UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

# Reflexões sobre os polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo.

Samara da Costa Mota

João Pessoa

2023

Samara da Costa Mota

# Reflexões sobre os polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Universidade Federal da Paraíba

Orientador: Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra

João Pessoa

2023

**Catalogação na publicação**
**Seção de Catalogação e Classificação**

M917r Mota, Samara da Costa.
Reflexões sobre os polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo / Samara da Costa Mota. - João Pessoa, 2023.
38 p. : il.

Orientação: Flank David Morais Bezerra.
TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Polinômios de Tchebyshev. 2. Fórmula de Moivre. 3. Identidades trigonométricas. 4. Matemática. I. Bezerra, Flank David Morais. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 51(043.2)

Elaborado por Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB-15/113

Samara da Costa Mota

**Reflexões sobre os polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Drº Flank David Morais Bezerra - UFPB

Aprovado(a) em: 10 / 11 /2023.

**BANCA EXAMINADORA**

Flank David Morais Bezerra

Prof. Drº Flank David Morais Bezerra - UFPB
(Orientador)

Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Prof. Drº Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB
(Examinador)

Miriam da Silva Pereira

Profª Drª Miriam da Silva Pereira - UFPB
(Examinadora)

*Ao meu esposo, por seu incondicional apoio.*

# Agradecimentos

A Deus, que por sua infinita misericórdia me deu a capacidade de chegar até aqui, por ter me sustentado e não deixado desistir.

Ao meu esposo, Jefferson Mota, que sempre foi meu apoiador e incentivador, estando comigo em todos os momentos importantes da minha vida. A minha irmã, Samirys e minhas sobrinhas, Sarah, Thais e Laura, por ser meu porto seguro.

Ao professor Flank Bezerra, meu orientador, por todo o seu ensinamento, sua dedicação, sua infinita paciência e por não ter desistido de mim em nenhum momento.

A professora Miriam da Silva e ao professor Bruno Ribeiro, por terem feito parte da minha vida acadêmica, sendo professores excelentes e aceitando serem examinadores do meu trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática, que fizeram parte da minha trajetória. Em especial, aos professores Pedro Venegas, Jacqueline Rojas e Roberto Callejas Bedregal (In memoriam).

A todos os professores que fizeram parte da minha vida escolar. Em especial, a professora de matemática Maria Nunes, minha inspiração para me tornar professora de matemática, e ao professor Félix, meu maior incentivador quando lhe contei meu desejo de ser professora de matemática.

A todos os meus amigos de graduação, do trabalho e da vida, por todo apoio. Em especial: Jeferson Sales, Eliel Fonseca, Lucas Cavalcante, Cecília Santos, Rebeka França, Igor França, Joelma Gomes e Anna Karla Costa.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo, inicialmente apresentamos um recorte da biografia do Pafnuty Lvovich Tchebyshev, em seguida apresentamos os polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo usando as identidades trigonométricas e a fórmula de Moivre, apresentamos propriedades básicas sobre tais polinômios, demonstramos resultados a respeito desses polinômios e por fim algumas aplicações são apresentadas.

**Palavras-chave**: Polinômios de Tchebyshev. Recorrência. Fórmula de Moivre. Identidades trigonométricas.

# Abstract

In this article we study Tchebyshev's polynomials of the first type, beginning with a presentation from the biography of Pafnuty Lvovich Tchebyshev, then we present chebyshev's polynomials of the first type using trigonometric identities and Moivre's formula, presenting basic properties about such polynomials and demonstrating results referring to these polynomials and finally some applications are presented.



**Key-words**: Tchebyshev's polynomials. Recurrence. Moivre's formula. Trigonometric identities.

# Lista de figuras

# Sumário

# 1 Introdução

## 1.1 Apresentação da temática e justificativa

Os polinômios de Tchebyshev foram apresentados em 1853 para a Academia de São Petersburgo, segundo [Nassuiro-1]. Tais polinômios possuem esse nome em homenagem ao matemático Russo Pafnuty Lvovitch Tchebyshev (1821 - 1894), considerado o pai fundador da matemática Russa. Hoje, na literatura especializada é possível encontrar pelo menos quatro classes de polinômios intitulados de polinômios de Tchebyshev. A saber, polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo, polinômios de Tchebyshev do segundo tipo, polinômios de Tchebyshev do terceiro tipo e polinômios de Tchebyshev do quarto tipo, veja mais detalhes em [Mason-1]. No presente trabalho, estudaremos algumas das propriedades dos polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo, estes polinômios estão relacionados com a fórmula de Moivre e podem ser obtidos de forma recursiva. Neste trabalho eles serão representados por $T_n$ e veremos que podem ser obtidos de diversas formas, uma delas é atráves das identidades trigonométricas.

Sobre os polinômios de Tchebyshev, o escritor e matemático estadunidense, Philip Davis escreveu a seguinte frase "Os polinômios de Tchebyshev são densos na Análise Numérica", até arriscaríamos em dizer que os "polinômios de Tchebyshev são densos na Matemática".

Este trabalho mostra um estudo sobre os polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo de forma didática, procurando escrever as demonstrações de maneira detalhada e de fácil compreensão.

## 1.2 Objetivos

Temos como objetivo geral desenvolver um estudo sobre os polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo. Para isso, precisaremos dos seguintes objetivos específicos, analisar definição e teoremas sobre os polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo, classificar as propriedades do polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo e, por fim, exemplificar os polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo através de aplicações.

## 1.3 Metodologia

Inicialmente, foi realizado estudo sobre os polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo através do artigo do jornal É Matemática, oxente! [Silva1-1] e plataforma de streaming Youtube, nos endereços [Silva2-1] e [Silva3-1]. Em seguida, fizemos pesquisa bibliográfica em artigo [Silva1-1], livro [Mason-1], sites [Wikipédia1-1] e [Wikipédia2-1] e dissertações de mestrado [Lobo-1] e [Pereira-1], para podermos escrever o trabalho, foi utilizado o overleaf, ferramenta on-line com escrita em LaTeX, usando como referência [Souza-1], aperfeiçoando o pouco conhecimento obtido anteriormente na escrita LaTeX.

## 1.4 Estrutura do trabalho

O presente trabalho de conclusão de curso foi dividido em três capítulos. No primeiro, apresentamos a introdução, onde se encontra a justificativa, os objetivos, a metodologia e a estrutura do trabalho.

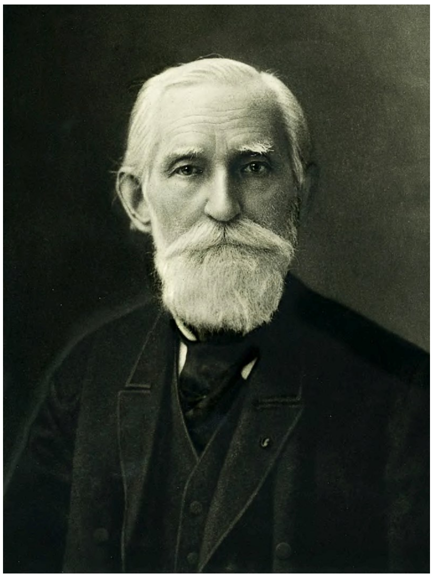
No segundo capítulo, apresentaremos um pouco da história do matemático Russo Pafnuty Lvovick Tchebyshev, em seguida obteremos os polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo através de identidades trigonométricas, mostraremos a definição dos polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo e provaremos alguns teoremas importantes, como a lei de recursividade e algumas propriedades dos polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo. No terceiro capítulo, resolveremos algumas questões utilizando os polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo, suas propriedades e também alguns resultados.

# 2 Referencial teórico

As principais referências consultas para a produção deste capítulo foram [Wikipédia2-1], [Silva1-1].

## 2.1 Contexto histórico

Figura 1 – Pafnuty Lvovich Tchebyshev



(Fonte: [Wikipédia2-1])

Pafnuty Lvovich Tchebyshev nasceu no ano de 1821, em Okatovo na Rússia. Tchebyshev foi educado em casa por sua mãe e sua prima, sua mãe o ensinou a ler e escrever enquanto sua prima o ensinava francês e aritmética. Desde criança, Tchebyshev mancava e usava bengala, devido a sua dificuldade de locomoção, chamada marcha de Tendrelenburg, que o impedia de brincar com as outras crianças, ele resolveu se dedicar a matemática.

Em 1832 sua família resolveu se mudar para Moscou, onde ele continuou seus estudos em casa e teve um dos melhores professores de matemática e física da época, chamado P. N. Pogorelski.

Em 1837 Tchebyshev passou nos exames e ingressou na Universidade de Moscou. Teve como um de seus professores N. D. Brashman, sendo uma das suas maiores referências, o qual foi instruído por Brashman em mecânica prática.

Em 1841 Tchebyshev foi medalhista de prata por seu trabalho sobre o cálculo das raízes das equações, onde derivou um algoritmo de aproximação para a solução de equações algébricas de enésimo grau baseado no método de Newton. Também concluiu os estudos como o aluno mais destacado.

Passando por dificuldades devido à fome na Rússia, sua família resolveu deixar Moscou, mesmo assim Tchebyshev continuou estudando matemática durante seis meses, e em 1843 passou para o mestrado, defendendo sua tese "Um ensaio sobre Análise Elementar da Teoria da probabilidade" em 1846.

Tornou-se professor na Universidade de São Petersburgo depois de promover sua tese pro venia legendi sobre a integração com a ajuda de logaritmos. Em 1849 defendeu sua tese de doutorado sobre "A Teoria das Congruências"e em 1850 foi eleito professor extraordinário na Universidade de São Petersburgo, em 1860 foi eleito professor ordinário e em 1872 se tornou professor merecido após 25 anos lecionando. Por fim, em 1882 resolveu dedicar-se a pesquisa, deixando de ser professor na universidade.

Pafnuty Lvovich Tchebyshev deixou vários trabalhos notáveis, dentre eles: os polinômios de Tchebyshev, as desigualdades de Tchebyshev, teorema de Tchebyshev, Teoria dos números e análises matemáticas.

## 2.2 Polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo

Existe diversas formas para apresentar os polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo, uma delas é através das identidades trigonométricas, por isso, começaremos relembrando algumas dessas identidades envolvendo a função cosseno, para introduzirmos os polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo. A fim de facilitar a compreensão dos resultados, usaremos as seguintes notações:

- $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais; a saber, $\{1, 2, 3, \ldots\}$;
- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- $\mathbb{Z}[x]$ denotará o conjunto dos polinômios na variável $x$ e coeficientes inteiros;
- $\mathbb{R}[x]$ denotará o conjunto dos polinômios na variável $x$ e coeficientes reais.

Inicialmente, note que seja qual $\alpha \in \mathbb{R}$ as seguintes identidades são válidas:

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= \cos(\alpha+\alpha)\\
&= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha\\
&= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\
&= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)\\
&= \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha\\
&= 2\cos^2\alpha - 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(3\alpha) &= \cos(2\alpha+\alpha)\\
&= \cos(2\alpha)\cos\alpha - \sin(2\alpha)\sin\alpha\\
&= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha\\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha\\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1-\cos\alpha)\cos\alpha\\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - (2-2\cos\alpha)\cos\alpha\\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^2\alpha\\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\cos(4\alpha) &= \cos(3\alpha+\alpha)\\
&= \cos(3\alpha)\cos\alpha - \sin(3\alpha)\sin\alpha\\
&= (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)\cos\alpha - (3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)\sin\alpha\\
&= 4\cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha\\
&= 4\cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha - 3(1-\cos^2\alpha) + 4(1-\cos^2\alpha)^2\\
&= 4\cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha - 3 + 3\cos^2\alpha + 4(1-2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)\\
&= 4\cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha - 3 + 3\cos^2\alpha + 4 - 8\cos^2\alpha + 4\cos^4\alpha\\
&= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.
\end{aligned}$$

Dessa forma, vemos que $\cos(2\alpha)$, $\cos(3\alpha)$ e $\cos(4\alpha)$ podem ser escritos em função do $\cos\alpha$. De fato, se pode perceber que $\cos(n\alpha)$, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, pode ser escrito em função do $\cos\alpha$. Podemos provar essa afirmação usando o Princípio de indução finita como segue. Com maior razão, essa afirmação é verdadeira para $n = 1$, agora usando a hipótese de que

$$\cos(n\alpha) = f(\cos\alpha)$$

para alguma função $f$, podemos ver que

$$\begin{aligned}
&\cos((n+1)\alpha)\\
&= \cos(n\alpha+\alpha)\\
&= \cos(n\alpha)\cos(\alpha) - \sin(n\alpha)\sin(\alpha)\\
&= f(\cos(\alpha))\cos(\alpha) - \sin(n\alpha)\sin(\alpha)\\
&= f(\cos(\alpha))\cos(\alpha) - \sin((n-1)\alpha)\sin(\alpha)\cos(\alpha) - \cos((n-1)\alpha)\sin^2(\alpha)\\
&= f(\cos(\alpha))\cos(\alpha) - \sin((n-1)\alpha)\sin(\alpha)\cos(\alpha) - \cos((n-1)\alpha)(1-\cos^2(\alpha)).
\end{aligned}$$

Pecerbe que das três parcelas do lado direito na igualdade acima, a segunda parcela é a única claramente não dependente explicitamente do $\cos(\alpha)$, e afim de reescrever esta parcela como uma expressão dependente apenas de $\cos(\alpha)$, reproduza o argumento usando para gerar a quarta igualdade do conjunto de igualdades acima. Finalmente, perceba que esse procedimento deve ser repetido $n-2$ vezes e obteremos ao final uma soma cujas parcelas dependem apenas de $\cos(\alpha)$.

Também, podemos perceber, que as identidades sugerem que existem polinômios $T_1(x), T_2(x), T_3(x), T_4(x), \ldots, T_n(x) \ldots \in \mathbb{Z}[x]$ tais que

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= T_1(\cos\alpha)\\
\cos(2\alpha) &= T_2(\cos\alpha)\\
\cos(3\alpha) &= T_3(\cos\alpha)\\
\cos(4\alpha) &= T_4(\cos\alpha)\\
&\vdots\\
\cos(n\alpha) &= T_n(\cos\alpha)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Por exemplo, esses polinômios são exatamente

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= x\\
T_2(x) &= 2x^2-1\\
T_3(x) &= 4x^3-3x\\
T_4(x) &= 8x^4-8x^2+1.
\end{aligned}$$

Diante disso, surge o seguinte questionamento: dado $n \in \mathbb{N}$, existe um polinômio $T_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $\cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha)$? Obtemos a resposta para tal questionamento pelo seguinte teorema.

**Teorema 2.2.1.** *Dado $n \in \mathbb{N}$, existe um polinômio $T_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que*

$$\cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha)$$

*seja qual for $\alpha \in \mathbb{R}$.*

*Demonstração.* Iniciaremos utilizando a fórmula do Binômio de Newton, temos

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-k}(i\sin\alpha)^k,$$

onde $i$ é tal que $i^2 = -1$. De outra forma, temos a fórmula de Moivre

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-k}(i\sin\alpha)^k \\
&= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-0}(i\sin\alpha)^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-1}(i\sin\alpha)^1 \\
&+ \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-2}(i\sin\alpha)^2 + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-3}(i\sin\alpha)^3 \\
&+ \begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-4}(i\sin\alpha)^4 + ... \\
&= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-1} i\sin\alpha \\
&+ \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-2}(-\sin\alpha^2) + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-3}(-i\sin\alpha^3) \\
&+ \begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-4}\sin\alpha^4 + ...
\end{aligned}$$

Agora, separaremos a parte real da parte imaginária, obtendo

$$\begin{aligned}
&\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) \\
= &\left[ \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n} - \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-2}(-\sin\alpha^2) + \begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-4}\sin\alpha^4 + ... \right] \\
+ \ &i\left[ \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-1}\sin\alpha - \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-3}\sin\alpha^3 + ... \right].
\end{aligned}$$

Igualando as partes reais dos dois membros, temos

$$\begin{aligned}
&\cos(n\alpha) \\
&= \left[ \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n} - \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-2}(-\sin\alpha^2) + \begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix} (\cos\alpha)^{n-4}\sin\alpha^4 + ... \right].
\end{aligned}$$

Sabendo que $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ e que os senos que aparacem na identidade acima possuem expoentes pares, obteremos então um polinômio $T_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$, tal que

$$\cos{(n\alpha)} = T_n(\cos\alpha).$$

$\square$

Observando o resultado do teorema acima, podemos perceber um novo modo para obter os polinômios que caracterizam $\cos(n\alpha)$, por exemplo

$$\begin{aligned} T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1. \end{aligned}$$

Os quais obtivemos anteriormente utilizando as identidades trionométricas. De fato,

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos^{2-0}\alpha \sin^0\alpha - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cos^{2-2}\alpha \sin^2\alpha \\ &= \frac{2!}{0!(2-0)!}\cos^2\alpha - \frac{2!}{2!(2-2)!}\sin^2\alpha \\ &= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) \\ &= \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1. \end{aligned}$$

Temos também,

$$\begin{aligned} \cos(3\alpha) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cos^{3-0}\alpha \sin^0\alpha - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cos^{3-2}\alpha \sin^2\alpha \\ &= \frac{3!}{0!(3-0)!}\cos^3\alpha \sin^0\alpha - \frac{3!}{2!(3-1)!}\cos\alpha\sin^2\alpha \\ &= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) \\ &= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \cos(4\alpha) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cos^{4-0}\alpha \sin^0\alpha - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cos^{4-2}\alpha \sin^2\alpha + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cos^{4-4}\alpha \sin^4\alpha \\ &= \frac{4!}{0!(4-0)!}\cos^4\alpha \sin^0\alpha - \frac{4!}{2!(4-2)!}\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \frac{4!}{4!(4-4)!}\cos^{4-4}\alpha\sin^4\alpha \\ &= \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha + 6\cos^4\alpha + (1-\cos^2\alpha)^2 \\ &= \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha + 6\cos^4\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha + \cos^4\alpha \\ &= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1. \end{aligned}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= x\\
T_2(x) &= 2x^2 - 1\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tudo isso nos leva introduzir a seguinte definição.

**Definição 2.2.1.** *Para cada inteiro* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *com* $\alpha \in [-1, 1]$ *o polinômio* $T_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *tal que* $\cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha)$ *é denominado de* $n$*-ésimo polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo.*

**Observação 2.2.1.** *Com o auxílio do WolframAlpha podemos encontrar o* $j-$*ésimo polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo usando o endereço da internet*

*https://www.wolframalpha.com/*

*e a sintaxe*

*$j$th chebyshev polynomial of the first kind*

*ou*

*chebyshev* $T[k, x]$,

*para gerar o polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo de grau* $k$ *na variável* $x$.

Com o que foi exposto acima, temos uma lei de recorrência, a qual é de grande utilidade para obtermos os membros da família de polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo, como mostraremos a seguir.

**Proposição 2.2.1** (Lei de recorrência)**.** *Seja* $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *a sequência dos polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo. Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *é válida a seguinte recorrência*

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1,\\
T_1(x) &= x,\\
T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),
\end{aligned}$$

*seja qual for* $x \in \mathbb{R}$.

*Demonstração.* De fato, seja quais forem $n \in \mathbb{N}_0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\cos[(n+1)\alpha] &= \cos(n\alpha + \alpha) = \cos(n\alpha)\cos\alpha - \sin(n\alpha)\sin\alpha \\
&= 2\cos(n\alpha)\cos\alpha - \cos(n\alpha)\cos\alpha - \sin(n\alpha)\sin\alpha \\
&= 2\cos(n\alpha)\cos\alpha - [\cos(n\alpha)\cos\alpha + \sin(n\alpha)\sin\alpha] \\
&= 2\cos(n\alpha)\cos\alpha - \cos(n-1)\alpha.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\cos[(n+1)\alpha] &= T_{n+1}(\cos\alpha), \\
\cos\alpha &= T_1(\cos\alpha), \\
\cos(n\alpha) &= T_n(\cos\alpha) e \\
\cos(n-1)\alpha &= T_{n-1}(\cos\alpha),
\end{aligned}$$

temos

$$\cos[(n+1)\alpha] = 2\cos(n\alpha)\cos\alpha - \cos(n-1)\alpha,$$

em outras palavras

$$T_{n+1}(\cos\alpha) = 2T_1(\cos\alpha)T_n(\cos\alpha) - T_{n-1}(\cos\alpha)$$

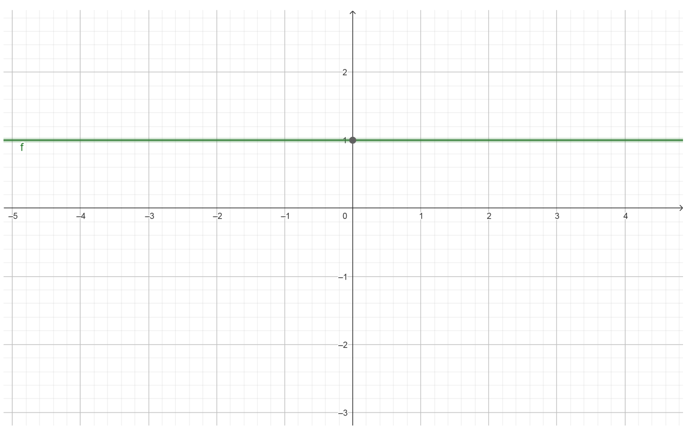
e finalmente

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

seja qual for $x \in \mathbb{R}$, como queríamos demonstrar. □

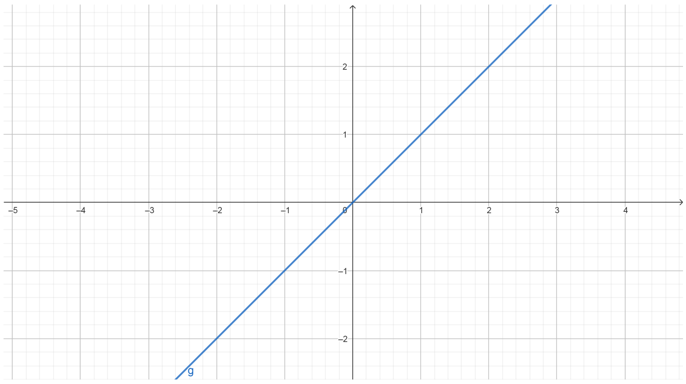
A seguir, temos a representação gráfica dos primeiros seis polinômios de Tchebyshev feitas no aplicativo Geogebra.

Figura 2 – Gráfico de $T_0(x) = 1$



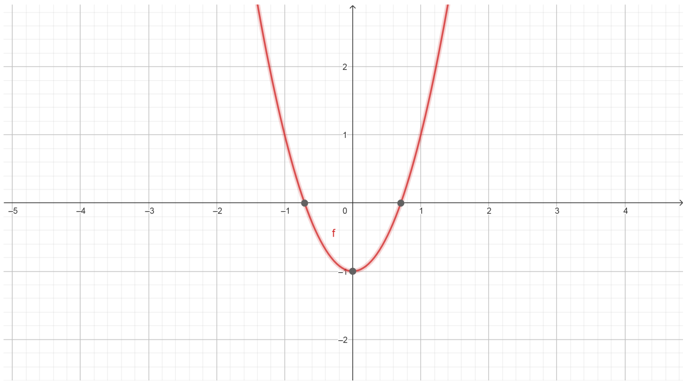

(Fonte: Autoria própria)

Figura 3 – Gráfico de $T_1(x) = x$



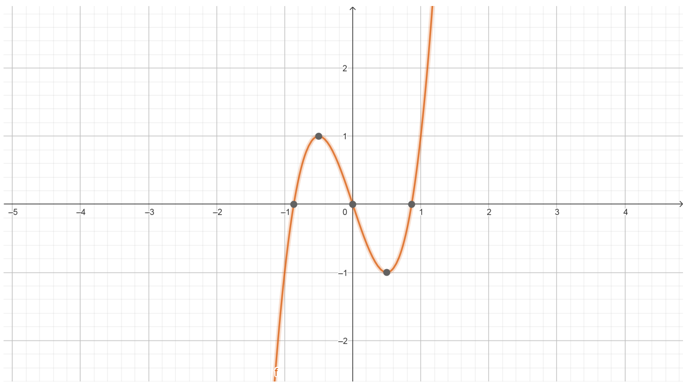

(Fonte: Autoria própria)

Figura 4 – Gráfico de $T_2(x) = 2x^2 - 1$



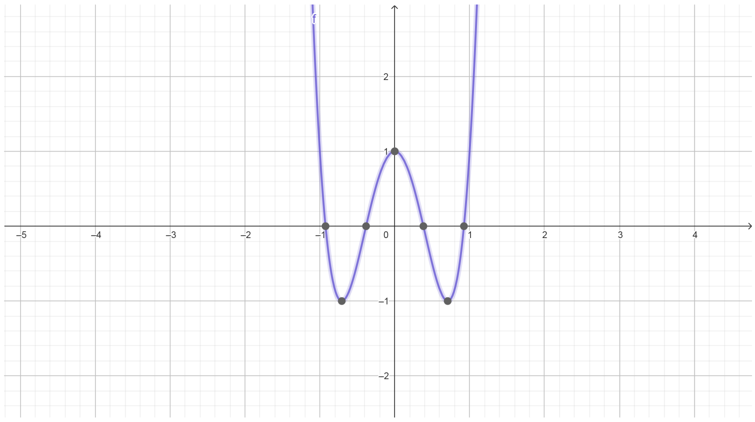

(Fonte: Autoria própria)

Figura 5 – Gráfico de $T_3(x) = 4x^3 - 3x$



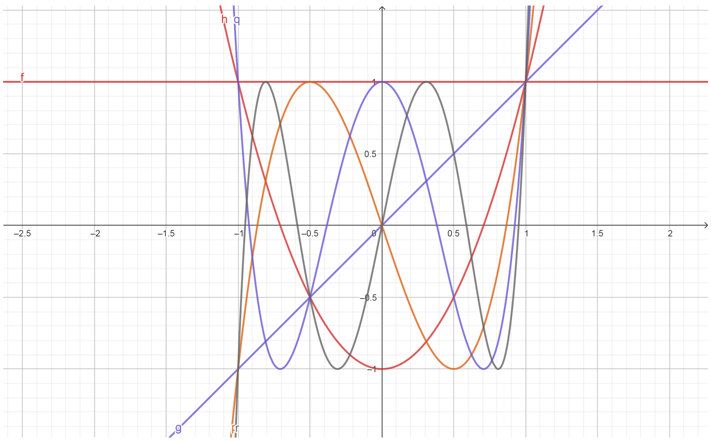
(Fonte: Autoria própria)

Figura 6 – Gráficos de $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$



(Fonte: Autoria própria)

Figura 7 – Gráficos de $T_0(x), T_1(x), \cdots, T_5(x)$



(Fonte: Autoria própria)

### 2.2.1 Propriedades

**Proposição 2.2.2** (Soma dos coeficientes)**.** *A soma dos coeficientes do polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo $T_n(x)$ é igual a* 1*.*

*Demonstração.* Usando o Teorema 2.2.1 sabemos que

$$\cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha)$$

seja qual for $\alpha \in \mathbb{R}$. Em particular, considerando $\cos\alpha = 1$, por exemplo $\alpha = 0$, e neste caso, temos

$$T_n(1) = \cos(0) = 1,$$

e este é a soma dos coeficientes do polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo. $\square$

**Proposição 2.2.3.** *Para todo $k \in \mathbb{N}$, as seguintes propriedades são válidas.*

**a)** *O termo linear em $T_{2k+1}(x)$ é igual a $(-1)^k\ (2k+1)x$.*

**b)** *O termo constante em $T_{2k}(x)$ é igual a $(-1)^k$.*

*Demonstração.* Prova do item a): usando o Teorema 2.2.1 sabemos que

$$\cos((2k+1)\alpha) = T_{2k+1}(\cos\alpha)$$

seja qual for $\alpha \in \mathbb{R}$. Escreva $\cos\alpha = x$ e considere $\alpha = \arccos x$ com $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, assim

$$\cos((2k+1)\arccos x) = T_{2k+1}(x)$$

onde

$$T'_{2k+1}(x) = (2k+1)\sin((2k+1)\arccos x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e

$$T'_{2k+1}(0) = (2k+1)\sin((2k+1)\arccos 0) = (2k+1)\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k(2k+1).$$

e este é o coeficiente do termo linear em $T_{2k+1}(x)$.

Prova do item b): usando o Teorema 2.2.1 sabemos que

$$\cos(2k\alpha) = T_{2k}(\cos\alpha)$$

seja qual for $\alpha \in \mathbb{R}$. Em particular, considerando $\cos\alpha = 0$, por exemplo $\alpha = \frac{\pi}{2}$, e neste caso, temos

$$T_{2k}(0) = \cos(k\pi) = (-1)^k,$$

e este é o termo constante em $T_{2k}(x)$. □

**Proposição 2.2.4.** *Para cada $n \in \mathbb{N}$ o polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo $T_n(x)$, cumpre as seguintes condições.*

**a)** $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$;

**b)** $T_n(1) = 1$;

**c)** $T_n(-1) = (-1)^n$;

**d)** $T_{2n}(0) = (-1)^n$;

**e)** $T_{2n+1}(0) = 0$;

*Demonstração.* Prova do item a): usando o Teorema 2.2.1 sabemos que

$$\cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha)$$

seja qual for $\alpha \in \mathbb{R}$. Agora, fazendo $cos(\alpha) = -x$, segue que $\alpha = \arccos(-x)$ e

$$\begin{aligned} T_n(-x) &= \cos(n\arccos(-x)) \\ &= \cos(n\arccos(x) + n\pi) \\ &= (-1)^n\cos(n\arccos(x)) \\ &= (-1)^n T_n(x). \end{aligned}$$

Prova do item b): usando o Teorema 2.2.1 sabemos que

$$\cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha)$$

seja qual for $\alpha \in \mathbb{R}$. Agora, fazendo $cos(\alpha) = 1$, podemos considerar $\alpha = 0$ e segue que $T_n(1) = 1$.

Prova do item c): basta considerar a igualdade do item a) com $x = 1$ e usar a igualdade do item b).

Prova do item d): este resultado é o mesmo resultado mencionado no item b) da Proposição 2.2.3.

Finalmente, a prova do item e) segue da Proposição 2.2.1, onde

$$\begin{aligned} T_1(0) &= 0, \\ T_{2n+1}(0) &= 2 \cdot 0 \cdot T_{2n}(0) - T_{2n-1}(0), \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja

$$\begin{aligned} T_1(0) &= 0, \\ T_{2n+1}(0) &= -T_{2n-1}(0), \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, consequentemente, usando o Princípio de Indução finita, podemos concluir que $T_{2n+1}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

**Proposição 2.2.5.** *O grau n-ésimo polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo é igual a n, ou seja,* $gr(T_n(x)) = n$.

*Demonstração.* Provaremos por indução sobre $n$. Para $n = 1$ temos que $gr(T_1(x)) = gr(x) = 1$. Suponhamos que $gr(T_n(x)) = n$ por hipótese de indução. Por outro lado, sabemos que:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Então,

$$\begin{aligned} gr(2xT_n(x)) &= gr(2x) + gr(Tn(x)) \\ &= 1 + n. \end{aligned}$$

e $T_{n-1}(x) = \cos((n-1)\arccos(x))$ o que nos leva a concluir que $T_{n-1}(x)$ é uma expressão polinomial de grau $n-1$ em $x$, graças ao Teorema 2.2.1. Consequentemente

$$gr(T_{n+1}(x)) = 1 + n.$$

□

**Proposição 2.2.6.** *Para cada $n \in \mathbb{N}$ o coeficiente dominante de $T_n(x)$é igual a $2^{n-1}$.*

*Demonstração.* Vamos primeiro mostrar para $n = 1$, temos $T_1(x) = x$ e seu coeficiente dominante é 1, onde

$$2^{1-1} = 2^0 = 1.$$

Suponhamos que para $T_n(x)$ seja verdadeiro o resultado, ou seja, o coeficiente dominante é $2^{n-1}$, nossa hipótese de indução.

Usando a relação de recorrência

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

então o coeficiente dominante de $T_{n+1}(x)$ é

$$2^1 \cdot 2^{n-1} = 2^{(n+1)-1}.$$

□

**Teorema 2.2.2.** *Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se que*

$$T_{mn}(x) = T_m((T_n(x)) = T_n(T_m(x)),$$

*seja qual for $x \in \mathbb{R}$.*

*Demonstração.* Basta ver que usando o Teorema 2.2.1 temos

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

seja qual for $x \in \mathbb{R}$, e

$$\begin{aligned} T_m((T_n(x)) &= \cos(m \arccos(T_n(x))) \\ &= \cos(m \arccos(\cos(n \arccos(x))) \\ &= \cos(mn \arccos(x)) \\ &= T_{mn}(x). \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.2.3.** *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, os zeros do polinômio $T_n(x)$ são tais que*

$$x = \cos\left[\left(\frac{4k+1}{2n}\right)\pi\right]$$

*para todo $k = -\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, -\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

*Demonstração.* Basta ver que

$$T_n(x) = 0,$$

é equivalente a

$$\cos(n \arccos(x)) = 0,$$

e consequentemente

$$\arccos(x) = \frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ou

$$\arccos(x) = \frac{2k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

em outras palavras

$$x = \cos\left[\left(\frac{4k+1}{2n}\right)\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z},$$

ou

$$x = \cos\left[\left(\frac{4k-1}{2n}\right)\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Agora, podemos perceber que

$$\cos\left[\left(\frac{4k+1}{2n}\right)\pi\right]$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$ é igual a

$$\cos\left[\left(\frac{4k-1}{2n}\right)\pi\right]$$

para qualquer $k \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, bem como

$$\cos\left[\left(\frac{4k+1}{2n}\right)\pi\right]$$

para qualquer $k \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ é igual a

$$\cos\left[\left(\frac{4k-1}{2n}\right)\pi\right]$$

para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Além disso, lembramos que o Teorema Fundamental da Álgebra assegura que polinômio de grau $n$ com coeficientes reais possui no máximo $n$ raízes reais. Portanto, os zeros do polinômio $T_n(x)$ são tais que

$$x = \cos\left[\left(\frac{4k+1}{2n}\right)\pi\right]$$

para todo $k = -\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, -\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. □

**Exemplo 2.2.1.** *Por exemplo, para encontrarmos as raízes de* $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, *temos* $n = 4$ *e suas raízes são*

- $k = 1 \Rightarrow x = \cos\left[\left(\frac{4\cdot1+1}{2\cdot4}\right)\pi\right] = \cos\frac{5\pi}{8}$
- $k = 2 \Rightarrow x = \cos\left[\left(\frac{4\cdot2+1}{2\cdot4}\right)\pi\right] = \cos\frac{9\pi}{8}$
- $k = 3 \Rightarrow x = \cos\left[\left(\frac{4\cdot3+1}{2\cdot4}\right)\pi\right] = \cos\frac{13\pi}{8}$
- $k = 4 \Rightarrow x = \cos\left[\left(\frac{4\cdot4+1}{2\cdot4}\right)\pi\right] = \cos\frac{17\pi}{8}$

**Corolário 2.2.1.** *Para qualquer* $n \in \mathbb{N}$, *a seguinte igualdade é válida*

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k\in\{-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor, -\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1,\ldots,-1,0,1,\ldots,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\}} \left\{x - \cos\left[\left(\frac{4k+1}{2n}\right)\pi\right]\right\}.$$

**Proposição 2.2.7.** *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *e* $x \in [-1, 1]$, *vale*

$$|T_n(x)| \leqslant 1.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.2.1 sabemos que

$$T_n(x) = T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$$

sabemos também que os valores que o cosseno pode assumir para qualquer valor de $x$ podem variar apenas entre $-1$ e 1. Assim,

$$\cos(n\alpha) \in [-1, 1] \Rightarrow |T_n(x)| \leq 1.$$

□

**Teorema 2.2.4.** *Qualquer polinômio de grau* $n$ *e coeficientes reais pode ser escrito como uma soma de polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo de grau no máximo* $n$*; isto é, se* $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, *então existem números reais* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *tais que*

$$p(x) = a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + \cdots + a_nT_n(x).$$

*Demonstração.* Primeiro, provaremos que

$$x^n = 2^{1-n} \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{k} T_{n-k}(x)$$

seja qual for $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Graças ao binômio de Newton, temos

$$(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(n-k)\theta} e^{-ik\theta}$$

e usando a fórmula de Euler, bem como escrevendo entre parênteses o primeiro e o último termo, o segundo e o penúltimo termo, e assim por diante, temos

$$\begin{aligned}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n &= (e^{in\theta}+e^{-in\theta})+\binom{n}{1}(e^{i(n-2)\theta}+e^{-i(n-2)\theta})+\binom{n}{2}(e^{i(n-4)\theta}+e^{-i(n-4)\theta})+\dots\\ &= 2\cos(n\theta)+2\binom{n}{1}\cos((n-2)\theta)+2\binom{n}{2}\cos((n-4)\theta)+\dots\end{aligned}$$

perceba que o número de parênteses é igual a

$$\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1.$$

Por outro lado, usando a fórmula de Euler, sabemos que

$$(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n=(2\cos(\theta))^n=2^n\cos^n(\theta)$$

e daí, deduzimos que

$$2^{n-1}\cos^n(\theta)=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{k}\cos((n-2k)\theta).$$

Aqui $\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ denota a soma reduzida à metade se $n$ é par, e neste caso $k=\frac{n}{2}$. Consequentemente

$$\cos^n(\theta)=2^{1-n}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{k}\cos((n-2k)\theta).$$

Finalmente, usando a definição de $T_n(x)$, obtemos

$$x^n=2^{1-n}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{k}T_{n-2k}(x)$$

uma vez que $x=\cos(\theta)$. □

Assim, podemos escrever a potência de $x^n$ em função dos polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo, como exemplificaremos nas igualdades abaixo, as quais são casos particulares da identidade mostrada no Teorema 2.2.4

$$
\begin{aligned}
1 &= T_0(x)\\
x &= T_1(x)\\
x^2 &= \frac{1}{2}(T_0+T_1)(x)\\
x^3 &= \frac{1}{4}(3T_1+T_3)(x)\\
x^4 &= \frac{1}{8}(3T_0+4T_2+T_4)(x)\\
x^5 &= \frac{1}{16}(10T_1+5T_3+T_5)(x)\\
x^6 &= \frac{1}{32}(10T_0+15T_2+6T_4+T_6)(x)\\
x^7 &= \frac{1}{64}(35T_1+21T_3+7T_5+T_7)(x)\\
x^8 &= \frac{1}{128}(35T_0+56T_2+28T_4+8T_6+T_8)(x)\\
x^9 &= \frac{1}{256}(126T_1+84T_3+36T_5+9T_7+T_9)(x)
\end{aligned}
$$

**Exemplo 2.2.2.** *Para melhor entendimento, apresentaremos o seguinte caso particular.*

$$
\begin{aligned}
x^4 &= 2^{-3}\sum_{k=0}^{2}\binom{4}{k}T_{4-2k}(x)\\
&= \frac{1}{8}\Big[T_4(x)+\binom{4}{1}T_2(x)+\frac{1}{2}\binom{4}{2}T_0(x)\Big]\\
&= \frac{1}{8}\Big[T_4(x)+\frac{4!}{1!(4-1)!}T_2(x)+\frac{1}{2}\cdot\frac{4!}{2!(4-2)!}T_0(x)\Big]\\
&= \frac{1}{8}\Big[T_4(x)+\frac{4!}{1!(3)!}T_2(x)+\frac{1}{2}\cdot\frac{4!}{2!2!}T_0(x)\Big]\\
&= \frac{1}{8}\Big[T_4(x)+4T_2(x)+\frac{1}{2}\cdot 6T_0(x)\Big]\\
&= \frac{1}{8}T_4(x)+\frac{1}{2}T_2(x)+\frac{3}{8}T_0(x).
\end{aligned}
$$

**Teorema 2.2.5.** *Para $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m \geq n$. Mostre que os polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo $T_n(x)$ e $T_m(x)$ cumprem a seguinte condição*

$$T_{m+n}(x)+T_{m-n}(x) = 2T_m(x)T_n(x),$$

*para todo $x \in \mathbb{R}$.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.2.1, temos

$$T_m(\cos\alpha) = \cos(m\alpha) T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha).$$

Assim,

$$T_{m+n}(\cos\alpha) = \cos(m+n)\alpha T_{m-n}(\cos\alpha) = \cos(m-n)\alpha.$$

Usando as identidades trigonométricas temos,

$$\begin{aligned}
&\cos(m+n)\alpha + \cos(m-n)\alpha = \\
&\qquad = 2\cos\left(\frac{(m+n)\alpha + (m-n)\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{(m+n)\alpha - (m-n)\alpha}{2}\right) \\
&\qquad = 2\cos(m\alpha)cos(n\alpha).
\end{aligned}$$

Substituindo temos,

$$T_{m+n}(\cos\alpha) + T_{m-n}(\cos\alpha) = 2T_m(x)T_n(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. □

**Teorema 2.2.6.** *Se $\alpha$ é um número real tal que $\cos\alpha$ é irracional, então $\cos(\frac{\alpha}{n})$ é irracional para todo $n \in \mathbb{N}$.*

*Demonstração.* Demonstraremos a contra-positiva, ou seja, se $\cos\frac{\alpha}{n}$ é racional, então $\cos\alpha$ é racional. Suponhamos que $\cos(\frac{\alpha}{n}) = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. Pelo Teorema 2.2.1 sabemos que $\cos(n\alpha) = T_n(\cos n\alpha)$, onde $T_n(x) \in \mathbb{Z}$ é um polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo. Então,

$$\cos\alpha = \cos\left(n\frac{\alpha}{n}\right) = T_n\left(\cos n\frac{\alpha}{n}\right) = T_n\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Q},$$

pois todos os coeficientes de $T_n(x)$ são todos inteiros. □

**Corolário 2.2.2.** *Mostre que $\cos 1^{o}$ é irracional.*

*Demonstração.* Sabemos que $\cos 1^{\text{o}} = \cos\left(\frac{\pi}{180}\right)$. Pelo Teorema 2.2.6 temos que se $\cos\alpha$ é irracional, então $\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$. Sendo $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é irracional, então $\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ é irracional. Da mesma maneira temos que $\cos\left(\frac{\frac{\pi}{12}}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{36}\right)$ é irracional. Usando o Teorema 2.2.6 novamente, temos que $\cos\left(\frac{\alpha}{5}\right)$ é irracional. Por fim, $\cos\left(\frac{\frac{\pi}{36}}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{180}\right)$ é irracional. □

# 3 Aplicações dos polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo

Neste tópico, mostraremos resoluções de questões utilizando o polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo.

Para resolvermos as questões 1, 2 e 3 precisaremos do seguinte lema, o qual o resultado foi retirado da referência [Lobo-1].

**Lema 3.0.1.** *Seja um polinômio de grau $n$ de coeficientes complexos*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

*onde $a_n \neq 0$, e sejam $r_1, r_2, \ldots, r_n$ suas raízes, temos as seguintes relações de Girard-Vietè:*

*a) A soma das raízes, é dada por:*

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

*b) O produto das raízes, é dada por:*

$$(-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

*Demonstração.* Sejam $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, a forma desenvolvida de $p(x)$ e $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \ldots \cdots + (x - r_n)$, a sua forma fatorada, com $r_1, r_2, \ldots, r_n$ as raízes do polinômio. Podemos perceber que o coeficiente de $x^n$ será $a_n$, tanto na forma desenvolvida, quanto na fatorada.

Em seguida, formamos o termo em $x^{n-1}$, obtido fazendo a distributiva na forma fatorada, multiplicando $x$ em cada fator, exceto em um deles. Teremos,

$$a_n(-r_1 - r_2 - \cdots - r_n)x^{n-1} = -a_n(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)x_{n-1} = -a_n S_1 x^{n-1},$$

onde $S_1$ de nota a soma das raízes de $p$.

Para formar com $x^{n-2}$, fazemos o mesmo de antes, mas agora escolhendo apenas duas raízes na distributiva. Assim,

$$\begin{aligned} &a_n((-r_1)(-r_2) + (-r_2)(-r_3) + \ldots + (-r_{n-1})(-r_n))x^{n-2} \\ &= a_n(r_1 r_2 + r_2 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n)x^{n-2} = a_n S_2 x^{n-2}. \end{aligned}$$

Na formulação do termo $x^{n-k}$, escolheremos $k$ fatores da forma $(-r_1)(-r_2)\ldots(-r_k)$ e, sendo $S_k$ a soma dos produtos das raízes de $p$, tomadas $k$ a $k$, teremos,

$$a_n(-1)^k S_k x^{n-k}.$$

O termo independente será formado com o produto das $n$ raízes, sendo $a_0$ dado por:

$$a_n(-r_1)(-r_2)\ldots(-r_n) = a_n(-1)^n r_1 r_2 \ldots r_n = a_n(-1)^n S_n.$$

Assim, chegamos a conclusão de que:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{n-k}x^{n-k} + \ldots + a_0 \\ &= a_n x^n - a_n S_1 x^{n-1} + \ldots + a_n(-1)^k S_k x^{n-k} + \ldots + a_n(-1)^n S_n, \end{aligned}$$

de onde tiramos as relações:

$$S_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

e

$$S_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

□

A questão a seguir é uma adaptação da questão três da referência [Silva1-1].

**Questão 1.** *Calcule o valor do produto*

$$P = \cos\left(\frac{\pi}{2020}\right) \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{2020}\right) \cdots \cos\left(\frac{4037\pi}{2020}\right).$$

**Resolução.** Pelo Teorema 2.2.3 temos que as raízes do polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo $T_{1010}(x)$, são

$$x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{2020}\right), x_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{2020}\right), \cdots, x_{1009} = \cos\left(\frac{4037\pi}{2020}\right).$$

Usando as relações de Girard-Vieté, sabemos que o produto das raízes de um polinômio

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 + a_0 \in \mathbb{R}[x]$$

é dado por $(-1)\frac{a_0}{a_k}$. Pela Proposição 2.2.6 temos que o coeficiente dominante do polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo é $2^{n-1}$ e pela Proposição 2.2.3 o termo constante de $t_{2K}(x)$ é $(-1)^k$. Dessa maneira , temos que o coeficiente dominante e o termo constante do polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo $T_{1010}(x)$ são

$$a_{1010} = 2^{1010-1} = 2^{1009}$$

e

$$a_0 = (-1)^{505} = -1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} P &= \cos\left(\frac{\pi}{2020}\right) \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{2020}\right) \cdots \cos\left(\frac{4037\pi}{2020}\right) \\ &= (-1)^{1010} \cdot \frac{(-1)}{2^{1009}} \\ &= -\frac{1}{2^{1009}}. \end{aligned}$$

□

A questão a seguir é uma adaptação da questão quatro da referência [Silva1-1].

**Questão 2.** *Mostre que*

$$\begin{aligned} P &= \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{13\pi}{10}\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{17\pi}{10}\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{13\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{17\pi}{10}\right) \\ &+ \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{13\pi}{10}\right)\cdot\cos\left(\frac{17\pi}{10}\right) \\ &= \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

**Resolução.** Pelo Teorema 2.2.3 temos que as raízes do polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo $T_5(x)$, são

$$x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right), x_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right), x_2 = \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right), x_3 = \cos\left(\frac{13\pi}{10}\right), x_4 = \cos\left(\frac{17\pi}{10}\right).$$

Usando as relações de Girard-Vieté, sabemos que a soma dos produtos das raízes de um polinômio

$$P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1 + a_0 \in \mathbb{R}[x]$$

é dado por $\cdot\frac{a_1}{a_5}$. Pela Proposição 2.2.6 temos que o coeficiente dominante do polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo é $2^{n-1}$ e pela Proposição 2.2.3 o termo linear de $t_{2K+1}(x)$ é $(-1)^2(2k+1)x$. Dessa maneira , temos que o coeficiente dominante e o termo linear do polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo $T_5(x)$ são

$$\begin{aligned} a_5 &= 2^{5-1} = 16 \\ a_1 &= (-1)^2\cdot(2\cdot 2+1) = 5. \end{aligned}$$

Assim,

$$S = \frac{5}{16}.$$

□

A questão a seguir é uma adaptação da questão cinco da referência [Silva1-1].

**Questão 3.** *Mostre que:*

$$\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{22}\right)\cdots\cos\left(\frac{17\pi}{22}\right) = \frac{\sqrt{11}}{32}.$$

**Resolução.** Pelo Teorema 2.2.3 temos que as raízes do polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo $T_{11}(x)$, são

$$x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{22}\right), x_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{22}\right), \cdots, x_{10} = \cos\left(\frac{41\pi}{22}\right).$$

Pela Proposição 2.2.6 temos que o coeficiente dominante do polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo é $2^{n-1}$ e pela Proposição 2.2.3 o termo linear de $t_{2K+1}(x)$ é $(-1)^2(2k+1)x$. Dessa maneira , temos que o coeficiente dominante e o termo linear do polinômio de Tchebyshev do primeiro tipo $T_{11}(x)$ são

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2^{11-1} = 2^{10} \\ a_1 &= (-1)^{11} \cdot (2 \cdot 5 + 1) = -11. \end{aligned}$$

Assim,

$$T_{11}(x) = 2^{10}x^{11} - a_9x^9 + \cdots - 11x,$$

Usando o Teorema 2.2.3, podemos encontrar

$$x_3 = \cos\left(\frac{(4 \cdot 3 - 1)\pi}{2 \cdot 11}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{22}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

que é uma das raízes. Dessa forma,

$$\begin{aligned} T_{11}(x) &= 2^{10}x^{11} - a_9x^9 + \cdots - 11x \\ &= (2^{10}x^{10} - a_9x^8 + \cdots - 11)x. \end{aligned}$$

Também podemos encontrar as demais raízes

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos\left(\frac{\pi}{22}\right), x_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{22}\right), x_2 = \cos\left(\frac{9\pi}{22}\right), x_4 = \cos\left(\frac{17\pi}{22}\right), x_5 = \cos\left(\frac{21\pi}{22}\right), \\ x_6 &= \cos\left(\frac{25\pi}{22}\right), x_7 = \cos\left(\frac{29\pi}{22}\right), x_8 = \cos\left(\frac{33\pi}{22}\right), x_9 = \cos\left(\frac{37\pi}{22}\right), x_{10} = \cos\left(\frac{41\pi}{22}\right), \end{aligned}$$

sendo essas as raízes do polinômio

$$f(x) = 2^{10}x^{10} - a_9x^8 + \cdots - 11.$$

Podemos observar que

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{21\pi}{22}\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{22}\right) \\ \cos\left(\frac{17\pi}{22}\right) &= -\cos\left(\frac{5\pi}{22}\right) \end{aligned}$$

Fazendo então, a mudança de variável $x^2 = t$, no polinômio $f(x)$ temos

$$f(x) = 2^{10}t^5 - a_9t^4 + \cdots - 11,$$

e suas raízes são

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{22}\right), \cos^2\left(\frac{5\pi}{22}\right), \cos^2\left(\frac{9\pi}{22}\right), \cos^2\left(\frac{17\pi}{22}\right).$$

Dessa forma, usando as relações de Girard-Viète, temos que o produto dessas raízes é

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{22}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{5\pi}{22}\right) \cdots \cos^2\left(\frac{17\pi}{22}\right) = \frac{11}{2^{10}}.$$

Assim,

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{22}\right)\cdots\cos\left(\frac{17\pi}{22}\right)\right]^2 = \frac{11}{2^{10}}.$$

Portanto,

$$\cos\left(\frac{\pi}{22}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{22}\right)\cdots\cos\left(\frac{17\pi}{22}\right) = \sqrt{\frac{11}{2^{10}}} = \frac{\sqrt{11}}{32}.$$

□

**Questão 4.** *Mostre que*

$$T_n(x) = det\begin{bmatrix} 2x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{bmatrix}_{(n\times n)}.$$

**Resolução.** Usaremos o cálculo do determinante, segundo o desenvolvimento de Laplace, fixando a primeira coluna.

$$T_n(x) = det\begin{bmatrix} 2x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{bmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{bmatrix}$$

$$= 2xT_{n-1}(x) + [(-1)T_{n-2}(x) + 0]$$

$$= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

□

Para resolvermos a questão cinco, precisaremos do seguinte teorema, o qual o resultado foi retirado da referência [Pereira-1].

**Teorema 3.0.1.** *Se $t_1$ e $t_2$ com $t_1 \neq t_2$ e $t_1, t_2 \neq 0$, são raízes da equação característica $t^2 - pt - q = 0$, então todas as soluções da recorrência $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$ são da forma $x_n = c_1t_n^1 + c_2t_n^2$ com $c_1$ e $c_2$ constantes.*

*Demonstração.* Seja $u_n$ uma solução qualquer de $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$.

Vamos primeiro tentar escrever $u_1$ e $u_2$ na forma desejada. Ou seja, vamos tentar determinar $c_1$ e $c_2$ tais que $u_n$ seja da forma $c_1t_1^n + c_2t_2^n$.

Escrevendo igualdades para $u_1$ e $u_2$, podemos formar um sistema de equações do qual as constantes $c_1$ e $c_2$ sejam soluções:

$$\begin{cases} c_1t_1 + c_2t_2 = u_1 \\ c_1t_1^2 + c_2t_2^2 = u_2 \end{cases}$$

ou seja,

$$c_1 = \frac{u_1 t_2 - u_2}{t_1(t^2 - t_1)}$$

e

$$c_2 = \frac{u_2 - u_1 t_1}{t_2(t^2 - t_1)}.$$

Note que, estas soluções são possíveis já que $t_1 \neq t_2$ e $t_1, t_2 \neq 0$.

Tomemos $v_n = u_n - c_1 t_1^n - c_2 t_2^n$. Vamos provar que $v_n = 0$ para todo $n$. Temos,

$$v_n - pv_{n-1} - qv_{n-2} = (u_n - pu_{n-1} - qu_{n-2}) - c_1 t_1^{n-2}(t_1^2 - pt_1 - q) - c_2 t_2^{n-2}(t_2^2 - pt_2 - q).$$

O primeiro parêntese é igual a zero já que $u_n$ é solução $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$ e os dois últimos parênteses são iguais a zero pois $t_1$ e $t_2$ são raízes da equação $t^2 - pt - q = 0$. Assim, $v_n - pv_{n-1} - qv_{n-2} = 0$.

Além disso, como $c_1 t_1 + c_2 t_2 = u_1$ e $c_1 t_1^2 + c_2 t_2^2 = u_2$, temos $v_1 = v_2 = 0$. Entretanto, se $v_n - pv_{n-1} - qv_{n-2} = 0$ e $v_1 = v_2 = 0$, então $v_n = 0$ para todo $n$. □

**Questão 5.** *Mostre que*

$$T_n(x) = \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}.$$

**Resolução.** Pela lei de recorrência temos

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Substituíndo $T_n(x) = cy_x^n$, temos

$$\begin{aligned} cy_x^{n+1} &= 2xcy_x^n - cy_n^{n-1} \\ y_n^{n+1} &= 2xy_x^n - y_x^{n-1}(\div y_x^{n-1}) \\ y_x^2 &= 2xy_x - 1 \end{aligned}$$

seja $y_x^2 - 2xy_n + 1 = 0$, temos

$$y_x = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2}$$

e

$$y_x = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2}$$

assim,

$$y_x = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2 - 1}}{2}$$

simplificando

$$y_n = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Daí,

$$T_n(x) = c_1(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + c_2(x - \sqrt{x^2 - 1})^n$$

e $T_{2n+1}(0) = 0$, temos

$$0 = c_1(\sqrt{-1})^{2n+1} + c_2(-\sqrt{-1})^{2n+1} = c_1(\sqrt{-1})^{2n+1} - c_2(\sqrt{-1})^{2n+1}.$$

Seja $c_1 = c_2$ e $T_n(1) = (-1)^n$, temos

$$c_1 + c_2 = 1$$

e

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$T_n(x) = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 1})^n.$$

□

**Questão 6.** *Mostre que*

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos(x)), & x \in [-1, 1] \\ \cosh(narccosh(x)), & x \geq 1 \\ (-1)\cosh(narccosh(-x)), & x \leq -1 \end{cases}$$

**Resolução.** Pelo Teorema 2.2.1, temos

$$T_n(x) = \cos(n\alpha)$$

considerando $\cos\alpha = x$, com $x \in [-1, 1]$, $\alpha = \arccos(x)$ , para $x \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} x = \cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = \cosh(i\alpha) \\ i\alpha &= arccosh(x) \\ \alpha &= -iarccosh(x) \end{aligned}$$

assim,

$$T_n(x) = \cosh(in\alpha) = \cosh(narccosh(x)).$$

Para $x \leq -1 \Rightarrow -x \geq 1$

$$\begin{aligned} T_n(-x) &= \cosh(narccosh(-x)) \\ (-1)^n T_n(x) &= \cosh(narccosh(-x)) \\ T_n(x) &= (-1)^n(narccosh(-x)). \end{aligned}$$

□

# Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos algumas maneiras de se obter os polinômios de Tchebyshev do primeiro tipo, além disso, vimos como esses polinômios podem ser usados nas resoluções de alguns problemas que podem ser encontrados em olimpíadas, por exemplo. A construção desse trabalho exigiu revisão de conceitos e de resultados algébricos, geométricos e analíticos, além de uma pesquisa de história da matemática, e também uma revisão da escrita em LaTeXno Overleaf.

# Bibliografia


LOBO, F. C. G. D. *Números complexos, polinômios e equações algébtricas* (Dissertação de mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2017. 11, 30

MASON, J. C., Hanscomb, D. C. *Chebyshev Polynomials CRC* - Press - 2002. 10

NASSUIRO, V. Z. *As quatro famílias dos polinômios de Chebyshev: propriedades e algumas aplicações na análise númerica.* (Dissertação de Mestrado em matemática para professores) Faculdade de Ciências da Faculdade do Porto, Departamento de Matemática, 2018. 10

PEREIRA, M. V. *Recorrências - problemas e aplicações* (Dissertação Mestrado) - Universidade de Brasília. Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Matemática, 2014. 11, 34

SILVA, C. A. G. *Polinômios de Tchebyshev.* É Matemática, oxente - O Jornal de Matemática Olímpica. v. 2, p. 01-12, 2020. Disponível em: <https://ematematicaoxente.com.br/e-matematica-oxente-numero-14/>. Acessado em 14 de mar. 2023. 10, 12, 31, 32

SILVA, C. A. G. *É Matemática, oxente! Polinômios de Tchebyshev.* YouTube, 12 jul. 2022. Dísponivel em: <https://www.youtube.com/watch?v=EdJLCFLl$_u wt = 1s >$ $.Acessadoem : 14mar.2023.$ 10

SILVA, C. A. G. *PROLÍMPICO - 3° Edição - Polinômios de Tchebyshev.* YouTube, 25 ago. 2023. Dísponivel em: <https://www.youtube.com/watch?v=F57$_3 YGmJDQt =$ $3624s > .Acessadoem : 14mar.2023.$ 10

SOUZA, T. M. de *Apostila de LaTeX.* Nitéroi - RJ: Universidade Federal Fluminense, 2008. Disponível em: <https://www.telecom.uff.br/pet/petws/downloads/apostilas/LaTeX.pdf>. Acessado em: 20 de mar. 2023. 11

WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre.*Polinômios de Tchebyshev.* Flórida: Wikimedia Foundation, 2023. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Polinômios$_d e_T chebychev? >$ $.Acessadoem20demarçode$2023. 10

WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. *Pafnuty Chebyshev.* Flórida: Wikimedia Foundation, 2023. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Pafnuty$_C hebyshev >$ $.Acessadoem28deoutubrode$2023. 10, 12