalho, é utilizada uma das mais populares estratégias de lidar com este acoplamento, o IMPES (Implicit Pressure - Explicit Saturation, ou Pressão Implícita Saturação Explícita, em tradução livre), proposta por Sheldon e Cardwell (1959) e Stone e Garder (1961).

A estratégia IMPES se propõe a resolver primeiro esta equação, e em seguida, através da Lei de Darcy (DARCY, 1856; CHEN; HUAN; MA, 2006), obter o campo de velocidades.

Através dos campos de velocidade e pressão é possível calcular o novo campo de saturação e então avançar no tempo de simulação, reiniciando o ciclo recalculando o novo campo de pressão (SOUZA, 2015).

A Figura 1 mostra em detalhes como o algoritmo da estratégia IMPES funciona.

Figura 1 – Algoritmo da Estratégia IMPES

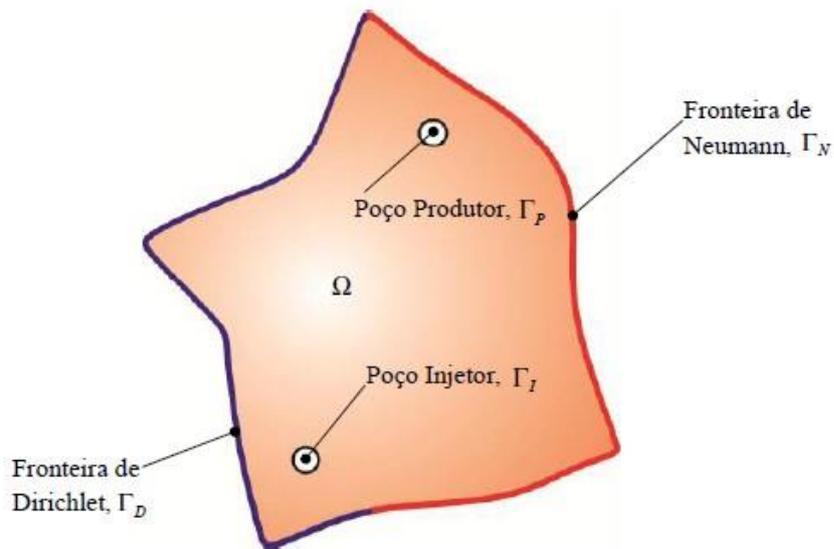


Fonte: Souza (2015)

### 3.2. Discretização da Equação da Pressão

Para iniciar o procedimento de discretização da equação de pressão (Equação 2.21), é necessário antes conhecer e discretizar o domínio modelado. A Figura 2 mostra um domínio genérico.

Figura 2 – Domínio genérico a ser estudado



Fonte: Souza (2015)

As várias fronteiras  $\Gamma$  são descritas na figura. É indicada a fronteira de Dirichlet,  $\Gamma_D$ , em que os valores da variável são conhecidos. Também é indicada a fronteira de Neumann,  $\Gamma_N$ , em que os valores da derivada da variável são conhecidos. Vale observar que, para condições de simetria, utiliza-se a derivada nula, isto é, fronteira de Neumann com valor nulo.

Ao discretizar o domínio da Figura 2 em diversos pequenos volumes de controle, encontra-se um padrão como mostrado na Figura 3.

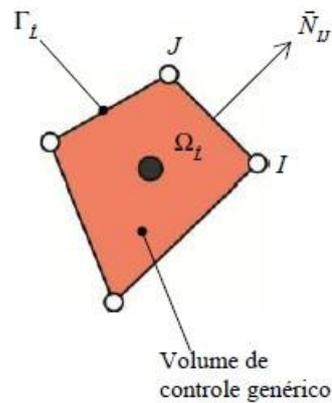
Figura 3 – Domínio genérico após a discretização



Fonte: Souza (2015)

Em destaque na Figura 3, observa-se um volume específico, como melhor detalhado na Figura 4.

Figura 4 – Volume de controle em detalhe



Fonte: Souza (2015)

Na Figura 3 e 4 são destacados os nós J e I, o volume de controle em si,  $\Omega_L$ , sua superfície de controle  $\Gamma_L$  e a normal à face IJ,  $\vec{N}_{IJ}$ .

A integral da Equação 21 no volume de controle então se torna:

$$\int_{\Omega_L} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\Omega_L = \int_{\Omega_L} Q d\Omega_L \quad (24)$$

Usando o Teorema da Divergência de Gauss (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007), no lado esquerdo da Equação 24 se obtém:

$$\int_{\Gamma_{\hat{L}}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\Gamma_{\hat{L}} = \int_{\Omega_{\hat{L}}} Q d\Omega_{\hat{L}} \quad (25)$$

Para volumes de controle poligonais, ambos os lados da igualdade podem ser aproximados utilizando o Teorema do Valor Médio:

$$\int_{\Gamma_{\hat{L}}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\Gamma_{\hat{L}} = \sum_{IJ \in \Gamma} \int_{\Gamma_{\hat{L}}} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (26)$$

$$\int_{\Omega_{\hat{L}}} Q d\Omega_{\hat{L}} = \bar{Q}_{\hat{L}} \Omega_{\hat{L}} \quad (27)$$

Em que a integral transformada pelo Teorema da Divergência de Gauss deixou de ser uma integral no volume para passar a ser uma integral de superfície, e então ser considerada com um somatório nas faces do volume.

Portanto, unido as duas partes, a equação discretizada da pressão se torna:

$$\sum_{IJ \in \Gamma} \int_{\Gamma_{\hat{L}}} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \bar{Q}_{\hat{L}} \Omega_{\hat{L}} \quad (28)$$

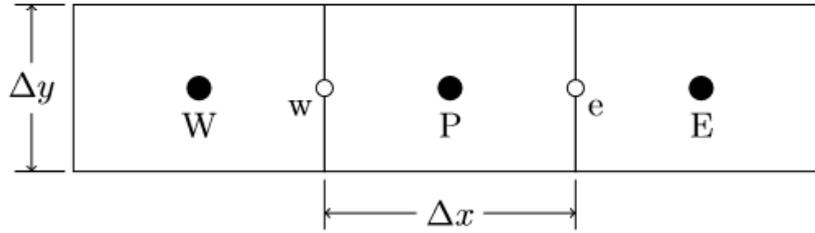
Substituindo a velocidade total na face,  $\vec{v}_{IJ}$ , pelos termos da Lei de Darcy:

$$\sum_{IJ \in \Gamma} \int_{\Gamma_{\hat{L}}} (-\lambda K \vec{\nabla} p) \cdot \vec{N}_{IJ} = \bar{Q}_{\hat{L}} \Omega_{\hat{L}} \quad (29)$$

O índice IJ indica que os valores são avaliados na face IJ. O problema é que, no Método de Volumes Finitos centrado na célula, ou cell-centered, os valores das variáveis são associados ao centroide do volume, de forma que para obter o valor na face, é necessário realizar uma interpolação (PATANKAR, 1980; MALISKA, 2004; VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Para exemplificar o esquema centrado (CDS - Central Differencing Scheme), um dos mais simples da literatura, será usada uma malha estruturada retangular, como mostrada na Figura 5.

Figura 5 – Malha cartesiana retangular



Fonte: Elaborada pelo autor

O gradiente de pressão, para um caso unidimensional, é avaliado nas faces 'w' e 'e'. Para o esquema CDS:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_w = \frac{p_P - p_W}{\Delta x}; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_e = \frac{p_E - p_P}{\Delta x} \quad (30)$$

Neste trabalho, utilizou-se o método MPFA-O, já apresentado anteriormente. Como detalhado em Aavatsmark (2007), o método MPFA, ou MultiPoint Flux Approximation, em oposição ao TPFA (Two Point Flux Approximation, como descrito nas equações acima), deixa de usar apenas dois pontos para calcular o fluxo na face, e passa utilizar vários pontos ao redor do volume. Desta forma, a solução se torna computacionalmente mais cara, no entanto, aumenta sua precisão.

### 3.3. Discretização da Equação da Saturação

Da mesma forma que na discretização da Equação de Pressão, na Saturação se integra no volume de controle. Por ser uma equação transiente (dependente do tempo), também se integra no tempo. Portanto, integrando a Equação 13:

$$\int_{t_0}^t \int_{\Omega_L} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial \Omega_L \partial t = - \int_{t_0}^t \int_{\Omega_L} \nabla \cdot \vec{F}_w \partial \Omega_L \partial t + \int_{t_0}^t \int_{\Omega_L} Q_w \partial \Omega_L \partial t \quad (31)$$

Sabendo que  $\vec{F}_w = f_w \vec{v}$  e usando o Teorema da Divergência de Gauss (MALISKA, 2004; VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007):

$$\int_{t_0}^t \int_{\Omega_{\bar{L}}} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial \Omega_{\bar{L}} \partial t = - \int_{t_0}^t \int_{\Gamma_{\bar{L}}} f_w \vec{v} \cdot \vec{n} \partial \Omega_{\bar{L}} \partial t + \int_{t_0}^t \int_{\Omega_{\bar{L}}} Q_w \partial \Omega_{\bar{L}} \partial t \quad (32)$$

Pelo Teorema do Valor Médio:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial t = - \frac{1}{\phi_{\bar{L}} \Omega_{\bar{L}}} \int_{t_0}^t \int_{\Gamma_{\bar{L}}} f_w \vec{v} \cdot \vec{n} \partial \Omega_{\bar{L}} \partial t + \frac{1}{\phi_{\bar{L}}} \int_{t_0}^t \bar{Q}_w \partial t \quad (33)$$

Resolvendo a integral de superfície do fluxo como um somatório de todas as faces do volume:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial t = - \frac{1}{\phi_{\bar{L}} \Omega_{\bar{L}}} \int_{t_0}^t \sum_{IJ \in \Gamma_{\bar{L}}} (f_w \vec{v})_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \partial t + \frac{1}{\phi_{\bar{L}}} \int_{t_0}^t \bar{Q}_w \partial t \quad (34)$$

Tendo a discretização espacial feita, pode-se continuar com a discretização temporal. Utilizando um esquema do tipo Euler Progressivo:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial S_w}{\partial t} \partial t = S_{w_{\bar{L}}}^{n+1} - S_{w_{\bar{L}}}^n \quad (35)$$

Em que  $S_{w_{\bar{L}}}^{n+1}$  é o valor da saturação no volume no instante  $n + 1$  (valor futuro) e  $S_{w_{\bar{L}}}^n$ , no instante  $n$  (valor atual).

Desta forma, a equação da saturação é discretizada explicitamente como:

$$S_{w_{\bar{L}}}^{n+1} = S_{w_{\bar{L}}}^n - \frac{\Delta t}{\phi_{\bar{L}} \Omega_{\bar{L}}} \sum_{IJ \in \Gamma_{\bar{L}}} (f_w \vec{v})_{IJ}^n \cdot \vec{N}_{IJ} + \frac{\Delta t}{\phi_{\bar{L}}} \bar{Q}_w^n \quad (36)$$

Para simplificar a notação, o 'n' indicando o instante atual pode ser suprimido, e ser especificado o instante de tempo apenas quando diferente de 'n', tornando-se:

$$S_{w_{\bar{L}}}^{n+1} = S_{w_{\bar{L}}} - \frac{\Delta t}{\phi_{\bar{L}} \Omega_{\bar{L}}} \sum_{IJ \in \Gamma_{\bar{L}}} (f_w \vec{v})_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} + \frac{\Delta t}{\phi_{\bar{L}}} \bar{Q}_w \quad (37)$$

Observa-se, no entanto, que a equação mostra o uso do fluxo avaliado na face, isto é,  $(f_w \vec{v})_{IJ}$ . A forma como será calculado este fluxo na face altera fortemente a solução.

Um dos exemplos deste cálculo é o fluxo de Roe, também chamado de Ponderação a Montante, ou Upwind. Imaginando um escoamento unidimensional da esquerda para a direita, ao avaliar o fluxo de Roe numa face qualquer, o valor considerado para a variável na face será o do volume à esquerda, isto é, a montante do escoamento. Caso o escoamento passe a ser da direita para a esquerda, então o valor na face considerado será o do volume de controle à direita, também a montante do escoamento.

### **3.4. Método dos Volumes Finitos Isotrópico**

O Método dos Volumes Finitos Isotrópico é uma variante do MVF proposta por Shukla e Giri (2014), com base no trabalho anterior de Kumar (2004).

O trabalho de Shukla e Giri (2014) é o motivador e maior base desta dissertação. No artigo, os autores propuseram uma modificação ao Método de Volumes Finitos e resolveram inúmeras equações governantes de diferentes problemas, com 2 e 3 dimensões. A grande limitação do trabalho foi o tipo de malha, apenas Cartesiana Uniforme Quadrada.

Nesta seção, é explicado melhor o procedimento adotado no trabalho, para facilitar a compreensão da metodologia desta dissertação.

#### **3.4.1. Equação Governante Discretizada**

A equação a ser discretizada é genérica para problemas de advecção-difusão

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(x, t, \mathbf{U}) = S(x, t, \mathbf{U}) \quad (38)$$

Em que  $\mathbf{U}$  é considerado o vetor das variáveis,  $\mathbf{x} = (x, y)$  é o vetor de posição bidimensional,  $t$  é o tempo,  $\mathbf{F}$  é o vetor de fluxo e  $S$  é o termo fonte.

O vetor de fluxo inclui termos difusivos e advectivos, sendo definido como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^a(x, y, t, \mathbf{U}) + \mathbf{G}^a(x, y, t, \mathbf{U}) - \mathbf{D}(x, y, t, \mathbf{U})\nabla\mathbf{U}(x, y, t) \quad (39)$$

Em que, por definição,  $\mathbf{F}^a$  é o vetor de fluxo advectivo na direção x e  $\mathbf{G}^a$  na direção y e D é o tensor de difusividade. Logo a equação genérica pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^a(x, y, t, \mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^a(x, y, t, \mathbf{U})}{\partial y} = \nabla \cdot (\mathbf{D}(x, y, t, \mathbf{U})\nabla\mathbf{U}(x, y, t)) + S(x, y, t, \mathbf{U}) \quad (40)$$

Sabendo que

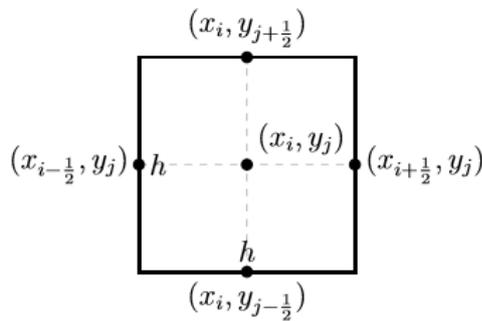
$$\mathbf{D}(x, y, t, \mathbf{U})\nabla\mathbf{U}(x, y, t) = \mathbf{D} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Encontra-se que a equação genérica, expandindo os termos advectivos e difusivos será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^a(x, y, t, \mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^a(x, y, t, \mathbf{U})}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mathbf{D}(x, y, t, \mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right] + \\ &\frac{\partial}{\partial y} \left[ \mathbf{D}(x, y, t, \mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} \right] + S(x, y, t, \mathbf{U}) \end{aligned} \quad (42)$$

A equação governante é discretizada para o elemento bidimensional quadrado estudado,  $I_{ij} = \left[ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \times \left[ y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}} \right]$ , mostrado na Figura 6.

Figura 6 – Elemento bidimensional estudado



Fonte: Elaborada pelo autor

Fazendo a integral de área em todo o domínio  $I_{ij}$  a equação discretizada será:

$$\iint_{I_{ij}} \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^a(x, y, t, \mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}^a(x, y, t, \mathbf{U})}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{I_{ij}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mathbf{D}(x, y, t, \mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mathbf{D}(x, y, t, \mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} \right] + S(x, y, t, \mathbf{U}) \right) dx dy \quad (43)$$

Dividindo ambos os lados equação por  $h^2$ , que é a área do elemento, e rearranjando a equação, encontra-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(x, y, t) dx dy \right) &= \left( \frac{1}{h^2} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{S}(x, y, t, \mathbf{U}) dx dy \right) \\ - \frac{1}{h} \left( \frac{1}{h} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{F}^a(x_{i+\frac{1}{2}}, y, t, \mathbf{U}) dy - \frac{1}{h} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{D}(x_{i+\frac{1}{2}}, y, t, \mathbf{U}) \mathbf{U}_x(x_{i+\frac{1}{2}}, y, t) dy \right) \\ + \frac{1}{h} \left( \frac{1}{h} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{F}^a(x_{i-\frac{1}{2}}, y, t, \mathbf{U}) dy - \frac{1}{h} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{D}(x_{i-\frac{1}{2}}, y, t, \mathbf{U}) \mathbf{U}_x(x_{i-\frac{1}{2}}, y, t) dy \right) \\ - \frac{1}{h} \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{G}^a(x, y_{j+\frac{1}{2}}, t, \mathbf{U}) dx - \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{D}(x, y_{j+\frac{1}{2}}, t, \mathbf{U}) \mathbf{U}_y(x, y_{j+\frac{1}{2}}, t) dx \right) \\ + \frac{1}{h} \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{G}^a(x, y_{j-\frac{1}{2}}, t, \mathbf{U}) dx - \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{D}(x, y_{j-\frac{1}{2}}, t, \mathbf{U}) \mathbf{U}_y(x, y_{j-\frac{1}{2}}, t) dx \right) \end{aligned} \quad (44)$$

Utilizando o conceito de valor médio, é possível simplificar a equação da seguinte forma:

$$\frac{d\bar{\mathbf{U}}_{i,j}}{dt} = - \frac{\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2},j} - \hat{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2},j}}{h} - \frac{\hat{\mathbf{G}}_{i,j+\frac{1}{2}} - \hat{\mathbf{G}}_{i,j-\frac{1}{2}}}{h} + \hat{\mathbf{S}}_{i,j} \quad (45)$$

Em que a barra simboliza a média no volume e o circunflexo, a integral na face.

### 3.4.2. Valor Médio Integral por Expansão Multidimensional

A representação para expansão por série de Taylor Multidimensional é dada por:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{j=0}^k \frac{(\mathbf{h} \cdot \nabla)^j f(\mathbf{a})}{j!} + R_{a,k}(\mathbf{h}) \quad (46)$$

Em que  $\mathbf{a}$  é o ponto de referência da expansão e  $\mathbf{h}$  é a distância percorrida. Fazendo:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h\alpha \\ h\beta \end{bmatrix} \quad (47)$$

Encontra-se então o valor da variável em qualquer ponto  $(i + \alpha, j + \beta)$ , com base em um ponto já conhecido  $(i, j)$ :

$$\begin{aligned} u_{i+\alpha, j+\beta} = & u_{i,j} + h\alpha(u_x)_{i,j} + h\beta(u_y)_{i,j} + \frac{h^2\alpha^2(u_{xx})_{i,j}}{2} + \frac{2h^2\alpha\beta(u_{xy})_{i,j}}{2} + \frac{h^2\beta^2(u_{yy})_{i,j}}{2} + \\ & \frac{h^3\alpha^3(u_{xxx})_{i,j}}{6} + \frac{3h^3\alpha^2\beta(u_{xxy})_{i,j}}{6} + \frac{3h^3\alpha\beta^2(u_{xyy})_{i,j}}{6} + \frac{h^3\beta^3(u_{yyy})_{i,j}}{6} + \frac{h^4\alpha^4(u_{xxxx})_{i,j}}{24} + \\ & \frac{4h^4\alpha^3\beta(u_{xxx})_{i,j}}{24} + \frac{6h^4\alpha^2\beta^2(u_{xxyy})_{i,j}}{24} + \frac{4h^4\alpha\beta^3(u_{xyyy})_{i,j}}{24} + \frac{h^4\beta^4(u_{yyyy})_{i,j}}{24} + O(h^5) \end{aligned} \quad (48)$$

Desta forma, é possível calcular a aproximação do valor médio no volume, valor médio na face e valor médio do gradiente na face com base no valor do centroide.

Para o valor médio no volume:

$$\bar{u}_{i,j} = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} u_{i+\alpha, j+\beta} d\alpha d\beta = u_{i,j} + \frac{h^2}{24} (\nabla^2 u)_{i,j} + \frac{h^4}{1920} \left( \nabla^4 u + \frac{4}{3} u_{xxyy} \right)_{i,j} + O(h^6) \quad (49)$$

Para o valor médio na face:

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2}, j} = \int_{-1/2}^{1/2} u_{i+\frac{1}{2}, j+\beta} d\beta = u_{i,j} + \frac{h}{2} (u_x)_{i,j} + \frac{h^2}{12} (u_{xx})_{i,j} + \frac{h^2}{24} (\nabla^2 u)_{i,j} + \frac{h^3}{48} (\nabla^2 u_x)_{i,j} + O(h^4) \quad (50)$$

E finalmente, para o valor médio do gradiente na face:

$$\begin{aligned} (\hat{u}_x)_{i+\frac{1}{2}, j} &= \int_{-1/2}^{1/2} \left( u_{i+\frac{1}{2}, j+\beta} \right)_x d\beta \\ &= (u_x)_{i,j} + \frac{h}{2} (u_{xx})_{i,j} + \frac{h^2}{12} (u_{xxx})_{i,j} + \frac{h^2}{24} (\nabla^2 u_x)_{i,j} + \frac{h^3}{48} (\nabla^2 u_{xx})_{i,j} + O(h^4) \end{aligned} \quad (51)$$

Também é possível estender o conceito de média para os volumes vizinhos, já que  $\alpha$  e  $\beta$  não se restringem a valores de módulo até 1:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{i+\alpha,j+\beta} &= \int_{\beta-\frac{1}{2}}^{\beta+\frac{1}{2}} \int_{\alpha-\frac{1}{2}}^{\alpha+\frac{1}{2}} u_{i+\alpha,j+\beta} d\alpha d\beta \\
&= u_{i,j} + h(\alpha u_x + \beta u_y)_{i,j} + h^2 \left( \frac{12\alpha^2 + 1}{24} u_{xx} + \alpha\beta u_{xy} + \frac{12\beta^2 + 1}{24} u_{yy} \right)_{i,j} \\
&+ h^3 \left( \frac{4\alpha^2 + 1}{24} \alpha u_{xxx} + \frac{12\alpha^2 + 1}{24} \beta u_{xxy} + \frac{12\beta^2 + 1}{24} \alpha u_{xyy} + \frac{4\beta^2 + 1}{24} \beta u_{yyy} \right)_{i,j} \\
&+ h^4 \left[ \frac{80\alpha^4 + 40\alpha^2 + 1}{1920} u_{xxxx} + \frac{4\alpha^3 + \alpha}{24} \beta u_{xxx} + \left( \frac{12\alpha^2 + 1}{24} \right) \left( \frac{12\beta^2 + 1}{24} \right) u_{xxyy} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4\beta^3 + \beta}{24} \alpha u_{xyyy} + \frac{80\beta^4 + 40\beta^2 + 1}{1920} u_{yyyy} \right] + O(h^5) \tag{52}
\end{aligned}$$

### 3.4.3. Anisotropia do Método Convencional

O valor médio na face computado através do Método de Volumes Finitos Convencional, usando um esquema centrado (CDS), é dado por:

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^C = \frac{\bar{u}_{i+1,j} + \bar{u}_{i,j}}{2} \tag{53}$$

Fazendo  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$ , encontra-se o valor médio da variável no volume à direita:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{i+1,j} &= u_{i,j} + hu_x + \frac{h^2}{24}(13u_{xx} + u_{yy}) + \frac{h^3}{24}(5u_{xxx} + u_{xyy}) + \\
&\quad \frac{h^4}{1920} \left( \nabla^4 u + 120u_{xxxx} + \frac{124}{3}u_{xxyy} \right) + O(h^5) \tag{54}
\end{aligned}$$

Já fazendo  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ , encontra-se o valor médio no volume atual:

$$\bar{u}_{i,j} = u_{i,j} + \frac{h^2}{24} \nabla^2 u + \frac{h^4}{1920} \left( \nabla^4 u + \frac{4}{3} u_{xxyy} \right) + O(h^5) \tag{55}$$

Substituindo na Equação 3.53, no cálculo do valor médio na face calculado pelo MVF Convencional:

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^C = u_{i,j} + \frac{h}{2} u_x + \frac{h^2}{24} (7u_{xx} + u_{yy}) + \frac{h^3}{48} (5u_{xxx} + u_{xyy}) + O(h^4) \tag{56}$$

Substituindo  $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy}$  e  $\nabla^2 u_x = u_{xxx} + u_{xyy}$ , encontra-se

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^C = u_{i,j} + \frac{h}{2}u_x + \frac{h^2}{4}(u_{xx}) + \frac{h^3}{12}(u_{xxx}) + \frac{h^2}{24}(\nabla^2 u) + \frac{h^3}{48}(\nabla^2 u_x) + O(h^4) \quad (57)$$

Sabendo que o valor exato na face é dado como já disposto na Equação 50:

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} = u_{i,j} + \frac{h}{2}(u_x)_{i,j} + \frac{h^2}{12}(u_{xx})_{i,j} + \frac{h^2}{24}(\nabla^2 u)_{i,j} + \frac{h^3}{48}(\nabla^2 u_x)_{i,j} + O(h^4) \quad (58)$$

Separa-se os termos na equação de forma conveniente:

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^C = \left( u_{i,j} + \frac{h}{2}u_x + \frac{h^2}{24}(\nabla^2 u) + \frac{h^3}{48}(\nabla^2 u_x) \right) + \frac{h^2}{6}(u_{xx}) + \frac{h^3}{12}(u_{xxx}) + O(h^4) \quad (59)$$

Substituindo o termo em parênteses pelo valor exato da propriedade na face e comparando-o com o valor computado pelo Método dos Volumes Finitos Convencional, encontra-se o erro de truncamento anisotrópico no cálculo do valor médio na face

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^C = \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{h^2}{6}(u_{xx}) + \frac{h^3}{12}(u_{xxx}) + O(h^4) \quad (60)$$

Já o gradiente na face, pelo Método dos Volumes Finitos convencional, é computado como:

$$(\tilde{u}_x^C)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j}}{h} \quad (61)$$

Realizando o mesmo procedimento de substituição de forma conveniente, encontra-se o erro de truncamento anisotrópico no cálculo do valor médio do gradiente na face:

$$(\tilde{u}_x^C)_{i+\frac{1}{2},j} = (\hat{u}_x)_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{h^2}{12}(u_{xxx}) + \frac{h^3}{24}(u_{xxxx}) + O(h^4) \quad (62)$$

Para finalmente analisar o erro de truncamento de toda a equação discretizada, considera-se a seguinte equação de advecção-difusão

$$u_t + c^{(x)}u_x + c^{(y)}u_y = v(u_{xx} + u_{yy}) + \epsilon u \quad (63)$$

Discretizando-a em estêncil simétrico, sua forma integral se torna

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_{i,j}}{dt} &= \frac{c^{(x)}}{h} \left( \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2},j} \right) + \frac{c^{(y)}}{h} \left( \hat{u}_{i,j+\frac{1}{2}} - \hat{u}_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \\ &+ \frac{\nu}{h} \left[ (\hat{u}_x)_{i+\frac{1}{2},j} - (\hat{u}_x)_{i-\frac{1}{2},j} + (\hat{u}_y)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\hat{u}_y)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] + \epsilon \bar{u}_{i,j} \end{aligned} \quad (64)$$

Utilizando o Método dos Volumes Finitos Convencional, a equação se torna:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_{i,j}}{dt} &= \frac{c^{(x)}}{h} \left( \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^c - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^c \right) + \frac{c^{(y)}}{h} \left( \tilde{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^c - \tilde{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^c \right) \\ &+ \frac{\nu}{h} \left[ (\tilde{u}_x^c)_{i+\frac{1}{2},j} - (\tilde{u}_x^c)_{i-\frac{1}{2},j} + (\tilde{u}_y^c)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\tilde{u}_y^c)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] + \epsilon \bar{u}_{i,j} \end{aligned} \quad (65)$$

Em que

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^c = \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{h^2}{6} (u_{xx}) + \frac{h^3}{12} (u_{xxx}) + O(h^4) \quad (66)$$

$$\tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^c = \hat{u}_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{h^2}{6} (u_{xx}) - \frac{h^3}{12} (u_{xxx}) + O(h^4) \quad (67)$$

$$\tilde{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^c = \hat{u}_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{6} (u_{yy}) + \frac{h^3}{12} (u_{yyy}) + O(h^4) \quad (68)$$

$$\tilde{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^c = \hat{u}_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{6} (u_{yy}) - \frac{h^3}{12} (u_{yyy}) + O(h^4) \quad (69)$$

$$(\tilde{u}_x^c)_{i+\frac{1}{2},j} = (\hat{u}_x)_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{h^2}{12} (u_{xxx}) + \frac{h^3}{24} (u_{xxxx}) + O(h^4) \quad (70)$$

$$(\tilde{u}_x^c)_{i-\frac{1}{2},j} = (\hat{u}_x)_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{h^2}{12} (u_{xxx}) - \frac{h^3}{24} (u_{xxxx}) + O(h^4) \quad (71)$$

$$(\tilde{u}_y^c)_{i,j+\frac{1}{2}} = (\hat{u}_y)_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{12} (u_{yyy}) + \frac{h^3}{24} (u_{yyyy}) + O(h^4) \quad (72)$$

$$(\tilde{u}_y^c)_{i,j-\frac{1}{2}} = (\hat{u}_y)_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{12} (u_{yyy}) - \frac{h^3}{24} (u_{yyyy}) + O(h^4) \quad (73)$$

O erro de truncamento será a diferença entre as duas equações:

$$\begin{aligned}
E = & \left\{ -\frac{c^{(x)}}{h} \left( \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} - \hat{u}_{i-\frac{1}{2},j} \right) - \frac{c^{(y)}}{h} \left( \hat{u}_{i,j+\frac{1}{2}} - \hat{u}_{i,j-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
& + \frac{v}{h} \left[ (\hat{u}_x)_{i+\frac{1}{2},j} - (\hat{u}_x)_{i-\frac{1}{2},j} + (\hat{u}_y)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\hat{u}_y)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] + \epsilon \bar{u}_{i,j} \left. \right\} - \\
& \left\{ -\frac{c^{(x)}}{h} \left( \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^c - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^c \right) - \frac{c^{(y)}}{h} \left( \tilde{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^c - \tilde{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^c \right) \right. \\
& \left. + \frac{v}{h} \left[ (\tilde{u}_x^c)_{i+\frac{1}{2},j} - (\tilde{u}_x^c)_{i-\frac{1}{2},j} + (\tilde{u}_y^c)_{i,j+\frac{1}{2}} - (\tilde{u}_y^c)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] + \epsilon \bar{u}_{i,j} \right\} \quad (74)
\end{aligned}$$

Substituindo os valores da variável e seu gradiente na face:

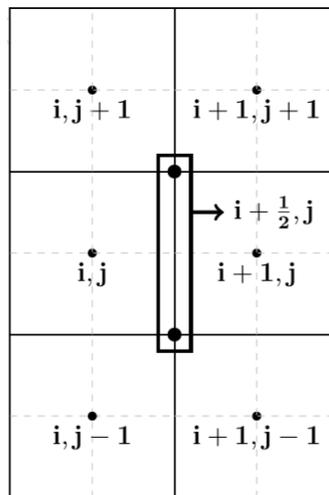
$$E = \frac{h^2}{12} (2c^{(x)}u_{xxx} + 2c^{(y)}u_{yyy} - vu_{xxxx} - vu_{yyyy}) + O(h^4) \quad (75)$$

Portanto, a solução pelo Método de Volumes Finitos Convencional é uma aproximação anisotrópica. Esta anisotropia é justificada pela presença de derivadas direcionais no termo de menor potência de h.

#### 3.4.4. Ponderação Isotrópica para Valor na Face

Para a reconstrução isotrópica do valor médio em uma face (a direita, neste caso), serão utilizados os 6 volumes com vizinhança de nó à face, mostrados na Figura 7.

Figura 7 – Face e elementos utilizados na reconstrução Isotrópica



Fonte: Elaborada pelo autor

Na construção da equação é desejável que os pesos de cada elemento ( $\omega_{i,j}$ ) sejam selecionados de modo que a equação final se torne do tipo

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^I = \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} + a_{\nabla^2 u} h^2 \nabla^2 u + O(h^3) \quad (76)$$

Em que  $a_{\nabla^2 u}$  é um coeficiente genérico não nulo a ser calculado, de forma que o erro de truncamento seja isotrópico, ou invariável rotacionalmente. Ou seja, de forma que o primeiro termo do erro de truncamento (diferença entre a aproximação pelo Método de Volumes Finitos Isotrópico e a solução exata) seja isotrópico.

Como demonstrado anteriormente, a solução exata para o valor da propriedade na face é dada por:

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} = u_{i,j} + \frac{h}{2} (u_x)_{i,j} + \frac{h^2}{24} (3u_{xx} + u_{yy})_{i,j} + O(h^3) \quad (77)$$

Substituindo esta equação no valor isotrópico desejado, dado pela Equação 76:

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^I = u_{i,j} + \frac{h}{2} (u_x)_{i,j} + \frac{h^2}{24} (3u_{xx} + u_{yy})_{i,j} + a_{\nabla^2 u} h^2 \nabla^2 u + O(h^3) \quad (78)$$

As aproximações do valor médio das células no estêncil são dadas pela substituição de  $\alpha$  e  $\beta$  na Equação 52.

$$\bar{u}_{i+\alpha,j+\beta} = u_{i,j} + h(\alpha u_x + \beta u_y)_{i,j} + h^2 \left( \frac{12\alpha^2 + 1}{24} u_{xx} + \alpha\beta u_{xy} + \frac{12\beta^2 + 1}{24} u_{yy} \right)_{i,j} + O(h^3) \quad (79)$$

Logo, substituindo as coordenadas referentes aos 6 volumes vizinhos à face:

$$\bar{u}_{i,j-1} = u - hu_y + \frac{h^2}{24} (u_{xx} + 13u_{yy}) + O(h^3) \quad (80)$$

$$\bar{u}_{i,j} = u + \frac{h^2}{24} (u_{xx} + u_{yy}) + O(h^3) \quad (81)$$

$$\bar{u}_{i,j+1} = u + hu_y + \frac{h^2}{24} (u_{xx} + 13u_{yy}) + O(h^3) \quad (82)$$

$$\bar{u}_{i+1,j-1} = u + hu_x - hu_y + \frac{h^2}{24} (13u_{xx} - 24u_{xy} + 13u_{yy}) + O(h^3) \quad (83)$$

$$\bar{u}_{i+1,j} = u + hu_x + \frac{h^2}{24} (13u_{xx} + u_{yy}) + O(h^3) \quad (84)$$

$$\bar{u}_{i+1,j+1} = u + hu_x + hu_y + \frac{h^2}{24}(13u_{xx} + 24u_{xy} + 13u_{yy}) + O(h^3) \quad (85)$$

Sabendo que cada valor médio de célula terá seu peso, a aproximação para o valor da face é dada por:

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^I = \sum_{\alpha \in \{0,1\} \cup \beta \in \{-1,0,1\}} \omega_{i+\alpha,j+\beta} \bar{u}_{i+\alpha,j+\beta} \quad (86)$$

Substituindo, encontra-se:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^I = & +\omega_{i,j-1} \left[ u - hu_y + \frac{h^2}{24}(u_{xx} + 13u_{yy}) \right] \\ & +\omega_{i,j} \left[ u + \frac{h^2}{24}(u_{xx} + u_{yy}) \right] \\ & +\omega_{i,j+1} \left[ +hu_y + \frac{h^2}{24}(u_{xx} + 13u_{yy}) \right] \\ & +\omega_{i+1,j-1} \left[ u + hu_x - hu_y + \frac{h^2}{24}(13u_{xx} - 24u_{xy} + 13u_{yy}) \right] \\ & +\omega_{i+1,j} \left[ u + hu_x + \frac{h^2}{24}(13u_{xx} + u_{yy}) \right] \\ & +\omega_{i+1,j+1} \left[ u + hu_x + hu_y + \frac{h^2}{24}(13u_{xx} + 24u_{xy} + 13u_{yy}) \right] \end{aligned} \quad (87)$$

Então forma-se o seguinte sistema:

$$\begin{array}{l} u \\ u_x \\ u_y \\ u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \\ sim. \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 13 & 13 & 13 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 1 & 13 & 13 & 1 & 13 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{i,j-1} \\ \omega_{i,j} \\ \omega_{i,j+1} \\ \omega_{i+1,j-1} \\ \omega_{i+1,j} \\ \omega_{i+1,j+1} \\ a_{\nabla^2 u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (88)$$

Em que a última equação surge da simetria imposta entre os pesos. Resolvendo, encontra-se:

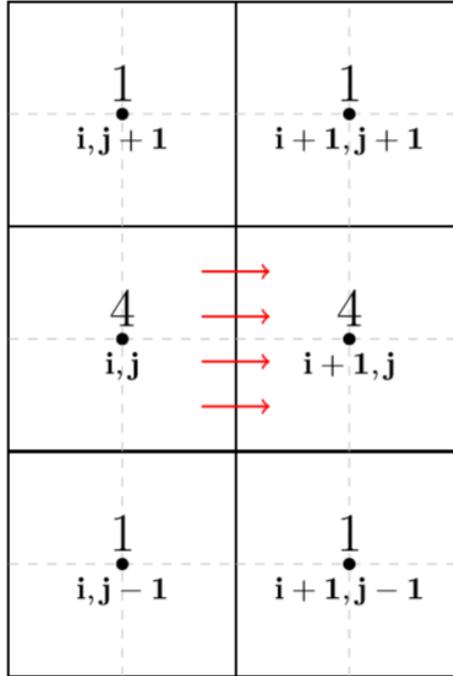
$$\begin{bmatrix} \omega_{i,j-1} \\ \omega_{i,j} \\ \omega_{i,j+1} \\ \omega_{i+1,j-1} \\ \omega_{i+1,j} \\ \omega_{i+1,j+1} \\ a_{\nabla^2 u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/12 \\ 4/12 \\ 1/12 \\ 1/12 \\ 4/12 \\ 1/12 \\ 1/6 \end{bmatrix} \quad (89)$$

Portanto:

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^l = \frac{\bar{u}_{i,j-1} + 4\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i,j+1} + \bar{u}_{i+1,j-1} + 4\bar{u}_{i+1,j} + \bar{u}_{i+1,j+1}}{12} = \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{h^2}{6}\nabla^2 u + O(h^3) \quad (90)$$

Ponderando, assim como calculado, da seguinte forma:

Figura 8 – Peso de cada elemento para o cálculo do valor médio na face



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.4.5. Ponderação Isotrópica para Gradiente na Face

Para a reconstrução isotrópica do gradiente em uma face (a direita, neste caso), serão utilizados os mesmos volumes usados para o valor médio.

Na construção da equação é desejável que os pesos de cada elemento ( $w_{i,j}$ ) sejam selecionados de modo que a equação final se torne do tipo

$$(\tilde{u}_x^l)_{i+\frac{1}{2},j} = (\hat{u}_x)_{i+\frac{1}{2},j} + a_{\nabla^2 u_x} h^2 \nabla^2 u_x + O(h^3) \quad (91)$$

Em que  $a_{\nabla^2 u_x}$  é também um coeficiente genérico não nulo a ser calculado. Como demonstrado anteriormente, solução exata para o valor do gradiente na face é dada por:

$$(\hat{u}_x)_{i+\frac{1}{2},j} = (u_x)_{i,j} + \frac{h}{2}(u_{xx})_{i,j} + \frac{h^2}{12}(u_{xxx})_{i,j} + \frac{h^2}{24}(\nabla^2 u_x)_{i,j} + \frac{h^3}{48}(\nabla^2 u_{xx})_{i,j} + O(h^4) \quad (92)$$

Substituindo na equação desejada:

$$(\tilde{u}_x^l)_{i+\frac{1}{2},j} = (u_x)_{i,j} + \frac{h}{2}(u_{xx})_{i,j} + \frac{h^2}{12}(u_{xxx})_{i,j} + \frac{h^2}{24}(\nabla^2 u_x)_{i,j} + a_{\nabla^2 u_x} h^2 \nabla^2 u_x + O(h^3) \quad (93)$$

As aproximações do valor médio das células no estêncil também são dadas pela substituição de  $\alpha$  e  $\beta$  na Equação 52.

$$\bar{u}_{i+\alpha,j+\beta} = u_{i,j} + h(\alpha u_x + \beta u_y)_{i,j} + h^2 \left( \frac{12\alpha^2 + 1}{24} u_{xx} + \alpha\beta u_{xy} + \frac{12\beta^2 + 1}{24} u_{yy} \right)_{i,j} + O(h^3) \quad (94)$$

Tendo os valores já calculados nas Equações 80 a 85, e sabendo que cada valor médio de célula terá seu peso, a aproximação para o gradiente na face é dada por:

$$(\tilde{u}_x^l)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{h} \sum_{\alpha \in \{0,1\} \cup \beta \in \{-1,0,1\}} \omega_{i+\alpha,j+\beta} \bar{u}_{i+\alpha,j+\beta} \quad (95)$$

Expandindo a soma e substituindo cada valor médio, encontra-se:

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_x^l)_{i+\frac{1}{2},j} = & + \frac{\omega_{i,j-1}}{h} \left[ u - hu_y + \frac{h^2}{24}(u_{xx} + 13u_{yy}) \right] \\ & + \frac{\omega_{i,j}}{h} \left[ u + \frac{h^2}{24}(u_{xx} + u_{yy}) \right] \\ & + \frac{\omega_{i,j+1}}{h} \left[ +hu_y + \frac{h^2}{24}(u_{xx} + 13u_{yy}) \right] \\ & + \frac{\omega_{i+1,j-1}}{h} \left[ u + hu_x - hu_y + \frac{h^2}{24}(13u_{xx} - 24u_{xy} + 13u_{yy}) \right] \\ & + \frac{\omega_{i+1,j}}{h} \left[ u + hu_x + \frac{h^2}{24}(13u_{xx} + u_{yy}) \right] \\ & + \frac{\omega_{i+1,j+1}}{h} \left[ u + hu_x + hu_y + \frac{h^2}{24}(13u_{xx} + 24u_{xy} + 13u_{yy}) \right] \end{aligned} \quad (96)$$

Formando o sistema:

$$\begin{matrix} u \\ u_y \\ u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \\ u_{xxx} \\ u_{xyy} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 13 & 13 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 1 & 13 & 13 & 1 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 1 & 13 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{i,j-1} \\ \omega_{i,j} \\ \omega_{i,j+1} \\ \omega_{i+1,j-1} \\ \omega_{i+1,j} \\ \omega_{i+1,j+1} \\ a_{\nabla^2 u_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (97)$$

A solução é dada por

$$\begin{bmatrix} \omega_{i,j-1} \\ \omega_{i,j} \\ \omega_{i,j+1} \\ \omega_{i+1,j-1} \\ \omega_{i+1,j} \\ \omega_{i+1,j+1} \\ a_{\nabla^2 u_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/12 \\ -10/12 \\ -1/12 \\ 1/12 \\ 10/12 \\ 1/12 \\ 1/12 \end{bmatrix} \quad (98)$$

Aplicando os pesos, encontra-se

$$(\tilde{u}_x^l)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{h} \frac{-\bar{u}_{i,j-1} - 10\bar{u}_{i,j} - \bar{u}_{i,j+1} + \bar{u}_{i+1,j-1} + 10\bar{u}_{i+1,j} + \bar{u}_{i+1,j+1}}{12} \quad (99)$$

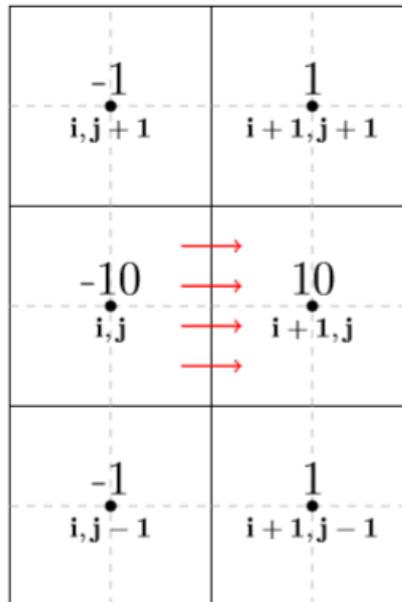
Finalmente:

$$(\tilde{u}_x^l)_{i+\frac{1}{2},j} = (\hat{u}_x)_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{h^2}{12} \nabla^2 u_x + O(h^3) \quad (100)$$

A partir da equação, observa-se que o menor termo do erro de truncamento, de potência  $h^2$ , contém apenas operadores diferenciais isotrópicos (detalhados no Apêndice A), portanto a discretização é isotrópica.

Pondera-se, assim como calculado, da seguinte forma:

Figura 9 – Peso de cada elemento para o cálculo do gradiente na face



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.5. Método Quasi-Isotrópico

O método proposto neste trabalho leva em consideração a ponderação apresentada nas seções anteriores (3.4. Método de Volumes Finitos Isotrópico). Adapta os pesos encontrados por Shukla e Giri (2014) para reconstrução do valor da velocidade e mobilidade total na face do volume de controle estudado.

Vale ressaltar que a construção apresentada anteriormente utiliza a equação de advecção-difusão linear. Portanto, não é esperado que a mesma faça com que os problemas de petróleo, que da forma estudada neste trabalho são não-lineares, tenham soluções isotrópicas, no entanto, é esperada uma melhora substancial no que diz respeito a redução do Efeito de Orientação de Malha. Por isso, por ter essência no método isotrópico linear de Shukla e Giri (2014), mas ser aplicado em um cenário não-linear, o método proposto é chamado de Método Quasi-Isotrópico (MQI).

O fluxo na face é calculado como mostrado anteriormente na Equação (37):

$$\vec{F}_{wIJ} = (f_w \vec{v})_{IJ} \quad (101)$$

Isto é, o fluxo para água na face formada pela aresta entre os nós I e J é formado por um produto do fluxo fracionário de água ( $f_w = \lambda_w/\lambda$ ) e da velocidade, ambos calculados na face.

Nas próximas seções, será detalhado o procedimento de reconstrução tanto para a velocidade como para a mobilidade total, utilizada no cálculo do fluxo fracionário.

### 3.5.1. Reconstrução da Velocidade

Para reconstrução do valor da variável na face, de acordo com a Equação 90, devemos utilizar:

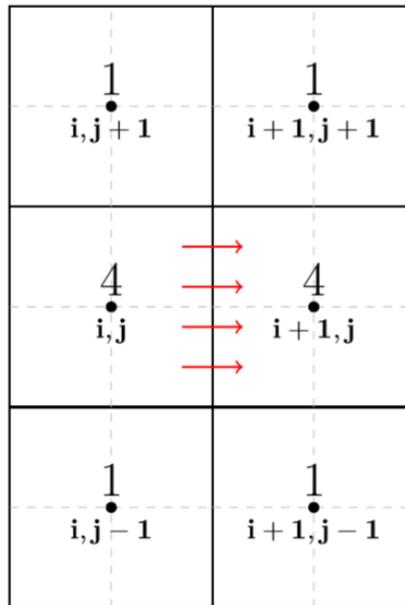
$$\tilde{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{QI} = \frac{\bar{v}_{i,j-1} + 4\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{i,j+1} + \bar{v}_{i+1,j-1} + 4\bar{v}_{i+1,j} + \bar{v}_{i+1,j+1}}{12} \quad (102)$$

Em que QI indica o uso do Método Quasi-Isotrópico. Isto é:

$$\tilde{v}_{i+\frac{1}{2},j}^{QI} = \sum_{\alpha \in \{0,1\} \cup \beta \in \{-1,0,1\}} \omega_{i+\alpha,j+\beta} \bar{v}_{i+\alpha,j+\beta} \quad (103)$$

Em que os pesos,  $\omega_{i+\alpha,j+\beta}$ , são dados na Figura 10.

Figura 10 – Estêncil e pesos utilizados na reconstrução da velocidade na face de interesse



Fonte: Elaborada pelo autor

Vale observar que toda a construção dos pesos realizada por Shukla e Giri (2014), e conseqüentemente utilizada neste trabalho, tem como requisito a malha ser quadrada, isto é, cartesiana e com espaçamentos iguais.

É importante ressaltar que, para os pesos utilizados na construção do MQI, caso sejam desconsiderados os volumes que não são adjacentes à face, isto é, uma ponderação de 1/2 para o volume à esquerda e 1/2 para o volume à direita, o método se torna o convencional, em que é realizada uma média aritmética dos dois volumes diretamente conectados à face.

### 3.5.2. Reconstrução da Mobilidade Total

Da mesma forma, para reconstrução do valor da mobilidade total na face, de acordo com a Equação 90, devemos utilizar:

$$\lambda_{i+\frac{1}{2},j}^{QI} = \lambda \left( S_{w_{i+\frac{1}{2},j}}^{QI} \right) = \lambda \left( \frac{\overline{S_{w_{i,j-1}}} + 4\overline{S_{w_{i,j}}} + \overline{S_{w_{i,j+1}}} + \overline{S_{w_{i+1,j-1}}} + 4\overline{S_{w_{i+1,j}}} + \overline{S_{w_{i+1,j+1}}}}{12} \right) \quad (104)$$

Em que QI indica o uso do Método Quasi-Isotrópico. O arranjo dos pesos utilizados é igual ao da velocidade, mostrado na Figura 10.

Observa-se que, para o Método Quasi-Isotrópico, é necessário calcular a saturação na face utilizando a ponderação de Shukla e Giri (2014), e com este valor obtido, calcular a mobilidade total, e não calcular as 6 mobilidades totais no estêncil e em seguida usar a ponderação.

## 4. Resultados

Neste capítulo, serão discutidos três exemplos que validam a construção e implementação do Método Quasi-Isotrópico, comparando com formulações convencionais:

- Advecção-Difusão Linear (reproduzindo a comparação do método convencional com o isotrópico de Shukla e Giri, que é a base para a construção do Método Quasi-Isotrópico);
- Quarto de 5 poços com relação constitutiva *piston-like* (comparando o método Convencional com o Método Quasi-Isotrópico);
- Injeção com simetria radial com relação constitutiva *brooks-corey* (comparando o método Convencional e o Método Quasi-Isotrópico)

Para todos os casos, tratam-se os problemas de forma adimensional, e todas as malhas utilizadas são cartesianas quadrangulares uniformes, devido à restrição até mesmo da própria ponderação utilizada na construção do método.

### 4.1. Advecção-Difusão Linear

Para solução do problema de Advecção-Difusão Linear proposto por Shukla e Giri, foi programado um simulador que conta com o processo de geração de malhas estruturadas cartesianas 2D (resolvendo malhas de até 400 x 400 subdivisões), solução através da escolha do método (convencional, isotrópico ou quasi-isotrópico) e pós-processamento. A ferramenta foi completamente desenvolvida no Matlab R2019a.

O problema a ser resolvido é o transporte de uma propriedade escalar de forma linear, dentro do domínio quadrado  $\Omega = [-1, 1]^2$ , modelado pela equação:

$$u_t + \nabla \cdot (\mathbf{c}u) = v\nabla^2 u \quad (105)$$

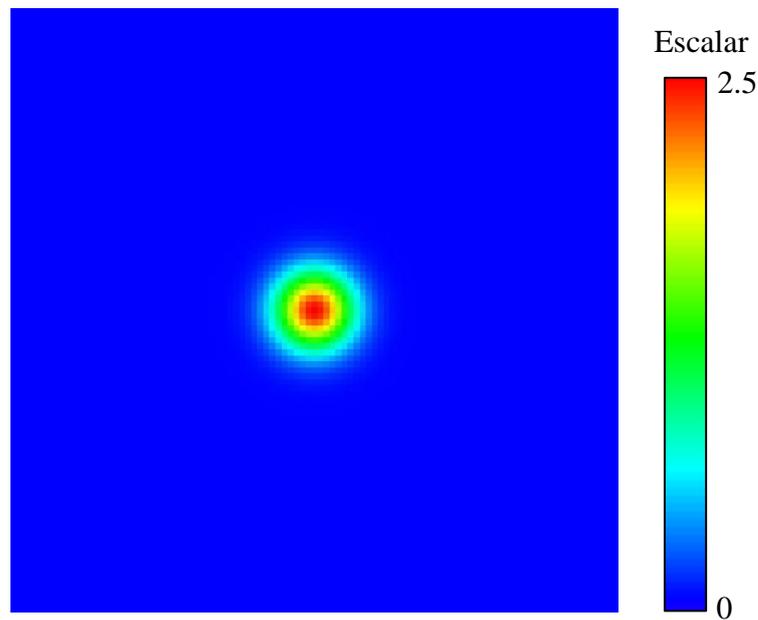
Em que  $\mathbf{c} = (-\omega_y, \omega_x)$  é o campo de velocidade, em que o pulso está girando em torno de seu próprio eixo com velocidade angular  $\omega = \pi/2$ , e  $v = 10^{-3}$  é a difusividade.

Os contornos são modelados por uma condição homogênea de Dirichlet e a disposição inicial do campo desta propriedade no espaço é axissimétrica, dada por:

$$u(\mathbf{x}, 0) = A \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4\nu}\right) \quad (106)$$

Em que  $A = 2.5$ . O campo é mostrado na Figura 11.

Figura 11 – Campo inicial (de 0 a 2.5) utilizado no problema de advecção-difusão linear



Fonte: Elaborada pelo autor

A solução analítica é dada por:

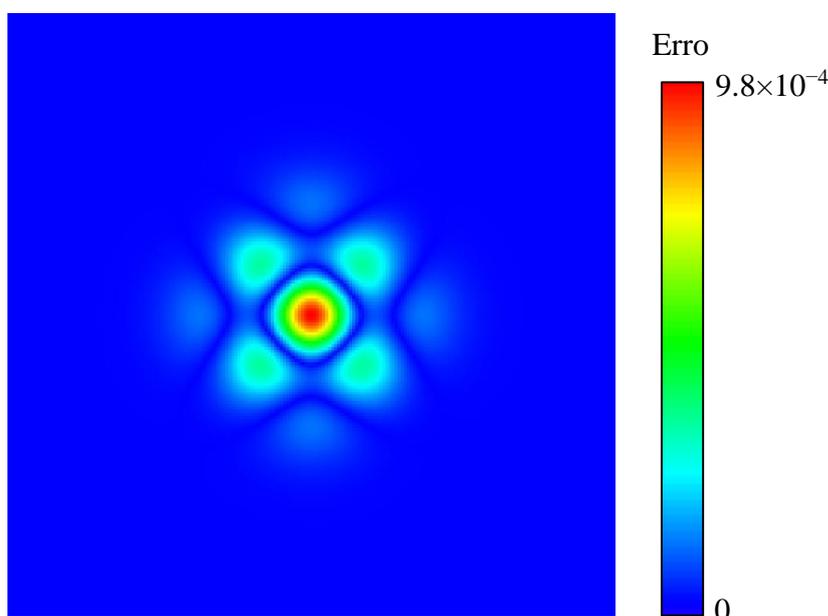
$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{A}{t+1} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4\nu(t+1)}\right) \quad (107)$$

Pela solução analítica e pela própria natureza do problema, o que é esperado é que o pico do pulso reduza com o tempo e a propriedade vá aumentando a largura de seu pulso, como se o mesmo estivesse derretendo.

O tempo final a ser simulado é de  $t = 1.5$ , então o pico esperado é  $u^e(x,y,t) = u^e(0,0,1.5) = 1$ .

Utilizando o método convencional o valor do pico foi de  $u^C(x,y,t) = u^C(0,0,1.5) = 1,00098$ . Portanto o erro máximo encontrado (que é no centro), foi de  $9.8 \times 10^{-4}$ . Como o método convencional faz com que o erro de truncamento se torne anisotrópico, conforme já demonstrado, é esperado que o campo de erro absoluto tenha direções preferenciais, e é isto que é mostrado na Figura 12. A cor azul simboliza o erro nulo, já o vermelho, o erro máximo, de 0,00098 no centro. Percebe-se o surgimento de estruturas com direções preferenciais (anisotrópicas).

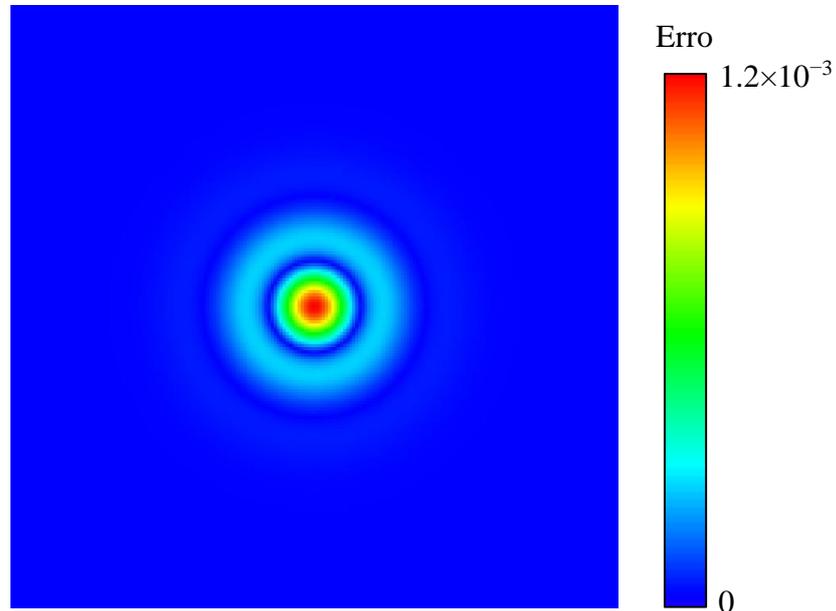
Figura 12 – Campo de erro em  $t = 1.5s$  utilizando o método convencional



Fonte: Elaborada pelo autor

Já utilizando o método isotrópico, o valor do pico foi de  $u^I(x,y,t) = u^I(0,0,1.5) = 1.0012$ . Portanto, o erro máximo encontrado (que também é no centro), foi de  $1.2 \times 10^{-3}$ . É importante observar que, apesar do erro máximo no método isotrópico ser maior do que no método convencional, devido à ponderação adotada, não há direção preferencial no erro, como mostra a Figura 13. Esta característica é muito útil, principalmente para problemas com solução axissimétrica, como é o caso deste estudado, pois mantém a essência axissimétrica da solução, ainda que haja um erro radial.

Figura 13 – Campo de erro em  $t = 1.5s$  utilizando o método isotrópico



Fonte: Elaborada pelo autor

É importante observar que, apesar de todo este esforço para reduzir a anisotropia, o valor do erro absoluto é irrisório próximo ao valor total, de forma que o erro relativo máximo se aproxima de 0.1%, isto é, tanto a solução analítica como as soluções convencional ou isotrópica apresentam o mesmo formato como solução, ainda que o valor, radialmente, contenha um pequeno erro.

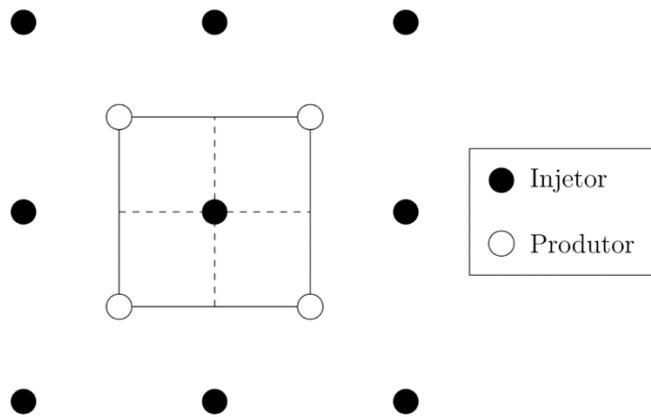
Já na próxima aplicação, que diz respeito à simulação de reservatórios de petróleo, os erros relativos passam a ser não só significativos, como críticos, atingindo até mesmo 100% e distorcendo completamente os resultados. É neste tipo de problema que o método isotrópico encontra grande aplicabilidade e possibilidades de aplicações que impactarão de fato os resultados da simulação.

#### **4.2. Quarto de 5 Poços com relação constitutiva do tipo Piston-Like**

Para escoamento bifásico, água e óleo, imiscível em reservatórios de petróleo, o padrão de Quarto de 5 Poços é um problema clássico, útil para avaliar o desempenho de técnicas que reduzem o Efeito de Orientação de Malha.

O domínio de simulação é ilustrado na Figura 14. A linha sólida representa uma instância do padrão de repetição (de 5 poços, em que os 4 da ponta são produtores e o poço central é injetor), já as linhas tracejadas representam a simetria (de um quarto do domínio).

Figura 14 – Domínio de simulação do Quarto de 5 Poços



Fonte: Elaborada pelo autor

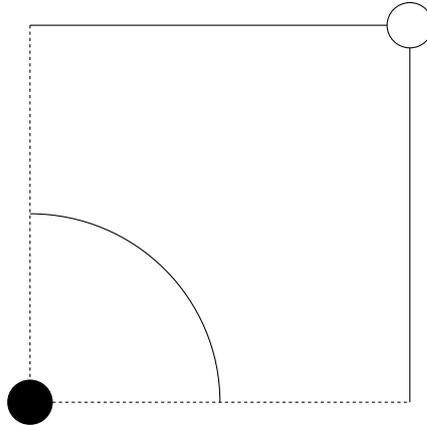
O padrão de solução esperado, no início da injeção, é radial, de forma que a frente de saturação de água deve se deslocar sem direção preferencial, como mostra a Figura 14. A radialidade esperada da solução advém, além do arranjo dos poços, da isotropia e homogeneidade do reservatório estudado.

Para a solução numérica, foram utilizadas malhas cartesianas de 20x20, 40x40 subdivisões, e razões de mobilidade de 10 e 100.

O domínio utilizado foi tamanho unitário, isto é,  $[0,1] \times [0,1]$ . Foi imposta uma vazão unitária no poço injetor, e a pressão imposta no poço produtor foi nula. A relação constitutiva foi do tipo *piston-like* (SOUZA, 2015), que traz maiores distorções nos resultados, tornando mais explícitas as instabilidades numéricas:

$$k_{rw} = \frac{S_w^2}{M(1 - S_w^2) + S_w^2}; k_{ro} = 1 - k_{rw} \quad (108)$$

Figura 15 – Comportamento esperado ao iniciar a injeção de água no domínio



Fonte: Elaborada pelo autor

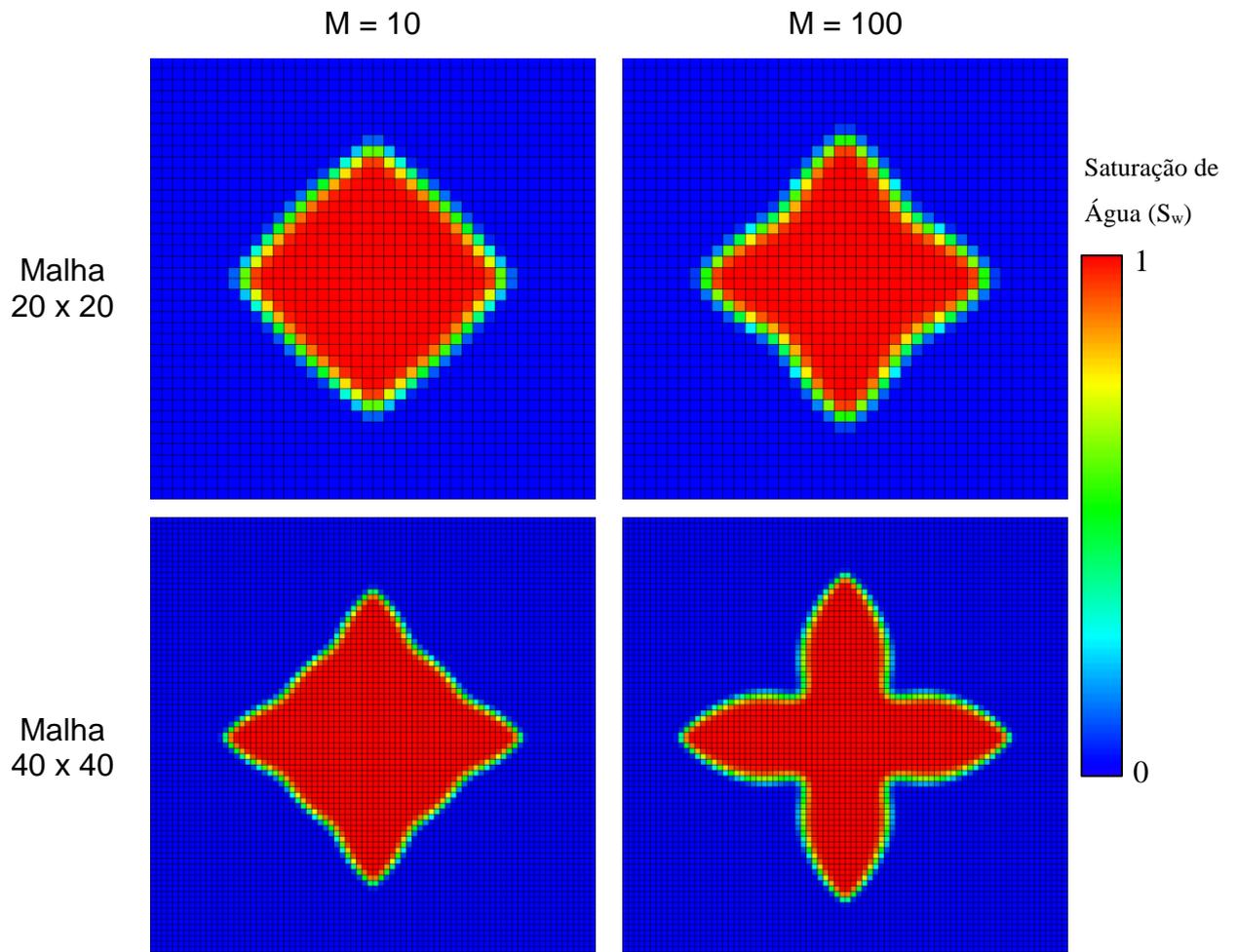
A solução esperada é isotrópica e o fato do meio ser isotrópico e homogêneo possibilita este comportamento. Caso alguma anisotropia se faça presente, fica claro que seu surgimento é devido à formulação numérica utilizada.

A condição de contorno é, pela própria natureza do problema, simetria em todas as arestas do domínio.

Para simplificação, a representação do campo de saturação de água se dará sem escala de cores, ou seja, azul sendo óleo ( $S_w = 0$ ) e vermelho sendo água ( $S_w = 1$ ).

Ao utilizar o método Convencional os resultados são apresentados na Figura 16.

Figura 16 – Frente de Saturação do Método Convencional variando razão de mobilidade e malha



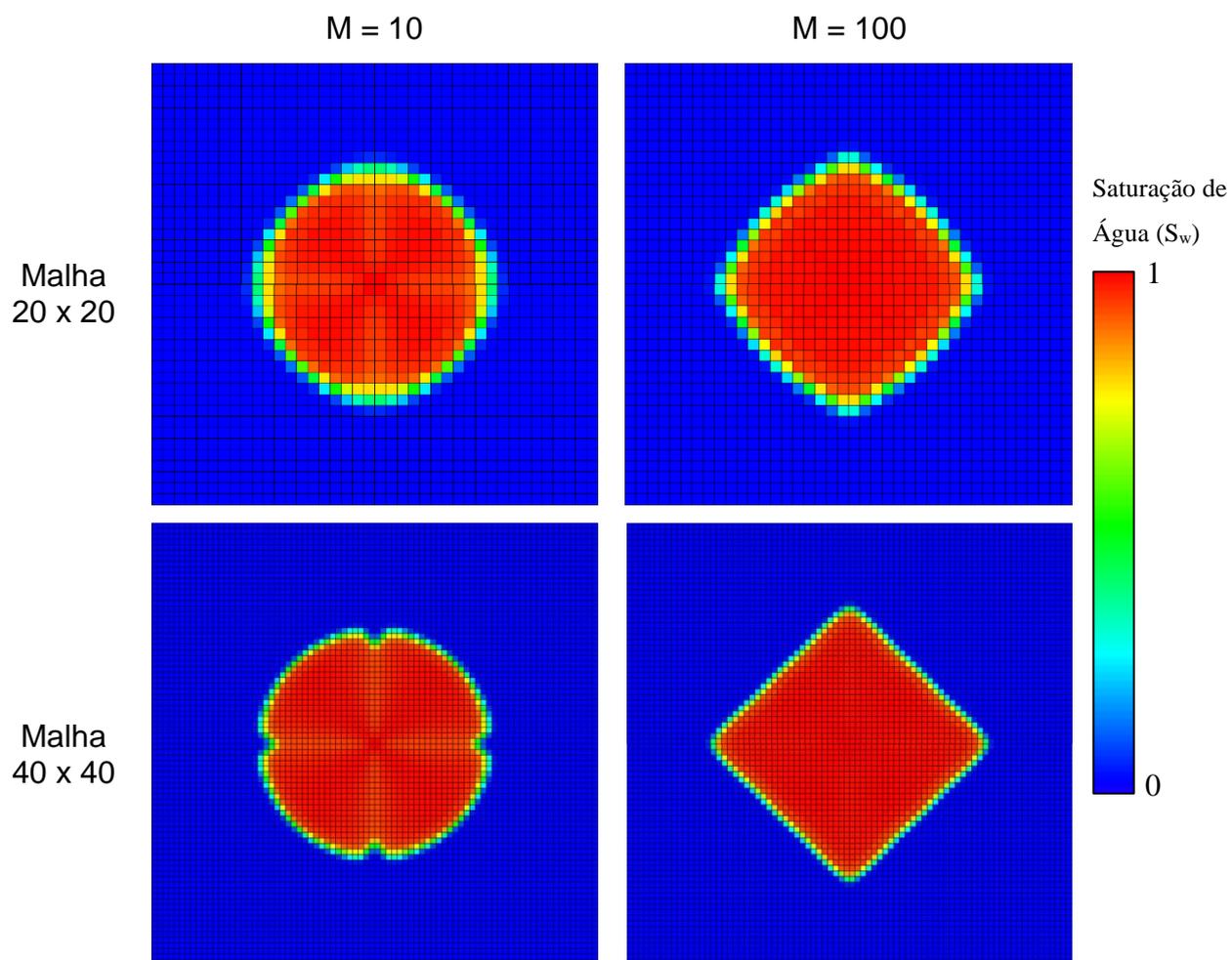
Fonte: Elaborada pelo autor

É importante ressaltar que os resultados estão espelhados, devido à simetria do problema. Isto é, a representação acima, de malhas 40x40 e 80x80, foram montadas através da solução de apenas 1/4 do domínio com malhas 20x20 e 40x40 respectivamente, reduzindo o esforço computacional necessário. Este procedimento foi adotado para todos casos deste exemplo.

O desempenho observado na Figura 16 ilustra a grande distorção no campo de saturação ao utilizar o método convencional, que deveria ser radial. Ilustra uma bipartição da frente em duas direções (que também são as direções da malha), reduzindo a confiabilidade dos resultados.

Ao utilizar o Método Quasi-Isotrópico os resultados são apresentados na Figura 17.

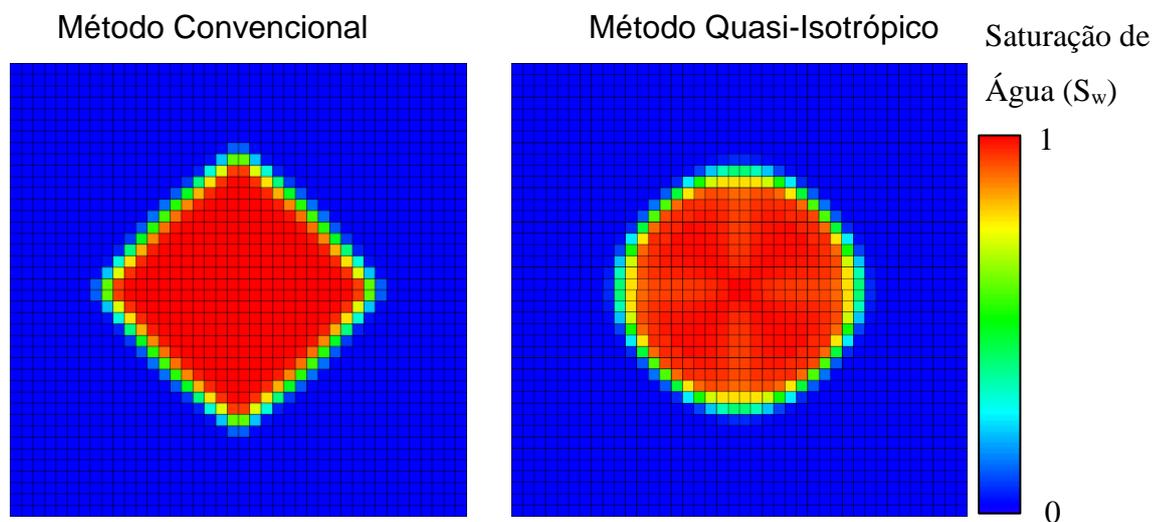
Figura 17 – Frente de Saturação do Método Quasi-Isotrópico variando razão de mobilidade e malha



Fonte: Elaborada pelo autor

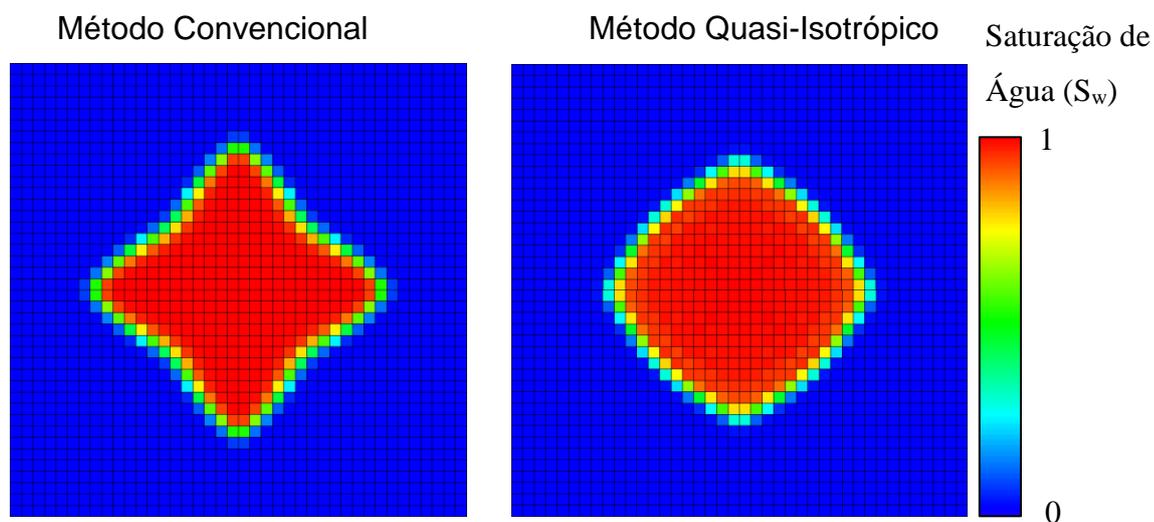
Ao comparar os resultados obtidos, para os mesmos valores de razão de mobilidade e mesma malha, obtêm-se os resultados mostrados nas figuras a seguir.

Figura 18 – Comparativo entre os métodos Convencional e Quasi-Isotrópico para malha 20x20 e Razão de Mobilidade  $M = 10$



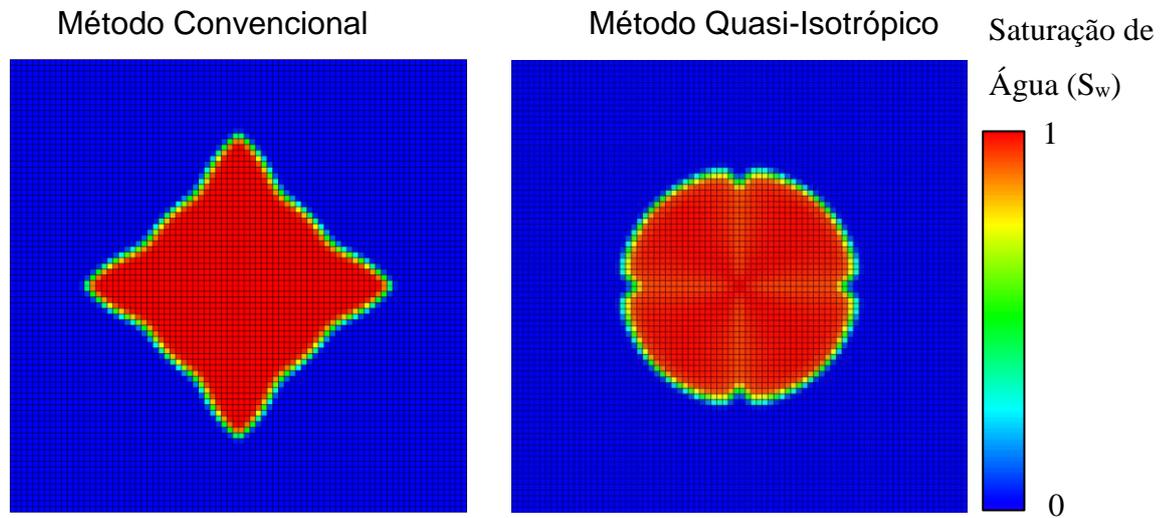
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 19 – Comparativo entre os métodos Convencional e Quasi-Isotrópico para malha 20x20 e Razão de Mobilidade  $M = 100$



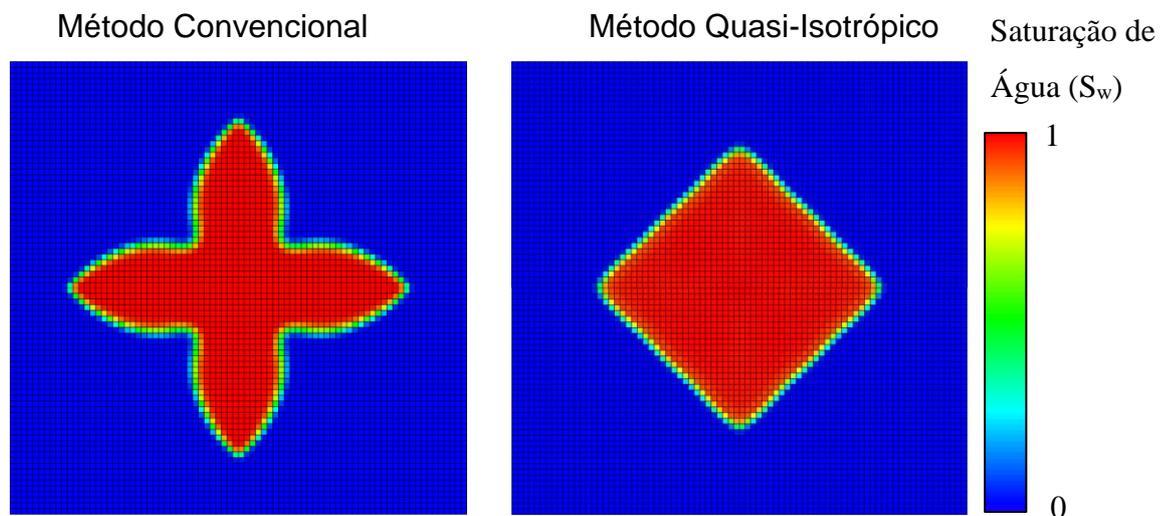
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 20 – Comparativo entre os métodos Convencional e Quasi-Isotrópico para malha 40x40 e Razão de Mobilidade  $M = 10$



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 21 – Comparativo entre os métodos Convencional e Quasi-Isotrópico para malha 40x40 e Razão de Mobilidade  $M = 100$



Fonte: Elaborada pelo autor

Observa-se que em todos os casos, a utilização do Método Quasi-Isotrópico trouxe melhora no resultado.

Diferentemente dos resultados da seção anterior, em que foram comparados resultados de um problema de Advecção-Difusão Linear, as melhorias no resultado ocorrem de fato nos valores absolutos e são notáveis a olho nu. Nos casos de Advecção-Difusão Linear, observaram-se os gráficos de erro de truncamento. Eles se

tornaram isotrópicos, no entanto, em termos de erro absoluto, quase nenhuma mudança ocorreu (com variação de 0,1% no erro máximo).

Já no caso de Quarto de 5 Poços, a melhora trazida pelo Método Quasi-Isotrópico é perceptível no próprio resultado (e não só no seu erro de truncamento). Observa-se um arredondamento da frente de saturação, isto é, uma aproximação do comportamento real do problema, e a diferença no erro chega a ser de 100% absoluto, isto é, em um volume que na verdade deveria ser 100% de óleo, o método convencional está mostrando 100% de água e vice-versa.

É importante ressaltar também que, como mencionado durante a demonstração da construção do método, a ponderação utilizada no Método Quasi-Isotrópico toma como referência os pesos construídos para casos lineares. Por isso, os resultados para o Quarto de 5 Poços, apesar de apresentarem melhora, não se tornaram perfeitamente isotrópicos, isto é, rotacionalmente invariantes, mas apenas reduziram a anisotropia advinda do Efeito de Orientação de Malha.

Os ganhos para aplicações reais do Método Quasi-Isotrópico são de grande potencial, pois sua utilização pode implicar em maior precisão no escoamento de água no reservatório durante a recuperação secundária. Desta forma, os cálculos dos parâmetros referentes à produção no reservatório se tornarão mais precisos: o corte de água, curva de produção dos poços, estimativa da vida do reservatório etc.

O exemplo a seguir ilustra bem este ganho em termos de curva de produção e corte de água.

#### **4.3. Injeção com 2 poços produtores com relação constitutiva do tipo Brooks-Corey**

O problema analisado a seguir, obtido de Kozdon et al. (2011), consiste em um meio isotrópico, com dimensões  $[-0,5;0,5]^2$ , inicialmente saturado com óleo ( $S_w = 0$ ). O reservatório é composto por duas regiões: uma interna, de permeabilidade unitária e outra, externa, de permeabilidade  $10^{-6}$ . A permeabilidade da região externa é

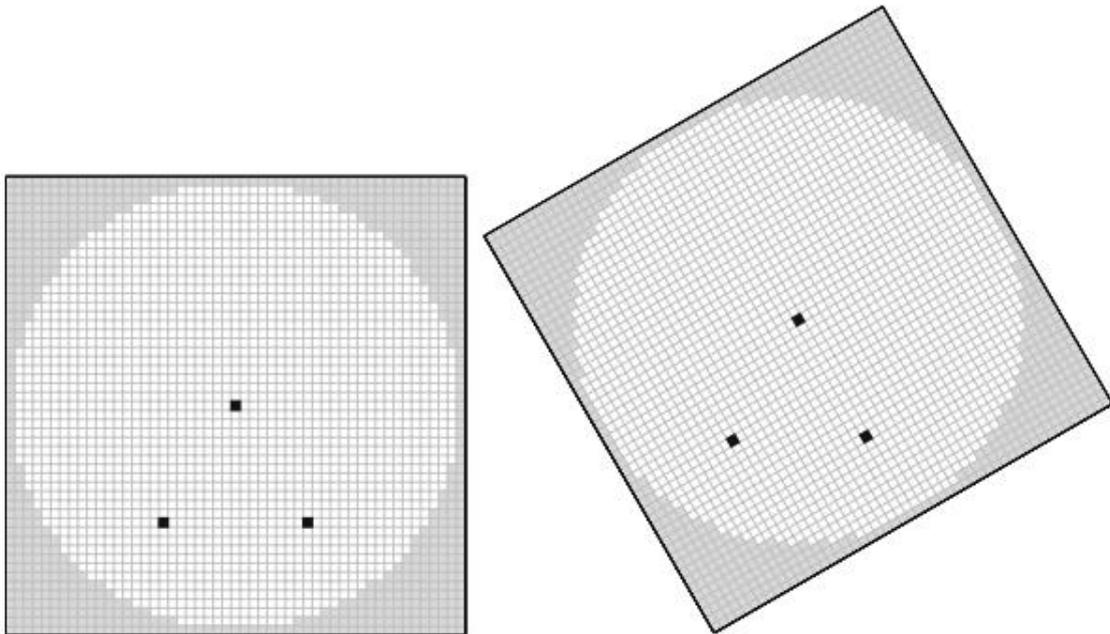
escolhida de forma a se comportar como uma barreira, restringindo o escoamento à região circular interna, de raio 0,5.

Um poço injetor é posicionado no centro do domínio, prescrevendo-se vazão unitária, e são posicionados dois poços produtores (poço 1 à esquerda e poço 2 à direita), simetricamente. É imposta pressão nula, e suas coordenadas são definidas como:

$$(x_{1,2}, y_{1,2}) = \{\mp 0,3 \cos(\pi/6); -0,3 \sin(\pi/6)\} \quad (109)$$

O estudo dos diversos cenários para este problema se dá com base na rotação do domínio fixando a posição dos poços, conforme mostrado na figura a seguir.

Figura 22 – Domínio computacional utilizado demonstrando-se as malhas para duas das quatro rotações analisadas (0° e 30°)



Fonte: Kozdon et al. (2011)

A malha utilizada no problema tem 51x51 subdivisões e é cartesiana e quadrangular. No presente trabalho são simuladas 4 configurações diferentes de rotação: 0°, 15°, 22,5° e 30°.

A rotação no domínio é realizada pois, devido à simetria dos poços e do problema em si, é esperado que as curvas de breakthrough sejam iguais. Desta forma, qualquer diferença nas duas curvas (dos dois poços produtores) advém de Efeito de

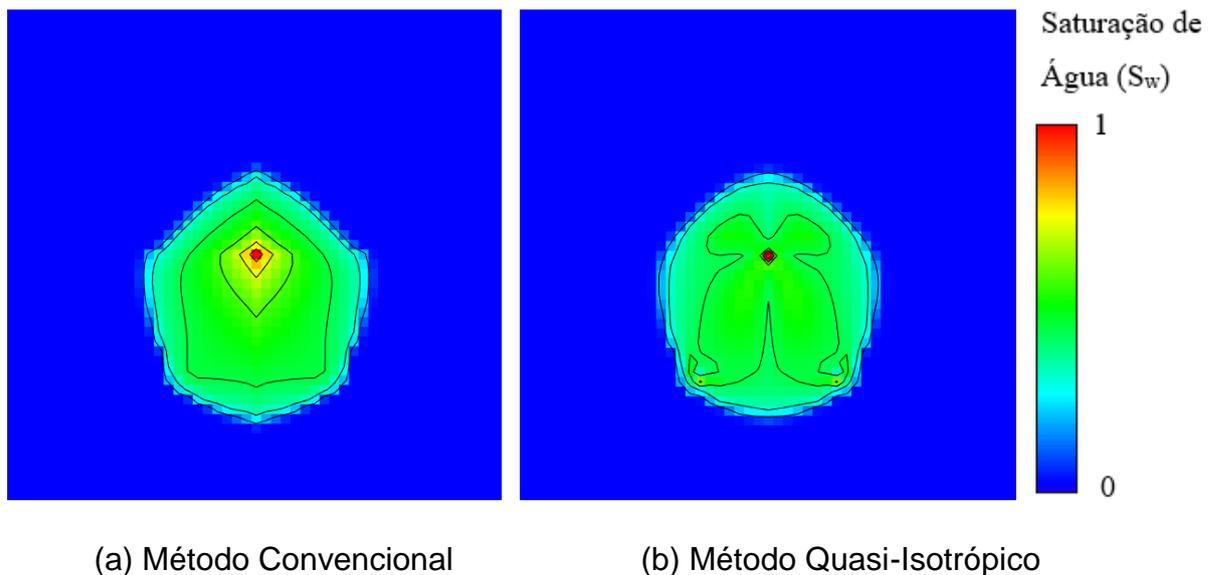
Orientação de Malha, isto é, de retardos ou avanços na frente de saturação de água devido ao seu ângulo com as direções preferenciais da malha.

A relação constitutiva de brooks-corey é utilizada, com os parâmetros para água e óleo respectivamente  $n_w = 4$  e  $n_o = 2$ . A razão de mobilidade adotada é  $M = 100$  e o tempo adimensional para construção dos contornos é  $0,1$  Volume Poroso Injetado (VPI). A porosidade é unitária.

Na rotação padrão, os contornos resultantes para os dois métodos são apresentados nas figuras a seguir.

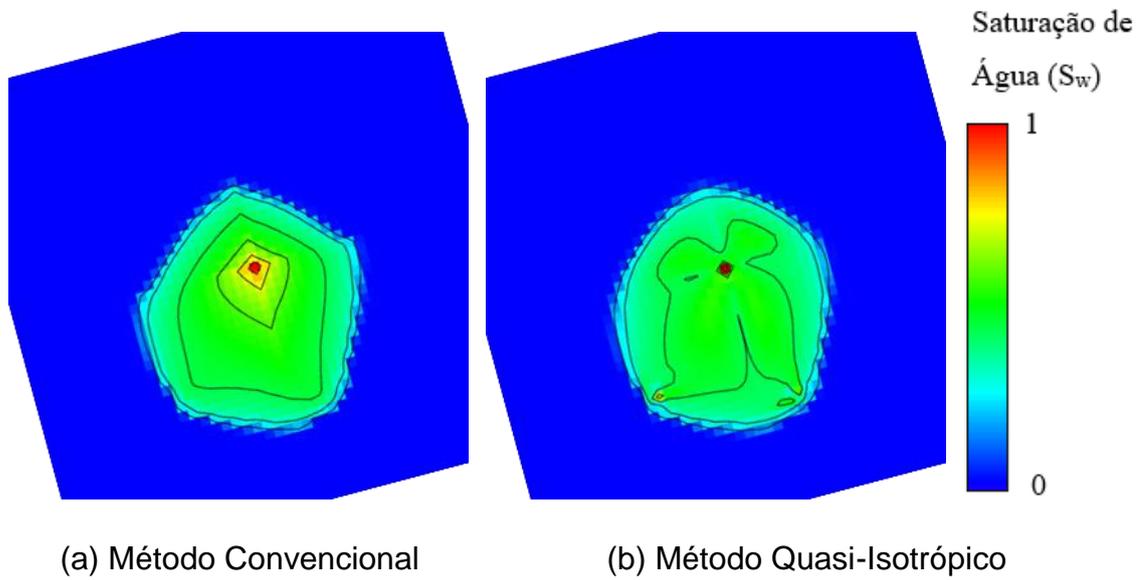
Nas Figuras 23 a 26 são mostrados os contornos de saturação de água para as 4 configurações de rotação estudadas.

Figura 23 – Contornos de Saturação de Água para a Rotação de  $0^\circ$



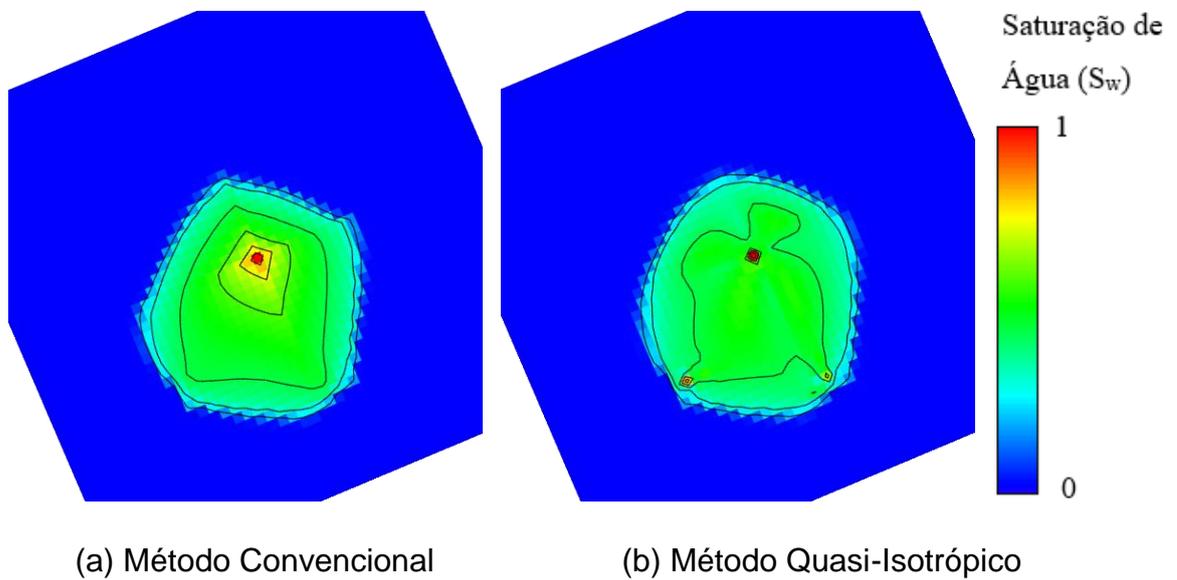
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 24 – Contornos de Saturação de Água para a Rotação de 15°



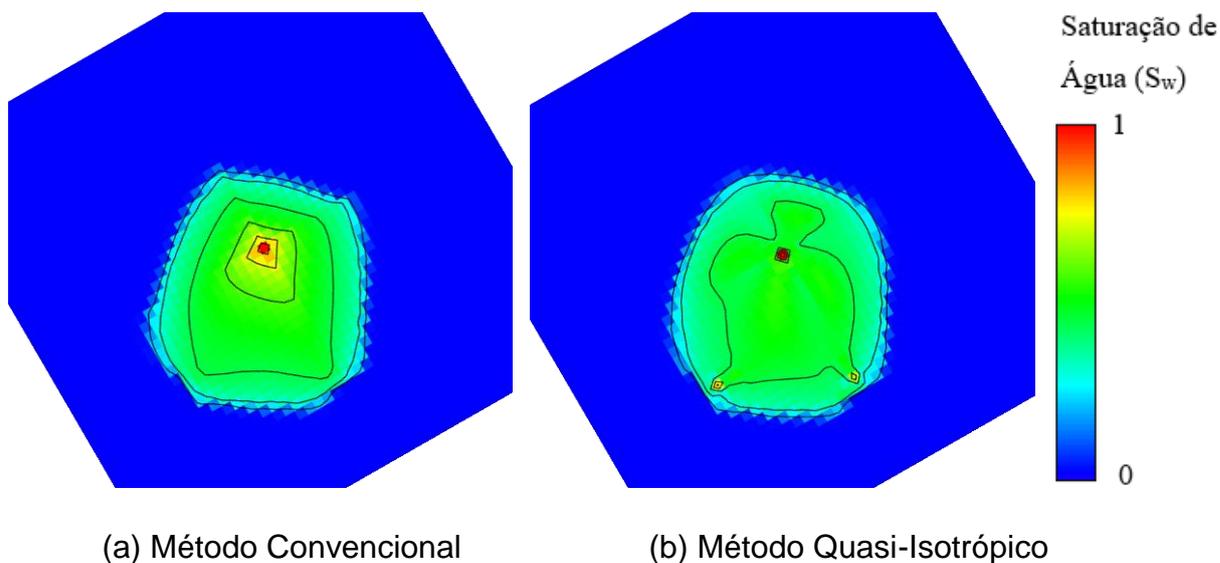
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 25 – Contornos de Saturação de Água para a Rotação de 22,5°



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 26 – Contornos de Saturação de Água para a Rotação de 30°

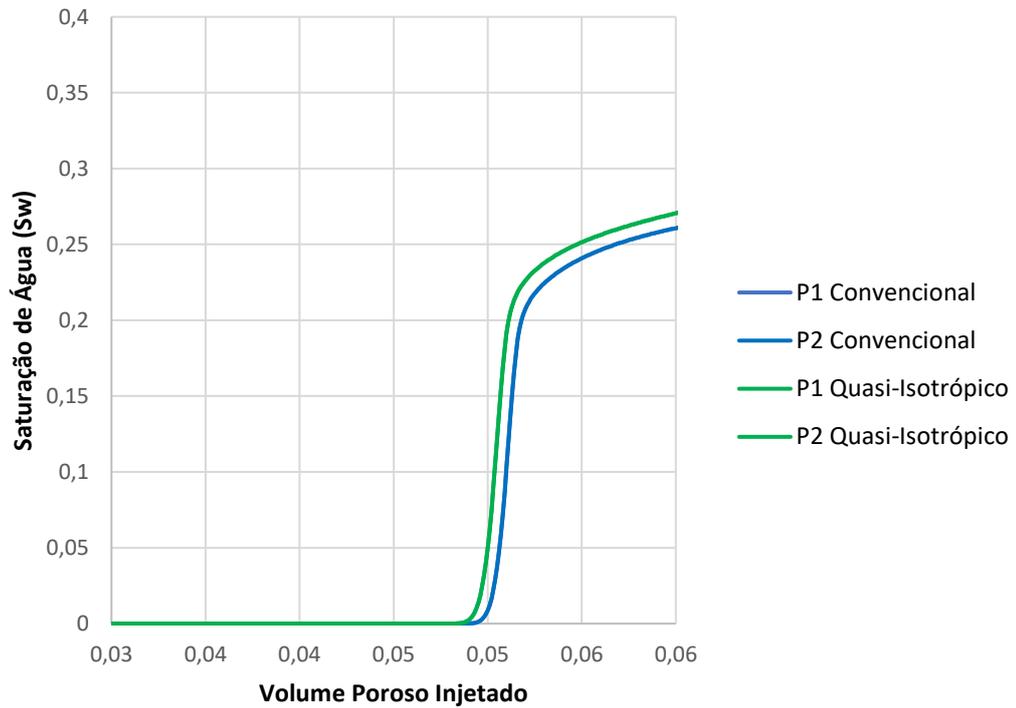


Fonte: Elaborada pelo autor

Os ganhos em termos de redução de anisotropia nos resultados podem ser observados principalmente pelo arredondamento da frente de saturação de água em todos os casos. Deve-se observar também uma certa instabilidade nos contornos intermediários para o Método Quasi-Isotrópico, principalmente nas direções da malha. Isto se deve principalmente ao fato de a ponderação utilizada como base não levar em consideração todas as nuances características de um problema de petróleo, por ter sido construída por Shukla e Giri para problemas de advecção-difusão lineares. Desta forma, a anisotropia não é totalmente eliminada, fato que pode ser observado pela dificuldade, ainda que menor, da frente de saturação se propagar nas direções paralelas à malha.

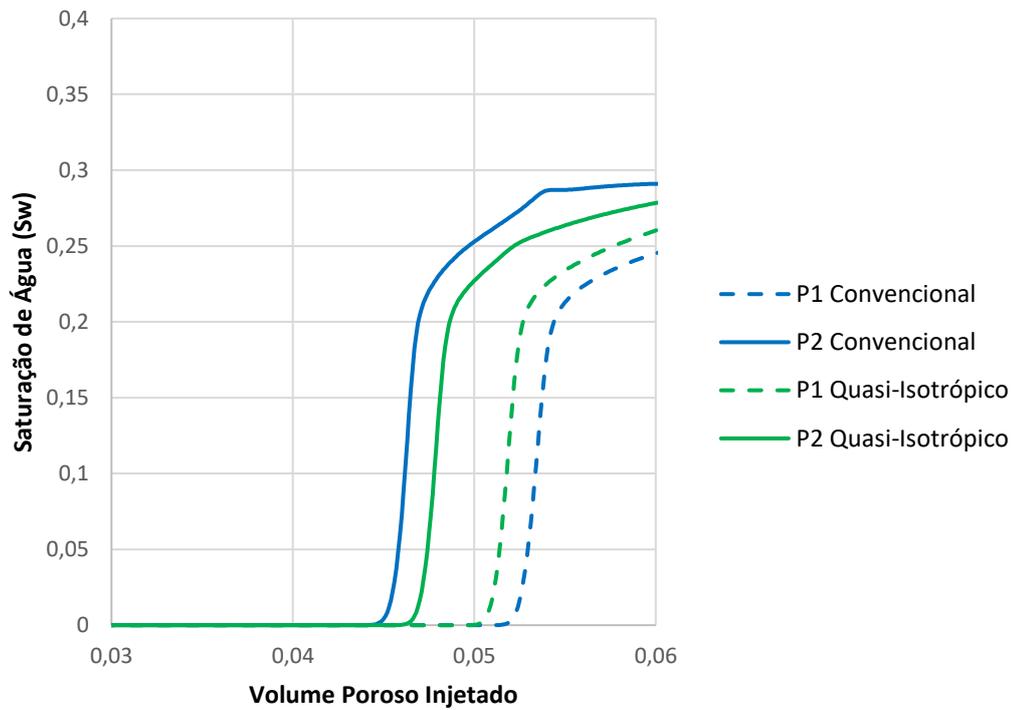
Outro resultado relevante para o comparativo do desempenho dos dois métodos é a análise da curva de *breakthrough* (chegada de água no poço produtor), isto é, a saturação de água nos poços produtores no decorrer da injeção. O comparativo das curvas de *breakthrough* com 0° (com malha simétrica) serve de referência para os comparativos com a malha rotacionada.

Figura 27 – Comparativo da Curva de Corte de Água com 0°



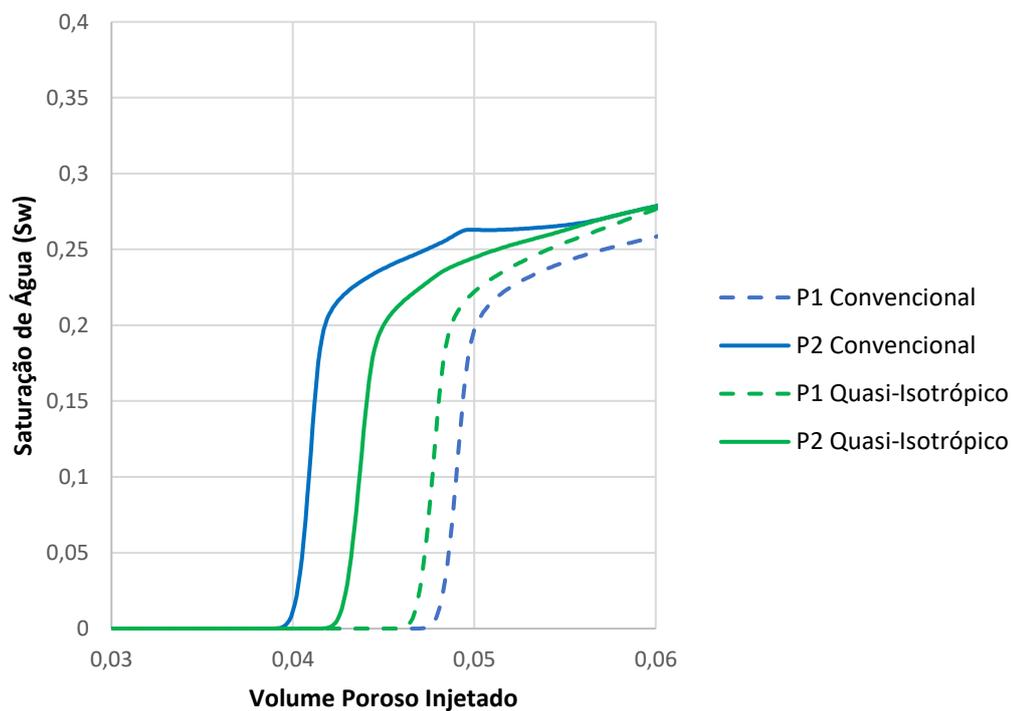
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 28 – Comparativo da Curva de Corte de Água com 15°



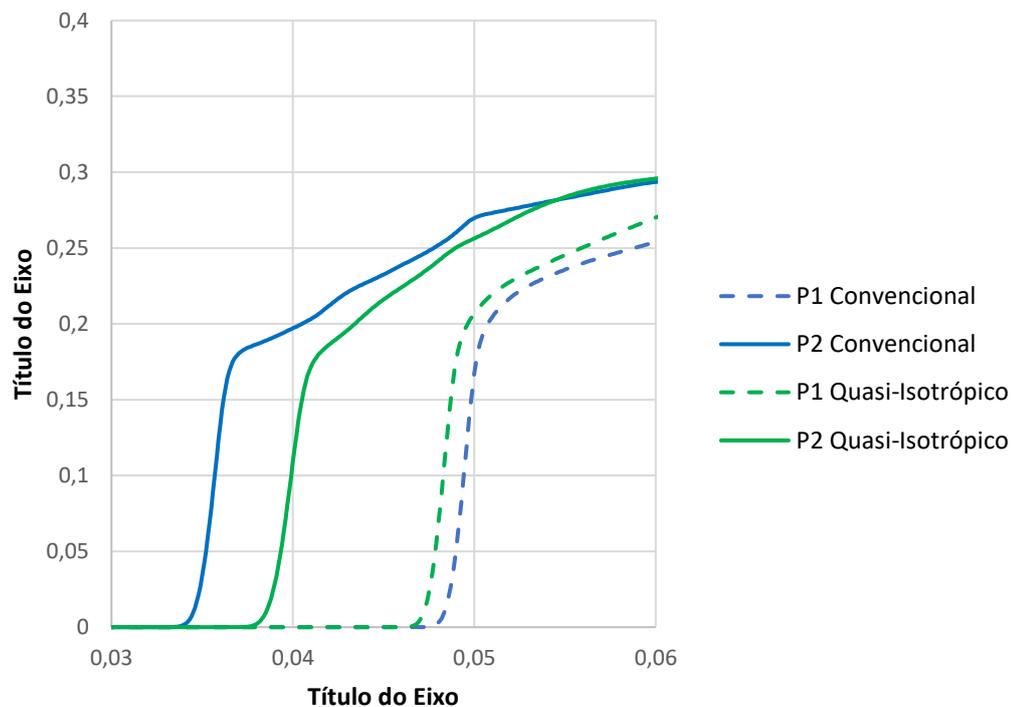
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 29 – Comparativo da Curva de Corte de Água com 22,5°



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 30 – Comparativo da Curva de Corte de Água com 30°



Fonte: Elaborada pelo autor

Percebe-se que as curvas mais internas (isto é, utilizando método quasi-isotrópico) apresentam um espaçamento menor, quando comparadas às mais externas (que utilizam o método convencional). Este resultado demonstra a influência positiva do método estudado na redução do Efeito de Orientação de Malha, pois, quanto mais próximas as curvas estão, menor é a diferença no breakthrough dos poços produtores. Idealmente, como pode ser visto na Figura 27, em que há simetria do escoamento, as curvas devem ser iguais, e quanto maior o espaçamento entre elas, maior a distorção advinda a rotação da malha.

## 5. Conclusões

No presente trabalho, foi estudada uma formulação numérica baseada no Método de Volumes Finitos Isotrópico, de Shukla e Giri (2014), adaptando-a para problemas de petróleo, mais especificamente escoamento bifásico em reservatórios homogêneos e isotrópicos. O método proposto neste trabalho, chamado Método Quasi-Isotrópico, realiza a reconstrução dos valores de velocidade e mobilidade total na face com base na ponderação linear utilizada por Shukla e Giri, na estratégia segregada de solução das equações de transporte do escoamento.

Para o problema de advecção-difusão linear avaliado neste trabalho, o pulso gaussiano girando em torno de seu próprio eixo, o erro tornou-se isotrópico, no entanto aumentou levemente seu valor absoluto, continuando em uma ordem desprezível. Isto mostra o valor real do método: a proposição inicial, de tornar o erro rotacionalmente invariante, foi cumprida; no entanto, resultados em termos absolutos ainda continuam na mesma ordem de grandeza. Foi constatado que este ganho é mais facilmente observado para problemas de petróleo. Este problema teve como objetivo validar a aplicação do método e reproduzir os resultados já obtido por Shukla e Giri.

Desta forma, quando aplicado nos outros dois exemplos apresentados nos resultados, foco deste trabalho, observaram-se ganhos reais, não só na isotropia do erro, mas também em seu valor absoluto.

O segundo exemplo, um problema clássico na área de petróleo, o 1/4 de 5 poços, demonstrou claramente os ganhos que o Método Quasi-Isotrópico trouxe. A frente de saturação mais arredondada em todos os casos não deixou dúvida da efetividade do método em reduzir o Efeito de Orientação de Malha. Apesar do erro não se tornar de fato isotrópico, a sua anisotropia reduziu de forma notável. Uma observação a ser realizada em relação comportamento dos contornos com este novo método é que, apesar de melhorar a qualidade da resposta para o escoamento não-paralelo à malha, há um pequeno retardo para o escoamento que coincide com as direções preferenciais da malha. Esta anisotropia pode ser reduzida aprofundando mais o conhecimento acerca do erro de truncamento e da forma como os pesos escolhidos na reconstrução das variáveis na face o afeta.

O terceiro exemplo, problema de 3 poços proposto por Kozdon et al. (2011), em que são posicionados 1 injetor centralizado, 2 produtores simétricos e a malha é rotacionada, também demonstrou o ganho de duas formas. Os gráficos de contornos de saturação de água, após a aplicação do Método Quasi-Isotrópico, se tornaram mais independentes da rotação imposta à malha. Já as curvas de saturação de água nos poços produtores se tornaram mais similares, efeito positivo que foi observado em todos os 3 ângulos testados. Foi observada uma pequena instabilidade, que pode ser avaliada e tratada com maior profundidade nos desenvolvimentos futuros advindos deste trabalho.

O potencial do método proposto neste trabalho, demonstrado através dos bons resultados obtidos, deixa latente a necessidade de desenvolvê-lo e aprimorá-lo ainda mais. Possíveis trabalhos futuros incluem:

- Análise mais aprofundada do erro de truncamento e sua relação com a ponderação utilizada, de forma a reduzir a anisotropia ainda presente levando em consideração características físicas do problema e do material, bem como levar em considerações características da malha, para permitir o uso do método de maneira mais efetiva em malhas retangulares, heterogêneas ou até mesmo não-estruturadas
- Construir uma ponderação isotrópica para equações não-lineares, para permitir o uso deste método na equação de transporte;
- Modificar a formulação de forma a aplicá-la localmente quando houver benefício e utilizar outro método, como o convencional, quando não houver ganho.

## REFERÊNCIAS

AAVATSMARK, I. Multipoint flux approximation methods for quadrilateral grids. In: 9th INTERNATIONAL FORUM ON RESERVOIR SIMULATION, 2007.

BAJOR, O.; CORMACK, D. E. A new method for characterizing the grid orientation phenomenon. Society of Petroleum Engineers Journal, 1989.

BOURGEAT, A.; KOEBBE, J. Minimization of grid orientation effects in simulation of oil recovery processes through use of an unsplit higher order scheme. Numerical Methods for Partial Differential Equations, v. 12, n. 2, p. 161 – 189, 1996.

BRAND, C. W.; HEINEMANN, J. E.; AZIZ, K. The grid orientation effect in reservoir simulation. In: 11th SPE SYMPOSIUM ON RESERVOIR SIMULATION, 1991.

CHEN, W. H. et al. Minimization of grid orientation effects through use of higher order finite difference methods. SPE Advanced Technology Series, v. 1, n. 2, p. 43 – 52, 1991.

CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006. ISBN 0-89871 1-606-3.

CHRISTIE, M. A.; BOND, D. J. Multidimensional flux-corrected transport for reservoir simulation. In: MIDDLE EAST OIL TECHNICAL CONFERENCE AND EXHIBITION, 1985.

COREY, A. T. The interrelation between gas and oil relative permeabilities. Prod. Mon., v. 19, p. 38 – 41, 1954.

CRUMPTON, P. I.; SHAW, G. J.; WARE, A. F. Discretisation and multigrid solution of elliptic equations with mixed derivative terms and strongly discontinuous coefficients. Journal of Computational Physics, v. 116, n. 2, p. 343 – 358, 1995.

DARCY, H. Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon. 1856. Victor Dalmond, Paris.

EDWARDS, M. G. Multi-dimensional wave-oriented upwind schemes with reduced cross-wind diffusion for flow in porous media. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 67, n. 1, p. 33 – 57, 2011.

EYMARD, R.; GUICHARD, C.; MASSON, R. Grid orientation effect and multipoint flux approximation. In: *FINITE VOLUMES FOR COMPLEX APPLICATIONS VI PROBLEMS & PERSPECTIVES*, 2011.

EYMARD, R.; GUICHARD, C.; MASSON, R. Grid orientation effect in coupled finite volume schemes. *IMA Journal of Numerical Analysis*, v. 33, n. 2, p. 582 – 608, 2012.

FANCHI, J. R. *Principles of Applied Reservoir Simulation*. Houston: Gulf, 2001. ISBN 0-88415-372-X.

HELMIG, R. *Multiphase Flow and Transport Process in the Subsurface*. Berlin: Springer, 1997. ISBN 3-540-62703-0.

HERBIN, R.; HUBERT, F. Benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids. In: *FINITE VOLUMES FOR COMPLEX APPLICATIONS V*, 2008.

HURTADO, F. S. V.; MALISKA, C. R.; SILVA, A. F. C. On the factors influencing the grid orientation effect in reservoir simulation. In: *19th INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING*, 2007.

ISLAM, M. R. et al. *Advanced Petroleum Reservoir Simulation*. Canada: John Wiley & Sons e Scrivener, 2010. ISBN 0470625813.

KEILGAVLEN, E.; KOZDON, J. E.; MALISSON, B. T. Multidimensional upstream weighting for multiphase transport on general grids. *Computational Geosciences*, v. 16, n. 4, p. 1021 – 1042, 2012.

KOZDON, J.; GERRITSEN, M.; CHRISTIE, M. Grid orientation revisited: Near-well, early-time effects and solution coupling methods. *Transport in Porous Media*, v. 73, n. 3, p. 255 – 277, 2008.

KOZDON, J.; MALISSON, B.; GERRITSEN, M. Robust multi-d transport schemes with reduced grid orientation effects. *Transport in Porous Media*, v. 78, n. 1, p. 47 – 75, 2009.

KOZDON, J. E.; MALLISON, B. T.; GERRITSEN, M. G. Multidimensional upstream weighting for multiphase transport in porous media. *Computational Geosciences*, v. 15, n. 3, p. 399 – 419, 2011.

KUMAR, A. Isotropic finite-differences. *Journal of Computational Physics*, v. 201, n. 1, p. 109 – 118, 2004.

LAMINE, S.; EDWARDS, M. Multidimensional upwind convection schemes for flow in porous media on structured and unstructured quadrilateral grid. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 234, n. 7, p. 2106 – 2117, 2010.

LAMINE, S.; EDWARDS, M. Higher order cell-based multidimensional upwind schemes for flow in porous media on unstructured grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 259, n. 1, p. 103 – 122, 2013.

LAMINE, S.; EDWARDS, M. Multidimensional upwind schemes and higher resolution methods for three-component two-phase systems including gravity driven flow in porous media on unstructured grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 292, n. 1, p. 171 – 194, 2015.

LEVEQUE, R. J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. ISBN 0-511-04219-1.

LEVY, D. W.; POWELL, K. G.; LEER, B. van. An implementation of a grid-independent upwind scheme for the euler equations. In: 9th AIAA COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS CONFERENCE, 1989.

LIPNIKOV, K. et al. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes. *Journal of Computational Physics*, v. 227, n. 1, p. 492 – 512, 2007.

MALISKA, C. R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Flúidos Computacional*. 2. ed.: LTC, 2004. ISBN 9788521633358.

MALISKA, C. R.; CZESNAT, A. O. High resolution schemes in curvilinear grids for reducing the grid orientation effects. In: XIII CONGRESO SOBRE MÉTODOS NUMÉRICOS Y SUS APLICACIONES, 2003.

OLLIVIER-GOOCH, C.; NEJAT, A.; MICHALAK, K. On obtaining high-order finite-volume solutions to the euler equations on unstructured meshes. In: 18th AIAA COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS CONFERENCE, 2007.

OLLIVIER-GOOCH, C. F. Quasi-eno schemes for unstructured meshes based on unlimited data-dependent least-squares reconstruction. *Journal of Computational Physics*, v. 133, n. 1, p. 6 – 17, 1997.

OLLIVIER-GOOCH, C. F.; ALTENA, M. van. A high-order-accurate unstructured mesh finite-volume scheme for the advection-diffusion equation. *Journal of Computational Physics*, v. 181, n. 2, p. 729 – 752, 2002.

PATANKAR, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. 1. ed.: CRC Press, 1980. ISBN 0891165223.

RAITHBY, G. D. Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 9, n. 2, p. 153 – 164, 1976.

ROE, P. L.; SIDILKOVER, D. Optimum positive linear schemes for advection in two and three dimensions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 29, n. 6, p. 1542 – 1568, 1992.

SCHNEIDER, G. E.; RAW, M. J. A skewed, positive influence coefficient upwinding procedure for control-volume-based finite-element convection-diffusion computation. *Numerical Heat Transfer: An International Journal of Computation and Methodology*, v. 9, n. 1, p. 1 – 26, 1986.

SHELDON, J. W.; CARDWELL, W. T. One-dimensional, incompressible, non-capillary, two-phase fluid flow in a porous medium. *SPE AIME*, v. 216, p. 290 – 296, 1959.

SHUBIN, G. R.; BELL, J. B. An analysis of the grid orientation effect in numerical simulation of miscible displacement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 47, n. 1 - 2, p. 47 – 71, 1984.

SHUKLA, R. K.; GIRI, P. Isotropic finite volume discretization. *Journal of Computational Physics*, v. 276, n. 1, p. 252 – 290, 2014.

SOUZA, M. R. A. et al. A higher-resolution flow-oriented scheme with an adaptive correction strategy for distorted meshes coupled with a robust mpfa-d method for the numerical simulation of two-phase flow in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs. *SPE Journal*, Preprint, 2018. Ainda não publicado.

SOUZA, M. R. de A. Simulação Numérica de Escoamento Bifásico em Reservatórios de Petróleo Heterogêneos e Anisotrópicos Utilizando um Método de Volumes Finitos “Verdadeiramente” Multidimensional com Aproximação de Alta Ordem. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2015.

STONE, H. L.; GARDER, A. O. Analysis of gas-cap or dissolved-gas drive reservoirs. *SPE AIME*, v. 1, n. 2, 1961.

TODD, M. R.; O’DELL, P. M.; HIRASAKI, G. J. Methods for increased accuracy in numerical reservoir simulators. *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 12, n. 6, p. 515 – 530, 1972.

TRAN, L. D.; MASSON, C.; SMAÏLI, A. A stable second-order mass-weighted upwind scheme for unstructured meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 51, n. 7, p. 749 – 771, 2005.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. 2. ed. Harlow: Pearson, 2007. ISBN 978-0-13-127498-3.

YANOSIK, J. L.; MCCRAKEN, T. A. A nine-point, finite-difference reservoir simulator for realistic prediction of adverse mobility ratio displacements. *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 19, n. 4, p. 253 – 262, 1979.

## APÊNDICE A – Isotropia de Operadores Diferenciais

### A.1 Introdução

Serão investigadas as propriedades de invariância rotacional, ou isotropia, de alguns operadores diferenciais. A isotropia diz respeito à seguinte característica:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{R}\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}') \quad (110)$$

Em que  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação bidimensional:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (111)$$

E  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  são os vetores bidimensionais de posição

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix} \quad (112)$$

É importante perceber que:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \cos \theta; \frac{\partial x'}{\partial y} = -\sin \theta; \frac{\partial y'}{\partial x} = \sin \theta; \frac{\partial y'}{\partial y} = \cos \theta \quad (113)$$

Já a função  $f$  a ser testada é do tipo:

$$f = f(x, y) = f(x', y') = f(x'(x, y), y'(x, y)) \quad (114)$$

### A.2. Diferencial Simples

Os diferenciais em  $x$  e  $y$ , pela Regra da Cadeia, são:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y'} \sin \theta \quad (115)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x'} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y'} \cos \theta \quad (116)$$

Portanto o diferencial simples não é isotrópico.

### A.3. Diferencial Duplo

O diferencial duplo para x é visto como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \quad (117)$$

Substituindo pelo diferencial simples

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y'} \sin \theta \right) \quad (118)$$

Distribuindo e substituindo novamente os diferenciais

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y'} \sin \theta \right) \cos \theta + \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y'} \sin \theta \right) \sin \theta \quad (119)$$

Portanto

$$\partial_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial y'} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \sin^2 \theta \quad (120)$$

Seguindo o mesmo procedimento

$$\partial_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial y'} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \cos^2 \theta \quad (121)$$

Logo, nenhum dos diferenciais duplos é isotrópico.

### A.4. Diferencial Triplo

Para x

$$\partial_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (122)$$

Substituindo o diferencial duplo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial y'} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \sin^2 \theta \right) \quad (123)$$

Distribuindo

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \frac{\partial f}{\partial x} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} \frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \frac{\partial f}{\partial x} \sin^2 \theta \quad (124)$$

Substituindo o diferencial simples e mudando a notação para simplificação da expressão

$$\begin{aligned} \partial_{x'x'}(\partial_{x'} \cos \theta + \partial_{y'} \sin \theta) \cos^2 \theta + 2\partial_{x'y'}(\partial_{x'} \cos \theta + \partial_{y'} \sin \theta) \sin \theta \cos \theta \\ + \partial_{x'y'y'}(\partial_{x'} \cos \theta + \partial_{y'} \sin \theta) \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (125)$$

Distribuindo

$$\begin{aligned} (\partial_{x'x'x'} \cos \theta + \partial_{y'x'x'} \sin \theta) \cos^2 \theta + 2(\partial_{x'x'y'} \cos \theta + \partial_{x'y'y'} \sin \theta) \sin \theta \cos \theta \\ + (\partial_{x'y'y'} \cos \theta + \partial_{y'y'y'} \sin \theta) \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (126)$$

Portanto

$$\partial_{xxx} = \partial_{x'x'x'} \cos^3 \theta + 3\partial_{y'x'x'} \sin \theta \cos^2 \theta + 3\partial_{x'x'y'} \sin^2 \theta \cos \theta + \partial_{y'y'y'} \sin^3 \theta \quad (127)$$

Analogamente

$$\partial_{yyy} = \partial_{y'y'y'} \cos^3 \theta - 3\partial_{y'y'x'} \sin \theta \cos^2 \theta + 3\partial_{x'x'y'} \sin^2 \theta \cos \theta - \partial_{x'x'x'} \sin^3 \theta \quad (128)$$

Portanto os diferenciais triplos não são isotrópicos.

#### A.4. Diferencial N

Percebe-se que:

$$\partial_{xx\dots x} f = (\partial_x)^n f = (\partial_{x'} \cos \theta + \partial_{y'} \sin \theta)^n f \quad (129)$$

$$\partial_{yy\dots y} f = (\partial_y)^n f = (-\partial_{x'} \sin \theta + \partial_{y'} \cos \theta)^n f \quad (130)$$

Na forma do Binômio de Newton

$$(\partial_{x'} \cos \theta + \partial_{y'} \sin \theta)^n f = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} (\partial_{x'} \cos \theta)^{n-k} (\partial_{y'} \sin \theta)^k \quad (131)$$

$$(-\partial_{x'} \sin \theta + \partial_{y'} \cos \theta)^n f = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (-\partial_{x'} \sin \theta)^{n-k} (\partial_{y'} \cos \theta)^k \quad (132)$$

Portanto o operador isotrópico de soma de diferenciais genérico é

$$(\partial_{xx\dots x} + \partial_{yy\dots y})f = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} [(\partial_{x'} \cos \theta)^{n-k} (\partial_{y'} \sin \theta)^k + (-\partial_{x'} \sin \theta)^{n-k} (\partial_{y'} \cos \theta)^k] \quad (133)$$

Para  $k = 0$  e  $k = n$  o coeficiente deve ser 1, portanto

$$(\cos \theta)^n + (-\sin \theta)^n = 1 \quad (134)$$

$$(\cos \theta)^n + (\sin \theta)^n = 1 \quad (135)$$

O único valor que satisfaz estas duas equações é  $n = 2$ .

A última restrição, dos coeficientes diferentes de 0 e  $n$ , é serem nulos. Para  $n = 2$  e  $k = 1$ , o único coeficiente que obedece a esta restrição:

$$(\partial_{x'} \cos \theta)(\partial_{y'} \sin \theta) + (-\partial_{x'} \sin \theta)(\partial_{y'} \cos \theta) = 0 \quad (136)$$

Portanto,  $n = 2$  é a única solução. Portanto  $\partial_{xx} + \partial_{yy} = \partial_{x'x'} + \partial_{y'y'}$  é um operador isotrópico, também chamado de Laplaciano.

## A.5. Divergente

O operador Divergente é dado por

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \quad (137)$$

Substituindo

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x'} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y'} \sin \theta - \frac{\partial f}{\partial x'} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial y'} \cos \theta \quad (138)$$

Ou seja, o Divergente não é isotrópico

## A.6. Laplaciano

O operador Laplaciano é dado por

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \partial_{xx} + \partial_{yy} \quad (139)$$

Substituindo os diferenciais

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial y'} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \sin^2 \theta \\ - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial y'} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (140)$$

Agrupando, os termos com  $\partial x' \partial y'$  no denominador se cancelam:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \quad (141)$$

Substituindo a identidade trigonométrica, por fim, encontra-se:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (142)$$

Portanto, o operador Laplaciano é isotrópico.

## A.7. Laplaciano do Diferencial Simples

O Laplaciano do Diferencial é dado por

$$\nabla^2 f_x = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \frac{\partial f}{\partial x} \quad (143)$$

Logo

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y'} \sin \theta \right) \quad (144)$$

Distribuindo

$$\frac{\partial^3}{\partial x'^3} \cos \theta + \frac{\partial^3}{\partial y' \partial x'^2} \sin \theta + \frac{\partial^3}{\partial y'^2 \partial x'} \cos \theta + \frac{\partial^3}{\partial y'^3} \sin \theta \quad (145)$$

Portanto, o Laplaciano do Diferencial Simples não é isotrópico.