UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Tese de Doutorado

EFEITOS DE FLUTUAÇÕES QUÂNTICAS DE VÁCUO DE CAMPOS ESCALARES EM OBSERVÁVEIS FÍSICOS EM ESPAÇOS-TEMPO COM TOPOLOGIA NÃO TRIVIAL

KLECIO EMANUEL LIMA DE FARIAS

João Passoa, PB
27 de novembro de 2022

KLECIO EMANUEL LIMA DE FARIAS

EFEITOS DE FLUTUAÇÕES QUANTICAS DE VÁCUO DE CAMPOS ESCALARES EM OBSERVÁVEIS FÍSICOS EM ESPAÇOS-TEMPO COM TOPOLOGIA NÃO TRIVIAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduacão em Física da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Física

Áreas de Concentração: Gravitação e Cosmologia.
Orientador: Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota.

João Pessoa, PB
27 de novembro de 2022

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F224e Farias, Klecio Emanuel Lima de.
Efeitos de flutuações quânticas de vácuo de campos escalares em observáveis físicos em espaços-tempo com topologia não trivial / Klecio Emanuel Lima de Farias. - João Pessoa, 2022.
115 f. : il.

Orientação: Herondy Francisco Santana Mota.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Teoria quântica - Efeito Casimir. 2. Espaço-tempo cônico. 3. Condições de contorno. 4. Fônons. 5. Temperatura. I. Mota, Herondy Francisco Santana. II. Título.

UFPB/BC CDU 530.145(043)

Elaborado por WALQUELINE DA SILVA ARAUJO - CRB-15/514

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **Klecio Emanuel Lima de Farias**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

Aos **vinte e oito dias do mês de julho de dois mil e vinte e dois**, às nove horas, reuniram-se, na Sala Virtual do Google Meet, os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Gravitação e Cosmologia, **Klecio Emanuel Lima de Farias**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Herondy Francisco de Santana Mota* (UFPB) - orientador e presidente da banca examinadora, *Eugênio Ramos Bezerra de Mello* (UFPB), *Valdir Barbosa Bezerra* (UFPB), *Vitório Alberto De Lorenci* (UNIFEI), *Nail Khusnutdinov* (UFABC). Dando início aos trabalhos, o Professor Herondy Francisco de Santana Mota comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para que o candidato fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "*Efeitos de Flutuações Quânticas de Vácuo de Campos Escalares em Observáveis Físicos em Espaços-Tempo com Topologia não Trivial*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: **"aprovado"**. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Maria do Socorro de Oliveira Souza, Assistente em Administração, lavrei a presente ata que será assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora.

Prof. Dr. Herondy Francisco de Santana Mota
Orientador - PPGF/UFPB

Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello - *PPGF/UFPB*

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra - *PPGF/UFPB*

Prof. Dr. Vitório Alberto De Lorenci - *UNIFEI*

Prof. Dr. Nail Khusnutdinov - *UFABC*

Maria do Socorro de Oliveira Souza
Assistente em Administração

Documento assinado digitalmente
gov.br
MARIA DO SOCORRO DE OLIVEIRA SOUZA
Data: 22/08/2022 15:15:37-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Klecio Emanuel Lima de Farias
Discente

Este trabalho é dedicado ao meu Pai que infelizmente, não se encontra mais entre nós, mas que foi a maior inspiração e exemplo de vida que alguém pode ter.

Agradecimentos

Primeiramente eu gostaria de agradecer aos meus pais por todo apoio e suporte para conseguir chegar ao fim desse doutorado, pois se aqui estou, foi total responsabilidade de ambos por me guiarem de forma correta por toda minha vida.

Agradeço também ao Prof. Dr. Herondy que além de um grande amigo, aceitou a missão de me orientar muito bem e com muita paciência durante todos os contra tempos que houveram desde o início deste curso.

Não posso deixar de agradecer a todos que entraram comigo no curso de doutorado, cujos juntos conseguimos nos livrar da qualificação, mostrando sempre cooperação total entre todos. Aos meus companheiros de sala Igor Oliveira, amigo de longa data e Fabiano pelas ótimas conversas e dicas dadas.

A minha namorada Kalina Ferreira, por toda a paciência e atenção dada, mesmo em momentos bem complicados. Aos meus amigos espalhados pelo mundo, e principalmente os que vinham frequentemente me visitar trazendo um pedaço de minha cidade natal, em especial Rodrigo, Victor Hugo, Douglas Vitoretti e Rafael Silva, esse último infelizmente nos deixando recentemente.

Por falar em amigos, agradeço a Gustavo, primeira pessoa que conheci na cidade que veio a se tornar um irmão para mim e a me apresentar tantas outras pessoas maravilhosas.

A todos os professores do departamento de Física, em especial professor Sérgio Azevedo pelas excelentes conversas e chás da tarde, além de compartilhar sua experiência nos motivando sempre. Ao novo professor do departamento Paulo Porfírio, pela agradável conversa diária e dicas dadas para a construção do projeto de pós-doutorado.

Ao nosso grupo de pesquisa recém formado, porém de qualidade inquestionável.

Por último agradecer a Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro dado.

Resumo

Na presente tese, consideramos efeitos de flutuações quânticas de vácuo de campos escalares como consequência de espaços-tempo com topologia não-trivial, condições de contorno e correções de temperatura.

O primeiro sistema físico que investigamos diz respeito a um campo escalar carregado que possui modos quânticos que se propagam em um espaço-tempo cônico, como o de uma corda cósmica ou desclinação. O campo escalar também é submetido a uma condição quase-periódica que generaliza as conhecidas condições periódica e anti-periódica bastante utilizadas na literatura. Neste sentido, calculamos expressões analíticas exatas e fechadas para a função de dois pontos de Wightman, para o valor esperado de vácuo (VEV) do campo escalar ao quadrado, bem como para o VEV de todas as componentes do tensor energia-momento. Adicionalmente, também consideramos o cálculo do VEV da densidade de corrente induzida pelo sistema em questão e obtivemos que a única componente não nula é a azimutal. Por fim, analisamos casos particulares para as expressões obtidas assumindo certos valores para os parâmetros associados ao espaço-tempo cônico e à quase-periodicidade [1].

Um segundo sistema físico considerado é o de um líquido clássico que efetivamente pode ser descrito em termos de suas vibrações sonoras quantizadas, ou seja, em termos de fônons. Na descrição efetiva considerada, os fônons são caracterizados por um campo escalar real não massivo que obedece uma equação de Klein-Gordon efetiva, com a velocidade da luz substituída pela velocidade do som. Deste modo, consideramos dois cenários para analisar a propagação dos modos sonoros. O primeiro deles é o espaço-tempo de Minkowski, onde o campo escalar real é submetido a condições de contorno do tipo Dirichlet, Neumann e mista aplicados a um e dois planos paralelos. No segundo cenário,

levamos em consideração que os modos quantizados do campo escalar se propagam no espaço-tempo com topologia cônica da corda cósmica, ou desclinação, e obedecem uma condição de contorno quase periódica. Assim, em cada cenário, obtemos expressões analíticas fechadas para a função de dois pontos e para a flutuação de densidade quadrática média renormalizada do líquido. Apontamos características específicas deste observável físico traçando seus gráficos [2].

Para complementar a análise do sistema de fônons, como generalização do trabalho estudado na Ref. [2], estudamos agora flutuações quânticas, à temperatura finita, de um líquido clássico induzidas pela topologia de um espaço-tempo com topologia cônica, bem como por uma condição de contorno quase periódica. O espaço-tempo cônico pode ser uma desclinação ou uma corda cósmica, como já mencionado. Neste contexto, consideramos novamente um campo de fônons representando excitações quânticas da densidade do líquido. O campo escalar real que descreve as excitações quânticas obedece uma equação de Klein-Gordon efetiva com a velocidade do som substituída pela velocidade da luz. Obtemos expressões analíticas fechadas para a função térmica de Hadamard e, consequentemente, a flutuação da densidade quadrática média renormalizada do líquido juntamente com grandezas termodinâmicas tais como energia interna, energia livre, energia total e densidades de entropia. Discutimos também os casos limites, incluindo regimes de baixas e altas temperaturas, e as situações em que há apenas o espaço-tempo cônico ou a quase periodicidade [3].

Palavras-chave: Efeito Casimir, espaço-tempo cônico, condições de contorno, fônons, temperatura.

Abstract

In the present thesis, we consider the effects of quantum vacuum fluctuations of scalar fields as a consequence of space-time with non-trivial topology, boundary conditions and temperature corrections.

The first physical system we investigate is that of a charged scalar field whose quantum modes propagate in a conical spacetime, such as cosmic string or disclination. The scalar field is also subject to a quasi-periodic condition that generalizes the well-known periodic and anti-periodic conditions widely used in literature. In this sense, we calculate exact and closed analytical expressions for the two-point Wightman function, for the vacuum expected value (VEV) of the scalar field squared, as well as for the VEV of all components of the energy-momentum tensor. Furthermore, we also consider the VEV of the current density induced by the system in question and obtained that the only non-zero component is the azimuthal one. Finally, we analyze particular cases for the obtained expressions assuming specific values for the parameters associated with the conical space-time and quasi-periodicity [1].

A second physical system considered is that of a classical liquid, which may effectively be described in terms of its quantized sound vibrations, that is, in terms of phonons. In the effective description considered, the phonons are characterized by a non-massive real scalar field that obeys an effective Klein-Gordon equation, with the speed of light replaced by the speed of sound. Thus, we consider two scenarios to analyze the propagation of sound modes. The first one is the Minkowski space-time, where the real scalar field is subject to Dirichlet, Neumann and mixed boundary conditions applied to one and two parallel planes. In the other scenario, we take into account that the quantized modes of the scalar field propagate in the space-time describing the conical topology of the cosmic string,

or declination, and obey a quasi-periodic boundary condition. Thus, in each scenario, we obtain closed analytical expressions for the two-point function and the renormalized mean square density fluctuation of the liquid. We point out specific characteristics of this physical observable by plotting its graphs [2].

To complement the analysis of the phonon system, as a generalization of the work conducted in Ref. [2], we have studied now quantum fluctuations, at finite temperature, of a classical liquid induced by the conical topology of a cosmic string, or disclination, as well as by a quasi-periodic boundary condition. In this context, we consider again a phonon field representing quantum excitations of the liquid density. The real scalar field describing quantum excitations obeys an effective Klein-Gordon equation with the speed of sound replaced by the speed of light. We obtain closed analytic expressions for the Hadamard thermal function and, consequently, for the fluctuations of the renormalized mean square density of the liquid along with thermodynamic quantities such as internal energy, free energy, total energy and entropy densities. We also discuss some limiting cases, including low and high-temperature regimes and situations in which there is either conical space-time or quasi-periodicity [3].

Keywords: Casimir effect, conic spacetime, boundary conditions, phonons, temperature.

Sumário

Introdução **14**

1 Resultados de teoria quântica de campos **21**

1.1 Mecânica Quântica Relativística 21

1.2 Teoria do Campo Escalar e Quantização 24

1.3 Teorema de Noether 28

1.4 Tensor Energia-Momento 30

1.5 Funções de Green 32

1.6 Efeito Casimir em $(3+1)D$ 36

2 Efeitos de flutuações quântica de vácuo em um espaço-tempo cônico com uma condição quase-periódica **42**

2.1 Função de Wightman 42

2.2 Observáveis físicos 49

2.2.1 Valor esperado de vácuo de $\Phi^2(x)$ 49

2.2.2 VEV do tensor energia-momento 52

2.2.3 Densidade de corrente induzida 57

3 Efeitos de condições de contorno e topologia não trivial nas flutuações da densidade de um líquido clássico **62**

3.1 Fônon em um líquido 63

3.2 Fônons em um espaço-tempo cônico 67

3.2.1 Flutuação da densidade quadrática média 70

3.2.2 Casos Particulares 71

3.3 Dirichlet, Neumann e condições de contorno mistas 73

3.3.1 Um plano 73
3.3.2 Dois planos paralelos 74

4 Efeitos quânticos de flutuações térmicas em um líquido clássico em um espaço-tempo cônico com uma condição quase-periódica 82

4.1 Flutuações térmicas na densidade quadrática média 83
4.1.1 Flutuação da densidade quadrática média 87
4.2 Energia interna, energia livre e energia total do sistema 91
4.2.1 Densidades de energia interna e livre 92
4.2.2 Densidade Total de Energia 94
4.3 Densidade de entropia 97

5 Conclusões e Perspectivas 100

Bibliografia 105

Lista de Figuras

1.1 Configuração das placas paralelas para a obtenção da força de Casimir . . 37

2.1 Imagens retiradas da Ref. [4] 44

2.2 Densidade de energia de vácuo renormalizada para o campo escalar massivo, $\rho = \langle T_0^0 \rangle_{\rm ren}$, em unidades de m^4, plotada em termos de mr (à esquerda) e β (à direita). Observe que o valor $\beta = 1/11$ foi tomado para o gráfico à esquerda e $mr = 1$ para o gráfico à direita. 53

2.3 Densidade de energia de vácuo escalar para o campo não massivo renormalizado, $\rho = \langle T_0^0 \rangle_{\rm ren}$, em unidades de r^{-4}, plotado em termos de β. 56

2.4 Densidade de corrente induzida renormalizada, (2.59), em unidades de m^4, plotada em termos de mr (à esquerda) e β (à direita). Observe que $\beta = 1/6$ foi tomado para o gráfico à esquerda e $mr = 1$ para o gráfico à direita. . . 58

2.5 Densidade de corrente induzida renormalizada, (2.61), em unidades de r^{-4}, plotada em termos de β para o caso não massivo. 60

3.1 Flutuação da densidade quadrática média renormalizada adimensional, (3.35), em termos de β, considerando valores diferentes para o parâmetro de corda cósmica q. 71

3.2 Flutuação de densidade quadrática média renormalizada adimensional, (3.63), como consequência de uma condição de contorno mista, em termos de z/a. 79

3.3 Flutuação da densidade quadrática média renormalizada adimensional, (3.64), em função de z/a. 80

4.1 Flutuação da densidade quadrática média para $b = 0,8$ (painel esquerdo) e $q = 1$ (painel direito) em função da temperatura. 90

4.2 Densidade de energia livre para $b = 0,8$ (painel esquerdo) e $q = 1$ (painel direito) em função da temperatura. 94
4.3 Densidade de energia total renormalizada para $b = 0$ (painel esquerdo) e $q = 1,5$ (painel direito) em função da temperatura. 97
4.4 Densidade de entropia para $b = 0,8$ (painel esquerdo) e $q = 1$ (painel direito) em função da temperatura. 98

Introdução

Os efeitos de flutuações do vácuo quântico surgem sempre que o estado fundamental de um campo relativístico (escalar, vetorial, fermiônico) é de alguma forma perturbado, seja pela implementação de condições de contorno ou pela presença de campos externos [5, 6, 7, 8]. Esses efeitos também ocorrem em espaços-tempo curvos, em princípio, unicamente como consequência da geometria ou da existência de uma topologia não trivial [6, 7, 8, 9, 10]. Evidentemente, condições de contorno e/ou campos externos também podem ser considerados nesses espaços-tempo curvos, caso em que ocorre um efeito associado a cada um desses ingredientes, separadamente. Pode-se citar, como exemplos de efeitos de vácuo quântico, flutuações do cone de luz clássico [11, 12], movimento browniano induzido [13, 14, 15], densidade de corrente induzida de um campo carregado [16, 17, 18] e os mais conhecidos, desvio de Lamb [5], efeito Casimir [5, 6, 7, 8, 19] e vários outros. Na presente tese, iremos apenas considerar o efeito Casimir e a densidade de corrente induzida.

Como previsto originalmente, e já verificado experimentalmente [20, 21, 22, 23, 24, 25], o efeito Casimir surge quando duas placas paralelas descarregadas são colocadas no vácuo, muito próximas, a uma distância da ordem de μm, resultando em uma interação atrativa entre as placas, como consequência da modificação das flutuações quânticas do vácuo do campo eletromagnético [26]. O cálculo da intensidade da força atrativa, é claro, é realizado considerando o espaço-tempo de Minkowski com o campo satisfazendo condições de Dirichlet em ambas as placas. No entanto, teoricamente, muitos trabalhos têm sido desenvolvidos considerando o efeito Casimir em espaços-tempo curvos, com topologia não trivial, juntamente com condições de contorno [6, 7, 8, 19]. Nesse contexto, o valor esperado de vácuo do tensor energia-momento também foi considerado [9, 10, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34]. Devemos lembrar que a densidade de energia de Casimir é a componente 00 do valor esperado de vácuo do tensor de energia-momento.

Outro observável físico de interesse é a densidade de corrente induzida associada a um campo carregado. No contexto da abordagem semi-clássica da teoria quântica de campos, por exemplo, o valor esperado de vácuo da densidade de corrente pode ser usado como fonte nas equações de Maxwell, proporcionando um maior entendimento da dinâmica do campo eletromagnético. Essa linha de pesquisa tem sido contemplada em diversos trabalhos nos últimos anos [16, 17, 18, 34]. Observe que, na ausência de um campo de calibre, pode existir uma densidade de corrente induzida quando, por exemplo, é adotada uma condição de contorno quase periódica, que é o caso que iremos considerar.

Um espaço-tempo muito interessante com topologia não trivial é aquele gerado pelo campo gravitacional de uma corda cósmica idealizada, ou seja, fina, reta e muito longa [35, 36, 37]. Corda cósmica é um defeito topológico com densidade linear de massa [38], previsto em muitas extensões do Modelo Padrão de física de partículas e, mais recentemente, no contexto da teoria das cordas [39, 40]. Cordas cósmicas podem ter várias consequências cosmológicas, gravitacionais e astrofísicas [35, 36, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45], o que torna sua física de grande interesse. Deve-se ressaltar que o análogo da corda cósmica em matéria condensada é a desclinação [46]. Ambos, corda cósmica e desclinação, são descritos por um espaço-tempo cônico.

O efeito Casimir pode ser usado para entender o comportamento de materiais em nanoescala e, nesse sentido, pode aparecer quando considera se, por exemplo, tubos de átomos de carbono (nanotubos de grafeno) na escala de comprimento da ordem de $10^{-9}m$, a escala exata em que o efeito Casimir se torna mais relevante. Um modelo análogo no qual uma condição de contorno quase periódica imita as propriedades dos nanotubos pode muito bem ser construído. Neste cenário, a condição de contorno quase periódica é introduzida por meio da identificação [10],

$$\Phi(t, r, \varphi, z) = e^{-2\pi i\beta}\Phi(t, r, \varphi + 2\pi, z), \tag{1}$$

causando uma dependência explícita do parâmetro β pelo campo escalar, Φ, obedecendo à condição. A conexão entre a condição de contorno quase periódica e a física de nanotubos ocorre pela maneira como a folha de carbono é cortada, determinando as propriedades do nanotubo. Isso está diretamente relacionado ao ângulo de fase cujos valores ocorrem no intervalo $0 \leq \beta < 1$. De acordo com a teoria, as propriedades de um nanotubo

são determinadas pelo vetor quiral (também conhecido como vetor circunferencial) $\vec{C} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2$, onde n_1 e n_2 são números inteiros conhecidos como índices quirais. O grafeno, por exemplo, apresenta uma simetria hexagonal, com o ângulo quiral assumindo valores entre 0° e 60°, embora muitas vezes possa ser encontrado em um intervalo $0° \leq 2\pi\beta \leq 30°$. Neste caso, outro nanotubo equivalente também pode ser encontrado no intervalo $30° \leq 2\pi\beta \leq 60°$ [47]. A diferença está na helicidade da rede de grafeno, onde os pontos ao redor do tubo mudam do lado direito para o esquerdo, modificando as propriedades ópticas do sistema. Em termos de pares quirais (n_1, n_2), existem dois casos especiais. Se escolhermos $\beta = 0$, isso caracteriza um nanotubo Zigzag com par quiral $(n_1, 0)$ que pode representar um semimetal quando $n_1 - n_2 = 3p$ ou um semicondutor quando $n_1 - n_2 \neq 3p$, com $p \in \mathbb{Z}$. Para $\beta = 1/3$, o ângulo de fase torna-se 60° e representa o nanotubo Armchair, que é sempre um nanotubo de metal descrito pelo par quiral (n, n), ou seja, $n_1 = n_2$. Além disso, o nanotubo quiral ocorre para o intervalo $0° < 2\pi\beta < 30°$, podendo ser semimetal ou semicondutor, seguindo as mesmas condições do caso do nanotubo Zigzag.

O papel do campo escalar na teoria do grafeno pode ser interpretado como sendo um potencial escalar, $\Phi(x)$, relacionado ao campo elétrico estático livre $E(x)$, dado por $E(x) = -\nabla_x\Phi(x)$ [48]. Ele pode ser usado na teoria quântica de campos para representar excitações de férmions de Dirac sem spin no grafeno, e suas flutuações podem ser relacionadas a um campo quântico caracterizando *plasmons*[1] no grafeno [49]. Outra aplicação é no contexto de nanorings de grafeno. Nesse caso, dependendo da forma do nanoring (Armchair ou Zigzag), ele pode ser caracterizado por um campo escalar dependente da posição denotado por $m(x)$, representando uma massa dependente da posição [50].

Semelhante aos fótons, que representam ondas de luz quantizadas, os fônons são quase-partículas (excitações coletivas) que podem ser interpretadas como ondas sonoras quantizadas devido à vibração de uma rede atômica. Assim, diversas propriedades podem ser examinadas em um sistema descrito por fônons, os quais são representados por um campo escalar real quântico. Em particular, se o comprimento de onda das excitações coletivas for muito maior que a distância interatômica, a relação de dispersão para os fônons

[1] Plasmons são excitações coletivas em decorrência de oscilações quantizadas de um plasma. São muitas vezes chamados de quase-partículas visto que não são exatamente partículas como elétrons, prótons e nêutrons. Mas exibem algumas características de partículas como carga e *spin*.

será aproximadamente linear[51], com o campo escalar real obedecendo uma equação de Klein-Gordon efetiva. Embora a teoria dos fônons tenha sido desenvolvida por Einstein em 1907 [52], e Debye em 1912 [53], somente em 1941 a mesma foi aplicada ao superfluido por Landau [54] e posteriormente, em um sistema constituído por um líquido clássico, por Percus e Yevick (1958) [55]. Além disso, muitos estudos sobre propriedades de fônons em fluidos foram publicados tais como supercondução por interação fônon-elétron [56], espalhamento fônon-fônon [57], e na capacidade calorífica de vários fluidos [58].

Além disso, como se sabe, a presença de condições de contorno e a topologia não trivial, assim como a geometria do espaço-tempo, podem modificar o comportamento quântico das propriedades do sistema, como, por exemplo, alterar as flutuações quânticas de vácuo de um campo quântico. O caso de um líquido clássico não é diferente, ou seja, as mudanças locais em sua densidade de massa dependem da topologia ou geometria do espaço-tempo efetivo e da condição de contorno sob a qual o líquido é submetido. Neste contexto, Unruh [59] propôs um experimento envolvendo ondas sonoras em um fluido como um modelo análogo para estudar a evaporação de buracos negros. Mais recentemente, do ponto de vista cosmológico e astrofísico, foi considerado um superfluido de fônons para estudar a matéria escura [60, 61, 62].

Ao descrevermos o sistema do líquido clássico em termos de suas vibrações sonoras quantizadas, podemos submeter à condições de contorno específicas os modos sonoros (fônons) descritos por um campo escalar real para obter um efeito Casimir análogo [26], de forma similar ao que é feito no contexto da teoria quântica de campos. Consequentemente, podemos considerar um líquido clássico que simula um cenário em que é possível calcular flutuações de densidade, da mesma forma que para o efeito Casimir, porém substituindo a velocidade da luz pela velocidade do som [63]. Originalmente, as flutuações de densidade foram calculadas por L. H. Ford [64, 65], considerando uma topologia não trivial, como a topologia cônica da corda cósmica ideal e diferentes condições de contorno.

Na teoria quântica de campos, como já mencionado, os fônons são representados por um campo escalar real sem massa com spin-0. Como o campo escalar pode ser submetido a condições de contorno, alterações nas flutuações quânticas do seu estado fundamental (vácuo quântico) serão exibidas. Isso foi considerado, por exemplo, por T. H. Boyer [66], no caso de duas placas paralelas, onde uma delas é uma placa condutora perfeita e a outra

infinitamente permeável. Para realizar este estudo, Boyer utilizou condições de contorno mistas para representar possíveis diferenças nas propriedades das placas e encontrou um resultado repulsivo, em que a força foi multiplicada pelo fator 7/8, em contraste com a força atrativa que surge entra às duas placas quando são submetidas apenas às condições de contorno de Dirichlet ou Neumann, por exemplo. Assim, a diferença nos fatores multiplicativos é atribuída a diferença nas propriedades das placas.

Sabemos também que a teoria quântica de campos à temperatura zero está bem estabelecida e constitui a base do Modelo Padrão da Física de Partículas, fornecendo várias previsões que foram verificadas com alta precisão através de experimentos. No entanto, temperatura exatamente zero não ocorre no universo e, para termos modelos mais realistas, é preciso incluir correções de temperatura. A presença da temperatura modifica o comportamento e as propriedades do sistema, como visto, por exemplo, no estudo de supercondutores realizado pelo físico holandês Heike Kamerlingh Onnes que descobriu em 1911 que em baixas temperaturas, a resistência elétrica do material vai para zero [67]. No entanto, um modelo de temperatura finita é geralmente mais complicado do que o de temperatura zero, exigindo técnicas matemáticas ou mesmo numéricas mais sofisticadas.

Por outro lado, o modelo de vibração da rede proposto por Einstein em 1907 e Debye em 1912 [52, 53] tornou possível conectar as vibrações elementares de um sólido com o calor específico. Quanticamente, como as vibrações da rede podem ser entendidas por meio de excitações sonoras quantizadas, a transferência de calor neste cenário foi estudada recentemente em [68], reforçando que a teoria dos fônons está relacionada de forma direta com a temperatura. Assim, torna-se natural explorar os efeitos térmicos e quânticos quando os fônons são incluídos em um sistema, uma vez que representam vibrações quânticas em sólidos e fluidos. Embora o sólido e o fluido se diferenciem pela organização da rede atômica, as grandezas termodinâmicas do fluido podem ser interpretadas da mesma forma que as do sólido com a diferença da possível direção de polarização das ondas sonoras, que no fluido é apenas longitudinal e no sólido longitudinal e transversal [51]. Assim, a temperatura mostra-se de alta significância, uma vez que as excitações sonoras aumentam com a temperatura.

Outro componente que afeta as flutuações quânticas de um campo é a topologia do espaço-tempo, onde os modos dos fônons podem se propagar. A topologia não trivial

do espaço-tempo induz uma modificação nas flutuações quânticas do campo, da mesma forma que uma condição de contorno também induz [19, 7, 69, 70, 71, 72, 73]. O espaço-tempo de uma corda cósmica, por exemplo, tem uma topologia cônica que é descrita pelo parâmetro da corda cósmica $q > 1$. Este último está associado à densidade de massa linear da corda cósmica, μ_0, por meio da relação $q^{-1} = 1 - G\mu_0$, onde G é a constante gravitacional de Newton [35, 36, 37]. Em contraste, no caso de uma desclinação, o defeito análogo da corda cósmica em matéria condensada, o parâmetro de desclinação assume valores tais que $q > 0$ [46].

Além da topologia não trivial do espaço-tempo, a flutuação quântica de um campo também pode ser modificada por uma condição de contorno imposta [19]. De particular interesse, temos o espaço-tempo cônico da corda cósmica ou da desclinação em conjunto com a condição quase periódica dada por (1) aplicada ao campo. Observe que recuperamos a condição periódica conhecida para $\beta = 0$, bem como a condição anti-periódica para $\beta = 1/2$. Assim, a solução da equação de movimento apresentará a dependência explícita do parâmetro q, bem como do parâmetro β, como veremos.

No contexto dos efeitos de temperatura finita considerando a topologia cônica do espaço-tempo da corda cósmica, Davies e Sahni [74] analisaram a corda cósmica imersa em um banho de radiação de calor primordial. Além disso, os efeitos térmicos foram explorados em vários outros cenários usando a ação euclidiana [75, 76, 77] e o método do heat-kernel [78, 79]. Recentemente, os efeitos de temperatura finita na densidade de corrente induzida considerando sistemas fermiônicos e bosônicos no espaço-tempo da corda cósmica também foram estudados [80, 81]. No presente trabalho, desejamos investigar os efeitos térmicos em um cenário onde um campo quântico de fônons está sujeito a uma condição quase periódica e cujos modos se propagam em um espaço-tempo com topologia cônica, que pode ser uma corda cósmica ou uma desclinação. Os modos dos fônons representam vibrações em um meio líquido da mesma forma que considerado na Ref. [2] à temperatura zero, proporcionando uma boa oportunidade para estudar um sistema análogo em matéria condensada, ao efeito Casimir na teoria quântica de campos. Aqui, a função térmica de Hadamard é obtida nesta configuração e permite calcular observáveis físicos termalizados como a densidade do líquido, energia interna, energia livre e densidades de entropia. Este método introduz correções de temperatura nos observáveis

usando a matriz de densidade e a função de partição associada a uma relação de anti-comutação entre a solução de campo e seu complexo conjugado.

A presente tese está organizada da seguinte forma: no capítulo 1 será mostrado alguns resultados de teoria quântica de campos necessários para desenvolver a presente tese, incluindo uma seção para uma breve revisão do efeito Casimir. No capítulo 2 estudamos um sistema constituído pela condição (1) em conjunto com o espaço tempo com topologia cônica da corda cósmica ou da desclinação. Neste cenário, analisamos o VEV do tensor energia-momento de campo escalar complexo, bem como o VEV da densidade de corrente induzida. No capítulo 3 consideramos o mesmo sistema adotado no capítulo 2, assim como também consideramos condições de contorno de Dirichlet, Neumann e mista. Analisamos a influência desses elementos nas vibrações sonoras quantizadas de um fluido clássico, simulando assim um efeito Casimir análogo. Já no capítulo 4 fazemos uma extensão à temperatura finita do estudo feito no capítulo 3 para modelos de fônons no espaço-tempo da corda cósmica em conjunto com a condição anti-periódica (1). Neste sentido, calculamos quantidades termodinâmicas tais como a densidade do líquido, energia interna, energia livre e densidades de entropia. Por último, encerramos a tese no capítulo 5 apresentando as conclusões.

Capítulo 1

Resultados de teoria quântica de campos

Neste capítulo será feito um resumo de resultados fundamentais de Teoria Quântica de Campos (TQC) para o desenvolvimento do trabalho. Sabemos da enorme abrangência dessa teoria, porém, aqui vamos nos limitar basicamente a teoria para campos escalares. Em geral, as referências tomadas para a escrita dos capítulos são alguns livros os quais serão citados no devido momento, em conjuntos com notas de aulas acumuladas durante todo o percurso acadêmico.

1.1 Mecânica Quântica Relativística

Vamos nesse momento revisar alguns conceitos básicos de teoria da relatividade especial, entre eles o espaço-tempo de Minkowski e as transformações de Lorentz, necessários para a descrição de uma mecânica quântica relativística. Além disso, vamos aqui definir notações que serão usadas ao decorrer da presente tese tomando como base as Refs. [82, 83, 84].

A descrição do espaço-tempo será representada pelo quadrivetor

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^\mu), \qquad x^0 = ct. \tag{1.1}$$

A métrica usual para o espaço tempo quadridimensional é dada pelo tensor fundamental

$g_{\mu\nu}$, que é conhecido como métrica (ou espaço-tempo) de Minkowski, descrito pela matriz

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

ou ainda pela notação $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Já o produto escalar no espaço de Minkowski é dado por

$$x \cdot y = x^{\mu} g_{\mu\nu} x^{\nu} = x^0 \cdot y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}, \tag{1.3}$$

onde temos a mudança de índices ocasionada pela aplicação da métrica ao quadrivetor

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu}. \tag{1.4}$$

A inversa de $g_{\mu\nu}$ será denotada por $g^{\mu\nu}$ os quais são tensores covariantes e contravariantes, respectivamente. Note que a componente temporal do vetor é invariante diante da operação (1.4) utilizando a métrica, enquanto as componentes espaciais tem o sinal invertido.

Seja a transformação de Lorentz $\Lambda \ : \ x \to x'$, em que é dada da seguinte maneira

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}. \tag{1.5}$$

Porém, essa transformação deve ser invariante ao tomarmos o produto escalar. Dessa forma, a transformação deve ocorrer tal que

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma}. \tag{1.6}$$

Consequentemente, das Eqs. (1.3), (1.5), (1.6), segue a invariância do produto escalar

$$x' \cdot y' = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} x^{\rho} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} y^{\sigma} = x^{\rho} g_{\rho\sigma} y^{\sigma} = x \cdot y. \tag{1.7}$$

Observe que a transformação dos vetores covariantes se dá por

$$x'_{\mu} = g_{\mu\nu} x'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} x^{\alpha} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\alpha} g^{\alpha\beta} x_{\beta} = \Lambda_{\mu}{}^{\beta} x_{\beta}. \tag{1.8}$$

Para um *boost* na direção x, a matriz $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ possui a forma:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Consequentemente, as transformações de Lorentz correspondentes são dadas por

$$x^{1\prime} = \gamma(x^1 - \beta ct), \quad x^{2\prime} = x^2, \quad x^{3\prime} = x^3, \quad ct' = \gamma(ct - \beta x^1), \tag{1.10}$$

sendo $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$. O significado físico dessa transformação se dá no fato de que a velocidade da luz é a mesma para qualquer sistema inercial.

Considerando agora as derivadas, temos as seguintes notações

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}; \qquad (\partial_\mu) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right). \tag{1.11}$$

Dessa forma, a parte contravariante da derivada é dada por $(\partial^\mu) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$. Temos ainda o operador D'alembertiano $\Box$, o qual é definido como o produto das derivadas covariante e contravariante

$$\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \tag{1.12}$$

onde Δ é o operador Laplaciano. É importante destacar que o operador D'alembertiano é invariante mediante transformações de Lorentz, isto é, $\partial'_\mu \partial'^\mu = \partial_\mu \partial^\mu$.

Podemos definir o quadrivetor p^μ, também chamado de quadrimomento que é a generalização do vetor momento clássico em 3 dimensões, escrito em um espaço de 4 dimensões. Este quadrivetor é escrito da seguinte forma

$$(p^\mu) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right). \tag{1.13}$$

O produto escalar $p_\mu p^\mu$, o qual também é um invariante de Lorentz, é dado por

$$p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2 c^2. \tag{1.14}$$

O procedimento de quantização a ser adotado, na sequência, permite que energia E e momento $\vec{p}$ sejam promovidos a operadores de tal forma que:

$$E \ \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \tag{1.15}$$

$$\vec{p} \ \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla. \tag{1.16}$$

Considerando agora a relação relativística energia-momento expressa pela Eq. (1.14), os operadores acima definidos, após atuarem em uma dada função $\psi(x)$, fornecem

$$(\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 c^2)\psi(x) = 0. \tag{1.17}$$

A equação (1.17) é conhecida como equação de Klein-Gordon. Ela foi proposta em 1926 como a descrição relativística para a equação de Schrödinger. O procedimento usado para chegar na Eq. (1.17) é chamado de primeira quantização. Além disso, para $m = 0$, ela é reduzida para a equação de onda. No início, quando foi proposta, a equação de Klein-Gordon apresentou um problema devido à densidade de probabilidade não ser positiva definida, além da energia negativa por causa da segunda ordem da derivada temporal, o que não ocorria na equação de Schrödinger devido à linearidade temporal da equação. Mais tarde essa energia negativa foi atribuída a antipartículas, solucionando o problema da energia negativa da equação de Klein-Gordon. Apesar dos problemas iniciais, a equação de Klein-Gordon é utilizada para descrever partículas de spin-0, uma vez que na teoria para campos escalares não há graus de liberdade que possamos associar ao spin da partícula, consequentemente não contém spin.

1.2 Teoria do Campo Escalar e Quantização

Como sabemos, um campo escalar associa um valor escalar a cada ponto do espaço e, além disso, é invariante pelas transformações de Lorentz. Nesta seção vamos trabalhar de uma forma mais detalhada os resultados para a teoria do campo escalar.

Seja um campo escalar $\varphi(t, x)$ definido em todos os pontos $(t, \vec{x})$ do espaço-tempo de Minkowski em n dimensões. Esse campo satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\varphi = 0, \tag{1.18}$$

onde consideramos unidades naturais tais que $\hbar = c = 1$, $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ e $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico no espaço de Minkowski. Algo que precisa ser destacado, é que ao quantizarmos a teoria, essa massa é atribuída ao campo.

A equação (1.18) pode ser obtida a partir da densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - m^2\varphi^2), \tag{1.19}$$

em que tomando a integral com relação as todas as n dimensões da densidade de lagrangiana acima, definimos a ação da teoria escalar como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int \mathcal{L}(x) d^{n-1}x. \tag{1.20}$$

Agora considerando que a evolução do sistema entre os instantes t_1 e t_2 é dado de modo que obedeça ao princípio de Hamilton, as variações em relação a φ devem satisfazer

$$\delta S = 0. \tag{1.21}$$

A solução para a Eq. (1.18) é uma solução do tipo onda plana, a qual é expressa por

$$\varphi(t, \vec{x}) = Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}, \tag{1.22}$$

em que A é uma constante de normalização e ω é a frequência angular de oscilação do campo, escrita como

$$\omega \;\; = \;\; (k^2 + m^2)^{1/2}, \tag{1.23}$$

com o módulo do vetor de onda $\vec{k}$ dado por

$$k \;\; = \;\; |\vec{k}| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i^2 \right)^{1/2}. \tag{1.24}$$

Além disso, as componentes cartesianas de $\vec{k}$ podem assumir os valores

$$-\infty < k_i < \infty; \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

No conjunto de soluções da Eq. (1.22) encontram-se apenas as soluções cujas frequências são positivas com relação a t, e que são autofunções do operador $\partial/\partial t$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, \vec{x}) = -i\omega\varphi(t, \vec{x}); \quad \omega > 0. \tag{1.25}$$

Já a constante de normalização A presente na solução de onda plana (1.22), é obtida usando a expressão geral [85]

$$-i \int d^n x \sqrt{-g} \left\{ \varphi_\sigma(x)[\partial_t \varphi^*_{\sigma'}(x)] - [\partial_t \varphi_\sigma(x)]\varphi^*_{\sigma'}(x) \right\} = \delta_{\sigma\sigma'}, \tag{1.26}$$

em que σ representa o conjunto de números quânticos do sistema e o símbolo delta no lado direito da equação acima é a função delta de Dirac quando o número quântico for contínuo, e delta de Kronecker quando o mesmo for discreto.

Em se tratando de campos clássicos, apesar de solucionar diversos problemas como os presentes na eletrodinâmica clássica, muitos fenômenos que exibem propriedades quânticas não podem ser explicados apenas por campos clássicos, como é o caso do efeito

fotoelétrico, por exemplo. Dessa forma, tais fenômenos podem ser melhores explicados utilizando o conceito de partículas, decorrente de um campo quantizado. Com isso, utilizamos um procedimento chamado de quantização, o qual permite explicar toda uma fenomenologia da mecânica quântica usando um conceito modificado de campos.

O processo de quantização consiste na transformação das variáveis canônicas em operadores e dos parênteses de Poisson em comutadores, ou seja, tratando o campo φ como um operador e impondo as seguintes relações de comutação considerando tempos iguais

$$\begin{aligned} [\varphi(t,\vec{x}),\varphi(t,\vec{x}\,')] &= 0, \\ [\pi(t,\vec{x}),\pi(t,\vec{x}\,')] &= 0, \\ [\varphi(t,\vec{x}),\pi(t,\vec{x}\,')] &= i\delta^{n-1}(\vec{x}-\vec{x}\,'). \end{aligned} \tag{1.27}$$

Note que π é a variável canonicamente conjugada a φ definida por

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial(\partial_t\varphi))} = \partial_t\varphi. \tag{1.28}$$

Com o sistema quantizado, a evolução temporal dos operadores vem da relação

$$\frac{dA}{dt} = -i[A,H], \tag{1.29}$$

com A sendo um operador genérico e H a hamiltoniana do sistema. Daí, temos que φ e π evoluem temporalmente por

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t,\vec{x}) &= i[H,\varphi(t,\vec{x})], \\ \dot{\pi}(t,\vec{x}) &= i[H,\pi(t,\vec{x})], \end{aligned} \tag{1.30}$$

em que para o caso do campo escalar real, a hamiltoniana H é dado por

$$H = \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\left(\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right). \tag{1.31}$$

Temos ainda que a combinação das Eqs. (1.30) e (1.31), nos confirma que φ também satisfaz a equação de Klein-Gordon.

Como consequência da quantização, a solução da equação de Klein-Gordon (1.22) pode então ser escrita em termos de uma decomposição de Fourier. Assim as soluções (1.22) e seus respectivos complexos conjugados formam uma base ortonormal completa que satisfazem o produto escalar (1.26). Desta forma, o operador campo $\hat{\varphi}$ pode ser expandido como

$$\hat{\varphi}(t,\vec{x}) = \sum_k A[a_{\vec{k}}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} + a^\dagger_{\vec{k}}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}], \tag{1.32}$$

em que $a_{\vec{k}}$ e $a^{\dagger}_{\vec{k}'}$ são, respectivamente, os operadores de destruição e criação de estados. Partindo agora do ponto em que as relações de comutação entre φ e π são equivalentes, então têm-se as seguintes relações de comutação entre os operadores $a_{\vec{k}}$ e $a^{\dagger}_{\vec{k}'}$:

$$\begin{aligned} [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] &= 0, \\ [a^{\dagger}_{\vec{k}}, a^{\dagger}_{\vec{k}'}] &= 0, \\ [a^{\dagger}_{\vec{k}}, a^{\dagger}_{\vec{k}'}] &= \delta_{k,k'}. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Na descrição de Heisenberg para a mecânica quântica, o estado quântico $|\psi\rangle$ não muda conforme o tempo, e reside no espaço de Hilbert. Dessa forma, se faz conveniente tomar uma base no espaço de Hilbert mais adequada a tal invariância temporal. Para tal, usamos a chamada representação Fock. Logo, os vetores Ket de base normalizada, denotados por $|\ \rangle$, podem ser construídos a partir do vetor $|0\rangle$, chamado de vácuo, ou estado de nenhuma partícula. O estado $|0\rangle$ tem a propriedade de ser aniquilado ou criado por todos os operadores a_k e $a^{\dagger}_k$ respectivamente:

$$a_k|0\rangle = 0, \quad |1_k\rangle = a^{\dagger}_k|0\rangle; \quad \forall k. \tag{1.34}$$

Além disso, a partir do estado de vácuo podemos encontrar o valor esperado renormalizado da energia de vácuo, o qual para um espaço-tempo sem condições de contorno ou fronteira é zero. A renormalização se trata de um método usado para se extrair uma parte finita da energia de vácuo provenientes da perturbação do vácuo quântico. Existem diversas formas de renormalização, onde algumas serão usadas nessa tese e descritas conforme a necessidade. Ao se introduzir condições de contorno ou fronteira, esse valor esperado do vácuo passa a ser diferente de zero, caracterizando o conhecido efeito Casimir [26].

Podemos agora construir estados de muitas partículas aplicando diversos operadores de criação ao estado de vácuo, desde que todos os seus momentos $k_1, k_2, \ldots, k_j$ sejam distintos para o caso de férmions respeitando o princípio de exclusão de Pauli, mas podendo ser iguais para bósons, obtendo assim $|1_{k_1}, 1_{k_2}, \ldots, 1_{k_j}\rangle = a^{\dagger}_{k_1} a^{\dagger}_{k_2} \ldots a^{\dagger}_{k_j}|0\rangle$. Ao aplicarmos o operador de criação $a^{\dagger}_k$ diversas vezes no vácuo, obtemos $(n!)^{-1/2}(a^{\dagger}_k)^n|0\rangle = |n_k\rangle$. O termo $n!$ um fator de normalização que surge ao aplicarmos sucessivas vezes o operador criação. Além disso, temos ainda a relação desses operadores atuando em um estado $|n\rangle$, sendo a algebra descrita por $a^{\dagger}_k|n_k\rangle = (n+1)^{1/2}|(n+1)_k\rangle$ para o operador de criação, e $a_k|n_k\rangle = n^{1/2}|(n-1)_k\rangle$ para o operador de destruição.

Seguindo a álgebra dos operadores atuando em um estado quântico, vamos então introduzir o operador N, também chamado de operador número através da relação

$$N = \int d^3k a_k^\dagger a_k. \tag{1.35}$$

Devido a não comutatividade dos operadores de criação e destruição, operador número possui uma característica de corresponder ao número de partículas em cada estado do sistema, como veremos abaixo

$$\begin{aligned} &N|0\rangle = 0, \\ &Na_{k_1}^\dagger|0\rangle = a_{k_1}^\dagger|0\rangle, \\ &Na_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger|0\rangle = 2a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger|0\rangle, \\ &\quad\vdots \\ &Na_{k_1}^\dagger \cdots a_{k_n}^\dagger|0\rangle = na_{k_1}^\dagger \cdots a_{k_n}^\dagger|0\rangle. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Desta forma, o operador número também é conhecido como operador número de partículas. Mais detalhes e propriedades desses operadores podem ser encontradas nas referências [6, 86], uma vez que aqui vamos nos concentrar apenas no necessário para o desenvolver da presente tese.

1.3 Teorema de Noether

É conhecido da mecânica clássica que a invariância da ação conduz a existência de simetrias que estão associadas à grandezas conservadas. Desta forma, invariância da ação por translações espaciais, rotações e translações temporais está associada à conservação do momento linear, momento angular e energia, respectivamente. Formalmente, é o teorema de Noether quem estabelece a conexão entre cada simetria obedecida pela lagrangiana e a correspondente grandeza conservada [87].

Teorema (Teorema de Noether)**.** *A todo grupo de transformações continuas de φ que mudam $\mathcal{L}$, no máximo por uma divergência, existe associada uma corrente conservada.*

Para uma descrição de teoria de campos local, seja a densidade lagrangiana uma função local do campo $\varphi(x)$ e suas derivadas. Consideramos a transformação infinitesimal abaixo

$$\varphi(x) \mapsto \varphi'(x) + \alpha\delta\varphi(x), \tag{1.37}$$

com α sendo um parâmetro infinitesimal, e $\delta\varphi$ descreve a variação da configuração de campo. Chama-se essa transformação de simetria, caso a equação de movimento decorrente das equações de Euler-Lagrange seja invariante por tais transformações. Este será o caso se o efeito das transformações permanecer invariante. No entanto, também é possível que o efeito mude por um termo de superfície, uma vez que isso não desempenha um papel no cálculo das equações de Euler-Lagrange (ou seja, as equações de movimento). Para que (1.37) defina uma simetria, a lagrangiana deve se transformar como

$$\mathcal{L}(x) \mapsto \mathcal{L}(x) + \alpha\delta\mathcal{L}(x) \tag{1.38}$$

onde $\delta\mathcal{L}(x) = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x)$. Por outro lado, podemos calcular a variação de $\mathcal{L}$ diretamente. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \alpha\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}(\alpha\delta\varphi) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\partial_\mu(\alpha\delta\varphi) \\ &= \alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi\right) + \alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\right](\delta\varphi). \end{aligned} \tag{1.39}$$

Usando as equações de Euler-Lagrange no segundo termo, o mesmo se torna zero, e o restante pode ser escrito como $\partial_\mu j^\mu = 0$. Isso mostra que sempre que houver uma simetria contínua associada a um sistema, podemos definir uma corrente dada por

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\delta\varphi - \mathcal{J}^\mu, \tag{1.40}$$

que é conservada.

Além disso, em se tratando de corrente conservada, podemos também definir uma carga associada

$$Q = \int d^3x J^0(t, \mathbf{x}), \tag{1.41}$$

tal que será constante no tempo e vai gerar as transformações de simetria. Tomando a derivada com relação ao tempo em ambos os lados da equação acima, obtemos como resultado

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \int d^3x \partial_t J^0(t, \mathbf{x}) \\ &= -\int d^3x \vec{\nabla}\cdot\vec{J}(t, \mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Logo, percebemos que a carga também é conservada. Torna-se importante destacar que se existe uma simetria, existirá também uma carga conservada que é a geradora das transformações de simetrias infinitesimais. A recíproca também é verdadeira, ou seja, se existir uma carga conservada na teoria, através de relações de comutação, ela gera transformações infinitesimais. Em resumo, esse é o teorema de Noether, muito importante no estudo de simetrias em sistemas dinâmicos.

Como exemplo de aplicação do teorema de Noether, vamos usar a equação de Klein-Gordon, cuja densidade lagrangiana $\mathcal{L}$ é dada por

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \varphi|^2 - m^2|\varphi|^2, \tag{1.43}$$

em que $|\varphi|$ é um campo escalar complexo. A densidade lagrangiana (1.43) é invariante sob a transformação de calibre de primeira espécie

$$\varphi(x) \mapsto e^{i\alpha}\varphi(x), \tag{1.44}$$

com α constante. Para α infinitesimal temos que

$$\varphi(x) \mapsto \varphi(x) + i\alpha\varphi(x). \tag{1.45}$$

o que significa

$$\delta\varphi(x) = i\varphi(x), \qquad \delta\varphi(x)^* = -i\varphi(x)^*. \tag{1.46}$$

Neste caso, temos que a quantidade $\mathcal{J}^\mu = 0$ e o valor da corrente se torna

$$j^\mu(x) = i\left[(\partial^\mu\varphi^*)\varphi - \varphi^*(\partial^\mu\varphi)\right], \tag{1.47}$$

onde as componentes do quadrivetor são $j^\mu \equiv (j^0, \vec{j}) \equiv (\rho, \vec{j})$. Assim, definimos a densidade de probabilidade, ρ, e a densidade de corrente, $\vec{j}$.

1.4 Tensor Energia-Momento

Outra consequência do teorema de Noether é a obtenção do tensor energia-momento. Para isso, vamos considerar um translação no espaço-tempo $x \mapsto x'^\mu = x^\mu - a^\mu$ tal que essa transformação nos leva a transformação de campo [84]

$$\varphi(x) \mapsto \varphi(x + a) = \varphi(x) + a^\mu\partial_\mu\varphi(x). \tag{1.48}$$

Aqui assumimos que a densidade lagrangiana depende explicitamente apenas dos campos e de suas derivadas. Com isso,

$$\mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)). \tag{1.49}$$

Uma vez que a lagrangiana é um escalar, a mesma também tem uma transformação infinitesimal da forma

$$\mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L} + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + a_\nu \partial_\mu (\eta^{\mu\nu} \mathcal{L}). \tag{1.50}$$

Da equação (1.39) obtida no teorema de Noether, temos que

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi \right). \tag{1.51}$$

Logo, ao substituirmos as equações (1.49) e (1.50) no resultado (1.51), obtemos

$$a_\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu \varphi)} \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) = 0. \tag{1.52}$$

Como a_ν é um parâmetro arbitrário, podemos reescrever a equação acima na notação

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{1.53}$$

onde

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \varphi)} \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \tag{1.54}$$

é o tensor energia-momento.

A partir do tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, podemos encontrar os operadores hamiltoniano e de momento para o campo. Esses operadores são de grande importância para explorarmos o significado físico por trás dos estados de Fock já definidos anteriormente, além de carregarem informações que podem ser extraídas do sistema. Considerando a densidade de lagrangiana para o campo de Klein-Gordon, o tensor energia-momento será [6]:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \eta_{\mu\nu}, \tag{1.55}$$

o qual se obtém a densidade hamiltoniana tomando as coordenadas temporais do tensor, ou seja,

$$T_{tt} = \frac{1}{2} \left[(\partial_t \varphi)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\partial_i \varphi)^2 + m^2 \varphi^2 \right]. \tag{1.56}$$

Já para a densidade de momento temos

$$T_{ti} = \partial_t \varphi \partial_i \varphi; \quad i = 1, \ldots, n-1 \tag{1.57}$$

em termos de coordenadas de Minkowski. Vale ressaltar que para o lagrangiana do campo de Klein-Gordon, o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ é simétrico.

Os operadores hamiltoniano e momento são obtidos após uma integração em todo o espaço. Assim, seja a solução de onda livre φ dada por (1.32) e substituindo na equação (1.55) chegamos a expressão final para a hamiltoniana em termos dos operadores de criação e destruição ao tomarmos as coordenadas temporais do tensor energia-momento. Com isso chegamos em

$$H = \frac{1}{2} \int d^{n-1}k (a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k)\omega = \int d^{n-1}k (a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2})\omega. \tag{1.58}$$

Considerando agora uma componente temporal e outra espacial do tensor energia-momento, obtemos

$$P_i = \int_t d^{n-1}x \; T_{ti} = \int d^{n-1}k \; a_k^\dagger a_k k_i, \tag{1.59}$$

o qual é o operador momento. Os detalhes de como obter esses resultados pode ser encontrado na Ref. [88].

Retornando para a Eq. (1.58), podemos observar que na hamiltoniana, a soma é infinita, pois se trata das energias do estado fundamental de infinitos osciladores harmônicos, também conhecida como energia de ponto zero. Essa energia pode ser removida do cálculo através do processo de renormalização o qual não vamos entrar em detalhes, uma vez que essa energia, mesmo que divergente, é de nosso interesse. Se não calcularmos essa energia em todo espaço, mas considerarmos que esteja limitado em um pequeno espaço entre duas placas paralelas, vamos obter uma energia dependente do espaço entre essas placas, o qual gera uma força entre elas. Esta força, também conhecida como efeito Casimir é uma evidência da existência da flutuação do vácuo, que será melhor contextualizado mais à frente.

1.5 Funções de Green

Em teoria de campos, as funções de dois pontos, mais conhecidas como funções de Green, têm um papel essencial para a teoria, uma vez que elas carregam informações do

sistema físico. Nesta tese vamos mostrar algumas aplicações nas quais a função de Green é fundamental para a obtenção dos observáveis físicos. Basicamente, a função de Green (função de dois pontos) fornece a amplitude de probabilidade de que uma dada partícula é criada em um ponto x do espaço, e observada em um outro ponto x'.

Além disso, a descrição da função de Green em teoria de campos não é idêntica à usada em teoria das equações diferenciais. Embora a função de Green também satisfaça uma equação com uma função δ no lado direito da mesma, esta equação é geralmente não linear. As funções de Green de partículas livres são exceções: são as funções de Green das equações lineares para os operadores de campo de Heisenberg [89]. O termo função Green foi originalmente aplicado apenas a este caso, mas foi posteriormente estendido para qualquer sistema interativo.

As várias funções de Green podem ser expressas como valores esperados de produtos de operadores de campo em vários estados, sendo o mais comum para o estado de vácuo (valor esperado do vácuo). Em termos de campo escalar, é de particular importância o valor esperado do anticommutador dos campos, denotado por

$$G^{(1)}(x,x') = \langle 0|\{\varphi(x),\varphi(x')\}|0\rangle, \tag{1.60}$$

onde $G^{(1)}$ é chamado de função elementar de Hadamard [6]. Essa função de Green pode ser dividida em suas partes de frequência positiva e negativa como

$$G^{(1)}(x,x') = W^{+}(x,x') + W^{-}(x,x'), \tag{1.61}$$

em que $W^{\pm}$ é conhecida como funções de Wightman, que são dadas por

$$\begin{aligned} W^{+}(x,x') &= \langle 0|[\varphi(x)\varphi(x')]|0\rangle, \\ W^{-}(x,x') &= \langle 0|[\varphi(x')\varphi(x)]|0\rangle. \end{aligned} \tag{1.62}$$

Usando a equação de campo de Klein-Gordon (1.18) é possível perceber que $G^{(1)}$, $W^{\pm}$ satisfazem a equação homogênea

$$(\Box + m^2)\mathscr{G}(x,x') = 0. \tag{1.63}$$

Note que as funções de Green apresentadas nesta seção foram considerados como valores esperados de produtos dos operadores de campo em um estado puro, ou seja, o estado de vácuo. No entanto, ao considerarmos um sistema cuja temperatura seja diferente

de zero, tal sistema não é mais descrito por um estado puro, mas por uma distribuição estatística para todos esses estados. Para um sistema com temperatura diferente de zero, as funções de Green são dadas pela média do valor esperado que é obtida dos produtos dos operados de campos que atuam nos estados puros [89, 90, 91, 92].

Suponha então que $|\psi_i\rangle$ seja um estado puro, sendo um autoestado do hamiltoniano : $H := \sum_k a_k^\dagger a_k$[1] com valor próprio de energia E_i. Sendo assim, o mesmo também será um autoestado do operador de número total dado pelo operador número $N = \sum_k a_k^\dagger a_k$. Em um sistema em equilíbrio com temperatura T, quando temos o número de partículas e a energia variando, ele é descrito pelo ensemble grande canônico de estados. Logo, a probabilidade de o sistema estar no estado $|\psi_i\rangle$ é dada por

$$\rho_i = e^{-\beta(E_i - \mu n_i)} Z^{-1}, \tag{1.64}$$

onde $\beta = \frac{1}{k_B T}$, k_B é a constante de Boltzmann, n_i o número de partículas do sistema, μ o potencial químico e

$$Z = \sum_j e^{-\beta(E_j - \mu n_j)}, \tag{1.65}$$

é a grande função de partição. A relação entre a função de partição Z e o potencial termodinâmico Ω é expressa por [93, 94]

$$Z \to e^{-\beta\Omega}. \tag{1.66}$$

Portanto, a equação (1.64) torna-se

$$\rho_i = e^{\beta(\Omega - E_i + \mu n_i)}. \tag{1.67}$$

Seja então a média, a uma temperatura $T = (k_B\beta)^{-1}$, de um operador A expressa por

$$\langle A\rangle_\beta = \sum_i \rho_i \langle\psi_i|A|\psi_i\rangle. \tag{1.68}$$

O operador de densidade quântico pode agora ser definido em termos dos operadores número $\hat{N}$ e hamiltoniano $\hat{H}$

$$\hat{\rho} = exp[\beta(\Omega + \mu\hat{N} - \hat{H})]. \tag{1.69}$$

[1] Os símbolos :: que acompanham a hamiltoniana significa que ela está renormalizada através do operador de ordenamento normal, o qual coloca o operador de destruição à direita do operador criação, assim nos livrando do problema gerado pelo termo $\frac{1}{2}\omega$ que nos levaria a uma densidade de energia infinita.

Dessa forma, a probabilidade (1.64) passa a ser escrita na forma matricial da seguinte maneira

$$\rho_i = \langle\psi_i|\rho|\psi_i\rangle. \tag{1.70}$$

Levando em conta que a probabilidade total deve ser unitária, então o traço da matriz densidade deve obedecer a relação

$$tr\rho = \sum_i \langle\psi_i|\rho|\psi_i\rangle = 1, \tag{1.71}$$

onde da Eq. (1.68) chegamos ao resultado[2]

$$\begin{aligned} \langle A\rangle_\beta &= \sum_{ij}\langle\psi_i|\rho|\psi_j\rangle\langle\psi_j|A|\psi_i\rangle \\ &= \sum_i \langle\psi_i|\rho A|\psi_i\rangle = tr(\rho A). \end{aligned} \tag{1.72}$$

Retornando as definições das funções de Green apresentadas no início dessa seção, podemos agora definir as funções térmicas de Green substituindo os valores esperados do vácuo nas definições das funções Green de temperatura zero pela média do ensemble $\langle\ \rangle_\beta$. Com isso, para o caso de o campo escalar, a função de Green a temperatura finita será descrita por

$$\begin{aligned} W_\beta^+(x,x') &= \langle 0|[\varphi(x)\varphi(x')]|0\rangle_\beta, \\ W_\beta^-(x,x') &= \langle 0|[\varphi(x')\varphi(x)]|0\rangle_\beta. \end{aligned} \tag{1.73}$$

Por simplicidade, vamos considerar que o potencial químico seja nulo, uma vez que não trataremos com reações químicas ou fenomenologias que envolvam tal propriedade. Consideremos também a equação de movimento de Heisenberg escrita como

$$\varphi(t,\vec{x}) = e^{iH(t-t_0)}\varphi(t_0,\vec{x})e^{-iH(t-t_0)}. \tag{1.74}$$

Na representação de Heisenberg, os estados são independentes do tempo, entretanto, os operadores dependem explicitamente do tempo (Detalhes veja [86]). Tomando $W_\beta(x,x')$, obtemos

$$W_\beta^+(t,\vec{x};t',\vec{x}\,') = W_\beta^-(t+i\beta,\vec{x};t',\vec{x}\,') \tag{1.75}$$

e da mesma forma para W_β^- (Para maiores detalhes ver [6]). Assim, podemos definir a propriedade para as funções térmicas de Green

$$W_\beta^\pm(t,\vec{x};t',\vec{x}\,') = W_\beta^\mp(t+i\beta,\vec{x};t',\vec{x}\,'). \tag{1.76}$$

[2]Esse resultado detalhado pode ser encontrado na Ref [86] p. 176

Além disso, da propriedade obtida da Eq. (1.75), a função de Hadamard adquire a seguinte propriedade

$$\begin{aligned} G^{(1)}_{\beta}(t,\vec{x};t',\vec{x}\,') &= W^{+}_{\beta}(t,\vec{x};t',\vec{x}\,') + W^{-}_{\beta}(t,\vec{x};t',\vec{x}\,') \\ &= W^{-}_{\beta}(t+i\beta,\vec{x};t',\vec{x}\,') + W^{+}_{\beta}(t+i\beta,\vec{x};t',\vec{x}\,') \\ &= G^{(1)}_{\beta}(t+i\beta,\vec{x};t',\vec{x}\,'). \end{aligned} \tag{1.77}$$

Note que a função térmica de Hadamard obedece a uma condição de periodicidade. Para a presente tese, os resultados até aqui apresentados para funções de dois pontos em geral são suficientes. Porém, para discursões mais aprofundadas, principalmente envolvendo a parte térmica da função de dois pontos, podem ser encontrados nas Refs. [89, 90, 92].

1.6 Efeito Casimir em $(3+1)D$

Como já mencionado neste trabalho, o efeito Casimir surge ao colocarmos duas placas paralelas neutras suficientemente próximas uma da outra, gerando assim uma força que pode ser atrativa ou repulsiva. Isso ocorre pois os comprimentos de onda possíveis para as ondas eletromagnéticas entre as duas placas são restringidos. Como consequência disso temos menos fótons entre as placas que fora dela, assim gerando uma densidade de energia menor internamente que no exterior dessas placas. Basicamente temos uma quantidade menor de partículas colidindo no interior das placas que no exterior, isso ocasiona então uma diferença de pressão que gera uma força atrativa entre as placas.

Este efeito foi descoberto em 1948 pelo holandês Hendrik Casimir [26]. A partir de tal descoberta, a visão de vácuo sofreu uma grande mudança, ao percebermos que o vácuo que antes era um total vazio pela visão da mecânica clássica, agora se tinha algo a mais considerando uma abordagem quântica. Esse algo a mais são forças atrativas derivadas das flutuações quânticas provenientes do vácuo quântico, que é formado por criação e aniquilação de partículas a todo instante de forma rápida, algo que a concepção clássica não seria possível de explicar.

Apesar de no trabalho original, Casimir ter usado uma configuração com campos eletromagnéticos, na presente tese vamos considerar o efeito para o campo escalar considerando a condição de Dirichlet, que consiste em termos dois pontos distintos do mesmo

eixo, onde em ambos os pontos o campo é anulado. Essa condição de contorno para um campo escalar massivo em $(1+1)D$ foi primeiramente tratado por Hays [95] e posteriormente sua generalização em $(N+1)D$ por Wolfram e Ambjørn [96]. Nesta seção vamos apenas considerar o caso $(3+1)D$, que é o número de dimensões máximo que se tem respaldo físico experimental.

Seja um campo escalar $\varphi(t,\vec{x})$, com $\vec{x}=x,y,z$, solução da equação de Klein-Gordon (1.17) no espaço-tempo quadrimensional

$$(\Box+\frac{m^2c^2}{\hbar^2})\varphi(t,\vec{x})=0, \tag{1.78}$$

onde m é a massa do campo e $\Box$ o operador D'alembertiano em quatro dimensões, dado por

$$\Box=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{1.79}$$

Vamos considerar uma configuração usada no trabalho original [26] com duas placas paralelas, em formato quadrado com lado L e colocadas a uma distância a uma da outra situada na direção do eixo z.

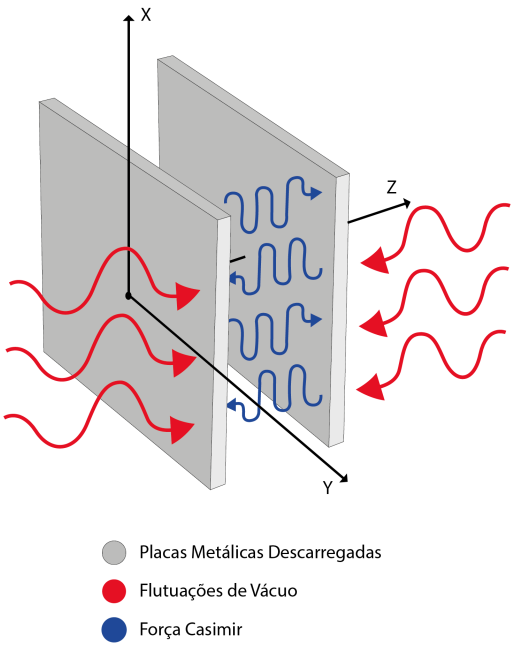

Figura 1.1: Configuração das placas paralelas para a obtenção da força de Casimir

O volume gerado entre essas placas será então $V = L^2 a$, onde $L \gg a$, e vamos considerar todos os modos dentro desse volume, ignorando qualquer contribuição das arestas. Seja ainda a condição de contorno de Dirichlet atuando no campo escalar definido no intervalo $0 < z < a$. Essa condição tem como objetivo entendermos como o efeito Casimir atua diante de condições de contorno impostas. Assim,

$$\varphi(t, x, y, 0) = \varphi(t, x, y, a) = 0. \tag{1.80}$$

A solução normalizada, da Eq. (1.78), correspondente a condição dada será

$$\varphi_n^{(\pm)}(t, \vec{x}) = \left(\frac{c}{(2\pi)^2 a \omega_n} \right)^{1/2} e^{\mp i(\omega_n t - k_x - k_y)} \sin k_n z, \tag{1.81}$$

em que as frequências de oscilações são

$$\omega_n = \left(\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + c^2 k_x^2 + c^2 k_y^2 + c^2 k_n^2 \right)^{1/2}, \tag{1.82}$$

onde $k_n = \frac{\pi n}{a}$ é o momento discretizado na direção z, com $n = 1, 2, 3, \ldots$.

A solução geral sob a condição de contorno de Dirichlet (1.80) para a Eq. (1.78), será a combinação linear de todas as soluções de (1.81), ou seja, a soma de todos os valores de n

$$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) = \sum_{\sigma} \left[\varphi_n^{(-)}(t, \vec{x}) \hat{a}_\sigma + \varphi_n^{(+)}(t, \vec{x}) \hat{a}_\sigma^\dagger \right], \tag{1.83}$$

onde

$$\sum_{\sigma} = \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \sum_{n=1}^{\infty}, \tag{1.84}$$

sendo $\hat{a}_\sigma$ e $\hat{a}_\sigma^\dagger$ os operadores de destruição e criação de uma partícula escalar, respectivamente. Os operadores citados obedecem a relação de comutação descrita na Eq. (1.33). A forma de atuação desses operadores já foi mostrada anteriormente, onde inclui sua forma de atuar tanto no estado de vácuo como em outros estados de forma geral.

Considerando o tensor energia-momento para o campo escalar antes definido para n dimensões na Eq. (1.56), para o operador de densidade de energia no caso em questão tem a seguinte forma

$$\hat{T}_{00}(t, \vec{x}) = \frac{\hbar c}{2} \left\{ \frac{1}{c^2} [\partial_t \hat{\varphi}(t, \vec{x})]^2 + \sum_{i=1}^{3} [\partial_i \hat{\varphi}(t, \vec{x})]^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \hat{\varphi}^2(t, \vec{x}) \right\}. \tag{1.85}$$

Para se obter a densidade de energia de vácuo do campo se faz necessário aplicar o operador descrito pela Eq. (1.85) no estado de vácuo $|0\rangle$. Dessa forma, ao usarmos a solução (1.81) escrita na base (1.83) chegamos em

$$\langle 0|\hat{T}_{00}(t,\vec{x})|0\rangle = \frac{\hbar}{2a}\sum_{\sigma}\omega_{\mathrm{n}} - \frac{m^2c^4}{2a\hbar}\sum_{\sigma}\frac{\cos 2k_{\mathrm{n}}z}{\omega_{\mathrm{n}}}. \tag{1.86}$$

Ao integrarmos a Eq. (1.86) com relação as coordenadas espaciais, considerando o intervalo $[0,a]$ na direção z, o qual é definido de acordo com a condição de Dirichlet imposta, obtemos a energia total de vácuo. Desta forma,

$$\begin{aligned} E_0(a) &= \int dx \int dy \int_0^a dz \langle 0|\hat{T}_{00}(t,\vec{x})|0\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \sum_{\sigma}\omega_{\mathrm{n}} - \frac{m^2c^4}{2a\hbar}\sum_{\sigma}\frac{1}{\omega_{\mathrm{n}}}\int dx \int dy \int_0^a \cos(2k_{\mathrm{n}}z)dz \\ &= \frac{\hbar}{2}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \sum_{\sigma}\omega_{\mathrm{n}}, \end{aligned} \tag{1.87}$$

onde L^2 é a área das placas que estão posicionadas a uma distância a. Note que o segundo termo do lado direito não contribui, assim a energia total é consequência do primeiro termo. Porém, essa energia obtida é claramente infinita, logo, se faz necessário o uso de um processo de regularização de maneira a extrair a parte finita dessa energia devido à presença da condição de contorno imposta. Existem diversos métodos de regularização, como a introdução de um fator exponencial $e^{-\delta\omega_{\mathrm{n}}}$ [7, 19], uso da função de Abel-Plana [97], entre outros. Aqui vamos seguir o processo de renormalização através da função zeta [98, 99]. Seguindo com isso, precisamos redefinir a Eq. (1.87) em termo de um parâmetro s como se segue abaixo:

$$E_0(a) = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \sum_{\sigma}\omega_{\mathrm{n}}^{-2s}, \tag{1.88}$$

onde no limite $s \to -\frac{1}{2}$, retornamos a equação original. Após a introdução do parâmetro s, a integral nos momentos k_x e k_y podem ser efetuadas usando coordenadas polares,

obtendo assim

$$
\begin{aligned}
E_0(a) &= \frac{\hbar}{2}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 2\pi c \sum_{n=1}^{\infty}\int dk\; k\left[k^2+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]^{-s} \\
&= \hbar\pi c\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(-1+s)}\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]^{1-s} \\
&= \hbar\pi c\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2(-1+s)}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{2(1-s)}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^2+\alpha^2\right]^{1-s},
\end{aligned}
\tag{1.89}
$$

onde $\alpha = \frac{mca}{\pi\hbar}$. A parte referente ao somatório pode ser escrito em termos da função zeta de Epstein-Hurwitz dada por

$$
\zeta_{EH}(z,M) = \sum_{k=1}^{\infty}[k^2+M^2]^{-z}, \tag{1.90}
$$

o qual é definida para $Re(s) > \frac{1}{2}$. Porém, aqui vamos fazer uso da continuação analitica de (1.90) expressa por [96, 98, 99]:

$$
\zeta_{EH}(z,M) = -\frac{M^{-2z}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(s-1-1/2)}{\Gamma(s-1)}M^{1-2z} + \frac{2^{3/2-z}\pi^{1/2}\alpha^{1-2z}}{\Gamma(z-1)}\sum_{k=1}^{\infty} f_{1/2-z}(2\pi kM), \tag{1.91}
$$

onde

$$
f_\mu(x) = \frac{K_\mu(x)}{x^\mu}, \tag{1.92}
$$

sendo $K_\mu(x)$ a função modificada de Bessel de segunda espécie, também conhecida como função de Macdonald. Usando então a continuação analítica acima definida, na Eq. (1.89), onde é considerado $z = s-1$, chegamos ao seguinte resultado

$$
\begin{aligned}
E_0(a) =& \frac{\hbar\pi c}{2}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{-1+s}\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^{2(1-s)} + \frac{a}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(s-3/2)}{\Gamma(s-1)}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^{3-2s}\right. \\
&\left. + \frac{a}{\sqrt{\pi}}\frac{2^{5/2-s}}{\Gamma(s-1)}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^{3-2s}\sum_{k=1}^{\infty} f_{3/2-s}\left(2k\pi\alpha\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{1.93}
$$

Note que o primeiro termo é independente do parâmetro de contorno a e é finito, assim ele caracteriza uma contribuição da energia total uma vez que apenas a diferença das energias que são levadas em conta, sendo assim podendo ser descartada. O segundo termo corresponde a uma densidade de energia constante e teríamos esse termo mesmo na ausência dos planos [96]. Ela é cancelada quando adicionamos uma constante à densidade hamiltoniana. Por último, o único termo fisicamente relevante para energia que seja finito

é

$$E_0(a) = \frac{\hbar\pi c}{2}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{(-1+s)}\frac{a}{\sqrt{\pi}}\frac{2^{5/2-s}}{\Gamma(s-1)}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^{3-2s}\sum_{k=1}^{\infty} f_{3/2-s}\left(2k\pi\alpha\right). \tag{1.94}$$

Tomando finalmente o limite do parâmetro $s \to -\frac{1}{2}$, chegamos ao resultado da energia renormalizada para o caso do campo escalar massivo então expresso por

$$E_0^{\text{ren}}(a,m) = -\frac{\hbar c a}{2}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^4\sum_{k=1}^{\infty} f_2\left(2k\pi\alpha\right). \tag{1.95}$$

Considerando o regime em que $m \ll 1$, podemos tomar o limite assintótico da função de Bessel para argumentos pequenos

$$K_\alpha(z) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^\alpha. \tag{1.96}$$

Logo, a Eq. (1.95) se torna

$$E_0^{\text{ren}}(a,0) = -\frac{\hbar c L^2}{16\pi^2 a^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = -\frac{\hbar\pi^2 c}{1440}\frac{L^2}{a^3}. \tag{1.97}$$

Acima foi usado o fato que o somatório pode ser escrito em termos da função zeta de Riemann, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. O resultado obtido (1.97) é equivalente ao campo escalar não massivo encontrado na literatura [7, 19]. O fato de ter um resultado negativo, se atribui a uma energia atrativa entre as placas, também chamada de energia de Casimir, o que nos gera uma força de atração entre as placas. Essa força foi provada experimentalmente por Spaarnay em 1958 [20] para o caso em que consideramos campos eletromagnéticos. Embora tenha tido exito em princípio, o experimento não foi tão conclusivo pois o erro da medida era da mesma ordem do resultado obtido. De fato essa força foi comprovada por Steve Lamoreaux em 1997, onde se mediu a força de Casimir considerando uma lente esférica de 4 cm de diâmetro e uma placa óptica de quartzo com cerca de 2,5 cm de diâmetro, em que ambas estavam revestidas com cobre e ouro [21]. Note que a energia de Casimir é proporcional a a^{-3}, ou seja, converge muito rapidamente para zero uma vez que as placas são afastadas. Para o caso em que temos $ma \gg 1$, a energia de Casimir tem a seguinte forma

$$E_0^{\text{ren}}(a,m) = -\frac{\hbar c L^2}{8\sqrt{2}}\left(\frac{m}{a\pi}\right)^{3/2} e^{-2mca/\hbar}, \tag{1.98}$$

onde percebermos que decresce exponencialmente ao afastarmos as placas, ou seja, $a \to \infty$. Logo, para ambos os casos, a energia de Casimir é muito pequena, e esse é o motivo pelo qual essa energia se manifesta apenas em micro/nano escalas.

Capítulo 2

Efeitos de flutuações quântica de vácuo em um espaço-tempo cônico com uma condição quase-periódica

Neste capítulo vamos então aplicar a condição de quase periodicidade no cenário de corda cósmica usando como referência uma folha de grafeno enrolada que nos leva ao conhecido nanotubo de carbono, onde obtemos um modelo análogo para explorar propriedades e efeitos desse espaço.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Sec.2.1 obtém-se a solução da equação de Klein-Gordon em um espaço-tempo cônico (corda cósmica ou desclinação) com uma condição de contorno quase-periódica, juntamente com uma expressão analítica fechada e exata para a função de dois pontos de Wightman. Na Sec.2.2 calculamos explicitamente o valor esperado do vácuo do quadrado do campo, do tensor energia-momento e da densidade de corrente induzida. Além disso, ao longo desse capítulo usamos unidades naturais, $G = \hbar = c = 1$.

2.1 Função de Wightman

Desejamos aqui investigar as mudanças nas flutuações quânticas do vácuo de um campo escalar carregado que surge como consequência de um espaço-tempo cônico com uma condição quase-periódica. Porém, antes de irmos propriamente para o cálculo das flutuações

quânticas, se faz necessário definir o espaço que se quer estudar, bem como a condição a ser utilizada. Além disso, essas características já citadas na introdução, afetam de forma substancial a forma da função de Wightman. A função de Wightman é uma função de dois pontos, ou seja, ela conecta dois pontos diferentes no espaço que ao mesmo tempo é solução da equação diferencial de Klein-Gordon. Esta seção será dedicada a construção de tal função e mais detalhes serão dados no momento apropriado.

O espaço-tempo a ser considerado aqui é o da corda cósmica (ou desclinação), ambos caracterizados por uma topologia cônica. Como um defeito topológico, sua natureza unidimensional nos permite usar coordenadas cilíndricas para apresentar o elemento de linha que descreve um espaço-tempo cônico em $(3+1)$ dimensões:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2, \tag{2.1}$$

onde as coordenadas cilíndricas assumem valores no intervalo $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi/q$ e $-\infty < (t, z) < +\infty$. A presença da corda cósmica é caracterizada pelo parâmetro $q > 1$, que é dado em termos da densidade de massa linear da corda cósmica, μ, ou seja, $q^{-1} = 1 - 4G\mu$, onde G é a constante gravitacional de Newton [35, 36, 37]. Além disso, em sistemas de matéria condensada, o parâmetro q caracteriza uma desclinação e pode assumir quaisquer valores tais que $q > 0$ [46].

Os modos de um campo escalar que se propagam no espaço-tempo cônico (2.1) devem obedecer a uma condição de contorno quase-periódica descrita por

$$\Phi(t, r, \varphi, z) = e^{-i2\pi\beta}\Phi(t, r, \varphi + 2\pi/q, z), \tag{2.2}$$

onde β é um parâmetro adimensional definido no intervalo $0 \leq \beta < 1$ e regula o ângulo de fase presente em (2.2).

A principal motivação para o uso da condição quase-periódica (2.2) pode ser vista de uma forma mais clara através da figura 2.1, onde a folha de grafeno pode ser cortada de três formas distintas, como visto na figura a esquerda. Esse corte será dependente do ângulo quiral, o qual terá papel fundamental na forma com que o nanotubo de carbono terá, figura a direita, e mais importante que isso, nas suas propriedades, onde serão modificadas a depender desse ângulo. Dessa forma, o ângulo β da nossa condição de contorno, também terá um papel semelhante, onde poderá modificar as propriedades dos observáveis físicos

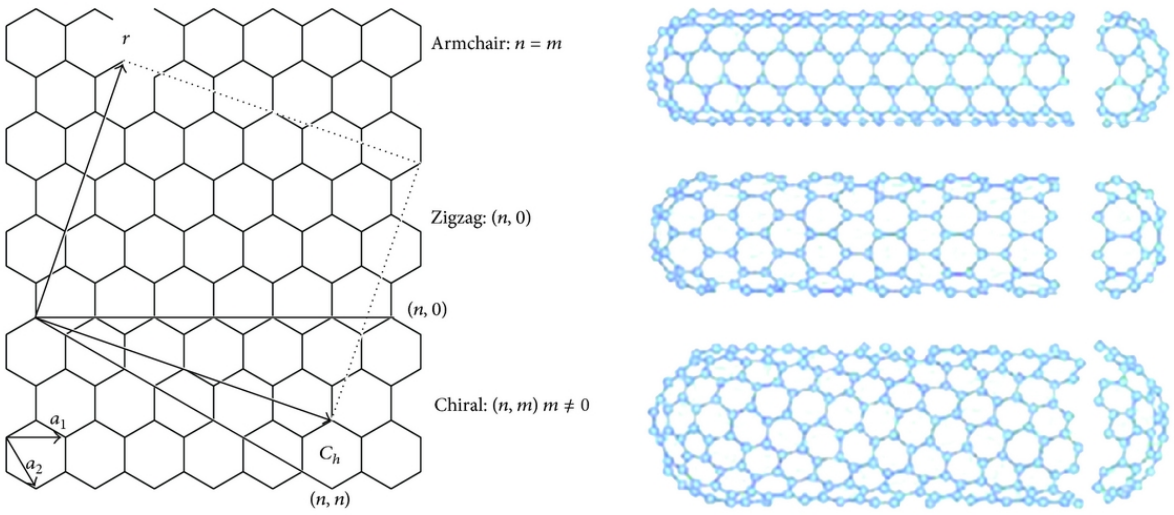

Figura 2.1: Imagens retiradas da Ref. [4]

em questão, uma vez que teremos uma dependência explicita nos resultados que serão apresentados mais à frente.

A teoria de campo escalar carregado que queremos considerar aqui é obtida, no espaço-tempo curvo de $(3+1)$ dimensões, por meio da seguinte ação:

$$S = \int dx^4 \sqrt{|g|} \left[g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi^* - (m^2 + \xi R)|\Phi|^2 \right], \tag{2.3}$$

onde $g = \det(g_{\mu\nu})$, R é o escalar de Ricci, ∇_ν é a derivada covariante e ξ é um fator numérico, támbem chamado de constante de acoplamento com a gravidade. Esse nome se dá, pois no termo $\xi R|\Phi|^2$ se encontra o acoplamento entra o campo escalar e o campo gravitacional. No caso sem massa, a ação e o campo escalar obedecem a uma simetria conforme se escolhermos $\xi = \frac{1}{6}$, levando a uma teoria de campo escalar invariante não minimamente acoplada sob transformação conforme [6]. Observe que não estamos considerando um campo de calibre, $A_\mu(x)$, que normalmente é levado em consideração em vários casos [16, 17, 18].

A obtenção da equação de Klein-Gordon para um campo escalar carregado não minimamente acoplado $\Phi(x)$, segue da ação (2.3) uma vez que a mesma é definida como

$$S = \int dx^4 \mathcal{L}. \tag{2.4}$$

Daí, tomando a variação da ação com relação a Φ, e considerando que o resultado dessa

variação seja nulo, $\delta S = 0$, chegamos a equação de Klein-Gordon, no qual é escrita como

$$\left[\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu) + m^2 + \xi R\right]\Phi(x) = 0. \tag{2.5}$$

Note que estamos considerando um defeito cônico que tem associado a ele uma função escalar de Ricci do tipo delta de Dirac e, portanto, tem uma curvatura infinita na origem, mas zero quando $r \neq 0$ [35, 36]. Para evitar a contribuição da curvatura do infinito na origem, e as complicações decorrentes disso (ver por exemplo [100]), estaremos interessados apenas no caso do campo escalar minimamente acoplado, $\xi = 0$. Essa escolha se dá pelo fato de evitarmos uma contribuição de uma função delta de Dirac proveniente do escalar de curvatura no espaço-tempo da corda.

No espaço-tempo cônico dado pelo elemento de linha (2.1), a equação de Klein-Gordon (2.5) para o campo escalar minimamente acoplado, $\Phi(x)$, assume a forma

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m^2\right]\Phi(x) = 0. \tag{2.6}$$

Desse modo, a solução regular na origem da equação acima para o campo escalar minimamente acoplado obedecendo à condição de contorno quase-periódica (2.2) é dada por

$$\Phi(t, r, \varphi, z) = Ae^{-i\omega_k t}e^{i\nu z}e^{iq(n+\beta)\varphi}J_{q|n+\beta|}(\eta r), \tag{2.7}$$

onde $J_\alpha(x)$ é a função de Bessel de primeira espécie, A é uma constante de normalização, $\omega_k = m^2 + \eta^2 + \nu^2$ e $k = (n, \eta, \nu)$ é o conjunto de números quânticos. Note ainda que, caso $\beta = 0$, os efeitos da condição de quase periodicidade desaparecem, e retornamos ao resultado usual para o espaço-tempo da corda cósmica sob condição periódica.

A constante de normalização, A, presente na solução (2.7) é calculada usando a condição

$$\int d^3x\sqrt{|g|}\Phi_k(x)\Phi^*_{k'}(x) = \frac{1}{2\omega_k}\delta_{kk'}, \tag{2.8}$$

onde a notação $\delta_{kk'}$ representa a delta de Kronecker no caso do número quântico discreto n, e delta de Dirac no caso dos números quânticos contínuos η e ν. Portanto, usando as Eqs. (2.7) e (2.8) descobrimos que a constante de normalização A é dada por

$$|A|^2 = \frac{\eta q}{2\omega_k(2\pi)^2}. \tag{2.9}$$

A solução normalizada completa é, portanto, escrita como

$$\Phi_k(x) = \left[\frac{\eta q}{2\omega_k(2\pi)^2}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega_k t + i(n+\beta)q\varphi + i\nu z} J_{q|(n+\beta)|}(\eta r). \tag{2.10}$$

O espectro das flutuações quânticas do vácuo do campo escalar em um espaço-tempo cônico com condição quase-periódica considerada aqui, quando comparado com o espaço-tempo de Minkowski, é definitivamente modificado, o que é previsível, uma vez que o sistema está imerso em uma topologia não trivial, junto a ação de uma condição de contorno. As mudanças nas flutuações quânticas do vácuo são, então, estudadas por meio da função de Wightman de frequência positiva definida no estado de vácuo $|0\rangle$ e dada em termos do produto do operador de campo $\hat{\Phi}(x)$ em pontos diferentes, ou seja, $W(x,x') = \langle 0|\hat{\Phi}(x)\hat{\Phi}(x')|0\rangle$. O operador de campo uma vez expandido em termos do conjunto completo de funções de modo normalizado, Eq. (2.10), nos permite escrever a função Wightman na forma

$$\begin{aligned} W(x,x') &= \sum_k \Phi_k(x)\Phi_k^*(x') \\ &= \frac{q}{2(2\pi)^2}\sum_k \frac{e^{-i\omega_k\Delta t}}{\omega_k} e^{i\nu\Delta z} e^{i(n+\beta)q\Delta\varphi} \eta J_{q|(n+\beta)|}(\eta r) J_{q|(n+\beta)|}(\eta r'), \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde $\Delta t = t - t'$, $\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$, $\Delta z = z - z'$ e usamos a notação

$$\sum_k = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_0^{\infty} d\eta \sum_{n=-\infty}^{\infty}. \tag{2.12}$$

O procedimento para realizar as integrais e a soma acima requer que primeiro façamos uma rotação de Wick $\Delta\tau = i\Delta t$ em (2.11) e, em seguida, usamos as identidades [101]

$$\frac{e^{-\omega_k\Delta\tau}}{\omega_k} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} ds\, e^{-s^2\omega_k^2 - \frac{\Delta\tau^2}{4s^2}}. \tag{2.13}$$

Para a integração do número quântico η, usamos

$$\int_0^{\infty} \eta J_{q|(n+\beta)|}(\eta r) J_{q|(n+\beta)|}(\eta r') e^{-\eta^2 s^2} = \frac{1}{2s^2} e^{-\frac{r^2+r'^2}{4s^2}} I_{q|(n+\beta)|}\left(\frac{rr'}{2s^2}\right). \tag{2.14}$$

Isso nos permite avaliar as integrais em ν e η para obter

$$W(x,x') = \frac{q}{2(2\pi)^2}\int_0^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-s^2m^2 - \frac{\Delta\zeta^2}{4s^2}} e^{-iq\beta\Delta\varphi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inq\Delta\varphi} I_{q|(n+\beta)|}(rr'/2s^2), \tag{2.15}$$

onde $\Delta\zeta^2 = \Delta\tau^2 + \Delta z^2 + r'^2 + r^2$. Fazendo a substituição $w = rr'/2s^2$ em (2.15) e tomando os limites adequados, podemos chegar a seguinte expressão

$$W(x,x') = \frac{qe^{iq\beta\Delta\varphi}}{2(2\pi)^2(2rr')^{1/2}} \int_0^\infty \frac{dw}{w^{1/2}} e^{-\frac{m^2 rr'}{2w} - \frac{\Delta\zeta^2 w}{2rr'}} \int_{-\infty}^\infty d\nu e^{-i\nu\Delta Z - \frac{\nu^2 rr'}{2w}} S(w,\beta,q), \quad (2.16)$$

onde

$$S(w,\beta,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inq\Delta\varphi} I_{q|(n+\beta)|}(w). \quad (2.17)$$

Por fim, podemos observar que ainda há integrais em w e ν e uma soma em n a ser realizada. A integral em ν é uma integral do tipo gaussiano e pode ser facilmente obtida. Além disso, a soma em n pode ser calculada usando a fórmula de soma [102].

$$\begin{aligned} S(w,\beta,q) = {} & \frac{1}{q}\sum_n e^{w\cos(2n\pi/q - q\Delta\varphi)} e^{ib(2n\pi - q\Delta\varphi)} \\ & - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=+,-} j e^{ijq\beta\pi} \int_0^\infty dy \frac{\cosh[qy(1-\beta)] - \cosh(q\beta y) e^{-iq(j\pi+\Delta\varphi)}}{e^{w\cosh y}[\cosh(qy) - \cos[q(\Delta\varphi + j\pi)]]}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

Onde a soma em n precisa ser considerada sob a restrição [9, 17, 32, 102]

$$-\frac{q}{2} + \frac{\Delta\varphi}{\varphi_0} \leq n \leq \frac{q}{2} + \frac{\Delta\varphi}{\varphi_0}. \quad (2.19)$$

Retornado para a Eq. (2.16) com as devidas substituições, torna-se possível realizar a integral em w, fornecendo a forma fechada para a função de Wightman [1]

$$\begin{aligned} W(x,x') = {} & \frac{m^2}{(2\pi)^2} e^{iq\beta\Delta\varphi} \left\{ \sum_n e^{i\beta(2\pi n - q\Delta\varphi)} f_1(m\sigma_n) \right. \\ & \left. - \frac{q}{2i\pi}\sum_{j=+,-} j e^{jiq\beta\pi} \int_0^\infty dy \frac{\cosh[qy(1-\beta)] - \cosh(qby) e^{-iq(\Delta\varphi + j\pi)}}{\cosh(qy) - \cos[q(\Delta\varphi + j\pi)]} f_1(m\sigma_y) \right\}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde a função $f_\mu(x)$ é definida em termos da função Macdonald $K_\mu(x)$ como

$$f_\mu(x) = \frac{K_\mu(x)}{x^\mu}, \quad (2.21)$$

e

$$\frac{\sigma_n^2}{2rr'} = \frac{\Delta\zeta^2}{2rr'} - \cos\left(\frac{2n\pi}{q} - \Delta\varphi\right), \quad (2.22a)$$

$$\frac{\sigma_y^2}{2rr'} = \frac{\Delta\zeta^2}{2rr'} + \cosh y. \quad (2.22b)$$

[1] Ver Refs. [9, 17, 32] para um procedimento semelhante.

Observe que no caso $q < 2$, o primeiro termo no lado direito da (2.20) só existe para $n = 0$ [9, 17, 32]. Este termo, no limite de coincidência $x' \to x$, diverge no cálculo dos observáveis físicos e como tal deve ser subtraído para obter a quantidade renormalizada finita.

É evidente que, no caso de o espaço-tempo cônico na ausência da condição de quase periodicidade ($\beta = 0$), a expressão (2.20) se reduz à expressão conhecida para a função de Wightman no espaço-tempo cônico puro [27, 28], ou seja,

$$\begin{aligned} W(x,x') &= \frac{m^2}{(2\pi)^2}\left\{\sum_n f_1(m\sigma_n)\right. \\ &\left. -\frac{q}{2\pi}\sum_{j=+,-}\int_0^\infty dy \frac{\sin(q\pi + jq\Delta\varphi)}{\cosh(qy)-\cos[q(\Delta\varphi + j\pi)]} f_1(m\sigma_y)\right\}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Por outro lado, na ausência do parâmetro que define o espaço-tempo cônico ($q = 1$), chegamos em um espaço-tempo de Minkowski influenciado pela condição de contorno de quase periodicidade, no qual a função de Wightman torna-se

$$\begin{aligned} W(x,x') &= \frac{m^2}{(2\pi)^2}\left\{f_1(m\sigma_0)\right. \\ &\left. -\frac{e^{i\beta\Delta\varphi}\sin(\pi\beta)}{\pi}\int_0^\infty dy \frac{\cosh[y(1-\beta)]+\cosh(by)e^{-i\Delta\varphi}}{\cosh y + \cos\Delta\varphi} f_1(m\sigma_y)\right\}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

O primeiro termo no lado direito da expressão acima é o termo mencionado anteriormente, que diverge no limite de coincidência $x' \to x$ ($\sigma_0 \to 0$). É definido como a função Hadamard

$$G_H(x,x') = \frac{m^2}{(2\pi)^2} f_1(m\sigma_0), \tag{2.25}$$

que deve ser subtraído no cálculo dos observáveis físicos [29, 30]. Na verdade, a Eq. (2.25) é a contribuição (divergente) de Minkowski para a função de Wightman.

No caso do campo escalar não massivo, podemos obter a função de Wightman a partir da Eq. (2.20) tomando o limite $m \to 0$. Isto nos dá

$$\begin{aligned} W(x,x') &= \frac{e^{i\beta q\Delta\varphi}}{(2\pi)^2}\left\{\sum_n \frac{e^{i\beta(2\pi n - q\Delta\varphi)}}{\sigma_n^2} - \frac{q}{2i\pi}\sum_{j=+,-} j e^{ij\pi q\beta}\right. \\ &\left. \times \int_0^\infty dy \frac{\cosh[qy(1-\beta)]-\cosh(q\beta y)e^{-iq(\Delta\varphi + j\pi)}}{[\cosh(qy)-\cos[q(\Delta\varphi + j\pi)]]\sigma_y^2}\right\}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

É simples mostrar que o caso sem massa das Eqs. (2.23), (2.24) e (2.25) segue da Eq. (2.26), mostrando a consistência de nossos resultados.

A expressão exata para a função de Wightman, Eq. (2.20), em um espaço-tempo cônico com condição de contorno de quase periodicidade nos permitirá, na próxima seção, estudar os observáveis físicos que nos interessam, a saber, o VEV do campo ao quadrado, o VEV do tensor de energia-momento e a densidade de corrente induzida.

2.2 Observáveis físicos

2.2.1 Valor esperado de vácuo de $\Phi^2(x)$

Formalmente, o procedimento padrão para calcular o VEV do campo ao quadrado [2], $\langle\Phi^2\rangle$, é calcular a função Wightman (2.20) no limite de coincidência $x' \to x$ [32, 17, 9], isso é,

$$\langle\Phi^2\rangle = \lim_{x'\to x} W(x,x'). \tag{2.27}$$

No entanto, para realizar este procedimento, precisamos primeiro subtrair a parte divergente descrita pela função Hadamard (2.25). No limite de coincidência temos, portanto, o VEV renormalizado do campo ao quadrado

$$\begin{aligned}\langle\Phi^2\rangle_{\rm ren} &= \lim_{x'\to x}[W(x,x') - G_H(x,x')] \\ &= \frac{2m^2}{(2\pi)^2}\left\{\sum_{n=1}^{[q/2]*}\cos(2\pi n\beta) f_1(2mrs_n) - \frac{q}{2\pi}\int_0^\infty dy M(y,\beta,q) f_1(2mrs_y)\right\},\end{aligned} \tag{2.28}$$

onde $s_n = \sin(n\pi/q)$, e $s_y = \cosh(y/2)$ e

$$M(y,\beta,q) = \frac{\sin[q\pi(1-\beta)]\cosh(q\beta y) + \cosh[qy(1-b)]\sin(q\beta\pi)}{\cosh(qy) - \cos(q\pi)}. \tag{2.29}$$

Observe que $[q/2]$ representa a maior parte inteira de $q/2$ e o símbolo $(*)$ presente no sinal do somatório em n significa que, para o caso em que q é um número inteiro e maior que 2, a soma em n deve ser substituída por [32, 17, 9, 27, 28]

$$\sum_{n=1}^{[q/2]*} \to \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{q-1}. \tag{2.30}$$

[2] A partir de agora usaremos a notação $\langle 0|\hat{O}|0\rangle = \langle\hat{O}\rangle$.

Isso ocorre, pois o número de geodésicas existentes entre dois pontos no local, é proporcional ao parâmetro da corda q. Pode-se notar isso a partir de uma interpretação geométrica encontrada nas Refs. [103, 104]:

O caso do campo escalar não massivo é obtido de (2.28) tomando o limite $m \to 0$. Isso fornece

$$\langle \Phi^2 \rangle_{\rm ren} = \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left\{ \sum_{n=1}^{[q/2]*} \frac{\cos(2\pi\beta n)}{\sin^2(n\pi/q)} - \frac{q}{2\pi} \int_0^\infty dy \frac{M(y,\beta,q)}{\cosh^2(y/2)} \right\}. \tag{2.31}$$

Consequentemente, as flutuações do vácuo quântico do campo escalar não são em média zero, como podemos ver claramente através das expressões para o VEV renormalizado do campo ao quadrado nos casos de campo escalar massivo e não massivo dados pelas Eqs. (2.28) e (2.31), respectivamente. É claro em ambas as expressões que quando tomado $q = 1$ e $\beta = 0$ o VEV renormalizado da média quadrática do campo é zero, como deveria ser. Também é claro que, no caso $\beta = 0$, os resultados em (2.28) e (2.31) recuperam o VEV do campo ao quadrado em um espaço-tempo cônico (corda cósmica ou desclinação) [27, 28]. Por outro lado, no caso $q = 1$, o primeiro termo no lado direito das Eqs. (2.28) e (2.31) são nulos e obtemos o VEV do campo ao quadrado em um espaço-tempo de Minkowski devido a inserção da condição de quase periodicidade. Vale ressaltar que, no limite $mr \gg 1$, o VEV do campo ao quadrado para o caso massivo (2.28) é exponencialmente suprimido. No limite oposto, $mr \ll 1$, Eq. (2.28) fornece o VEV do campo ao quadrado no caso sem massa, Eq. (2.31).

Se faz interessante também analisar o caso $\beta = 1/2$ (campo escalar torcido) separadamente para o VEV renormalizado do campo ao quadrado na Eq. (2.31). A expressão exata para qualquer valor de q é dada por

$$\langle \Phi^2 \rangle_{\rm ren} = \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left\{ \sum_{n=1}^{[q/2]*} \frac{(-1)^n}{\sin^2(n\pi/q)} - \frac{q}{2\pi} \int_0^\infty dy \frac{M(y,1/2,q)}{\cosh^2(y/2)} \right\}. \tag{2.32}$$

Deve-se lembrar, entretanto, que para $q < 2$ o primeiro termo do lado direito não está presente.

Em particular, se o parâmetro cônico q é um número inteiro, a expressão (2.32) pode ser simplificada observando a Eq. (2.30) dependendo da paridade do parâmetro. Isso

fornece uma expressão algébrica para a soma em n no lado direito de (2.32), ou seja,

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{q-1}\frac{(-1)^n}{\sin^2(n\pi/q)} = -\frac{1}{12}(q^2+2), \qquad \text{para} \qquad q-\text{par}. \tag{2.33}$$

Observe que a soma em n acima é zero para q-ímpar. Portanto, para valores pares de q, no caso de campo escalar torcido sem massa, da Eq. (2.32), temos

$$\langle\Phi^2\rangle_{\rm ren} = -\frac{1}{96\pi^2 r^2}(q^2+2), \tag{2.34}$$

onde $M(y,1/2,q)=0$ para q pares. A expressão na Eq. (2.34) foi obtida anteriormente na Ref. [31] para qualquer valor de q. Na verdade, uma continuação analítica pode ser assumida para o resultado na Eq. (2.34) para ser válido para qualquer valor de q. Uma análise numérica de (2.34) comparando-o com a expressão geral original (2.32), considerando qualquer valor de q, mostra que a continuação analítica de (2.34) válida para qualquer valor de q, é plausível e está de acordo com (2.32) qualquer que seja o valor de q que tomarmos.

Por outro lado, ao considerar apenas valores ímpares de q, vamos ter contribuição para o VEV do quadrado do campo de ambos os termos do lado direito de (2.32). A expressão é então escrita como

$$\begin{aligned}\langle\Phi^2\rangle_{\rm ren} =& \frac{1}{16\pi^2 r^2}\left\{\sum_{n=1}^{q-1}\frac{(-1)^n}{\sin^2(n\pi/q)}\right. \\ & \left. -\frac{q\sin(q\pi/2)}{\pi}\int_0^\infty dy\frac{[\cosh(qy/2)]^{-1}}{\cosh^2(y/2)}\right\}, \quad \text{para} \quad q-\text{ímpar}.\end{aligned} \tag{2.35}$$

Observe que uma continuação analítica pode então ser assumida para a expressão acima por ser válida para qualquer valor de q, uma vez que ela reproduz os valores de (2.34) para qualquer valor de q devido a correção presente no somatório.

Para o caso em que não haja defeito cônico na Eq. (2.35), ou seja, $q=1$, obtemos que a integral resultante em y é dada por $\frac{\pi}{2}$, levando a

$$\langle\Phi^2\rangle_{\rm ren} = -\frac{1}{32\pi^2 r^2}. \tag{2.36}$$

que está em acordo com as Refs. [31, 105]. Note que obtemos o mesmo resultado (2.36) fazendo $q=1$ em (2.34), como deveria ser. Portanto, nossas expressões (2.28) e (2.31) para o VEV do campo ao quadrado para os campos escalares massivos e sem massa recuperam os resultados conhecidos há muito tempo (2.34) e (2.36) [31, 105].

Como sabemos da Mecânica Quântica, a interpretação para o valor $|\psi(x,t)|^2$ é a probabilidade de encontramos a partícula no ponto x e no tempo t. Semelhante a isto, a quantidade $\langle\Phi^2\rangle_{\rm ren}$ pode ser interpretada como a intensidade das flutuações do vácuo quântico em determinado ponto, sendo essa intensidade zero na ausência de uma condição de contorno e de um espaço-tempo não trivial como visto nos resultados já aqui apresentados.

2.2.2 VEV do tensor energia-momento

Retornando agora para o cálculo do VEV do tensor de energia-momento que surge como consequência do espaço-tempo cônico com condição quase-periódica. A partir dessa quantidade, é possível então o cálculo da energia. Porém, o modelo aqui estudado, considera uma corda idealizada, tornando-se impossível obter uma quantidade finita para a energia ao tomarmos $\beta = 0$, pois teremos então um volume infinito, ou seja, ao integrarmos em todo o espaço-tempo cônico, está quantidade irá divergir.

Uma forma de contornarmos esse problema é considerarmos um modelo em que a corda possui uma estrutura finita, o que torna possível encontrar um valor finito para a energia (Ver [106]). Para o caso em estudo, vamos então calcular as quantidades em termos de sua densidade, ou seja, a densidade de energia. Podemos fazer isso considerando a expressão do VEV do tensor de energia-momento para um campo escalar carregado derivado em [32, 33]. Esta expressão, ao assumir a ausência de um quadri-vetor do campo de calibre, é dada por

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle = 2\lim_{x'\to x}\partial_{\mu'}\partial_{\nu}W(x,x') + 2\left[\left(\xi-\frac{1}{4}\right)g_{\mu\nu}\Box - \xi\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \xi R_{\mu\nu}\right]\langle\Phi^2\rangle, \qquad (2.37)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e $\Box$ é o operador D'alembertiano. Além disso, usando a Eq. (2.28) podemos obter $\Box\langle\Phi^2\rangle$, ou seja,

$$\begin{aligned}\Box\langle\Phi^2\rangle_{\rm ren} &= -\frac{8m^4}{(2\pi)^2}\left\{\sum_{n=1}^{[q/2]}{}^{*}\cos(2\pi nb)\left[(2mr)^2 s_n^4 f_3(2mrs_n) - 2s_n^2 f_2(2mrs_n)\right]\right.\\ &\left. -\frac{q}{2\pi}\int_0^{\infty} dy M(y,\beta,q)\left[(2mr)^2 s_y^4 f_3(2mrs_y) - 2s_y^2 f_2(2mrs_y)\right]\right\}. \qquad (2.38)\end{aligned}$$

Observe que a única contribuição derivada no operador d'Alembertiano é devida à componente radial, r. Portanto, a partir das Eqs. (2.37), (2.38) e (2.20) para o caso minimamente

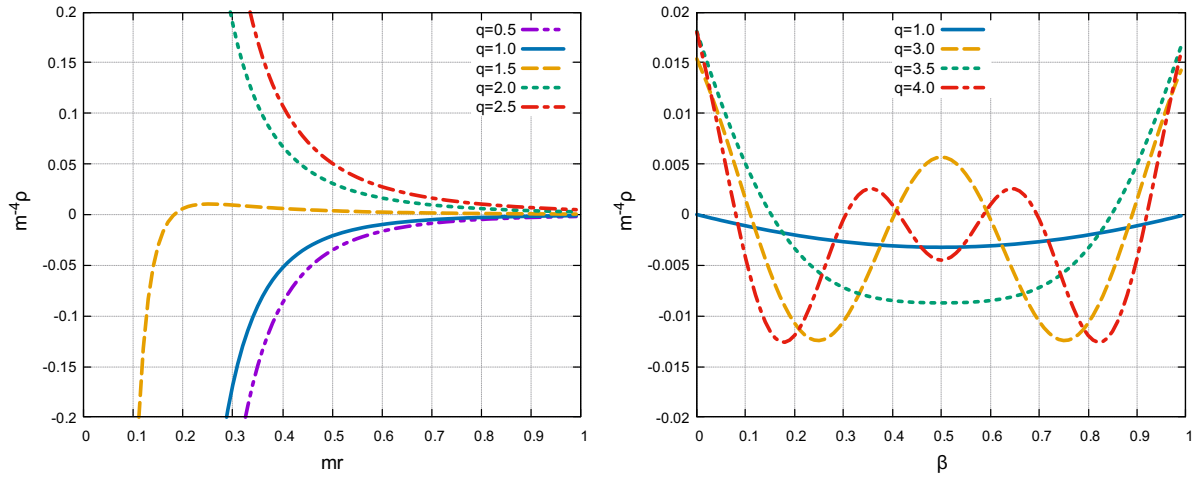

Figura 2.2: Densidade de energia de vácuo renormalizada para o campo escalar massivo, $\rho = \langle T_0^0 \rangle_{\rm ren}$, em unidades de m^4, plotada em termos de mr (à esquerda) e β (à direita). Observe que o valor $\beta = 1/11$ foi tomado para o gráfico à esquerda e $mr = 1$ para o gráfico à direita.

acoplado, $\xi = 0$, descobrimos que o VEV renormalizado do tensor de energia-momento para um campo escalar massivo é dado por

$$\langle T_\nu^\mu \rangle_{\rm ren} = \frac{m^4}{\pi^2} \left\{ \sum_{n=1}^{[q/2]*} \cos(2\pi n\beta) F_\nu^\mu(2mr, s_n) - \frac{q}{2\pi} \int_0^\infty dy M(y,\beta,q) F_\nu^\mu(2mr, s_y) \right\}, \quad (2.39)$$

onde as funções $F_\nu^\mu(u,s)$ são definidas como

$$\begin{aligned} F_0^0(u,s) &= u^2 s^4 f_3(us) - [2s^2+1] f_2(us), \\ F_1^1(u,s) &= -f_2(us), \\ F_2^2(u,s) &= u^2 s^2 f_3(us) - f_2(us), \\ F_3^3(u,s) &= F_0^0(u,s). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Algumas observações valem a pena ser apontadas nesta fase. Primeiramente, podemos notar que o VEV do tensor de energia-momento (2.39) apresenta uma invariância de boost na direção z que leva a $F_3^3(u,s) = F_0^0(u,s)$. Além disso, para calcular a componente (2,2) do VEV do tensor de energia-momento, (2.39), usamos a Eq. (52) de [28]. Observe também que, na ausência de um defeito cônico ($q = 1$), ainda há uma contribuição diferente de zero para o VEV do tensor de energia-momento vindo do segundo termo do

lado direito da Eq. (2.39) devido à condição quase periódica (2.2). Por outro lado, na ausência da condição quase periódica (2.2), recuperamos o VEV do tensor de energia-momento gerado pela presença de um defeito cônico [3] [27, 28]. O VEV do tensor de energia-momento, no limite $mr \gg 1$, é exponencialmente suprimido, enquanto no limite oposto, $mr \ll 1$, fornece a expressão sem massa como a contribuição dominante (ver Eq. (2.50)). Evidentemente, quando $r \to 0$, o tensor de energia-momento diverge. Esses comportamentos assintóticos são mostrados no gráfico à esquerda da Fig. 2.2 para a componente (0,0) (densidade de energia), considerando diferentes valores do parâmetro cônico q. É claro que para um determinado valor de β, o sinal da densidade de energia muda à medida que o valor de q aumenta. O gráfico à direita da Fig. 2.2 para a densidade de energia é em termos de β e mostra que ela começa a oscilar conforme o valor de q aumenta.

Finalmente, provamos que o VEV do tensor de energia-momento satisfaz tanto a condição de conservação covariante

$$\nabla_\mu \langle T^\mu_\nu \rangle_{\rm ren} = 0, \tag{2.41}$$

quanto a identidade de traço para um campo escalar massivo carregado, ou seja,

$$\langle T^\mu_\mu \rangle_{\rm ren} = 6(\xi - 1/6)\nabla_\mu \nabla^\mu \langle \Phi^2 \rangle_{\rm ren} + m^2 \langle \Phi^2 \rangle_{\rm ren}. \tag{2.42}$$

Para a segunda identidade, podemos verificar de maneira direta apenas substituindo o VEV do campo ao quadrado dado pela Eq. (2.28) na expressão acima. Já para a identidade de conservação covariante precisamos de alguns passos antes, como veremos a seguir.

Para verificarmos a condição de conservação covariante (2.41), vamos escrever uma lagrangiana associada ao elemento de linha (2.1), o qual obtemos

$$\mathcal{L} = \dot{t}^2 - \dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2 - \dot{z}^2, \tag{2.43}$$

em que o 'ponto' significa derivada com relação ao parâmetro afim τ. Dada a equação de Euler-Lagrange da forma

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0, \tag{2.44}$$

[3] Na verdade, não recuperamos exatamente a mesma expressão que nas Refs. [27, 28], que considerou um campo escalar real. É a expressão obtida neste último multiplicada por dois que recuperamos. Este fator de dois vem de (2.37) que é a definição do VEV do tensor de energia-momento de um campo escalar carregado.

se torna possível obter as equações da geodésica. Assim, substituindo (2.43) em (2.44), obtemos duas equações não nulas que são

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0, \\ \ddot{\varphi} + \dfrac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \end{cases} \tag{2.45}$$

Seja agora a equação da geodésica dada por [107]

$$\frac{dx^2}{d\tau^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{d\tau}\frac{dx^c}{d\tau} = 0, \tag{2.46}$$

onde Γ^a_{bc} é o símbolo de Christoffel. Comparando as equações da geodésica Eq. (2.45) com a equação acima obtida, vemos que

$$\Gamma^1_{22} = -r, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \tag{2.47}$$

são as únicas conexões não nulas. Então, dá Eq. (2.41), temos que

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \langle T^\mu_\nu \rangle_{\text{ren}} &= \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} T^\alpha_\nu \\ &= \partial_1 T^1_1 + \Gamma^1_{12} T^2_2 + \Gamma^2_{21} T^1_1 \\ &= \partial_1 T^1_1 + \frac{1}{r} T^1_1 + \frac{1}{r} T^2_2. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Dessa forma, para que a condição de conservação covariante seja satisfeita, precisamos que

$$\langle T^2_2 \rangle = r\partial_r \langle T^1_1 \rangle + \langle T^1_1 \rangle = \partial_r \left(r \langle T^1_1 \rangle \right). \tag{2.49}$$

O que de fato temos, garantindo assim que a conservação covariante exista. Vale ressaltar que como $\langle T^\mu_\nu \rangle$ depende exclusivamente de r, todas as outras componentes da Eq. (2.41) são nulas, o que simplifica nosso cálculo.

O VEV renormalizado do tensor de energia-momento no caso do campo escalar sem massa é obtido exatamente tomando o limite $m \to 0$ do caso massivo, Eq. (2.39). Isso fornece

$$\langle T^\mu_\nu \rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{16\pi^2 r^4} \left\{ \sum_{n=1}^{[q/2]*} \cos(2\pi n b) H^\mu_\nu(s_n) - \frac{q}{2\pi} \int_0^\infty dy M(y, b, q) H^\mu_\nu(s_y) \right\}, \tag{2.50}$$

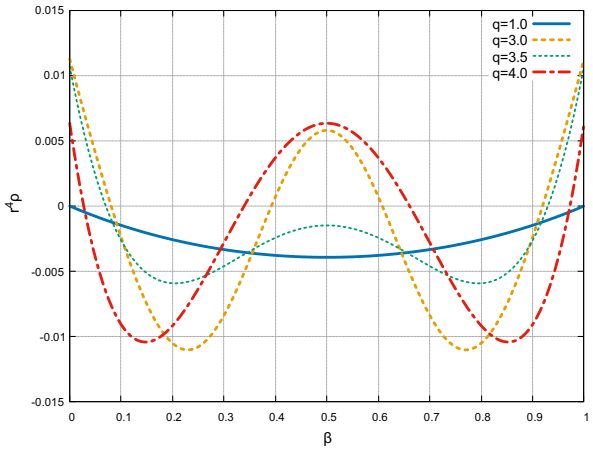

Figura 2.3: Densidade de energia de vácuo escalar para o campo não massivo renormalizado, $\rho = \langle T_0^0 \rangle_{\rm ren}$, em unidades de r^{-4}, plotado em termos de β.

onde as funções $H_\nu^\mu(s)$ são definidas como

$$\begin{aligned} H_0^0(s) &= \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s^4}, \\ H_1^1(s) &= -\frac{2}{s^4}, \\ H_2^2(s) &= \frac{6}{s^4}, \\ H_3^3(s) &= H_0^0(s). \end{aligned} \tag{2.51}$$

É importante notar que a expressão (2.50) desaparece para distâncias radiais muito grandes e diverge quando r vai para zero, em ambos os casos com uma potência de r^{-4}. Para ver o comportamento de (2.50) em relação a β seu gráfico é mostrado na Fig. 2.3 e é muito semelhante ao caso massivo, ou seja, conforme o parâmetro cônico é aumentado , o VEV do tensor de energia-momento no caso do campo escalar sem massa começa a oscilar mais. Além disso, quando $\beta = 0$, nosso resultado é consistente com a expressão para o tensor de energia-momento puramente como consequência de um defeito cônico encontrado nas Refs. [27, 28], para um campo escalar real. Por outro lado, na ausência de um defeito cônico, ou seja, $q = 1$, a única contribuição vem do segundo termo no lado direito de (2.50).

Como fizemos na seção anterior para o VEV do campo ao quadrado, consideremos também separadamente o caso do campo escalar torcido, ou seja, quando $\beta = 1/2$. Novamente, para simplificar, pegaremos valores inteiros de q e analisaremos o primeiro termo

no lado direito de (2.50). Neste caso, ao fazer uso de (2.30), obtemos

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{q-1}(-1)^n H_\nu^\mu(s_n) = \left[\frac{7q^4+8}{360}(1,1,-3,1) - \frac{q^2+2}{9}(2,-1,3,2)\right], \quad q-\text{par}, \tag{2.52}$$

onde os números entre parênteses representam os elementos diagonais. Assim, o VEV do tensor energia-momento, neste caso, é dado por

$$\langle T_\nu^\mu\rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{16\pi^2 r^4}\left[\frac{7q^4+8}{360}(1,1,-3,1) - \frac{q^2+2}{9}(2,-1,3,2)\right], \tag{2.53}$$

onde $M(y,1/2,q)=0$ para q par. Embora (2.53) tenha sido obtido usando o resultado (2.52), uma continuação analítica pode ser assumida para que seja válida para qualquer valor de q, do mesmo modo como acontece para a expressão (2.34). De fato, tomando qualquer valor de q, podemos verificar numericamente que a Eq. (2.53) é consistente com a Eq. (2.50), para $\beta = 1/2$. O resultado (2.53) também é consistente com o obtido na Ref. [31], para um campo escalar real.

Na ausência de um defeito cônico ($q=1$), a contribuição é exclusivamente devida ao campo escalar torcido sem massa e carregado, e pode ser obtida a partir de (2.53) como

$$\langle T_\nu^\mu\rangle_{\text{ren}} = \frac{1}{128\pi^2 r^2}(-5,3,-9,-5). \tag{2.54}$$

A expressão acima também é consistente com o resultado obtido nas Refs. [31, 105] para um campo escalar torcido real no espaço-tempo de Minkowski.

2.2.3 Densidade de corrente induzida

Um campo escalar complexo obedecendo a uma condição de quase periodicidade (2.2) em um espaço-tempo cônico, também tem uma densidade de corrente induzida como resultado de suas flutuações quânticas de vácuo serem modificadas. Formalmente, o VEV da densidade de corrente induzida é obtido como [17]

$$\langle J_\mu\rangle = i\lim_{x'\to x}(\partial_\mu - \partial_{\mu'})W(x,x'). \tag{2.55}$$

Esta densidade de corrente induzida surge de fato devido à ação (2.3) ser invariante sob a condição de quase-periodicidade (2.2). Como a última afeta apenas a coordenada φ, a simetria de ação existente induz apenas uma densidade de corrente azimutal diferente de zero, de acordo com o teorema de Noether.

Para calcular a componente φ do VEV da densidade de corrente (2.55), a melhor abordagem é tomar primeiro a derivada em relação a φ de (2.15) e, então, toma-se o limite de coincidência $x' \to x$. Neste caso temos

$$\langle J_\varphi \rangle = -\frac{q}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-s^2m^2-\frac{r^2}{2s^2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(n+\beta) I_{q|(n+\beta)|}(r^2/2s^2). \tag{2.56}$$

A soma em n presente na expressão acima foi calculada na Ref. [17], cujo resultado é

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} q(n+\beta) I_{q|(n+\beta)|}(\omega) =& \frac{2\omega}{q^2}\sum_{k=1}^{[q/2]*} \sin\left(\frac{2k\pi}{q}\right)\sin(2k\pi\beta) e^{\omega\cos(2k\pi/q)} \\ &+ \frac{\omega}{q\pi}\int_0^\infty dy\ \sinh y e^{-\omega\cosh y} g(y,\beta,q),\end{aligned} \tag{2.57}$$

onde

$$g(y,\beta,q) = \frac{\sin(q\pi\beta)\sinh[(1-|\beta|)qy] - \sinh(yq\beta)\sin[(1-|\beta|)q\pi]}{\cosh(qy)-\cos(q\pi)}. \tag{2.58}$$

Fazendo uso do resultado deste último, somos capazes de realizar a integral em s para obter

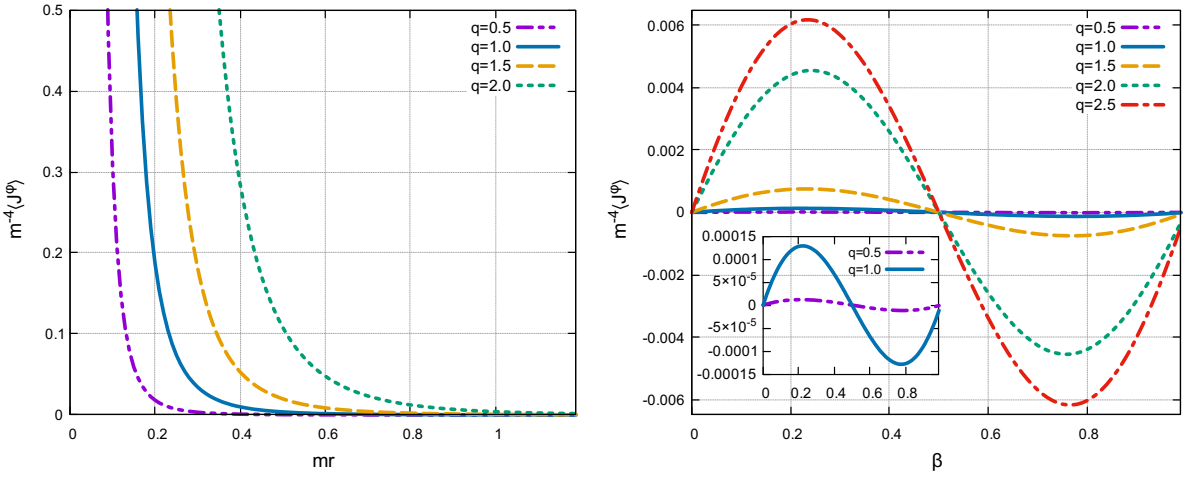

Figura 2.4: Densidade de corrente induzida renormalizada, (2.59), em unidades de m^4, plotada em termos de mr (à esquerda) e β (à direita). Observe que $\beta = 1/6$ foi tomado para o gráfico à esquerda e $mr = 1$ para o gráfico à direita.

$$\langle J^\varphi \rangle = \frac{m^4}{\pi^2}\left\{\sum_{k=1}^{[q/2]*}\sin\left(\frac{2k\pi}{q}\right)\sin(2k\pi\beta) f_2(2mrs_k) + \frac{q}{2\pi}\int_0^\infty dy g(y,\beta,q) f_2(2mrs_y)\right\}. \tag{2.59}$$

A densidade de corrente induzida (2.59) associada a um campo escalar massivo e carregado é exponencialmente suprimida no regime $mr \gg 1$, como podemos ver ao considerarmos o limite assintótico da função $f_\mu(x)$,

$$\langle J^\varphi \rangle = \frac{1}{8r}\left(\frac{m}{\pi r}\right)^{3/2}\left\{\sum_{k=1}^{[q/2]*}\sin\left(\frac{2k\pi}{q}\right)\sin(2k\pi\beta)\frac{e^{-2mrs_k}}{s_k^{5/2}} + \frac{q}{2\pi}\int_0^\infty dy g(y,\beta,q)\frac{e^{-2mrs_y}}{s_y^{5/2}}\right\}, \quad (2.60)$$

enquanto fornece como contribuição principal a expressão para o campo escalar sem massa e carregado no regime $mr \ll 1$. Além disso, se mantivermos m fixo e tomarmos $r \to 0$, a densidade de corrente induzida (2.59) diverge. Esses comportamentos assintóticos são mostrados no gráfico à esquerda da Fig. 2.4. Também mostra que a densidade de corrente induzida é aumentada à medida que q aumenta. No gráfico da direita da Fig. 2.4, por outro lado, para um valor fixo de mr, a dependência da densidade de corrente induzida em β a faz oscilar mais à medida que q aumenta. O gráfico à direita da Fig. 2.4 também mostra que a densidade de corrente induzida é positiva quando $\beta < 0,5$ e negativa para $\beta > 0,5$, desaparecendo quando $\beta = 0,5$. Ou seja, não há densidade de corrente induzida para um campo escalar torcido.

Agora, se tomarmos o limite $m \to 0$ em (2.59), encontramos a expressão fechada exata para a densidade de corrente induzida de um campo escalar sem massa e carregado

$$\langle J^\varphi \rangle = \frac{1}{8\pi^2 r^4}\left\{\sum_{k=1}^{[q/2]*}\sin\left(\frac{2k\pi}{q}\right)\frac{\sin(2k\pi\beta)}{\sin^4(k\pi/q)} + \frac{q}{2\pi}\int_0^\infty dy\frac{g(y,\beta,q)}{\cosh^4(y/2)}\right\}. \quad (2.61)$$

É fácil ver que esta expressão vai para zero se $r \to \infty$ e diverge quando $r \to 0$, em ambos os casos com potência de r^{-4}. Na Fig. 2.5 a densidade de corrente induzida é plotada em termos de β e mostra que quanto mais q é aumentado, mais a densidade de corrente induzida oscila. Também mostra, novamente, que a densidade de corrente induzida é positiva quando $\beta < 0,5$ e negativa para $\beta > 0,5$, desaparecendo no caso escalar torcido $\beta = 0,5$.

Deve-se notar que, a partir das Eqs. (2.59) e (2.61), se tomarmos $\beta = 0$ não há densidade de corrente induzida unicamente pelo espaço-tempo cônico, nem há densidade de corrente induzida no caso de um campo escalar torcido, $\beta = 1/2$. Por outro lado, se considerarmos um espaço-tempo de Minkowski com condição quase-periódica, ou seja, $q = 1$, temos

$$\langle J^\varphi \rangle = \frac{m^4}{2\pi^3}\int_0^\infty dy g(y,\beta,1) f_2(2mrs_y), \quad (2.62)$$

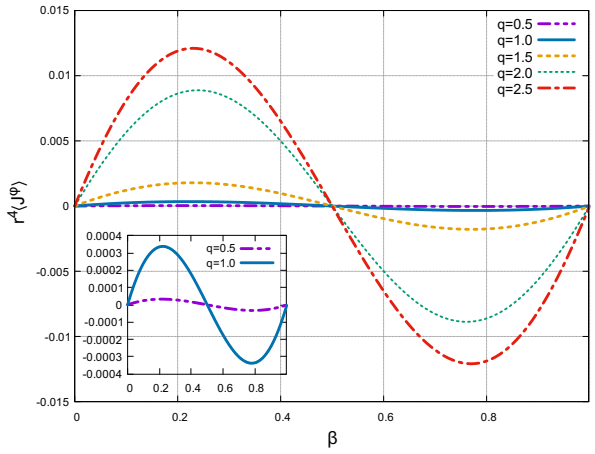

Figura 2.5: Densidade de corrente induzida renormalizada, (2.61), em unidades de r^{-4}, plotada em termos de β para o caso não massivo.

que é a contribuição pura induzida pela condição de quase-periodicidade (2.2). O caso do campo escalar sem massa segue de (2.62), no limite $m \to 0$, e é dado por

$$\langle J^{\varphi} \rangle = \frac{\sin(\pi\beta)}{32\pi^3 r^4} \int_0^{\infty} dy \frac{\sinh(y)[\sinh[(1-\beta)y] - \sinh(y\beta)]}{\cosh^6(y/2)}. \tag{2.63}$$

A integral acima possui solução analítica, que nos leva ao resultado

$$\langle J^{\varphi} \rangle = \frac{\beta(1-2\beta)(-1+2\beta)}{12\pi^2 r^4}, \tag{2.64}$$

o que é consistente com a densidade de corrente induzida sendo zero quando $\beta = 0$ e $\beta = 1/2$, como pode ser visto nas Eqs. (2.59) e (2.61) - (2.63).

Não é inesperado que uma densidade de corrente seja induzida, pois impomos que o campo escalar carregado deve obedecer à condição (2.2). A ação (2.3) é simétrica sob (2.2) e isso permite obter os resultados (2.59), (2.61), (2.62) e (2.63). Estes são novos resultados à luz do sistema físico particular que consideramos, ou seja, um campo escalar massivo e carregado se propagando em um espaço-tempo cônico sob a condição de contorno (2.2). Este último é de fato uma condição quase periódica que, como explicado anteriormente na introdução desse capítulo, pode imitar as propriedades dos nanotubos. Neste cenário particularmente interessante, com aplicações potenciais, também obtivemos as expressões para os VEVs do campo ao quadrado (2.28) e tensor energia-momento (2.59) no caso do campo escalar massivo e carregado, que são mais gerais do que os resultados das Refs. [31, 105].

Assim, foi possível observar que de fato o parâmetro do espaço cônico q em conjunto com a parâmetro angular β tornam-se de vital importância na obtenção dos observáveis físicos não nulos como o caso do tensor energia-momento e da densidade de corrente induzida. Esse último dependendo apenas de β para um valor não nulo, e apenas para a coordenada axial φ, já que a condição de contorno afeta apenas essa coordenada na solução da equação de Klein-Gordon.

Este capitulo é de vital importância para o trabalho, uma vez que alguns resultados serão utilizados em outros capítulos com exceção de constantes associadas ao sistema em uso.

Capítulo 3

Efeitos de condições de contorno e topologia não trivial nas flutuações da densidade de um líquido clássico

O objetivo nesse presente capitulo é generalizar o resultado obtido em [64, 65] para a corda cósmica introduzindo a condição quase periódica dada pela Eq. (2.2) com isso, a solução da equação de movimento apresentará a dependência explícita do parâmetro β. O parâmetro q, por outro lado, codifica a estrutura cônica do espaço-tempo [35, 36, 37].

Em [64, 65], os autores encontraram a flutuação da densidade quadrática média renormalizada do fluido para $q > 0$ em diversos cenários, onde um deles é o espaço-tempo da corda considerando o caso particular $\beta = 0$, que representa a condição de contorno periódica e em outro momento calculam a mesma quantidade para condição de contorno de Neumann considerando a configuração de uma e duas placas planas paralelas. Neste capítulo, obtemos a flutuação da densidade quadrática média renormalizada para o caso geral, $q > 0$, e β arbitrário. Além disso, revisamos o resultado das referências citadas, no que se trata da influência das condições de contorno de Dirichlet e Neumann e estudamos as consequências da condição de contorno mista nas flutuações de densidade nos casos de dois planos paralelos no espaço-tempo de Minkowski.

O capítulo está organizado da seguinte forma: Na Sec. 3.1, damos uma revisão geral da teoria dos fônons em um líquido clássico. Na Sec. 3.2, encontramos uma expressão analítica fechada e exata para a função de dois pontos juntamente com a flutuação da

densidade quadrática média do líquido, como consequência da imposição de uma condição quase-periódica no campo escalar sem massa cujos modos se propagam na estrutura cônica do espaço-tempo de uma corda cósmica, ou desclinação. Na Sec. 3.3, também calculamos explicitamente tanto a função de dois pontos quanto a flutuação da densidade quadrática média associada ao campo escalar sem massa representando os modos do fônon do líquido impondo condições de contorno de Dirichlet, Neumann e mistas nas placas paralelas.

3.1 Fônon em um líquido

Nesta seção, damos uma breve revisão da teoria da flutuação da densidade quântica de um fluido clássico, como um líquido, proveniente das oscilações de ponto zero, análogas à teoria relativística de campos quânticos, tomando como referência modelos análogos da gravitação. A teoria dos fônons como ondas sonoras quantizadas é construída sob a presença de perturbações na densidade de massa do fluido que pode ser escrita na forma $\rho' = \rho - \rho_0$, com ρ_0 sendo uma densidade de massa média constante, e ρ' a variação da densidade, que é pequena ($\rho' \ll \rho_0$). As pequenas perturbações levam a uma relação de dispersão linear $\omega = u|k|$, onde u é a velocidade do som no líquido. Assim, a perturbação da densidade de massa ρ' está relacionada com a velocidade do fluido $\vec{v}$ pela equação de continuidade na seguinte forma, [51]

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \approx -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}. \tag{3.1}$$

A aproximação pode ser feita uma vez que ρ' e $\vec{v}$ são de mesma ordem e os termos de segunda ordem são desprezados. Se o fluido for irrotacional, pode-se escrever a velocidade do fluido em termos de um gradiente de um campo escalar real sem massa, ou seja, $\vec{v} = \nabla\phi$. O campo escalar, ϕ, portanto, representa as excitações quânticas (fônons) do fluido, que no nosso caso é um líquido. Como consequência, a densidade de massa perturbada pode estar relacionada a um campo escalar sem massa ϕ de acordo com a equação [51]

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \nabla^2 \phi. \tag{3.2}$$

Esta é essencialmente a equação da continuidade para um líquido com velocidade $\vec{v} \equiv \nabla\phi$ [59], onde o campo escalar real ϕ é o potencial de velocidade. Seguindo as regras usuais

de quantização, a descrição quântica para o líquido é alcançada quando substituímos as grandezas hidrodinâmicas clássicas por operadores expressos em termos dos operadores de aniquilação e criação $\hat{c_k}$, $\hat{c}_k^\dagger$, respectivamente. Eles satisfazem a seguinte relação de comutação

$$\left[\hat{c}_k, \hat{c}_{k'}^\dagger\right] = \delta_{kk'}, \tag{3.3}$$

com $\delta_{kk'}$ sendo uma delta Kronecker ou uma delta de Dirac dependendo se o conjunto de modos do campo k for discreto ou contínuo, respectivamente. Como já foi dito anteriormente, consideramos a quantização de ondas sonoras em um fluido obedecendo uma relação de dispersão linear $\omega = u|k|$. Esta é uma aproximação válida desde que os comprimentos de onda sejam muito maiores do que a separação interatômica.

Vamos considerar primeiro os operadores densidade de líquido e velocidade expressos em termos das variáveis microscópicas, as coordenadas das partículas.

Um líquido clássico pode ser descrito especificando sua densidade ρ e seu vetor de corrente $\vec{j}$, que são definidos da seguinte maneira:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_a m_a \delta(\vec{r}_a - \vec{r}), \quad \vec{j}(\vec{r}) = \sum_a \vec{p}_a \delta(\vec{r}_a - \vec{r}). \tag{3.4}$$

A soma é feita sobre as partículas do sistema, e $\vec{r}_a$ e $\vec{p}_a$ são os vetores posição e momento das partículas de massa m_a. Para descrever as flutuações de um líquido clássico é necessário representar as quantidades ρ e $\vec{j}$ por operadores.

Consideremos então uma partícula de massa m. O operador $\hat{\rho}$ para esta partícula é definido de tal forma que seu valor esperado seja [108]

$$\int d^3 r_1 \psi^*(\vec{r}_1)\hat{\rho}\psi(\vec{r}_1) = m|\psi(\vec{r})|^2. \tag{3.5}$$

Assim, o operador

$$\hat{\rho}(\vec{r}) = m\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}), \tag{3.6}$$

satisfaz esta condição. Da mesma forma, para um sistema de muitas partículas, o operador $\hat{\rho}$ terá a forma apresentada pela Eq. (3.4).

Já para o caso do vetor corrente na mecânica quântica, ele é igual a

$$\frac{\hbar}{2i}[\psi^*(\vec{r})\nabla\psi(\vec{r}) - \psi(\vec{r})\nabla\psi^*(\vec{r})]. \tag{3.7}$$

Mais uma vez, para simplificar, vamos considerar a densidade de momento clássica para uma partícula $\vec{j} = \vec{p}\delta(\vec{R} - \vec{r})$. O operador quântico simetrizado correspondente é igual a [108]

$$\hat{j} = \frac{1}{2}[\vec{p}\delta(\vec{R} - \vec{r}) + \delta(\vec{R} - \vec{r})\vec{p}\,]. \tag{3.8}$$

onde $\vec{p} = (\hbar/i)\nabla$ é o operador momento (∇ atua na coordenada $\vec{r}$). Vamos mostrar agora que o valor esperado do operador Eq. (3.8) é igual à Eq. (3.7). Para isso temos então

$$\begin{aligned}
\int \psi\hat{j}\psi &= \frac{\hbar}{2i}\int \left[\psi^*\nabla\delta(\vec{R} - \vec{r})\psi + \psi^*\delta(\vec{R} - \vec{r})\nabla\psi\right] dV, \\
&= \frac{\hbar}{2i}\int \left[-\psi\nabla\delta(\vec{R} - \vec{r})\psi^* + \psi^*\delta(\vec{R} - \vec{r})\nabla\psi\right] dV, \\
&= \frac{\hbar}{2i}\left[\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right],
\end{aligned} \tag{3.9}$$

onde usamos uma integração por partes no primeiro termo para chegar a esse resultado, que é o mesmo de (3.7).

As relações de comutação entre esses operadores podem ser obtidas diretamente pelo cálculo do comutador de $\hat{j}$ com $\hat{\rho}$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{j}(\vec{r})\hat{\rho}(\vec{r}\,') - \hat{\rho}(\vec{r}\,')\hat{j}(\vec{r}) &= \sum_a \frac{m_a\hbar}{2i}\left\{\left[\nabla_a\delta(\vec{r}_a - \vec{r}) + \delta(\vec{r}_a - \vec{r})\nabla_a\right]\delta(\vec{r}_a - \vec{r}\,')\right. \\
&\quad \left. - \delta(\vec{r}_a - \vec{r}\,')\left[\nabla_a\delta(\vec{r}_a - \vec{r}) + \delta(\vec{r}_a - \vec{r})\nabla_a\right]\right\} \\
&= \sum_a \frac{m_a\hbar}{i}\delta(\vec{r}_a - \vec{r})\left(\nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\right) \\
&= -i\hbar\hat{\rho}(\vec{r})\left(\nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\right).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Para se chegar a esse resultado, ao expandirmos o comutador, se faz necessário usar a seguinte transformação [51]

$$\delta(\vec{r}_a - \vec{r})\nabla_a\delta(\vec{r}_a - \vec{r}\,') = \delta(\vec{r}_a - \vec{r})\left(\nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\right) + \delta(\vec{r}_a - \vec{r})\delta(\vec{r}_a - \vec{r}\,')\nabla_a, \tag{3.11}$$

onde no primeiro termo do lado direito da equação, o termo $(\nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}\,'))$ denota apenas o gradiente da função delta. Além disso, devido a presença do fator $\delta(\vec{r}_a - \vec{r})$, pode ser feito a troca de $(\nabla\delta_a(\vec{r}_a - \vec{r}\,'))$ por $(\nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}\,'))$.

Agora usando o operador velocidade do liquido $\hat{v}$ no lugar de $\hat{j}$ que é definido por

$$\hat{j} = \frac{1}{2}(\hat{\rho}\hat{v} - \hat{v}\hat{\rho}), \tag{3.12}$$

em conjunto com a relação de comutação (3.10), é possível encontramos a relação de comutação entre os operadores $\hat{\rho}$ e $\hat{v}$. Logo, de cálculos análogos ao já feito, chegamos em

$$\hat{v}(\vec{r})\hat{\rho}(\vec{r}\,') - \hat{\rho}(\vec{r}\,')\hat{v}(\vec{r}) = -i\hbar\left(\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\right), \tag{3.13}$$

em que é usado o fato de os operadores $\hat{\rho}(\vec{r})$ e $\hat{\rho}(\vec{r}\,')$ comutarem entre si. Então, substituindo $\hat{v}(\vec{r}) = \nabla\hat{\phi}(\vec{r})$, encontramos a relação de comutação entre os operadores densidade e potencial de velocidade expresso por

$$\hat{\phi}(\vec{r})\hat{\rho}(\vec{r}\,') - \hat{\rho}(\vec{r}\,')\hat{\phi}(\vec{r}) = -i\hbar\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'). \tag{3.14}$$

Por último vamos trocar o operador densidade $\hat{\rho}$ pela sua parte variável dado por $\hat{\rho}' = \hat{\rho} - \rho_0$. Com isso obtemos uma descrição para a teoria quântica de um fluido, uma vez que os operadores de perturbação de densidade e potencial de velocidade também obedecem à seguinte regra de comutação

$$\hat{\phi}(\vec{r})\hat{\rho}'(\vec{r}\,') - \hat{\rho}'(\vec{r}\,')\hat{\phi}(\vec{r}) = -i\hbar\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'). \tag{3.15}$$

Observe que a relação entre os operadores é análoga ao conjugado canônico do campo e seu conjugado de momento expresso como a derivada temporal do próprio campo na teoria quântica de campos. A equação acima é análoga aos operadores de coordenada e momento da partícula, nesse sentido, ρ' e ϕ agem como "coordenadas" e "momento" canonicamente conjugados.

Finalmente, o operador de perturbação de densidade pode ser expresso em termos da derivada temporal do operador potencial de velocidade

$$\hat{\rho}'(t,\vec{r}) = -\frac{\rho_0}{u^2}\dot{\hat{\phi}}(t,\vec{r}). \tag{3.16}$$

Claramente, substituindo (3.16) em (3.2) dá a equação de Klein-Gordon para um campo escalar real sem massa, ou seja,

$$\left[\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right]\phi = 0. \tag{3.17}$$

A única diferença com a teoria do campo relativístico é que se deve considerar a velocidade do som, u, no líquido ao invés da velocidade da luz, c, no vácuo (para mais detalhes veja [51]).

A seguir, estudamos as modificações nas flutuações do vácuo quântico considerando que os modos de fônon se propagam no espaço-tempo da corda cósmica em (3+1) dimensões sob uma condição quase-periódica. Também consideramos os modos de fônon se propagando no espaço-tempo de Minkowski obedecendo às condições de contorno mista, Dirichlet e Neumann. Observe que a geometria ideal da corda cósmica pode, por exemplo, aparecer como um defeito em um cristal líquido na forma de uma desclinação. Calculamos as expressões fechadas e analíticas para a função de dois pontos e a flutuação da densidade quadrática média renormalizada para cada caso. Além disso, alguns cálculos para o caso da corda cósmica serão omitidos, pois já foram detalhados no capítulo anterior.

3.2 Fônons em um espaço-tempo cônico

O elemento de linha que representa o espaço-tempo cônico de uma corda cósmica efetiva ou de uma desclinação, considerado em uma teoria líquida, deve conter a velocidade do som u substituindo a velocidade da luz c. Nesse sentido, o elemento de linha de um espaço-tempo cônico em $(3+1)$ dimensões, em coordenadas cilíndricas, é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = u^2dt^2 - dr^2 - r^2d\varphi^2 - dz^2, \tag{3.18}$$

onde as coordenadas do espaço-tempo são definidas nos intervalos: $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi/q]$ e $t, z \in (-\infty, +\infty)$. Como mencionamos anteriormente, o parâmetro q codifica a estrutura cônica do espaço-tempo, que se torna um parâmetro de desclinação em sistemas de matéria condensada, como sistemas envolvendo cristais líquidos. Neste último caso, o parâmetro cônico pode assumir valores $q > 0$ [46]. Quando $q = 1$, a estrutura cônica desaparece, e recupera-se o espaço-tempo de Minkowski.

A equação de Klein-Gordon em coordenadas cilíndricas, considerando o elemento de linha (3.18), é escrita como

$$\left[\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\phi(t, r, \varphi, z) = 0. \tag{3.19}$$

Vamos resolver a equação acima submetendo sua solução à condição quase periódica

$$\phi(t, r, \varphi, z) = e^{-2\pi i\beta}\phi(t, r, \varphi + 2\pi/q, z), \tag{3.20}$$

com $0 \leq \beta < 1$. Assim, para um campo escalar real sem massa no espaço-tempo efetivo da corda cósmica caracterizado pelo elemento de linha (3.18), a solução da Eq. (3.19), sob a condição quase periódica (3.20), é dado por [1]

$$\phi(t, r, \varphi, z) = Ae^{-i\omega_k t} e^{i\nu z} e^{iq(n+\beta)\varphi} J_{q|n+\beta|}(\eta r). \tag{3.21}$$

O parâmetro A na solução acima é uma constante de normalização, $\omega_k^2 = u^2(\nu^2 + \eta^2)$ é a relação de dispersão, $k = (n, \eta, \nu)$ é o conjunto de números quânticos e $J_\mu(x)$ é a função de Bessel de primeiro tipo. A constante de normalização A pode ser obtida considerando a regra de comutação (3.15), daí obtemos

$$|A_k| = \sqrt{\frac{qu^2\hbar\eta}{2(2\pi)^2\rho_0\omega_k}}. \tag{3.22}$$

Como se sabe, os fônons podem ser vistos como excitações de ondas sonoras de um campo escalar real sem massa, no nosso caso, a solução normalizada completa (3.21), com (3.22). Essas excitações são formalmente construídas uma vez que quantizamos o campo escalar real sem massa em termos dos operadores de aniquilação e de criação de fônons $\hat{c}_k$ e $\hat{c}_k^\dagger$, respectivamente. Assim, o operador de campo é escrito como

$$\hat{\phi}(t, r, \varphi, z) = \sum_{\{k\}} \left[A_k \hat{c}_k e^{-i\omega_k t + i\nu z + iq(n+\beta)\varphi} + A_k^* \hat{c}_k^\dagger e^{i\omega_k t - i\nu z - iq(n+\beta)\varphi} \right] J_{q|n+\beta|}(\eta r), \tag{3.23}$$

onde

$$\sum_{\{k\}} = \int_\infty^\infty d\nu \int_0^\infty d\eta \sum_{n=-\infty}^{\infty}, \tag{3.24}$$

é a soma sobre todos os números quânticos.

Passemos agora ao cálculo da função de dois pontos $G(w, w')$, onde $w \equiv (t, r, \varphi, z)$. A função de dois pontos é importante para calcular a flutuação dadensidade quadrática média renormalizada, que é o observável físico de interesse em nossa investigação. Podemos então fazer uso do operador de campo (3.23) para calcular $G(w, w')$ de acordo com [6]

$$G(w, w') \;\; = \;\; \langle \hat{\phi}(w) \hat{\phi}(w') \rangle, \tag{3.25}$$

onde $\langle \;\; \rangle$ é o valor esperado do vácuo. A substituição da Eq. (3.23) na Eq. (3.25) fornece

$$G(w, w') = \sum_{\{k\}} \frac{qu^2\hbar\eta}{2(2\pi)^2\rho_0\omega_k} e^{i\nu\Delta z + iq(n+\beta)\Delta\varphi - i\omega_k\Delta t} J_{q|n+\beta|}(r\eta) J_{q|n+\beta|}(r'\eta), \tag{3.26}$$

com $\Delta t = t - t'$, $\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$ e $\Delta z = z - z'$. Além disso, para resolver as integrais em ν e η presentes na função de dois pontos (3.26) podemos fazer a rotação de Wick $i\Delta t = \Delta\tau$ e usar o seguinte identidade

$$\frac{e^{-\omega_k \Delta\tau}}{\omega_k} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty ds e^{-s^2\omega_k^2 - \Delta\tau^2/4s^2}. \tag{3.27}$$

A integral em η pode, então, ser obtida usando a Eq. (21) da Ref. [101]. Assim, a função de dois pontos (3.26) torna-se

$$G(w, w') = \frac{qu^2\hbar}{8\pi^2\rho_0} \frac{e^{iq\beta\Delta\varphi}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{i\nu\Delta z} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-(su)^2\nu^2 - \frac{\Delta\zeta^2}{4(su)^2}} \mathcal{I}(\beta, \Delta\varphi, x), \tag{3.28}$$

onde $\Delta\zeta^2 = u^2\Delta\tau^2 + r^2 + r'^2$, $x = rr'/2(su)^2$, e

$$\mathcal{I}(\beta, \Delta\varphi, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inq\Delta\varphi} I_{q|n+\beta|}(x). \tag{3.29}$$

A solução dessas integrais foram obtidas no Cap. 2 com o auxílio da fórmula da soma (2.18). Consequentemente, nos é fornecido a forma fechada e exata para a função de dois pontos, ou seja,

$$\begin{aligned} G(w, w') = \frac{qu\hbar e^{iq\beta\Delta\varphi}}{2(2\pi)^2\rho_0 rr'} \Bigg\{ & \frac{1}{q} \sum_n e^{i\beta(2\pi n - q\Delta\varphi)} \frac{1}{\sigma_n} \\ & - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=+,-} j e^{ijq\beta\pi} \int_0^\infty dy \frac{1}{\sigma_y} \frac{\cosh[qy(1-\beta)] - \cosh(q\beta y) e^{-iq(j\pi + \Delta\varphi)}}{\cosh(qy) - \cos[q(\Delta\varphi + j\pi)]} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

onde σ_n e σ_y são dadas pelas equações (2.22a) e (2.22b), respectivamente.

Observe ainda que a soma em n na função da expressão acima está restrita ao mesmo intervalo encontrado no capítulo anterior (2.19)[1, 101, 102].

Deve-se notar também que para $q < 2$, a única contribuição no primeiro termo do lado direito da Eq. (3.30) vem de $n = 0$, que é a contribuição de Minkowski para a função de dois pontos. Como é amplamente conhecido, este último diverge no limite de coincidência $w' \to w$, e deve ser subtraído para calcular os observáveis físicos, fornecendo assim uma quantidade renormalizada finita. Como consequência, a função de dois pontos renormalizada é obtida como

$$G_{\rm ren}(w, w') = G(w, w') - G_{\rm M}(w, w'), \tag{3.31}$$

onde $G_{\rm M}(w,w')$ é o termo $n=0$ da soma em (3.30) que representa a contribuição de Minkowski, ou seja,

$$G_{\rm M}(w,w') = \frac{u\hbar}{8\pi^2\rho_0 r r'}\frac{1}{\sigma_0}, \tag{3.32}$$

onde σ_0 é dado pela Eq. (2.22a). Podemos ver que a contribuição de Minkowski acima é claramente divergente no limite de coincidência $w' \to w$. Devemos salientar que, exceto pelas constantes associadas ao sistema de fônons, a função de dois pontos na Eq. (3.30) é semelhante à função Wightman obtida no Cap. 2 [1] para o caso sem massa, mostrando a consistência do nosso resultado.

3.2.1 Flutuação da densidade quadrática média

O efeito local na flutuação da densidade quadrática média devido à condição quase-periódica (3.20) no espaço-tempo da corda cósmica (3.18) pode ser calculado usando a Eq. (3.16). O valor esperado de vácuo $\langle\hat{\rho}(w)\rangle$ se anula devido ao fato de o operador $\hat{\rho}(w)$ depender linearmente dos operadores de aniquilação e criação $\hat{c}_k^\dagger$ e $\hat{c}_k$. Para calcular a flutuação da densidade quadrática média, temos que considerar o produto

$$\hat{\rho}(w)\hat{\rho}(w') = \frac{\rho_0^2}{u^4}\frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}[\hat{\phi}(w)\hat{\phi}(w')]. \tag{3.33}$$

Assim, tomando o valor esperado de vácuo da expressão acima, pode-se encontrar a flutuação da densidade quadrática média, em termos de $G(w,w')$, na forma

$$\langle\hat{\rho}(w)\hat{\rho}(w')\rangle = \frac{\rho_0^2}{u^4}\frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}G(w,w'). \tag{3.34}$$

Agora, tomando o limite de coincidência $w' \to w$ e subtraindo a contribuição de Minkowski (3.32), podemos finalmente encontrar uma forma fechada para a flutuação da densidade quadrática média renormalizada

$$\begin{aligned}\langle\rho^2\rangle_{\rm ren} &= \frac{\rho_0^2}{u^4}\lim_{w'\to w}\frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}G_{\rm ren}(w,w') \\ &= -\frac{\hbar\rho_0}{32\pi^2 u r^4}\left\{2\sum_{n=1}^{[q/2]*}\frac{\cos(2\beta\pi n)}{\sin^4(\pi n/q)} - \frac{q}{\pi}\int_0^\infty dy\frac{M(y,\beta,q)}{\cosh^4(y/2)}\right\},\end{aligned} \tag{3.35}$$

onde a função $M(y,\beta,q)$ está definida na Eq. (2.29).

Deve-se notar que, a flutuação da densidade quadrática média é uma função elementar de r, ou seja, $\langle\rho^2\rangle_{\rm ren} \propto r^{-4}$, que significa a expressão (3.35) diverge quando $r \to 0$ e vai para

zero quando $r \to \infty$. Na ausência da corda cósmica, ou seja, $q = 1$, a única contribuição se deve à condição quase periódica (3.20), originária do segundo termo do lado direito da Eq. (3.35). Por outro lado, na ausência da condição quase periódica, ou seja, $\beta = 0$, o efeito na flutuação da densidade quadrática média é inteiramente devido à topologia não trivial da corda cósmica. Na Fig. 3.1, traçamos a flutuação da densidade quadrática média apresentada na Eq. (3.35), em função do parâmetro β para vários valores do parâmetro de corda cósmica q. Observe que, se tomarmos $q = 1$ e $\beta = 0$ na Eq. (3.35), ou seja, na ausência de qualquer condição de contorno ou topologia não trivial, a flutuação da densidade quadrática média renormalizada desaparece, como esperado.

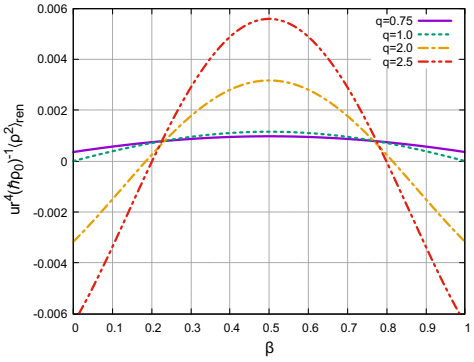

Figura 3.1: Flutuação da densidade quadrática média renormalizada adimensional, (3.35), em termos de β, considerando valores diferentes para o parâmetro de corda cósmica q.

3.2.2 Casos Particulares

Vamos agora focar nossa atenção para três casos particulares para a flutuação da densidade quadrática média obtida na Eq. (3.35), ou seja, o caso $\beta = 0$ (somente corda cósmica), $q = 1$ (somente condição periódica), e o caso $\beta = \frac{1}{2}$ (campo torcido).

Para uma contribuição somente da topologia cônica da corda cósmica, $\beta = 0$, da Eq. (3.35), temos

$$\langle \rho^2 \rangle_{\rm ren} = -\frac{\hbar \rho_0}{32\pi^2 u r^4} \left\{ 2 \sum_{n=1}^{[q/2]*} \frac{1}{\sin^4(\pi n/q)} - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dy \, \frac{M(y,0,q)}{\cosh^4(y/2)} \right\}. \tag{3.36}$$

Além disso, se considerarmos apenas valores inteiros de q na Eq. (3.36), o segundo termo do lado direito se anula, e a única contribuição vem do primeiro termo. Assim, usando a

Eq. (??), podemos realizar a soma em n para obter

$$\langle\rho^2\rangle_{\rm ren} = -\frac{\hbar\rho_0}{1440\pi^2 ur^4}\,(-11+10q^2+q^4), \tag{3.37}$$

que é sempre negativo para qualquer valor de q. De fato, a expressão acima para a flutuação da densidade quadrática média é uma função analítica de q e, consequentemente, pode ser estendida para qualquer valor de q, além dos valores inteiros. Podemos verificar numericamente que ambas as expressões (3.36) e (3.37) fornecem o mesmo resultado para qualquer valor de q. Observe que a Eq. (3.37) se anula para $q = 1$, como esperado. Observe também que a Eq. (3.37) é consistente com o resultado encontrado na Ref. [64].

O caso em que temos apenas efeitos de flutuação devido à condição quase-periódica (3.20), tomando $q = 1$ na Eq. (3.35), apenas o segundo termo do lado direito contribui, ou seja,

$$\begin{aligned}\langle\rho^2\rangle_{\rm ren} &= \frac{\hbar\rho_0}{64\pi^3 ur^4}\int_0^\infty dy \frac{\sin(\beta\pi)\,(\cosh(\beta y)+\cosh[y(1-\beta)])}{\cosh^6(y/2)} \\ &= \frac{\hbar\rho_0}{48\pi^2 ur^4}\beta(\beta^2-1)(\beta-2),\end{aligned} \tag{3.38}$$

onde a integral em y foi resolvida exatamente. O resultado acima, para a flutuação da densidade quadrática média diferente de zero como consequência da condição quase-periódica, é exato e se anula para $\beta = 0$.

Finalmente, consideramos o caso em que $\beta = 1/2$, ou seja, o campo escalar torcido. Da Eq. (3.35) temos, então,

$$\langle\rho^2\rangle_{\rm ren} = -\frac{\hbar\rho_0}{32\pi^2 r^4 u}\left\{2\sum_{n=1}^{[q/2]}{}^{*}\frac{(-1)^n}{\sin^4(\pi n/q)} - \frac{q}{\pi}\int_0^\infty dy\frac{M(y,1/2,q)}{\cosh^4(y/2)}\right\}. \tag{3.39}$$

Além disso, podemos considerar apenas valores inteiros do parâmetro de corda cósmica q. Neste caso, $\mathcal{M}(y,1/2,q)$=0, e como consequência, apenas o primeiro termo no lado direito da Eq. (3.39) contribui para a flutuação da densidade quadrática média. Isto fornece

$$\begin{aligned}\langle\rho^2\rangle_{\rm ren} &= -\frac{\hbar\rho_0}{16\pi^2 ur^4}\sum_{n=1}^{q-1}\frac{(-1)^n}{\sin^4(\pi n/q)}, \\ &= \frac{\hbar\rho_0}{11520\pi^2 ur^4}(88+40q^2+7q^4),\end{aligned} \tag{3.40}$$

onde usamos a Eq. (??). Embora tenhamos obtido o resultado acima considerando valores inteiros de q, a Eq. (3.40) é uma função analítica de q e pode ser estendida para todos os

valores do parâmetro da corda cósmica. De fato, uma verificação numérica mostra que as Eqs. (3.39) e (3.40) dão o mesmo resultado para qualquer valor de q. Além disso, como pode ser visto, a expressão (3.40) é sempre positiva para fônons em um espaço-tempo cônico. Observe que, comparando a Eq. (3.38), para $\beta = 1/2$, com a Eq. (3.40), para $q = 1$, pode-se ver também que elas fornecem o mesmo resultado, mais uma vez mostrando a consistência de nossos resultados.

3.3 Dirichlet, Neumann e condições de contorno mistas

Nesta seção, nos concentramos no estudo dos modos dos fônons submetidos a condições de contorno de Dirichlet, Neumann e mistas no espaço-tempo de Minkowski. Essas condições de contorno serão tomadas considerando um e dois planos paralelos, consequentemente apresentando modificações nas flutuações da densidade quadrática média do líquido.

Algo a ser adiantado é que todas as constantes de normalização desta seção, são obtidas da mesma maneira que para o caso anterior, ou seja, usando a condição (3.15). Assim, podemos omitir essa parte sem prejuízo para o entendimento das questões aqui abordadas, com o objetivo de não tornar a leitura repetitiva.

3.3.1 Um plano

Vamos começar considerando as condições de contorno de Dirichlet e Neumann aplicadas em um plano colocado no ponto $z = 0$. Assim, a solução do operador de campo escalar normalizado para a equação de Klein-Gordon, $\Box\hat{\phi}(x) = 0$, sob condições de contorno de Dirichlet e Neumann, é direta e é dada por

$$\varphi(w) = \sum_{\{k\}} \left(\frac{\hbar u^2}{(2\pi)^3 \omega_k \rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(c_k e^{i\omega_k t - ik_x x - ik_y y} + c_k^\dagger e^{-i\omega_k t + ik_x x + ik_y y}\right) \left\{ \begin{array}{c} \sin(k_z z) \\ \cos(k_z z) \end{array} \right\}, \quad (3.41)$$

onde w representa as coordenadas cartesianas do espaço-tempo plano (x, y, z), $\{k\}$ representa o conjunto de números quânticos contínuos (k_x, k_y, k_z), $\omega_k^2 = u^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$ é a relação de dispersão, e as funções $\sin(nz)$ e $\cos(nz)$ representam as condições de contorno

de Dirichlet e Neumann, respectivamente. A função de dois pontos nesses casos será

$$G(w,w') = \frac{u\hbar}{4\pi^2\rho_0}\left[\frac{1}{\Delta z^2 - \Delta\zeta^2} \pm \frac{1}{(z+z')^2 + \Delta\zeta^2}\right], \tag{3.42}$$

com $\Delta\zeta^2 \equiv \Delta x^2 + \Delta y^2 - u^2\Delta t^2$. Observe que os sinais de menos e mais representam soluções de condições de contorno de Dirichlet e Neumann, respectivamente. O primeiro termo do lado direito é a contribuição divergente de Minkowski no limite de coincidência $w' \to w$ e deve ser subtraído no processo de renormalização. Portanto, a partir das Eqs. (3.34) e (3.42), a flutuação da densidade quadrática média renormalizada é dada por

$$\langle\rho^2\rangle_{\text{ren}} = \pm\frac{\hbar\rho_0}{32u\pi^2}\frac{1}{z^4}, \tag{3.43}$$

onde z é a distância a partir do plano colocado em $z = 0$. Observe que o resultado acima, para condições de contorno de Dirichlet e Neumann, diverge no plano de contorno. Em particular, a expressão para a condição de contorno de Neumann é consistente com o resultado obtido nas Refs. [64, 65].

3.3.2 Dois planos paralelos

Agora, desejamos considerar os modos do campo escalar de fônons sujeitos a condições de contorno mistas, Dirichlet e Neumann em dois planos paralelos em $z = 0$ e $z = a$. Como esperado, essas condições de contorno fazem com que as flutuações do vácuo quântico do campo escalar do fônon sejam modificadas, resultando em uma flutuação da densidade quadrática média diferente de zero, como veremos a seguir.

Condição de contorno mista

Para analisar os efeitos da condição de contorno mista nos modos de fônon, consideramos dois planos paralelos nos pontos $z = 0$ e $z = a$, onde exigimos que o campo escalar obedeça à condição de contorno de Dirichlet no primeiro ponto e a condição de contorno de Neumann no segundo, ou seja,

$$\phi(t,x,y,z=0) = 0, \qquad \partial_z\phi(t,x,y,z)|_{z=a} = 0. \tag{3.44}$$

A solução do operador de campo escalar normalizado para a equação de Klein-Gordon, sob a condição de contorno mista acima, é escrita em termos dos operadores de aniquilação e

criação de fônons, c_k e $c_k^\dagger$, na forma

$$\hat{\phi}(w) = \sum_{\{k\}} \left(\frac{\hbar u^2}{16 a \pi^2 \omega_k \rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(c_k e^{-i\omega_k t + ik_x x + ik_y y} + c_k^\dagger e^{i\omega_k t - ik_x x - k_y y} \right) \sin(k_n z), \tag{3.45}$$

onde o momento na direção z foi discretizado, ou seja, $k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2a}$, com $n = 0, 1, 2, ...$ [97]. Observe também que $\{k\}$ representa os números quânticos (k_x, k_y, n), e $\omega_k^2 = u^2(k_x^2 + k_y^2 + k_n^2)$ é a relação de dispersão.

Como antes, para obter a flutuação da densidade quadrática média, precisamos encontrar a função de dois pontos. Portanto, usando o operador de solução de campo escalar, (3.45), na Eq. (3.25), para a função de dois pontos, temos

$$\begin{aligned} G(w, w') &= \frac{\hbar u^2}{4 a \pi^2 \rho_0} \int dk_x dk_y e^{-ikr\cos\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\omega_n \Delta t}}{\omega_n} \sin(k_n z) \sin(k_n z') \\ &= \frac{\hbar u^2}{2 a \pi \rho_0} \int_0^\infty dk\ k\ J_0(kr) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\omega_n \Delta t}}{\omega_n} \sin(k_n z) \sin(k_n z'), \end{aligned} \tag{3.46}$$

onde $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$. Para obter o resultado na Eq.(3.46), usamos coordenadas polares para k_x e k_y, e resolvemos a integral angular em θ que deu origem à função de Bessel $J_0(kr)$ de primeiro tipo. Observe que, nesta equação, ainda falta resolver tanto a integral em k quanto o somatório em n. Este último pode ser resolvido aplicando a seguinte fórmula de Abel-Plana [97]

$$\sum_{n=0}^{\infty} f\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty dx\ f(x) - i \int_0^\infty dx\ \frac{f(ix) - f(-ix)}{e^{2\pi x} + 1}. \tag{3.47}$$

Com este método, a contribuição divergente de Minkowski se torna evidente, e podemos renormalizar a função de dois pontos removendo este termo. O procedimento consiste em substituímos a Eq. (3.46) na fórmula de Abel-Plana acima, o que resulta em

$$\begin{aligned} G(w, w') &= \frac{\hbar u^2}{2 a \pi \rho_0} \int_0^\infty dk\ k\ J_0(kr) \left\{ \int_0^\infty dx\ \frac{e^{i\omega_x \Delta t}}{\omega_x} \sin(\alpha z) \sin(\alpha z') \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_{ka/\pi}^\infty dx\ \frac{\cosh(\Delta\sqrt{\alpha^2 - k^2})}{e^{2\pi x} + 1}\ \frac{\sin(i\alpha z) \sin(i\alpha z')}{u\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \right\}, \end{aligned} \tag{3.48}$$

onde $\omega_x = u\sqrt{k^2 + \alpha^2}$ e $\alpha = \frac{x\pi}{a}$. A expressão acima para a função de dois pontos inclui a contribuição divergente de Minkowski proveniente do primeiro termo no lado direito, bem como a contribuição finita no segundo termo. Assim, a função de dois pontos renormalizada pode ser escrita como

$$G_{\text{ren}}(w, w') \equiv G(w, w') - G_{\text{M}}(w, w'), \tag{3.49}$$

sendo $G_{\rm M}(w,w')$ a contribuição divergente de Minkowski, que calcularemos a seguir. Para este propósito, vamos considerar o primeiro termo no lado direito da Eq. (3.48), ou seja,

$$G_1(w,w') = \frac{\hbar u}{2\pi a\rho_0}\int_0^\infty dx\,\sin(\alpha z)\sin(\alpha z')\int_0^\infty dk\;kJ_0(kr)\;\frac{e^{iu\Delta t\sqrt{k^2+\alpha^2}}}{\sqrt{k^2+\alpha^2}}. \quad (3.50)$$

Usando a fórmula de Euler, a integral em k pode ser resolvida através da seguinte relação (veja Ref. [109][1]).

$$\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\left\{\begin{array}{c}\sin(b\sqrt{x^2+z^2})\\ \cos(b\sqrt{x^2+z^2})\end{array}\right\}J_0(cx)dx = \pm\frac{1}{\sqrt{b^2-c^2}}\left\{\begin{array}{c}\cos(z\sqrt{b^2-c^2})\\ \sin(z\sqrt{b^2-c^2})\end{array}\right\}. \quad (3.51)$$

Isso nos fornece então

$$\begin{aligned} G_1(w,w') &= \frac{\hbar u}{2\pi^2 a\rho_0}\int_0^\infty dx\;\sin(\alpha z)\sin(\alpha z')\;\frac{e^{-\alpha\sqrt{r^2-(u\Delta t)^2}}}{\sqrt{r^2-(u\Delta t)^2}}\\ &= \frac{\hbar u}{4\pi^2\rho_0}\int_0^\infty d\alpha\;[\cos(\alpha(z-z'))-\cos(\alpha(z+z'))]\;\frac{e^{-\alpha\sqrt{r^2-(u\Delta t)^2}}}{\sqrt{r^2-(u\Delta t)^2}}\\ &= \frac{\hbar u}{4\pi^2\rho_0}\left\{\frac{1}{\Delta z^2+\Delta\zeta^2}-\frac{1}{(z+z')^2+\Delta\zeta^2}\right\}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde $\Delta\zeta^2 = r^2-(u\Delta t)^2$. O primeiro termo no lado direito da Eq (3.52) é a contribuição de Minkowski, $G_{\rm M}(w,w')$, que deve ser removido, pois diverge quando tomamos a limite de coincidência $w'\to w$. Deve-se notar que, o segundo termo é finito no limite de coincidência, e é a contribuição devido à presença da condição de contorno de Dirichlet aplicada no primeiro plano.

Agora, podemos prosseguir com o segundo termo no lado direito da Eq. (3.48), ou seja,

$$\begin{aligned} G_2(w,w') &= \frac{\hbar u}{\pi\rho_0 a}\int_0^\infty dk\;kJ_0(kr)\int_{ka/\pi}^\infty dx\;\frac{\cosh(u\Delta t\sqrt{\alpha^2-k^2})}{e^{2\pi x}+1}\;\frac{\sin(i\alpha z)\sin(i\alpha z')}{\sqrt{\alpha^2-k^2}}\\ &= \frac{\hbar u}{\pi\rho_0 a}\int_0^\infty dx\;\frac{\sin(i\alpha z)\sin(i\alpha z')}{e^{2\pi x}+1}\int_0^\alpha dk\;kJ_0(kr)\;\frac{\cos(iu\Delta t\sqrt{\alpha^2-k^2})}{\sqrt{\alpha^2-k^2}}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

A integral em k na contribuição da função de dois pontos acima pode ser resolvida empregando o mesmo método da Ref. [109][2], ou seja, usando a seguinte relação

$$\int_0^a x\frac{\cos(b\sqrt{a^2-x^2})}{\sqrt{a^2-x^2}}J_0(cx)dx = (b^2+c^2)^{-1/2}\sin(a\sqrt{b^2+c^2}). \quad (3.54)$$

[1] pág. 203, seção 2.12.23, Eq. (8).

[2] pág. 201, seção 2.12.21, Eq. (6).

Assim, resulta na seguinte expressão

$$G_2(w,w') = \frac{\hbar u}{\pi^2\rho_0}\int_0^\infty d\alpha\ \frac{\sin(i\alpha z)\sin(i\alpha z')}{e^{2a\alpha}+1}\ \frac{\sin(\alpha\sqrt{r^2-(u\Delta t)^2})}{\sqrt{r^2-(u\Delta t)^2}}. \tag{3.55}$$

Por fim, a partir da Eq. (3.49), a função de dois pontos renormalizada é encontrada coletando o segundo termo no lado direito da Eq. (3.52), juntamente com a expressão na Eq. (3.55). Isto nos leva a

$$\begin{aligned} G_{\rm ren}(w,w') = &-\frac{\hbar u}{\pi^2\rho_0}\left\{\frac{1}{4}\frac{1}{[(z+z')^2+\Delta\zeta^2]}\right. \\ &\left.-\int_0^\infty d\alpha\ \frac{1}{e^{2a\alpha}+1}\ \frac{\sin(\alpha\sqrt{r^2-(u\Delta t)^2})}{\sqrt{r^2-(u\Delta t)^2}}\sin(i\alpha z)\sin(i\alpha z')\right\}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Condições de contorno de Dirichlet e Neumann

Por complemento, vamos também considerar ambos os planos paralelos sujeitos às condições de contorno de Dirichlet ou de Neumann, o qual foram obtidos em [64, 65]. Neste caso, a solução do operador de campo escalar para a equação de Klein-Gordon é dada por

$$\varphi(w) = \sum_{\{k\}}\left(\frac{\hbar u^2}{16a\pi^2\omega_k\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(c_k e^{i\omega_k t - ik_x x - ik_y y} + c_k^\dagger e^{-i\omega_k t + ik_x x + ik_y y}\right)\left\{\begin{array}{c}\sin\frac{n\pi}{a}z\\ \cos\frac{n\pi}{a}z\end{array}\right\}, \tag{3.57}$$

onde $\sin\frac{n\pi}{a}z$ $(n=1,2,3,\dots)$ indica a solução sob a condição de contorno de Dirichlet e $\cos\frac{n\pi}{a}z$ $(n=0,1,2,3,\dots)$ sob a condição de contorno de Neumann [97]. Assim, seguindo os mesmos passos mostrados acima, para o caso de condição de contorno mista, o resultado para Dirichlet ou Neumann aplicado nos dois planos paralelos é dado por

$$\begin{aligned} G_{\rm ren}(x,x') = &\frac{\hbar u}{\pi^2\rho_0}\left\{\pm\frac{1}{4}\frac{1}{[(z+z')^2+\Delta\zeta^2]}\right. \\ &\left.+\int_0^\infty d\alpha\ \frac{1}{e^{2a\alpha}-1}\ \frac{\sin(\alpha\sqrt{r^2-(u\Delta t)^2})}{\sqrt{r^2-(u\Delta t)^2}}\left[\begin{array}{c}\sin(i\alpha z)\sin(i\alpha z')\\ \cos(i\alpha z)\cos(i\alpha z')\end{array}\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.58}$$

onde usamos a fórmula de Abel-Plana apresentada na Ref. [97], dada por

$$\sum_{k=0}^\infty f(k) = \int_0^\infty dx\ f(x) + \frac{1}{2}f(0) + i\int_0^\infty dx\frac{f(ix)-f(-ix)}{e^{2\pi x}-1}. \tag{3.59}$$

Os sinais de menos e mais na Eq. (3.58) se referem as condições de Dirichlet e Neumann, respectivamente.

No que segue, usaremos a função de dois pontos na Eq. (3.56) para o caso de condição de contorno mista, e na Eq. (3.58) para as condições de contorno de Dirichlet ou Neumann, para calcular a flutuação da densidade quadrática média.

Flutuação da densidade quadrática média

Para encontrar a flutuação da densidade quadrática média renormalizada, $\langle\rho^2\rangle_{\rm ren}$, como resultado da implementação da condição de contorno mista, usamos as Eqs. (3.34) e (3.56). Isto fornece

$$\langle\rho^2\rangle_{\rm ren} = \frac{\hbar\rho_0}{32\pi^2 u z^4} - \frac{\hbar\rho_0}{2\pi^2 u}\int_0^\infty d\alpha\ \alpha^3\ \frac{\cosh(2\alpha z)-1}{3e^{2a\alpha}+3}. \tag{3.60}$$

A integral em α acima pode ser dividida em duas integrais. A primeira parte é dada por

$$\int_0^\infty d\alpha\ \frac{\alpha^3}{3e^{2a\alpha}+3} = \frac{7\pi^4}{5760a^4} = \frac{7\zeta(4)}{64a^4}, \tag{3.61}$$

onde $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$ é a função zeta de Riemann. Por outro lado, a segunda integral pode ser calculada como [109]

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\alpha\ \alpha^3\ \frac{\cosh(2\alpha z)}{3e^{2a\alpha}+3} &= \frac{\partial^3}{\partial z^3}\int_0^\infty d\alpha\ \frac{\sinh(2\alpha z)}{8(3e^{2a\alpha}+3)} \\ &= \frac{\partial^3}{\partial z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty d\alpha\ \frac{1}{8(3e^{2a\alpha}+3)}\frac{(2\alpha z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{16z^4} - \frac{\pi^4}{96a^4}\frac{\cos(\pi z/a)}{\sin^4(\pi z/a)}(\cos^2(\pi z/a)+5),\end{aligned} \tag{3.62}$$

onde usamos a expansão em série de Taylor para a função hiperbólica $\sinh(x)$. Consequentemente, resolvemos a integral na segunda linha primeiro, realizamos a soma em n em seguida e extraímos as derivadas em relação a z. Finalmente, com as integrais nas Eqs. (3.61) e (3.62), a flutuação da densidade quadrática média (3.60) é escrita como

$$\langle\rho^2\rangle_{\rm ren} = \frac{\hbar\rho_0\pi^2}{192ua^4}\left\{\frac{7}{60} + \frac{\cos(\pi z/a)}{\sin^4(\pi z/a)}(\cos^2(\pi z/a)+5)\right\}. \tag{3.63}$$

Na Fig. 3.2 traçamos a flutuação da densidade quadrática média adimensional para o caso da condição de contorno mista dado acima, como uma função do parâmetro adimensional z/a, onde um dos planos passa pelo ponto $z=0$ e o outro o ponto $z=a$. Podemos ver que a Eq. (3.63) diverge como $1/z^4$ próximo ao plano em $z=0$ com Dirichlet e como

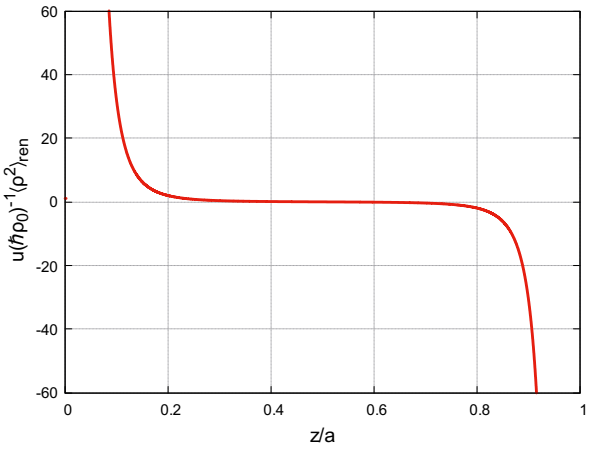

Figura 3.2: Flutuação de densidade quadrática média renormalizada adimensional, (3.63), como consequência de uma condição de contorno mista, em termos de z/a.

$-1/(z-a)^4$ próximo ao plano em $z=a$ com condições de contorno de Neumann. Isso é evidente na Fig.3.2.

Vamos agora considerar a flutuação da densidade quadrática média para as condições de contorno de Dirichlet e Neumann. Graças ao valor esperado de vácuo renormalizado encontrado na Eq. (3.34) com a função de dois pontos na Eq. (3.58), chegamos ao resultado final

$$\langle\rho^2\rangle_{\rm ren} = -\frac{\hbar\rho_0\pi^2}{96ua^4}\left[\frac{1}{15} \pm \frac{3-2\sin^2(\pi z/a)}{\sin^4(\pi z/a)}\right], \tag{3.64}$$

onde, mais uma vez, os sinais de menos e mais estão associados às condições de contorno de Dirichlet e Neumann, respectivamente. Como podemos ver, para o caso da condição de contorno de Neumann, a flutuação da densidade quadrática média é sempre negativa, o que está de acordo com o resultado em [64, 65]. No entanto, para a condição de contorno de Dirichlet, o segundo termo é dominante e, como consequência, a flutuação da densidade quadrática média é sempre positiva, consistente com o resultado para a mesma condição de contorno em um plano. Traçamos na Fig.3.3 a flutuação de densidade quadrática média adimensional (3.64) como uma função de z/a em ambos os casos de Dirichlet e Neumann. Como no caso de condição mista, observamos que, a flutuação da densidade média quadrática renormalizada diverge de acordo com $1/z^4$ no limite $z\to 0$ e de acordo com $1/(z-a)^4$ no limite $z\to a$ para o caso da condição de contorno de Dirichlet imposta em ambos os planos. Por outro lado, considerando a condição de contorno de Neumann,

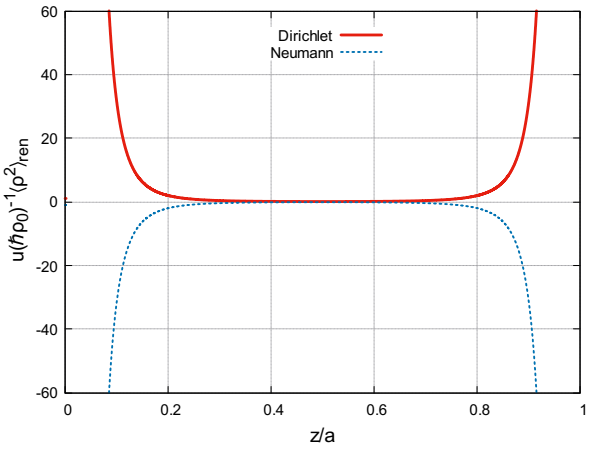

Figura 3.3: Flutuação da densidade quadrática média renormalizada adimensional, (3.64), em função de z/a.

a densidade quadrática média diverge com o sinal oposto em ambos os limites. Este comportamento é mostrado na Fig. 3.3.

É interessante notar a transição de um valor positivo para um valor negativo na Fig. 3.3 para o caso da condição de contorno mista, onde a flutuação da densidade quadrática média renormalizada diverge positivamente no plano sob condição de contorno de Dirichlet e diverge negativamente no plano com condição de contorno de Neumann. Este comportamento é consistente com o resultado mostrado na Fig. 3.2. Os resultados para condições de contorno mistas e de Dirichlet encontrados, respectivamente, nas Eqs. (3.63) e (3.64) no contexto de flutuações de vácuo quântico de fônons originados de flutuações de densidade de líquidos, foram obtidos na Ref. [2]. O resultado em (3.64) para a flutuação da densidade quadrática média sob a condição de contorno de Neumann foi previamente estudado nas Refs. [64, 65]. Fica claro que o estudo de fônons representando excitações quânticas do potencial de velocidade de um líquido clássico, representado por um campo escalar real, uma vez submetido a condições de contorno como mista, Dirichlet e Neumann, bem como a topologia não trivial de uma corda cósmica, produz uma flutuação da densidade quadrática média renormalizada diferente de zero, análoga ao efeito Casimir na teoria quântica de campos [7].

Foi então mostrado que, os parâmetros q e β na parte do espaço-tempo cônico, além de obtermos valores não nulos para os observáveis, ambos tem o controle do tipo de

interação proveniente do defeito, sendo possível obtermos resultados no qual a força é atrativa ou repulsiva em analogia ao efeito Casimir eletromagnético. Da mesma forma mostramos para a condições de contorno mista que é possível também controlarmos o tipo de interação nela contida a partir da distancias das placas.

Capítulo 4

Efeitos quânticos de flutuações térmicas em um líquido clássico em um espaço-tempo cônico com uma condição quase-periódica

A introdução de correções de temperatura estudadas neste capítulo, visa generalizar os resultados obtidos em [2], expostos no capítulo anterior 3, e complementar os obtidos nas Refs. [64, 65] para a parte do estudo envolvendo fônons no espaço-tempo cônico da cordas cósmica ou desclinação.

É importante destacar que neste capítulo, o parâmetro β será usado para denotar a constante de Boltzmann, $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$, assim como usado na literatura, e não mais o parâmetro para a condição de quase-periodicidade, o qual a partir de agora será representado por b.

O presente capítulo seguirá a seguinte ordem. Na Sec.4.1 apresentamos o processo de termalização calculando expressões analíticas fechadas e exatas para a função de Hadamard, bem como para a flutuação da densidade quadrática média do líquido, como consequência da imposição de uma condição quase periódica no campo de fônons na estrutura cônica de uma corda cósmica (ou desclinação). Na Sec.4.2 calculamos e analisamos a influência da temperatura nas densidades de energia do sistema, ou seja, densidade de energia interna, densidade de energia livre e densidade de energia total. Em Sec.4.3 tam-

bém calculamos a densidade de entropia e discutimos seu comportamento em função da temperatura.

4.1 Flutuações térmicas na densidade quadrática média

No Cap. 3, estudamos modificações nas flutuações quânticas do vácuo considerando que os modos dos fônons se propagam no espaço-tempo efetivo da corda cósmica em (3+1) dimensões sob uma condição de contorno quase periódica à temperatura zero. No entanto, o efeito da temperatura pode ser significativo em quantidades físicas. A temperatura pode modificar ou gerar fenômenos interessantes, principalmente no contexto de fluidos. Aqui, abordaremos alguns dos aspectos físicos da temperatura finita considerando um dos sistemas físicos estudados em [2] à temperatura zero, mais especificamente, o espaço-tempo da corda cósmica com uma condição quase-periódica. A investigação aqui também é válida para a desclinação.

Como nosso intuito é expandir os resultados do capítulo anterior, usaremos o mesmo elemento de linha para uma corda cósmica efetiva ou espaço-tempo de desclinação em um líquido, ou seja,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = u^2dt^2 - dr^2 - r^2d\varphi^2 - dz^2, \tag{4.1}$$

com $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi/q]$ e $t, z \in (-\infty, +\infty)$ onde q codifica a conicidade do espaço-tempo e u a velocidade do som no líquido. Quando $q = 1$, não existirá estrutura cônica , e recupera-se o espaço-tempo de Minkowski.

A solução da equação de Klein-Gordon sem massa em um espaço-tempo cônico com condição quase-periódica permanece a mesma, e é escrita como [2]

$$\phi(t, r, \varphi, z) = Ae^{-i\omega_k t}e^{i\nu z}e^{iq(n+b)\varphi}J_{q|n+b|}(\eta r), \tag{4.2}$$

em que a condição quase-periódica é dada por

$$\Phi(t, r, \varphi, z) = e^{-2\pi ib}\Phi(t, r, \varphi + 2\pi/q, z), \tag{4.3}$$

com $0 \leq b < 1$. Observe que para $b = 0$ e $b = 1/2$ a condição (4.3) recupera as condições periódicas e antiperiódicas amplamente conhecidas, respectivamente.

O parâmetro A na solução acima é uma constante de normalização, $\omega_k^2 = u^2(\nu^2+\eta^2)$ é a relação de dispersão, $k = (n, \eta, \nu)$ é o conjunto de números quânticos e $J_\mu(x)$ é a função de Bessel de primeiro tipo. Na segunda forma quantizada, o operador de campo é escrito como

$$\hat{\phi}(t, r, \varphi, z) = \sum_{\{k\}} \left[A_k \hat{c}_k e^{-i(\omega_k t - \nu z - q(n+b)\varphi)} + A_k^* \hat{c}_k^\dagger e^{i(\omega_k t - \nu z - q(n+b)\varphi)} \right] J_{q|n+b|}(\eta r), \tag{4.4}$$

com a constante de normalização

$$|A_k| = \sqrt{\frac{qu^2\hbar\eta}{2(2\pi)^2\rho_0\omega_k}}. \tag{4.5}$$

O símbolo

$$\sum_{\{k\}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_0^{\infty} d\eta \sum_{n=-\infty}^{\infty}, \tag{4.6}$$

denota a soma sobre todos os números quânticos. Para estudar o comportamento da flutuação da densidade em um cenário de temperatura finita, calculamos a função térmica de Hadamard, cujo construção e propriedades foram mostradas na Sec. 1.5, que é fundamental para obter os observáveis físicos associados ao sistema, ou seja, a flutuação da densidade quadrática média, a densidade de energia livre, e a densidade de entropia.

Como visto anteriormente, a função térmica de Hadamard pode ser calculada usando [6]

$$G^{(1)}(x, x') = \mathrm{Tr}[\hat{\varrho}(\phi^*(x')\phi(x) + \phi(x)\phi^*(x'))], \tag{4.7}$$

onde $x \equiv (\tau, r, \varphi, z)$ e $\hat{\varrho}$ é a matriz densidade,

$$\hat{\varrho} = Z^{-1} e^{-\beta \hat{H}}, \tag{4.8}$$

com $\beta = \frac{1}{k_B T}$ e $\hat{H}$ é o operador hamiltoniano. A função de partição Z é descrita por

$$Z = \mathrm{Tr}[e^{-\beta \hat{H}}]. \tag{4.9}$$

Como precisamos lidar com um campo escalar, a seguinte relação para os operadores de criação e destruição será considerada

$$\mathrm{Tr}[\hat{\varrho}\hat{a}_\sigma^+ \hat{a}_{\sigma'}] = \frac{\delta_{\sigma\sigma'}}{e^{\beta\hbar\omega_k} - 1}, \tag{4.10}$$

em que compatível com a estatística de Bose-Einstein.

Substituindo o operador de campo (4.4) na Eq. (4.7) e considerando a relação em (4.10), obtemos

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x,x') &= \sum_{\{k\}} \frac{qu^2\hbar\eta}{8\pi^2\rho_0\omega_k} e^{i[\nu\Delta z+q(n+b)\Delta\varphi]} J_{q|n+b|}(r\eta) J_{q|n+b|}(r'\eta) \\ &\quad \times \left[\left(e^{-i\omega_k\Delta t} + e^{i\omega_k\Delta t}\right) + 2\left(\frac{e^{-i\omega_k\Delta t} + e^{i\omega_k\Delta t}}{e^{\beta\hbar\omega_k}-1}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Deve-se notar que a função térmica de Hadamard acima[1] pode ser dividida em duas partes considerando os termos entre parênteses no lado direito de (4.11), ou seja,

$$G^{(1)}(x,x') = G^{(1)}_0(x,x') + G^{(1)}_T(x,x'). \tag{4.12}$$

O primeiro termo no lado direito, refere-se à função de Hadamard à temperatura zero. O segundo termo é a parte com temperatura diferente de zero da função térmica de Hadamard. Como vemos, todo o efeito da temperatura está presente nesta última que é a parte que nos interessa nesse capítulo, pois a parte não térmica já foi investigada em 3. Portanto, podemos nos concentrar na parte térmica da função de Hadamard de dois pontos. Da Eq. (4.11), obtemos

$$G^{(1)}_T(x,x') = \sum_{\{k\}} \frac{qu^2\hbar\eta}{4\pi^2\rho_0\omega_k} \frac{(e^{-i\omega_k\Delta t} + e^{i\omega_k\Delta t})}{e^{\beta\hbar\omega_k}-1} e^{i[\nu\Delta z+q(n+b)\Delta\varphi]} J_{q|n+b|}(r\eta) J_{q|n+b|}(r'\eta). \tag{4.13}$$

Além disso, a Eq. (4.13) pode ser calculada usando a identidade

$$(e^y - 1)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-jy}. \tag{4.14}$$

Então, fazendo a rotação de Wick $i\Delta t = \Delta\tau$, tomando a seguinte identidade

$$\frac{e^{-\omega_k(\delta\Delta\tau+\beta\hbar j)}}{\omega_k} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} ds e^{-s^2\omega_k^2 - (\delta\Delta\tau+\hbar\beta j)^2/4s^2}, \tag{4.15}$$

[1]Note que para chegarmos ao resultado (4.11), foi considerado o caso minimamente acoplado para a Eq. (2.5). Se tivéssemos considerado a constante de acoplamento ξ, teríamos uma dependência explicita não só da temperatura T, mas também do parâmetro ξ. Nas refs. [110, 111] foi discutido uma relação que limita os valores de ξ usando o coeficiente de calor especifico c_v, bem como em [111] também define limites para esse mesmo parâmetro em relação ao parâmetro de desclinação q, mostrando em ambos os casos não podemos tomar qualquer valor arbitrário para ξ.

onde $\delta = \pm 1$ refere-se a frequências positivas e negativas, e considerando a Eq. (2.14), é possível colocar a função térmica de Hadamard (4.13) na forma

$$G_T^{(1)}(x,x') = \frac{qu^2\hbar}{4\pi^2\rho_0}\frac{e^{iqb\Delta\varphi}}{\sqrt{\pi}}\sum_{\delta=+,-}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inq\Delta\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{i\nu\Delta z}\int_0^{\infty}\frac{ds}{s^2}e^{-(su)^2\nu^2-\frac{\Delta\zeta^2}{4(su)^2}} I_{q|n+b|}(rr'/2(su)^2), \tag{4.16}$$

onde $\Delta\zeta^2 = (\delta\Delta\tau + \beta\hbar j)^2u^2 + r^2 + r'^2$. Finalmente, usando a fórmula de soma (2.18) (veja também (A.10) na Ref. [102]) a soma no índice n pode ser realizada e, consequentemente, a Eq. (4.16) torna-se

$$G_T^{(1)}(x,x') = \frac{u\hbar e^{iqb\Delta\varphi}}{4\pi^2\rho_0 rr'}\sum_{\delta=+,-}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\sum_n e^{ib(2\pi n - q\Delta\varphi)}\frac{1}{\sigma_n} - \frac{q}{2\pi i}\sum_{\ell=+,-}\ell e^{i\ell qb\pi}\int_0^{\infty}dy\frac{1}{\sigma_y}\frac{\cosh[qy(1-b)] - \cosh(qby)e^{-iq(\ell\pi+\Delta\varphi)}}{\cosh(qy) - \cos[q(\Delta\varphi+\ell\pi)]}\right\}, \tag{4.17}$$

com

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{\Delta\zeta^2}{rr'} + \frac{\Delta z^2}{2rr'} - \cos(2\pi n/q - \Delta\varphi),\\ \sigma_y &= \frac{\Delta\zeta^2}{rr'} + \frac{\Delta z^2}{2rr'} + \cosh y.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Observe que a soma em n está restrita ao intervalo definido em (2.19) [2, 102]. Portanto, o efeito da temperatura se encontra nas funções σ_n e σ_y através de $\Delta\zeta$ definidos abaixo da Eq. (4.16).

Por questão de complemento, podemos seguir um procedimento semelhante e encontrar a parte de temperatura zero de (4.12), que é obtida como

$$G_0^{(1)}(x,x') = \frac{qu\hbar e^{iqb\Delta\varphi}}{8\pi^2\rho_0 rr'}\sum_{\delta=+,-}\left\{\frac{1}{q}\sum_n e^{ib(2\pi n - q\Delta\varphi)}\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{\ell=+,-}\ell e^{i\ell qb\pi}\int_0^{\infty}dy\frac{1}{\sigma_y}\frac{\cosh[qy(1-b)] - \cosh(qby)e^{-iq(\ell\pi+\Delta\varphi)}}{\cosh(qy) - \cos[q(\Delta\varphi+\ell\pi)]}\right\}. \tag{4.19}$$

A função de dois pontos a temperatura zero, representada pela Eq. (4.19) está de acordo com o resultado encontrado no capítulo anterior e na Ref. [2], como esperado. Observe que, considerando $n = 0$ na Eq. (4.19), obtemos a contribuição de Minkowski, como

já feito anteriormente, e que deve ser subtraída no processo de renormalização por ser divergente. Vale ressaltar que o processo de renormalização é responsável por remover o termo divergente da expressão, que surge tomando o limite de coincidência $x' \to x$ (para o processo detalhado, veja [2]). No entanto, em contraste com a parte de temperatura zero, o termo $n = 0$ na Eq. (4.17) não é divergente e pode dar uma contribuição relevante para os observáveis físicos, como veremos na próxima seção.

Como encontramos a função térmica de Hadamard (4.17) em sua forma analítica, agora podemos calcular os observáveis físicos relevantes da teoria. Isso é feito a partir de agora.

4.1.1 Flutuação da densidade quadrática média

Tendo em mãos a função de Hadamard de dois pontos a temperatura finita, podemos calcular uma das quantidades físicas mais importantes no contexto das excitações quânticas de um fluido clássico, a flutuação da densidade quadrática média, no espaço-tempo cônico efetivo (4.1) impondo a condição quase periódica (4.3). É simples perceber que devido à natureza linear do operador de densidade $\hat{\rho}$ com os operadores de aniquilação $\hat{c}$ e criação $\hat{c}^\dagger$, o valor esperado de vácuo $\langle\hat{\rho}\rangle$ desaparece [2]. Consequentemente, a densidade quadrática média $\langle\hat{\rho}^2\rangle$ deve ser analisada, mas primeiro é conveniente reescrevê-la em termos da função térmica de Hadamard. Para calcular a flutuação da densidade quadrática média, começamos considerando o produto

$$\hat{\rho}(x)\hat{\rho}(x') \;=\; \frac{\rho_0^2}{u^4}\frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')]. \tag{4.20}$$

A média do conjunto de um operador arbitrário $\hat{A}$ submetido à temperatura $T = (k_B\beta)^{-1}$ é dada por [6]

$$\langle\hat{A}\rangle_\beta = \sum_i \varrho_i\langle\psi_i|\hat{A}|\psi_i\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}), \tag{4.21}$$

onde $\varrho_i = \langle\psi_i|\hat{\varrho}|\psi_i\rangle$, com $\hat{\varrho}$ sendo a matriz de densidade descrita pela Eq. (4.8).

Portanto, fazendo o mesmo procedimento para a Eq. (4.20), vamos obter a densidade

quadrática média à temperatura finita que pode ser escrita como segue

$$\begin{aligned}\langle\hat{\rho}(x)\hat{\rho}(x')\rangle &= \frac{\rho_0^2}{u^4}\frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}\frac{1}{2}G^{(1)}(x,x') \\ &= \frac{\rho_0^2}{u^4}\frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}\frac{1}{2}\left(G^{(1)}_{\rm T}(x,x')+G^{(1)}_{0}(x,x')\right) \\ &= \langle\hat{\rho}(x)\hat{\rho}(x')\rangle_{\rm T}+\langle\hat{\rho}(x)\hat{\rho}(x')\rangle_{0}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Como fizemos antes para a função de Hadamard de dois pontos, a densidade quadrática média pode ser dividida em duas partes, as contribuições de temperatura zero e diferente de zero. A parte de temperatura zero já foi calculada no capítulo anterior 3. Portanto, vamos continuar nos concentrando na contribuição com temperatura diferente de zero. Tomando o limite de coincidência $x' \to x$, podemos encontrar uma forma fechada para a parte térmica da densidade quadrática média, ou seja,

$$\begin{aligned}\langle\rho^2\rangle_{\rm T} &= \frac{\rho_0^2}{u^4}\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}\frac{1}{2}G^{(1)}_{\rm T}(x,x') \\ &= \frac{\hbar\rho_0}{\pi^2 u}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{(u\beta\hbar j)^4}+\sum_{n=1}^{[q/2]*}2\cos(2b\pi n)\;F_j(s_n)-\frac{q}{\pi}\int_0^\infty dy M(y,b,q)F_j(s_y)\right\},\end{aligned} \tag{4.23}$$

em que definimos $s_n=\sin(\pi n/q)$, $s_y=\cosh(y/2)$, $M(y,b,q)$ dado por (2.29) e

$$F_j(s)=\frac{3(u\beta\hbar j)^2-(2rs)^2}{[(u\beta\hbar j)^2+(2rs)^2]^3}. \tag{4.24}$$

O parâmetro s deve ser substituído por s_n para o segundo termo no lado direito de (4.23) e s_y para o terceiro termo. O primeiro termo do lado direito de (4.23) surge do somatório ao considerarmos $n=0$, que corresponde ao termo de radiação de corpo negro que surge da contribuição de Minkowski a temperatura finita, que como já mencionado, não diverge. Realizando a soma em j neste termo, ela pode ser expressa como

$$\langle\rho^2\rangle^{\rm rad}_{\rm T}=\frac{\pi^2\rho_0}{30\hbar^3\beta^4u^5}. \tag{4.25}$$

Podemos agora definir a contribuição térmica renormalizada para a flutuação da densidade quadrática média como

$$\langle\rho^2\rangle^{\rm ren}_{\rm T}=\langle\rho^2\rangle_{\rm T}-\langle\rho^2\rangle^{\rm rad}_{\rm T}, \tag{4.26}$$

onde a contribuição de Minkowski (4.25) é removida. Deste momento em diante, cada componente térmico dito renormalizado, significa que o termo de radiação correspondente

foi removido. Além de ser um procedimento geral remover a contribuição de Minkowski para obter grandezas renormalizadas, no caso de expressões térmicas, também é necessário fornecer o comportamento clássico correto em altas temperaturas para a densidade de energia livre e densidade de entropia.

Observe que, tomando o limite $\beta \to \infty$ (ou seja, $T \to 0$), a parte térmica de (4.26) se anula, o que significa que a flutuação da densidade quadrática média é reduzida à contribuição do vácuo a temperatura zero na Eq. (4.22), ou seja, $\langle\rho^2\rangle \to \langle\rho^2\rangle_0$ como esperado. A contribuição de temperatura zero é dada por

$$\begin{aligned}\langle\rho^2\rangle_0^{\rm ren} &= \frac{\rho_0^2}{u^4}\lim_{x'\to x}\frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}G^{(1)}_{\rm reg}(x,x') \\ &= -\frac{\hbar\rho_0}{32\pi^2 u r^4}\left\{2\sum_{n=1}^{[q/2]*}\frac{\cos(2b\pi n)}{\sin^4(\pi n/q)} - \frac{q}{\pi}\int_0^\infty dy\frac{M(y,b,q)}{\cosh^4(y/2)}\right\}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

onde $G^{(1)}_{\rm reg}$ significa $G^{(1)}_0$ sem a contribuição de Minkowski obtida por $n = 0$. Temos ainda que esse resultado é o mesmo obtido anteriormente em (3.35), mantendo assim a consistência da teoria com temperatura zero.

A soma em j presente na Eq. (4.23) pode ser realizado usando a fórmula de recorrência

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(3m^2-w^2)}{(m^2+w^2)^3} = \frac{\left[1-\pi^3 w^3\coth(\pi w)\mathrm{csch}^2(\pi w)\right]}{2w^4}. \tag{4.28}$$

Portanto, a Eq. (4.26) passa a ser escrita de tal forma que nos leva ao seguinte resultado

$$\langle\rho^2\rangle_{\rm T}^{\rm ren} = \frac{\hbar\rho_0}{32\pi^2 r^4 u}\left\{\sum_{n=1}^{[q/2]*}2\cos(2b\pi n)F(s_n) - \frac{q}{\pi}\int_0^\infty dy M(y,b,q)F(s_y)\right\}, \tag{4.29}$$

onde o parâmetro adimensional γ é definido como $\gamma = \frac{r}{\hbar u\beta}$ e

$$F(s) = \sum_{j=1}^{\infty}F_j(s) = \frac{1}{s^4}\left[1-(2\pi\gamma s)^3\coth(2\pi\gamma s)\,\mathrm{csch}^2(2\pi\gamma s)\right]. \tag{4.30}$$

Na Eq. (4.29), tanto a soma finita em n quanto a integral sobre y só podem ser calculadas adotando-se uma abordagem numérica. Observe que a flutuação da densidade quadrática média é proporcional a r^{-4}, o que significa que diverge na corda, $r \to 0$, e vai a zero longe dela, no limite $r \to \infty$. Para altas temperaturas, $\beta \ll 1$, a função $F(s)$ pode ser aproximada por

$$F(s) \approx \frac{1}{s^4}\left[1-\frac{4(2\pi\gamma s)^3}{e^{4\pi\gamma s}}\right]. \tag{4.31}$$

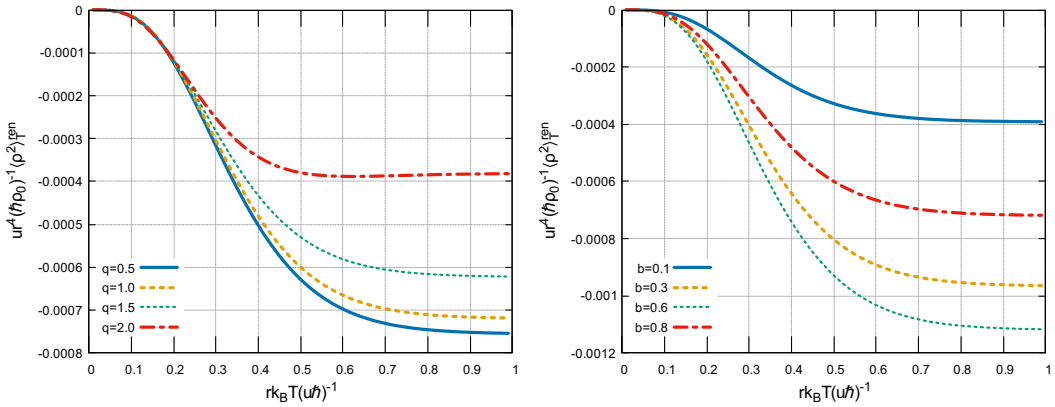

Figura 4.1: Flutuação da densidade quadrática média para $b = 0, 8$ (painel esquerdo) e $q = 1$ (painel direito) em função da temperatura.

Assim, a flutuação da densidade quadrática média vai para

$$\langle \rho^2 \rangle^{\rm ren}_{\rm T\to\infty} \approx \frac{\hbar\rho_0}{32\pi^2 r^4 u}\left\{ \sum_{n=1}^{[q/2]}{}^{*} \frac{2\cos(2b\pi n)}{s_n^4} - \frac{q}{\pi}\int_0^\infty dy \frac{M(y,b,q)}{s_y^4} \right\}. \tag{4.32}$$

Deve-se notar que a densidade quadrática média acima é independente da temperatura no limite de alta temperatura, $T \to \infty$. Isso pode ser claramente observado nos gráficos da Fig.4.1. Por outro lado, os gráficos também mostram que a Eq. (4.29) tende a zero quando $T \to 0$, como esperado.

Além disso, podemos considerar dois casos particulares importantes, a contribuição do espaço-tempo de Minkowski submetido a condição de quase-periodicidade ($q = 1$) e o caso de um espaço-tempo cônico apenas ($b = 0$). Para $b = 0$ a função $M(y, b, q)$ se torna

$$M(y, 0, q) = \frac{\sin(\pi q)}{\cosh(qy) - \cos(\pi q)}, \tag{4.33}$$

e a expressão em (4.29) fornece apenas a contribuição do espaço-tempo cônico. Portanto, neste caso, para $q \in \mathbb{Z}$, é fácil ver que a contribuição integral na Eq. (4.29) é nulo, e apenas o termo de soma permanece para $q \geq 2$. Para $q < 2$, por outro lado, não há contribuição de soma para a densidade quadrática média (4.29). Obviamente, no caso de $q = 1$ (sem estrutura cônica) e $b = 0$, a flutuação da densidade quadrática média é zero. Por outro lado, para $q = 1$, a única contribuição vem do espaço-tempo de Minkowski com a condição de quase-periodicidade. Neste caso, temos $M(y, b, 1)$, e a única parte não nula da Eq. (4.29) está na integral sobre y. Esta análise permanece a mesma para todos os outros observáveis obtidos abaixo.

4.2 Energia interna, energia livre e energia total do sistema

Outra grandeza física importante é a energia do sistema. Nesse sentido, a energia de um líquido pode ser tomada como o valor esperado do vácuo do operador hamiltoniano escrito em termos do operador de campo escalar sem massa $\hat{\phi}$ como [51]

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int d^3x \left[\frac{1}{2}\hat{v}\cdot\rho\hat{v} + \hat{\rho}\frac{u^2}{2\rho_0}\hat{\rho}\right] \\ &= \int d^3x \frac{1}{2}\rho_0 \left[\nabla\hat{\phi}\cdot\nabla\hat{\phi} + \frac{1}{u^2}\partial_t\hat{\phi}\partial_t\hat{\phi}\right].\end{aligned} \tag{4.34}$$

Como foi considerado um sistema composto por uma corda cósmica idealizada, teremos então uma energia infinita, como já dito no Cap. 2. No entanto, é possível definir o operador de densidade hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$ como sendo o integrando da Eq. (4.34), ou seja,

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\rho_0}{2}\left[\nabla\hat{\phi}\cdot\nabla\hat{\phi} + \frac{1}{u^2}\partial_t\hat{\phi}\partial_t\hat{\phi}\right], \tag{4.35}$$

onde o primeiro termo do lado direito está associado ao operador de densidade de energia cinética e o segundo termo ao operador de densidade de energia interna [51, 64, 65]. O valor médio do operador de densidade hamiltoniano pode ser então calculado, usando a função Hadamard (4.11), da seguinte forma

$$\langle\mathcal{H}\rangle = \lim_{x'\to x}\frac{\rho_0}{2}\left[\partial_i\partial_{i'}G^{(1)}(x,x') + \frac{1}{u^2}\partial_t\partial_{t'}G^{(1)}(x,x')\right], \tag{4.36}$$

onde é preciso tomar o limite de coincidência $x' \to x$, após subtrair as contribuições provenientes do espaço de Minkowski, e assim obtermos a densidade de energia total do sistema. De forma análoga ao que foi feito anteriormente, a Eq. (4.36) pode ser dividida em duas partes,

$$\langle\mathcal{H}\rangle = \langle\mathcal{H}\rangle_T + \langle\mathcal{H}\rangle_0, \tag{4.37}$$

representando a densidade de energia devido à presença de temperatura $\langle\mathcal{H}\rangle_T$, e a contribuição de temperatura zero $\langle\mathcal{H}\rangle_0$. A contribuição térmica $\langle\mathcal{H}\rangle_T$ pode ser escrita como

$$\langle\mathcal{H}\rangle_{\mathrm{T}} = \lim_{x'\to x}\frac{\rho_0}{2}\left[\frac{1}{u^2}\partial_t\partial_{t'} + \partial_r\partial_{r'} + \frac{1}{rr'}\partial_\varphi\partial_{\varphi'} + \partial_z\partial_{z'}\right]G_T^{(1)}(x,x'). \tag{4.38}$$

Antes de proceder ao cálculo da energia total do sistema, vale a pena explorar as quantidades físicas relevantes atribuídas à energia interna, ou seja, a densidade de energia livre do

fluido e a densidade de entropia do sistema a temperatura finita. Também exploraremos o impacto da condição de contorno e da topologia não trivial nas quantidades mencionadas acima.

4.2.1 Densidades de energia interna e livre

A densidade de energia interna é identificada como sendo o segundo termo do lado direito do operador hamiltoniano (3.44) [51, 64, 65], ou seja,

$$\mathcal{U} = \lim_{x' \to x} \frac{\rho_0}{u^2} \partial_t \partial_{t'} \frac{1}{2} G^{(1)}(x, x') = \frac{u^2}{\rho_0} \langle \rho^2 \rangle. \tag{4.39}$$

Observe que na expressão acima há contribuições devido à densidade quadrática média de temperatura zero (4.27) e sua correção térmica na Eq. (4.23). É fácil verificar que a contribuição da radiação do corpo negro em (4.23) para a energia interna acima concorda com a discutida em [51][2], como deveria ser.

Note ainda que, conforme a energia interna possui o mesmo comportamento que a densidade quadrática média, ela possui uma densidade de energia negativa. Isso pode ser atribuído ao um fenômeno chamado subvácuo, que pode implicar em alguns fenômenos exóticos que não serão explanados aqui, mas que podem ser encontrados em [112] e nas referências nele contidas.

Uma vez que existe uma forma analítica para a densidade de energia interna, é possível calcular a densidade de energia livre associada ao sistema considerando a definição termodinâmica

$$\mathcal{U} = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\mathcal{F}}{T} \right), \tag{4.40}$$

com $\mathcal{F}$ sendo a densidade de energia livre. Ao integrarmos a equação acima com relação a temperatura, o resultado obtido nos dará uma densidade de energia livre que inclui um termo independente da temperatura. Nesse sentido, escrevendo a expressão em termos da flutuação da densidade quadrática média, temos

$$\mathcal{F} = -T \frac{u^2}{\rho_0} \int dT \frac{1}{T^2} \langle \rho^2 \rangle = -T \frac{u^2}{\rho_0} \int dT \frac{1}{T^2} \langle \rho^2 \rangle_{\mathrm{T}} + \frac{u^2}{\rho_0} \langle \rho^2 \rangle_0 + C, \tag{4.41}$$

onde C é a constante de integração independente da temperatura. Mostraremos em breve que a constante deve ser zero. Como nosso interesse está nos efeitos da temperatura

[2] Capítulo 22

(primeiro termo no lado direito de (4.41)), a contribuição não térmica será descartada por momento. Portanto, a densidade de energia livre térmica é dada por

$$\mathcal{F}_{\rm T} = -\frac{\hbar u}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(u\hbar\beta j)^4} + \frac{\gamma^4}{r^4}\left[{\sum_{n=1}^{[q/2]}}^{*} 2\cos(2b\pi n)h_j(s_n) - \frac{q}{\pi}\int_0^{\infty} dy M(y,b,q)h_j(s_y)\right]\right\}, \tag{4.42}$$

com

$$h_j(s) = \frac{1}{(j^2+4\gamma^2 s^2)^2}\,. \tag{4.43}$$

Fazendo a soma em j, obtemos a seguinte forma para densidade de energia livre

$$\mathcal{F}_{\rm T} = \frac{\hbar u}{\pi^2}\left\{-\frac{\pi^4}{90(u\hbar\beta)^4} - \frac{\gamma^4}{r^4}\left[{\sum_{n=1}^{[q/2]}}^{*} 2\cos(2b\pi n)h(s_n) - \frac{q}{\pi}\int_0^{\infty} dy M(y,b,q)h(s_y)\right]\right\}, \tag{4.44}$$

onde

$$h(s) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j(s) = \frac{1}{32\gamma^4 s^4}\left[1 - \pi\gamma s\left(\coth(2\pi\gamma s) + 2\pi s\gamma \mathrm{csch}^2(2\pi\gamma s)\right)\right]. \tag{4.45}$$

No limite, $T \to 0$, a densidade de energia livre térmica vai para zero, como esperado. O primeiro termo do lado direito da Eq. (4.44) é o termo de radiação de corpo negro (contribuição térmica de Minkowski). Para a verificação de consistência, pode-se verificar que este termo coincide com o da Ref. [51] uma vez que é independente do limite e de condições impostas ao sistema. O segundo e o terceiro termos da Eq. (4.44) surge da condição de contorno quase periódica e espaço-tempo cônico. A densidade de energia livre térmica renormalizada em função da temperatura para vários valores do parâmetro de quase-periodicidade b e parâmetro de conicidade q é mostrada na Fig.4.2. Os gráficos também mostram que (4.44) vai para zero quando $T \to 0$.

Vale ressaltar que, ao contrário do regime de baixa temperatura, que possui o mesmo limite se comparado a densidade de energia interna, a densidade de energia livre apresenta um comportamento linear no limite de alta temperatura. Para ver isso melhor, pode-se tomar o limite assintótico das funções hiperbólicas na Eq. (4.44), que resulta em

$$\mathcal{F}_{\rm T}^{\rm ren} \approx \frac{\hbar u\gamma}{32\pi r^4}\left\{-{\sum_{n=1}^{[q/2]}}^{*} 2\frac{\cos(2b\pi n)}{s_n^3} + \frac{q}{\pi}\int_0^{\infty} dy \frac{M(y,b,q)}{s_y^3}\right\}, \tag{4.46}$$

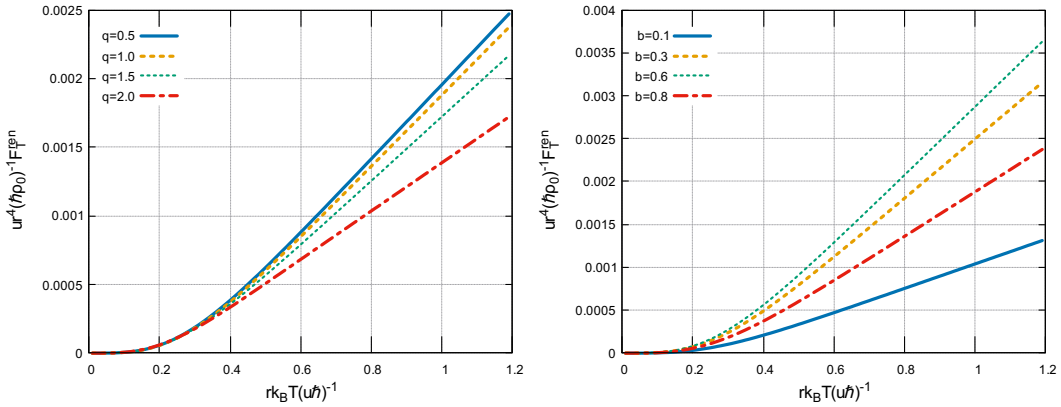

Figura 4.2: Densidade de energia livre para $b = 0,8$ (painel esquerdo) e $q = 1$ (painel direito) em função da temperatura.

onde $\gamma \propto k_B T$. O comportamento linear proporcional a $k_{\rm B}T$, para a temperatura T alta é previsto pela teoria clássica e só é recuperado se removermos a contribuição da radiação de corpo negro de (4.44), no primeiro termo no lado direito. Isso é claramente mostrado na Fig.4.2.

4.2.2 Densidade Total de Energia

Finalmente, vamos estudar a densidade de energia total de um líquido produzindo vibrações na forma de ondas sonoras quantizadas. Como já mencionado, a densidade de energia total é composta pela densidade de energia cinética e densidade de energia interna, esta última dada pela Eq. (4.39). Assim, para obter a densidade de energia total da Eq. (4.38), precisamos calcular a densidade de energia cinética dada pelos termos da derivada espacial. As componentes r e z são facilmente obtidas pelo mesmo processo da componente temporal. No entanto, para encontrar a componente φ, devemos seguir um outro caminho e usar a Eq. (4.16) e, consequentemente, tomar as derivadas. Isto nos leva em

$$\lim_{x'\to x} \partial_\varphi \partial_{\varphi'} G_T^{(1)}(x,x') = \lim_{\varphi'\to\varphi} \frac{qu\hbar}{2\pi^2\rho_0} \frac{e^{iqb\Delta\varphi}}{\sqrt{\pi}} \sum_{\delta=+,-} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{i\nu\Delta z} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-(su)^2\nu^2 - \frac{\Delta\varsigma^2}{4(su)^2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inq\Delta\varphi} q^2 (n+b)^2 I_{q|n+b|}(rr'/2(su)^2). \tag{4.47}$$

Para prosseguir, vamos usar, no resultado acima, a relação de recorrência [28]

$$q^2(n+b)^2 I_{q|n+b|}(w) = \left[w^2\frac{d^2}{dw^2} + w\frac{d}{dw} - w^2\right] I_{q|n+b|}(w). \tag{4.48}$$

Depois de empregar novamente a fórmula de soma (2.18) [2] para $\Delta\varphi = 0$, podemos simplificar a Eq. (4.47). Logo, ao somarmos o resultado das três componentes espaciais, descobrimos que a parte cinética assume a seguinte forma

$$\begin{aligned}\lim_{x'\to x}\frac{\rho_0}{2}\nabla\cdot\nabla' G^{(1)}(x,x') =& \frac{u\hbar}{\pi^2\rho_0}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{u\hbar\beta j}\right. \\ &+\frac{\gamma^4}{r^4}\left[\sum_{n=1}^{[q/2]*}2\cos(2\pi bn)\frac{[j^2(3-4s_n^2)-2\gamma^2(1-6s_n^2)+2\gamma^2\cos(\frac{4\pi n}{q})]}{(j^2+4\gamma^2 s_n^2)^3}\right. \\ &\left.\left.-\frac{q}{\pi}\int_0^{\infty}dyM(y,b,q)\ \frac{[j^2(3-4s_y^2)-2\gamma^2(1-6s_y^2)+2\gamma^2\cosh(2y)]}{(j^2+4\gamma^2 s_y^2)^3}\right]\right\}.\end{aligned} \tag{4.49}$$

Finalmente, somando a densidade de energia interna (4.39) com a densidade de energia cinética (4.49) a densidade de energia total é obtida como

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{H}\rangle_T =& \frac{2u\hbar}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{(u\hbar j\beta)^4}\right. \\ &\left.+\frac{\gamma^4}{r^4}\left[\sum_{n=1}^{[q/2]*}2\cos(2\pi bn)\chi_j(s_n) - \frac{q}{\pi}\int_0^{\infty}dyM(y,b,q)\chi_j(s_y)\right]\right\},\end{aligned} \tag{4.50}$$

com

$$\chi_j(s) = \frac{[j^2(3-2s^2)+8\gamma^2 s^4 - 4\gamma^2 s^2]}{[j^2+4\gamma^2 s^2]^3}. \tag{4.51}$$

Observe que negligenciamos a contribuição da temperatura zero na Eq. (4.50), uma vez que nosso objetivo é estudar a influência da temperatura no sistema. Na expressão acima, ao realizarmos a soma em j, somos levados ao seguinte resultado

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{H}\rangle_T &= \frac{\pi^2}{15(u\hbar)^3\beta^4} \\ &\quad+\frac{2\gamma^4 u\hbar}{\pi^2 r^4}\left\{\sum_{n=1}^{[q/2]*}2\cos(2\pi bn)\chi(s_n) - \frac{q}{\pi}\int_0^{\infty}dyM(y,b,q)\chi(s_y)\right\},\end{aligned} \tag{4.52}$$

onde

$$\begin{aligned}\chi(s) =& \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j(s) \\ =& \frac{1}{32\gamma^4}\left[\frac{(1-2s^2)}{s^4} + \frac{\pi\gamma}{s}\coth(2\pi\gamma s)\right. \\ & \left. +2\pi^2\gamma^2 \mathrm{csch}^2(2\pi\gamma s)\left(1 - \frac{4\pi\gamma(1-s^2)}{s}\coth(2\pi\gamma s)\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Por questão de complemento, também podemos exibir, seguindo os mesmos passos acima, a contribuição da temperatura zero para a densidade de energia. Nesse caso dado por

$$\langle \mathcal{H} \rangle_0 = -\frac{u\hbar}{16\pi^2 r^4}\left\{ \sum_{n}^{[q/2]*} 2\cos(2\pi bn)\frac{[1-2s_n^2]}{s_n^4} - \frac{q}{\pi}\int_0^{\infty} M(y,b,q)\frac{[1-2s_y^2]}{s_y^4}\right\}. \tag{4.54}$$

No contexto de líquidos, a densidade de energia total à temperatura zero submetido a condição de quase-periodicidade na presença do espaço-tempo cônico foi calculado primeiramente em [3]. Observe que a Eq. (4.54) é compatível com a densidade de energia de um campo escalar quântico sem massa estudado no 2 (Ver Eq. (2.51)).

Para encontrar uma forma renormalizada para a densidade de energia total na Eq. (4.52), devemos subtrair a contribuição da radiação do corpo negro no primeiro termo do lado direito. Seu comportamento é mostrado na Fig.4.3. Semelhante à densidade de energia livre, a densidade de energia total (4.52) torna-se linear em temperatura para T grande, satisfazendo a previsão clássica.

Devemos agora discutir algumas considerações gerais sobre as energias calculadas aqui. Todas elas são proporcionais a r^{-4} e consequentemente, próximos à origem, $r \to 0$, divergem. No entanto, para $r \to \infty$ eles convergem para zero. Note também que, se comparado com o efeito Casimir, o parâmetro b da condição de contorno quase-periódica pode controlar o tipo de interação, ou seja, pode ser repulsiva (energia positiva), atrativa (energia negativa), ou mesmo nula dependendo do valor do parâmetro q. Isso pode ser visto no painel direito da Fig.4.3. O mesmo argumento também é válido para o parâmetro cônico q, que fica evidente no painel esquerdo da figura.

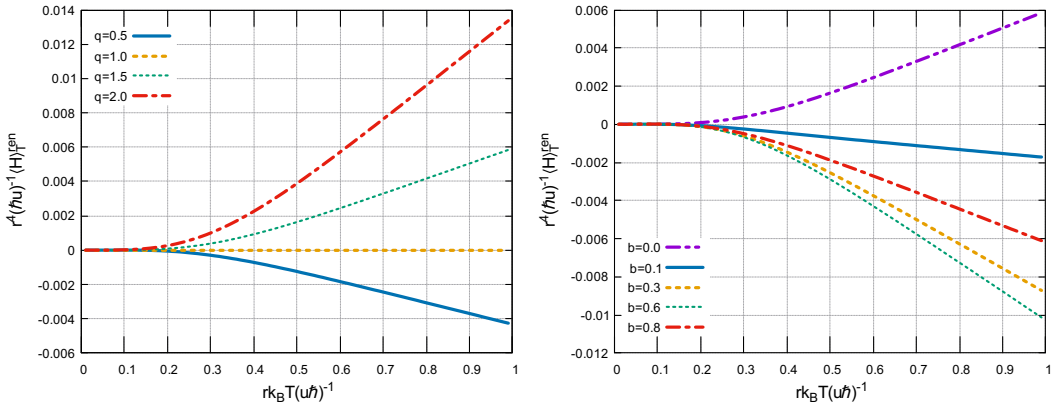

Figura 4.3: Densidade de energia total renormalizada para $b = 0$ (painel esquerdo) e $q = 1,5$ (painel direito) em função da temperatura.

4.3 Densidade de entropia

Outra importante grandeza termodinâmica a ser explorada é a entropia. Foi então calculada a densidade de entropia tomando a derivada da densidade de energia livre dada em (4.41), em relação à temperatura, na seguinte forma [113]

$$\begin{aligned}\mathcal{S} =& -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \\ =& \frac{\hbar u}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{4k_{\mathrm{B}}}{(u\hbar j)^4\beta^3}\right. \\ &\left. +\frac{4\gamma^3 k_{\mathrm{B}}}{u\hbar r^3}\left[\sum_{n=1}^{[q/2]*} 2\cos(2b\pi n)\eta_j(s_n) - \frac{q}{\pi}\int_0^{\infty} dy M(y,b,q)\eta_j(s_y)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{4.55}$$

onde

$$\eta_j(s) = \frac{j^2}{(j^2+4\gamma^2 s^2)^3}\,, \tag{4.56}$$

e consideramos a expressão (4.44) para a densidade de energia livre para obter a entropia. Observe que a contribuição da temperatura zero para a densidade de energia livre não contribui para a entropia. Além disso, para obter uma forma fechada para a densidade de entropia, podemos realizar a soma em j usando a seguinte fórmula de recorrência

$$\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j(s) = \frac{1}{128\gamma^3 s^3}\pi\left(\coth(2\pi\gamma s) + 2\pi\gamma s\left(1 - 4\pi\gamma s\coth(2\pi\gamma s)\right)\operatorname{csch}^2(2\pi\gamma s)\right). \tag{4.57}$$

Isto ns resulta em

$$\mathcal{S} = \frac{2k_B^4\pi^2T^3}{45u^3\hbar^3} + \frac{k_B}{\pi r^3}\left\{\sum_{n=1}^{[q/2]*}\frac{2\cos(2\pi bn)}{32s_n^3}\eta(s_n) - \frac{q}{\pi}\int_0^\infty dy\frac{M(y,b,q)}{32s_y^3}\eta(s_y)\right\}, \tag{4.58}$$

com

$$\eta(s) = \left(\coth(2\pi\gamma s) + 2\pi\gamma s\left(1 - 4\pi\gamma s\coth(2\pi\gamma s)\right)\operatorname{csch}^2(2\pi\gamma s)\right). \tag{4.59}$$

Observe que, substituindo a densidade de energia livre (4.41) e a densidade de entropia (4.55) na transformada de Legendre $F = U - TS$, concluímos que a constante C na densidade de energia livre total (4.41) deve ser nulo para obter a densidade de energia interna total (4.39). A densidade de entropia renormalizada em função da temperatura

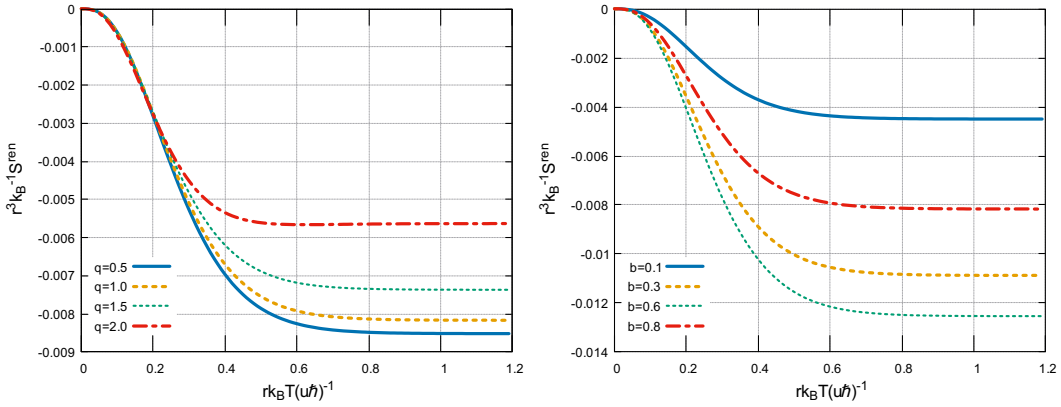

Figura 4.4: Densidade de entropia para $b = 0,8$ (painel esquerdo) e $q = 1$ (painel direito) em função da temperatura.

para vários parâmetros cônicos e quase-periodicidade b e q, respectivamente, são mostradas na Fig.4.4. Esse resultado se deve às flutuações da densidade de energia do campo, que caracterizam um efeito análogo ao efeito Casimir. Como pode ser visto nos gráficos presente na Fig.4.4, a densidade de entropia se anula quando $T \to 0$, independente dos valores dos parâmetros b e q. Este resultado é consistente com a terceira lei da termodinâmica (teorema do calor de Nernst) [113, 114]. Por outro lado, em altas temperaturas, a densidade de entropia (4.58) pode ser aproximada por

$$\mathcal{S}^{\text{ren}} \approx \frac{k_B}{32\pi r^3}\left\{\sum_{n=1}^{[q/2]*}\frac{2\cos(2\pi bn)}{s_n^3} - \frac{q}{\pi}\int_0^\infty dy\frac{M(y,b,q)}{s_y^3}\right\}, \tag{4.60}$$

que é independente da temperatura, e está de acordo com o limite clássico. Os comportamentos em baixas e altas temperaturas observadas aqui podem ser vistas nos gráficos da

Fig.4.4. Outro ponto a ser observado é que a densidade de entropia renormalizada, (4.58) sem o termo de radiação, é proporcional a r^{-3}. Portanto, converge para zero como $r \to \infty$ e diverge como $r \to 0$ para qualquer caso aqui apresentado. Embora o modelo de fônon analógico tenha sido estudado em [2, 64, 65] em vários casos, este capítulo foi baseado no artigo [3], o qual foi o primeiro a tratar o respectivo modelo em um espaço-tempo cônico com condição de quase-periodicidade a temperatura finita.

Por fim, a introdução da temperatura de fato foi bem sucedida, onde mostramos a influência da temperatura na flutuação da densidade quadrática média, bem como calculamos as densidades de energias e entropia em termos da temperatura. Uma vez que obtida as quantidades termodinâmicas, foi também mostrado através de gráficos e aproximações nas expressões o fato de concordarem com os limites clássicos para todas as quantidades aqui encontradas.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Em se tratando de energia de vácuo quântico, também conhecida como efeito Casimir, como foi apresentado ao decorrer da presente tese, se trata de uma energia relativamente sensível a modificações no sistema, podendo assim existir uma alteração nessa energia ou até mesmo surgimentos de observáveis físicos que antes seriam nulos, apenas pela inserção de uma condição de contorno ou na presença de um espaço-tempo não trivial.

Seguindo essa ideia, consideramos inicialmente uma condição de contorno quase-periódica, tendo como motivação a sua aplicação em nanotubos de carbono, sendo satisfeita por um campo escalar carregado massivo cujos modos se propagam em espaço-tempo cônico de (3+1) dimensões que pode ser tanto uma desclinação, onde o parâmetro cônico q pode assumir qualquer valor acima de zero, ou uma corda cósmica com $q \geq 1$. Sob essas condições, a equação de Klein-Gordon é resolvida para o campo escalar e a solução normalizada (2.10) é mostrada como dependente de, q, e, β, o parâmetro que caracteriza a condição quase-periódica (2.2). A solução normalizada é então usada para obter uma expressão exata e analítica para a função de Wightman, tanto nos casos de campo escalar carregado massivo quanto sem massa, ou seja, as Eqs. (2.20) e (2.26).

As expressões obtidas para a função de Wightman, nos forneceram os meios para obter como observáveis físicos, a média quadrática do campo, o tensor energia-momento e a densidade de corrente induzida, sendo calculados para valores diferentes de zero. Isso foi claramente mostrado nas expressões (2.28) e (2.31) para o VEV do campo ao quadrado, nas expressões (2.39) e (2.50) para o VEV do tensor energia-momento e nas expressões (2.59) e (2.61) para a densidade de corrente induzida. Todas essas expressões foram

obtidas nos casos de campo escalar massivo e sem massa e mostraram depender tanto dos parâmetros cônicos quanto do quase-periodicidade q e β, respectivamente. As expressões para a densidade de energia, ou seja, a componente 00 do tensor energia-momento e para a densidade de corrente induzida também foram plotadas, em termos de mr e β, nas Figs.2.2-2.5.

A modificação nas flutuações do vácuo quântico do campo escalar carregado, causadas pela condição quase-periódica e pelo parâmetro cônico certamente faz a média dos observáveis físicos analisados possuírem valores diferentes de zero. Verificamos que no caso de não haver condição quase-periódica, ou seja, $\beta = 0$, nossos resultados correspondem com resultados anteriores encontrados na literatura. Notamos, no entanto, que neste caso a densidade de corrente induzida é igual a zero, o que nos diz que o defeito cônico por si só não induz corrente. Além disso, não há densidade de corrente induzida por um campo escalar torcido, como observado nas Eqs. (2.59) e (2.58), e que podem ser verificadas facilmente pelos gráficos em termos de β 2.4 para o caso do campo massivo e 2.5 para o campo não massivo. Com relação aos VEV do campo ao quadrado e tensor energia-momento, no caso do campo escalar torcido, os resultados aqui mostrados são consistentes com os anteriores encontrados, por exemplo, nas Refs. [31, 105].

Portanto, considerando um cenário em que os modos de um campo escalar carregado se propagam em um espaço-tempo cônico e são submetidos a uma condição não periódica, os resultados relatados nas Refs. [31, 105] onde foram analisados o campo escalar torcido e sem massa, foram aqui generalizados. Nossos resultados para os VEV's do campo ao quadrado e tensor energia-momento, por outro lado, são obtidos no caso massivo de um campo escalar carregado e dependem da fase β, que inclui todos os valores possíveis (não apenas o caso do campo torcido). Além disso, também foi obtido uma densidade de corrente induzida que no contexto do cenário proposto é nova. A densidade de corrente induzida se dá como consequência da simetria obedecida pela ação (2.3) sob a condição (2.2), de acordo com o teorema de Noether, mostrado aqui na Sec. 1.3. Além disso, deve-se ressaltar novamente que a física associada à condição quase-periódica, utilizada no cenário aqui proposta, tem ligação com a física dos nanotubos. Ou seja, a forma como uma folha de carbono é cortada pode ser associada aos diferentes valores do ângulo de fase no intervalo $0 \leq \beta \leq 1$, e consequentemente a diferentes propriedades que possam

surgir.

Posteriormente, iniciamos o estudo para um modelo análogo de fônons, o qual foi investigado os efeitos em um líquido clássico devido à presença de condições de contorno diversas e pela topologia não trivial de uma corda cósmica ideal na flutuação da densidade quadrática média. Considerando o regime em que os comprimentos de onda são muito maiores que a separação interatômica, assumimos que a relação de dispersão linear de fônons é válida. Com isso, transformando as grandezas hidrodinâmicas clássicas em operadores quantizados, esses escritos em termos da segunda quantização, bem como relacionando a segunda quantização das flutuações de densidade ao potencial de velocidade escalar, o problema se transforma na conhecida equação de Klein-Gordon para um campo escalar sem massa com a velocidade da luz substituída pela velocidade do som. Neste cenário, os fônons representam excitações quânticas de um campo escalar real sem massa associado ao potencial de velocidade do líquido clássico.

Além disso, estudamos o campo de fônons quantizado na presença da topologia não trivial de uma corda cósmica, bem como na presença de condições de contorno de Dirichlet, Neumann e condições de contorno mistas no espaço-tempo Minkowski. No espaço-tempo ideal de cordas cósmicas em (3+1) dimensões, com parâmetro cônico $q > 0$, também consideramos os modos do fônon obedecendo a uma condição quase-periódica, caracterizada pelo parâmetro β. O caso $q = 1$ nos leva aos resultados da ausência da estrutura cônica. Sob as condições mencionadas acima, a equação de Klein-Gordon foi resolvida, e a solução normalizada é mostrada em (3.23). A solução então foi usada para obter uma expressão exata e analítica para a função de dois pontos, ou seja, a Eq. (3.30) corresponde ao resultado do Cap.2.

As expressões fechadas para a função de dois pontos nos possibilitaram obter a flutuação da densidade quadrática média renormalizada do líquido dada em (3.35). Verificamos que no caso de $\beta = 0$, nossos resultados concordam com resultados anteriores encontrados na literatura [64, 65]. Além disso, também mostramos que a flutuação da densidade média quadrática renormalizada difere de zero, mesmo na ausência do defeito cônico devido à condição de quase-periodicidade. No entanto, quando $q = 1$ e $\beta = 0$, ele desaparece, como esperado. Como é usual no espaço-tempo das cordas cósmicas, por ser ideal, a flutuação da densidade quadrática média renormalizada diverge no defeito. Um gráfico

adimensional da flutuação da densidade quadrática média renormalizada em termos do parâmetro quase-periódico β é mostrado na Fig.3.1.

Adicionalmente, investigamos os modos de fônons obedecendo à condição de contorno mista, e revisamos as condições de contorno de Dirichlet e Neumann, impostas a um e dois planos paralelos no espaço-tempo de Minkowski referentes aos trabalhos [64, 65]. Encontramos, então, uma forma analítica para as funções de dois pontos em cada caso, ou seja, as Eqs. (3.56) e (3.58), bem como a flutuação da densidade quadrática média renormalizada nas Eqs. (3.63) e (3.64). Mostramos que as condições de contorno modificam essa quantidade física, como esperado, uma vez que as excitações quânticas de fônons em um líquido são análogas às da teoria quântica de campos na presença de placas paralelas com as mesmas condições de contorno. Obteve-se que a flutuação da densidade quadrática média renormalizada é sempre positiva para os planos com condição de contorno de Dirichlet e negativa com condição de contorno de Neumann, independentemente dos parâmetros do sistema. Porém, no caso de contorno misto, pode ser negativo ou positivo dependendo da distância dos planos, caracterizado pelo parâmetro a. Isso é consistente porque a flutuação da densidade quadrática média renormalizada é positiva quando se considera apenas um plano com Dirichlet e negativa quando se considera apenas Neumann. Em todos esses casos, a flutuação da densidade média quadrática renormalizada diverge nos planos. Isso é mostrado nos gráficos das Figs. 3.2 e 3.3.

Também investigamos a influência da temperatura em um dos casos anteriores. Nesse ponto, foi escolhido o caso com a topologia não-trivial de (3+1) dimensões no espaço-tempo cônico, com parâmetro de conicidade $q > 0$ em conjunto com a condição quase-periódica, caracterizados pelo parâmetro b (nesse momento, b é o parâmetro que controla a condição de quase-periodicidade) em um líquido clássico descrito por ondas sonoras quantizadas. A influência da temperatura também foi investigada em grandezas físicas relevantes, como a densidade quadrática média do líquido e as grandezas termodinâmicas, densidade de energia livre, de energia interna e de entropia. Com a solução da equação de Klein-Gordon dada em (4.4), a temperatura foi introduzida através função térmica de Hadamard, Eq. (4.7), considerando as soluções de frequência positiva e negativa. Nas condições mencionadas acima, as soluções foram empregadas para obter uma expressão analítica para a função térmica de Hadamard (4.17), caracterizando a dependência ex-

plícita da temperatura juntamente com uma contribuição independente da temperatura. Além disso, mostramos que esta solução térmica desaparece no limite $T \to 0$ como deveria acontecer, levando aos resultados na ausência da temperatura apresentado no Cap. 3 [2]. Devido à forma analítica da função térmica de Hadamard, a flutuação da densidade média quadrática foi obtida para o caso térmico (4.23). O comportamento da flutuação da densidade quadrática média renormalizada foi mostrado na Fig.4.1 onde ela tende a uma constante para $T \to \infty$, conforme descrito pela Eq. (4.32).

Além disso, a relação direta entre a flutuação da densidade quadrática média e a densidade de energia interna $\mathcal{U}$ foi apresentada na Eq. (4.39), mostrando que ambos são iguais, exceto por uma constante multiplicativa, mostrando também que a densidade de energia inerna pode se apresentar como subvácuo no sistema estudado. Tomando a Eq. (4.41), uma expressão analítica para a densidade de energia livre foi encontrada. A análise da parte renormalizada mostra que em altas temperaturas, ela é linear com relação à temperatura, correspondendo ao resultado da Fig.4.2. Isto é precisamente o que está previsto no limite clássico. Vale ressaltar ainda que o termo de radiação de ambas as grandezas, representando a contribuição de Minkowski, concorda com o resultado em [51]. Os resultados obtidos também são consistentes com os de [74], onde os resultados são casos particulares das expressões aqui apresentadas. Finalmente, a densidade de energia total foi obtida pela soma da densidade de energia interna (4.39), encontrada anteriormente, com a densidade de energia cinética dada em (4.49) fornecendo a Eq. (4.52). O comportamento da parte renormalizada em função da temperatura pode ser visto na Fig 4.3. Assim, concluímos que a densidade de energia total tem um comportamento semelhante se comparada com a densidade de energia livre renormalizada, porém, com sinal contrário.

Por último, encontramos uma expressão fechada para a densidade de entropia, Eq. (4.58), sendo uma das grandezas mais importantes da termodinâmica. Exploramos seu limite assintótico $T \to 0$, que vai a zero seguindo a terceira lei da termodinâmica. Em altas temperaturas, a densidade de entropia (4.58) converge para uma constante, consistente com o limite clássico. O comportamento da densidade de entropia com a temperatura pode ser visto na Fig.4.4. Verificamos também que quando $T \to 0$, a parte térmica de todos os observáveis físicos obtidos aqui se anula, restando apenas a contribuição não térmica apresentada no Cap. 3 ([2]).

Com relação às perspectivas futuras, o estudo de modelos com grafeno possui uma gama de aplicações, em se tratando de modelos análogos de nanotubos Cap. 2. Podemos trabalhar a questão da supercondutividade e transição de fase nesse modelo, além de suas propriedades termodinâmicas, uma vez que se terá um sistema com temperatura finita.

Para o efeito análogo ao Casimir em um sistema de fônons trabalhado no Cap. 3, correções de temperatura para placas planas podem ser calculados em conjunto com seus observáveis físicos de uma forma semelhante ao que foi feito no Cap. 4. Além disso, também há a possibilidade de estudar propriedades de fluidos como viscosidade, condutividade térmica caracterizado pelo transporte de calor e difusividade do sistema.

Referências Bibliográficas

[1] K. E. L. de Farias and H. F. Santana Mota, "Quantum vacuum fluctuation effects in a quasi-periodically identified conical spacetime," *Phys. Lett. B*, vol. 807, p. 135612, 2020.

[2] K. E. L. de Farias, A. Mohammadi, and H. F. Santana Mota, "Boundary effects on classical liquid density fluctuations," *Phys. Rev. D*, vol. 104, no. 4, p. 045015, 2021.

[3] K. E. L. de Farias, A. Mohammadi, and H. F. Mota Santana, "Thermal Casimir effect in a classical liquid in a quasiperiodically identified conical spacetime," *Phys. Rev. D*, vol. 105, no. 8, p. 085024, 2022.

[4] N. Saifuddin, A. Raziah, and A. Junizah, "Carbon nanotubes: a review on structure and their interaction with proteins," *Journal of Chemistry*, vol. 2013, 2013.

[5] P. W. Milonni, *The Quantum vacuum: An Introduction to quantum electrodynamics*. Boston, USA: Academic (1994) 522 p, 1994.

[6] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space*. Cambridge university press, 1984.

[7] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir effect*, vol. 145. OUP Oxford, 2009.

[8] K. A. Milton, "The Casimir effect: Physical manifestations of zero-point energy," *River Edge, USA: World Scientific (2001) 301 p*, 2001.

[9] H. F. Mota, E. R. Bezerra de Mello, and K. Bakke, "Scalar Casimir effect in a high-dimensional cosmic dispiration spacetime," *Int. J. Mod. Phys.*, vol. D27, no. 12, p. 1850107, 2018.

[10] A. Saharian, "Topological casimir effect in nanotubes and nanoloops," in *Quantum Field Theory Under The Influence Of External Conditions (Qfext09) Devoted to the Centenary of HBG Casimir*, pp. 470–474, World Scientific, 2010.

[11] L. H. Ford, "Gravitons and light cone fluctuations," *Phys. Rev.*, vol. D51, pp. 1692–1700, 1995.

[12] H. F. Mota, E. R. Bezerra de Mello, C. H. G. Bessa, and V. B. Bezerra, "Light-Cone Fluctuations in the Cosmic String Spacetime," *Phys. Rev.*, vol. D94, p. 024039, 2016.

[13] L. H. Ford, "Stochastic spacetime and Brownian motion of test particles," *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 44, pp. 1753–1768, 2005.

[14] C. H. G. Bessa, V. B. Bezerra, and L. H. Ford, "Brownian Motion in Robertson-Walker Space-Times from electromagnetic Vacuum Fluctuations," *J. Math. Phys.*, vol. 50, p. 062501, 2009.

[15] G. Gour and L. Sriramkumar, "Will small particles exhibit Brownian motion in the quantum vacuum?," *Found. Phys.*, vol. 29, pp. 1917–1949, 1999.

[16] E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra, A. A. Saharian, and H. H. Harutyunyan, "Vacuum currents induced by a magnetic flux around a cosmic string with finite core," *Phys. Rev.*, vol. D91, no. 6, p. 064034, 2015.

[17] E. A. F. Bragança, H. F. Santana Mota, and E. R. Bezerra de Mello, "Induced vacuum bosonic current by magnetic flux in a higher dimensional compactified cosmic string spacetime," *Int. J. Mod. Phys.*, vol. D24, no. 07, p. 1550055, 2015.

[18] W. Oliveira dos Santos, H. F. Mota, and E. R. Bezerra de Mello, "Induced current in high-dimensional AdS spacetime in the presence of a cosmic string and a compactified extra dimension," *Phys. Rev.*, vol. D99, no. 4, p. 045005, 2019.

[19] V. M. Mostepanenko and N. N. Trunov, "The Casimir effect and its applications," *Oxford, UK: Clarendon (1997) 199 p*, 1997.

[20] M. J. Sparnaay, "Measurements of attractive forces between flat plates," *Physica*, vol. 24, pp. 751–764, 1958.

[21] S. K. Lamoreaux, "Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6 micrometers range," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, pp. 5–8, 1997. [Erratum: Phys. Rev. Lett.81,5475(1998)].

[22] S. K. Lamoreaux, "Erratum: Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μm range [phys. rev. lett. 78, 5 (1997)]," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, pp. 5475–5476, Dec 1998.

[23] U. Mohideen and A. Roy, "Precision measurement of the casimir force from 0.1 to 0.9 μ m," *Physical Review Letters*, vol. 81, no. 21, pp. 4549–4552, 1998.

[24] G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio, and G. Ruoso, "Measurement of the Casimir force between parallel metallic surfaces," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 041804, 2002.

[25] V. M. Mostepanenko, "New experimental results on the Casimir effect," *Brazilian Journal of Physics*, vol. 30, pp. 309 – 315, 06 2000.

[26] H. B. G. Casimir, "On the Attraction Between Two Perfectly Conducting Plates," *Indag. Math.*, vol. 10, pp. 261–263, 1948. [Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc.100N3-4,61(1997)].

[27] E. R. Bezerra de Mello and A. A. Saharian, "Topological Casimir effect in compactified cosmic string spacetime," *Class. Quant. Grav.*, vol. 29, p. 035006, 2012.

[28] E. R. Bezerra de Mello and A. A. Saharian, "Vacuum polarization by a flat boundary in cosmic string spacetime," *Class. Quant. Grav.*, vol. 28, p. 145008, 2011.

[29] S. M. Christensen, "Vacuum Expectation Value of the Stress Tensor in an Arbitrary Curved Background: The Covariant Point Separation Method," *Phys. Rev.*, vol. D14, pp. 2490–2501, 1976.

[30] R. M. Wald, "Trace Anomaly of a Conformally Invariant Quantum Field in Curved Space-Time," *Phys. Rev.*, vol. D17, pp. 1477–1484, 1978.

[31] A. G. Smith, "On the evolution of cosmic strings," in *The formation and evolution of cosmic strings : proceedings of a workshop supported by the SERC and held in*

Cambridge, 3-7 July, 1989 (G. W. Gibbons, S. W. Hawking, and T. Vachaspati, eds.), (Cambridge), pp. 263–292, Cambridge University Press, 1990.

[32] E. A. F. Bragança, H. F. Santana Mota, and E. R. Bezerra de Mello, "Vacuum expectation value of the energy-momentum tensor in a higher dimensional compactified cosmic string spacetime," *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 134, no. 8, p. 400, 2019.

[33] W. Oliveira dos Santos, E. R. Bezerra de Mello, and H. F. Mota, "Vacuum polarization in high-dimensional AdS spacetime in the presence of a cosmic string and compactified extra dimension," 2019.

[34] L. Sriramkumar, "Fluctuations in the current and energy densities around a magnetic flux carrying cosmic string," *Class. Quant. Grav.*, vol. 18, pp. 1015–1025, 2001.

[35] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge monographs on mathematical physics, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.

[36] M. Hindmarsh and T. Kibble, "Cosmic strings," *Rept.Prog.Phys.*, vol. 58, pp. 477–562, 1995.

[37] B. Allen and E. P. S. Shellard, "On the evolution of cosmic strings," in *The formation and evolution of cosmic strings : proceedings of a workshop supported by the SERC and held in Cambridge, 3-7 July, 1989* (G. W. Gibbons, S. W. Hawking, and T. Vachaspati, eds.), (Cambridge), pp. 421–448, Cambridge University Press, 1990.

[38] T. W. B. Kibble, "Topology of Cosmic Domains and Strings," *J. Phys. A*, vol. 9, pp. 1387–1398, 1976.

[39] E. J. Copeland, L. Pogosian, and T. Vachaspati, "Seeking String Theory in the Cosmos," *Class.Quant.Grav.*, vol. 28, p. 204009, 2011.

[40] M. Hindmarsh, "Signals of Inflationary Models with Cosmic Strings," *Prog.Theor.Phys.Suppl.*, vol. 190, pp. 197–228, 2011.

[41] H. F. Santana Mota and M. Hindmarsh, "Big-Bang Nucleosynthesis and Gamma-Ray Constraints on Cosmic Strings with a large Higgs condensate," *Phys. Rev.*, vol. D91, no. 4, p. 043001, 2015.

[42] W. Buchmuller, V. Domcke, and K. Schmitz, "From NANOGrav to LIGO with metastable cosmic strings," *Phys. Lett. B*, vol. 811, p. 135914, 2020.

[43] C.-F. Chang and Y. Cui, "Gravitational waves from global cosmic strings and cosmic archaeology," *JHEP*, vol. 03, p. 114, 2022.

[44] W. Buchmuller, V. Domcke, and K. Schmitz, "Stochastic gravitational-wave background from metastable cosmic strings," *JCAP*, vol. 12, no. 12, p. 006, 2021.

[45] W. T. Emond, S. Ramazanov, and R. Samanta, "Gravitational waves from melting cosmic strings," *JCAP*, vol. 01, no. 01, p. 057, 2022.

[46] M. O. Katanaev and I. V. Volovich, "Theory of defects in solids and three-dimensional gravity," *Annals of Phys.*, vol. 216, pp. 1–28, 1992.

[47] M. J. O,connell, *Carbon nanotubes: properties and applications*. CRC press, 2006.

[48] E. Malic and A. Knorr, *Graphene and Carbon Nanotubes: Ultrafast Optics and Relaxation Dynamics*. John Wiley & Sons, 2013.

[49] N. D. D. Phan *et al.*, "Functional integral method in quantum field theory of plasmons in graphene," *Advances in Natural Sciences: Nanoscience and Nanotechnology*, vol. 8, no. 4, p. 045017, 2017.

[50] I. Romanovsky, C. Yannouleas, and U. Landman, "Topological effects and particle-physics analogies beyond the massless Dirac-Weyl fermion in graphene nanorings," *Phys. Rev. B*, vol. 87, no. 16, p. 165431, 2013.

[51] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Statistical physics: theory of the condensed state*, vol. 9. Elsevier, 2013.

[52] A. Einstein, "Die plancksche theorie der strahlung und die theorie der spezifischen wärme," *Annalen der Physik*, vol. 327, no. 1, pp. 180–190, 1907.

[53] P. Debye, "Zur theorie der spezifischen wärmen," *Annalen der Physik*, vol. 344, no. 14, pp. 789–839, 1912.

[54] L. Landau, "Two-fluid model of liquid helium ii," *J. Phys. Ussr*, vol. 5, no. 1, pp. 71–90, 1941.

[55] J. K. Percus and G. J. Yevick, "Analysis of Classical Statistical Mechanics by Means of Collective Coordinates," *Phys. Rev.*, vol. 110, pp. 1–13, 1958.

[56] J. Axe and G. Shirane, "Influence of the superconducting energy gap on phonon linewidths in nb 3 sn," *Physical Review Letters*, vol. 30, no. 6, p. 214, 1973.

[57] H. J. Maris, "Phonon-phonon interactions in liquid helium," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 49, pp. 341–359, 1977.

[58] D. Bolmatov, V. Brazhkin, and K. Trachenko, "The phonon theory of liquid thermodynamics," *Scientific reports*, vol. 2, no. 1, pp. 1–6, 2012.

[59] W. G. Unruh, "Experimental black hole evaporation," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 46, pp. 1351–1353, 1981.

[60] A. Nicolis, "Low-energy effective field theory for finite-temperature relativistic superfluids," 8 2011.

[61] A. Nicolis and R. Penco, "Mutual Interactions of Phonons, Rotons, and Gravity," *Phys. Rev. B*, vol. 97, no. 13, p. 134516, 2018.

[62] L. Berezhiani, "On effective theory of superfluid phonons," *Phys. Lett. B*, vol. 805, p. 135451, 2020.

[63] I. E. Dzyaloshinskii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, "The general theory of van der waals forces," *Advances in Physics*, vol. 10, no. 38, pp. 165–209, 1961.

[64] L. H. Ford and N. F. Svaiter, "A Fluid Analog Model for Boundary Effects in Field Theory," *Phys. Rev. D*, vol. 80, p. 065034, 2009.

[65] L. H. Ford and N. F. Svaiter, "The Phononic Casimir Effect: An Analog Model," vol. 161, p. 012034, 2009.

[66] T. H. Boyer, "Van der waals forces and zero-point energy for dielectric and permeable materials," *Physical Review A*, vol. 9, no. 5, p. 2078, 1974.

[67] H. Kamerlingh Onnes, "The resistance of pure mercury at helium temperatures," *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden, b*, vol. 120, 1911.

[68] K. Y. Fong, H.-K. Li, R. Zhao, S. Yang, Y. Wang, and X. Zhang, "Phonon heat transfer across a vacuum through quantum fluctuations," *Nature*, vol. 576, no. 7786, pp. 243–247, 2019.

[69] A. Edery, "Casimir forces in Bose-Einstein condensates: Finite size effects in three-dimensional rectangular cavities," *J. Stat. Mech.*, vol. 0606, p. P06007, 2006.

[70] A. Edery, "Multidimensional cut-off technique, odd-dimensional Epstein zeta functions and Casimir energy of massless scalar fields," *J. Phys. A*, vol. 39, pp. 685–712, 2006.

[71] A. Edery, "Casimir piston for massless scalar fields in three dimensions," *Phys. Rev. D*, vol. 75, p. 105012, 2007.

[72] A. Edery and I. MacDonald, "Cancellation of nonrenormalizable hypersurface divergences and the d-dimensional Casimir piston," *JHEP*, vol. 09, p. 005, 2007.

[73] A. Edery and V. Marachevsky, "Compact dimensions and the Casimir Effect: The Proca Connection," *JHEP*, vol. 12, p. 035, 2008.

[74] P. C. W. Davies and V. Sahni, "Quantum gravitational effects near cosmic strings," *Class. Quant. Grav.*, vol. 5, p. 1, 1988.

[75] E. A. Martinez and J. W. York, Jr., "Thermodynamics of black holes and cosmic strings," *Phys. Rev. D*, vol. 42, pp. 3580–3583, 1990.

[76] B. Linet, "The Euclidean thermal Green function in the space-time of a cosmic string," *Class. Quant. Grav.*, vol. 9, pp. 2429–2436, 1992.

[77] B. Linet, "Euclidean thermal spinor Green's function in the space-time of a straight cosmic string," *Class. Quant. Grav.*, vol. 13, pp. 97–104, 1996.

[78] D. V. Fursaev, "The Heat kernel expansion on a cone and quantum fields near cosmic strings," *Class. Quant. Grav.*, vol. 11, pp. 1431–1444, 1994.

[79] V. P. Frolov, A. Pinzul, and A. I. Zelnikov, "Vacuum polarization at finite temperature on a cone," *Phys. Rev. D*, vol. 51, pp. 2770–2774, 1995.

[80] A. Mohammadi, E. R. Bezerra de Mello, and A. A. Saharian, "Finite temperature fermionic charge and current densities induced by a cosmic string with magnetic flux," *J. Phys. A*, vol. 48, no. 18, p. 185401, 2015.

[81] A. Mohammadi and E. R. Bezerra de Mello, "Finite temperature bosonic charge and current densities in compactified cosmic string spacetime," *Phys. Rev. D*, vol. 93, no. 12, p. 123521, 2016.

[82] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*. International Series In Pure and Applied Physics, New York: McGraw-Hill, 1965.

[83] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998.

[84] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995.

[85] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum field theory*. John Wiley & Sons, 2010.

[86] J. J. Sakurai and E. D. Commins, "Modern quantum mechanics, revised edition," 1995.

[87] M. O. C. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos Vol. 39*. Edusp, 2002.

[88] A. Das, *Lectures on quantum field theory*. World Scientific, 2020.

[89] A. Abrikosov, *Methods of quantum field theory in statistical physics*.

[90] L. Kadanoff and G. Baym, "Quantum statistical," *Mechanics*, 1962.

[91] R. D. Mattuck, *A guide to Feynman diagrams in the many-body problem*. Courier Corporation, 1992.

[92] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum theory of many-particle systems*. Courier Corporation, 2012.

[93] S. R. Salinas, *Introdução a física estatística vol. 09*. Edusp, 1997.

[94] K. Huang, *Statistical Mechanics*. Wiley, 1987.

[95] P. Hays, "Vacuum fluctuations of a confined massive field in two dimensions," *Annals Phys.*, vol. 121, pp. 32–46, 1979.

[96] J. Ambjorn and S. Wolfram, "Properties of the Vacuum. 1. Mechanical and Thermodynamic," *Annals Phys.*, vol. 147, p. 1, 1983.

[97] A. A. Saharian, "The Generalized Abel-Plana formula with applications to Bessel functions and Casimir effect," 8 2007.

[98] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytsenko, and S. Zerbini, *Zeta regularization techniques with applications*. Singapore: World Scientific Publishing, 1994.

[99] E. Elizalde, "Analysis of an inhomogeneous generalized Epstein-Hurwitz zeta function with physical applications," *J. Math. Phys.*, vol. 35, pp. 6100–6122, 1994.

[100] J. Spinally, E. R. Bezerra de Mello, and V. B. Bezerra, "Relativistic quantum scattering on a cone," *Class. Quant. Grav.*, vol. 18, pp. 1555–1566, 2001.

[101] E. A. F. Bragança, H. F. Santana Mota, and E. R. Bezerra de Mello, "Vacuum expectation value of the energy-momentum tensor in a higher dimensional compactified cosmic string spacetime," *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 134, no. 8, p. 400, 2019.

[102] E. R. Bezerra de Mello, V. B. Bezerra, A. A. Saharian, and H. H. Harutyunyan, "Vacuum currents induced by a magnetic flux around a cosmic string with finite core," *Phys. Rev. D*, vol. 91, no. 6, p. 064034, 2015.

[103] N. R. Khusnutdinov, "Charged particle in the space-time of a supermassive cosmic string," *Theor. Math. Phys.*, vol. 103, pp. 603–611, 1995.

[104] N. Khusnutdinov, "Self-action in gravity," *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 136, no. 6, p. 669, 2021.

[105] L. H. Ford, "Twisted scalar and spinor strings in minkowski spacetime," *Phys. Rev. D*, vol. 21, pp. 949–957, Feb 1980.

[106] N. R. Khusnutdinov and M. Bordag, "Ground state energy of massive scalar field in the background of finite thickness cosmic string," *Phys. Rev. D*, vol. 59, p. 064017, 1999.

[107] R. d'Inverno, *Introducing Einstein's relativity*. New York: Oxford University Press.

[108] I. M. Khalatnikov, *An introduction to the theory of superfluidity*. CRC Press, 2018.

[109] A. Prudnikov, *Integrals and series: special functions*.

[110] V. A. De Lorenci, L. G. Gomes, and E. S. Moreira, "Hot scalar radiation setting bounds on the curvature coupling parameter," *Class. Quant. Grav.*, vol. 32, no. 8, p. 085002, 2015.

[111] E. S. Moreira, "Hot scalar radiation around a cosmic string setting bounds on the coupling parameter ξ," *JHEP*, vol. 03, p. 105, 2017.

[112] T.-H. Wu, J.-T. Hsiang, and D.-S. Lee, "Subvacuum effects of the quantum field on the dynamics of a test particle," *Annals Phys.*, vol. 327, pp. 522–541, 2012.

[113] L. Landau and E. Lifshitz, "Statistical physics, part 1. 3rd edit," 1980.

[114] R. C. Tolman, *Relativity, thermodynamics, and cosmology*. Courier Corporation, 1987.