



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA
NATUREZA DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

Yohanne Sunally Medeiros Souto de Assis

Algoritmo Chinês para o Cálculo da Raiz Quadrada

Pombal-PB
2023

Yohanne Sunally Medeiros Souto de Assis

**Título do trabalho: Algoritmo Chinês para o Cálculo da
Raiz Quadrada**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática a Distância da Universidade
Federal da Paraíba como requisito para
obtenção do título de licenciada em
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antônio
Xavier de Souza – UFPB

Pombal-PB
2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A848a Assis, Yohanne Sunally Medeiros Souto de.
Algoritmo chinês para o cálculo da raiz quadrada /
Yohanne Sunally Medeiros Souto de Assis. - João Pessoa,
2023.
35 p. : il.

Orientação: Fernando Antônio Xavier de Souza.
TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) -
Educação a Distância, UFPB, Polo Pombal-PB -
UFPB/CCEN.

1. Matemática. 2. Raiz quadrada - Método Chinês. 3.
Cálculo. I. Souza, Fernando Antônio Xavier de. II.
Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

Algoritmo Chinês para o Cálculo da Raiz Quadrada

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de licenciada em Matemática.

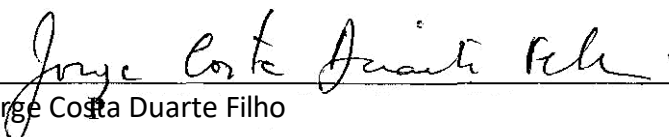
Orientador: Prof. Dr. Fernando Antonio Xavier de Souza — UFPB

Aprovado em. 17 / 11 /2023

COMISSÃO EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 FERNANDO ANTONIO XAVIER DE SOUZA
Data: 09/12/2023 10:57:00-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Fernando Antonio Xavier de Souza (orientador)


rof. Ms. Jorge Costa Duarte Filho

Documento assinado digitalmente
 PEDRO ANTONIO GOMEZ VENEGAS
Data: 10/12/2023 12:27:33-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Pedro Antonio Gómez Venegas

Dedicatória

Dedico este trabalho as minhas filhas Maria
Júlia e Maria Alice .

AGRADECIMENTOS

À Deus, por todas as vitórias na minha vida!

A meu pai, Francisco que não está presente fisicamente, e minha mãe Romélia, por favorecerem em especial, este momento;

A minha avó Oseni que não está presente fisicamente ,mais seus ensinamentos ficarão para sempre em minha trajetória;

Ao meu esposo, Francisco Juvenil, pelo apoio;

As minhas filhas, Maria Júlia e Maria Alice, a razão que não me faz persistir;

Aos meus sogros Paulo Ney e Lucila pelo incentivo;

Ao meu orientador Dr. Fernando Antônio Xavier de Souza, pelo estímulo e colaboração nessa trajetória;

Aos colegas, pelas trocas de experiências, pelo convívio, pelas alegrias e incertezas, por todos esses momentos vividos juntos e partilhados.

A tarefa do educador dialógico é, trabalhando em equipe interdisciplinar este universo temático recolhido na investigação, devolvê-lo, como problema, não como dissertação (...).

Paulo Freire

RESUMO

O cálculo da raiz quadrada é uma operação matemática que acompanha todos os níveis escolares, revela-se um grande desafio para estudantes e professores, pois os estudantes enfrentam a dificuldade de entender as operações e os professores têm dificuldades de encontrar a metodologia adequada, facilitadora para ensinar os cálculos de encontrar as raízes exatas e não exatas. No decorrer da história da matemática, foram desenvolvidos vários algoritmos que tornam possível calcular, aproximadamente, raízes quadradas. O método chinês consiste em somar ou subtrair os números ímpares consecutivos, começando pelo número 1 até obter o número desejado e depois contar quantos passos precisou para chegar ao resultado final. Dessa forma o objetivo desse trabalho é apresentar conhecimento sobre o Algoritmo Chinês, e sua utilidade no cálculo da raiz quadrada. O desenvolvimento desse trabalho foi realizado a partir de uma pesquisa bibliográfica de cunho qualitativa, que se define como a modalidade de estudo que se propõe a realizar análises históricas de estudos ou processos tendo como material de análises documentos escritos e/ou produções culturais garimpados a partir de arquivos e acervos publicados em livros, artigos científicos e páginas da Internet. O trabalho está dividido em três partes, sendo a primeira parte a apresentação da proposta de trabalho. No Capítulo 1, exploramos o conceito comum de raízes quadradas, os algoritmos mais comuns que ensinamos em nossas salas de aula e métodos geométricos para encontrar raízes quadradas, que foram combinados com o que Descartes apresentou em sua Geometria. No Capítulo 2, uma abordagem histórica é usada para derivar algumas técnicas de extração de raízes em diferentes momentos da história de diferentes povos e civilizações. No Capítulo 3, apresentação do método novo para extração de raízes quadradas apresentado pelo professor matemático sergipano Jonofon Sérates. A construção do conhecimento exige novas metodologias e ambientes diferenciados de aprendizagem, pois, cada sala é formada por um grupo heterogêneo de estudantes. Sendo que o estudo do método Chinês traz informações que facilitam o entendimento sobre a raiz quadrada,.

Palavras-Chave: Raíz Quadrada. Método Chinês. Cálculo.

ABSTRACT

The calculation of the square root is a mathematical operation that accompanies all school levels, it proves to be a great challenge for students and teachers, as students face the difficulty of understanding the operations and teachers have difficulties in finding the appropriate methodology, facilitating to teach the calculations of finding exact and non-exact roots. Throughout the history of mathematics, several algorithms have been developed that make it possible to calculate, approximately, square roots. The Chinese method consists of adding or subtracting the consecutive odd numbers, starting with the number 1 until you get the desired number and then counting how many steps you need to reach the final result. Thus, the objective of this work is to present knowledge about the Chinese Algorithm, and its usefulness in calculating the square root. The development of this work was carried out based on a qualitative bibliographical research, which is defined as the modality of study that proposes to carry out historical analyzes of studies or processes, having as material for analysis written documents and/or cultural productions mined from archives and collections published in books, scientific articles and Internet pages. . In Chapter 1, we explored the common concept of square roots, the most common algorithms we teach in our classrooms, and geometric methods for finding square roots, which were combined with what Descartes presented in his Geometry. In Chapter 2, a historical approach is used to derive some techniques of root extraction at different times in the history of different peoples and civilizations. In Chapter 3, presentation of the new method for square root extraction The construction of knowledge requires new methodologies and differentiated learning environments, as each room is formed by a heterogeneous group of students. The study of the Chinese method brings information that facilitates the understanding of the square root.

Keywords: Square Root. Chinese Method. Calculation.

SUMÁRIO

1. MEMORIAL DO ACADÊMICO	1
1.1.Histórico da Formação Escolar.....	1
1.2.Histórico de Formação Universitária	1
2. INTRODUÇÃO	3
3. METODOLOGIA.....	5
3.1. CAPÍTULO 1.....	7
3.2. CAPÍTULO 2.....	23
3.3. CAPÍTULO 3.....	28
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	Erro! Indicador não definido.
5. REFERÊNCIAS	25

1. MEMORIAL DO ACADÊMICO

Este memorial tem como objetivo apresentar a trajetória escolar como discente e vivida até hoje. Na sua elaboração consideramos desde a época que iniciei meus estudos na antiga escola primária até a experiência vivida no decorrer do nosso curso superior, incluindo também algumas oportunidades atuei como professor de Matemática. Ademais, consideramos este memorial um trabalho não apenas retrospectivo como também auto avaliativo da nossa jornada até o presente, considerando as dificuldades e conquistas com as quais me deparei, como também se trata de um material necessário à apresentação de nossas possibilidades de concluir mais uma etapa da nossa vida acadêmica. Recordar essa trajetória é ir ao encontro a momentos de timidez, superação, alegrias e decepções.

1.1 Histórico da Formação Escolar

Natural do município de Pombal-PB, filha de pai mecânico de moto e mãe costureira, uma família simples que me educou muito bem, e buscaram na escola um caminho melhor para meu futuro e de minha irmã. Dessa forma iniciei meus estudos cedo indo para escola. Iniciei minha vida acadêmica aos 2 anos e 9 meses de idade na escola privada “Instituto Educacional Coração de Jesus” no município de Pombal-PB, onde cursei até a 4^a (quarta) série do ensino fundamental I anos iniciais. Logo depois passei a estudar o Ensino Fundamental II anos finais, na EEEFM João da Mata e na EEEFM Arruda Câmara foi onde conclui o Ensino Médio aos 15 anos de idade no ano de 2006.

Segundo Santos e Almeida (2012) a Matemática tem assumido uma posição importante na sociedade, na escola, no currículo escolar, mas principalmente na vida de qualquer indivíduo, ela está sempre presente de alguma forma. De acordo com PCNs (1998) ao longo das últimas décadas, o ensino de matemática no Brasil modificou-se radicalmente, abandonando a didática usada anteriormente e trazendo uma nova metodologia, mais atrativa para o ensino da disciplina.

1.2. Histórico de Formação Universitária

No ano de 2008, com 17 anos de idade prestei vestibular pela Universidade Estadual da Paraíba - UEPB onde cursei um período de Licenciatura em Ciências Exatas no município

de Patos – PB, que devido a morte do meu pai tive que trancar o curso. Passei por algumas dificuldades e no mesmo ano fiz vestibular pela Universidade Federal de Campina Grande – UFCG e fui aprovada para o curso de Engenharia de Alimentos na modalidade presencial, nesse período eu fui monitora de projetos de iniciações científicas o PROBEX. Também desenvolvi diversos trabalhos de análises laboratoriais e em 2016 apresentei meu Trabalho de Conclusão de Curso-TCC, com tema – Modelagem Matemática e Propriedades Termo dinâmicas na Secagem da Polpa de Graviola em Leito de Espuma pelos modelos de Page e Midilli, recebendo o título de Bacharel em Engenharia de Alimentos no ano seguinte 2017, nesse período eu lecionava em uma escola estadual de ensino fundamental II anos finais, a disciplina de matemática, em seguida fui nomeada para cargo de Chefe do núcleo de Estatísticas e Coordenadora Regional do Censo Escolar de todas as escolas da 13ª Gerência Regional de Ensino. A matemática sempre me despertou interesse, e em 2019 fui aprovada no curso modalidade a Distância – EAD de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba, polo de Pombal-PB.

2. INTRODUÇÃO

A disciplina matemática ainda é motivo de pânico perante os estudantes, pois seus conceitos e formulas são de difícil compreensão. Segundo dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), sete entre cada dez estudantes apresentam nível de aprendizado matemático insuficiente. Para Rodrigues (2008) o ensino dessa disciplina está cercado de desafios, tanto para professores como para os estudantes, os professores precisam encontrar meios para facilitar esse processo, tais como desenvolver competências, despertar o interesse, romper os paradigmas de que a matemática seja difícil e lidar com a tecnologia em sala de aula.

Segundo Chamie (1990), uma das hipóteses que pode ser levantada a partir daí é a de que quando o aluno não consegue relacionar os conteúdos matemáticos ensinados a ele na escola com sua vivência, suas atividades fora da escola, a tendência é evitar a Matemática por não ter sentido para ele. Para a maioria dos estudantes não há construção do conhecimento matemático. Por isso, em vez de compreenderem passam a memorizar os conteúdos para conseguirem notas nas provas e em vez de desenvolverem raciocínio eles desenvolvem a memória e não buscam o efetivo conhecimento matemático. Com isso uma porcentagem pequena de alunos aprende realmente Matemática, muitos a “odeiam” e outros afirmam não entendê-la.

Dentre os assuntos que geram grande inquietação por parte dos estudantes e professores está o método do cálculo da raiz quadrada, que é um assunto que os estudantes começam a ter contato inicial no ensino fundamental 2, precisamente no 6º ano, ainda com números simples e posteriormente a dificuldade vai aumentando onde os números vão ficando cada vez maiores, complicados de extrair as raízes quadradas.

Segundo Luiz (2023), o cálculo da raiz quadrada é uma operação matemática que acompanha todos os níveis escolares, revela-se um grande desafio para estudantes e professores, pois os estudantes enfrentam a dificuldade de entender as operações e os professores têm dificuldades de encontrar a metodologia adequada, facilitadora para ensinar os cálculos de encontrar as raízes exatas e não exatas. Levando em consideração que a raiz quadrada é uma operação básica e de grande importância para a matemática.

Carvalho (2010) define que a raiz quadrada é um caso particular da radiciação, sendo o mais comum deles. Conhecemos como raiz quadrada a radiciação com índice igual a 2. A raiz quadrada é a operação inversa da potência com o expoente 2, pois quando calculamos a raiz quadrada de um número n positivo, estamos procurando qual número ao

quadrado é igual a n , ou seja, quando multiplicado por si próprio, iguala a n . A raiz quadrada de n , é simbolizada por $\sqrt{n}$, cujo resultado é um número racional, ou pode ser irracional.

No decorrer da história da matemática, foram desenvolvidos vários algoritmos que tornam possível calcular, aproximadamente, raízes quadradas. Apresentaremos, neste trabalho alguns deles, dando ênfase ao algoritmo chinês para o cálculo da raiz quadrada. O método chinês consiste em somar ou subtrair os números ímpares consecutivos, começando pelo número 1 até obter o número desejado e depois contar quantos passos precisou para chegar ao resultado final.

Levando em consideração que a extração de raízes quadradas ainda é uma tarefa de difícil compreensão por parte dos estudantes, o ensino e aprendizagem da matemática devem ser encarados com bastante cautela por parte do professor, ou seja, o professor tem a função de ser inovador, levando em consideração o ambiente ou a realidade em que o mesmo está inserido, relacionando ao contexto para que tudo isso faça sentido. Nesse sentido nada mais apropriado do que trazer para sala de aula a aquisição do conhecimento sobre o Algoritmo Chinês, onde venha possibilitar aos estudantes reflexões sobre ações individuais e coletivas que venham contribuir e impactar a sua vida assim como da sociedade apresentando meios eficientes para o seu aprendizado.

No entanto, deve também entender que, buscar meios facilitadores não é dar a resposta pronta, é ensinar para que o aluno possa dominar essas técnicas mentalmente e não apenas com o auxílio de calculadora, pois quando eles não tiverem a disposição das máquinas, saberão como se sobressai de tais situações. A aprendizagem é a união, do saber e da prática, do olhar e da crítica, do aluno e do professor. Utilizando meios e maneiras variadas no ensino aprendizagem torna o aluno mais eficiente.

Em meio ao mundo tecnológico os professores devem ter a consciência, que o aluno tem em mãos os equipamentos que lhe darão a resposta pronta desses problemas, porém eles não saberão os meios para chegar naquele resultado, tornando, os estudantes condicionados e dependentes intelectualmente das máquinas para obter êxito. No entanto, na literatura tem várias formas de conciliar a tecnologias com os livros didáticos, preservando as fórmulas matemática que é fundamental no processo de ensino aprendizagem da matemática. Uma vez que possibilita os mesmos a serem capazes de solucionar situações problemas que venham a surgir em seu cotidiano. Van de Walle (2009) ressalta a necessidade que os estudantes também sejam capazes de dominar técnicas operatórias de cálculos.

O processo de ensino e aprendizagem na disciplina de Matemática vem crescendo com o passar dos anos, sendo assim, é possível resgatar o método baseado em aproximações para o cálculo de raízes quadradas como o algoritmo chinês, que, embora seja muito antigo, pode ser desconhecido para uma parte dos professores de Matemática. É um método que, se chegassem as nossas salas de aula, permitiria ao aluno encontrar raízes exatas ou não, de modo claro e prático, utilizando conceitos já conhecidos, e podendo melhorar sempre o resultado final com novas aproximações.

Desta forma, provocados a refletir em nossa prática pedagógica, podemos melhorar para que esse aprendizado continue não de forma mecânica, mas significativa na vida dos estudantes em particular.

O trabalho está dividido em três partes, sendo a primeira parte a apresentação da proposta de trabalho. No Capítulo 1, exploramos o conceito comum de raízes quadradas, os algoritmos mais comuns que ensinamos em nossas salas de aula e métodos geométricos para encontrar raízes quadradas, que foram combinados com o que Descartes apresentou em sua Geometria. No Capítulo 2, uma abordagem histórica é usada para derivar algumas técnicas de extração de raízes em diferentes momentos da história de diferentes povos e civilizações. No Capítulo 3, apresentação do método novo para extração de raízes quadradas apresentado pelo professor matemático sergipano Jonofon Sérates.

3. METODOLOGIA

O desenvolvimento desse trabalho foi realizado a partir de uma pesquisa bibliográfica de cunho qualitativo, que se define como a modalidade de estudo que se propõe a realizar análises históricas de estudos ou processos tendo como material de análises documentos escritos e/ou produções culturais garimpados a partir de arquivos e acervos publicadas em livros, artigos científicos e páginas da Internet.

A pesquisa qualitativa é uma forma de estudo que centraliza como as pessoas dão sentido as suas experiências e ao mundo em que vivem, a base da investigação qualitativa reside na abordagem interpretativa da realidade social e tem sua origem na filosofia e nas ciências humanas. Neves (1996) conceitua a pesquisa qualitativa como “um conjunto de diferentes técnicas interpretativas que visam a descrever e a decodificar os componentes de um sistema complexo de significados tem por objetivo traduzir e expressar o sentido dos fenômenos do mundo social”.

Denzin e Lincoln (2011) falam que os pesquisadores desse campo estudam os fatos em seus contextos naturais, tentando entender ou interpretar os fenômenos em termos dos sentidos que as pessoas lhes atribuem. Segundo Barros & Lehfeld (2007) a pesquisa bibliográfica “é a que tenta resolver um problema ou adquirir conhecimentos a partir do emprego predominante de informações advindas de material gráfico, sonoro e informatizado”.

3.1.CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

História da Resolução da Raiz Quadrada

Iniciamos nossa "História dos Algoritmos para Calcular Raízes Quadradas" em culturas que fizeram parte do chamado berço da civilização: os primórdios dos métodos de localização de raízes estão na Mesopotâmia, onde surge uma aproximação de $\sqrt{2}$ que pode ser demonstrada a partir da geometria

Em qualquer conteúdo matemático a abordagem histórica se faz importante. Entender as origens e a evolução de um determinado assunto pode facilitar a sua elucidação, tornando-o mais interessante. Além disso, essa abordagem ajuda a entender que a matemática não é algo acabado, logo, é uma construção humana (sócio histórica).

A seguir serão descritos alguns assuntos importantes da história da matemática que envolvem os assuntos pertinentes ao tema. Esses assuntos serão divididos em três tópicos. O primeiro tópico será sobre a Raiz quadrada, que descreverá como era feita essa operação antes do algoritmo utilizado atualmente. O segundo tópico terá alguns pontos sobre a raiz quadrada na Mesopotâmia. O terceiro tópico pontuará o Algoritmo chinês, através do método chinês, conhecer o método chinês e descrição do método.

Raiz Quadrada

Neste capítulo utilizaremos o método geométrico para encontrar a raiz quadrada e o método das bisseções para encontrar raízes.

Descartes (1596-1650) mostra que a raiz quadrada de um número real não negativo x é o número real y não negativo que ao multiplicarmos por si próprio, é igualado a x . Ou seja, para encontrar a raiz quadrada de um número real $x \geq 0$ é encontrar um outro número real y tal que $y^2 = x$. Geometricamente, este problema pode ser visto como, achar o valor do lado de um quadrado que conhecemos sua área, ou ainda, de forma algébrica, procurando as raízes da equação $x^2 - k = 0$, sendo k um número real positivo.

Segundo Descartes o cálculo explícito de uma raiz quadrada é bem mais complicado do que as quatro operações aritméticas elementares, tendo sido considerada por Descartes como uma quinta operação elementar.

Raiz Quadrada na Mesopotâmia

Na Babilônia os babilônios utilizavam algumas aproximações interessantes de raízes quadradas de números não perfeitos, como $\frac{17}{12}$ para $\sqrt{2}$ e $\frac{17}{24}$ para $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Contudo, a fórmula de aproximação usada pelos babilônios.

$$(a^2 + b)^{\frac{1}{2}} \approx a + \frac{b}{2a}. \quad (\text{I})$$

Encontraram como aproximações de $\sqrt{2}$

$$1 + \frac{25}{60} \approx 1,4166666667. \quad (\text{II})$$

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1,414212963. \quad (\text{III})$$

O tablete da Universidade de Yale, YBC 7289, datado entre 1800 a.C. e 1.600 a.C., mostra a aproximação para $\sqrt{2}$ descrita na equação (III). Este tablete se refere à diagonal de um quadrado, muitos supõem que ele prova que os mesopotâmicos conheciam o Teorema de Pitágoras. Desconhece-se o raciocínio que teria levado os matemáticos da Mesopotâmia aos valores das equações (II) e (III). No caso específico da aproximação $1 + \frac{25}{60}$ imaginasse que se procedeu por tentativa e erro elevando ao quadrado determinados números.

Segundo Roque, e Carvalho (2012), os babilônios, além das quatro operações fundamentais, calculavam também potências e raízes quadradas. Esses cálculos eram registrados em tabletes de argila, e um dos exemplares mais conhecidos desses tabletes é o YBC 728917 (cerca de 1800–1600 a.C.), no qual aparece o cálculo ou uma regra para o cálculo da $\sqrt{2}$.

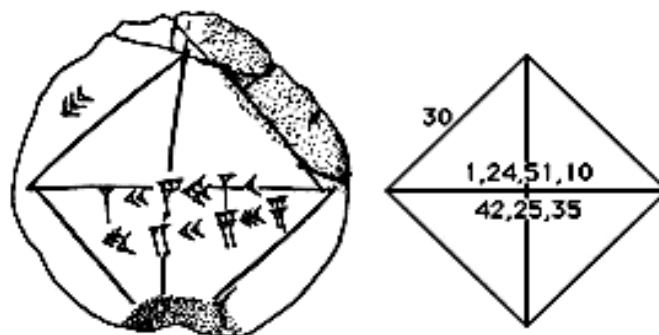


Figura 1: Desenho do tablete de argila babilônico (YBC 7289) da Universidade de Yale.
Fonte: Institute for the Preservation of Cultural Heritage (Apud ROQUE).

Nesta figura é mostrado que eles conseguiram uma boa aproximação para $\sqrt{2}$; Pois temos um quadrado (no qual o lado “s” (acima à esquerda) tem 30 unidades de medida e suas diagonais desenhados. Ao longo de uma diagonal, conforme o sistema numérico sexagesimal posicional babilônico (base 60), aparecem grafados os números: 1,24,51,10 na parte superior e 42,25,35 na parte inferior, que expressam o comprimento da diagonal do quadrado.

Os números 1,24,51,10 representam a aproximação utilizada para o valor de $\sqrt{2}$. Então ao multiplicarmos a medida do lado “s” de um quadrado qualquer por 1,24,51,10, em base 60, obtemos a medida aproximada de sua diagonal “d”. Assim:

$$d = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \quad \text{e} \quad 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2}$$

$$\text{Logo, } 30 \times \left(1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \right) = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2}$$

Conclui-se que, $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ é uma aproximação da diagonal de um quadrado de lado 1.

Segundo Domingues (2009), os gregos questionaram a incomensurabilidade dos números irracionais e Hipaso de Metaponto (século V a.C.), possivelmente, foi quem verificou que o lado e a diagonal de um quadrado não são mensuráveis, entretanto não definiram o número irracional como conhecemos. E Aristóteles expunha, com a técnica de raciocínio por absurdo, a prova da incomensurabilidade dos números irracionais (ROQUE; de Carvalho, 2012).

Em textos religiosos indianos escritos entre 800 e 600 a.C., os *Sulbasutras*, encontram um método ou regra para o cálculo de $\sqrt{2}$, que em notação atual, se traduz em:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34} = \frac{577}{408} \cong 1,414215686 \cong \sqrt{2} \cong 1,414213562 \text{ (o erro é menor do que } 10^{-5} \text{)}.$$

Utilizando um software aplicativo de cálculo como uma planilha eletrônica do Excel ou Calculadora, podemos encontrar facilmente a $\sqrt{2}$ com 14 casas decimais corretas: 1,41421356237310, o que nos faz concluir que a aproximação utilizadas pelos mesopotâmios é correta até a quinta casa decimal de acordo com o resultado encontrado na YBC 7289.

Katz (1998) propôs como aceitável a explicação seguinte para o processo que os Mesopotâmios poderiam ter seguido a fim de determinar esses valores. O mesmo baseou-se em afirmações que existem em algumas tábulas e afirma que se trata de um método no qual

existe alguma evidência textual

Interpretação geométrica do cálculo do valor de $\sqrt{x}$ pelo algoritmo mesopotâmico por falta.

Katz (1998) propõe a seguinte interpretação, de fundo geométrico, para o algoritmo usado pelos mesopotâmios. Geometricamente, calculando $\sqrt{k}$ é encontrar o lado de um quadrado seja ele de área igual a k . Logo, podendo-se tentar inserir no interior deste quadrado o maior quadrado possível cujo lado é conhecido.

Silva (2013) em sua dissertação, ressalta que do ponto de vista geométrico, calcular $\sqrt{x}$ pode ser concebido como a procura do lado de um quadrado com área k . Dessa forma pode-se tentar colocar no interior deste quadrado o maior quadrado possível cujo lado seja um valor conhecido. Para tanto poderia ser utilizada uma das numerosas tábuas de argila que continha números elevados ao quadrado de propriedade dos mesopotâmios.

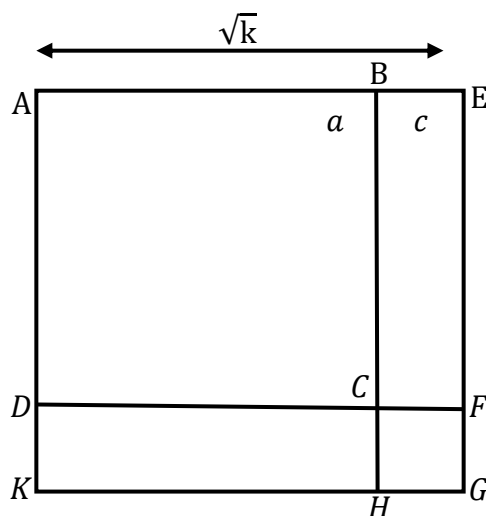


Figura 2: Interpretação Geométrica do Algoritmo mesopotâmico.

Seja “a” o lado deste quadrado conhecido, e c comprimento que é necessário inserir a a com o objetivo de obter $\sqrt{k}$, a partir daí concluir que $a + c = \sqrt{k}$.

Para encontrarmos uma segunda e boa aproximação para $\sqrt{k}$, é o mesmo que encontrar um valor satisfatório para c, o que pode ser realizado examinando a região poligonal *DKGEBC*, chamada gnomon por uma questão analogica pelos gregos.

A área do gnómon é obviamente igual a $k - a^2$, por outro lado podemos observar que ele pode ser decomposto em dois retângulos de lados a e c e mais um quadrado de lado c. Daí temos:

$$2ac + c^2 = k - a^2$$

Se c for um número bem pequeno, podemos desprezar c^2 , e obtemos a aproximação

$$c \approx \frac{k - a^2}{2a}$$

Fazendo,
$$a' = a + \frac{k - a^2}{2a}$$

Logo, temos que a' é uma aproximação de $\sqrt{k}$ melhor do que a.

É notório que se $a < \sqrt{k}$, logo temos que, $a' > \sqrt{k}$. Com efeito,

$$a' = a + \frac{k - a^2}{2a} = \frac{a^2 + k}{2a}$$

Sendo assim, teremos que

$$a'^2 - k = \frac{a^4 + 2a^2k + k^2 - 4a^2k}{4a^2} = \frac{(a^2 - k)^2}{4a^2} > 0.$$

Neste sentido da aproximação que foi vista para $\sqrt{2}$, temos que

$$\frac{k - a^2}{2a} = \frac{2 - (1,4)^2}{2,8} \approx 0,01428571429.$$

Por outro lado,

$$\frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 0,01421296963.$$

Tomando o valor obtido em 0,01428571429 e comparando os dois valores acima observamos que o erro cometido é menor do que 0,00007275133.

É importante observar que partindo de uma aproximação para $\sqrt{k}$ por falta, chegamos a uma aproximação a' por excesso. O que acontece se tomarmos, como aproximação inicial para $\sqrt{k}$, $a > \sqrt{k}$ que é o que vamos estudar agora.

Interpretação Geométrica do cálculo do valor de $\sqrt{x}$ pelo algoritmo mesopotâmico por excesso.

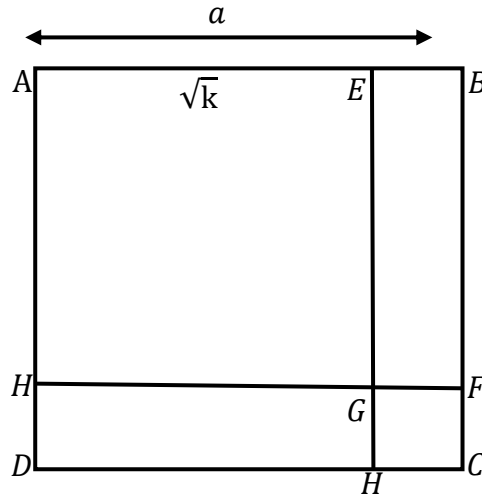


Figura 3: Interpretação Geométrica do Algoritmo mesopotâmico.

Seja a uma aproximação por excesso da $\sqrt{k}$. Então na figura 3 .temos que $a - c = \sqrt{k}$. A área do gnomon $EBCDHG$ é igual a $a^2 - k$. Ele se divide em dois retângulos de lados $a - c$ e c em um quadrado de lado c . Temos portanto,

$$2(a - c)c + c^2 = a^2 - k.$$

Sendo assim, $2ac - c^2 = a^2 - k$. Desprezando o termo c^2 , temos a aproximação c' tal que $2ac' = a^2 - k$, ou seja,

$$c \approx c' = \frac{a^2 - k}{2a}.$$

Sendo assim, a aproximação melhor de $\sqrt{k}$ é obtida tomando a aproximação de $a - c$ dada

$$\text{por } a' = a - c' = a - \frac{a^2 - k}{2a} = a + \frac{k - a^2}{2a}$$

Como $a > \sqrt{k}$, segue-se que $a' > \sqrt{k}$.

Comparando as equações $a' = a + \frac{k - a^2}{2a}$ e $a' = a - c' = a - \frac{a^2 - k}{2a} = a + \frac{k - a^2}{2a}$,

podemos ver que obtivemos o mesmo valor de a' . Assim, independente de primeira aproximação a ser por falta ou por excesso, a segunda, a' será sempre por excesso.

Raiz Quadrada na China

Ao mesmo tempo em que os gregos desenvolviam sua sociedade, as civilizações orientais, como a China, também emergiam. O algoritmo para extração da raiz quadrada, ensinado até hoje em dia nas escolas, é um método bem antigo, por já ser conhecido na China, o que pode ser verificado nos Nove Capítulos do livro sobre a arte matemática que foi escrita na dinastia Han entre (206 a.E.C. -220 E.C), esta obra dos primeiros anos de E.C, é uma cópia dos conhecimentos matemáticos elaborados no milênio passado. Semelhante aos acontecimentos no Egito Antigo e na Mesopotâmia, o livro mostra os resultados sumariamente, sob a forma de problemas, com os procedimentos necessários para encontrar as respostas. Contudo, ao longo dos séculos, foram feitos muitos comentários sobre os nove capítulos, dos quais usarei os apresentados por Lui Hui (263 E.C.); que fornecem uma boa explicação geométrica bem clara sobre o método proposto nos Nove Capítulos para a extração de raízes quadradas.

Interpretação Geométrica do algoritmo Chinês para o Cálculo da Raiz Quadrada

Observe como funciona o algoritmo chinês para extração de raízes quadradas e os + interpretemos geometricamente, seguindo Liu Hui. Para ilustrar o funcionamento do algoritmo chinês iremos nos valer da extração da raiz quadrada $\sqrt{55225}$ que é o problema 12 do capítulo 4 dos Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática. Independentemente de ser quadrado perfeito ou não, o algoritmo dá, um a um, os algarismos da raiz quadrada, qualquer que seja o seu valor posicional. Assim a discussão feita a seguir funciona igualmente para a raiz quadrada de um número qualquer. Contudo, Lui Hui menciona isso explicitamente, quando afirma que a raiz quadrada pode ser calculada além da unidade, “ na parte decimal”. Ele afirma que os algarismos obtidos sucessivamente são considerados numeradores, enquanto que os denominadores são 10,100,...; e deixa evidente que embora o quadrado inicial não tenha sido completamente acabado, a parte negligenciada se torna muito pequena sem necessidade de ser mencionada.

Bastante semelhante aos mesopotâmicos e aos hindus, Liu Hui interpreta a extração da raiz quadrada como achar o lado de um quadrado cuja a área conhecida. Contudo, ao invés de decompor o quadrado, conforme era a prática dos mesopotâmicos e hindus, ele utiliza uma decomposição que é paralela à representação decimal do número cuja raiz quadrada queremos calcular.

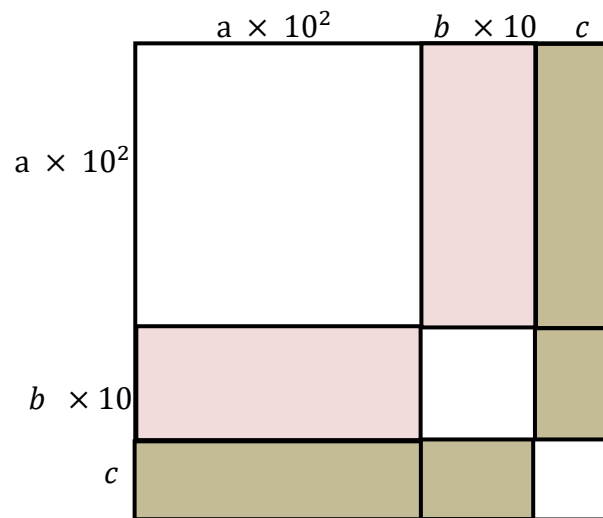


Figura 4: Interpretação Geométrica do Algoritmo Chinês

A figura 4 que está presente nos comentários de Liu Hui, atribui cores para tornar claros os passos sucessivos do algoritmo.

Ela pode ser lida passo a passo, em etapas, enquanto se tenta concluir o quadrado de área dada por quadrados cada vez maiores.

A primeira observação importante é que $\sqrt{55225}$ é um número em cuja representação decimal figuram três algarismos. Basta examinar o número de algarismos de potências sucessivas de 10. Assim, o número $\sqrt{55225}$ se escreve da forma $a \times 10^2 + b \times 10 + c$, ou ainda abc .

Vamos analisar em três etapas, correspondentes a cada um dos algarismos a , b e c .

Primeira etapa – O algarismo das centenas

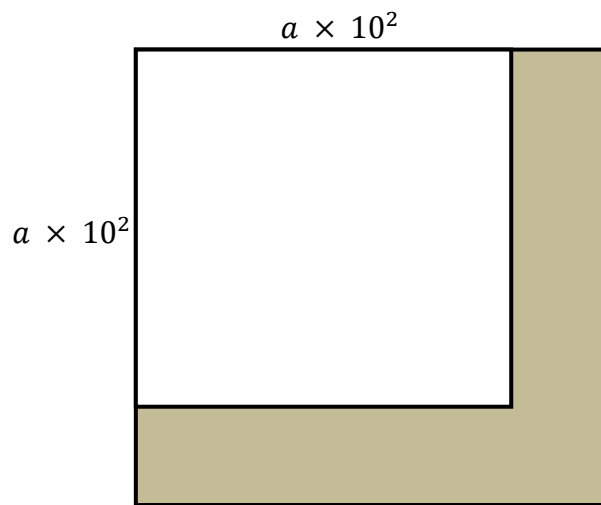


Figura 5: Primeira etapa – o algarismo das centenas

Inicialmente, devemos achar o algarismo das centenas, a , de tal forma que o maior quadrado de lado $a \times 10^2$ esteja contido no quadrado de lado $\sqrt{55225}$, ou seja,

$$(a \times 10^2)^2 \leq 55225 .$$

É fácil observar que, temos $a = 2$, porque ele é um número menor que 3. Assim, temos um quadrado de lado 200 orlado por um gnomon de área $55225 - 200^2 = 15225$.

Segunda etapa - O algarismo das dezenas

Nesta etapa, devemos agora determinar o algarismo, b , das dezenas, que seja o maior possível para que os dois retângulos de lados 200 e $b \times 10$ mais um quadrado de lado $b \times 10$, tenha área menor do que a do gnómon de área 15225 conforme ilustra a figura 6 a seguir, ou seja, ele varia, positivamente entre 1 e 3. Formando uma parábola com a concavidade para cima,

$$2 \times 200 \times b \times 10 + (b \times 10)^2 \leq 15225,$$

$$100b^2 + 4000b \leq 15225$$

Dessa forma, procuramos o maior valor de b tal que, Ou seja,

$$100b^2 + 4000b - 15225 \leq 0$$

Estudando o gráfico da função $f(x) = 100x^2 + 4000x - 15225$,

$$\text{temos que } x = -\frac{4000 \pm \sqrt{2209000}}{200}$$

$$\text{Logo, } x_1 = \frac{7}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{87}{2}$$

Portanto, o valor de b está entre os valores 1,2 e 3, pois o gráfico de $f(x)$ tem concavidade para cima.

Como

$$\text{se } b = 2, \text{ temos: } 2 \times 200 \times 2 \times 10 + (2 \times 10)^2 = 8400 < 15225$$

$$\text{se } b = 3, \text{ temos: } 2 \times 200 \times 3 \times 10 + (3 \times 10)^2 = 12900 \leq 15225$$

Concluimos que $b = 3$. Assim, obtemos, agora um quadrado de lado 230 envolto por um gnómon de área $55225 - (230)^2 = 2325$.

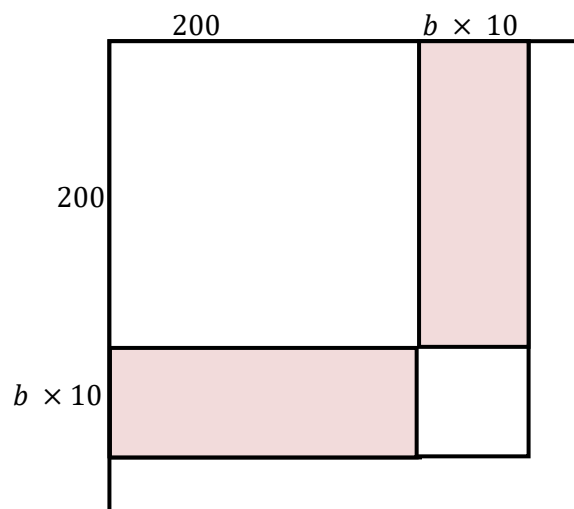


Figura 6: Segunda Etapa- O algarismo das dezenas.

Terceira etapa - O algarismo das unidades

Vamos, agora, encontrar o algarismo das unidades, c , que seja o maior possível maneira que dois retângulos de lados 230 e c mais um quadrado de lado c estejam contidos no gnómon de área 2325, ou seja,

$$2 \times 230 \times c + c^2 \leq 2325.$$

Utilizando a equação de 2º grau

$$c^2 + 460c - 2325 \leq 0.$$

Resolvendo a inequação de modo análogo ao dos algoritmos das dezenas, temos $c = 5$, que corresponde a igualdade, e assim $\sqrt{55225} = 235$.

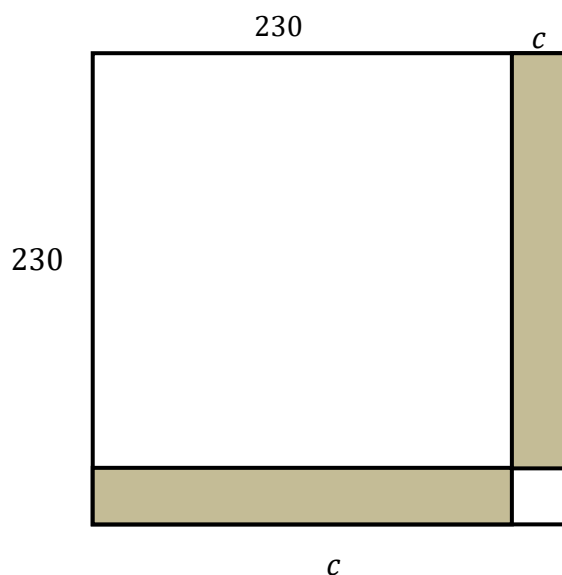


Figura 7: Terceira Etapa- O algarismo das dezenas.

Resolvendo esta inequação, temos que $c = 5$,

É importante destacar uma diferença importante entre este algoritmo e os anteriormente estudados: Agora, cada etapa do algoritmo fornece, sucessivamente, em ordem decrescente, um dos algarismo da representação decimal de $\sqrt{k}$. Nos exemplos mostrados, foram obtidos os resultados sucessivamente de, 200, 230 e 235.

O algoritmo chinês e o algoritmo usual das escolas

Silva (2013) recentemente ensinava-se no Ensino Básico, um algoritmo para achar a raiz quadrada de um número, que era apresentado de forma geral como uma quantidade de procedimentos a serem seguidos, sem qualquer justificativa. Esse procedimento nada mais é do que uma disposição cômoda das manipulações numéricas que se executam usando um processo como o dos Nove Capítulos.

Esta forma de procurar a raiz quadrada se utiliza de uma disposição em forma de quadro dos números envolvidos nesse cálculo, trata-se da representação dos números com um tipo de “barras de calcular”.

Etapa 0 - O Número de Algarismos da raiz quadrada

Iniciamos o processo dividindo o número que se deseja retirar a raiz quadrada em

grupos de dois algarismos andando da direita para a esquerda a partir da vírgula decimal. Se o número tiver uma parte decimal, fazemos a mesma coisa, da esquerda para a direita, a partir da vírgula decimal.

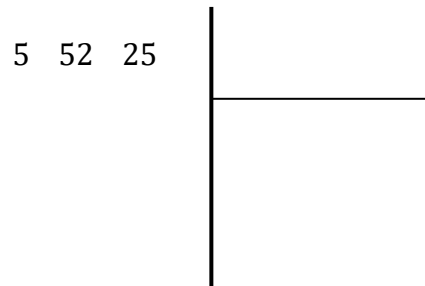


Figura 8: O número de algarismos da raiz quadrada

No nosso caso, a $\sqrt{55225}$, na sua parte inteira, será composta por três algarismos.

Etapa 1 - O Algoritmo das Centenas

Procuramos o maior valor para o número a , tal que $a^2 \leq 5$. Logo, $a = 2$. Elevamos ao quadrado, $2 \times 2 = 4$, e subtraímos do valor 5, resultando 1. O procedimento é disposto nas “barras de calcular” conforme mostra a Figura a seguir.

$$\begin{array}{r|l}
 5 & 2 \\
 52 & \\
 25 & \\
 \hline
 4 & 2 \times 2 \\
 \hline
 1 &
 \end{array}$$

Figura 9: O algoritmo das centenas.

Etapa 2 - O Algoritmo das Dezenas

Para encontrar o algoritmo das dezenas, “baixemos” o bloco de números seguinte, e cortamos o que não nos serve mais (o produto 2×2) e duplicamos o 2 para obter 4.

$$\begin{array}{r|l}
 5 & 2 \\
 52 & \\
 25 & \\
 \hline
 4 & \cancel{2 \times 2} \\
 \hline
 1 & 4 \\
 52 &
 \end{array}$$

Figura 10: O algoritmo das dezenas

Vamos encontrar agora, o maior algarismo b tal que o número que se escreve “4b” multiplicado por b , seja menor do que 152. De forma algébrica, queremos resolver a inequação $(2 \times 20 + b) \times b \leq 152$. Obtemos como resultado $b = 3$. Logo $43 \times 3 = 129$, onde subtraindo de 152, ficamos com resto 23.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 5 \quad \cancel{52} \quad 25 \\
 \hline
 4 \\
 1 \quad 52 \\
 \hline
 1 \quad 29 \\
 \hline
 23
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 2 \\
 \hline
 \cancel{2 \times 2} \\
 43 \times 3
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 11: O algarismo das dezenas

Etapa 3 - O Algarismo das Unidades

Afim de encontrar o algarismo das unidades, “baixemos” o próximo bloco o número (25) e eliminemos o produto 42×3 e dupliquemos o número 23, obtendo 46.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 5 \quad \cancel{52} \quad \cancel{25} \\
 \hline
 4 \\
 1 \quad 52 \\
 \hline
 1 \quad 29 \\
 \hline
 23 \quad 25
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 2 \\
 \hline
 \cancel{2 \times 2} \\
 43 \times 3 \\
 46
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 12: O algarismo das unidades

Procuramos agora o maior algarismo c tal que o número que se escreve na forma “46c” seja tal que multiplicado por c seja menor do que 2325. Isso é queremos resolver a inequação $(2 \times 230 + c) \times c \leq 2325$. Resolvendo essa inequação, facilmente encontramos o valor de $c = 5$. Logo, $465 \times 5 = 2325$, de forma que o resto é zero, e a raiz quadrada é a encontrada na parte de cima à direita do algoritmo.

5 52 25	235
4	<u>2 × 2</u>
<u>1 52</u>	<u>43 × 3</u>
1 29	465 × 5
<u>23 25</u>	
23 25	
<u>0</u>	

Figura 13: O algarismo das unidades

As várias manipulações matemáticas realizadas para a utilização do Algoritmo “algarismo a algarismo” tornam-se mais evidentes se tivermos o trabalho de escrever os zeros necessários para completar as posições decimais no decorrer do cálculo. Pode-se aproveitar para organizar os cálculos intermediários correspondentes às desigualdades com os produtos que aí resultam.

5 52 25	235
4 00 00	200 × 200
<u>1 52 25</u>	
1 29 00	430 × 30
<u>23 25</u>	465 × 5
23 25	
<u>0</u>	

Figura 14: O algarismo das unidades

Interpretação algébrica do algoritmo acima

De forma algébrica, o algoritmo chinês para extração de raízes quadradas, pode ser visto como a utilização repetidas vezes da identidade fundamental,

$$(r + s)^2 = r^2 + (2rs + s^2)$$

Vamos utilizar o mesmo exemplo $\sqrt{55225}$ para mostrar como funciona algebricamente o algoritmo chinês.

O Algoritmo das Centenas

Podemos interpretar algebricamente o valor da raiz escrevendo $\sqrt{55225} = abc = a \times 10^2 + b \times 10 + c$, logo, procuramos o maior valor a tal que $(a \times 10^2)^2 \leq 55225$.

O Algoritmo das Dezenas

Para encontrar o algoritmo das dezenas vamos utilizar a identidade $(r + s)^2 = r^2 + (2rs + s^2)$, aplicada

$$100 \times a \text{ e } 10 \times b$$

$$(200 + b \times 10)^2 = 200^2 + 2 \times 200 \times b \times 10 + (b \times 10)^2$$

Observando bem, os dois últimos termos que estão do lado direito desta igualdade são exatamente os mesmos da inequação $100b^2 + 4000b \leq 15225$, e podem ser escritos na forma

$$2 \times 200 \times b \times 10 + (b \times 10)^2 = (2 \times 200 + b \times 10) \times b \times 10$$

Logo, substituindo, temos da página 25 uma desigualdade parte I : $100b^2 + 4000b - 15225 \leq 0$.

$430 \times 30 = 12900$ O que corresponde a segunda etapa da parte II do algoritmo das dezenas . Algoritmo das Unidades Vamos utilizar, mais uma vez, a identidade. Para situação ela se torna,

$$(230 + c)^2 = 230^2 + (2 \times 230 \times c + c^2) = 230^2 + (2 \times 230 + c) \times c$$

Novamente os dois termos à direita da igualdade são os mesmos da desigualdade. Assim, procuramos o maior valor de b tal que.

$$2 \times 230 \times c + c^2 \leq 2325$$

Achamos, $c = 5$.

3.2.CAPÍTULO 2

Método de encontrar raízes usado pelos arquitetos europeus no século X

Dennis apresentou um método pesquisado por uma estudante de arquitetura na Universidade da Califórnia, onde foi investigado como arquitetos europeus do século X aproximavam raízes quadradas. De acordo com o autor, a estudante deparou-se com o procedimento a seguir. Considere a sequência geométrica

$$1; 2; 4; 8; 16; 32; \dots 2^n$$

com uma razão constante de 2. Pense em como seria uma inserção de médias geométricas na sequência. Isto é como alguém poderia refinar ou interpolar a sequência de tal modo a que se mantenha uma sequência geométrica (i.e. termos consecutivos com uma razão constante). O que se quer é a sequência:

$$1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8, 8\sqrt{2}, 16, 16\sqrt{2}, 32, \dots (\sqrt{2}^n)$$

Agora começa-se por fazer uma suposição a $\sqrt{2}$. Por exemplo, vamos começar com o palpite bruto $\sqrt{2} \approx 1$. A sequência torna-se então: 1; 1; 2; 2; 4; 4; 8; 8; 16; 16; 32; ... A partir desta sequência, forma-se então uma nova sequência na qual cada novo termo é a soma de dois termos consecutivos na anterior (da mesma forma que gera um Triângulo de Pascal). Ao fazer isso a cada nova sequência, vem cada vez mais perto de ter uma relação comum de $\sqrt{2}$,

Continuando a sequência como exemplo:

1	1	2	2	4	4	8	8	16	16	32	32
	2	3	4	6	8	12	16	24	32	48	64
		5	7	10	14	20	28	40	56	80	112
			12	17	24	34	48	68	96	136	192
				29	41	58	82	116	164	232	328
					70	99	140	198	280	396	560
						169	239	338	478	676	956
							408	577	816	1154	1632
								985	1393	1970	2786
									2378	3363	4756
										5741	8119

Não é necessário fazer a soma final. A raiz quadrada de 2 é a aproximação da razão entre os dois números finais.

$$\frac{8119}{5714} \approx 1,414213552 \dots$$

Uma calculadora moderna daria como resultado, $\sqrt{2} \approx 1,414213552$. Logo, o algoritmo utilizado pelos antigos arquitetos gerava uma aproximação de sete casas decimais para o valor de $\sqrt{2}$.

Justificativa do método

Os arquitetos europeus organizavam a sequência e iam somando os termos dois a dois formando algo parecido com o Triângulo de Pascal. Ao final das somas os dois últimos valores encontrados eram efetivados um quociente entre os valores maior e menor, nessa ordem, e dessa forma encontrava-se uma aproximação para a raiz desejada. Essa é a mesma ideia do algoritmo da escada de Theon, basicamente os métodos são exatamente iguais, porém apresentados e desenvolvidos de forma diferente, pois o método de Theon já se aplicava diretamente as recorrências para encontrar os valores necessários para a aproximação. Partindo da ideia apresentada pelos arquitetos vamos escrever a sequência para encontrarmos o valor de $\sqrt{k}$ que seria,

$$1, 1, k, k, k^2, k^2, k^3, k^3, k^4 \dots k^n$$

Onde o valor de n é o número de elementos menos um que iguala ao número de linhas necessárias para obtermos os valores da aproximação.

Analisando a situação caso a caso teríamos para os dois valores iniciais apenas uma linha, pois já chegaremos a quantidade de valores necessários.

$$1 \quad 1$$

Fazendo para três termos teremos $n = 2$, pois seriam necessárias duas linhas do triângulo para chegarmos na aproximação.

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 & & k \\ & 2 & & 1+k & \end{array}$$

Para quatro termos precisaríamos de 3 linhas, ou seja, $n = 3$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & & 1 & & k & & k \\ & 2 & & 1+k & & 2k & \end{array}$$

Para 5 termos na sequência teremos $n = 4$,

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & & 1 & & k & & k & & k^2 \\
 & 2 & & 1+k & & 2k & & k^2+k & \\
 & & 3+k & & 1+3k & & k^2+3k & & \\
 & & & 4k+4 & & k^2+6k+1 & & &
 \end{array}$$

Para a sequência $1; 1; k; k; k^2; k^2$, teríamos 6 termos e $n = 5$ chegando aos termos,

$$k^2 + 10k + 5 \qquad 5k^2 + 10k + 1$$

Aumentando mais um termo para a sequência teríamos $1; 1; k; k; k^2; k^2; k^3$ com $n = 6$ e encontraríamos,

$$6k^2 + 20k + 6 \qquad k^3 + 15k^2 + 15K + 1$$

Para cada “triângulo” de polinômios chegamos aos dois que seria necessário para efetivar a divisão e encontrar a aproximação de $\sqrt{k}$. Vamos definir x_n como sendo a sequência dos polinômios que seriam os denominadores de cada aproximação (os que ficam a esquerda no final de cada “triângulo”) y_n a sequência dos polinômios que seriam os numeradores (ficam à direita no final de cada triângulo). Escrevendo essas sequências teremos:

$$\begin{aligned}
 x_n &= (1, 2, 3+k, 4k+4, k^2+10k+5, 6k^2+20k+6, \dots) \\
 y_n &= (1, 1+k, 1+3k, k^2+6k+1, 5k^2+10k+1, k^3+15k^2+15k+1, \dots)
 \end{aligned}$$

Analisando as sequências podemos chegar a duas recorrências :

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + y_n \\
 y_{n+1} &= y_n + x_n \times k
 \end{aligned}$$

De $x_{n+1} = x_n + y_n$ chegamos aos resultados,

$$y_n = x_{n+1} - x_n \quad y_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1}$$

Substituindo encontramos,

$$\begin{aligned} x_{n+2} - x_{n+1} &= x_{n+1} - x_n + x_n \times k \\ x_{n+2} &= 2x_{n+1} + (k - 1) \times x_n \end{aligned}$$

Daí, obtendo a recorrência linear homogênea de segunda ordem para $n \geq 3$ com $x_1=1$ e $x_2=2$.

$$x_n = 2x_{n-1} + (k - 1) \times x_{n-2}$$

Que é a mesma recorrência utilizada para provar o algoritmo da Escada de Theon. A solução dessa recorrência é do tipo,

$$x_n = p(r_1)^n + q(r_2)^n$$

onde r_1 e r_2 são as raízes da equação característica $x^2 - 2x - (k - 1) = 0$. Resolvendo a equação quadrática encontramos $r_1=1+\sqrt{k}$ e $r_2 = -\sqrt{k}$. Logo a solução da recorrência será do tipo,

$$x_n = p(1 + \sqrt{k})^n + q(1 - \sqrt{k})^n$$

Mas sabemos que $x_1 = 1$ e substituindo em chegamos ao valor para p igual a,

$$p = \frac{1 - q + q\sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}$$

Substituindo agora $x_2 = 2$ e em ficamos com,

$$\frac{1 - q + q\sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \times (1 + \sqrt{k})^2 + q \times (1 - \sqrt{k})^2 = 2$$

Quem tem como resultado,

$$q = \frac{1 - \sqrt{k}}{2 \times (k - \sqrt{k})} = \frac{1 - \sqrt{k}}{2\sqrt{k} \times (k - \sqrt{k})} = \frac{(-1) \times (\sqrt{k} - 1)}{2\sqrt{k} \times (k - \sqrt{k})} = q = -\frac{\sqrt{k}}{2k}$$

encontramos,

$$p = \frac{1}{1 + \sqrt{k}} - \left(-\frac{\sqrt{k}}{2k} \times \left(\frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right) \right) = p = \frac{\sqrt{k}}{2k}$$

Logo ficamos com,

$$x_n = \frac{\sqrt{k}}{2k} [(1 + \sqrt{k})^n - (1 - \sqrt{k})^n]$$

E chegamos ao resultado da outra recorrência,

$$y_n = \frac{1}{2} [(1 + \sqrt{k})^n - (1 - \sqrt{k})^n]$$

Essas soluções das recorrências me permitem encontrar os valores necessários para encontrar a aproximação de $\sqrt{k}$ utilizando tantos termos quanto acharmos necessários. Dividindo as soluções encontradas para os valores finais dos triângulos teremos,

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{\frac{1}{2} [(1 + \sqrt{k})^n - (1 - \sqrt{k})^n]}{\frac{\sqrt{k}}{2k} [(1 + \sqrt{k})^n - (1 - \sqrt{k})^n]}$$

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{k}}{2k}} = \frac{1}{2} \times \frac{2k}{\sqrt{k}} = \frac{y_n}{x_n} = \sqrt{k}$$

É plausível que os arquitetos europeus tenham se baseado no Algoritmo da Escada de Theon para encontrar o valor de raízes quadrada.

3.3.CAPÍTULO 3

Método “Novo” para Extrair Raízes Quadradas : Apresentado pelo Matemático Jonofon Sérates

O método que será apresentado a seguir será um “novo” método apresentado pelo matemático sergipano Jonofon Sérates que tem doutorado em matemática pela Universidade Federal de Brasília. Segundo (KOCHE,2001), o professor Doutor Jonofon Sérates, batizou esse método de extração de raízes quadradas de “ Método Cuca Legal” (MCL), que tem por finalidade subsidiar os professores de matemática da Educação Básica, a fim de esclarecer dúvidas de como apresentar aos alunos a correta manipulação do Algoritmo de extração de raízes quadradas.

A seguir está expresso o passo a passo do procedimento e a justificativa do método utilizado que consiste em subtrairmos do número que queremos extrair a Raíz os números ímpares na sequência até chegar em zero.

Descrevendo o método

Para exemplificar, vamos extrair a raiz quadrada de 1089.

1º Passo: Vamos separar os algarismos de dois em dois da direita para a esquerda.

$$\sqrt{10'89}$$

2º Passo: Do número que fica à esquerda, mais próximo a abertura do radical, iniciar a subtração pela sequência de números ímpares até que a subtração não seja mais definida no conjunto dos números naturais (IN). A quantidade de subtrações realizadas é o primeiro algarismo da raiz quadrada procurada.

$$\sqrt{10'89}$$

$$\frac{-1}{9}$$

$$\frac{-3}{6}$$

$$\frac{-5}{1}$$

$$\sqrt{10'89} = 3$$

$$\frac{-1}{9}$$

$$\frac{-3}{6}$$

$$\frac{-5}{1}$$

3º Passo: Para prosseguir, abaixar a dezena formada seguinte, imediatamente, à direita e

juntar com o resto das subtrações anteriores. Colocar o número 1 abaixo das unidades do número 189 e somar o último ímpar que apareceu dentre as subtrações com valor 1 colocando o resultado ao lado esquerdo do número 1 no resto. Ou seja, fica 5 (último ímpar que foi subtraído) + 1 (fixo) = 6, colocar esse valor ao lado do algarismo 1 formando 61 para reiniciar a subtração.

$\begin{array}{r} \sqrt{10'89} = 3 \\ -1 \\ \hline 9 \\ -3 \\ \hline 6 \\ -5 \\ \hline 189 \\ -61 \\ \hline 128 \\ -63 \\ \hline 65 \\ -65 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} \sqrt{10'89} = 33 \\ -1 \\ \hline 9 \\ -3 \\ \hline 6 \\ -5 \\ \hline 189 \\ \hline -61 \\ \hline 128 \\ -63 \\ \hline 65 \\ -65 \\ \hline 0 \end{array}$
---	---

4º Passo: A quantidade de subtrações realizadas é o segundo algarismo do resultado. Neste caso, como o resto das subtrações foi zero temos uma raiz exata.

$$\begin{array}{r} \sqrt{10'89} = 33 \\ -1 \\ \hline 9 \\ -3 \\ \hline 6 \\ -5 \\ \hline 189 \\ -61 \\ \hline 128 \\ -63 \\ \hline 65 \\ -65 \\ \hline 0 \end{array}$$

Logo, entendemos que para extrairmos raízes quadradas irracionais ou não exatas, procedemos exatamente no mesmo método chinês, ou seja, completando com dois zeros e os associando as casas decimais. A grande percepção desse método é a associação da soma da sequência dos números ímpares menores que o valor da raiz procurada que resulta em um número quadrado o que facilita a extração das raízes.

Como o resultado foi zero significa dizer que a soma da sequência de números ímpares “esgotou” o quadrado inicial. E que o valor de b é a quantidade de números ímpares que faltava para que isso acontecesse, dessa forma, $b = 3$ e $1089 = 33$. Mas se a raiz não for exata, um número irracional por exemplo. Vamos extrair a raiz quadrada de 3 com aproximação de 2 casas decimais.

$$\begin{array}{r} \sqrt{3} \qquad \qquad \sqrt{3} \cong 1,73 \\ \underline{-1} \\ 200 \\ \underline{-21} \\ 179 \\ \underline{-23} \\ 156 \\ \underline{-25} \\ 131 \\ \underline{-27} \\ 104 \\ \underline{-29} \\ 75 \\ \underline{-31} \\ 44 \\ \underline{-33} \\ 1100 \\ \underline{-341} \\ 759 \\ \underline{-343} \\ 416 \\ \underline{-345} \\ 71 \end{array}$$

Para extrairmos raízes irracionais ou não exatas, podemos utilizar o método chinês,

ou seja, com esse método completando com dois zeros e os associando às casas decimais.

O maior benefício de se trabalhar com esse método é a associação que ele permite com a soma da sequência os números ímpares menores que o valor da raiz desejada, que resulta em um número quadrado o que facilitou a extração das raízes.

Para justificar o método

Para justificar o método é fácil perceber que podemos escrever qualquer número quadrado perfeito como a soma dos n primeiros números ímpares menores que o valor que se quer encontrar a raiz quadrada.

Ou seja,

$$a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = 1 + 3 \Rightarrow a_3 = 1 + 3 + 5 \dots$$

$$k = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + a_n$$

Assim, é fácil observar que o 2º membro da última equação é a soma dos termos de uma progressão aritmética onde o $a_1 = 1$ e a razão $r = 2$, logo,

$$a_n = 1 + (n - 1) \times 2$$

$$a_n = 2n - 1.$$

E a soma é dada por:

$$k = \frac{(a_1 + 2n - 1) \times n}{2}$$

$$n = \sqrt{k}$$

O valor de n é o número de parcelas da soma da progressão aritmética. Geometricamente a ideia é ir completando o quadrado com os números ímpares organizando-os de forma a “desgastar” a área inicial.

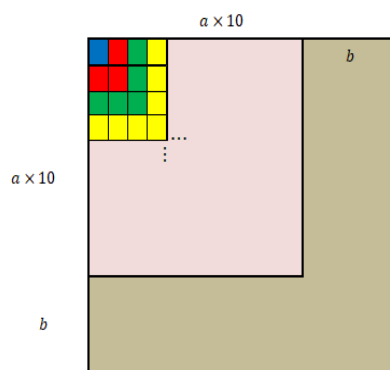


Figura15: Interpretação Geométrica para o método apresentado pelo professor Jonofon Serates.

Sendo assim, a $\sqrt{10'89}$ pode ser escrita na forma ab , onde teríamos que $a \times 10 + b$. E dessa forma,

$$a \times 10 \leq \sqrt{10'89}$$

$$a_n = 2n - 1$$

Utilizando n com sendo 31 os primeiros números ímpares menores que 33 o valor que se quer encontrar na raiz quadrada, temos,

$$a_{31} = 2 \times 31 - 1 = 61$$

$$a^2 \times 10^2 \leq 1089$$

$$a_n = 2n - 1$$

$$a_{31} = 2 \times 31 - 1 = 61$$

$$1089 - a^2 \times 10^2 \leq 0$$

Desta forma, é perceptível que o valor de a^2 é 9 porém o número de termos é exatamente o valor de a , ou seja, 3.

$$a_2 = 9 = (1 + 3 + 5)$$

Sendo assim, temos que $30^2 < 1089$ o que significa que a soma dos 30 primeiros números ímpares é o maior quadrado perfeito múltiplo de dez e menor que o valor que se deseja extrair a raiz quadrada.

A proposta é sempre reiniciar a subtração colocando o número 1 na casa das unidades, dando-se pelo fato de que a quantidade de números ímpares subtraída na verdade ser múltipla de dez. Portanto, sempre o último número ímpar subtraído na sequência tem sua unidade igual a nove e,consequentemente, temos de reiniciar a subtração a contar do algarismo das unidades igual a um.

De forma que n seja um múltiplo de dez, logo podemos escrevê-lo na forma

$n = k \times 10^i$ com k e i números naturais .

$$a_{k \times 10^i} = 2k \times 10^i - 1$$

Como $2k \times 10^i$ é múltiplo de 10, ao subtrairmos 1, obrigatoriamente, o resultado será um número com o algarismo das unidades igual a 9.

Outro exemplo é a de adicionarmos o último ímpar subtraído ao número um e escrevermos no “novo” número ímpar ao lado do número 1 mostrado anteriormente. Como a quantidade é múltipla de dez e o último ímpar é o terminado na unidade 9, todos os outros ímpares que iniciavam com o aquele já subtraído foram computados. Posso escrever, agora, a nova inequação $1089 - (30 + b)^2 \geq 0$, sendo assim precisamos descobrir o valor de b .

Para continuar com o mesmo processo de ir diminuindo os números ímpares precisamos encontrar qual o próximo número ímpar a ser subtraído do resto da operação de $1089 - 900$, porém já visualizamos que foram utilizados 30 números ímpares, e dessa forma, o próximo será o 31º, ou seja,

$$a_n = 2n - 1$$

$$a_{31} = 2 \times 31 - 1 = 61$$

$$189 - 61 = 63 \quad a_n = 2n - 1$$

$$a_{31} = 2 \times 31 - 1 = 61$$

$$65 - 65 = 0$$

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O cálculo da raiz quadrada é uma operação fundamental em matemática, com diversas aplicações em várias áreas. Diversos métodos foram desenvolvidos ao longo do tempo para calcular a raiz quadrada de um número. A escolha do método dependerá das necessidades específicas, da precisão desejada e dos recursos disponíveis. O método Chinês promete facilitar um algoritmo comum conhecido nas escolas de forma que qualquer pessoa possa encontrar o valor da raiz quadrada de um número positivo a partir da subtração. Este método, como todos os outros, pode se tornar cansativo com grandes números e aproximações que exigem muitas casas decimais, mas serve como mais um método para buscar simplificar o cálculo de raízes quadradas, sejam elas exatas ou não, e desta forma, vale a pena o ensinar na escola.

Com o presente estudo do algoritmo chinês para o cálculo da raiz quadrada, foi possível entender que não se deve decorar os métodos de se calcular raízes mas entender e compreender o algoritmo e seu passo a passo. Pois, o mais importante do aprendizado na matemática é ter curiosidade na sua descoberta e querer participar do seu processo de aprendizado, e através disso, poder entendê-la no fim.

5. REFERÊNCIAS

- BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Matemática, Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- CARVALHO, J. B. P. de (2010). *A raiz quadrada ao longo dos séculos*. V Bienal da SBM, 2010. João Pessoa, PB.
- Chamie, L.M.S. A relação aluno-Matemática: alguns dos seus significados. Dissertação de Mestrado, UNESP-Rio Claro, 1990.
- EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. (2006). *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*, Campinas: Autores Associados.
- HODGSON, B. (2008). *Uma breve história da quinta operação*. *Gazeta de Matemática*, 2008. Portugal, n. 156. <https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/8ano/matematica/problemas-envolvendo-o-calculo-da-raiz-quadrada-por-estimativa/519>
- KATZ, Victor. A history of mathematics: an introduction. (2nd ed.) New York: Addison-Wesley, 1998.
- KOCHE, J. C. (2001). *Fundamentos de metodologia científica: Teoria da Ciência e Prática da pesquisa*, Petrópolis: Vozes
- LUIZ, Robson. "Raiz quadrada"; *Brasil Escola*. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/calculo-raiz-quadrada.htm>. Acesso em 03 de janeiro de 2023.
- RODRIGUES, V. A difícil missão de ser professor hoje. *Comércio da Franca*, n ° 20349, 20 out. 2008.
- SERATES, J. (2011). *Métodos cuca legal*. São Paulo: Editora Teixeira.
- SILVA, A.O. O Cálculo da Raiz Quadrada Através dos Séculos, Dissertação de Mestrado, PROFMAT –João Pessoa-PB, junho de 2013.
- VAN de WALLE, John A. Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.