UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA

José Eliton da Silva Costa

Áreas de Fíguras Geométricas Planas

Dezembro/2023
Taperoá - PB

José Eliton da Silva Costa

Áreas de Figuras Geométricas Planas

Trabalho de Conclução de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera

Dezembro/2023
Taperoá - PB

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C838á Costa, José Eliton da Silva.
Áreas de figuras geométricas planas / José Eliton da Silva Costa. - João Pessoa ; Taperoá-PB, 2023.
31 p. : il.

Educação a Distância, UFPB, Polo Taperoá-PB.
Orientação: Pedro Antonio Hinojosa Vera.
TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Geometria. 2. Cálculo de área. 3. Figuras planas. I. Vera, Pedro Antonio Hinojosa. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 51(043.2)

Elaborado por Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB-15/113

Áreas de Figuras Geométricas Planas

Trabalho de Conclução de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera

Aprovado em 12/12/2023

COMISSÃO EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
PEDRO ANTONIO HINOJOSA VERA
Data: 16/12/2023 12:28:57-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera -UFPB (Orientador)

Documento assinado digitalmente
ALESSANDRO MIGNAC CARNEIRO LEAO
Data: 16/12/2023 12:45:05-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Ms. Alessandro Mignac Carneiro Leão - IFSertão - PE (Examinador)

Documento assinado digitalmente
PEDRO ANTONIO GOMEZ VENEGAS
Data: 16/12/2023 14:44:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Pedro Antonio Gómez Venegas - UFPB (Examinador)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder mais uma vitória em minha vida, por me dar força e saúde para superar cada obstáculo encontrado no decorrer dessa minha trajetória.

Agradeço aos meus pais José Edinaldo Costa Batista e Maria José da Silva, a minha vó Odilia Inacia da Silva aos quais passaram sempre os valores mais importantes da vida e que com todo amor e carinho me ajudaram a ser uma pessoa consciente e de caráter.

Agradeço ao meu irmão Edson da Silva, que continuamente impulsionou na minha trajetória e sempre serviu de exemplo para ser quem sou hoje e por abrir as portas do ensino superior na nossa família.

Às minhas irmãs Edna da Silva e Erica da Silva por todo carinho e companheirismo.

A minha namorada Thainara Bonifácio Vicente por todo amor, carinho e dedicação e por me ajudar em todos os momentos dessa minha trajetória.

Aos meus amigos e colegas de curso, Ademar Nunes dos Santos, Poliana Targino Batista e Geraldo Soares Leite Junior por sempre me ajudarem durante esse percurso através de momentos de estudos em conjunto.

À Universidade Federal da Paraíba, à Universidade Aberta do Brasil, ao Centro de Ciências Exatas e da Natureza e ao Departamento de Matemática por me darem a oportunidade de concluir minha segunda graduação no curso de Licenciatura em Matemática.

Ao pólo da UAB em Taperoá - PB, representado pelo coordenador do pólo Vamberto Flávio Teófilo de Oliveira e pela tutora presencial do curso de Matemática Áurea Jane Gonçalves Gouveia, por todo apoio durante os encontros presenciais.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera que pacientemente me orientou durante essa jornada tornando essa etapa mais leve e de grande aprendizagem.

Aos professores Alessandro Mignac Carneiro Leão e Pedro Antonio Gomes Venegas por aceitarem compor a banca examinadora para a defesa deste trabalho.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo da área de figuras geométricas planas, além disso, por meio de uma análise histórica, são apresentados registros das primeiras civilizações que utilizavam o pensamento geométrico em seu cotidiano e as contribuições para o desenvolvimento do cálculo de áreas. O estudo das áreas de figuras planas é abordado de forma simplificada, onde são apresentados fórmulas e métodos para calcular a área de diferentes figuras planas, tais como: retângulos, triângulos e polígonos em geral. Também é abordada a área do círculo, incluindo definições importantes e um método baseado no cálculo de áreas de polígonos em geral. É uma contribuição para o entendimento e aplicação da geometria na resolução de problemas práticos e uma visão histórica sobre o desenvolvimento da geometria.

Palavras - chave: Geometria; Cálculo de Área; Figuras Planas.

Abstract

This work aims to study the area of flat geometric figures, in addition, through a historical analysis, records of the first civilizations that used geometric thinking in their daily lives and the contributions to the development of area calculation are presented. The study of the areas of flat figures is approached in a simplified way, where formulas and methods are presented to calculate the area of different flat figures, such as: rectangles, triangles and polygons in general. The area of the circle is also covered, including important definitions and a method based on calculating the areas of polygons in general. It is a contribution to the understanding and application of geometry in solving practical problems and a historical overview of the development of geometry.

Key words: Geometry; Area Calculation; Flat Figures.

Sumário

Introdução

A geometria é um ramo da matemática com uma história milenar que desempenha um papel fundamental no entendimento e na descrição das formas e estruturas presentes na natureza. No âmbito da geometria plana, a análise das áreas de figuras desempenha um papel central, proporcionando ferramentas essenciais para a compreensão e quantificação de espaços delimitados por linhas e curvas.

O pensamento geométrico tem sua origem nas civilizações antigas, onde as necessidades práticas e a curiosidade intelectual levaram ao desenvolvimento de conceitos fundamentais que formaram a base da geometria e consequentemente seu aprimoramento. Diversas culturas antigas contribuíram para o desenvolvimento dessas ideias, cada uma delas deixando sua marca distintiva no campo da geometria.

Essas civilizações antigas lançaram as bases do pensamento geométrico, integrando-o em suas práticas diárias. O legado de suas descobertas influenciou profundamente o desenvolvimento da geometria, preparando o terreno para os avanços notáveis que viriam nos séculos seguintes. O pensamento geométrico tornou-se uma ferramenta essencial para entender o mundo e foi um precursor para o desenvolvimento da matemática como disciplina.

O trabalho foi dividido em três capítulos, sendo o primeiro dedicado a história por trás de como se iniciou o trabalho com o cálculo de áreas. O segundo capítulo trata-se da apresentação de fórmulas e métodos para o cálculo de área de figuras como retângulos, triângulos e polígonos em geral. Para finalizar, o terceiro capítulo foi dedicado ao estudo da área do círculo, através de uma abordagem que envolveu algumas definições importantes e um método baseado no cálculo de áreas de polígonos em geral apresentado no capítulo dois.

O presente trabalho tem como objetivo o estudo do cálculo de área de figuras geométricas planas iniciando-se através de uma análise histórica e finalizando com a apresentação de fórmulas e métodos para calcular a área de diferentes figuras planas. Conclui-se então que o cálculo de área de figuras planas contribui de fato para um melhor entendimento da geometria e da matemática, o que nos auxilia na resolução de diversos problemas práticos que encontramos no nosso dia a dia.

Capítulo 1

Um Pouco de História

1.1 Introdução

Neste capítulo traremos um relato dos primórdios da geometria passando pelas primeiras civilizações que utilizavam do pensamento geométrico e a utilizavam em seu cotidiano e contaremos um pouco do desenvolvimento do cálculo de áreas de figuras geométricas planas através do conhecimento desses povos.

1.2 Egito

Desde a antiguidade o homem já estava em contato com a natureza e esta lhe proporcionava a interação com uma variedade de formas geométricas ao qual ele já podia realizar comparações entre suas formas e tamanhos de modo a conseguir realizar modificações no ambiente em sua volta. Através desse conhecimento empírico as pessoas dessa época conseguiam produzir ferramentas, construir moradias e principalmente no melhoramento dos processos agrícolas.

Os egípcios já dispunham de conhecimentos relacionados as figuras geométricas de modo que conseguiam resolver problemas relativos as suas construções, ao cultivo da terra e também pela necessidade de remarcar as áreas após a cheia do Rio Nilo, pois quando as águas baixavam era necessário dividir as terras em lotes para a realização do plantio. Esse fato pode explicar a origem da palavra Geometria, que deriva de dois radicais gregos *geo* que significa terra e *metrein* ao qual significa medir, ou seja, significa a medida da terra.

Um exemplo prático do uso dos conceitos geométricos no Egito está na medição das terras após o Rio Nilo baixar suas águas, onde uma corda não elástica com nós igualmente espaçados era esticada a partir de estacas fincadas no solo de modo que em cada estaca ficasse um nó. A primeira e a segunda estaca ficavam a uma distância de três unidades e a terceira estaca ficava em um ponto de modo a obter um triângulo cujos lados medissem 3, 4 e 5 unidades de comprimento (Assis et al, 2008).

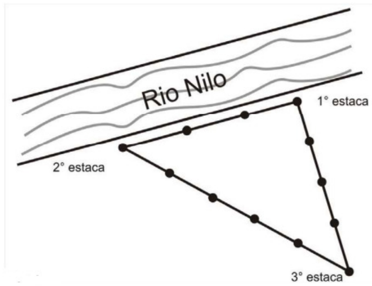

Figura 1.1: Divisão de lotes para o plantio.

Para os trabalhadores egípcios o ato de medir as terras necessitava de algum tipo de conhecimento geométrico para a realização dessas tarefas. A geometria utilizada por esses trabalhadores era proveniente da prática e eram como um conjunto de técnicas que se seguiam rigorosamente. Seus conhecimentos e aplicação da geometria contribuíram para o desenvolvimento de sua civilização e para a construção de algumas das estruturas mais icônicas da história e que estão de pé até os dias atuais.

No Egito, registros iniciais tratando do cálculo de áreas de círculos, retângulos e triângulos ocorreram um pouco depois de 2600 a.C, na época da construção da Grande Pirâmide de Gizé, cuja estrutura grandiosa e sua base quadrada bastante precisa, pressupõem-se uma grande perícia na arte de realizar medições (Junior, 2019, p.04).

Os egípcios ainda foram responsáveis pela criação do Papiro de Rhind, que é um documento desenvolvido por volta de 1800 a.C. Nele, encontram-se 85 problemas tratando de diversos temas da matemática, o de número 50 traz uma grande contribuição para o cálculo da área de círculos, sendo também responsável por apresentar uma boa aproximação para o número π, onde seu valor era de 3,160493.

1.3 Babilônia

Os babilônios também deram grandes contribuições para a matemática especialmente em relação aos sistemas de numeração onde foi possível simplificar cálculos e desenvolver métodos para a resolução de problemas de equações quadráticas e cúbicas. Sua geometria não era tão desenvolvida em relação quando comparada com a matemática numérica, seus conhecimentos geométricos eram rudimentares.

Assim como no Egito a geometria na babilônia tinha como foco o cálculo de comprimentos, de áreas e volumes. Seus conhecimentos buscavam sempre uma aplicação prática. Com a capacidade de calcular áreas de figuras geométricas simples como quadrados e retângulos eles utilizavam desse entendimento para determinar áreas que seriam utilizadas para plantação e também para a construção de moradias.

Com relação a áreas de figuras planas os babilônios possuíam um grande conhecimento para calcular a área de triângulos, no entanto, seus métodos só se aplicavam para casos específicos como triângulos retângulos e o triângulo isósceles. Segundo Luchetta (2008) os babilônios também estavam familiarizados com regras para o cálculo da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo, do volume de um prisma reto de base trapezoidal, do perímetro de uma circunferência, do volume de um tronco de cone e de um tronco de pirâmide quadrangular regular.

Seus conhecimentos eram bastante utilizados na construção civil e na arquitetura para projetar edifícios, templos e canais de irrigação. Vale salientar que os babilônios tinham como limitação uma não formalização teórica desses conhecimentos. Seus cálculos eram contextualizados em torno de situações dos campos agrícola, da construção civil, militar e agrícola.

1.4 Grécia

Após a derrocada egípcia e babilônica a Grécia se tornou a civilização responsável por dá continuidade aos estudos relacionados a geometria, inaugurando assim uma Geometria Moderna, onde ao contrário do que faziam as civilizações anteriores em que o conhecimento matemático tinha um caráter intuitivo e experimental agora a matemática estava firmada no raciocínio lógico dedutivo.

Tales de Mileto (c. 640 - c. 550 a. C) teria sido o primeiro a estudar a geometria na Grécia, além de ser considerado o primeiro filósofo da tradição ocidental. Por isso, ele é considerado o "pai da matemática", segundo historiadores isso se deve pelo fato de que Tales teria sido o primeiro a ir ao Egito e ter contato com o conhecimento desenvolvido por aquela civilização.

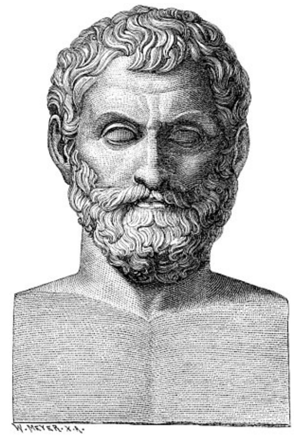

Figura 1.2: Tales de Mileto.

Após Tales, temos Pitágoras de Samos (c. 570 - c. 495 a.C.) contribuiu fortemente para o desenvolvimento da matemática, especialmente para o crescimento da geometria moderna, pois utilizava-se do método dedutivo onde as provas são sempre realizadas a partir de postulados que fundamentam a matemática. Um exemplo se sua importância é o estudo que descreve a relação entre os lados de um triângulo retângulo, que é conhecido até hoje como Teorema de Pitágoras.

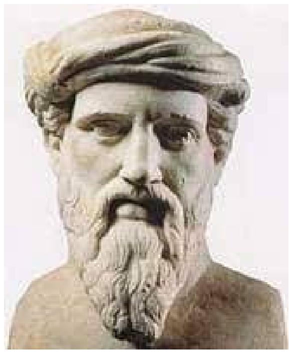

Figura 1.3: Pitágoras.

Os gregos ganharam um grande destaque no desenvolvimento da matemática devido a sistematização desses conhecimentos, ao contrário do que ocorriam com os egípcios e babilônios. Outro estudioso que se destacou nesse período foi Euclides que com sua obra “Os Elementos” a matemática chegou ao ápice na Grécia clássica, além disso, essa obra de Euclides é considerada no campo da matemática a mais brilhante de todos os tempos e também a que mais influenciou no desenvolvimento da matemática (Junior, 2019).

Figura 1.4: Euclides de Alexandria (suposta imagem).

“Os Elementos” é uma obra composta por treze livros onde os primeiros quatro livros tratam da geometria plana. Com isso pode-se observar que a geometria é tratada com grande ênfase, mas traz também conhecimentos da teoria dos números e álgebra elementar. Com relação a geometria e ao cálculo de áreas a obra associa esse conceito com a igualdade entre figuras (Guedes, 2013).

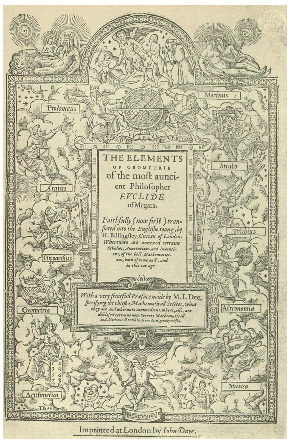

Figura 1.5: Primeira edição de Sir Henry Billingsley em língua inglesa dos “Elementos” de Euclides, de 1570.

Capítulo 2

Áreas de Figuras Planas

2.1 Introdução

Neste capítulo abordaremos o conceito de Áreas, um dos tópicos mais importantes quando tratamos da geometria. Esse estudo será realizado de forma simplificada e tratará da área de algumas figuras planas, ou seja, de algumas regiões poligonais.

O conceito de área pode ser entendido como sendo a medida total de uma superfície. Desse modo, significa trabalhar não só com o contorno de determinada figura, mas todo o espaço que essa figura ocupa dentro de um plano.

2.2 Alguns Conceitos Importantes

Definição 2.1 *Dados três pontos A, B e C, sendo esses pontos não colineares, a reunião dos segmentos de reta $\overline{AB}, \overline{BC}e\overline{AC}$ chama-se de triângulo ABC.*

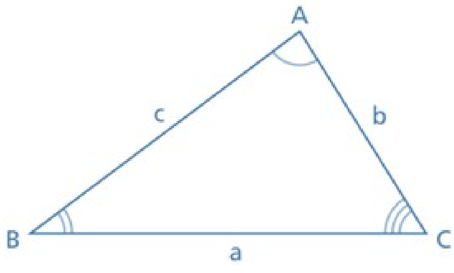

Figura 2.1: Triângulo ABC (DOLCE; POMPEO,2013).

Definição 2.2 *A reunião de todos os pontos localizados na fronteira do triângulo e também dentro do triângulo denomina-se região triangular.*

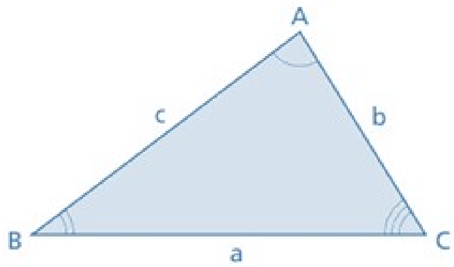

Figura 2.2: Região triangular ABC (DOLCE; POMPEO, 2013).

Definição 2.3 *Uma região poligonal é a reunião de um número finito de regiões triangulares não-sobrepostas e que estão no mesmo plano.*

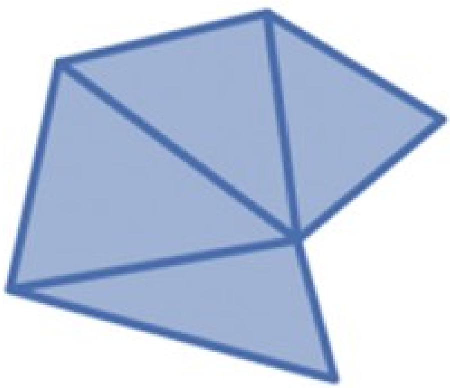

Figura 2.3: Região Poligonal (FREZZA;DIAS, 2017).

Exemplo 2.1 Temos na figura abaixo a representação de um polígono ABCDEFX, ao qual podemos determinar sua área através de sua decomposição em cinco regiões triangulares para em seguida realizarmos a soma dessas áreas triangulares.

Após esse processo fica mais fácil calcularmos a área desse polígono, pois basta somarmos a área de cada triângulo para obtermos a área total do polígono, logo: Área Polígono (ABCDEFX) = $A_1+ A_2+A_3+A_4+A_5$.

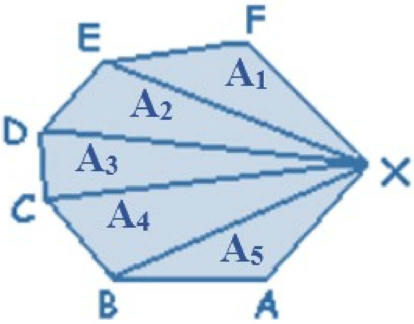

Figura 2.4: Polígono ABCDEFX.

Observação 1 *Se analisarmos bem temos que uma região triangular é em suma uma região poligonal, além disso, uma região poligonal pode conter buracos.*

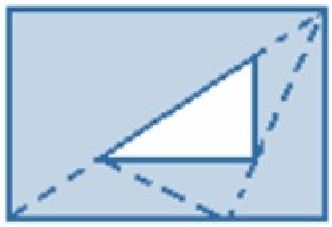

Figura 2.5: Região Poligonal com Buracos (TOFFOLI; SODRÉ, 2020).

Observação 2 *Uma região poligonal pode ser dividida em diversas regiões triangulares e de formas diferentes.*

Para darmos continuidade ao estudo da área de regiões poligonais precisamos relembrar algumas informações importantes.

Axioma 1. A área de uma região poligonal corresponde a um número real positivo, ou seja, um número maior que zero.

Axioma 2. Se dois triângulos são congruentes as regiões por eles delimitadas possuem a mesma área.

Axioma 3. Se uma região poligonal é a reunião de duas ou mais regiões poligonais não-sobrepostas (não tenham pontos interiores em comum), então sua área é a soma de todas essas regiões.

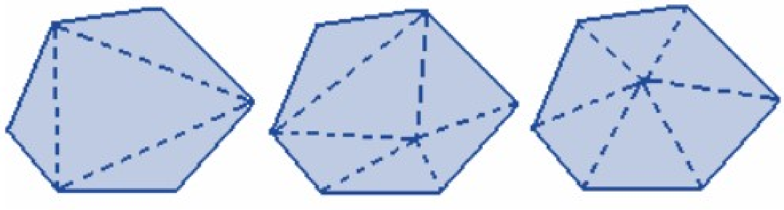

Figura 2.6: Região poligonal dividida em vários triângulos (TOFOLLI; SODRÉ, 2020).

Axioma 4. A área de uma região quadrada de lado a é igual a a^2.

2.3 Área do Retângulo

Teorema 1. *A área de um retângulo é o produto das medidas de sua base por sua altura.*

Demonstração: Consideremos um retângulo com altura a, base b e área A_R, onde vamos considerar os quadrados de lados a, b e $a+b$.

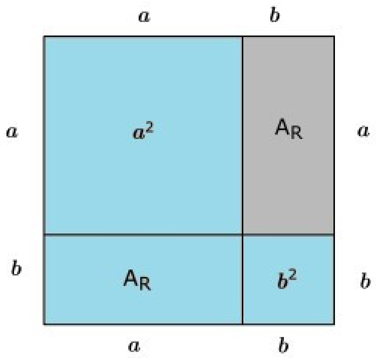

Figura 2.7: Retângulo (PESCO; ARNAUT; 2010).

Pelo Axioma 3 teremos que:

$$a^2 + A_R + A_R + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 + 2A_R + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$A_R = ab$$

2.4 Área do Paralelogramo

Teorema 2. *A área de um paralelogramo é o produto do comprimento de um dos seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado.*

Demonstração: Dado o paralelogramo ABCD vamos traçar dois segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{AF}$ perpendiculares à reta que contém o segmento CD, onde formaremos um retângulo ABFE, cuja área é igual $\overline{AB}.\overline{BF}$.

Figura 2.8: Paralelogramo (SANTOS; VIGLIONE; 2011).

Observando a figura podemos observar que pelo caso LAL de congruência de triângulo, temos que os triângulos ADE e BCF são congruentes, logo:

$$A_{(ABCD)} = A_{(ABCE)} + A_{(ADE)}$$

$$A_{(ABCD)} = A_{(ABCE)} + A_{(BCF)}$$

$$A_{(ABCD)} = A_{(ABFE)}$$

2.5 Área do Triângulo

Teorema 3. *A área de um triângulo retângulo é a metade do produto de sua base por sua altura.*

Demonstração: Dado o triângulo retângulo e sua área seja A. vamos completar esse triângulo de modo que tenhamos um retângulo UVWX como indica a figura abaixo.

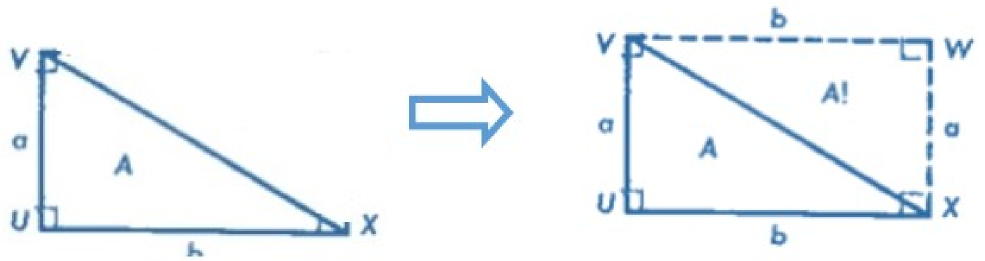

Figura 2.9: Triângulo retângulo (WATANABE; MELLO, 1971).

Pelo caso de congruência LLL, os triângulos UVX e VWX são congruentes e pelo Axioma 2 temos que eles possuem a mesma área. Pelo Axioma 3, teremos que a $A(UVWX) = 2(UVX)$ e pelo Teorema 2 temos que a $A(UVWX) = ab$, logo teremos que:

$$A(UVX) = \frac{ab}{2}.$$

Observação 3 *A partir desse teorema é possível obter a fórmula para a área de qualquer triângulo.*

Teorema 4: *A área de um triângulo é igual à metade do produto de qualquer de seus lados pela altura correspondente.*

Demonstração: Dado o triângulo ABC, onde b representa sua base e h sua altura. A partir disso vamos construir um segundo triângulo com o ponto D sobre a reta paralela AB e passando pelo ponto C. Desse modo, os segmentos AB e CD serão congruentes.

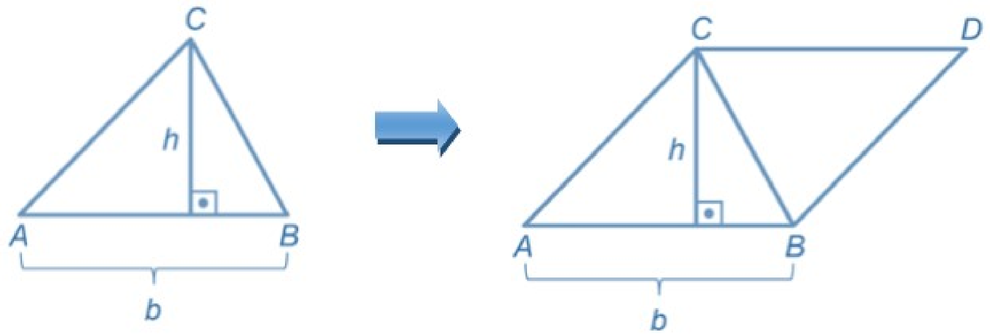

Figura 2.10: Área de um triângulo (FREZZA; DIAS, 2017).

Com isso, temos o quadrilátero ABCD que como vimos anteriormente sua área é $A(ABCD) = b.h$. Além disso, os triângulos ABC e BDC são congruentes pelo caso LLL e pelo Axioma 2, suas áreas são iguais, logo:

$$A(ABC) = A(BDC)$$
$$A(ABCD) = A(ABC) + A(BDC)$$
$$A(ABCD) = 2.A(ABC)$$
$$b.h = 2.A(ABC)$$
$$A(ABC) = \frac{b.h}{2}$$

2.6 Área de um Polígono Qualquer

Nos tópicos anteriores foram conhecidas as áreas do quadrado, retângulo, paralelogramo e do triângulo. Agora, com essas informações pode-se calcular a área de qualquer polígono, basta dividirmos esse polígono em figuras que já sabemos calcular suas devidas áreas e utilizarmos do Axioma 3, ou seja, a área de um polígono será a soma das figuras ao qual o dividimos.

Teorema 5. *A área do trapézio é igual à metade do produto da altura pela soma das medidas de suas bases.*

Demonstração: Dado o trapézio MNPQ em que sua base maior é representada por B e sua base menor representada por b e onde h é sua altura. Em seguida vamos dividir esse trapézio em dois triângulos de modo que pelo Axioma 3 teremos que $A(MNPQ) = A(MNQ) + A(NPQ)$. Como já sabemos calcular a área de um triângulo teremos que:

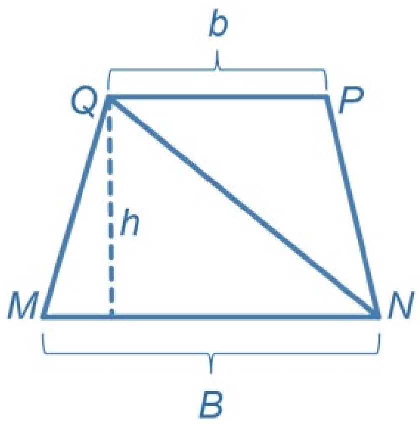

Figura 2.11: Trapézio MNPQ (FREZZA; DIAS, 2017).

Como conhecemos a área de um triângulo teremos que:

$$A(MNPQ) = A(MNQ) + A(NPQ)$$
$$A(MNPQ) = \frac{B.h}{2} + \frac{b.h}{2}$$
$$A(MNPQ) = \frac{B.h + b.h}{2}$$
$$A(MNPQ) = \frac{(B + b).h}{2}$$

Teorema 6. *A área do losango é igual à metade do produto das medidas de suas diagonais.*

Demonstração: Com o conhecimento do cálculo de área de um triângulo temos o losango MNPQ, onde o dividimos em dois triângulos, MQP e MNP. Além disso, a diagonal MP representa a base desses triângulos e sua altura será d/2.

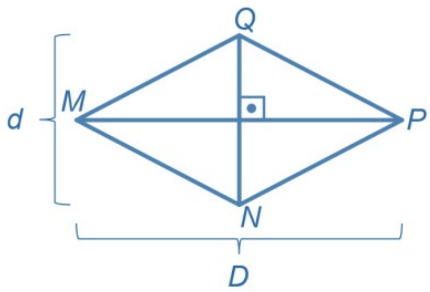

Figura 2.12: Losango MNPQ (FREZZA; DIAS, 2017).

Como os dois triângulos são iguais temos que $A(MNPQ) = A(MQP)+A(MNP)$, logo:

$$A(MNPQ) = A(MQP) + A(MNP)$$

$$A(MQP) = A(MNP) = \frac{D.\frac{d}{2}}{2}$$

$$A(MNPQ) = \frac{D.\frac{d}{2}}{2} + \frac{D.\frac{d}{2}}{2} = \frac{2Dd}{4}$$

$$A(MNPQ) = \frac{Dd}{2}$$

Definição 2.4 *Um polígono que possui todos seus lados e todos os seus ângulos internos congruentes é chamado polígono regular.*

Definição 2.5 *O apótema é o segmento de reta que liga o centro de um polígono regular ao ponto médio de um de seus lados.*

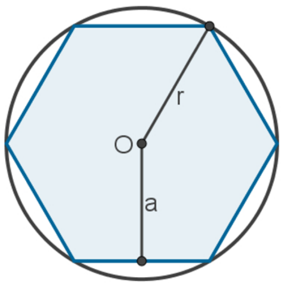

Figura 2.13: Polígono regular inscrito, onde o ponto O é seu centro e o segmento a é o apótema (MOREIRA).

Teorema 7. *A área de um polígono regular é igual a metade do produto de seu apótema pelo seu perímetro.*

Demonstração: Dado o polígono regular de n lados, onde a corresponde o seu apótema e s a medida de cada lado desse polígono. Ao traçarmos os segmentos OR, OL,OT,... o polígono fica dividido em n triângulos congruentes.

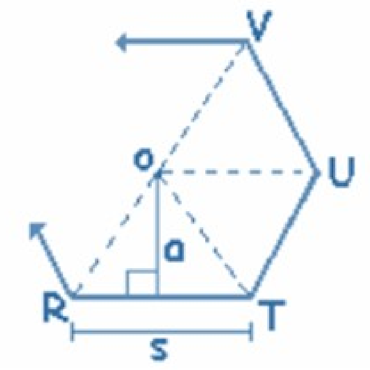

Figura 2.14: Polígono regular de n lados (TOFFOLI; SODRÉ, 2020).

Como visto anteriormente a área de cada um desses triângulos é $A_t = sa/2$, logo a área desse polígono será:

$$A_P = n.A_t = \frac{nsa}{2}$$

Lembrando que $ns = P$, ou seja, o perímetro desse polígono com n lados. Logo a área desse polígono regular com n lados é

$$A_P = \frac{aP}{2}$$

Capítulo 3

Área do Círculo

3.1 Introdução

Apesar do círculo não ser uma região poligonal podemos utilizar os conhecimentos desenvolvidos no capítulo anterior para o cálculo de sua área.

3.2 Algumas definições importantes

Definição 3.1 *A Circunferência é o conjunto de pontos contidos em um plano que estão localizadas a uma mesma distância de um ponto fixo chamado centro da circunferência.*

Definição 3.2 *Círculo é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância ao seu centro é menor ou igual ao seu raio.*

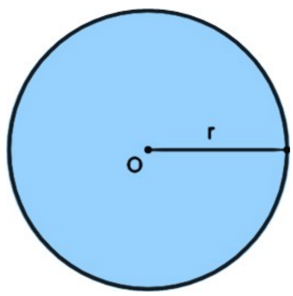

Figura 3.1: Circunferência e Círculo.

Na figura acima podemos observar visualmente a diferença entre a circunferência e o círculo, onde a circunferência estar representada pela linha azul escuro, enquanto o círculo é toda a região representada pela cor azul claro. Lembrando que O é ponto central da figura e r representa o raio.

Definição 3.3 *O número π é obtido pela relação entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência que possui 1 cm de diâmetro.*

$$\pi = \frac{C}{D} = \frac{C}{2r}$$

3.3 Área do Círculo

Definição 3.4 *O perímetro de uma circunferência corresponde ao valor limite dos perímetros dos polígonos regulares inscritos de n lados da circunferência à medida que o número de lados aumenta indefinidamente.*

A figura abaixo mostra uma circunferência de comprimento C e duas opções de polígonos regulares inscritos nela, uma com três lados e outra com dez lados respectivamente.

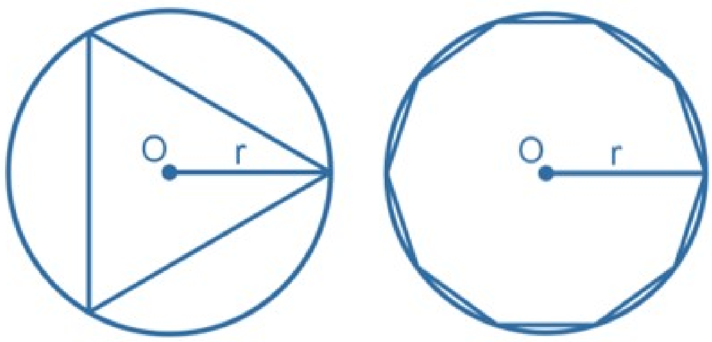

Figura 3.2: Polígono com 3 e 10 lados inscrito em uma circunferência respectivamente (FREZZA; DIAS, 2017).

A partir da figura anterior pode-se observar que a medida que o número de lados do polígono aumenta o perímetro desse polígono se aproxima cada vez mais do comprimento da circunferência, além disso, o perímetro do polígono será sempre menor que o comprimento da circunferência.

Definição 3.5 *A área de um círculo é o limite das áreas das regiões poligonais inscritas no círculo quando o número de lados aumenta indefinidamente.*

Teorema 8. *A área de um círculo C e raio r dado por $A_C = \pi r^2$.*

Demonstração: Dado um polígono regular de n lados inscritos na circunferência de raio r. Nesse caso consideremos o r sendo igual ao apótema desse polígono.

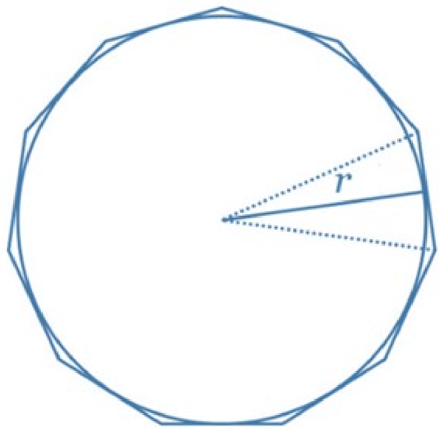

Figura 3.3: Polígono regular de n lados circunscrito na circunferência (KILHIAN, 2009).

De acordo com o Teorema 7 temos que a área de um polígono regular de n lados é dada por:

$$A_P = \frac{nsr}{2}$$

Como a área desse polígono se aproxima da área do círculo teremos que:

$$A_P = \frac{nsr}{2} \cong A_C$$

Repare que n cresce indiscriminadamente, desse modo o polígono de n lados se confunde com o círculo circunscrito, logo podemos aplicar o limite nessa expressão.

$$A_C = \lim_{n\to\infty} \frac{nsr}{2} \tag{3.1}$$

$$C = \lim_{n\to\infty} ns \tag{3.2}$$

Temos ainda que:

$$\pi = \frac{C}{2r} \tag{3.3}$$

Substituindo a equação 3.2 na equação 3.3, teremos que:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{ns}{2r} \tag{3.4}$$

Multiplicando a equação 3.1 por r para o numerador e o denominador, teremos que:

$$A_C = \lim_{n\to\infty} \frac{nsr}{2} \times \frac{r}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{nsr^2}{2r} = r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{ns}{2r} \tag{3.5}$$

ou seja:

$$A_C = r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{ns}{2r}$$

No entanto, como $\lim_{x\to\infty} \frac{ns}{2r} = \pi$, concluímos que:

$$A_C = \pi r^2$$

Referências Bibliográficas

[1] ASSIS, José Gomes, et al. *Licenciatura em Matemática a Distância: volume 3.* 2 ed. João Pessoa: Gráfica UFPB, 2008.

[2] DALTO, Jader O.; TOFFOLI, Sônia F.L.; SODRÉ, Ulysses. *Círculos, circunferências e círculos.* Disponível em < https://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/geometria/circulos.html>. Acesso em 05 de novembro de 2023.

[3] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana.* 9. ed. São Paulo : Atual, 2013.

[4] Ebiografia. *Euclides - Matemático de Alexandria.* Disponível em: https://www.ebiografia.com/euclides/. Acesso em 18 de outubro de 2023.

[5] FREITAS, E. *Pitágoras.* Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/ mitologia/pitagoras.htm. Acesso em 18 de outubro de 2023.

[6] FREZZA, Ednaldo Alves; DIAS, Junior Francisco. *Geometria Plana.* Editora e Distribuidora Educacional S.A. Londrina, 2017.

[7] GUEDES, Aurílio da Silva. *Evolução no Cálculo de Áreas de Figuras Planas: de Arquimedes a Newton.* Dissertaão (Mestrado). Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2013.

[8] JUNIOR. Carlos Corrêa da Silva. *Uma evolução histórica do conceito de área.* Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de São Paulo. São José dos Campos, 2019.

[9] KILHIAN, Kleber. *Demonstração da área do círculo.* Disponível em <https://www.obaricentrodamente.com/2009/08/demonstracao-da-area-do-circulo.html>. Acesso em 05 de novembro de 2023.

[10] LUCHETTA, V. O. J. *História da matemática na Babilônia.* Universidade de São Paulo. Disponível em < https://www.matematica.br/historia/babilonia.html> Acesso em 17 de outubro de 2023.

[11] MOREIRA, Luiz Paulo. Polígonos inscritos e circunscritos. Escola Kids. Disponível em <https://escolakids.uol.com.br/matematica/poligonos-inscritos-circunscritos.htm#>. Acesso em 12 de dezembro de 2023.

[12] NETO, Angelo Papa. *Geometria plana e construções* geométricas. Fortaleza: UAB/IFCE, 2017.

[13] PESCO, Dirce Uesu; ARNAUT, Roberto Geraldo Tavares. *Geometria básica.* 2.ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

[14] SANTOS, A. R. S.; VIGLIONI H. H. B. *Geometria Euclidiana Plana.* São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2011.

[15] TOFFOLI, Sônia F.L.; SODRÉ, Ulysses. *Áreas de regiões poligonais.* Disponível em < https://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/geometria/areas_poligonais.html>. Acesso em 17 de outubro de 2023.

[16] TOFFOLI, Sônia F.L.; SODRÉ, Ulysses. *Áreas de regiões circulares.* Disponível em < http://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/geometria/areas_circulares.html>. Acesso em 05 de novembro de 2023.

[17] WATANABE, R. G.; MELLO, D. A. *Geometria Moderna: Vol. II.* Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo: 1971.

[18] Wikipédia. Tales de Mileto. Disponível em < https://pt.wikipedia.org/wiki/Tales_de_Mileto>. Acesso em 18 de outubro de 2023.

[19] Wikipédia. Os elementos. Disponível em < https://pt.wikipedia.org/wiki/Os_Elementos>. Acesso em 18 de outubro de 2023.