

Samuel Lucas da Rocha Vieira

**Análogo do efeito Aharonov-Bohm a partir da
interação do momento de quadrupolo magnético
de uma partícula neutra com campos externos**

João Pessoa - PB

2023

Samuel Lucas da Rocha Vieira

**Análogo do efeito Aharonov-Bohm a partir da interação
do momento de quadrupolo magnético de uma partícula
neutra com campos externos**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Física.

UFPB – Universidade Federal da Paraíba

CCEN – Centro de Ciências Exatas e da Natureza

DF – Departamento de Física

PRPG – Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Dr. Knut Bakke Filho

João Pessoa - PB

2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

V658a Vieira, Samuel Lucas da Rocha.

Análogo do efeito Aharonov-Bohm a partir da interação do momento de quadrupolo magnético de uma partícula neutra com campos externos / Samuel Lucas da Rocha Vieira. - João Pessoa, 2023.

93 f. : il.

Orientação: Knut Bakke Filho.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física - Partícula neutra. 2. Simetria cilíndrica. 3. Potencial tipo Coulomb. 4. Efeito Aharonov-Bohm. 5. Correntes persistentes. I. Bakke Filho, Knut. II. Título.

UFPB/BC

CDU 53(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de tese de Doutorado do aluno Samuel Lucas da Rocha Vieira, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física de Partículas Elementares e Campos.

Aos vinte e um dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e três, às 09:00, nas dependências do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a tese de Doutorado, na área de Física de Partículas Elementares e Campos, de **Samuel Lucas da Rocha Vieira**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Knut Bakke Filho (PPGF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Herondy Francisco Santana Mota (PPGF/UFPB), Paulo José Ferreira Porfírio da Silva (PPGF/UFPB), Humberto Belich Jr. (UFES) e Célio R. Muniz (UECE). Dando início aos trabalhos, o Prof. Knut Bakke Filho comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de tese intitulada “*Análogo do efeito Aharonov-Bohm a partir da interação do momento de quadrupolo magnético de uma partícula neutra com campos externos*”. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **21 de julho de 2023**.

Prof. Dr. Knut Bakke Filho
Orientador



Documento assinado digitalmente
PAULO JOSE FERREIRA PORFIRIO DA SILVA
Data: 21/07/2023 16:44:27-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Paulo José Ferreira Porfírio da Silva
PPGF/UFPB

Prof. Dr. Célio R. Muniz
UECE

Prof. Dr. Humberto Belich Jr.
UFES

Agradecimentos

Os agradecimentos principais são direcionados ao professor Knut Bakke Filho pela orientação no decorrer do meu doutorado e durante o desenvolvimento deste trabalho.

Quero agradecer também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro.

Agradeço também ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba (DF/UFPB) pela oportunidade de fazer o doutorado e de realizar este trabalho.

*“It’s the questions we can’t answer that teach us the most.
They teach us how to think.
If you give a man an answer, all he gains is a little fact.
But give him a question and he’ll look for his own answers.”
(Patrick Rothfuss)*

Resumo

Analisamos a interação da partícula neutra, sem spin e que possui momento de quadrupolo magnético, com campos elétricos e magnéticos externos. Vimos que estas interações resultam em potenciais análogos ao potencial de Coulomb e inverso do quadrado da distância radial. Também investigamos os efeitos de cavidades cilíndricas ou fios cilíndricos nesses sistemas. Em seguida, investigamos os efeitos de fases geométricas sobre os sistemas onde ocorrem essas interações. Por fim, obtemos correntes persistentes associadas com os sistemas onde essas fases geométricas aparecem. Todos esses estudos foram feitos a partir de análises dos níveis de energia dos sistemas, verificando as alterações que eles sofrem ao considerar cada efeito mencionado acima.

Palavras-chave: Momento de quadrupolo magnético, partícula neutra, simetria cilíndrica, potencial tipo Coulomb, potencial inverso do quadrado, efeito Aharonov-Bohm, correntes persistentes.

Abstract

We analyse the interaction of a neutral and spinless particle, which possesses a magnetic quadrupole moment, with external electromagnetic fields. We show that these interactions result in effective potentials, which are analogues to the Coulomb potential and the inverse square potential. We also investigate the effects of cylindrical cavities or cylindrical wires on these systems. Then, we investigate the effects of Aharonov-Bohm type geometric quantum phases on these systems. Finally, we also obtain the persistent currents that are associated with these geometric quantum phases. These studies were made through the analysis of the energy levels of the systems, by verifying how they are influenced by the effects mentioned above.

Keywords: Magnetic quadrupole moment, neutral particles, cylindrical symmetry, Coulomb type potential, inverse square potential, Aharonov-Bohm effect, persistent currents.

Lista de publicações

Segue a lista de publicações realizadas durante o meu período de Doutorado. Os resultados apresentados nesta tese são referentes aos cinco itens abaixo.

1. VIEIRA, S.; BAKKE, K. Aharonov-bohm effect for bound states from the interaction of the magnetic quadrupole moment of a neutral particle with axial fields. *Physical Review A, APS*, v. 101, n. 3, p. 032102, 2020.
2. VIEIRA, S.; BAKKE, K. Inverse-square-type potential from the interaction of the magnetic quadrupole moment of a neutral particle with a magnetic field. *The European Physical Journal D, Springer*, v. 75, p. 1–6, 2021.
3. VIEIRA, S.; BAKKE, K. On the coulomb-type potentials in the magnetic quadrupole moment system under the influence of a cut-off point. *The European Physical Journal D, Springer*, v. 75, p. 1–6, 2021.
4. VIEIRA, S.; BAKKE, K. Effects of rotation on a magnetic quadrupole moment system around a cylindrical cavity. *Physical Review A, APS*, v. 106, n. 2, p. 022211, 2022.
5. VIEIRA, S.; BAKKE, K. Persistent currents, revival time and effects of rotation on an attractive inverse-square-type potential in a magnetic quadrupole moment system. *Proceedings of the Royal Society A, The Royal Society*, v. 479, n. 2273, p. 20220848, 2023.

O artigo abaixo, embora não seja apresentado nesta tese, também foi publicado durante o meu período de Doutorado.

1. VIEIRA, S.; BAKKE, K. Semiclassical analysis of the interaction of the magnetic quadrupole moment of a neutral particle with axial electric fields in a uniformly rotating frame. *Foundations of Physics, Springer*, v. 50, p. 735–748, 2020.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquema elaborado para ilustrar a importância física do potencial escalar eletromagnético. Os feixes representados por ψ_1^0 e ψ_2^0 passam pelos tubos T_1 e T_2 , onde entram em contato com um potencial escalar. Após saírem dos tubos, eles se encontram e formam um padrão de interferência na região I.	18
Figura 2 – Esquema elaborado para ilustrar a importância física do potencial vetor eletromagnético. Os feixes representados por ψ_1^0 e ψ_2^0 passam por ambos os lados de um solenoide e depois se encontram e formam um padrão de interferência na região I. Como existe uma corrente passando pelo solenoide longo, os feixes estão em contato com um potencial vetor durante o trajeto.	21
Figura 3 – O esquema mostra o caso mais simples em que o efeito Aharonov-Bohm pode ser observado. Consiste de um elétron orbitando um solenoide longo, por onde passa uma corrente elétrica constante.	26

Lista de símbolos

μ_0	Permeabilidade magnética no vácuo
ϵ_0	Permissividade elétrica no vácuo
c	Velocidade da Luz
\hbar	Constante de Planck dividida por 2π
M_{ij}	Tensor de momento de quadrupolo magnético
Q_{ij}	Tensor de momento de quadrupolo elétrico
Φ	Fluxo magnético
ϕ	Fase geométrica quântica do quadrupolo magnético

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	O EFEITO AHARONOV-BOHM	15
2.1	O sistema da Carga Pontual interagindo com campos externos	16
2.2	Efeito Aharonov-Bohm	17
2.3	Efeito Aharonov-Bohm para estados ligados	25
2.4	Outros tipos de fases geometricas	28
2.5	Correntes persistentes	33
3	O SISTEMA DA PARTÍCULA NEUTRA COM MOMENTO DE QUADRUPOLO MAGNÉTICO	36
3.1	Fase geométrica para o momento de quadrupolo magnético	39
4	INTERAÇÃO DO MOMENTO DE QUADRUPOLO MAGNÉTICO COM CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS EXTERNOS	41
4.1	Análise do potencial tipo-Coulomb	42
4.2	Análise do potencial efetivo tipo-Coulomb na presença de um fio cilíndrico	46
4.2.1	Potencial escalar efetivo devido a um campo magnético	46
4.2.2	Potencial vetor efetivo devido a um campo elétrico	49
4.3	Análise do potencial inverso do quadrado atrativo	53
4.4	Análise do potencial inverso do quadrado repulsivo	58
5	ANÁLOGO DO EFEITO AHARONOV-BOHM PARA ESTADOS LIGADOS	62
5.1	Efeito Aharonov-Bohm na análise do potencial tipo-Coulomb	63
5.2	Efeito Aharonov-Bohm na análise do potencial tipo-Coulomb com um oscilador harmônico	66
5.3	Efeito Aharonov-Bohm na análise do potencial inverso do quadrado atrativo	70
5.4	Efeitos de rotação	74
5.4.1	Efeito Aharonov-Bohm na análise do potencial tipo-Coulomb na presença de um fio cilíndrico	75
5.4.2	Efeito Aharonov-Bohm na análise do potencial inverso do quadrado atrativo	79
6	CONCLUSÃO	84

REFERÊNCIAS 87

1 Introdução

Sistemas que envolvem uma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético são motivo de interesse em diversos contextos. O estudo do momento de quadrupolo magnético em moléculas (SAFRONOVA et al., 2001; SUSHKOV; FLAMBAUM; KHRIPOVICH, 1984) ou em átomos (TAKACS et al., 1996; MAJUMDER; DAS, 2000) é o objetivo mais comum em trabalhos que envolvem esse tipo de partícula. Esse sistema também é objeto de estudo em trabalhos cujo objetivo é explorar conceitos como violação da simetria **CP** (MAISON et al., 2020; DENIS et al., 2020), violação da simetria **PT** (TALUKDAR et al., 2019), anomalia quiral (KHARZEEV; YEE; ZAHED, 2011) e violação da simetria de reversão temporal em moléculas (FLAMBAUM; DEMILLE; KOZLOV, 2014). No contexto da mecânica quântica, o momento de quadrupolo magnético foi estudado em sistemas onde foram investigados efeitos quânticos associados à rotação (HASSANABADI; MONTIGNY; HOSSEINPOUR, 2020; LÜTFÜOĞLU et al., 2020) e o aparecimento de fases geométricas quânticas (CHEN, 1995; FONSECA; BAKKE, 2015a).

O estudo de fases geométricas quânticas também é uma área de interesse, não só para sistemas de partículas neutras que possuem momento de quadrupolo magnético, como também para sistemas envolvendo outros tipos de distribuição de cargas (outros multipolos). Fases geométricas são diferenças de fase que podem aparecer em sistemas que passam por algum processo cíclico, ao final de uma revolução. Para elétrons se movendo em um anel mesoscópico, por exemplo, a dependência do espectro de energias na fase geométrica proposta por Berry (BERRY, 1984) e na fase geométrica proposta por Aharonov-Anandan (AHARONOV; ANANDAN, 1987) foi obtida (LOSS; GOLDBART; BALATSKY, 1990; GAO; QIAN, 1993; QIAN; SU, 1994). Para partículas neutras com dipolo magnético, foi obtido que o efeito Aharonov-Casher (AHARONOV; CASHER, 1984) pode aparecer em sistemas de anéis quânticos (OH; RYU, 1995; BALATSKY; ALTSHULER, 1993; MATHUR; STONE, 1991; MATHUR; STONE, 1992; BAKKE; FURTADO, 2012). O efeito He-McKellar-Wilkens (HE; MCKELLAR, 1993; WILKENS, 1994) descreve um tipo de fase geométrica que surge da interação de um momento de dipolo elétrico com um campo magnético não uniforme. Da interação de um momento de quadrupolo elétrico com um campo magnético axial não uniforme, Chen (CHEN, 1995) conseguiu obter um tipo de fase geométrica semelhante para partículas neutras com momento de quadrupolo elétrico. H. Nizamidin e seus colaboradores também conseguiram obter uma fase geométrica quântica para uma partícula neutra com momento de quadrupolo elétrico interagindo com um campo magnético externo, mas no contexto da mecânica quântica não comutativa (NIZAMIDIN et al., 2014). Nesta tese, estamos particularmente interessados em efeitos análogos ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados, que é um tipo de fase geométrica

que será abordada mais adiante, para sistemas que envolvem uma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético. Para elétrons, o efeito Aharonov-Bohm para estados ligados foi obtido em anéis quânticos bidimensionais (NETTO; CHESMAN; FURTADO, 2008; DANTAS; FURTADO; NETTO, 2015), entre superfícies cilíndricas (FURTADO; BEZERRA; MORAES, 2001; FURTADO; RIBEIRO; AZEVEDO, 2002; BEZERRA; SANTOS, 1992), para o grafeno (NETO; BUENO; FURTADO, 2016; NETO et al., 2018; BUENO et al., 2014) e em uma nanoesfera (NETTO; CHESMAN; FURTADO, 2008). Esse efeito também foi estudado em um sistema de um átomo com momento de quadrupolo magnético, confinado em um anel quântico e sob o efeito de rotação (FONSECA; BAKKE, 2016). Em trabalhos que lidam com esse tipo de fase geométrica, também é comum haver interesse em correntes persistentes (DANTAS; FURTADO; NETTO, 2015; GAO; QIAN, 1993; BALATSKY; ALTSHULER, 1993; LOSS; GOLDBART; BALATSKY, 1990). Isso porque, como foi evidenciado por (BYERS; YANG, 1961), o fluxo magnético, que está relacionado com fases geométricas, também está relacionado com essas correntes. Essa relação será melhor explicada no capítulo 2.

Além disso, o estudo de sistemas quânticos que envolvem partículas interagindo com campos elétricos e magnéticos não uniformes, são alvo de interesse em diversos trabalhos. Por exemplo, as fases geométricas para partículas neutras citadas acima (O efeito Aharonov-Casher, o efeito He-McKellar-Wilkins e as fases geométricas obtidas por Chen) são todas consequências das interações de partículas neutras com campos elétricos ou magnéticos externos. Outros exemplos são os análogos dos níveis de Landau que podem ser obtidos da interação de um momento de dipolo elétrico com um campo magnético radial que é proporcional a distância radial (RIBEIRO; FURTADO; NASCIMENTO, 2006; RIBEIRO et al., 2008; BAKKE, 2010). Em outra perspectiva, também existem trabalhos que voltam sua atenção para o comportamento de partículas quando se encontram na presença de potenciais específicos. Nesse caso, cito como exemplo o interesse no potencial proporcional ao inverso do quadrado da distância radial atrativo. Esse potencial foi estudado em sistemas de átomos que interagem com o campo magnético de um fio ferromagnético (TKACHUK, 1999), com o campo elétrico de um fio longo carregado (BAWIN; COON, 2001; DENSCHLAG; UMSHAUS; SCHMIEDMAYER, 1998; AUDRETSCH; SKARZHINSKY; VORONOV, 2001), também em sistemas que lidam com o efeito Aharonov-Bohm (OLIVEIRA; ROMANO, 2020), em trabalhos que lidam com a interface entre a mecânica quântica e a relatividade geral (CLAUS et al., 1998). O potencial tipo-Coulomb também é alvo de interesse, tendo sido estudado num contexto envolvendo cordas cósmicas (MEDEIROS; MELLO, 2012), o espaço tempo com deslocação tipo-hélice (VITÓRIA, 2019), e também em sistemas que envolvem o momento de quadrupolo magnético (FONSECA; BAKKE, 2015c; FONSECA; BAKKE, 2015b).

Nesta tese tenho como objetivo apresentar os estudos que fizemos durante meu doutorado, cujo foco era analisar a interação da partícula neutra com momento de

quadrupolo magnético com campos elétricos e magnéticos. Iremos investigar como a partícula neutra com momento de quadrupolo magnético é influenciada, sob o ponto de vista de seus níveis de energia, por um potencial vetor efetivo ou por um potencial escalar efetivo, que surgem da interação de campos elétricos e magnéticos com o próprio momento de quadrupolo magnético. Nos sistemas investigados nestes trabalhos, também estudamos a dependência dos níveis de energia numa fase geométrica análoga àquela do efeito Aharonov-Bohm para estados ligados. Também estendemos nossos estudos para a obtenção de correntes persistentes nos sistemas em que a fase geométrica é obtida. Também serão abordados efeitos de rotação e a interação com uma cavidade cilíndrica de raio r_0 , em alguns dos sistemas.

Esta tese foi dividida da seguinte maneira: Nos capítulos 2 e 3, irei fazer uma revisão dos conteúdos necessários para desenvolver os trabalhos que serão apresentados mais adiante. Os objetivos principais no capítulo 2 serão introduzir a fase geométrica proposta por Aharonov e Bohm, mostrar que partículas neutras também podem sofrer efeitos análogos ao efeito Aharonov-Bohm, e apresentar correntes persistentes. Como o efeito Aharonov-Bohm ocorre quando um elétron se move por regiões onde não existem campos, mas existem potenciais eletromagnéticos, irei iniciar o capítulo apresentando a equação de Schrödinger que descreve a interação do elétron com campos externos. Depois entrarei no assunto do efeito Aharonov-Bohm, apresentando o trabalho que eles realizaram (AHARONOV; BOHM, 1959), onde propuseram que tanto o potencial escalar V quanto o potencial vetor \vec{A} podem alterar fisicamente um sistema envolvendo feixes de elétrons. Em seguida, irei apresentar o exemplo mais simples em que esse efeito pode ser obtido, conhecido como "efeito Aharonov-Bohm para estados ligados". Como os resultados apresentados nesta tese envolvem uma partícula neutra e não o elétron, na terceira seção do capítulo 2 apresentarei, brevemente, alguns tipos de fase geométrica semelhantes a fase geométrica do efeito Aharonov-Bohm, mas que ocorrem para partículas neutras. Além disso, também irei apresentar, brevemente, a fase geométrica de Berry e a fase geométrica Aharonov-Anandan, que também têm relação com o efeito Aharonov-Bohm. Na última seção do capítulo 2, irei apresentar um tema conhecido como correntes persistentes, que também tem relação com a fase geométrica que aparece devido ao efeito Aharonov-Bohm.

No capítulo 3, o objetivo será apresentar o sistema com o qual trabalhamos para obter os resultados apresentados neste trabalho. Este é o sistema da partícula neutra, sem spin e com momento de quadrupolo magnético, interagindo com campos elétricos ou magnéticos externos. Portanto, começarei o capítulo apresentando a equação de Schrödinger que descreve este sistema. Depois mostrarei como uma fase geométrica análoga ao efeito Aharonov-Bohm pode surgir neste sistema, discutindo também a fase geométrica proposta por Chen (CHEN, 1995) para este tipo de sistema, que é especificamente a fase geométrica que usamos nos nossos trabalhos.

Nos capítulos 4 e 5, serão apresentados os resultados obtidos nos nossos trabalhos. Em todos os trabalhos apresentados nestes capítulos, serão consideradas unidades naturais ($\hbar = c = 1$). No capítulo 4 iremos propor e investigar sistemas onde a partícula neutra com momento de quadrupolo magnético interage com campos elétricos ou magnéticos externos. Essas interações irão gerar potenciais efetivos na equação de Schrödinger dos sistemas. O objetivo neste capítulo será obter e analisar o espectro de energias destes sistemas. Iremos analisar a interação da partícula abordada no capítulo 3 com os potenciais efetivos tipo-Coulomb e inverso do quadrado da distância radial, que surgem da interação do momento de quadrupolo magnético da partícula com os campos. Em alguns desses sistemas, também veremos qual a influência de uma cavidade cilíndrica impenetrável sob os níveis de energia do sistema.

No capítulo 5 iremos estudar os efeitos de uma fase geométrica quântica em alguns dos sistemas analisados no capítulo 4, e também em outros sistemas semelhantes a eles. Em alguns dos sistemas, veremos que para obter uma fase geométrica quântica será necessário considerar uma rotação sob o sistema. Além disso, também mostramos que correntes persistentes podem estar associadas aos sistemas estudados neste capítulo, já que todos eles possuem fases geométricas do tipo Aharonov-Bohm associadas a eles. No capítulo 6 apresentarei as conclusões deste trabalho.

2 O efeito Aharonov-Bohm

Neste capítulo, tenho como objetivo apresentar o efeito Aharonov-Bohm, que é um efeito quântico que aparece em certos sistemas, quando um elétron se move na presença de potenciais eletromagnéticos. Portanto, primeiramente será mostrado como obter o hamiltoniano que descreve uma carga pontual, que se move na presença de campos elétricos e magnéticos. Em seguida, veremos que o efeito Aharonov-Bohm corresponde ao surgimento de uma fase geométrica que pode modificar o comportamento físico de um elétron, quando ele se move na presença de um potencial eletromagnético, mesmo que ele não se encontre na presença de campos externos. Depois, na seção seguinte, será apresentado um exemplo conhecido como efeito Aharonov-Bohm para estados ligados, que é o caso mais simples onde o efeito Aharonov-Bohm pode ser obtido. Depois, serão discutidos efeitos análogos ao efeito Aharonov-Bohm, mas que podem ocorrer para partículas neutras com outros tipos de distribuições de cargas, e também outros tipos de processos onde podem ser observadas as fases geométricas quânticas. Apesar de não ser interessante abordar esses efeitos análogos com profundidade neste trabalho, eles serão apresentados brevemente com o objetivo de dar uma visão mais geral sobre esse assunto (fases geométricas para partículas neutras) e motivar o estudo de uma fase geométrica tipo Aharonov-Bohm para uma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético, que é parte importante deste trabalho.

Na última seção desse capítulo, será apresentado um tema conhecido como "corrente persistente", que está associado com a presença de um fluxo magnético em um sistema. Veremos que, por estarem relacionadas ao fluxo magnético que passa por um sistema, as correntes persistentes também estão relacionadas com o efeito Aharonov-Bohm. Portanto, assim como os efeitos análogos ao efeito Aharonov-Bohm, esse efeito também será abordado brevemente, para que o leitor entenda como conseguimos associar essas correntes aos sistemas quânticos estudados.

2.1 O sistema da Carga Pontual interagindo com campos externos

Quanticamente, uma carga pontual, sem spin e que interage com campos eletromagnéticos externos pode ser estudada a partir da equação de Schrödinger. Como essa equação é obtida a partir do formalismo canônico da mecânica clássica, precisamos obter o hamiltoniano que descreve a partícula em questão. Portanto, considerando uma partícula que tem uma carga q e que move-se com velocidade \vec{v} na presença de um campo eletromagnético, a lagrangiana que descreve este sistema será (COHEN-TANNOUJJI; DIU; LALOE, 1986)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - qV + \frac{q}{c}\vec{v} \cdot \vec{A}, \quad (2.1)$$

onde m é a massa da partícula, V é o potencial escalar eletromagnético e \vec{A} é o potencial vetor eletromagnético. Assim, o termo $\frac{1}{2}m\vec{v}^2$ representa a energia cinética da partícula e o termo $(qV - \frac{q}{c}\vec{v} \cdot \vec{A})$ representa a energia potencial da partícula devido ao campo eletromagnético. Dessa forma, usando a densidade lagrangiana (2.1), podemos obter o hamiltoniano do sistema:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{q}{c}\vec{A} \right)^2 + qV. \quad (2.2)$$

Mais adiante, iremos comparar a forma deste hamiltoniano com a forma do hamiltoniano da partícula neutra com momento de quadrupolo magnético, a fim de fazer analogias entre os potenciais V e \vec{A} com termos que aparecem na equação de Schrödinger da partícula neutra com momento de quadrupolo magnético. Com o hamiltoniano acima, podemos obter que a equação de Schrödinger independente do tempo que descreve uma carga pontual em movimento interagindo com campos externos é dada por:

$$\varepsilon\psi = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{q}{c}\vec{A} \right)^2 \psi + qV\psi. \quad (2.3)$$

Veja que, como essa equação foi obtida usando o formalismo canônico, nenhum campo elétrico ou magnético foi necessário para o desenvolvimento mostrado acima, apenas os potenciais V e \vec{A} . Devido a essa característica, os físicos Y. Aharonov e D. Bohm propuseram situações nas quais é possível averiguar os efeitos que esses potenciais eletromagnéticos podem causar em um feixe de elétrons. Nos sistemas que eles propuseram, dois feixes de elétrons passam por regiões onde não existem campos externos, mas existem os potenciais escalar V e vetor \vec{A} . Quando isso ocorre, é possível obter que os dois feixes adquirem uma diferença de fases entre si, que chamamos de fase geométrica, e que leva a uma mudança física no sistema. Essa fase geométrica, provocada pelos potenciais, é chamada de efeito Aharonov-Bohm em homenagem aos dois físicos e será explicada em detalhes na próxima seção.

2.2 Efeito Aharonov-Bohm

Na eletrodinâmica clássica, o potencial escalar V e o potencial vetor \vec{A} não possuem um significado físico, sendo considerados apenas ferramentas matemáticas que ajudam na descrição de sistemas envolvendo campos eletromagnéticos. É possível, inclusive, alterar os potenciais eletromagnéticos sem que haja qualquer alteração nos campos, mantendo o sistema físico inalterado. Os potenciais V e \vec{A} estão relacionados aos campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} por:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}; \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \end{cases} \quad (2.4)$$

As transformações dos potenciais que mantêm os campos inalterados são chamadas de transformações de calibre, e são dadas pelas duas equações a seguir:

$$\begin{cases} V \rightarrow V' = V - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}; \\ \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda. \end{cases} \quad (2.5)$$

Aqui, $\Lambda = \Lambda(r, t)$ é uma função qualquer da posição e do tempo.

Como dito acima, na mecânica clássica os potenciais V e \vec{A} são considerados ferramentas matemáticas, sem significado físico, usadas para estudar os campos eletromagnéticos. Mesmo quando usamos o formalismo canônico na mecânica clássica, o mesmo utilizado aqui para obter a equação de Schrödinger, não aparecem observáveis ligados a esses potenciais. Na mecânica quântica, no entanto, esses potenciais podem ter consequências físicas sobre alguns sistemas. Um dos primeiros trabalhos que tiveram como objetivo verificar a significância física dos potenciais eletromagnéticos foi proposto em 1959 por Y. Aharonov e D. Bohm ([AHARONOV; BOHM, 1959](#)), em um artigo em que estudavam a separação e recombinação de feixes de elétrons na presença dos potenciais eletromagnéticos. Em seu trabalho eles mostraram que, nos exemplos apresentados a seguir, esses potenciais geram uma fase geométrica que altera o padrão de interferência entre os dois feixes de elétrons, ou seja, altera o comportamento físico do sistema. Além disso, eles também propuseram um experimento para checar a influência do potencial vetor eletromagnético \vec{A} em um determinado sistema quântico. O artigo consiste em propor e explorar algumas situações diferentes, para explicitar como os feixes de elétrons podem ser influenciados pelos potenciais eletromagnéticos e em qual circunstância essa influência resulta em uma alteração física do sistema. Nesta seção, será mostrado como obter as fases geométricas geradas pelos potenciais eletromagnéticos V e \vec{A} , seguindo o trabalho de Aharonov e Bohm.

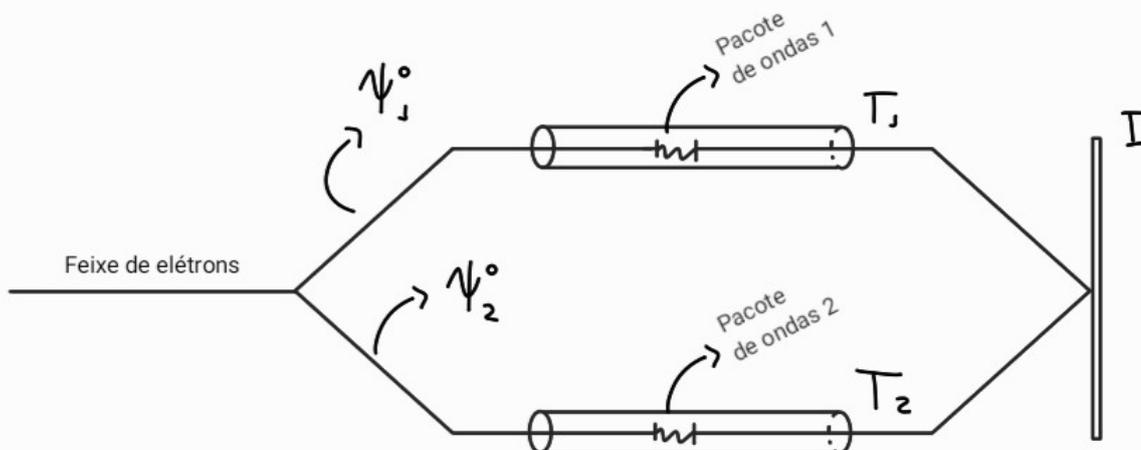


Figura 1 – Esquema elaborado para ilustrar a importância física do potencial escalar eletromagnético. Os feixes representados por ψ_1^0 e ψ_2^0 passam pelos tubos T_1 e T_2 , onde entram em contato com um potencial escalar. Após saírem dos tubos, eles se encontram e formam um padrão de interferência na região I.

Então vamos considerar um dos sistemas descritos no trabalho de Aharonov e Bohm, que foi elaborado para demonstrar que o potencial escalar V pode gerar um fator de fase que altera fisicamente o sistema quântico, mesmo que este não se encontre na presença de campos eletromagnéticos. Neste sistema, um feixe de elétrons é separado em dois feixes, que por sua vez passam, cada um, por dentro de dois cilindros metálicos longos. Depois de saírem dos cilindros, os dois feixes irão se encontrar novamente numa região de interferência I . A figura (1) mostra um esquema deste sistema.

Cada tubo cilíndrico está associado a um mecanismo, que pode gerar um potencial dependente do tempo dentro deles. Enquanto não existe um pacote de ondas dentro dos tubos, o potencial dentro deles é $V = 0$. Mas, quando um pacote de ondas entra em cada tubo, o potencial dentro deles cresce em função do tempo até um valor $V_{1,2} = V_{1,2}(t)$ e depois, logo antes do pacote de ondas sair do tubo, vai a zero novamente. O potencial em cada um dos dois tubos tem uma dependência temporal diferente. Nesse caso, a energia potencial elétrica associada ao potencial $V_{1,2}$ é $U_{1,2}(t) = eV_{1,2}(t)$. Como os mecanismos só são acionados enquanto os pacotes de onda estão dentro dos cilindros metálicos, os pacotes de onda dentro desses cilindros ficam "protegidos" de qualquer campo elétrico externo (ou seja, não há força de Lorentz agindo sobre os elétrons) e tem contato apenas com o

potencial escalar $V_{1,2} = V_{1,2}(t)$.

Dessa forma, olhando para cada feixe isoladamente, podemos escrever o Hamiltoniano de cada feixe dentro dos cilindros como $H_{1,2} = H_0 + U_{1,2}(t)$, onde H_0 é o hamiltoniano do feixe quando o mecanismo está desligado. Numa situação como esta (e tratando cada feixe individualmente), a função de onda da partícula quando o mecanismo está desligado ($V = 0$), difere da função de onda da partícula quando o mecanismo está ligado ($V_{1,2} = V_{1,2}(t)$) por apenas um fator de fase. Para mostrar isso, definimos (Como o cálculo é igual para os dois feixes, os índices (1, 2) serão omitidos por enquanto, para simplificar a notação):

$$\psi = \psi^0 e^{-i\frac{S}{\hbar}}, \quad (2.6)$$

onde ψ é a solução do hamiltoniano H após o elétron sair do tubo cilíndrico, ψ^0 é a solução do hamiltoniano inicial H_0 e S é definido como

$$S = \int U(t) dt. \quad (2.7)$$

Com a definição (2.6), a solução da equação de Schrödinger para ψ fica:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial (\psi^0 e^{-i\frac{S}{\hbar}})}{\partial t} = H\psi = [H_0 + U(t)] \psi^0 e^{-i\frac{S}{\hbar}} \quad (2.8)$$

$$\Rightarrow i\hbar \left[\frac{\partial (\psi^0)}{\partial t} e^{-i\frac{S}{\hbar}} - \frac{i\psi^0}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} e^{-i\frac{S}{\hbar}} \right] = [H_0 + U(t)] \psi^0 e^{-i\frac{S}{\hbar}}. \quad (2.9)$$

Como $\frac{\partial S}{\partial t} = U(t)$, chegamos numa equação que é a equação de Schrödinger para a partícula na ausência do potencial $V(t)$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi^0}{\partial t} = H_0 \psi^0. \quad (2.10)$$

Portanto, a relação dada pela equação (2.6) é válida. Se estivéssemos tratando apenas de um feixe, o fator de fase S não representaria mudança física no sistema. No entanto, estamos tratando de um feixe que se divide em dois, e que por sua vez adquirem, cada um, fases diferentes no processo de passar pelos tubos cilíndricos. Dessa forma, a função de onda dos feixes, que inicialmente eram ψ_1^0 e ψ_2^0 , passam a ser (voltando agora com os índices (1, 2))

$$\begin{cases} \psi_1 = \psi_1^0 e^{-i\frac{S_1}{\hbar}}, \\ \psi_2 = \psi_2^0 e^{-i\frac{S_2}{\hbar}}. \end{cases} \quad (2.11)$$

As fases S_1 e S_2 são definidas por

$$\begin{cases} S_1 = \int U_1(t) dt = q \int V_1(t) dt, \\ S_2 = \int U_2(t) dt = q \int V_2(t) dt. \end{cases} \quad (2.12)$$

Como estamos estudando o caso do elétron, nas equações acima temos que $q = e$, mas para manter uma notação constante durante esta tese, isso ficará implícito. Na ausência de potenciais nos tubos, o padrão de interferência na região I será referente aos feixes representados pelas funções de onda ψ_1^0 e ψ_2^0 . No entanto, quando os potenciais são ligados, as funções de onda dos feixes irão ser modificadas de acordo com (2.11) e, portanto, os dois feixes irão carregar uma diferença de fases $\frac{(S_1 - S_2)}{\hbar}$ entre si quando atingirem a região I . Essa diferença de fases irá alterar o padrão de interferência dos dois feixes, mesmo que não tenha havido interação entre os elétrons do feixe e os campos eletromagnéticos. A diferença de fases gerada pelos potenciais também pode ser escrita como

$$\frac{(S_1 - S_2)}{\hbar} = \frac{q}{\hbar} \oint V dt. \quad (2.13)$$

O 'caminho fechado' da integral acima deve ser pensado como a junção dos caminhos dos dois feixes, que surgem no mesmo tempo t_i e chegam na região I no mesmo tempo t_f , de forma que V é avaliado num pacote de ondas que realiza um caminho fechado no tempo equivalente ao do sistema descrito acima. Esse é um efeito quântico que não existe na eletrodinâmica clássica, já que se trata da interferência de dois feixes de elétrons. Como dito acima, quando os dois feixes com diferença de fases (2.13) se encontram na região I , o padrão de interferência será alterado devido a essa diferença de fases. Como a diferença de fases é provocada pelo potencial escalar gerado pelo mecanismo, e o tubo cilíndrico protege o feixe de campos elétricos externos, podemos concluir que essa alteração no padrão de interferência do sistema é provocada pelo potencial escalar V .

Outro sistema descrito no artigo (AHARONOV; BOHM, 1959) é elaborado para descrever uma fase geométrica que apareça devido somente ao potencial vetor \vec{A} , e também para descrever um experimento que pudesse testar o efeito dessas diferenças de fases num sistema quântico. Nesse caso, um feixe de elétrons será novamente dividido em dois. Mas, dessa vez, cada um dos feixes irá passar por um dos lados de um solenoide longo de raio R , cujo eixo coincide com o eixo \hat{z} . Depois os dois feixes irão se encontrar novamente numa região de interferência.

Solenoides idealmente longos têm a característica de gerar um campo magnético uniforme em seu interior ($r < R$), e de não gerar um campo magnético externo ($r > R$). Apesar de não existir um campo magnético na região exterior do solenoide, nessa região existe um potencial vetor \vec{A} e um fluxo magnético constante Φ , que passa por qualquer

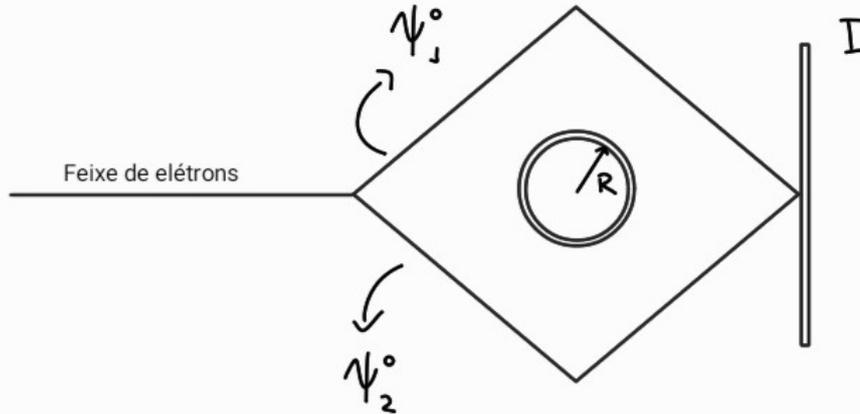


Figura 2 – Esquema elaborado para ilustrar a importância física do potencial vetor eletromagnético. Os feixes representados por ψ_1^0 e ψ_2^0 passam por ambos os lados de um solenoide e depois se encontram e formam um padrão de interferência na região I. Como existe uma corrente passando pelo solenoide longo, os feixes estão em contato com um potencial vetor durante o trajeto.

superfície que envolva o cilindro. O fluxo Φ está relacionado com o potencial vetor \vec{A} pela seguinte equação:

$$\Phi = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r}. \quad (2.14)$$

Portanto, o sistema consiste de dois feixes de elétrons que se encontram em uma região onde existe um potencial vetor \vec{A} , mas não há campos eletromagnéticos. O cálculo a seguir será o mesmo para os dois feixes, então os índices (1, 2) serão omitidos novamente. Nessa situação, o hamiltoniano de uma partícula carregada será dado pela equação (2.2), mas com $V = 0$. Dessa forma, a equação de Schrödinger dependente do tempo que descreve o elétron nessa situação será

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \psi. \quad (2.15)$$

Assim como foi feito para o caso do potencial escalar, vamos admitir que a função de onda possa ser escrita da seguinte maneira:

$$\psi = \psi^0 e^{i\frac{g}{\hbar}}, \quad (2.16)$$

onde o fator de fase g é definida por

$$g = \frac{q}{c} \int \vec{A} \cdot d\vec{r}. \quad (2.17)$$

Com essa definição, o gradiente de ψ fica:

$$\nabla\psi = \nabla(\psi^0 e^{i\frac{g}{\hbar}}) = e^{i\frac{g}{\hbar}} (\nabla\psi^0) + i\frac{q}{\hbar c} \vec{A} (\psi^0 e^{i\frac{g}{\hbar}}) \quad (2.18)$$

$$\Rightarrow \left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \psi = -i\hbar e^{ig} \nabla\psi^0. \quad (2.19)$$

Portanto obtemos a relação

$$\left(-i\hbar\nabla - q\vec{A} \right)^2 \psi = -\hbar^2 e^{i\frac{g}{\hbar}} \nabla^2 \psi^0. \quad (2.20)$$

Substituindo a equação acima na equação de Schrödinger do sistema, dada na Eq. (2.15), obtemos

$$i\hbar \frac{\partial\psi^0}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^0, \quad (2.21)$$

que é a equação de Schrödinger de uma função de onda ψ^0 na ausência de potencial vetor \vec{A} . Portanto, a relação (2.16) também é correta. Dessa forma, podemos concluir que cada feixe irá adquirir uma fase diferente por causa da presença do potencial vetor \vec{A} , dadas pela equação (2.17):

$$\frac{g_{1,2}}{\hbar} = \frac{q}{\hbar c} \int \vec{A} \cdot d\vec{r} = \pm \frac{q\Phi}{2\hbar c}, \quad (2.22)$$

onde a diferença de sinais é devido à orientação do movimento de cada feixe, um se move na direção positiva de $\hat{\varphi}$ e o outro na direção negativa de $\hat{\varphi}$ (aqui, $\hat{\varphi}$ indica a direção azimutal). Veja que, como cada feixe toma um caminho em torno do solenoide, esta ainda não é a integral de caminho fechado que resulta no fluxo Φ na equação (2.14). Supondo que, assim como no caso anterior, a função de onda dos feixes na ausência de um potencial vetor \vec{A} sejam dadas por ψ_1^0 e ψ_2^0 , então as funções de onda dos feixes na presença de \vec{A} serão idênticas as equações (2.23):

$$\begin{cases} \psi_1 = \psi_1^0 e^{i\frac{g_1}{\hbar}}; \\ \psi_2 = \psi_2^0 e^{i\frac{g_2}{\hbar}}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Portanto, por conta da forma das funções de onda acima, a diferença de fases entre os dois feixes irá fazer com que o padrão de interferência na região de interferência I seja modificado em relação ao que seria na ausência de um potencial vetor \vec{A} . Dessa

forma, assim como no caso anterior, essa diferença de fases gerada por \vec{A} também pode representar uma mudança observável no sistema. Essa diferença de fases é chamada de fase geométrica quântica e é dada pela equação

$$\frac{g_1 - g_2}{\hbar} = \frac{q}{\hbar c} \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \frac{q\Phi}{\hbar c}. \quad (2.24)$$

A junção dos caminhos tomados pelos feixes resulta num caminho fechado em torno do solenoide, de forma que dessa vez obtemos a integral (2.14) que está relacionada ao fluxo magnético. Portanto, esta não é uma integral de caminho fechado no sentido usual, onde um elétron começa e termina seu movimento no mesmo ponto do espaço-tempo. Ela deve ser tomada considerando que os dois elétrons partem inicialmente do mesmo ponto \vec{r}_i , percorrem dois caminhos diferentes, e terminam, ambos, no mesmo ponto \vec{r}_f . Neste sentido, podemos encarar estes esquemas de divisão e recombinação de feixes propostos por Aharonov e Bohm como sistemas físicos fechados, que são os tipos de sistemas físicos em que a fase geométrica quântica acima pode aparecer.

Os dois sistemas apresentados acima, o primeiro cuja diferença de fases aparece devido ao potencial escalar V e o segundo cuja diferença de fases aparece devido ao potencial vetor \vec{A} , também serviram como sugestões de experimentos que pudessem medir tais fases geométricas. No caso do segundo sistema, Aharonov e Bohm descreveram com mais detalhes um possível experimento. Eles sugeriram o uso de fios longos e magnetizados como fonte do fluxo magnético. Assim, o efeito do potencial (associado ao fluxo) poderia ser observado ao analisar as franjas de interferência na região I, onde os feixes são recombinados. Nesse caso, se o potencial vetor \vec{A} realmente gerar uma fase geométrica no sistema, um deslocamento no padrão de interferência do feixe iria poder ser observado.

De fato, em 1960 R. G. Chambers ([CHAMBERS, 1960](#)) realizou um experimento com um interferômetro, semelhante ao esquema apresentado na figura (2). Para desviar os feixes de elétrons (provenientes de uma fonte pontual), ele utilizou um arranjo de um filamento central com dois eletrodos em suas laterais. Quando uma diferença de potencial é aplicada nesse filamento, os elétrons que passam em ambos os seus lados são atraídos para o centro, onde eles se sobrepõem e formam um padrão de interferência, cujas franjas são paralelas ao filamento. No entanto, Chambers verificou que, ao colocar um fio de ferro magnetizado entre o filamento e a região de interferência, as franjas do padrão de interferência ficavam inclinadas em relação ao filamento. Este fio possuía magnetização constante na direção axial, produzindo um fluxo magnético (portanto, este fio faria o papel do solenoide na imagem (2)). Ou seja, ele observou que o padrão de interferência dos dois feixes de elétrons era alterado pelo fluxo magnético, como previsto por Aharonov e Bohm. Além disso, em 1986, A. Tonomura e colaboradores realizaram outro experimento com interferômetros que também encontrou as fases geométricas previstas por Aharonov e Bohm ([TONOMURA et al., 1986](#)). Estes experimentos e vários outros que os sucederam

foram eficazes em provar a existência do efeito Aharonov-Bohm magnético ([TONOMURA, 1989](#)), que é referente a segunda situação descrita nesta seção.

2.3 Efeito Aharonov-Bohm para estados ligados

Nesta seção será explicada uma expressão bastante utilizada nesse trabalho, que é o conceito de "efeito Aharonov-Bohm para estados ligados". Essa expressão se refere ao exemplo solúvel mais simples em que o efeito Aharonov-Bohm pode ser observado. Parte dos resultados obtidos neste trabalho são análogos ao que pode ser obtido para este caso mais simples de fase Aharonov-Bohm, portanto é interessante apresentar este exemplo.

Então, vamos considerar um elétron que está limitado a se mover em uma circunferência de raio R , cujo centro coincide com o eixo \hat{z} do sistema de coordenadas cilíndrico. Como, nesse caso, as coordenadas r e z do elétron estão fixas, e a função de onda do sistema depende apenas da coordenada φ , o hamiltoniano que descreve o sistema em questão será

$$\varepsilon\psi(\varphi) = \frac{-\hbar^2}{2mR^2} \frac{d^2\psi(\varphi)}{d\varphi^2}. \quad (2.25)$$

A solução da equação acima é $\psi(\varphi) = e^{i\frac{\sqrt{2m\varepsilon}R}{\hbar}\varphi}$. Quando o elétron dá uma volta no anel, temos uma condição de contorno que determina que a função de onda do sistema deve ser contínua, ou seja, $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$. Dessa condição, podemos obter que os níveis de energias do sistema serão $\varepsilon = \frac{l^2\hbar^2}{2mR^2}$, onde l é um número inteiro.

Agora vamos considerar que existe um solenoide muito longo de raio $R_s < R$, cujo eixo coincide com o eixo \hat{z} do sistema de coordenadas. Se uma corrente elétrica constante I passa por esse solenoide, e se ele puder ser considerado infinito quando comparado com as dimensões do sistema, então temos que o campo magnético no interior do solenoide será uniforme, enquanto que o campo magnético externo ao solenoide será nulo. Portanto, o elétron não interage com nenhum campo magnético. Este sistema está representado na imagem (3).

Apesar de não haver campo na região externa do solenoide, onde o elétron está localizado, irá existir um potencial vetor \vec{A} e um fluxo magnético Φ nessa região, devido ao campo uniforme no interior do solenoide. Esse fluxo e esse potencial podem ser obtidos usando a relação (2.4) e lembrando que o fluxo do campo magnético é dado por $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$, onde $d\vec{s}$ é um elemento de área de uma superfície perpendicular as linhas de campo. No caso do problema da figura (3), em que o elétron está confinado a uma órbita de raio R , temos:

$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi R} \hat{\varphi}. \quad (2.26)$$

A equação de Schrödinger (2.3), que descreve a interação de uma partícula carregada com campos eletromagnéticos, foi obtida na seção anterior. Dessa forma, considerando

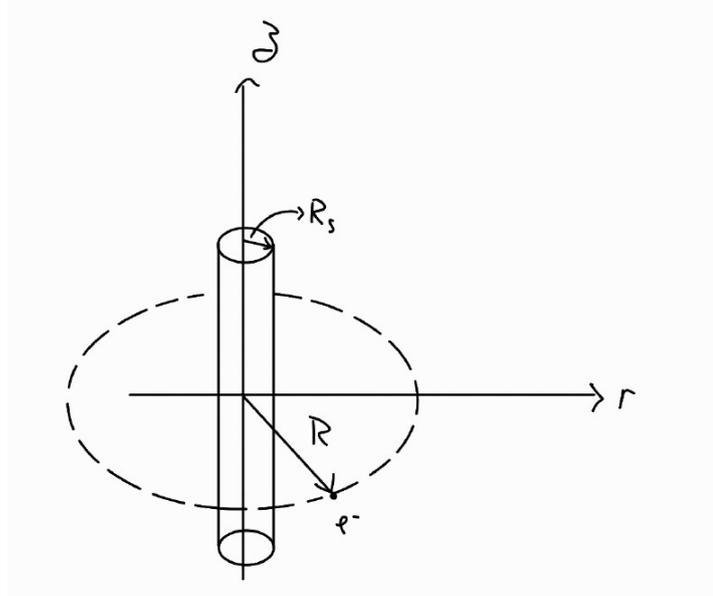


Figura 3 – O esquema mostra o caso mais simples em que o efeito Aharonov-Bohm pode ser observado. Consiste de um elétron orbitando um solenoide longo, por onde passa uma corrente elétrica constante.

que o solenoide é neutro, a equação de Schrödinger do elétron descrito neste exemplo é dada por:

$$\varepsilon\psi(\varphi) = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - q \frac{\Phi}{2\pi R} \hat{\varphi} \right)^2 \psi(\varphi). \quad (2.27)$$

A solução da equação acima é dada por $\psi = e^{i(\frac{q\Phi}{2\pi} \pm R\sqrt{2m\varepsilon})\varphi}$. Quando comparamos esta solução com a solução na ausência do solenoide, podemos ver que esta forma exponencial é coerente com a equação (2.16). Assim como no caso sem o fluxo magnético, como o elétron está limitado a se mover em uma órbita circular de raio R em torno do solenoide, a continuidade de sua função de onda exige que $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$. Dessa condição de contorno, podemos concluir que $\frac{q\Phi}{2\pi} \pm R\sqrt{2m\varepsilon}$ deve ser um número inteiro l e que, portanto, os níveis de energia do sistema são dados por

$$\varepsilon_l = \frac{1}{2mR^2} \left(l - \frac{q\Phi}{2\pi} \right)^2, \quad (2.28)$$

onde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Portanto, mesmo que o elétron não se encontre na mesma região que o campo magnético uniforme no interior do solenoide, seus níveis de energia sofrem uma alteração, que, conforme foi explicado na seção sobre o efeito Aharonov-Bohm, é devido ao potencial vetor \vec{A} . Assim, os níveis de energias do sistema foram modificados no número quântico do momento angular por um fator de fase $\frac{q\Phi}{2\pi}$, sofrendo também uma alteração no seu padrão de degenerescência. Como o elétron está confinado em uma órbita, suas soluções

representam estados ligados. Por isso este problema é conhecido como "efeito Aharonov-Bohm para estados ligados". No capítulo 5, onde serão mostrados os efeitos de uma fase geométrica tipo Aharonov-Bohm para estados ligados nos sistemas apresentados neste trabalho, modificações dos níveis de energia análogas às apresentadas neste exemplo serão obtidas.

2.4 Outros tipos de fases geométricas

Após o trabalho de Aharonov e Bohm, fases geométricas semelhantes foram propostas para diferentes tipos de distribuições de carga, além do elétron (monopolo elétrico). Em 1984, Aharonov e Casher ([AHARONOV; CASHER, 1984](#)) mostraram que uma partícula neutra que possui um momento de dipolo magnético pode apresentar um fator de fase semelhante a fase de Aharonov-Bohm, quando ela interage com determinadas configurações de campos. Diferentemente do elétron, o dipolo magnético pode adquirir essa fase mesmo que se mova na presença de um campo elétrico, já que é neutro e determinadas configurações de campo não exercem força sobre ele. Mais especificamente, o sistema estudado foi o de um nêutron se movimentando na presença de um campo elétrico \vec{E} , produzido por uma linha infinita de cargas. O interesse deles neste sistema surgiu pois eles perceberam que, como um solenoide pode ser visto como uma linha de momentos de dipolos magnéticos, o sistema de uma partícula carregada, que se move na presença de um solenoide infinito, tem uma Lagrangiana semelhante a Lagrangiana do sistema do dipolo magnético que se move na presença de uma linha infinita de cargas. Conseqüentemente, se a partícula carregada pode adquirir uma fase geométrica quando circula o solenoide, então o dipolo magnético também pode adquirir uma fase geométrica quando circula a linha de cargas. Eles verificaram que um nêutron com momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$ nessa situação não sofre ação de forças, mas adquire uma fase geométrica dada por

$$S_{AC} = - \oint (\vec{E} \times \vec{\mu}) \cdot d\vec{R} = - \oint \vec{A}_{eff} \cdot d\vec{R}. \quad (2.29)$$

Na equação acima, o termo $\vec{A}_{eff} = \vec{E} \times \vec{\mu}$ é equivalente ao potencial vetor no hamiltoniano de um sistema com uma partícula carregada. Isso pode ser visto mais facilmente se escrevermos o hamiltoniano do dipolo magnético interagindo com campos externos:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} + \frac{1}{c} \vec{E} \times \vec{\mu} \right)^2 - \vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (2.30)$$

Essa equivalência, entre o potencial vetor e o termo de interação do dipolo com um dos campos, também irá ser evidente nas definições das fases geométricas para outros multipolos. Esta fase geométrica, chamada de fase Aharonov-Casher, foi verificada experimentalmente em 1989 por ([CIMMINO et al., 1989](#)), usando um interferômetro de nêutrons.

Uma fase geométrica que apareceria no sistema dual ao estudado por Aharonov e Casher foi teorizada em 1993 por He e Mckellar ([HE; MCKELLAR, 1993](#)), e também em 1994 por Wilkens ([WILKENS, 1994](#)). Este sistema consiste, portanto, de uma partícula neutra com dipolo elétrico \vec{d} movendo-se numa determinada configuração de campos

magnéticos gerada por cargas magnéticas. A partir da Lagrangiana do sistema, Wilkens obteve uma condição que permite determinar configurações de campo que resultam em força e torque nulos sobre a partícula neutra com dipolo elétrico:

$$m \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \vec{v} \times \left[\vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{d}) \right]. \quad (2.31)$$

Portanto, a ausência de força e torque é determinada pela condição $\vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{d}) = 0$. Essa condição foi procurada por Wilkens pois, nos casos de multipolos de ordem maior que o monopolo, a ausência de força não é garantida apenas pela ausência de campos (já que determinadas configurações de campo também não geram forças no sistema da partícula neutra com algum multipolo), e também porque os termos que chamaremos de potenciais efetivos só existem devido à interação dos multipolos com campos eletromagnéticos. Com a expressão (2.31), Wilkens mostrou que, mesmo quando campos magnéticos não geram força ou torque resultante sobre a partícula neutra com dipolo elétrico, ela ainda pode adquirir uma fase geométrica dada por

$$S_{HMW} = \frac{1}{\hbar} \oint (\vec{B} \times \vec{d}) \cdot d\vec{R} = \oint \vec{A}_{eff} \cdot d\vec{R}. \quad (2.32)$$

Vamos escrever o hamiltoniano que descreve uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico interagindo com campos externos:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p} - \vec{B} \times \vec{d})^2 - \vec{d} \cdot \vec{E}. \quad (2.33)$$

Do hamiltoniano acima, vemos que o termo $\vec{A}_{eff} = \vec{B} \times \vec{d}$ é equivalente ao potencial vetor no hamiltoniano de um sistema com uma partícula carregada. O aparecimento da fase geométrica (2.32) no sistema, que surge da interação do dipolo elétrico com um campo magnético, ficou conhecido como efeito He-Mckellar-Wilkens, que foi verificado experimentalmente em 2012 usando um interferômetro atômico (LEPOUTRE et al., 2012).

As fases geométricas explicadas até aqui, que estão associadas aos potenciais eletromagnéticos e aos potenciais efetivos, foram observadas em diferentes tipos de distribuições de carga (para monopolos elétrico, dipolos elétricos e dipolos magnéticos). Notando isso, Chen (CHEN, 1995) investigou o aparecimento de fases geométricas associadas a multipolos mais complexos. Inicialmente, ele mostrou que essas fases geométricas também podem aparecer em partículas com momento de quadrupolo elétrico.

Vamos considerar o sistema da partícula que possui apenas o momento de quadrupolo elétrico (outros multipolos como a carga q e o dipolo \vec{d} não aparecem) interagindo com campos eletromagnéticos. Podemos então usar a expansão multipolar do potencial escalar eletromagnético $V(\vec{r})$ para obter a energia potencial elétrica associada ao momento de

quadrupolo elétrico, que é $U = \sum_i \sum_j Q_{ij} \partial_i E_j(0)$ (JACKSON, 1999). Aqui, Q_{ij} é o tensor momento de quadrupolo elétrico, que deve ser simétrico e sem traço. Usando este potencial, é possível obter uma lagrangiana que descreve a partícula neutra com momento de quadrupolo elétrico interagindo com um campo elétrico, que será $L = \frac{1}{2}mv^2 - \sum_i \sum_j Q_{ij} \partial_i E'_j$.

Assim como Wilkens, Chen usou a lagrangiana obtida para encontrar uma expressão para a força eletromagnética que age sobre o sistema. Isso permitiu a ele encontrar uma determinada configuração de campos que gerasse uma fase geométrica na função de onda da partícula neutra com momento de quadrupolo elétrico, mas que não gerasse força resultante sobre ela. Essa expressão é dada por:

$$m \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{v}}{c} \times \left[\vec{\nabla} \times (\vec{Q} \times \vec{B}) \right] = 0, \quad (2.34)$$

onde o vetor \vec{Q} é definido como $Q_i = \sum_j Q_{ij} \partial_j$.

Ou seja, para que uma determinada configuração de campos possa gerar uma fase geométrica do tipo Aharonov-Bohm numa partícula com momento de quadrupolo elétrico em movimento, ela também deve satisfazer a condição $\vec{\nabla} \times (\vec{Q} \times \vec{B}) = 0$. Veja também que, como o termo $-\frac{\vec{v}}{c} \times \left[\vec{\nabla} \times (\vec{Q} \times \vec{B}) \right]$ é equivalente a força de Lorentz que age sobre uma partícula de carga $-q$ se movendo na presença de um campo magnético $\frac{1}{q} \vec{\nabla} \times (\vec{Q} \times \vec{B})$, o termo $(\vec{Q} \times \vec{B})$ é equivalente a um potencial vetor. Esse potencial vetor efetivo pode ser usado para obter uma expressão para a fase geométrica, assim como nos casos anteriores. O procedimento para obter essa fase geométrica é semelhante ao caso da partícula neutra com momento de quadrupolo magnético, e será discutido em detalhes mais adiante. Para o caso da partícula neutra com momento de quadrupolo elétrico, Chen obteve

$$S_Q = \frac{1}{\hbar} \oint (\vec{Q} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}. \quad (2.35)$$

Além disso, Chen também usou a expansão da energia potencial para supor que um tipo de fase geométrica pode ser associada a cada termo da expansão multipolar dos potenciais eletromagnéticos. Para obter essas fases geométricas, ele fez uma generalização tanto para o n -ésimo termo da expansão, quanto para as componentes do vetor $\vec{Q} = \sum_i Q_i \hat{e}_i$ associado a esse n -ésimo termo:

$$\begin{cases} U = -\sum_i \dots \sum_n Q_{i,\dots,n} \partial_{i,\dots,n} V; \\ Q_i = Q_{i,j,\dots,n-1} \partial_j \dots \partial_{n-1}. \end{cases} \quad (2.36)$$

Com as definições acima, a energia potencial elétrica da interação do n -ésimo multipolo com um campo elétrico será dada por $U = -\vec{Q} \cdot \vec{E}$. Portanto, a energia potencial associada ao n -ésimo multipolo tem a mesma forma da energia potencial associada ao

momento de quadrupolo elétrico, mostrada acima. Dessa forma, a fase geométrica associada ao n -ésimo multipolo terá uma forma análoga a equação (2.35), mas com \vec{Q} definido por (2.36). Em seu trabalho, Chen ainda obteve uma fase geométrica associada ao momento de quadrupolo magnético, mas como essa fase geométrica é um dos temas deste trabalho, ela será apresentada em outra seção.

As fases geométricas discutidas no trabalho de Aharonov-Bohm, apresentadas na seção anterior, aparecem em sistemas quânticos onde feixes de partículas são separados e depois, após passarem por uma região onde existe um potencial vetor \vec{A} , são recombinados novamente na região de interferência. As fases discutidas nesta seção são análogas ao efeito Aharonov-Bohm, no sentido de que elas são geradas quando a partícula se move por um caminho que engloba potenciais efetivos, em uma região em que não há forças agindo sobre o sistema durante o processo.

No entanto, também existem outros tipos de processos cíclicos que geram fases geométricas no sistema. Por exemplo, processos adiabáticos e cíclicos também podem resultar no aparecimento dessas fases na mecânica quântica, como foi mostrado por Berry em 1984 (BERRY, 1984). Para obter esse resultado, Berry usou o teorema adiabático (que afirma que, quando o hamiltoniano de um sistema varia adiabaticamente, uma partícula que se encontra inicialmente num determinado n -ésimo auto-estado do hamiltoniano inicial é levada ao n -ésimo auto-estado do hamiltoniano final) e supôs que a lenta variação temporal do hamiltoniano $H(t)$ do sistema fosse devido à variação de N parâmetros dependentes do tempo, chamados de $\vec{R}(t) = R_1(t), R_2(t), \dots, R_N(t)$ (portanto $H(t) = H(\vec{R}(t))$). Dessa forma, Berry mostrou que, na mecânica quântica, um sistema que passa por um processo cíclico e adiabático adquire, após uma revolução, uma fase geométrica dada por:

$$\gamma_n(T) = i \int_0^T \langle \psi_n(t') | \dot{\psi}_n(t') \rangle dt' = i \oint \langle \psi_n | \nabla_{\vec{R}} \psi_n \rangle \cdot d\vec{R}. \quad (2.37)$$

Portanto, quando os parâmetros \vec{R} do hamiltoniano são modificados em um processo cíclico e adiabático, a função de onda de um estado do sistema que sofre esse processo irá adquirir uma fase dada pelo resultado da integral (2.37).

Em particular, Berry mostrou que, se o espaço de parâmetros for tridimensional ($\vec{R} = (R_1, R_2, R_3)$), a fase representada pela integral (2.37) corresponde a fase de Aharonov-Bohm, dada pela (2.17). Para isso, ele considerou o sistema de uma partícula carregada confinada em uma caixa, que está sendo mantida a um raio R de uma linha de fluxo magnético. O campo magnético responsável pelo fluxo não chega na caixa, mas o potencial vetor \vec{A} existe na região onde a caixa se encontra. Conforme vimos acima, se a caixa realiza uma volta em torno da linha de fluxo (retornando para sua posição inicial), então, ao final deste processo cíclico, a função de onda irá adquirir uma fase geométrica dada por (2.37). No caso deste sistema, o produto interno na integral será $\langle \psi_n | \nabla_{\vec{R}} \psi_n \rangle = -i \frac{q}{\hbar} \vec{A}(\vec{R})$,

portanto a fase (2.37) se torna

$$\gamma_m(T) = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A}(\vec{R}) \cdot d\vec{R} = \frac{q\Phi}{\hbar}. \quad (2.38)$$

Esta é a mesma fase obtida por Aharonov e Bohm. Devido a esse resultado, Berry encarou a fase Aharonov-Bohm como um caso específico de sua fase. No entanto, como as origens das duas fases geométricas são diferentes (Não é necessário considerar um processo adiabático para se obter a fase Aharonov-Bohm), em 1986 Y. Aharonov e J. Anandan publicaram um trabalho em que essas diferenças eram explicadas (AHARONOV; ANANDAN, 1987). No trabalho em questão eles propuseram um tipo mais geral de fase geométrica, que pode aparecer em qualquer tipo de processo cíclico na mecânica quântica. Supondo um auto-estado de um $H(t)$ que evolua temporalmente de acordo com $\psi(\tau) = e^{i\phi}\psi(0)$ (onde ϕ agora é uma fase qualquer, e não mais o fluxo magnético, necessariamente), a expressão que descreve a fase Aharonov-Anandan será:

$$\beta = \int_0^\tau \left\langle \bar{\psi}_m(t') \left| i \left(\frac{d\bar{\psi}_m(t')}{dt} \right) \right. \right\rangle dt',$$

onde $\bar{\psi}(t) = e^{-if(t)}\psi(t)$ e $f(\tau) - f(0) = \phi$, de forma que $\bar{\psi}_m(\tau) = \bar{\psi}_m(0)$. A equação acima é muito semelhante a primeira igualdade da equação (2.37), com a diferença de que a fase β é válida para qualquer processo cíclico envolvendo uma partícula quântica, não apenas aqueles em que a aproximação adiabática é válida. Em seu trabalho, Aharonov e Anandan também mostraram como a fase Aharonov-Bohm e a fase de Berry podem ser obtidas a partir da fase acima.

A fase Aharonov-Anandan em particular foi estudada em um sistema bastante semelhante aos que serão apresentados nesta tese, que envolvem uma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético (FONSECA; BAKKE, 2015a). Naquele trabalho, a influência de uma fase geométrica sobre o sistema da partícula neutra com momento de quadrupolo magnético, confinada por um potencial tipo barreira infinita, foi estudada. Foi obtido que a fase Aharonov-Anandan (ϕ_{AA}) altera a dependência das energias no número quântico do momento angular por um valor $\frac{\phi_{AA}}{2\pi}$, ou seja, de forma análoga ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados, apresentado anteriormente.

2.5 Correntes persistentes

Correntes persistentes são correntes que não necessitam de uma fonte para continuar existindo. Elas podem ser observadas em materiais supercondutores, já que estes não apresentam resistência elétrica, ou em outros tipos de objetos devido a efeitos quânticos. Como foi apontado por Byers e Yang (BYERS; YANG, 1961) em 1961, correntes persistentes podem surgir em sistemas por onde passa constantemente um fluxo magnético Φ . Portanto o efeito Aharonov-Bohm, que foi estudado no capítulo anterior e que está relacionado ao potencial vetor e ao fluxo magnético, também tem relação com o aparecimento dessas correntes em certos sistemas (IMRY, 2002). Nesta seção, será mostrado o argumento que Byers e Yang utilizaram para relacionar correntes persistentes com um fluxo magnético Φ , além de uma forma de calcular a corrente persistente presente em um sistema, a partir do espectro de energias deste sistema. Depois veremos qual a relevância deste tema para sistemas de partículas neutras, que são estudados neste trabalho.

Enquanto investigavam o sistema de um supercondutor na presença de um fluxo magnético Φ , Byers e Yang (BYERS; YANG, 1961) apresentaram uma equação que relaciona a função de partição Z do sistema com a corrente que passa pelo supercondutor a uma temperatura constante. Mais especificamente, o sistema em questão se tratava de um supercondutor com um túnel em seu interior, e o interesse deles era estudar o comportamento periódico adquirido por alguns observáveis deste sistema quando um fluxo Φ passava no interior deste túnel. Esse comportamento tem um período no fluxo magnético que é dado por $\Phi_0 = \frac{\hbar c}{e}$, de forma que os fluxos Φ e $\Phi + n\Phi_0$ são indistinguíveis para o sistema (n inteiro). Para obter este comportamento, devemos expressar a função de onda na presença do fluxo em termos da função de onda na ausência do fluxo. Isso pode ser feito ao realizar o mesmo processo mostrado na seção anterior, cuja conclusão era que a função de onda pode ser escrita como $\psi = \psi^0 e^{i\frac{e\Phi}{\hbar c}}$ (equação (2.16)), onde ψ^0 é a função de onda na ausência do fluxo. Voltando para a corrente, a expressão encontrada foi:

$$I = -k_B T c \frac{\partial \ln Z}{\partial \Phi}. \quad (2.39)$$

Como a função de partição do sistema está relacionada com a sua energia, podemos encontrar a expressão que relaciona os níveis de energia de um sistema com a possível presença de correntes persistentes neste sistema, a partir da equação (2.39). Essa relação entre a energia e as correntes persistentes ficou conhecida como Relação Byers-Yang e é dada pela equação

$$I_{n,l} = -\frac{\partial \varepsilon_{n,l}}{\partial \Phi}. \quad (2.40)$$

Dessa forma, a corrente persistente total no sistema será dada por

$$I = \sum_{n,l} I_{n,l}, \quad (2.41)$$

onde a soma deve ser efetuada sobre todos os estados eletrônicos ocupados.

A característica do sistema que influenciou o aparecimento de uma corrente no supercondutor foi o fluxo magnético Φ . Para chegar a essa conclusão, Byers e Yang usaram a equação (2.39) e lembraram que, mesmo que o campo magnético e a corrente dentro de um supercondutor devam ser ambos nulos de acordo com o efeito Meissner, ainda podem existir correntes superficiais no supercondutor. Então eles argumentaram que, quando existe um fluxo Φ passando pelo túnel do supercondutor, surgirão correntes na superfície do supercondutor, de forma a cancelar qualquer campo magnético que apareça em seu interior devido a Φ . Durante essa argumentação, eles também usaram um teorema que diz que a função de partição neste sistema deve ser uma função par e periódica no fluxo Φ (explicando o comportamento periódico do sistema em Φ). Esta corrente passou a ser chamada de corrente persistente em trabalhos que envolvem outros sistemas, isso porque elas persistem enquanto existir um fluxo magnético em contato com o sistema.

Em 1970, Bloch (BLOCH, 1970) conseguiu derivar termodinamicamente uma expressão semelhante a equação (2.40) para um anel quântico. O anel está na presença de um fluxo magnético que varia lentamente com o tempo, fazendo com que o sistema se mantenha no equilíbrio e induzindo neste uma voltagem dada por

$$V = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.42)$$

A variação temporal da energia livre de Helmholtz a uma temperatura constante de um sistema é o trabalho por unidade de tempo aplicado sobre o sistema. Dessa forma, se temos uma voltagem V aplicada sobre o sistema com uma corrente I circulando pelo anel, temos que

$$\frac{dF}{dt} = IV \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{d\Phi} = -\frac{I}{c}, \quad (2.43)$$

onde F é a energia livre de Helmholtz. Como, no ensemble canônico, a energia livre está associada com a função de partição do sistema pela expressão $F = -k_B T \ln Z$, as equações (2.39) e (2.40) podem ser obtidas.

Existem muitos trabalhos que abordam estas correntes para elétrons se movendo em um anel quântico. Por exemplo, W. C. Tan e J. C. Inkson (TAN; INKSON, 1999) desenvolveram um modelo para estudar a magnetização e a corrente persistente de elétrons confinados em anéis mesoscópicos bidimensionais. Mais tarde, L. Dantas, C. Furtado e A. L. S. Netto (DANTAS; FURTADO; NETTO, 2015) usaram o modelo de Tan e Inkson para estudar elétrons que se movem em um anel quântico, na presença de um defeito

topológico do tipo deslocação em hélice. Nestes dois trabalhos, a equação (2.40) foi usada para obter essas correntes.

Apesar da corrente encontrada por Byers e Yang tratar-se de uma corrente elétrica induzida pelo fluxo Φ em um supercondutor, as correntes persistentes também podem ser estudadas em sistemas que lidam com partículas não carregadas. Isso se deve à analogia entre fases geométricas previstas para partículas neutras (Efeito Aharonov-Casher, efeito He-Mackellar-Wilkens, etc...) e o potencial vetor \vec{A} , explicada na seção anterior. Como o potencial vetor está associado a um fluxo magnético pela equação (2.14), pode-se dizer que as fases geométricas apontadas na seção anterior são análogas a fluxos associados aos potenciais vetores efetivos \vec{A}_{eff} . Por exemplo: correntes persistentes foram estudadas para um sistema que apresenta fases Aharonov-Anandan (GAO; QIAN, 1993) ; para o sistema da partícula neutra com dipolo magnético que apresenta uma fase geométrica Aharonov-Casher, correntes persistentes de massa e de spin foram estudadas (BALATSKY; ALTSHULER, 1993; OH; RYU, 1995; BAKKE; FURTADO, 2011; BAKKE; FURTADO, 2012); No caso de sistemas que apresentam a fase de Berry, essas correntes também foram abordadas (LOSS; GOLDBART; BALATSKY, 1990; LOSS; GOLDBART, 1992), entre outros exemplos.

É importante lembrar que a equação (2.40) foi calculada para um sistema de muitas partículas, que ocupam vários níveis de energia (n, l) . No caso dos sistemas apresentados no capítulo 4, deve-se lembrar que as correntes serão válidas quando consideramos um sistema composto por várias partículas não interagentes e que seguem as mesmas equações dos sistemas apresentados.

3 O sistema da partícula neutra com momento de quadrupolo magnético

Em todos os trabalhos apresentados nesta tese, trabalhamos com o sistema de uma partícula neutra, sem spin e com momento de quadrupolo magnético interagindo com campos elétricos e magnéticos externos. Por consequência, neste capítulo será obtida a equação de Schrödinger que descreve esse tipo de sistema. Além disso será possível perceber que, em boa parte dos trabalhos apresentados, temos o objetivo de estudar os efeitos de uma fase geométrica tipo Aharonov-Bohm nos sistemas que envolvem a partícula neutra com momento de quadrupolo magnético. Dessa forma, também será mostrado que esse sistema pode estar associado a efeitos análogos ao efeito Aharonov-Bohm. Por isso, serão feitas comparações entre a equação de Schrödinger que descreve o sistema da carga pontual, com aquela que descreve o sistema da partícula neutra com momento de quadrupolo magnético. O procedimento apresentado a seguir também foi realizado por (FONSECA; BAKKE, 2015c).

Como vimos na primeira seção do capítulo anterior, um sistema quântico pode ser descrito a partir de sua equação de Schrödinger. Para isso, é necessário obter o hamiltoniano do sistema proposto. Assim, para realizar essa descrição, será necessária a energia potencial de uma partícula com momento de quadrupolo magnético.

O processo de obter a energia potencial associada aos multipolos magnéticos é análogo ao processo de obter a energia potencial associada aos multipolos elétricos. A equação

$$U = qV(0) - \vec{d} \cdot \vec{E}(0) + \sum_i \sum_j Q_{ij} \partial_i E_j(0) \dots, \quad (3.1)$$

representa a expansão da energia potencial elétrica em termos dos multipolos, e pode ser obtida através da expansão multipolar do potencial escalar eletromagnético V (JACKSON, 1999). Portanto, para encontrar uma expressão análoga para a energia potencial associada a multipolos magnéticos, deve-se efetuar uma expansão multipolar no potencial vetor eletromagnético \vec{A} .

Cada termo da expansão estará associado a um multipolo magnético diferente, mas neste trabalho estamos interessados apenas no termo referente ao momento de quadrupolo magnético. Dessa forma, considerando uma partícula que apresente apenas momento de quadrupolo magnético, a energia potencial associada a ela será (RADT; HURST, 1970):

$$U_m(r) = - \sum_{i,j} M_{ij} \partial_i B_j(r), \quad (3.2)$$

onde \vec{B} é o campo magnético, r é a coordenada radial e M_{ij} é o tensor de momento de quadrupolo magnético, que deve ser simétrico e sem traço (RADT; HURST, 1970), e pode ser escrito, em coordenadas cilíndricas, como

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{M}_{r\varphi} & \mathbf{M}_{rz} \\ \mathbf{M}_{\varphi r} & \mathbf{M}_{\varphi\varphi} & \mathbf{M}_{\varphi z} \\ \mathbf{M}_{zr} & \mathbf{M}_{z\varphi} & \mathbf{M}_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Com a equação (3.2) é possível obter a lagrangiana (e consequentemente, o hamiltoniano) do sistema. Ela mostra que, a princípio, o momento de quadrupolo magnético interage apenas com o campo magnético. No entanto, neste trabalho será considerado que a partícula com momento de quadrupolo magnético se move com uma velocidade $v \ll c$ (c é a velocidade da luz) em relação a um observador estático. Dessa forma, a partícula irá perceber um campo magnético \vec{B}' que é diferente dos campos eletromagnéticos percebidos pelo observador estático. A relação entre o campo eletromagnético percebido no referencial do observador e o campo \vec{B}' , percebido pela partícula, é dada pela seguinte transformação:

$$\vec{B}'(r) = \vec{B}(r) - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}(r), \quad (3.4)$$

onde \vec{B} e \vec{E} são o campo magnético e o campo elétrico no referencial do observador estático, respectivamente.

Usando a equação (3.2), a Lagrangiana do sistema no referencial da partícula em movimento será $L = \frac{1}{2}mv^2 + \sum_{ij} M_{ij} \partial_i \vec{B}'_j$. Assim, usando a equação (3.4), a Lagrangiana do sistema fica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + \vec{M} \cdot \vec{B}(r) + \frac{\vec{v}}{c^2} \cdot \left(\vec{M} \times \vec{E}(r) \right), \quad (3.5)$$

onde definimos as componentes do vetor \vec{M} como

$$M_i = \sum_j M_{ij} \partial_j, \quad (3.6)$$

com M_{ij} sendo o tensor de momento de quadrupolo magnético. Essa definição do vetor M_i é análoga à definição do vetor $Q_i = \sum_j Q_{ij} \partial_j$ feita por Chen na Ref. (CHEN, 1995), onde Q_{ij} é o tensor de momento de quadrupolo elétrico.

A partir da lagrangiana da equação (3.5) é possível obter o Hamiltoniano do sistema, utilizando as transformações de Legendre. Portanto, é preciso obter o momento

canônico conjugado à coordenada radial r , que pode ser derivado a partir da lagrangiana em questão. Da mecânica clássica, o momento canônico conjugado a uma coordenada, é dado pela derivada da lagrangiana em termos da velocidade correspondente àquela coordenada. No caso da equação (3.5), o momento canônico conjugado a r será dado pela equação $\vec{p} = m\vec{v} + \frac{1}{c^2}(\vec{M} \times \vec{E})$. As transformações de Legendre são dadas por

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}, \quad (3.7)$$

ou, nesse caso, $\mathcal{H} = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L}$. Assim, o operador Hamiltoniano do sistema será

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\hat{p} - \frac{1}{c^2} (\vec{M} \times \vec{E}) \right]^2 - \vec{M} \cdot \vec{B}. \quad (3.8)$$

A forma deste operador hamiltoniano é semelhante a forma do operador hamiltoniano que descreve a interação de uma partícula carregada com um campo eletromagnético (2.3), que foi obtida na seção 2.1 e é dada por

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + qV,$$

onde \vec{A} é o potencial vetor associado ao campo magnético e V é o potencial escalar associado ao campo elétrico.

Comparando as equações (3.8) e (2.3), é possível observar que existe uma semelhança entre o termo $(\vec{M} \times \vec{E})$ e o potencial vetor \vec{A} , e entre o termo $(\vec{M} \cdot \vec{B})$ e o potencial escalar V . Por essa razão, o termo $(\vec{M} \times \vec{E})$ será chamado de potencial vetor efetivo e o termo $(\vec{M} \cdot \vec{B})$ será chamado de potencial escalar efetivo:

$$\begin{cases} V_{eff} = -(\vec{M} \cdot \vec{B}); \\ \vec{A}_{eff} = (\vec{M} \times \vec{E}). \end{cases} \quad (3.9)$$

Com o operador hamiltoniano da equação (3.8), é possível obter a equação de Schrödinger independente do tempo para o sistema da partícula neutra com momento de quadrupolo magnético que se move na presença de campos eletromagnéticos:

$$\varepsilon\psi = \frac{1}{2m} \left[\hat{p} - \frac{1}{c^2} (\vec{M} \times \vec{E}) \right]^2 \Psi - \vec{M} \cdot \vec{B} \Psi, \quad (3.10)$$

onde o momento canônico \vec{p} foi substituído pelo operador hermitiano $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, para quantizar o operador hamiltoniano.

A equação de Schrödinger (3.10) será usada como ponto de partida em todos os trabalhos apresentados nesta tese, já que estes tratam de estudar uma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético em diferentes configurações de campos externos. Além disso, as componentes e as propriedades do tensor do momento de quadrupolo magnético, que foram apresentadas nesta seção, também serão importantes para cada caso estudado.

3.1 Fase geométrica para o momento de quadrupolo magnético

Nesta subseção, mostrarei como obter uma expressão geral para a fase geométrica associada ao momento de quadrupolo magnético e, depois, comentar a respeito da fase proposta por Chen (CHEN, 1995), que é a fase que será estudada neste trabalho.

Com a equação de Schrödinger (3.10), podemos obter a forma geral de uma fase geométrica tipo Aharonov-Bohm para uma partícula com momento de quadrupolo magnético. Como dito anteriormente na discussão sobre fases geométricas para partículas neutras, o termo $\vec{M} \times \vec{E}$ é equivalente ao potencial vetor eletromagnético \vec{A} no sistema dessa partícula. Portanto, podemos obter uma fase geométrica para o momento de quadrupolo magnético M_{ij} de forma análoga ao que foi feito para o elétron, quando o trabalho de Aharonov e Bohm foi discutido. Então vamos reescrever a função de onda da equação (3.10) como

$$\psi = e^{i\phi} \psi_0, \quad (3.11)$$

onde $\phi = \frac{1}{\hbar c^2} \int (\vec{M} \times \vec{E}) \cdot d\vec{r}$ e ψ_0 é a função de onda da partícula neutra com momento de quadrupolo magnético na ausência de campos (quando não há potenciais efetivos). Assim como na seção onde vimos o efeito Aharonov-Bohm, podemos usar a função de onda (3.11), o gradiente dessa função de onda e a equação (3.10) para encontrar a relação

$$\varepsilon \psi_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_0 - \vec{M} \cdot \vec{B} \psi_0. \quad (3.12)$$

Então podemos concluir que a presença do potencial vetor efetivo, que aparece devido à interação do campo com o momento de quadrupolo magnético, resulta no aparecimento de uma fase geométrica na função de onda da partícula neutra. Como vimos no caso do efeito Aharonov-Bohm, quando consideramos a diferença de fases de duas partículas que seguem caminhos diferentes, mas que se conectam na presença do potencial vetor (ou a fase atribuída a uma partícula, quando ela realiza um caminho fechado na presença do potencial vetor), obtemos um fator de fase dado pela integral de caminho fechado desse potencial vetor. Dessa forma, por analogia, vamos definir que a fase geométrica atribuída à partícula neutra com momento quadrupolo magnético que se move na presença de um potencial vetor efetivo será:

$$\phi = \frac{1}{\hbar c^2} \oint (\vec{M} \times \vec{E}) \cdot d\vec{r}. \quad (3.13)$$

Esta integral representa uma fase geométrica do tipo Aharonov-Bohm associada ao momento de quadrupolo magnético. Parte deste trabalho consiste em estudar o efeito de uma fase geométrica deste tipo em sistemas que envolvem o momento de quadrupolo magnético de uma partícula neutra. Da equação (3.13), vemos que a fase geométrica

que pode aparecer em uma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético é consequência da interação do momento de quadrupolo com um campo elétrico. Porém, como vimos na seção 2.4, para que um campo possa gerar uma fase do tipo Aharonov-Bohm num sistema de uma partícula neutra, ele também deve satisfazer a condição de não gerar forças sobre esse sistema. No caso do momento de quadrupolo elétrico, essa condição pode ser obtida a partir da equação (2.34). A condição para um campo elétrico que interage com um momento de quadrupolo magnético pode ser obtida a partir das equações de movimento no sistema.

Neste trabalho em particular, usamos o fator de fase proposto por Chen (CHEN, 1995), que ocorre no caso em que o tensor momento de quadrupolo magnético, definido em (3.3), é dado por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2\mathbf{M} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Nesse caso, se a partícula neutra com momento de quadrupolo magnético interagir com um campo elétrico induzido $\vec{E} = E_0 \ln \frac{r}{r_0} \hat{z}$, produzido por um campo magnético dependente do tempo $\vec{B} = \frac{E_0 t}{r} \hat{\varphi}$, irá aparecer uma fase geométrica no sistema dada pela integral (3.13). Chen também verificou que esta configuração de campos não gera força sobre o sistema da partícula neutra com momento de quadrupolo magnético caracterizado pelo tensor acima. Portanto, todas as fases geométricas analisadas no capítulo 5 serão obtidas a partir da interação descrita neste parágrafo.

Chen também apontou as dificuldades envolvidas em obter uma prova experimental das fases geométricas obtidas por ele: por serem muito pequenas, seriam necessários campos e correntes extremamente fortes para conseguir observá-las. Em um exemplo de um sistema em que a partícula neutra com momento de quadrupolo magnético adquire uma fase geométrica, ele estimou que seria necessária uma corrente da ordem de $I \approx 10^{22} A$ para gerar um campo que produzisse uma fase geométrica significativa num átomo que possua a estrutura de um quadrupolo magnético. Afim de comparação, em um artigo de 2011 (KRONBERG et al., 2011) no qual foi medida a corrente elétrica do jato de matéria relativístico produzido pela galáxia 3C303, observou-se um valor de $I \approx 3 \times 10^{18} A$. Portanto, para detectar essas fases associadas ao momento de quadrupolo magnético, seriam necessários buscar outros meios além da utilização de uma corrente elétrica.

4 Interação do momento de quadrupolo magnético com campos eletromagnéticos externos

No capítulo 3, foi mostrada a equação de Schrödinger que descreve uma partícula neutra, sem spin e que possui um momento de quadrupolo magnético interagindo com campos externos. Neste capítulo, vamos estudar os efeitos dos potenciais tipo-Coulomb e inverso da distância radial ao quadrado, que surgem das interações do momento de quadrupolo magnético com os campos, sobre o sistema descrito no capítulo 3. Os trabalhos apresentados a seguir tem como objetivo obter e analisar os níveis de energia do sistema na presença desses potenciais, em algumas situações diferentes. Então, primeiramente, vamos reescrever a equação de Schrödinger deste sistema, que foi obtida no capítulo 3 (a partir de agora, estaremos usando unidades naturais, ou seja, $\hbar = c = 1$):

$$\varepsilon\psi = \frac{1}{2m} \left[\hat{p} - (\vec{M} \times \vec{E}) \right]^2 \psi - \vec{M} \cdot \vec{B}\psi. \quad (4.1)$$

A equação acima descreve uma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético em movimento interagindo com campos eletromagnéticos. Como foi dito no capítulo 3, devido à semelhança da equação (4.1) com a equação de Schrödinger de uma partícula carregada se movendo em meio a campos eletromagnéticos (2.3), podemos fazer analogias entre a partícula neutra com momento de quadrupolo magnético e a partícula carregada. Devido a isso, ainda no capítulo 3 fizemos as definições (3.9), onde identificamos o termo $(\vec{M} \times \vec{E})$ como potencial vetor efetivo \vec{A}_{eff} e o termo $(\vec{M} \cdot \vec{B})$ como potencial escalar efetivo V_{eff} .

Além das diferentes configurações de campos, também usaremos diferentes tensores de momento de quadrupolo magnético M para obter os resultados descritos abaixo (sempre respeitando a condição de que M deve ser um tensor simétrico e sem traço).

4.1 Análise do potencial tipo-Coulomb

Nesta seção, vamos começar estudando a interação de uma partícula neutra que possui momento de quadrupolo magnético com um campo magnético não uniforme. Veremos que a configuração de campo escolhida, juntamente com a definição do tensor de momento de quadrupolo magnético, irá resultar em um potencial escalar efetivo que é proporcional ao inverso da distância radial. Então usaremos esse potencial para resolver a equação de Schrödinger do sistema, para então obter e analisar seus níveis de energias.

Vamos começar considerando que a partícula neutra com momento de quadrupolo magnético se move num meio onde existe uma densidade de corrente $\vec{J} = -\frac{B_0}{r}\hat{\varphi}$, em que B_0 é uma constante e r é a coordenada radial. Então, usando coordenadas cilíndricas e usando também a lei de Ampère-Maxwell, obtemos que a densidade de corrente \vec{J} produz o seguinte campo magnético:

$$\vec{B} = B_0 \ln \frac{r}{r_0} \hat{z}, \quad (4.2)$$

onde r_0 é uma constante.

Como mencionado anteriormente, nosso objetivo será o de estudar um potencial específico, portanto iremos tomar a liberdade de definir um tensor de momento de quadrupolo magnético M_{ij} que nos possibilite obter este potencial. Devemos, no entanto, manter as condições de que o tensor M_{ij} seja simétrico e sem traço sejam satisfeitas. Portanto, vamos considerar que as componentes não nulas do tensor M_{ij} são dadas por

$$M_{zr} = M_{rz} = M, \quad (4.3)$$

onde M é uma constante positiva. Com a definição acima, conseguimos obter o vetor \vec{M} , definido pela equação (3.6). A interação do momento de quadrupolo magnético (4.3) com o campo magnético dado na equação (4.2) faz aparecer um potencial escalar efetivo na equação (4.1), dado por

$$V_{eff}(r) = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\frac{MB_0}{r}. \quad (4.4)$$

Como foi definido que ambas as constantes M e B_0 são positivas, o potencial efetivo (4.4) é equivalente a um potencial escalar atrativo, que é proporcional ao inverso da distância radial. Neste sistema, não iremos considerar a presença de um campo elétrico, portanto o potencial vetor efetivo \vec{A}_{eff} será zero. Assim, substituindo o potencial escalar efetivo (4.4) na equação de Schrödinger independente do tempo (4.1), encontramos:

$$\varepsilon\psi = -\frac{1}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi - \frac{MB_0}{r} \psi. \quad (4.5)$$

Podemos usar o método de separação de variáveis para encontrar uma forma mais geral para a solução ψ da equação acima. Então, escrevendo $\psi(r, \varphi, z) = Z(z)\Phi(\varphi)f(r)$ e substituindo na equação (4.5), encontramos $Z(z) = \exp(ikz)$ e $\Phi(\varphi) = \exp(il\varphi)$, com $-\infty \leq k \leq \infty$ e $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. O método de separação de variáveis também resulta na seguinte equação radial para $f(r)$:

$$f'' + \frac{1}{r}f' - \frac{l^2}{r^2}f + \frac{2mMB_0}{r}f + \zeta^2f = 0, \quad (4.6)$$

onde definimos $\zeta^2 = 2m\varepsilon - k^2$.

Nosso objetivo é obter soluções de estados ligados para a equação (4.6), portanto iremos considerar apenas valores $\varepsilon \leq 0$ dos níveis de energia. Por isso, vamos redefinir ζ^2 como $\tau^2 = -\zeta^2 \geq 0$, para garantir um termo com energias menores que zero. Assim, a equação (4.6) fica:

$$f'' + \frac{1}{r}f' - \frac{l^2}{r^2}f + \frac{2mMB_0}{r}f - \tau^2f = 0. \quad (4.7)$$

Com o intuito de encontrar uma forma mais conhecida para a equação radial acima, definimos uma mudança de variáveis $x = 2\tau r$. Podemos calcular as derivadas com respeito a nova variável x :

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{f'(r)}{2\tau}; \\ f''(x) = \frac{f''(r)}{4\tau^2}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Substituindo essas derivadas na equação (4.7), obtemos

$$f'' + \frac{1}{x}f' - \frac{l^2}{x^2}f + \frac{\delta}{x}f - \frac{1}{4}f = 0, \quad (4.9)$$

onde $\delta = \frac{mMB_0}{\tau}$.

Para prosseguir, vamos analisar o comportamento assintótico da equação (4.9). Quando $x \rightarrow \infty$, vemos que a equação radial (4.9) se reduz a $f'' \approx \frac{1}{4}f$. Portanto, para satisfazer esta última equação, a exigência de que $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$ significa que, na solução $f(r)$, deve existir um termo proporcional a exponencial " $e^{-\frac{x}{2}}$ ". Por outro lado, quando $x \rightarrow 0$, a equação radial (4.9) se reduz à expressão $f'' \approx \frac{l^2}{x^2}f$. Para satisfazer esta última equação e manter a função $f(x)$ normalizável quando $x \rightarrow 0$, a solução $f(x)$ também deve possuir um termo " $x^{|l|}$ ". Dessa forma, deve ser possível escrever a solução da equação (4.9) como:

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}}x^{|l|}F(x), \quad (4.10)$$

onde $F(x)$ é uma função desconhecida. Substituindo a solução (4.10) na equação (4.9), encontramos a seguinte equação:

$$xF'' + (2|l| + 1 - x)F' + \left(\delta - |l| - \frac{1}{2}\right)F = 0. \quad (4.11)$$

A equação acima é conhecida como equação de Kummer, ou como equação hipergeométrica confluyente (ABRAMOWITZ; STEGUN et al., 1964). Portanto, $F(x) = {}_1F_1(|l| + \frac{1}{2} - \delta, 2|l| + 1, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{b_n n!}$ é a função hipergeométrica confluyente, que para grandes valores de x assume a seguinte forma:

$${}_1F_1(a, b; x) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-b} [1 + O(|x|^{-1})]. \quad (4.12)$$

Como pode ser observado na equação acima, a função ${}_1F_1$ diverge quando $x \rightarrow \infty$. Portanto, para obtermos uma solução normalizável, precisamos impor que ${}_1F_1(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$. No caso da função hipergeométrica confluyente ${}_1F_1(a, b; x)$, isso ocorre quando $a = -n$, ou seja, quando $|l| + \frac{1}{2} - \delta = -n$ (com $n = 0, 1, 2, \dots$). Assim, a função ${}_1F_1(a, b; x)$ se torna um polinômio de grau máximo n . Dessa maneira, essa condição de normalização pode ser usada em conjunto com as definições

$$\begin{cases} \delta = \frac{mMB_0}{\tau}, \\ (-\tau^2) = 2m\varepsilon - k^2. \end{cases}$$

feitas anteriormente, para determinar os níveis de energia do sistema. Essa condição de normalização também pode ser obtida ao utilizar o método de Frobenius (ARFKEN; WEBER, 1999; GRIFFITHS, 2016) na equação (4.11), e depois impor que a série deve ser finita e possui um número máximo de termos $n = \delta - |l| - \frac{1}{2}$. Assim, os níveis de energia ficam

$$\varepsilon_{n,l} = -\frac{mM^2 B_0^2}{2\left(n + |l| + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{k^2}{2m}. \quad (4.13)$$

Portanto, a interação do momento de quadrupolo magnético (4.3) com o campo magnético (4.14) resulta nos níveis de energia discretos (4.13), que são análogos aos níveis de energia do potencial de Coulomb. Isso é devido ao potencial vetor efetivo (4.4), que surge dessa interação e que é um potencial tipo Coulomb. Como a partícula se move em um meio permeado pela densidade de corrente \vec{J} que gera o campo magnético, então o sistema pode ser perturbado pelas interações da partícula com as cargas de \vec{J} , alterando os níveis de energia do sistema. No entanto, como \vec{J} é proporcional ao inverso da distância radial r , para grandes valores de r os efeitos da corrente são desprezíveis e esses níveis de energia ainda são válidos. Essa característica em que a solução é válida quando são

assumidos grandes valores de r também apareceu em outros trabalhos, como o de Chen (CHEN, 1995) (onde é mostrado que fase geométrica aparece quando consideramos grandes contornos) ou o de Tan e Inkson (TAN; INKSON, 1996) (onde um potencial anti-ponto perturba os níveis de Landau, mas seus efeitos são negligenciáveis para grandes valores da distância radial).

4.2 Análise do potencial efetivo tipo-Coulomb na presença de um fio cilíndrico

Nesta seção, consideramos o caso em que a partícula neutra do sistema anterior também está se movendo no interior de um meio que é cilindro condutor longo (de raio $r \rightarrow \infty$ quando comparado com as dimensões da partícula). Este meio possui um raio interno r_0 que define uma cavidade cilíndrica intransponível para a partícula, de forma que ela está limitada a se mover na região $r_0 < r < \infty$. Nesse contexto, estudaremos novamente um potencial efetivo que surge da interação do tensor de momento de quadrupolo magnético com uma determinada configuração de campos. No entanto, veremos dois casos diferentes. Primeiro, será analisado um potencial escalar efetivo proporcional ao inverso da distância radial que surge da interação do momento de quadrupolo com um campo magnético não uniforme, assim como na seção anterior. Depois, será analisado um potencial vetor efetivo, que também é proporcional ao inverso da distância radial, mas que surge da interação do momento de quadrupolo magnético com um campo elétrico não uniforme. Em ambos os casos, a equação de Schrödinger do sistema é usada para obter e analisar o espectro de energias do sistema.

4.2.1 Potencial escalar efetivo devido a um campo magnético

Vamos começar com um sistema bastante semelhante ao da seção anterior. Vamos considerar que a partícula neutra com momento de quadrupolo magnético se move no interior de um cilindro condutor longo, de raio interno r_0 . A partícula não pode atravessar este raio interno, então mais adiante vamos tratá-lo como um potencial de parede infinita. Vamos considerar que este cilindro possui uma densidade de corrente $\vec{J} = -\frac{B_0}{r}\hat{\varphi}$, em que B_0 é uma constante positiva e r é a coordenada radial. Devido à simetria cilíndrica do sistema, usaremos o sistema de coordenadas cilíndricas novamente. Dessa forma, a densidade de correntes dentro do cilindro irá produzir um campo magnético dado por

$$\vec{B} = B_0 \ln \frac{r}{r_0} \hat{z}. \quad (4.14)$$

Este é o mesmo campo considerado na seção anterior, mas com uma origem um pouco diferente. Também consideramos o mesmo tensor momento de quadrupolo magnético da seção anterior, definido na equação (4.3). A interação deste tensor M_{ij} com o campo (4.14) irá resultar no aparecimento de um potencial escalar efetivo na equação de Schrödinger do sistema, dado por

$$V_{eff}(r) = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\frac{MB_0}{r}. \quad (4.15)$$

Este é o mesmo potencial dado na equação (4.4). Novamente, como ambas as constantes M e B_0 são positivas, o potencial efetivo acima é equivalente a um potencial escalar atrativo. Neste sistema também não haverá a presença de um campo elétrico, de forma que $\vec{A}_{eff} = 0$. A equação de Schrödinger independente do tempo fica

$$\varepsilon\psi = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi - \frac{MB_0}{r}\psi. \quad (4.16)$$

Devido à simetria cilíndrica do sistema, podemos escrever a solução da equação (4.16) como $\psi(r, \varphi, z) = e^{ikz}e^{il\varphi}R(r)$, com $-\infty < k < \infty$ e $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ assim como na seção anterior. Substituindo ψ nesta forma na equação (4.16), obtemos a seguinte equação radial:

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{l^2}{r^2}R + \frac{\bar{M}}{r} - \eta^2R = 0, \quad (4.17)$$

onde definimos

$$\begin{cases} -\eta^2 = 2m\varepsilon - k^2, \\ \bar{M} = 2mMB_0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Até agora o sistema parece idêntico ao da seção anterior. No entanto, a estrutura cilíndrica considerada nesta seção irá alterar o comportamento do sistema quando $r \rightarrow 0$. Devido a essa estrutura, o limite assintótico $r \rightarrow 0$ não é relevante para esse sistema, já que a partícula neutra com momento de quadrupolo magnético não pode alcançar a região $0 \leq r \leq r_0$. Então, para prosseguir, vamos fazer as definições $R(r) = \frac{u(r)}{\sqrt{r}}$ e $x = 2\eta r$. Dessa forma, a equação (4.17) se torna

$$u'' + \left(\frac{\delta}{x} - \frac{l^2 - \frac{1}{4}}{x^2} - \frac{1}{4} \right) u = 0, \quad (4.19)$$

onde $\delta = \frac{\bar{M}}{2\eta}$. A equação acima é conhecida como a equação diferencial de Whittaker (ABRAMOWITZ; STEGUN et al., 1964), cujas soluções são chamadas de funções de Whittaker e são dadas por

$$\begin{cases} M_{\delta,l}(x) = e^{-\frac{x}{2}}x^{l+\frac{1}{2}}M(l - \delta + \frac{1}{2}, 1 + 2l; x), \\ W_{\delta,l}(x) = e^{-\frac{x}{2}}x^{l+\frac{1}{2}}U(l - \delta + \frac{1}{2}, 1 + 2l; x). \end{cases} \quad (4.20)$$

Aqui M e U são as funções hipergeométricas confluentes de primeiro e segundo tipo, respectivamente. Portanto, a solução do sistema será dada por uma combinação linear de $M_{\delta,l}(x)$ e de $W_{\delta,l}(x)$:

$$u(x) = C_1M_{\delta,l}(x) + C_2W_{\delta,l}(x). \quad (4.21)$$

A condição de contorno, que aparece devido à cavidade cilíndrica, faz com que só precisemos normalizar a função de onda da partícula quando $r \rightarrow \infty$. Agora, a função $M(a, b; x)$, que aparece no lado direito da primeira das equações (4.20), é a mesma função hipergeométrica confluyente que foi utilizada para obter as soluções do sistema anterior e, como vimos na seção anterior, $M(a, b; x)$ vai para o infinito quando $r \rightarrow \infty$. Portanto, vamos considerar a constante $C_1 = 0$, para manter a função $u(x)$ normalizável. Dessa maneira, a solução fica

$$u(x) = W_{\delta, l}(x) = e^{-\frac{\pi}{2}x} x^{l+\frac{1}{2}} U\left(l - \delta + \frac{1}{2}, 1 + 2l; x\right). \quad (4.22)$$

Como dito anteriormente, o cilindro condutor impede a partícula de alcançar a região $r \leq r_0$. Isso significa que a função de onda do sistema é nula nessa região, e sua parte radial (4.22) deve satisfazer a seguinte condição de contorno quando $x = x_0 = 2\eta r_0$:

$$u(x_0) = 0. \quad (4.23)$$

Para prosseguir, vamos considerar o caso em que a função hipergeométrica confluyente $U(a, b; x_0)$ pode ser escrita como

$$U(a, b; x_0) \cong \cos\left(\sqrt{2bx_0 - 4ax_0} - \frac{b\pi}{2} + a\pi + \frac{\pi}{4}\right). \quad (4.24)$$

Esse caso ocorre quando consideramos que os parâmetros x_0 e b são fixos e que parâmetro a é grande (ABRAMOWITZ; STEGUN et al., 1964). No caso da solução (4.24), temos a condição de contorno (4.23) quando $x = x_0 = 2\eta r_0$, além dos parâmetros a e b , dados por

$$\begin{cases} b = 1 + 2l, \\ a = l - \delta + \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.25)$$

A condição de a ser grande é satisfeita quando consideramos que $\delta = \frac{mMB_0}{\eta} \gg 1$, que significa que o termo de interação entre o momento de quadrupolo magnético (4.3) e o campo magnético (4.14) é elevado (que pode ocorrer num regime de campos fortes, por exemplo). Usando esses parâmetros, encontramos que a solução (4.22) satisfaz

$$u(x_0) \cong e^{-\frac{\pi}{2}x} x^{l+\frac{1}{2}} \cos\left(\sqrt{2bx_0 - 4ax_0} - \frac{b\pi}{2} + a\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 0. \quad (4.26)$$

Usando a equação (4.26) em conjunto com a definição $\delta = \frac{\bar{M}}{2\eta}$ e as definições dadas nas equações (5.7) e (4.37), encontramos a seguinte equação para os níveis de energia do sistema:

$$\varepsilon = \frac{k^2}{2m} - \frac{mM^2B_0^2\pi^2}{2(\sqrt{8mMB_0r_0} - n\pi - \frac{\pi}{4})^2}, \quad (4.27)$$

onde o número quântico radial n , que assume os valores $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, surgiu da condição (4.26).

Portanto, quando a interação descrita no sistema anterior (caracterizada pelo tensor M_{ij} (4.3) e pelo campo magnético (4.14)) ocorre na presença de um cilindro condutor longo por onde passa uma corrente, o espectro de energias (4.13) é alterado para o espectro de energias (4.27). Outra diferença entre os sistemas é que a corrente \vec{J} aparece em regiões diferentes nos dois sistemas, mas ela gera o mesmo campo magnético nas duas situações, que por sua vez gera o mesmo V_{eff} nos dois sistemas. Os níveis de energia (4.27) são obtidos quando consideramos que a função de onda da partícula neutra com momento de quadrupolo magnético é regular quando $x \rightarrow \infty$ e que a partícula não pode penetrar na superfície do cilindro. Dessa forma, o raio interno r_0 do cilindro atua como uma barreira potencial infinita para a partícula, limitando o seu movimento à região $r_0 \leq r < \infty$ (e resultando na condição de contorno $\psi(r_0) = 0$).

Comparando a equação (4.13) com a equação (4.27), vemos que os níveis de energia na presença do cilindro não dependem mais do número quântico do momento angular l e, portanto, são infinitamente degenerados. Outra diferença entre os dois espectros de energias é que, devido à definição de $\eta > 0$, a seguinte condição sobre o número quântico n deve ser satisfeita:

$$n < \frac{\sqrt{8mMB_0r_0}}{\pi} - \frac{1}{4}. \quad (4.28)$$

Portanto, o número quântico n está limitado a valores inteiros na região $0 \leq n < \frac{\sqrt{8mMB_0r_0}}{\pi} - \frac{1}{4}$, que dependem das características iniciais do sistema (m , M , B_0 e r_0).

Finalmente, a densidade de corrente \vec{J} pode perturbar o sistema, assim como foi explicado na seção anterior. Portanto, o espectro de energias (4.27) novamente é válido apenas para grandes valores de r , onde os efeitos da densidade de correntes podem ser desprezados.

4.2.2 Potencial vetor efetivo devido a um campo elétrico

Agora estudaremos o caso em que o cilindro longo da subseção anterior produz um campo elétrico em vez de um campo magnético. Assim como antes, o cilindro longo de raio interno r_0 ainda impede a partícula de alcançar a região $r \leq r_0$. Dessa vez, no entanto, consideramos que a partícula se move num meio que possui uma densidade volumétrica de cargas constante. Além disso, também é considerada a presença de uma densidade linear de cargas λ no eixo \hat{z} , no interior da cavidade cilíndrica. Veremos que essa configuração de

densidades de cargas irá gerar um campo elétrico resultante na direção radial. Esse campo, ao interagir com a partícula neutra com momento de quadrupolo magnético, irá gerar um potencial vetor efetivo na equação de Schrödinger do sistema. Portanto, será analisado o sistema de uma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético interagindo com um campo elétrico radial, na presença de um cilindro longo de raio r_0 . O espectro de energia deste sistema será obtido de forma semelhante ao sistema da seção anterior e depois discutido com o objetivo de obter informações sobre o sistema.

Dessa vez estamos considerando a presença de duas densidades de cargas. Uma densidade volumétrica de cargas ρ , que existe na região $r_0 < r < \infty$, e uma densidade linear de cargas λ , localizada em $r = 0$. Portanto, pela lei de Gauss, essas duas densidades de carga irão gerar a seguinte configuração de campos:

$$\begin{cases} E_0(r) = \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{r}; \\ E_1(r) = \rho \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) \hat{r}. \end{cases} \quad (4.29)$$

O campo resultante será

$$\vec{E}(r) = \rho r \hat{r} + \frac{1}{2r} \left(\frac{\lambda}{\pi} - r_0^2 \rho \right) \hat{r}. \quad (4.30)$$

Queremos encontrar um potencial efetivo proporcional ao inverso da distância radial r , similar ao da seção anterior. Portanto, para isso, vamos trabalhar com o caso em que as duas densidades de cargas satisfazem a relação $\rho = \frac{\lambda}{\pi r_0^2}$. Dessa maneira, o campo elétrico resultante irá se tornar

$$\vec{E}(r) = \rho r \hat{r}. \quad (4.31)$$

A interação do momento de quadrupolo magnético, definido na equação (4.3), com o campo (4.31) resulta em um potencial vetor efetivo dado por

$$\vec{A}_{eff} = \vec{M} \times \vec{E} = M \rho \hat{\varphi}. \quad (4.32)$$

Substituindo este potencial vetor efetivo na equação de Schrödinger (3.10), obtemos

$$2m\varepsilon\psi = -\nabla^2\psi + \frac{2iM\rho}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + M^2\rho^2\psi, \quad (4.33)$$

que é a equação de Schrödinger para este sistema.

Fazendo $R(r) = \frac{u(r)}{\sqrt{r}}$ e $x = 2\eta r$, podemos seguir os mesmos passos da subseção anterior para obter a seguinte equação radial:

$$u'' + \left(\frac{\nu}{x} - \frac{l^2 - \frac{1}{4}}{x^2} - \frac{1}{4} \right) u = 0, \quad (4.34)$$

onde foram feitas as definições

$$\begin{cases} \nu = \frac{M\rho l}{\eta}, \\ \eta = -2m\varepsilon + M^2\rho^2 + k^2. \end{cases} \quad (4.35)$$

A equação (4.34) também é conhecida como equação de Whittaker. O termo $\frac{\nu}{x}$, que aparece devido à interação do momento de quadrupolo magnético (4.3) com o campo (4.31), determina um potencial tipo Coulomb na equação (4.34), que é válido somente para valores $l \neq 0$. Esse potencial será atrativo quando $\nu = |\nu|$. Isso ocorre quando $\rho = |\rho|$ e $l > 0$ ou quando $\rho = -|\rho|$ e $l < 0$. Como queremos um potencial atrativo para investigar os possíveis estados ligados deste sistema, iremos considerar o caso em que $\rho = -|\rho|$ e $l < 0$. Assim, para obter soluções de estados ligados para a equação (4.34), iremos considerar novamente apenas valores $\varepsilon \leq 0$ dos níveis de energia e que $\eta > 0$.

Como a presença do cilindro impede que a partícula chegue na região $r \leq 0$, a condição de contorno $u(x_0) = 0$ também é válida neste sistema. Além disso, considerando novamente o caso em que b e x_0 são fixos e a é grande, podemos escrever a solução da equação (4.34) na forma (4.26), assim como foi feito na seção anterior:

$$u(x_0) \cong e^{-\frac{x}{2}} x^{l+\frac{1}{2}} \cos \left(\sqrt{2bx_0 - 4ax_0} - \frac{b\pi}{2} + a\pi + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad (4.36)$$

onde a e b são definidos como

$$\begin{cases} b = 1 + 2l, \\ a = l - |\nu| + \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.37)$$

Das definições acima, vemos que a grande corresponde a $\nu = \frac{M\rho l}{\eta} \gg 1$, que significa que o termo de interação entre o quadrupolo e o campo é elevado (regime de campos fortes). Com as definições (4.35) e as definições de a e b , podemos encontrar o espectro de energias do sistema:

$$\varepsilon = \frac{M^2\rho^2}{2m} - \frac{(\pi M|\rho l|)^2}{2m(\sqrt{8M|\rho l|r_0} - n\pi - \frac{\pi}{4})^2} + \frac{k^2}{2m}, \quad (4.38)$$

onde o número quântico radial n assume valores inteiros $n = 0, 1, 2, \dots$

Portanto, os níveis de energia (4.38) surgem quando uma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético (4.3), se move na presença de um campo elétrico radial (4.31) e de um cilindro condutor longo localizado no eixo \hat{z} . Assim como na seção anterior,

consideramos que partícula não pode penetrar a superfície do cilindro, de forma que, quando $r = r_0$ (raio do cilindro), a condição de contorno $u(r_0) = 0$ é válida novamente. Dessa forma, como a partícula pode se mover na região $r_0 \leq r < \infty$, para obter a equação (4.38) também foi necessário impor que $u(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.

Diferente do espectro de energias (4.27) da seção anterior, o espectro de energias (4.38) depende não apenas do número quântico radial n , mas também do número quântico do momento angular l . Essa dependência, no entanto, não resulta em estados degenerados, apesar da forma da equação (4.38). Isso porque, para obter esse espectro de energias, consideramos que o número quântico do momento angular l só pode assumir valores negativos, para que o potencial tipo Coulomb estudado aqui fosse atrativo. Além disso, estados ligados neste sistema só são possíveis enquanto $l \neq 0$, pois o termo em ν , que é um potencial tipo Coulomb, é zero quando $l = 0$.

De forma semelhante a seção anterior, a definição de η na equação (4.35) requer que η seja positivo. Isso irá resultar na seguinte condição para o número quântico radial n :

$$n < \frac{\sqrt{8M|\rho l|r_0}}{\pi} - \frac{1}{4}. \quad (4.39)$$

Dessa vez, o limite superior do número quântico n também depende do valor do número quântico l . Portanto, o número quântico n está limitado a valores inteiros na região $0 \leq n < \frac{\sqrt{8M|\rho l|r_0}}{\pi} - \frac{1}{4}$. Devido à condição (4.39), os níveis de energia $\{n, l\}$ acessíveis ao sistema também dependem dos valores das constantes M , ρ e r_0 , associadas ao momento de quadrupolo magnético, ao campo elétrico e ao cilindro longo, respectivamente.

Um sistema semelhante a este foi estudado por K. Bakke e I. C. Fonseca (FONSECA; BAKKE, 2015c). Naquele trabalho, a interação do momento de quadrupolo magnético com o campo elétrico resultou em um potencial tipo Coulomb atrativo análogo ao estudado aqui, que é definido por ν (4.35). No entanto, os resultados obtidos aqui diferem daqueles obtidos por Fonseca e Bakke, que encontraram os seguintes níveis de energia:

$$\varepsilon = \frac{M^2 E_0^2}{2m} - \frac{(ME_0 l)^2}{8m(n + |l| + \frac{1}{2})^2} + \frac{k^2}{2m}. \quad (4.40)$$

Essa diferença com relação a equação (4.38) é devido à presença do condutor cilíndrico de raio interno r_0 , cuja superfície (em $r = r_0$) atua como uma barreira para a partícula neutra com momento de quadrupolo magnético e, por causa disso, temos a condição de contorno $u(x_0) = 0$. Portanto, os resultados obtidos diferem devido ao fato da função de onda passar a ser normalizada na região $x_0 < x < \infty$, e não mais na região $0 < x < \infty$.

4.3 Análise do potencial inverso do quadrado atrativo

Nesta seção, vamos estudar a interação de uma partícula neutra, que possui momento de quadrupolo magnético, com um campo magnético não uniforme gerado por um fio cilíndrico longo. Veremos que o campo magnético gerado por uma corrente no fio, juntamente com o tensor de momento de quadrupolo magnético definido nesta seção, irá resultar em um potencial escalar efetivo que é proporcional ao inverso do quadrado da distância radial. Então usaremos esse potencial para resolver a equação de Schrödinger do sistema, para então obter e analisar seus níveis de energias.

Nos sistemas anteriores consideramos que o tensor momento de quadrupolo magnético era definido por (4.3). No entanto, dessa vez vamos assumir que as componentes não nulas do tensor M_{ij} serão dadas por:

$$M_{r\varphi} = M_{\varphi r} = M, \quad (4.41)$$

onde M é uma constante positiva. A definição acima também satisfaz a condição de que o tensor M_{ij} deve ser simétrico e sem traço.

O sistema estudado nesta seção consiste de uma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético definido por (4.41), que se move numa região onde existe um campo magnético produzido por um fio cilíndrico longo. Este fio cilíndrico possui raio interno r_0 e uma corrente elétrica i_0 uniformemente distribuída em seu interior. Pela lei de Ampère-Maxwell, encontramos que o fio cilíndrico gera um campo magnético dado por

$$\vec{B} = -\frac{I}{r}\hat{\varphi}, \quad (4.42)$$

onde $I = \frac{i_0}{2\pi}$ é uma constante positiva e $\hat{\varphi}$ é um vetor unitário na direção azimutal. A interação do momento de quadrupolo magnético definido por (4.41) com o campo magnético (4.42) gerado pelo fio cilíndrico irá resultar em um potencial escalar efetivo, dado por

$$V_{eff}(r) = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\frac{MI}{r^2}. \quad (4.43)$$

Como M e I são ambos constantes positivas, essa interação resulta em um potencial escalar atrativo que é proporcional ao inverso do quadrado da distância radial. Mais uma vez estamos trabalhando com um sistema que se encontra na ausência de um campo elétrico, de forma que $\vec{A}_{eff} = 0$. Substituindo o potencial efetivo acima na equação de Schrödinger do sistema (3.10), obtemos

$$\varepsilon\psi = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)\psi - \frac{MI}{r^2}\Psi. \quad (4.44)$$

Assim como nas seções anteriores, devido à simetria cilíndrica do sistema, podemos escrever a solução ψ como $\psi(r, \varphi, z) = e^{ikz} e^{il\varphi} u(r)$, com $-\infty < k < \infty$ e $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Substituindo esta solução na equação (4.44), obtemos a equação radial abaixo

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{(l^2 - 2mMI)}{r^2}u + (2m\varepsilon - K^2)u = 0. \quad (4.45)$$

Vamos estudar o caso em que a partícula se move numa superfície, ou seja, vamos considerar $k = 0$ (k está associado ao momento na direção \hat{z}). Além disso, também vamos estudar o caso das ondas- s , que ocorrem quando a partícula não possui momento angular e, portanto, apenas os níveis de energia que possuem $l = 0$ são considerados. Ondas- s são interessantes do ponto de vista experimental pois não possuem degenerescência, resultando numa mais fácil associação dos auto-estados da energia com seus respectivos auto-valores. Com essas duas considerações, chegamos na seguinte equação radial:

$$u'' + \frac{1}{r}u' + \frac{2mMI}{r^2}u + 2m\varepsilon u = 0. \quad (4.46)$$

Novamente, temos o objetivo de encontrar soluções de estados ligados para este sistema. Portanto, vamos considerar $\varepsilon < 0$ e definir o seguinte parâmetro:

$$\varsigma = \sqrt{-2m\varepsilon}. \quad (4.47)$$

Assim, podemos reescrever a equação radial (4.46) como

$$u'' + \frac{1}{r}u' + \frac{2mMI}{r^2}u - \varsigma^2 u = 0. \quad (4.48)$$

Para escrever a equação acima numa forma mais conhecida, vamos realizar a transformação de variáveis

$$\zeta = \varsigma r. \quad (4.49)$$

Dessa forma, a equação radial se torna

$$u'' + \frac{1}{\zeta}u' + \frac{2mMI}{\zeta^2}u - u = 0. \quad (4.50)$$

A equação diferencial de segunda ordem acima é conhecida como a equação diferencial de Bessel (WATSON, 1922; ABRAMOWITZ; STEGUN et al., 1964). Queremos uma solução normalizável, então vamos impor que $u(\zeta) \rightarrow 0$ quando $\zeta \rightarrow \infty$. Nesse caso, como a superfície da cavidade cilíndrica representa uma barreira para a partícula, a solução da equação diferencial de Bessel pode ser escrita em termos da função de Bessel modificada de

terceiro tipo de ordem imaginária (GIL; SEGURA; TEMME, 2002; RIBEIRO; FURTADO; MORAES, 2005; AUDRETSCH; SKARZHINSKY; VORONOV, 2001):

$$u(\zeta) = c_1 K_{i\alpha}(\zeta), \quad (4.51)$$

onde c_1 é uma constante e $\alpha = \sqrt{2mMI}$. Segundo (GIL; SEGURA; TEMME, 2002), enquanto os valores de $\frac{\zeta}{\alpha}$ são moderados, podemos fazer uma expansão em séries da função $K_{i\alpha}(\zeta)$, para lidar com seu comportamento quando $\zeta \rightarrow 0$. Assim teremos

$$K_{i\alpha}(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j f_j, \quad (4.52)$$

onde

$$c_j = \left(\frac{\zeta^2}{4}\right)^j \frac{1}{j!} \quad (4.53)$$

e

$$f_j = \frac{\pi}{2 \sinh(\alpha\pi)} \left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha}}{\Gamma(k+1+\alpha)} \right]. \quad (4.54)$$

O potencial inverso do quadrado atrativo é um potencial que apresenta problemas quando $r \rightarrow 0$. Este potencial foi investigado nos trabalhos (COON; HOLSTEIN, 2002; ESSIN; GRIFFITHS, 2006; GUPTA; RAJEEV, 1993; CAMBLONG et al., 2000), onde foi explicado que ele gera infinitos níveis de energia a medida que a partícula se aproxima de $r = 0$, de forma a liberar energia indefinidamente enquanto "cai" em direção a origem do sistema de coordenadas. Uma maneira de regularizar este potencial é considerar uma barreira potencial próxima a $r = 0$, para impedir o sistema estudado de atingir a origem. No caso do sistema estudado nesta seção, a superfície do fio cilíndrico irá atuar como essa barreira, regularizando o potencial $\frac{1}{r^2}$. Dessa forma a partícula não penetra na região $r \leq r_0$, onde r_0 é o raio interno do fio cilíndrico. Portanto, quando $r = r_0$ temos que $\zeta_0 = \varsigma r_0$ e também temos a seguinte condição de contorno para a parte radial da função de onda:

$$u(\zeta_0) = c_1 K_{i\sqrt{2mMI}}(\zeta_0) = 0. \quad (4.55)$$

Afim de nos aproximarmos mais do potencial $\frac{1}{r^2}$ sem a presença dessa barreira, também podemos tomar $\zeta_0 = \varsigma r_0 \rightarrow 0$ na equação (4.51). Como estamos considerando que o raio do fio cilíndrico é muito pequeno, também podemos assumir que $\zeta_0 = \varsigma r_0 \ll 1$. Devido à forma dos coeficientes (4.53), na expansão em séries da função $K_{i\alpha}(\zeta)$ (4.52), temos que, quando tomamos $\zeta \ll 1$, o único termo apreciável da expansão será o termo $j = 0$. Nesse caso temos que (GIL; SEGURA; TEMME, 2002)

$$c_0 = 1 \quad (4.56)$$

e

$$f_0 = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha \sinh(\pi\alpha)}} \times \sin\left(\alpha \ln\left(\frac{\zeta_n}{2}\right) + \delta\right). \quad (4.57)$$

Portanto, ao assumir que o raio do fio cilíndrico é muito pequeno, podemos escrever a função $K_{i\sqrt{2mMI}}(\zeta_0)$ como:

$$K_{i\sqrt{2mMI}}(\zeta_n) \approx \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{2mMI} \sinh(\pi\sqrt{2mMI})}} \times \sin\left(\sqrt{2mMI} \ln\left(\frac{\zeta_n}{2}\right) + \delta\right), \quad (4.58)$$

onde δ é uma constante que está relacionada com o termo $\sqrt{2mMI}$, que por sua vez está relacionado com o quão "forte" é o potencial $\frac{1}{r^2}$ com o qual estamos trabalhando. Portanto, substituindo a equação acima na condição de contorno (4.55), obtemos

$$\zeta_0 = \frac{2}{e^{\frac{\delta}{\sqrt{2mMI}}}} e^{\frac{\nu\pi}{\sqrt{2mMI}}}, \quad (4.59)$$

onde $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. No entanto, para satisfazer a condição $\zeta_0 = \varsigma r_0 \ll 1$, devemos exigir que o parâmetro ν assuma apenas valores negativos, portanto $\nu = -1, -2, -3, \dots$. Dessa forma, usando a definição da variável ζ na equação (4.49) e a definição do parâmetro ς na equação (4.47), a equação (4.59) resulta no seguinte espectro de energias para o sistema:

$$\varepsilon_n = -\frac{2}{mR_0^2 e^{\frac{2\delta}{\sqrt{2mMI}}}} e^{-\frac{2n\pi}{\sqrt{2mMI}}}, \quad (4.60)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$ é o número quântico radial.

Portanto, os níveis de energia (4.60) surgem devido à interação do momento de quadrupolo magnético (4.41) da partícula neutra com um campo magnético azimutal (4.42) gerado por um fio cilíndrico longo. Para obter esses níveis de energias, consideramos que a função de onda radial $u(r)$ é normalizável quando $r \rightarrow \infty$ e que ela também vale zero na superfície do fio (em $r = r_0$). Como foi comentado anteriormente, o potencial $\frac{1}{r^2}$ apresenta uma anomalia quando $r \rightarrow 0$. Isso pode ser verificado pela dependência da equação (4.60) em r_0 , que mostra que $\varepsilon_n \rightarrow -\infty$ quando consideramos que o raio do fio é muito pequeno ($r_0 \rightarrow 0$). Portanto, nesse caso não é possível encontrar um estado fundamental para o sistema e ocorre uma "queda da partícula para o centro" (LANDAU; LIFSHITZ, 2013), na qual a partícula passa para níveis de energia cada vez menores, liberando energia indefinidamente (que não é aceitável fisicamente). Isso confirma que o

raio interno r_0 passa a ser responsável pela regularização dos níveis de energia do sistema, no caso de um potencial $\frac{1}{r^2}$.

Além disso, os níveis de energia (4.60) também decrescem exponencialmente com o número quântico radial n . Portanto, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Os níveis de energia também ficam cada vez mais próximos a medida que n aumenta, resultando num 'acúmulo' de níveis de energia próximo ao valor $\varepsilon_n = 0$. Portanto, os autovalores da energia para ondas- s neste sistema estão todos localizados entre o estado fundamental do sistema, que é definido por $n = 1$, e o valor $\varepsilon_n = 0$, que ocorre quando $n \rightarrow \infty$. Esses valores são:

$$-\frac{2}{mR_0^2 e^{\frac{2\delta}{\sqrt{2mMI}}}} e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{2mMI}}} \leq \varepsilon_n \leq 0. \quad (4.61)$$

Para o caso em que o número quântico do momento angular l assuma valores diferentes de zero, este espectro de energias ainda pode ser obtido se considerarmos $2mMI > l^2$. Nesse caso podemos definir, na equação (4.67), o seguinte parâmetro:

$$\alpha^2 = 2mMI - l^2. \quad (4.62)$$

Usando a definição acima e considerando $p_z = 0$ novamente, a equação radial (4.67) passa a ser

$$u'' - \frac{1}{r}u' + \frac{\alpha}{r^2}u + \zeta u = 0. \quad (4.63)$$

O mesmo desenvolvimento da equação (4.46) até a equação (4.59) pode ser feito para a equação acima. Dessa forma, iremos obter:

$$\varepsilon_n = -\frac{2}{mR_0^2 e^{\frac{2\delta}{\alpha}}} e^{-\frac{2n\pi}{\alpha}}. \quad (4.64)$$

O espectro (4.60) é um caso particular da equação acima. No entanto, esses níveis de energia também obedecem a expressão (4.61), que determina os valores máximo e mínimo que a energia pode assumir. Esses estados ligados não podem ser obtidos se tivermos $l^2 > 2mMI$ ou se a direção do campo magnético (4.42) for invertida, pois nesse caso o potencial $-\frac{(l^2 - 2mMI)}{r^2}$ na equação (4.67), que é responsável pelo aparecimento destes níveis de energia, é um potencial espalhador. Este caso do potencial espalhador será estudado na próxima seção.

4.4 Análise do potencial inverso do quadrado repulsivo

Nesta seção, será estudado um sistema em que a partícula da seção anterior também encontra-se confinada em uma região entre duas superfícies cilíndricas, e além disso, também encontra-se sob os efeitos de um potencial inverso do quadrado repulsivo. Este potencial repulsivo irá surgir da interação do momento de quadrupolo magnético da partícula com o campo gerado pelo fio. Na seção anterior, esta interação resultou em um potencial inverso do quadrado atrativo. Para que o potencial tipo Coulomb que aparece na equação (4.46) seja repulsivo, é possível tanto considerar valores do número quântico l que satisfaçam $2mMI < l^2$, quanto inverter a direção da corrente no cilindro de $-\hat{z}$ para \hat{z} . Em ambos os casos a soma $l^2 - 2mMI$ (que depende da interação do momento de quadrupolo com o campo) será um número menor que zero e o potencial (4.43) passará a ser repulsivo. Nesta seção será considerado que a corrente muda de sentido. Também serão considerados valores positivos do espectro de energias ($\varepsilon > 0$). Mais adiante também veremos o caso em que os raios dos dois cilindros tendem ao mesmo valor, de forma que a partícula fica presa numa superfície cilíndrica.

Mudando o sentido da corrente, de forma que agora $I = -\frac{i_0}{2\pi}$, obtemos o campo magnético

$$\vec{B} = +\frac{I}{r}\hat{\varphi}, \quad (4.65)$$

Nesse caso o potencial escalar efetivo, resultante da interação do tensor M_{ij} (4.41) com o campo (4.65), será dado por

$$V_{eff}(r) = -\vec{M} \cdot \vec{B} = +\frac{MI}{r^2}. \quad (4.66)$$

Dessa vez a interação do momento de quadrupolo magnético com o campo magnético resultou em um potencial escalar repulsivo. Assim como na seção anterior, não há campo elétrico presente neste sistema, portanto $\vec{A}_{eff} = 0$. Considerando agora $p_z = 0$ (não há movimento na direção \hat{z}), temos a equação radial

$$u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{(l^2 + 2mMI)}{r^2}u + 2m\varepsilon u = 0. \quad (4.67)$$

Assumindo que $\varepsilon > 0$ e definindo

$$\begin{cases} \beta^2 = l^2 + 2mMI, \\ \eta^2 = 2m\varepsilon. \end{cases} \quad (4.68)$$

Então a equação radial fica:

$$u'' + \frac{u'}{r} - \frac{\beta^2}{r^2}u + \eta^2 u = 0. \quad (4.69)$$

Essa é, novamente, a equação diferencial de Bessel, mas dessa vez o termo proporcional a $\frac{1}{r^2}$ aparece devido a presença de um potencial repulsivo. A solução geral da equação diferencial de Bessel é dada por:

$$u(r) = a_1 J_{|\beta|}(\eta r) + a_2 N_{|\beta|}(\eta r), \quad (4.70)$$

onde a_1 e a_2 são constantes, $J_{|\beta|}(\eta r)$ é a função de Bessel de primeiro tipo e $N_{|\beta|}(\eta r)$ é a função de Neumann (ARFKEN; WEBER, 1999; ABRAMOWITZ; STEGUN et al., 1964).

Neste caso, também será considerado que o sistema está confinado entre duas superfícies cilíndricas de raios R_0 e R_1 . Portanto, sua função de onda deve ser zero nas superfícies desses cilindros, resultando nas seguintes condições de contorno:

$$\begin{cases} u(R_0) = 0; \\ u(R_1) = 0. \end{cases} \quad (4.71)$$

Usando a solução geral da equação de Bessel, obtém-se que:

$$J_{|\beta|}(\eta R_0)N_{|\beta|}(\eta R_1) - J_{|\beta|}(\eta R_1)N_{|\beta|}(\eta R_0) = 0. \quad (4.72)$$

Considerando o caso particular em que $\eta R_0 \gg 1$ e $\eta R_1 \gg 1$, é possível usar a expansão assintótica de Hankel para $J_{|\beta|}(\eta r)$ e $N_{|\beta|}(\eta r)$, com um β fixo (ABRAMOWITZ; STEGUN et al., 1964; FURTADO; BEZERRA; MORAES, 2000):

$$\begin{cases} J_{|\beta|}(\eta r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \eta r}} \left[\cos \left(\eta r - \frac{\beta \pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{4\beta^2 - 1}{8\eta r} \sin \left(\eta r - \frac{\beta \pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]; \\ N_{|\beta|}(\eta r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \eta r}} \left[\sin \left(\eta r - \frac{\beta \pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{4\beta^2 - 1}{8\eta r} \cos \left(\eta r - \frac{\beta \pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \end{cases} \quad (4.73)$$

Usando essas duas formas assintóticas na eq. (4.72), obtém-se:

$$\eta^2 \approx \frac{\bar{n}^2 \pi^2}{(R_1 - R_0)} + \frac{4\beta^2 - 1}{4R_0 R_1}, \quad (4.74)$$

onde $\bar{n} = 0, 1, 2, \dots$ é o número quântico de modos radiais. Dada a definição de η , os níveis de energia do sistemas podem ser obtidos:

$$\varepsilon_{\bar{n}, l, k} \approx \frac{\bar{n}^2 \pi^2}{2m(R_1 - R_0)} + \frac{4\beta^2 - 1}{8mR_0 R_1}. \quad (4.75)$$

A equação acima corresponde aos níveis de energia de uma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético, confinada em uma região que fica entre duas superfícies

cilíndricas e sob a influência de um potencial repulsivo proporcional ao inverso do quadrado da distância radial. Este potencial surge da interação do momento de quadrupolo magnético (4.41) com o campo magnético azimutal (4.42), mas considerando que o número quântico l assume valores $l^2 > 2mMI$. A influência deste potencial sobre os níveis de energia do sistema está contida no parâmetro β .

Podemos investigar também o comportamento da partícula se ela estiver confinada em uma superfície cilíndrica. Como a partícula está localizada entre duas superfícies cilíndricas, essa situação pode ser obtida quando consideramos que $R_1 \rightarrow R_0$. No entanto, pela equação (4.75), tomar esse limite iria resultar em $\varepsilon_{n,l} \rightarrow \infty$. Para evitar esse comportamento e obtermos um espectro de energias finito, podemos introduzir um potencial escalar atrativo na região entre as duas superfícies cilíndricas. Esse método para renormalizar os níveis de energias em uma superfície cilíndrica também foi usado no estudo do análogo gravitacional do efeito Aharonov-Bohm (FROLOV; SKARZHINSKY; JOHN, 1987), no estudo do efeito Aharonov-Casher para uma partícula neutra (BAKKE; FURTADO, 2011), no estudo de uma partícula escalar quântica inserida no espaço tempo gerado por uma corda cósmica (FURTADO; BEZERRA; MORAES, 2000; BEZERRA; SANTOS, 1992) e no estudo do comportamento de uma partícula quântica em um meio que possui um defeito topológico do tipo deslocação espiral (SILVA; BAKKE, 2020). O potencial atrativo é dado por:

$$V_{\bar{n}} = -\frac{\bar{n}^2 \pi^2}{2m(R_1 - R_0)}. \quad (4.76)$$

Este potencial escalar atrativo deve ser introduzido na região entre as duas superfícies cilíndricas. Dessa forma, ao refazer os cálculos, os níveis de energia não mais apresentarão o comportamento divergente evidenciado na equação (4.75) quando $r_1 \rightarrow r_0$. Nesse caso os novos níveis de energia serão

$$\varepsilon_{l,k} \approx \frac{\beta^2}{2mR_0^2} + \frac{1}{8mR_0^2}. \quad (4.77)$$

Como restringimos o movimento da partícula na direção \hat{z} ao considerar $k = 0$, a equação acima corresponde aos níveis de energia do sistema estudado nesta seção quando a partícula se encontra confinada a um anel de raio R_0 . A partícula também está sob a influência de um potencial repulsivo proporcional ao inverso do quadrado da distância radial, que surge da interação do momento de quadrupolo magnético da partícula com o campo magnético (4.65), e sua influência é verificada pela presença do parâmetro β . O último termo da equação (4.77) corresponde ao termo de Costa (COSTA, 1981), que aparece quando lidamos com uma partícula confinada a uma superfície bidimensional, em um espaço tridimensional. Como comentado anteriormente, o potencial escalar repulsivo também pode aparecer quando consideramos o campo magnético (4.42), contanto que

$l^2 > 2mMI$. Nesse caso basta substituir a definição de β em (4.68) por $\beta = l^2 - 2mMI$ e repetir o procedimento para chegar em um resultado análogo à equação (4.77).

5 Análogo do efeito Aharonov-Bohm para estados ligados

O objetivo neste capítulo será obter os efeitos quânticos estudados no capítulo 2 para alguns dos sistemas apresentados no capítulo anterior. Portanto, será mostrado em quais situações é possível obter efeitos análogos ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados (PESHKIN, 1989), introduzido no capítulo 2. Veremos que, para alguns dos sistemas estudados no capítulo anterior, essa fase geométrica análoga ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados só pode ser obtida quando consideramos uma rotação no sistema. Portanto, na segunda metade deste capítulo, também estudaremos os efeitos de rotação sobre os sistemas apresentados. Além disso, também serão apresentadas as correntes persistentes que podem ser associadas aos sistemas considerados, que aparecem devido à presença da fase geométrica que será apresentada a seguir.

5.1 Efeito Aharonov-Bohm na análise do potencial tipo-Coulomb

Nesta seção, veremos como obter uma fase geométrica análoga à fase do efeito Aharonov-Bohm para o primeiro sistema apresentado neste trabalho, na seção 4.1. Veremos que esta fase geométrica pode ser obtida ao introduzir um campo magnético dependente do tempo no sistema. Para isso, também consideraremos um tensor do momento do quadrupolo magnético um pouco diferente daquele considerado na seção 4.1, mas mantendo a condição de que o tensor $M_{i,j}$ deve ser simétrico e sem traço. Veremos que os níveis de energia do sistema irão adquirir um fator de fase no número quântico l por causa dessas duas modificações, e também que esse fator de fase é análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados.

Dessa forma, primeiro vamos definir o novo tensor do momento de quadrupolo magnético M_{ij} como:

$$\begin{cases} M_{zr} = M_{rz} = M; \\ M_{rr} = M_{\varphi\varphi} = M; \\ M_{zz} = -2M. \end{cases} \quad (5.1)$$

onde M é novamente uma constante positiva. Além disso, o tensor definido por M_{ij} também é simétrico e sem traço. Este novo tensor não modifica o sistema da seção 4.1, pois a interação dele com o campo magnético (4.2) não gera termos adicionais na equação de Schrödinger do sistema, apesar das novas componentes adicionadas na definição (5.1). Ou seja, a interação do momento de quadrupolo magnético (5.1) com o campo (4.2) resulta no mesmo potencial escalar efetivo (4.4), que foi estudado na seção 4.1. No entanto, para modificar o sistema e obter a fase geométrica, iremos adicionar um campo magnético dependente do tempo ao sistema.

Portanto, o novo sistema será constituído por uma partícula neutra que possui um momento de quadrupolo magnético definido por (5.1), se movendo em um meio que possui uma densidade de corrente elétrica $\vec{J} = -\frac{E_0}{r}\hat{\varphi}$ (que produz o campo (4.2)). Além disso, dessa vez a partícula também se encontra na presença de um campo magnético que varia com o tempo, que está associado com a fase geométrica proposta por Chen e que é definido por

$$\vec{B} = \frac{E_0 t}{r}\hat{\varphi}, \quad (5.2)$$

onde E_0 é uma constante positiva. Este novo campo magnético não interage com o momento de quadrupolo magnético definido por (5.1) e, portanto, não gera um potencial escalar efetivo $V_{eff}(t)\vec{M} \cdot \vec{B}(t)$ na equação de Schrödinger do sistema. No entanto, de acordo com

a lei de Faraday, o campo magnético (5.2) irá induzir um campo elétrico paralelo ao campo magnético da equação (4.2), dado por

$$\vec{E} = E_0 \ln \frac{r}{r_0} \hat{z}. \quad (5.3)$$

Apesar do campo magnético dependente do tempo (5.2) não interagir com o momento de quadrupolo magnético definido por (5.1), o campo elétrico (5.3) irá interagir. Esta interação é dada pelo termo $\vec{A}_{eff} = \vec{M} \times \vec{E}$, que é análogo ao potencial vetor \vec{A} do eletromagnetismo. Como foi comentado no capítulo 3, essa analogia pode ser feita quando comparamos a equação de Schrödinger de uma partícula carregada interagindo com campos eletromagnéticos (2.3), com a equação de Schrödinger de uma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético que também interage com campos eletromagnéticos (4.1). Como vimos no capítulo 3, esse potencial vetor efetivo \vec{A}_{eff} irá induzir uma fase geométrica no sistema da partícula neutra com momento de quadrupolo magnético, dada por

$$\phi = \oint \vec{A}_{eff} \cdot d\vec{r} = \oint (\vec{M} \times \vec{E}) \cdot d\vec{r} = -2\pi M E_0. \quad (5.4)$$

Assim, podemos reescrever o potencial vetor \vec{A}_{eff} que aparece na equação (4.1) como:

$$\vec{A}_{eff} = \vec{M} \times \vec{E} = \frac{\phi}{2\pi r} \hat{\phi}. \quad (5.5)$$

Substituindo o potencial vetor efetivo (5.5) na equação (4.1), obtemos:

$$\varepsilon\psi = -\frac{1}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi + \frac{i}{m} \frac{\phi}{2\pi r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\phi}{2\pi r} \right)^2 \psi - \frac{M B_0}{r} \psi \quad (5.6)$$

A equação acima pode ser simplificada se definirmos:

$$\begin{cases} \theta = l - \frac{\phi}{2\pi}; \\ \zeta^2 = -\tau^2 = 2m\varepsilon - k^2. \end{cases} \quad (5.7)$$

Assim como na seção 4.1, iremos considerar valores negativos da energia (de forma que $\tau^2 > 0$) com o objetivo de obter soluções de estados ligados para este sistema. Além disso, devido à simetria cilíndrica do sistema, podemos escrever a solução como $\psi(r, \varphi, z) = Z(z)\Phi(\varphi)f(r)$ e usar novamente o método de separação de variáveis para obter uma equação radial a partir da equação (5.6). Dessa forma a equação (5.6) pode ser escrita como:

$$f'' + \frac{1}{r}f' - \frac{\theta^2}{r^2}f + \frac{2mMB_0}{r}f - \tau^2f = 0. \quad (5.8)$$

A equação acima é quase idêntica à equação (4.7), mas com o número quântico l substituído por θ . Portanto, podemos obter os níveis de energia deste sistema seguindo os mesmos passos da equação (4.7) até a equação (4.13). Com a adição do campo (5.2) e a nova definição do tensor M_{ij} na equação (5.1), o espectro de energias do sistema da seção 4.1 passa a ser

$$\varepsilon_{n,l} = -\frac{mM^2B_0^2}{2\left(n + \left|l - \frac{\phi}{2\pi}\right| + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{k^2}{2m}. \quad (5.9)$$

O efeito da fase geométrica (5.4) é o de modificar os níveis de energia do sistema através da separação dos estados que antes tinham a mesma energia, alterando a dupla degenerescência observada no sistema da seção 4.1. No entanto, o espectro de energias acima ainda pode apresentar estados degenerados numa estrutura diferente daquela do sistema da seção 4.1, dependendo do valor da fase geométrica ϕ . Por exemplo, no caso em que $\frac{\phi}{2\pi} = 1$, os estados $l = 0$ e $l = 2$ tem a mesma energia. Portanto, a degenerescência dos níveis de energia do sistema é 'deslocada' de acordo com o valor da fase $\frac{\phi}{2\pi}$.

Essa dependência dos níveis de energia na fase geométrica ϕ é análoga àquela encontrada no efeito Aharonov-Bohm para estados ligados, que foi explicado no capítulo 2. Essa fase surge da interação do momento de quadrupolo magnético da partícula neutra (5.1) com o campo elétrico axial (5.3). Assim como nos sistemas discutidos no capítulo 4, esses níveis de energias são válidos para grandes valores da distância radial r , onde a densidade de corrente \vec{J} pode ser desprezada e não perturba o sistema.

Também podemos observar que os níveis de energia são funções periódicas da fase ϕ com período $\phi_0 = 2\pi$, de forma que $\varepsilon_{n,l}(\phi \pm 2\pi) = \varepsilon_{n,l \pm 1}(\phi)$. Como o espectro de energias (5.9) agora depende de uma fase geométrica quântica ϕ , podemos associar essa dependência ao aparecimento de correntes persistentes no sistema, conforme foi explicado no capítulo 2 e obtido em outros trabalhos (DANTAS; FURTADO; NETTO, 2015; BYERS; YANG, 1961). Portanto, usando a relação de Byers-Yang, obtemos a seguinte expressão para a corrente persistente:

$$I_{n,l} = -\sum_{n,l} \frac{\partial \varepsilon_{n,l}}{\partial \Phi} = \sum_{n,l > \frac{\phi}{2\pi}} \left(\frac{mM^2B_0^2}{2\pi\left(n + \left|\theta - \frac{1}{2}\right|\right)^2} \right) - \sum_{n,l < \frac{\phi}{2\pi}} \left(\frac{mM^2B_0^2}{2\pi\left(n + \left|\theta - \frac{1}{2}\right|\right)^2} \right). \quad (5.10)$$

Essa expressão é válida para um sistema cujas partículas possuam um espectro de energias dado por (5.9).

5.2 Efeito Aharonov-Bohm na análise do potencial tipo-Coulomb com um oscilador harmônico

Nesta seção, será estudada a interação do sistema da seção anterior com um oscilador harmônico bidimensional. Veremos quais efeitos a fase geométrica ϕ tem sobre as frequências e os níveis de energia do sistema do oscilador harmônico. Portanto, usaremos os campos magnético e elétrico definidos nas equações (4.2) e (5.3), respectivamente. Além disso, também usaremos a definição do tensor de momento de quadrupolo magnético dada em (5.1). Como vimos anteriormente, se um sistema definido pela equação (4.1) tiver essas características, o resultado será a equação (5.6). Como queremos estudar a interação deste sistema com um oscilador harmônico bidimensional, basta adicionar na equação (5.6) um termo devido ao potencial $V(r) = \frac{1}{2}m\omega r^2$. Assim, a equação de Schrödinger independente do tempo desse sistema será:

$$\varepsilon\psi = -\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\psi + \frac{i}{m}\frac{\phi}{2\pi r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\phi}{2\pi r}\right)^2\psi - \frac{MB_0}{r}\psi + \frac{1}{2}m\omega r^2\psi. \quad (5.11)$$

Para simplificar a equação (5.11), vamos usar as definições (5.7) e o método de separação de variáveis novamente. Além disso, também iremos considerar novamente que as energias são negativas com o objetivo de obter soluções de estados ligados para o sistema. Dessa vez a equação radial será:

$$f'' + \frac{1}{r}f' - \frac{\left(l - \frac{\phi}{2\pi}\right)^2}{r^2}f + \frac{2mMB_0}{r}f - m^2\omega^2 r^2 f + \zeta^2 f = 0. \quad (5.12)$$

Agora vamos executar a mudança de variáveis $y = \sqrt{m\omega}r$. Então, calculando $f''(y)$ e $f'(y)$, a equação radial acima fica:

$$f'' + \frac{1}{y}f' - \frac{\left(l - \frac{\phi}{2\pi}\right)^2}{y^2}f + \frac{\alpha}{y}f - y^2 f + \frac{\zeta^2}{m\omega}f = 0, \quad (5.13)$$

onde definimos o parâmetro α como

$$\alpha = \sqrt{\frac{m}{\omega}}MB_0. \quad (5.14)$$

Vamos fazer a análise assintótica da equação (5.13). Se exigirmos que $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$ e quando $x \rightarrow 0$, então a solução para a equação (5.13) deve poder ser escrita como:

$$f(x) = e^{-\frac{y}{2}}y^{\left|l - \frac{\phi}{2\pi}\right|}H(y), \quad (5.15)$$

onde $H(y)$ é uma função desconhecida. Substituindo a solução (5.15) na equação (5.13), obtemos

$$H'' + \left(\frac{2|l - \frac{\phi}{2\pi}| + 1}{y} - 2y \right) H' + \left(\nu + \frac{\alpha}{y} \right) H = 0, \quad (5.16)$$

onde $\nu = \frac{\zeta^2}{m\omega} - 2 - 2|l - \frac{\phi}{2\pi}|$. Portanto $H(2|l - \frac{\phi}{2\pi}|, 0, \frac{\zeta^2}{m\omega}, 2\alpha, -y)$ é a função biconfluyente de Heun (ARSCOTT, 1995).

Para prosseguir, vamos procurar soluções polinomiais para a equação (5.16). Então usaremos o método de Frobenius (ARFKEN; WEBER, 1999; GRIFFITHS, 2016) para encontrar essas soluções. Portanto, vamos escrever a solução da equação (5.16) como uma expansão de potências em torno da origem $H(y) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j y^j$. Substituindo essa expansão na equação (5.16) obtemos a seguinte relação:

$$a_1 = -\sqrt{\frac{m}{\omega}} \frac{MB_0}{\left(2|l - \frac{\phi}{2\pi}| + 1\right)} a_0, \quad (5.17)$$

e além disso, também obtemos a relação de recorrência

$$a_{j+2} = -\frac{\alpha}{(j+2)\left(j+2+2|l - \frac{\phi}{2\pi}|\right)} a_{j+1} - \frac{(\nu - 2j)}{(j+2)\left(j+2+2|l - \frac{\phi}{2\pi}|\right)} a_j. \quad (5.18)$$

A partir da relação de recorrência acima, podemos obter que a solução será um polinômio de grau n quando as duas condições abaixo são satisfeitas:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0; \\ \nu = 2n. \end{cases} \quad (5.19)$$

Nas definições acima, n é o número quântico associado aos modos radiais e assume os valores $n = 1, 2, 3, \dots$. Vamos, inicialmente, considerar que a solução $H(y)$ é um polinômio de primeiro grau ($n = 1$) e obter uma solução de estado ligado para este caso. Nesse caso, a primeira condição em (5.19) implica que $a_{n+1} = a_2 = 0$. Usando esta informação em conjunto com as equações (5.17) e (5.18), obtemos a relação

$$\frac{(\nu - 2j)}{(j+2)\left(j+2+2|l - \frac{\phi}{2\pi}|\right)} a_0 = -\frac{\alpha}{(j+2)\left(j+2+2|l - \frac{\phi}{2\pi}|\right)} \left(-\frac{MB_0}{\sqrt{m\omega}\left(2|l - \frac{\phi}{2\pi}| + 1\right)} a_0 \right), \quad (5.20)$$

que pode ser resolvida para encontrar a seguinte relação para a frequência $\omega_{1,l}$:

$$\omega_{1,l} = \frac{mM^2B_0^2}{2\left(2\left|l - \frac{\phi}{2\pi}\right| + 1\right)}. \quad (5.21)$$

A equação acima determina os valores permitidos para a frequência angular do oscilador harmônico bidimensional, que por sua vez possibilitam a obtenção de um polinômio de primeiro grau para a solução $H(y)$. Os índices (n, l) na equação (5.21) indicam que cada valor do número quântico radial n determina um conjunto diferente de valores permitidos para a frequência angular. Portanto, nem todos os valores da frequência angular são permitidos para um polinômio de primeiro grau, apenas aqueles determinados pela equação (5.21).

A segunda condição em (5.19) pode ser usada em conjunto com a definição $\nu = \frac{\zeta^2}{m\omega} - 2 - 2\left|l - \frac{\phi}{2\pi}\right|$ e a definição de ζ em (5.7), para determinar os níveis de energia do sistema. Para o caso em que $n = 1$ temos

$$\varepsilon_{1,l,k} = \omega_{1,l} \left(\left|l - \frac{\phi}{2\pi}\right| + 2 \right) + \frac{k^2}{2m}. \quad (5.22)$$

Usando a relação para a frequência na equação (5.21), obtemos

$$\varepsilon_{1,l,k} = \frac{mM^2B_0^2}{2\left(2\left|l - \frac{\phi}{2\pi}\right| + 1\right)} \left(\left|l - \frac{\phi}{2\pi}\right| + 2 \right) + \frac{k^2}{2m}. \quad (5.23)$$

Assim, quando introduzimos um potencial do oscilador harmônico no sistema estudado na seção anterior, os níveis de energia do sistema são determinados a partir da relação de recorrência (5.20). O espectro de energias irá obedecer uma relação diferente para cada valor de n , que representa o grau da solução polinomial para a função $H(y)$. No caso em que a função $H(y)$ é um polinômio de primeiro grau, então $n = 1$ e os níveis de energia (5.23) são obtidos.

Assim como na seção anterior, o efeito da fase geométrica ϕ (5.4) é o de modificar a estrutura de estados degenerados do sistema, de acordo com o valor de $\frac{\phi}{2\pi}$. Além disso, assim como antes, esses níveis de energias são válidos para grandes valores da distância radial r , onde a densidade de corrente \vec{J} pode ser desprezada.

Além disso, os níveis de energias também possuem a mesma periodicidade na fase geométrica ϕ que aparece na seção anterior. Também podemos associar a presença dessa fase a uma corrente persistente no sistema, que será:

$$I_{1,l} = - \sum_l \frac{\partial \varepsilon_{1,l}}{\partial \phi} = \sum_{l > \frac{\phi}{2\pi}} \left(\frac{3mM^2 B_0^2 (|l - \frac{\phi}{2\pi}| + 1)}{8\pi (|l - \frac{\phi}{2\pi}| + \frac{1}{2})^2} \right) - \sum_{l < \frac{\phi}{2\pi}} \left(\frac{3mM^2 B_0^2 (|l - \frac{\phi}{2\pi}| + 1)}{8\pi (|l - \frac{\phi}{2\pi}| + \frac{1}{2})^2} \right). \quad (5.24)$$

5.3 Efeito Aharonov-Bohm na análise do potencial inverso do quadrado atrativo

Nesta seção, vamos estudar os efeitos de uma fase geométrica do tipo Aharonov-Bohm no sistema da seção 4.4, no qual estudamos a partícula neutra com momento de quadrupolo magnético sob o efeito do potencial inverso do quadrado atrativo e na presença de um fio cilíndrico longo. Assim como em outras seções deste capítulo, a fase geométrica poderá ser obtida através da introdução de um campo magnético dependente do tempo no sistema. Além disso, também iremos considerar que o tensor momento de quadrupolo magnético será dado por (5.1), que é diferente daquele da seção 4.4. Assim, também podemos enxergar este sistema como a partícula discutida na seção 5.1 interagindo com uma configuração de campos diferente.

Como nosso objetivo é estudar o potencial atrativo que é proporcional ao inverso do quadrado da distancia radial e estamos considerando um tensor momento de quadrupolo magnético dado por (5.1), também devemos alterar a configuração de campos que age sobre a partícula para que possamos obter o potencial desejado. Sendo assim, vamos considerar que a partícula neutra com momento de quadrupolo magnético se move na presença de um condutor cilíndrico longo de raio interno r_0 , e que possui uma densidade de corrente elétrica $\vec{J} = -\frac{B_0}{r^2}\hat{\varphi}$ em seu interior. Aqui, $B_0 > 0$ é uma constante, r é a coordenada radial e $\hat{\varphi}$ é o vetor unitário na direção azimutal. Dessa forma, dentro do cilindro ($r \geq r_0$), na região onde se encontra a partícula, existe um campo magnético dado por

$$\vec{B} = -\frac{B_0}{r}\hat{z}, \quad (5.25)$$

onde \hat{z} é o vetor unitário na direção z . A interação deste campo magnético com o momento de quadrupolo magnético definido por (5.1) irá resultar no potencial escalar efetivo

$$V_{eff} = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\frac{MB_0}{r^2}, \quad (5.26)$$

que é o potencial inverso do quadrado que estávamos buscando.

Como estamos procurando fases geométricas para este sistema, iremos considerar novamente a presença de um campo magnético dependente do tempo dado pela equação (5.2). Como visto antes, este campo magnético não interage com o momento de quadrupolo magnético definido por (5.1), mas gera um campo elétrico $\vec{E} = E_0 \ln \frac{r}{r_0}\hat{z}$ que interage, resultando no potencial vetor efetivo

$$\vec{A}_{eff} = \vec{M} \times \vec{E} = -\frac{ME_0}{r}\hat{\varphi}, \quad (5.27)$$

Como já vimos neste trabalho, este potencial vetor efetivo gera uma fase geométrica quântica no sistema, dada por

$$\phi = \oint \vec{A}_{eff} \cdot d\vec{r} = -2\pi M E_0. \quad (5.28)$$

Então vamos partir da equação de Schrödinger que descreve o sistema da partícula neutra, sem spin e com momento de quadrupolo magnético, que interage com campos externos (4.1). Dessa forma, usando essa equação em conjunto com as expressões para os potenciais efetivos, (5.26) e (5.27), e também com a expressão para a fase geométrica ϕ (5.28), obtemos

$$\varepsilon\psi = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi - \frac{1}{m}\left[\frac{-i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\phi}{2\pi r}\psi\right)\right] + \frac{1}{2m}\left(\frac{\phi}{2\pi r}\right)^2\psi - \frac{MB_0}{r^2}\psi, \quad (5.29)$$

onde ∇^2 é o laplaciano em coordenadas cilíndricas. Devido à simetria cilíndrica do sistema, vamos assumir novamente que a solução da equação acima pode ser escrita como $\psi(r, \varphi, z) = e^{ikz}e^{il\varphi}R(r)$, onde k é uma constante e $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Além disso vamos nos concentrar no caso em que $2mMI > (l + \frac{\phi}{2\pi})^2$, $\varepsilon < 0$ e $k = 0$, que significa que estamos procurando estados ligados para o sistema, assim como fizemos na seção 4.4. Considerando isso e substituindo a solução $\psi(r, \varphi, z) = e^{ikz}e^{il\varphi}R(r)$ na equação acima, obtemos a equação radial

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \frac{\alpha^2}{r^2}R - \eta^2R = 0. \quad (5.30)$$

Aqui foram feitas as definições abaixo:

$$\begin{cases} -\eta^2 = 2m\varepsilon - k^2; \\ \alpha^2 = 2mMB_0 - (l - \frac{\phi}{2\pi})^2. \end{cases} \quad (5.31)$$

Agora vamos tomar a mudança de variáveis $x = \eta r$, para chegar em uma forma conhecida para a equação (5.61). Dessa forma, temos a equação

$$R'' + \frac{1}{x}R' - \frac{\alpha^2}{x^2}R - R = 0. \quad (5.32)$$

Esta é a equação diferencial de Bessel modificada (WATSON, 1922; GIL; SEGURA; TEMME, 2002). Como o raio do condutor cilíndrico impede a partícula de acessar a região $r \leq r_0$, devemos buscar normalizar a função radial $R(x)$ apenas quando $r \rightarrow \infty$. Ao impor isso, a solução da equação diferencial de Bessel será dada em termos da função de Bessel modificada de ordem imaginária de terceiro tipo (GIL; SEGURA; TEMME, 2002), que já foi utilizada na seção 4.4. Portanto, a solução da equação (5.32) fica:

$$R(x) = ak_{i\alpha}(x). \quad (5.33)$$

Como já foi mencionado, a partícula não penetra na região $r \leq r_0$ e, portanto, temos a condição de contorno

$$R(x_0) = ak_{i\alpha}(x_0) = 0, \quad (5.34)$$

onde $x_0 = \eta r_0$. Supondo o caso em que $x_0 \ll 1$, a função $k_{i\alpha}(x_0)$ fica:

$$k_{i\alpha}(x_0) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha \sinh(\pi\alpha)}} \sin\left(\alpha \ln \frac{x_0}{2} + b\right), \quad (5.35)$$

onde b é uma constante associada ao parâmetro α , que determina o quão forte é o potencial efetivo inverso do quadrado atrativo. As equações (5.34) e (5.35) resultam em

$$x_0 = \frac{2}{e^{\frac{b}{\alpha}}} e^{\frac{\nu\pi}{\alpha}}, \quad (5.36)$$

onde $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Aparentemente ν pode assumir todos esse valores, no entanto a condição $x_0 \ll 1$ só é satisfeita se $\nu = -1, -2, -3, \dots = -n$, onde $n = 1, 2, 3, \dots$ é o número quântico radial. Considerando isso e usando a definição de x_0 e de η , obtemos que os níveis de energia do sistema são

$$\varepsilon_{n,l} = -\frac{2}{mr_0^2 e^{\frac{b}{\alpha}}} e^{-\frac{2n\pi}{\alpha}}. \quad (5.37)$$

A equação (5.37) descreve os níveis de energia que surgem devido à interação do momento de quadrupolo magnético (5.1) da partícula neutra com o campo magnético (5.25) e com o campo elétrico (5.3). Além disso, a partícula também se encontra na presença de uma cavidade cilíndrica de raio r_0 , que a impede de acessar a região $r \leq r_0$. Esses níveis de energia são estados ligados que puderam ser obtidos quando consideramos $2mMB_0 > (l - \frac{\phi}{2\pi})^2$ (nesse caso o potencial inverso do quadrado será atrativo). Como estamos lidando com o potencial inverso do quadrado novamente, temos que o raio da cavidade cilíndrica r_0 é responsável pela regularização do sistema, caso contrário teremos uma "queda da partícula para o centro", como foi explicado na seção 4.4.

Os níveis de energia (5.37) também apresentam uma dependência na fase geométrica quântica ϕ que é análoga ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados. Essa dependência pode ser observada no número quântico do momento angular efetivo $(l - \frac{\phi}{2\pi})$ que aparece no parâmetro α , definido nas equações (5.31) como $\alpha^2 = 2mMB_0 - (l - \frac{\phi}{2\pi})^2$.

Assim como no caso da seção 4.4, os níveis de energia (5.37) também decrescem exponencialmente com o número quântico radial n . Assim, teremos novamente um 'acúmulo' de níveis de energia próximo ao valor $\varepsilon_{n,l} = 0$, já que os níveis de energia também ficarão cada vez mais próximos a medida que n aumenta. Portanto os autovalores da energia para este sistema, descritos na equação (5.37), estão todos localizados entre o valor do estado fundamental do sistema (definido por $n = 1$ e $l = 0$) e o valor $\varepsilon_{n,l} = 0$:

$$-\frac{2}{mr_0^2 e^{\frac{b}{\alpha}}} e^{-\frac{2n\pi}{\alpha}} \leq \varepsilon_{n,l} \leq 0. \quad (5.38)$$

A diferença está na definição do parâmetro α , que agora carrega uma fase geométrica devido ao campo elétrico induzido (5.3).

No caso da condição $2mMB_0 < (l + \frac{\phi}{2\pi})^2$ não ser satisfeita, os níveis de energia da equação (5.37) não pode mais ser obtido. Isso porque, nesse caso, a solução para a equação (5.32) não pode mais ser expressa em termos da função de Bessel modificada de ordem imaginária de terceiro tipo $k_{i\alpha}(x)$.

No sistema desta seção, o espectro de energias (5.37) também possui uma periodicidade na fase geométrica ϕ , dada por $\varepsilon_{n,l}(\phi \pm 2\pi) = \varepsilon_{n,l \pm 1}(\phi)$. Como vimos anteriormente, quando os níveis de energia do sistema dependem da fase geométrica ϕ , é possível encontrar correntes persistentes para o sistema. Então, usando a relação de Byers-Yang no espectro de energias (5.68), obtemos que a corrente persistente (a uma temperatura $T = 0$) é:

$$I_{n,l} = \frac{2(l - \frac{\phi}{2\pi})(n\pi + b)}{m\pi r_0^2 \alpha^3 e^{\frac{2b}{\alpha}}} e^{-\frac{2n\pi}{\alpha}}. \quad (5.39)$$

5.4 Efeitos de rotação

Nesta seção, irei apresentar quais os efeitos de uma rotação sobre os sistemas das seções 4.2 e 5.3. Veremos que, no caso do sistema da seção 4.2, a fase geométrica análoga ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados só pode ser obtida quando consideramos esta rotação. Portanto, vamos começar admitindo que o hamiltoniano da partícula neutra com momento de quadrupolo magnético interagindo com campos eletromagnéticos, dado pela equação (4.1), deverá ser alterado para levar em conta uma rotação do referencial do sistema. Este termo de rotação que procuramos pode ser obtido da mesma forma, tanto para um sistema quântico quanto para um sistema clássico. Então, considerando um referencial que se encontra rotacionando com velocidade angular uniforme Ω em relação a um observador, a lagrangiana de uma partícula que se encontra neste referencial fica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[\vec{v} + (\vec{\Omega} \times \vec{r})]^2 - V(\vec{r}), \quad (5.40)$$

onde $V(r)$ é um potencial qualquer que depende de \vec{r} . Podemos obter o hamiltoniano do sistema calculando o momento canônico $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ e usando a transformação de Legendre $L = \vec{p} \cdot \vec{v} - H$. O momento canônico fica

$$\vec{p} = m\vec{v} + m\vec{\Omega} \times \vec{r}. \quad (5.41)$$

Assim, o Hamiltoniano fica

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 - \vec{p} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + V(\vec{r}). \quad (5.42)$$

Considerando que o hamiltoniano na ausência de rotação é dado por $\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + V(\vec{r})$ e usando a identidade $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$, obtemos que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \vec{\Omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}). \quad (5.43)$$

Portanto, quando o referencial do sistema rotaciona com uma velocidade angular $\vec{\Omega}$, o Hamiltoniano do sistema é acrescido do termo $-\vec{\Omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{p})$. Considerando então que o hamiltoniano inicial do sistema descreve uma partícula neutra com momento de quadrupolo magnético interagindo com campos eletromagnéticos (4.1), lembrando que $\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{p})$ é o momento angular do sistema e substituindo o momento \vec{p} e o momento angular \vec{L} clássicos por seus respectivos operadores quânticos, obtemos

$$\varepsilon\psi = \frac{1}{2m}\hat{\pi}^2\Psi - \vec{M} \cdot \vec{B}\Psi - \vec{\Omega} \cdot \hat{L}\psi, \quad (5.44)$$

onde $\hat{\pi} = \hat{p} - (\vec{M} \times \vec{E})$ e o operador do momento angular, \hat{L} , agora será escrito como $\hat{L} = (\vec{r} \times \hat{\pi})$.

5.4.1 Efeito Aharonov-Bohm na análise do potencial tipo-Coulomb na presença de um fio cilíndrico

Nesta seção, iremos obter uma fase geométrica para o primeiro sistema da seção 4.2, em que o momento de quadrupolo magnético se encontra na presença de um cilindro condutor longo e interage com uma configuração de campos gerada por uma corrente elétrica dentro do cilindro. Assim como nas seções anteriores, essa fase geométrica poderá ser obtida através da introdução de um campo magnético dependente do tempo no sistema, e também mudando um pouco o tensor de momento de quadrupolo magnético. Porém, para o sistema que será tratado aqui, apenas essas duas alterações não serão suficientes para obter uma fase geométrica do tipo Aharonov-Bohm. Isso é devido a esse sistema não depender mais do número quântico do momento angular l , como mostrado na equação (4.27). Para recuperar essa dependência em l e obter a fase geométrica, também iremos considerar que o referencial do sistema rotaciona. Portanto, usaremos a equação de Schrödinger dada por (5.44) para trabalhar com este sistema.

Além da rotação, também iremos considerar que o tensor momento de quadrupolo magnético agora será definido por (5.1), assim como nas seções anteriores. Novamente, esta mudança não modificaria o sistema da seção 4.2, porque a interação do tensor $M_{i,j}$ (5.1) com o campo magnético (4.14) não iria gerar termos adicionais na equação de Schrödinger do sistema, se comparado com o caso em que M_{ij} é dado por (4.3). Portanto a interação do momento de quadrupolo magnético (5.1) com o campo magnético (4.14) será representada, na equação de Schrödinger, pelo seguinte potencial escalar efetivo

$$V_{eff}(r) = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\frac{MB_0}{r}. \quad (5.45)$$

O potencial efetivo acima é o mesmo da equação (4.15), obtido na seção 4.2. Como ambos B_0 e M são constantes positivas, esse potencial escalar efetivo é um potencial tipo Coulomb atrativo.

Um dos objetivos desta seção é encontrar uma fase geométrica para o sistema da seção 4.2, por isso também iremos considerar a presença de um campo magnético dependente do tempo dado pela equação (5.2). Como vimos na seção anterior, o campo magnético $\vec{B} = \frac{E_0 t}{r} \hat{\phi}$ não interage com o momento de quadrupolo magnético (5.1). No entanto este campo magnético irá gerar um campo elétrico, dado pela equação (5.3), que interage com o momento de quadrupolo magnético. Como vimos, esta interação será representada na equação de Schrödinger do sistema pelo potencial vetor efetivo

$$\vec{A}_{eff} = \vec{M} \times \vec{E} = -\frac{ME_0}{r} \hat{\phi}. \quad (5.46)$$

Este potencial vetor efetivo será responsável pelo aparecimento de uma fase geomé-

trica quântica no sistema, dada por

$$\phi = \oint \vec{A}_{eff} d\vec{r} = -2\pi M E_0. \quad (5.47)$$

Dessa forma o operador $\hat{\pi}$ na equação (5.44) será

$$\hat{\pi} = \hat{p} + \frac{\phi}{2\pi} \hat{\varphi}. \quad (5.48)$$

Então vamos considerar que, no sistema da seção 3.2, o referencial da partícula que possui momento de quadrupolo magnético está girando com uma velocidade angular constante $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$. Além disso, como o sistema considerado nesta seção será bidimensional (consideraremos novamente que a partícula se move em um plano, tomando $k = 0$), poderemos escrever $\vec{r} = r \hat{r}$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a coordenada radial e \hat{r} é um vetor unitário na direção radial. Dessa forma, usando a equação (5.48), o último termo da equação (5.44) fica

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{L} = -i\hbar\Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\phi\Omega}{2\pi}. \quad (5.49)$$

Substituindo as equações (5.45), (5.46), (5.47) e (5.49) na equação de Schrödinger do sistema (5.44), nós obtemos

$$\varepsilon\psi = \frac{1}{2m} [\hat{p} + \frac{\phi}{2\pi} \hat{\varphi}]^2 \psi - \frac{MB_0}{r} \psi + i\hbar\Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi + \frac{\phi\Omega}{2\pi} \psi. \quad (5.50)$$

Podemos aplicar o método da separação de variáveis na equação acima. Portanto, a solução da equação (5.50) pode ser escrita como $\psi(r, \varphi, z) = e^{ikz} e^{il\varphi} R(r)$, onde k é uma constante e $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Substituindo essa solução na equação (5.50), obtemos a equação radial

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{\theta^2}{r^2} R + \frac{\bar{M}}{r} - \eta^2 R = 0. \quad (5.51)$$

As definições dos parâmetros η , \bar{M} e θ estão escritas abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta^2 = -\tau^2 = 2m(\varepsilon + \Omega\theta) - k^2; \\ \bar{M} = 2mMB_0; \\ \theta = l - \frac{\phi}{2\pi}. \end{array} \right. \quad (5.52)$$

Assim como nas seções anteriores, estamos procurando soluções de estados ligados para a equação (5.51) e por isso consideraremos apenas valores negativos da energia ($\varepsilon \leq 0$),

que resultam em $\tau > 0$. Como já foi comentado no início da seção, também consideramos que $k = 0$, que significa que a partícula com momento de quadrupolo magnético move-se num plano perpendicular ao eixo \hat{z} .

Realizando a mudança de variáveis $x = 2\eta r$, que é a mesma feita na seção 4.2, a equação (5.51) passa a ser

$$R'' + \frac{1}{x}R' - \frac{\theta^2}{x^2}R + \frac{\delta}{x}R - \frac{1}{4}R = 0, \quad (5.53)$$

onde $\delta = \frac{\bar{M}}{2\eta}$.

A região $r \leq r_0$ ainda é proibida, já que a partícula não pode atravessar a superfície do cilindro. Dessa maneira, precisamos impor que $R(x) \rightarrow 0$ apenas quando $x \rightarrow \infty$. Sob essas considerações, a solução da equação (5.53) também está relacionada com a função de Whittaker $W_{\delta,\theta}(x)$ da seguinte forma:

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}W_{\delta,\theta}(x) = e^{-\frac{x}{2}}x^{|\theta|}U\left(\theta - \delta + \frac{1}{2}, 1 + 2\theta; x\right), \quad (5.54)$$

com $U(\theta - \delta + \frac{1}{2}, 1 + 2\theta; x)$ sendo a função hipergeométrica confluyente regular quando $x \rightarrow \infty$.

Como a região $r \leq r_0$ é proibida, a parte radial da função de onda $R(x)$ deve ser zero quando $x_0 = 2\eta r_0$. Portanto, podemos escrever a condição de contorno

$$R(x_0) = 0. \quad (5.55)$$

Agora iremos considerar novamente o caso em que a função hipergeométrica confluyente $U(a, b; x_0)$ pode ser escrita na forma (4.24), que ocorre quando temos os parâmetros x e b fixos, enquanto o parâmetro a é grande. No caso da solução (5.54), a e b são:

$$\begin{cases} a = \theta - \delta + \frac{1}{2}, \\ b = 1 + 2\theta. \end{cases} \quad (5.56)$$

Tomando o valor fixo de x como $x_0 = 2\eta r_0$ podemos usar a condição de contorno (5.55) e escrever que a solução (5.54) satisfaz a equação

$$R(x_0) \cong e^{-\frac{x}{2}}x^{|\theta|} \cos\left(\sqrt{2bx_0 - 4ax_0} - \frac{b\pi}{2} + a\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 0. \quad (5.57)$$

Da definição do parâmetro δ , vemos que a condição de a ser elevado ocorre quando consideramos uma interação forte entre a partícula neutra com momento de quadrupolo

magnético e o campo magnético. Dessa forma, usando a definição $\delta = \frac{\bar{M}}{2\eta}$ e a definição de \bar{M} em (5.52), podemos determinar os níveis de energia do sistema:

$$\varepsilon_{n,l} = -\frac{mM^2B_0^2\pi^2}{2(\sqrt{8mMB_0r_0} - n\pi - \frac{\pi}{4})^2} - \Omega\theta, \quad (5.58)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ é o número quântico radial.

A equação (5.58) corresponde aos níveis de energia que surgem quando a partícula do sistema da seção 4.2 rotaciona em torno de uma cavidade cilíndrica com velocidade angular $\vec{\Omega}$. Ou seja, esse espectro está associado à interação do momento de quadrupolo magnético (5.1) com o campo magnético (4.14) e com o campo elétrico induzido (5.3), em um referencial que gira em torno do eixo \hat{z} com velocidade angular $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$. Como estamos considerando que a partícula não pode penetrar na cavidade cilíndrica, temos que a sua função de onda desaparece em $r = r_0$, onde r_0 é o raio da cavidade. Usando essa condição de contorno e exigindo que a função de onda seja regular em $r \rightarrow \infty$, conseguimos obter esses estados ligados.

A contribuição da rotação neste sistema é dada pelo último termo do lado direito da equação (5.58). Como este termo corresponde ao acoplamento da velocidade angular $\vec{\Omega}$ com o número quântico do momento angular efetivo $\theta = l_{eff} = l - \frac{\phi}{2\pi}$, ele é um análogo ao termo de Page-Werner (PAGE, 1975; WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979; HEHL; NI, 1990), que é um termo que acopla o número quântico do momento angular l ao módulo da velocidade angular de rotação Ω . Comparando a equação (4.27) com a equação (5.58), vemos que o termo de rotação quebra a degenerescência infinita do sistema ao introduzir a dependência no número quântico l dos níveis de energia. Além disso, este termo também nos permitiu obter uma fase geométrica quântica ϕ nos níveis de energia deste sistema. Apesar dessa fase ser uma consequência da interação do momento de quadrupolo magnético (5.1) com o campo elétrico induzido (5.3), ela não apareceria caso não tivéssemos considerado também a rotação do sistema.

Assim como na seção 4.2, neste sistema o número quântico radial n também é limitado, podendo assumir valores entre $n = 0$ e um $n = n_{max}$. Isso decorre da definição do parâmetro τ , feita nesta seção. Como procuramos soluções de estados ligados para o sistema, definimos esse parâmetro como $\tau = \sqrt{-2m(\varepsilon + \Omega\theta)} > 0$. Assim, ao substituir a equação (5.58) na definição do parâmetro τ , obtemos que o valor máximo de n é determinado por:

$$n \leq \frac{\sqrt{8mMB_0r_0}}{\pi} - \frac{1}{4}. \quad (5.59)$$

Aqui, novamente, os níveis de energias são válidos para grandes valores da distância radial r , onde a densidade de corrente \vec{J} pode ser desprezada.

Assim como nos outros sistemas deste capítulo, o espectro de energias (5.58) possui

uma periodicidade na fase geométrica ϕ , dada por $\varepsilon_{n,l}(\phi \pm 2\pi) = \varepsilon_{n,l\pm 1}(\phi)$. Assim, usando a relação de Byers-Yang, temos que este sistema pode apresentar uma corrente persistente dada por

$$I = \frac{\Omega}{2\pi}. \quad (5.60)$$

Comparando a corrente persistente acima com aquela obtida na seção 5.1, dada pela equação (5.10), vemos que a presença de uma barreira em $r = r_0$ altera bastante as correntes persistentes que aparecem no sistema. Isso ocorre porque os níveis de energia deste sistema com a barreira, mas sem a rotação (obtidos na seção 4.2, na equação (4.27)), não dependem do número quântico l . Portanto, como a fase geométrica ϕ atua modificando o número quântico do momento angular de l para $l - \frac{\phi}{2\pi}$, seus efeitos não podem ser observados neste sistema na ausência de rotação (que é o mesmo sistema da seção 4.2). Ao adicionar uma rotação ao sistema, os níveis de energia deste sistema voltam a depender do número quântico l e fica possível observar o efeitos da fase geométrica ϕ sobre ele. Portanto, este sistema apresenta uma corrente persistente apenas enquanto está rotacionando, a qual depende apenas da velocidade angular de rotação do referencial.

5.4.2 Efeito Aharonov-Bohm na análise do potencial inverso do quadrado atrativo

Nesta seção, vamos estudar os efeitos de uma rotação no sistema da seção 5.3, no qual estudamos os efeitos de uma fase geométrica no sistema da partícula neutra com momento de quadrupolo magnético interagindo com um potencial inverso do quadrado atrativo e na presença de um fio cilíndrico longo.

Vamos considerar novamente que o tensor momento de quadrupolo magnético será dado por (5.1). Assim, para estudar a influência do potencial atrativo que é proporcional ao inverso do quadrado da distancia radial na partícula neutra com momento de quadrupolo magnético, vamos considerar a mesma configuração de campos usada na seção 5.3. Portanto, vamos considerar que a partícula neutra com momento de quadrupolo magnético se move na presença de um condutor cilíndrico longo de raio interno r_0 , que possui uma densidade de corrente elétrica $\vec{J} = -\frac{B_0}{r^2}\hat{\varphi}$ em seu interior, e de um campo magnético dependente do tempo dado por (5.2). Assim, a partícula neutra irá interagir mais uma vez com o campo magnético (5.25) e com o campo elétrico (5.3). Da mesma forma que na seção 5.3, a interação com esses campos irá resultar no potencial escalar efetivo proporcional ao inverso do quadrado da distancia radial

$$V_{eff} = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\frac{MB_0}{r^2},$$

e no potencial vetor efetivo

$$\vec{A}_{eff} = \vec{M} \times \vec{E} = -\frac{ME_0}{r} \hat{\phi}.$$

Aqui, novamente, este potencial vetor efetivo está relacionado com uma fase geométrica quântica que aparece no sistema, dada pela equação (5.4)

$$\phi = \oint \vec{A}_{eff} \cdot d\vec{r} = -2\pi ME_0.$$

Dessa vez, estamos interessados no que acontece com o sistema descrito acima quando consideramos uma rotação. No início da seção 5.4 vimos que, quando o referencial do sistema com o qual estamos trabalhando sofre uma rotação, a equação de Schrödinger que descreve o sistema passa a ser dada pela equação (5.44), que é

$$\varepsilon\psi = \frac{1}{2m} \left[\hat{p} - (\vec{M} \times \vec{E}) \right]^2 \Psi - \vec{M} \cdot \vec{B} \Psi - \vec{\Omega} \cdot \hat{L} \psi,$$

Onde $\hat{L} = (\vec{r} \times \vec{p})$ é o operador momento angular do sistema e $\vec{\Omega}$ é a velocidade angular do referencial. Assim como antes, vamos considerar uma velocidade angular constante em torno do eixo z , portanto $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$. Dessa forma, usando a equação de Schrödinger acima em conjunto com as expressões para os potenciais efetivos, (5.26) e (5.27), e com a expressão para a fase geométrica ϕ (5.28), obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon\psi = & -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi - \frac{1}{m} \left[\frac{-i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\phi}{2\pi r} \psi \right) \right] \\ & + \frac{1}{2m} \left(\frac{\phi}{2\pi r} \right)^2 \psi - \frac{MB_0}{r^2} \psi - \left(-i\Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\phi\Omega}{2\pi} \right) \psi, \end{aligned}$$

onde ∇^2 é o laplaciano em coordenadas cilíndricas. Assumindo novamente que a função de onda do sistema pode ser escrita como $\psi(r, \varphi, z) = e^{ikz} e^{il\varphi} R(r)$, onde k é uma constante e $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, podemos encontrar uma equação radial para este sistema. Iremos considerar que $2mMB_0 > (l + \frac{\phi}{2\pi})^2$, $\varepsilon < 0$ e $k = 0$, já que, mais uma vez, procuramos por soluções de estados ligados para o sistema. Considerando isso e substituindo a solução $\psi(r, \varphi, z) = e^{ikz} e^{il\varphi} R(r)$ na equação acima, obtemos a equação radial

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \frac{\alpha^2}{r^2} R - \eta^2 R = 0. \quad (5.61)$$

A diferença da equação acima para a equação (5.61) está nas definições abaixo:

$$\begin{cases} -\eta^2 = 2m\varepsilon + 2m\Omega(l - \frac{\phi}{2\pi}) - k^2; \\ \alpha^2 = 2mMB_0 - (l - \frac{\phi}{2\pi})^2. \end{cases} \quad (5.62)$$

Aqui, o parâmetro η está alterado pela rotação do sistema, quando comparado com o parâmetro η definido na seção 5.3. Vamos tomar mais uma vez a mudança de variáveis $x = \eta r$. Dessa forma, a equação radial (5.61) fica

$$R'' + \frac{1}{x}R' + \frac{\alpha^2}{x^2}R - R = 0. \quad (5.63)$$

Portanto, obtemos novamente a equação diferencial de Bessel (WATSON, 1922; GIL; SEGURA; TEMME, 2002). Como as condições de contorno são as mesmas das seções 4.4 e 5.3 (a partícula não pode passar pelo raio $r = r_0$ do fio cilíndrico e atingir $r = 0$, mas pode atingir $r \rightarrow \infty$), a solução da equação (5.32) será dada em termos da função de Bessel modificada de ordem imaginária de terceiro tipo (GIL; SEGURA; TEMME, 2002), que já foi utilizada nas seções 4.4 e 5.3. Vamos prosseguir da mesma forma que fizemos naquelas seções. A solução da equação (5.63) fica:

$$R(x) = ak_{i\alpha}(x). \quad (5.64)$$

Como a partícula não penetra na região $r \leq r_0$, temos a condição de contorno

$$R(x_0) = ak_{i\alpha}(x_0) = 0, \quad (5.65)$$

onde $x_0 = \eta r_0$. Então, assim como nas seções 4.5 e 5.3, vamos supor o caso em que $x_0 \ll 1$. Assim, a função $k_{i\alpha}(x_0)$ fica:

$$k_{i\alpha}(x_0) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha \sinh(\pi\alpha)}} \sin\left(\alpha \ln \frac{x_0}{2} + b\right), \quad (5.66)$$

onde b é a mesma constante que apareceu na seção 5.3, que está associada ao parâmetro α . As equações (5.65) e (5.66) resultam em

$$x_0 = \frac{2}{e^{\frac{b}{\alpha}}} e^{\frac{\nu\pi}{\alpha}}, \quad (5.67)$$

onde $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Mas, para satisfazer a condição $x_0 \ll 1$, temos que impor que $\nu = -1, -2, -3, \dots = -n$, onde $n = 1, 2, 3, \dots$ é o número quântico radial. Da equação acima e das definições de x_0 e de η nas equações (5.62), obtemos que os níveis de energia do sistema são

$$\varepsilon_{n,l} = -\frac{2}{mr_0^2 e^{\frac{b}{\alpha}}} e^{-\frac{2n\pi}{\alpha}} - \Omega \left(l - \frac{\phi}{2\pi} \right). \quad (5.68)$$

A equação (5.68) descreve os níveis de energia que surgem devido à interação do momento de quadrupolo magnético (5.1) da partícula neutra com os campos eletromagnéticos (5.25) e (5.3), e cujo referencial rotaciona com velocidade angular $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$. A diferença desta

equação para os níveis de energia (5.37) é apenas o termo de rotação. Portanto, a partícula também não pode acessar a região $r \leq r_0$ devido à presença de uma cavidade cilíndrica de raio r_0 . Além disso, esses níveis de energia também são estados ligados que são obtidos quando consideramos que o potencial inverso do quadrado é atrativo ($2mMB_0 > (l - \frac{\phi}{2\pi})^2$). Como estamos lidando com o potencial inverso do quadrado novamente, temos que o raio da cavidade cilíndrica r_0 é responsável pela regularização do sistema, assim como nas seções 4.4 e 5.3.

Devido à rotação considerada neste sistema, os níveis de energia (5.68) apresentam um termo análogo ao termo Page-Werner (PAGE, 1975; WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979; HEHL; NI, 1990), que acopla o número quântico do momento angular efetivo $(l - \frac{\phi}{2\pi})$ com Ω , que é módulo da velocidade angular. Além disso, os níveis de energia (5.68) também apresentam uma dependência na fase geométrica quântica ϕ que é análoga ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados. Essa dependência pode ser observada no número quântico do momento angular efetivo $(l - \frac{\phi}{2\pi})$, que aparece tanto no termo análogo ao termo Page-Werner quanto no parâmetro α .

Assim como no caso das seções 4.4 e 5.3, os níveis de energia (5.68) também decrescem exponencialmente com o número quântico radial n . No entanto, aqui, a rotação no sistema modifica o valor dos níveis de energia quando $n \rightarrow \infty$, se comparado aos espectros de energia obtidos naquelas seções (equações (4.60) e (5.37)). Enquanto neles tínhamos que $\varepsilon_{n,l} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, aqui temos que $\varepsilon_{n,l} \rightarrow -\Omega(l - \frac{\phi}{2\pi})$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim, teremos um 'acúmulo' de níveis de energia próximo ao valor $\varepsilon_{n,l} = -\Omega(l - \frac{\phi}{2\pi})$, já que os níveis de energia também ficarão cada vez mais próximos a medida que n aumenta. Portanto, os autovalores da energia para este sistema, descritos na equação (5.68), estão todos localizados entre o valor do estado fundamental do sistema (definido por $n = 1$ e $l = 0$) e o valor $\varepsilon_{n,l} = -\Omega(l - \frac{\phi}{2\pi})$:

$$-\frac{2}{mr_0^2 e^{\frac{b}{\alpha}}} e^{-\frac{2n\pi}{\alpha}} - \frac{\Omega\phi}{2\pi} \leq \varepsilon_{n,l} \leq -\Omega\left(l - \frac{\phi}{2\pi}\right). \quad (5.69)$$

Para discutir mais sobre os efeitos de rotação no sistema, podemos comparar a equação (5.68) com a equação (5.37), da seção 5.3, reescrita abaixo:

$$\varepsilon_{n,l} = -\frac{2}{mr_0^2 e^{\frac{b}{\alpha}}} e^{-\frac{2n\pi}{\alpha}}.$$

Comparando os níveis de energia acima com os da equação (5.68), vemos que, sem a rotação, os níveis de energia da equação acima possuem uma dupla degenerescência, que é devido ao parâmetro $\alpha^2 = 2mMB_0 - (l - \frac{\phi}{2\pi})^2$. Quando adicionamos a rotação, podemos ver que o termo $-\Omega(l - \frac{\phi}{2\pi})$ modifica a degenerescência dos níveis de energia do

sistema. Comparando as inequações (5.38) e (5.69), vemos que a rotação também modifica o intervalo de energias acessíveis ao sistema.

No caso da condição $2mMB_0 > (l + \frac{\phi}{2\pi})^2$ não ser satisfeita, os níveis de energia da equação (5.68) não são mais válidos. Isso ocorre pois, novamente, a solução para a equação (5.32) não pode mais ser expressa em termos da função de Bessel modificada de ordem imaginária de terceiro tipo $k_{i\alpha}(x)$.

No sistema desta seção, o espectro de energias (5.68) também possui uma periodicidade na fase geométrica ϕ , dada por $\varepsilon_{n,l}(\phi \pm 2\pi) = \varepsilon_{n,l\pm 1}(\phi)$ e, portanto, é possível encontrar correntes persistentes para o sistema. Então usando a relação de Byers-Yang no espectro de energias (5.68), obtemos que a corrente persistente (a uma temperatura $T = 0$) é:

$$I_{n,l} = \frac{2(l - \frac{\phi}{2\pi})(n\pi + b)}{m\pi r_0^2 \alpha^3 e^{\frac{2b}{\alpha}}} e^{-\frac{2n\pi}{\alpha}} + \frac{\Omega}{2\pi}. \quad (5.70)$$

Dessa vez, a barreira localizada em $r = r_0$ não resulta em níveis de energias independentes do número quântico do momento angular l , como foi o caso na seção anterior. Portanto, temos uma corrente persistente que apresenta dois termos: um que depende da fase geométrica ϕ e outro que aparece devido à rotação do sistema (que é igual a corrente persistente da seção anterior).

6 Conclusão

Neste trabalho, conseguimos obter as soluções de diversos sistemas envolvendo a partícula neutra com momento de quadrupolo magnético, sendo a maior parte delas soluções para estados ligados. Em alguns desses sistemas, também vimos qual a influência de uma cavidade cilíndrica impenetrável próxima à origem e de raio r_0 nos níveis de energia. Para alguns dos sistemas analisados, também buscamos estudar os efeitos do análogo da fase Aharonov-Bohm para estados ligados, verificando a diferença que essa fase geométrica provoca em seus níveis de energia. Além disso, também investigamos o aparecimento de correntes persistentes nesses sistemas, já que esse efeito está associado à fase geométrica.

No capítulo 4, obtivemos e analisamos os níveis de energia de sistemas de partículas neutras com momento de quadrupolo magnético em movimento interagindo com campos eletromagnéticos externos. Como vimos, a interação do momento de quadrupolo magnético com os campos resultou no aparecimento de diferentes potenciais na equação de Schrödinger de cada sistema. No primeiro sistema analisado, o potencial resultante foi um potencial escalar tipo Coulomb que é dado pela equação (4.4), e que é resultante da interação do momento de quadrupolo magnético (4.3) com o campo magnético (4.2). Vimos que é possível obter um espectro de energias análogo ao do potencial de Coulomb em duas dimensões. Depois analisamos essa mesma interação na presença de uma cavidade cilíndrica de raio r_0 centrada na origem, e que impede a partícula de atingir a região $r < r_0$. Vimos que a presença desta cavidade altera de forma significativa os níveis de energia do sistema, que passam a não depender mais do número quântico do momento angular l , o que os torna infinitamente degenerados. Além disso, para que estados ligados possam ser encontrados, o sistema passa a ter uma condição sob o número quântico radial n , descrita pela equação (4.28). Na seção seguinte analisamos a interação da partícula neutra ainda com um potencial tipo Coulomb e na presença da mesma cavidade cilíndrica, mas dessa vez o potencial tipo Coulomb é um potencial vetor efetivo proveniente da interação do momento de quadrupolo (4.28) com o campo elétrico radial (4.31). Diferente do caso da interação com o campo magnético, nesse caso os níveis de energia do sistema ainda dependem tanto de n quanto de l . Dessa vez, além da condição sob o número quântico n dada na equação (4.39), estados ligados também só são possíveis quando consideramos que $l \neq 0$. Ao final desta seção comparamos nosso resultado com o resultado obtido por (FONSECA; BAKKE, 2015c), onde esse sistema foi analisado sem a presença dessa cavidade.

Nas duas últimas seções do capítulo 4, foi analisada a influência do potencial inverso do quadrado da distância radial na partícula neutra com momento de quadrupolo magnético. Primeiro vimos o caso em que este potencial é atrativo (4.43), sendo ele o

resultado da interação do momento de quadrupolo (4.41) com o campo magnético (4.42). Aqui, a presença da cavidade cilíndrica de raio r_0 torna-se necessária para a normalização do potencial inverso do quadrado. Neste caso, conseguimos obter níveis de energia de estados ligados ao considerar que a partícula não pode alcançar a região $0 < r < r_0$. Vimos que os níveis de energia obtidos estão todos localizados dentro de um intervalo dado na expressão (4.61). Vimos também que os níveis de energia (4.64) só podem ser obtidos se o número quântico do momento angular obedecer a condição $l^2 < 2mMI$, onde $2mMI$ é um termo que representa a interação do momento de quadrupolo com o campo.

Para estudar o caso do potencial inverso do quadrado espalhador, consideramos o campo (4.65). Neste segundo caso também consideramos que a partícula esta confinada entre duas superfícies cilíndricas e obtivemos o espectro (4.75). Depois consideramos o caso em que as duas superfícies têm aproximadamente o mesmo raio, fazendo com que a partícula fique presa numa superfície cilíndrica. Assim, vimos que podemos obter os níveis de energia (4.77) quando consideramos um potencial atrativo na região entre os cilindros, e que mais tarde resultará no termo de Costa (COSTA, 1981).

O objetivo principal no capítulo 5 foi analisar a influência que o efeito Aharonov-Bohm para estados ligados tem em sistemas iguais ou parecidos aos sistemas apresentados no capítulo 4. Essa análise foi feita a partir das diferenças que aparecem nos níveis de energia dos sistemas. O primeiro sistema analisado aqui foi o sistema apresentado na seção 4.1 na presença de um campo magnético dependente do tempo (5.2). Foi definido um novo tensor momento de quadrupolo magnético (5.1) (que não altera os resultados obtidos na seção 4.1) e foi visto que sua interação com o campo elétrico (5.3) (induzido pelo campo (5.2)) resulta no potencial vetor efetivo (5.5), que está associado a uma fase geométrica ϕ . Então, foi obtido que este potencial vetor efetivo é responsável pelo aparecimento de um análogo do efeito Aharonov-Bohm para estados ligados nos níveis de energia do sistema (5.9). Foi visto que esse efeito altera o número quântico do momento angular por uma fase $\frac{\phi}{2\pi}$, alterando o padrão de degenerescência dos estados do espectro de energias devido ao potencial tipo-Coulomb (4.13). Em seguida, foi verificada a interação deste sistema com um potencial do oscilador harmônico. Ao procurar soluções polinomiais para a equação de biconfluente de Heun, foram obtidas as frequências de oscilador harmônico permitidas para o modo radial $n = 1$. Cada valor de n está associado a uma expressão diferente para as frequências, resultando em diferentes expressões para os níveis de energias associados a estas frequências. No caso de $n = 1$, foi visto que essas energias ainda dependem da fase quântica geométrica $\frac{\phi}{2\pi}$, de uma forma que corresponde ao análogo do efeito Aharonov-Bohm para estados ligados.

Para obter fases geométricas quânticas para os sistemas no restante do capítulo 5, foi considerada a mesma situação com os campos descrita acima. Isto é, para todos os sistemas daquele capítulo, a fase geométrica surge da interação do tensor de momento de

quadrupolo magnético (5.1) com o campo elétrico induzido (5.3). Prosseguindo, também foi investigada os efeitos da fase geométrica quântica sobre o sistema da seção 4.2, que corresponde à interação do momento de quadrupolo magnético com um potencial tipo Coulomb e na presença de uma cavidade cilíndrica impenetrável de raio r_0 . Como os níveis de energia deste sistema originalmente não dependem do número quântico do momento angular l , foi considerada uma rotação em torno do eixo \hat{z} para ser possível obter uma fase do tipo Aharonov-Bohm. A contribuição da rotação neste sistema é dada pelo termo análogo ao termo de Page-Werner (PAGE, 1975; WERNER; STAUDENMANN; COLELLA, 1979; HEHL; NI, 1990), que acopla a velocidade angular $\vec{\Omega}$ com o número quântico do momento angular efetivo $\theta = l_{eff} = l - \frac{\phi}{2\pi}$. Portanto, a rotação é responsável por quebrar a degenerescência infinita dos níveis de energia (4.27). Além disso, foi visto que nesse caso a rotação também é responsável pelo aparecimento do análogo ao efeito Aharonov-Bohm para estados ligados, visto que na ausência de rotação o número quântico l não aparece na expressão para o espectro de energias do sistema. Por fim, na última seção do capítulo 5 foi investigado o efeito Aharonov Bohm para estados ligados no sistema que descreve os efeitos de um potencial atrativo proporcional ao inverso do quadrado da distância radial na partícula neutra com momento de quadrupolo magnético. Por este potencial apresentar problemas em sua regularização quando $r \rightarrow 0$, também foi considerada a presença de uma cavidade cilíndrica de raio $r = r_0$ que impede que a partícula atinja a região $0 < r < r_0$. Foi obtido que a contribuição da rotação neste sistema também é dado pelo análogo do termo de Page-Werner. Aqui a rotação também é responsável por alterar o intervalo no qual os níveis de energias estão localizados, que é dado por (5.38). Dessa vez o efeito Aharonov-Bohm aparece independentemente da rotação do sistema, mas a fase quântica geométrica também altera os efeitos de rotação. A fase geométrica também influencia na condição $2mMI < (l + \frac{\phi}{2\pi})^2$, que é necessária para obter os estados ligados (5.68) da seção 5.4.

Também foi mostrado que, em todos os sistemas do capítulo 5, existe a possibilidade de associar o sistema da partícula neutra com momento de quadrupolo magnético com correntes persistentes, devido à fase geométrica ϕ .

Dentro do tema que foi abordado neste trabalho, ainda há a possibilidade de explorar alguns sistemas. Por exemplo, poderíamos estudar efeitos de rotação e da fase Aharonov-Bohm sobre o sistema do momento de quadrupolo magnético interagindo com um potencial do tipo oscilador harmônico.

Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. et al. *Handbook of mathematical functions*. [S.l.]: Dover New York, 1964. v. 55. Citado 5 vezes nas páginas [44](#), [47](#), [48](#), [54](#) e [59](#).
- AHARONOV, Y.; ANANDAN, J. Phase change during a cyclic quantum evolution. *Physical Review Letters*, APS, v. 58, n. 16, p. 1593, 1987. Citado 2 vezes nas páginas [11](#) e [32](#).
- AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, APS, v. 115, n. 3, p. 485, 1959. Citado 3 vezes nas páginas [13](#), [17](#) e [20](#).
- AHARONOV, Y.; CASHER, A. Topological quantum effects for neutral particles. *Physical Review Letters*, APS, v. 53, n. 4, p. 319, 1984. Citado 2 vezes nas páginas [11](#) e [28](#).
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists*. [S.l.]: American Association of physics teachers, 1999. Citado 3 vezes nas páginas [44](#), [59](#) e [67](#).
- ARSCOTT, F. M. *Heun's Differential Equations*. [S.l.]: Clarendon Press, 1995. Citado na página [67](#).
- AUDRETSCH, J.; SKARZHINSKY, V. D.; VORONOV, B. L. Elastic scattering and bound states in the aharonov-bohm potential superimposed by an attractive ρ -2 potential. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 34, n. 2, p. 235, 2001. Citado 2 vezes nas páginas [12](#) e [55](#).
- BAKKE, K. Analog landau-he-mckellar-wilkens quantization due to noninertial effects of the fermi-walker reference frame. *Physical Review A*, APS, v. 81, n. 5, p. 052117, 2010. Citado na página [12](#).
- BAKKE, K.; FURTADO, C. The analogue of the aharonov-bohm effect for bound states for neutral particles. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 26, n. 18, p. 1331–1341, 2011. Citado 2 vezes nas páginas [35](#) e [60](#).
- BAKKE, K.; FURTADO, C. On the aharonov-casher system and the landau-aharonov-casher system confined to a two-dimensional quantum ring. *Journal of mathematical physics*, American Institute of Physics, v. 53, n. 2, p. 023514, 2012. Citado 2 vezes nas páginas [11](#) e [35](#).
- BALATSKY, A.; ALTSHULER, B. Persistent spin and mass currents and aharonov-casher effect. *Physical review letters*, APS, v. 70, n. 11, p. 1678, 1993. Citado 3 vezes nas páginas [11](#), [12](#) e [35](#).
- BAWIN, M.; COON, S. Neutral atom and a charged wire: From elastic scattering to absorption. *Physical Review A*, APS, v. 63, n. 3, p. 034701, 2001. Citado na página [12](#).
- BERRY, M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 392, n. 1802, p. 45–57, 1984. Citado 2 vezes nas páginas [11](#) e [31](#).

- BEZERRA, V.; SANTOS, I. dos. Topological effects due to a cosmic string. *European journal of physics*, IOP Publishing, v. 13, n. 3, p. 122, 1992. Citado 2 vezes nas páginas [12](#) e [60](#).
- BLOCH, F. Josephson effect in a superconducting ring. *Physical Review B*, APS, v. 2, n. 1, p. 109, 1970. Citado na página [34](#).
- BUENO, M. et al. Quantum dot in a graphene layer with topological defects. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 129, p. 1–11, 2014. Citado na página [12](#).
- BYERS, N.; YANG, C. Theoretical considerations concerning quantized magnetic flux in superconducting cylinders. *Physical review letters*, APS, v. 7, n. 2, p. 46, 1961. Citado 3 vezes nas páginas [12](#), [33](#) e [65](#).
- CAMBLONG, H. E. et al. Renormalization of the inverse square potential. *Physical review letters*, APS, v. 85, n. 8, p. 1590, 2000. Citado na página [55](#).
- CHAMBERS, R. Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux. *Physical Review Letters*, APS, v. 5, n. 1, p. 3, 1960. Citado na página [23](#).
- CHEN, C.-C. Topological quantum phase and multipole moment of neutral particles. *Physical Review A*, APS, v. 51, n. 3, p. 2611, 1995. Citado 7 vezes nas páginas [11](#), [13](#), [29](#), [37](#), [39](#), [40](#) e [45](#).
- CIMMINO, A. et al. Observation of the topological aharonov-casher phase shift by neutron interferometry. *Physical review letters*, APS, v. 63, n. 4, p. 380, 1989. Citado na página [28](#).
- CLAUS, P. et al. Black holes and superconformal mechanics. *Physical Review Letters*, APS, v. 81, n. 21, p. 4553, 1998. Citado na página [12](#).
- COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. Quantum mechanics, volume 1. *Quantum Mechanics*, v. 1, p. 898, 1986. Citado na página [16](#).
- COON, S. A.; HOLSTEIN, B. R. Anomalies in quantum mechanics: the $1/r^2$ potential. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 70, n. 5, p. 513–519, 2002. Citado na página [55](#).
- COSTA, R. da. Quantum mechanics of a constrained particle. *Physical Review A*, APS, v. 23, n. 4, p. 1982, 1981. Citado 2 vezes nas páginas [60](#) e [85](#).
- DANTAS, L.; FURTADO, C.; NETTO, A. S. Quantum ring in a rotating frame in the presence of a topological defect. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 379, n. 1-2, p. 11–15, 2015. Citado 3 vezes nas páginas [12](#), [34](#) e [65](#).
- DENIS, M. et al. Enhanced p, t-violating nuclear magnetic quadrupole moment effects in laser-coolable molecules. *The Journal of Chemical Physics*, AIP Publishing LLC, v. 152, n. 8, p. 084303, 2020. Citado na página [11](#).
- DENSCHLAG, J.; UMSHAUS, G.; SCHMIEDMAYER, J. Probing a singular potential with cold atoms: A neutral atom and a charged wire. *Physical review letters*, APS, v. 81, n. 4, p. 737, 1998. Citado na página [12](#).

- ESSIN, A. M.; GRIFFITHS, D. J. Quantum mechanics of the $1/x^2$ potential. *American journal of physics*, American Association of Physics Teachers, v. 74, n. 2, p. 109–117, 2006. Citado na página 55.
- FLAMBAUM, V.; DEMILLE, D.; KOZLOV, M. Time-reversal symmetry violation in molecules induced by nuclear magnetic quadrupole moments. *Physical review letters*, APS, v. 113, n. 10, p. 103003, 2014. Citado na página 11.
- FONSECA, I.; BAKKE, K. Aharonov–anandan quantum phases and landau quantization associated with a magnetic quadrupole moment. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 363, p. 253–261, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 32.
- FONSECA, I.; BAKKE, K. On an atom with a magnetic quadrupole moment subject to harmonic and linear confining potentials. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society Publishing, v. 471, n. 2184, p. 20150362, 2015. Citado na página 12.
- FONSECA, I.; BAKKE, K. Quantum aspects of a moving magnetic quadrupole moment interacting with an electric field. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing LLC, v. 56, n. 6, p. 062107, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 12, 36, 52 e 84.
- FONSECA, I.; BAKKE, K. Rotating effects on an atom with a magnetic quadrupole moment confined to a quantum ring. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 131, p. 1–6, 2016. Citado na página 12.
- FROLOV, V.; SKARZHINSKY, V.; JOHN, R. A gravitational aharonov-bohm effect due to the rotation of a massive body. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, Springer, v. 99, n. 1, p. 67–75, 1987. Citado na página 60.
- FURTADO, C.; BEZERRA, V.; MORAES, F. Aharonov–bohm effect for bound states in kaluza–klein theory. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 15, n. 04, p. 253–258, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 60.
- FURTADO, C.; BEZERRA, V. B.; MORAES, F. Quantum scattering by a magnetic flux screw dislocation. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 289, n. 3, p. 160–166, 2001. Citado na página 12.
- FURTADO, C.; RIBEIRO, C. de L.; AZEVEDO, S. Aharonov–bohm effect in the presence of a density of defects. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 296, n. 4-5, p. 171–175, 2002. Citado na página 12.
- GAO, X.-C.; QIAN, T.-Z. Aharonov-anandan phase and persistent currents in a mesoscopic ring. *Physical Review B*, APS, v. 47, n. 12, p. 7128, 1993. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 35.
- GIL, A.; SEGURA, J.; TEMME, N. M. Evaluation of the modified bessel function of the third kind of imaginary orders. *Journal of Computational physics*, Elsevier, v. 175, n. 2, p. 398–411, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 55, 71 e 81.
- GRIFFITHS, D. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2016. ISBN 9781107179868. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=0h-nDAAQBAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 67.

GUPTA, K. S.; RAJEEV, S. Renormalization in quantum mechanics. *Physical Review D*, APS, v. 48, n. 12, p. 5940, 1993. Citado na página 55.

HASSANABADI, H.; MONTIGNY, M. de; HOSSEINPOUR, M. Interaction of the magnetic quadrupole moment of a non-relativistic particle with an electric field in a rotating frame. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 412, p. 168040, 2020. Citado na página 11.

HE, X.-G.; MCKELLAR, B. H. Topological phase due to electric dipole moment and magnetic monopole interaction. *Physical Review A*, APS, v. 47, n. 4, p. 3424, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 28.

HEHL, F. W.; NI, W.-T. Inertial effects of a dirac particle. *Physical Review D*, APS, v. 42, n. 6, p. 2045, 1990. Citado 3 vezes nas páginas 78, 82 e 86.

IMRY, Y. *Introduction to mesoscopic physics*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2002. Citado na página 33.

JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 36.

KHARZEEV, D. E.; YEE, H.-U.; ZAHED, I. Anomaly-induced quadrupole moment of the neutron in magnetic field. *Physical Review D*, APS, v. 84, n. 3, p. 037503, 2011. Citado na página 11.

KRONBERG, P. P. et al. Measurement of the electric current in a kpc-scale jet. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 741, n. 1, p. L15, 2011. Citado na página 40.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum mechanics: non-relativistic theory*. [S.l.]: Elsevier, 2013. v. 3. Citado na página 56.

LEPOUTRE, S. et al. He-mckellar-wilkens topological phase in atom interferometry. *Physical Review Letters*, APS, v. 109, n. 12, p. 120404, 2012. Citado na página 29.

LOSS, D.; GOLDBART, P.; BALATSKY, A. Berry's phase and persistent charge and spin currents in textured mesoscopic rings. *Physical review letters*, APS, v. 65, n. 13, p. 1655, 1990. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 35.

LOSS, D.; GOLDBART, P. M. Persistent currents from berry's phase in mesoscopic systems. *Physical Review B*, APS, v. 45, n. 23, p. 13544, 1992. Citado na página 35.

LÜTFÜOĞLU, B. C. et al. Interaction of the magnetic quadrupole moment of a non-relativistic particle with an electric field in the background of screw dislocations with a rotating frame. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 96, n. 1, p. 015005, 2020. Citado na página 11.

MAISON, D. et al. Search for cp-violating nuclear magnetic quadrupole moment using the luoh+ cation. *The Journal of Chemical Physics*, AIP Publishing LLC, v. 153, n. 22, p. 224302, 2020. Citado na página 11.

MAJUMDER, S.; DAS, B. Relativistic magnetic quadrupole transitions in be-like ions. *Physical Review A*, APS, v. 62, n. 4, p. 042508, 2000. Citado na página 11.

- MATHUR, H.; STONE, A. D. Persistent-current paramagnetism and spin-orbit interaction in mesoscopic rings. *Physical Review B*, APS, v. 44, n. 19, p. 10957, 1991. Citado na página 11.
- MATHUR, H.; STONE, A. D. Quantum transport and the electronic aharonov-casher effect. *Physical review letters*, APS, v. 68, n. 19, p. 2964, 1992. Citado na página 11.
- MEDEIROS, E. F.; MELLO, E. Bezerra de. Relativistic quantum dynamics of a charged particle in cosmic string spacetime in the presence of magnetic field and scalar potential. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 72, n. 6, p. 2051, 2012. Citado na página 12.
- NETO, J. A.; BUENO, M.; FURTADO, C. Two-dimensional quantum ring in a graphene layer in the presence of a aharonov-bohm flux. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 373, p. 273–285, 2016. Citado na página 12.
- NETO, J. A. et al. Quantum ring in gapped graphene layer with wedge disclination in the presence of a uniform magnetic field. *The European Physical Journal Plus*, Springer Berlin Heidelberg, v. 133, n. 5, p. 185, 2018. Citado na página 12.
- NETTO, A. S.; CHESMAN, C.; FURTADO, C. Influence of topology in a quantum ring. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 372, n. 21, p. 3894–3897, 2008. Citado na página 12.
- NIZAMIDIN, H. et al. Quantum phase for an electric quadrupole moment in noncommutative quantum mechanics. *Frontiers of Physics*, Springer, v. 9, p. 446–450, 2014. Citado na página 11.
- OH, S.; RYU, C.-M. Persistent spin currents induced by the aharonov-casher effect in mesoscopic rings. *Physical Review B*, APS, v. 51, n. 19, p. 13441, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 35.
- OLIVEIRA, C. R. D.; ROMANO, R. G. A new version of the aharonov-bohm effect. *Foundations of Physics*, Springer, v. 50, n. 3, p. 137–146, 2020. Citado na página 12.
- PAGE, L. A. Effect of earth's rotation in neutron interferometry. *Physical Review Letters*, APS, v. 35, n. 8, p. 543, 1975. Citado 3 vezes nas páginas 78, 82 e 86.
- PESHKIN, M. The aharonov-bohm effect part one: Theory. *The Aharonov-Bohm Effect*, Springer, p. 1–34, 1989. Citado na página 62.
- QIAN, T.-Z.; SU, Z.-B. Spin-orbit interaction and aharonov-anandan phase in mesoscopic rings. *Physical review letters*, APS, v. 72, n. 15, p. 2311, 1994. Citado na página 11.
- RADT, H.; HURST, R. Magnetic quadrupole polarizability of closed-shell atoms. *Physical Review A*, APS, v. 2, n. 3, p. 696, 1970. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- RIBEIRO, C. de L.; FURTADO, C.; MORAES, F. Bound states in the dynamics of a dipole in the presence of a conical defect. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 20, n. 26, p. 1991–1995, 2005. Citado na página 55.
- RIBEIRO, L.; FURTADO, C.; NASCIMENTO, J. Landau levels analog to electric dipole. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 348, n. 3-6, p. 135–140, 2006. Citado na página 12.

- RIBEIRO, L. et al. Landau analog levels for dipoles in non-commutative space and phase space: Landau analog levels for dipoles. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 56, p. 597–606, 2008. Citado na página 12.
- SAFRONOVA, U. et al. Electric-dipole, electric-quadrupole, magnetic-dipole, and magnetic-quadrupole transitions in the neon isoelectronic sequence. *Physical Review A*, APS, v. 64, n. 1, p. 012507, 2001. Citado na página 11.
- SILVA, W. da; BAKKE, K. Topological effects of a spiral dislocation on quantum rings. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 421, p. 168277, 2020. Citado na página 60.
- SUSHKOV, O.; FLAMBAUM, V.; KHRIPLOVICH, I. Possibility of investigating p-and t-odd nuclear forces in atomic and molecular experiments. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, v. 87, p. 1521, 1984. Citado na página 11.
- TAKACS, E. et al. Polarization measurements on a magnetic quadrupole line in ne-like barium. *Physical Review A*, APS, v. 54, n. 2, p. 1342, 1996. Citado na página 11.
- TALUKDAR, K. et al. Relativistic coupled-cluster investigation of parity (p) and time-reversal (t) symmetry violations in hgf. *The Journal of Chemical Physics*, AIP Publishing LLC, v. 150, n. 8, p. 084304, 2019. Citado na página 11.
- TAN, W.; INKSON, J. Electron states in a two-dimensional ring-an exactly soluble model. *Semiconductor science and technology*, IOP Publishing, v. 11, n. 11, p. 1635, 1996. Citado na página 45.
- TAN, W.-C.; INKSON, J. Magnetization, persistent currents, and their relation in quantum rings and dots. *Physical Review B*, APS, v. 60, n. 8, p. 5626, 1999. Citado na página 34.
- TKACHUK, V. Binding of neutral atoms to ferromagnetic wire. *Physical Review A*, APS, v. 60, n. 6, p. 4715, 1999. Citado na página 12.
- TONOMURA, A. The aharonov-bohm effect part two: Experiment. *The Aharonov-Bohm Effect*, Springer, p. 35–152, 1989. Citado na página 24.
- TONOMURA, A. et al. Evidence for aharonov-bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave. *Physical review letters*, APS, v. 56, n. 8, p. 792, 1986. Citado na página 23.
- VITÓRIA, R. L. Noninertial effects on a scalar field in a spacetime with a magnetic screw dislocation. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 79, n. 10, p. 844, 2019. Citado na página 12.
- WATSON, G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions*. [S.l.]: The University Press, 1922. v. 3. Citado 3 vezes nas páginas 54, 71 e 81.
- WERNER, S.; STAUDENMANN, J.-L.; COLELLA, R. Effect of earth's rotation on the quantum mechanical phase of the neutron. *Physical Review Letters*, APS, v. 42, n. 17, p. 1103, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 78, 82 e 86.
- WILKENS, M. Quantum phase of a moving dipole. *Physical review letters*, APS, v. 72, n. 1, p. 5, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 28.