Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

A integral de Lebesgue como o completamento da integral de Riemann

Renato Cândido Dutra de Andrade

João Pessoa
2024

Renato Cândido Dutra de Andrade

A integral de Lebesgue como o completamento da integral de Riemann

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo

João Pessoa
2024

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A536i Andrade, Renato Cândido Dutra de.
A integral de Lebesgue como o completamento da integral de Riemann / Renato Cândido Dutra de Andrade. - João Pessoa, 2024.
72 p.

Orientação: Damião Júnio Gonçalves Araújo.
TCC (Curso de Bacharelado em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Medida e integração de Lebesgue. 2. Integral de Lebesgue. 3. Completude do espaço das funções integráveis. 4. Matemática. I. Araújo, Damião Júnio Gonçalves. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 51(043.2)

Elaborado por Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB-15/113

Renato Cândido Dutra de Andrade

A integral de Lebesgue como o completamento da integral de Riemann

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de bacharel em Matemática. Orientador: Damião Júnio Gonçalves Araújo. Aprovado em: 08/03/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo
Orientador - UFPB - Campus I

Uberlândio Batista Severo.

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo
Avaliador - UFPB - Campus I

Aelson Oliveira Sobral

Prof. Aelson Oliveira Sobral
Avaliador - UFPB - Campus I

A Gutemberg, por me apresentar o caminho.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Sandro e Nilma, por tudo. Do esforço em me proporcionar boa educação formal, em um ambiente em que os estudos foram sempre priorizados, como também por me educarem com os valores que carrego.

Aos meus irmãos, Julyanna e Felipe, que sempre estiveram presentes e me ensinaram tanto.

Ao meu orientador, o professor Damião Araújo, que me orientou por toda graduação e incentivou a perserguir meus estudos e objetivos com intensidade e comprometimento.

Ao meu professor de matemática de ensino fundamental e médio, Gutemberg. Por me apresentar o caminho.

Aos professores da graduação que me marcaram positivamente com boas aulas e boas ideias; dos quais destaco o professor Uberlândio Batista Severo por aceitar fazer parte da avaliação desse trabalho e de minha formação.

Aos meus irmãos mais velhos acadêmicos, Ginaldo Santana e Aelson Oliveira, por terem me ajudado e ensinado ao longo desses anos; agradeço Aelson por ter aceitado fazer parte da avaliação desse trabalho.

Aos meus amigos da graduação, dos quais eu devo gratidão especial à Tarcila, Assuerio, Mateus, Ernesto e João Marcos. Por terem sido meus amigos nos momentos mais difíceis e também nos mais felizes.

O velho sonhava com leões

Resumo

Esse trabalho se propõe a oferecer uma introdução ao estudo da medida e integração de Lebesgue. Motivamos a sua exposição baseada em dois objetivos centrais. Primeiramente, construir de forma natural e motivada os conceitos abstratos da teoria da medida e integração, para que o leitor iniciante possa abstrair as ideias principais e a filosofia central da teoria.

Em segundo lugar, damos um enfoque especial em resolver problemas a respeito da integral, de caráter métrico. Apresentamos os resultados da construção da integral e da medida motivando resolver o problema da completude do espaço das funções integráveis.

Nesse viés, os resultados passeiam de propriedades operacionais básicas da medida e integral de Lebesgue, bem como os teoremas de convergência à resultados envolvendo completamentos de σ-álgebras, completamentos métricos e completude do espaço das funções Lebesgue integráveis. Ao fim, mostramos ainda uma construção que permite enxergar a extensão da medida elementar para a medida de Lebesgue como um completamento métrico.

Palavras-chave: Medida. Integral. Lebesgue. Completude.

Abstract

This work aims to offer an introduction to the study of Lebesgue measure and integration. We motivate our exhibition based on two central objectives. Firstly, construct the abstract concepts of measure and integration theory in a natural and motivated way, so that the beginner reader can abstract the main ideas and central philosophy of the theory.

Secondly, we give a special focus on solving problems regarding the integral, from a metric perspective. We present the results of the construction of the integral and the measure, motivated to solve the problem of the completeness of the space of integrable functions.

In this sense, the results range from basic operational properties of the Lebesgue measure and integral, as well as the convergence theorems, to results involving σ-algebra completions, metric completions and completeness of the space of the Lebesgue integrable functions. In the end, we also show a construction that allows us to see the extension of the elementary measure to the Lebesgue measure as a metric completion.

Keywords: Measure. Integral. Lebesgue. Completeness.

Sumário

Introdução

Em análise, na graduação, estuda-se a primeira noção de integração, a integral de *Jordan - Darboux - Riemann.* Essa ideia de integração baseia-se na noção euclidiana de medir volumes particionando um objeto em uma quantidade *finita* de blocos elementares, cada vez mais fina, a fim de se obter uma estimativa para o volume original.

Essa noção de integral desenvolveu-se ao longo do final do século XIX, e embora tenha se tornado rigorosa o suficiente para satisfazer até mesmo a teoria moderna de conjuntos introduzida por Cantor, existiam aspectos instrínsecos em sua formulação que logo a tornou insuficiente para diversos problemas de análise. Para conjuntos patológicos, que em vários sentidos surgem através de limites, a noção de *medida* associada a integral de Riemann falhava. Nesse sentido, três deles merecem destaque.

Primeiramente o estudo da análise de Fourier diz que, sempre que f for uma função integrável à Riemann no intervalo $[-\pi, \pi]$, define-se a série de Fourier associada, $f \sim \sum a_n e^{inx}$, em que

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

e obtém-se a famosa identidade de Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Reforçamos que o significado da série de Fourier não é relevante para essa exposição; o problema em destaque é que se considerarmos o espaço $\mathcal{R}$ das funções Riemann integráveis em $[-\pi, \pi]$ com a norma quadrada e o espaço $l^2(\mathbb{Z})$ com sua norma usual, a identidade de Parseval mostra que para cada elemento de $\mathcal{R}$ existe um correspondente $(a_n) \in l^2(\mathbb{Z})$. Contudo, é possível construir elementos de $l^2(\mathbb{Z})$ que não são mapeados em $\mathcal{R}$. Além disso, o espaço das sequências quadrado somáveis é completo, enquanto $\mathcal{R}$ não o é. Somos levados a nos perguntar: Como devem ser a funções que surgem ao completar $\mathcal{R}$ com a associação à $l^2(\mathbb{Z})$ em mente?

Em segundo, pensando de forma intuitiva, a integral foi construída para satisfazer uma pergunta de medir o *volume* de conjuntos, ou a distribuição de *massa* de funções. Da forma que foi proposta, a integral de Riemann faz isso bem apenas com funções que são quase contínuas, no sentido usualmente atribuído em cursos de análise de gradução.

Entretanto, funções como a de Dirichlet, que é assumidamente a função característica dos racionais em um dado intervalo $[a, b]$, não é contínua em nenhum ponto do intervalo, e portanto não é integrável. Ademais, como sua massa está concentrada apenas em um conjunto desprezível e fora dele é identicamente nula era esperado que essa função tivesse uma integral nula.

Por último, em análise constantemente nos deparamos com situações que temos posse de uma sequência de funções integráveis que convergem para alguma função limite. É de interesse geral estudar quando a passagem do limite sob o sinal de integração é válida, ou seja, quando a expressão abaixo é verdadeira:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Existem, exemplos clássicos de situações em que a igualdade acima não se expressa. Considere por exemplo, uma enumeração dos racionais $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ no intervalo $[a,b]$ e as funções $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que $f_n(x) = 1$ se $x \in \{r_k\}_{k=1}^n$ e 0 no complementar. A sequência anterior converge para a função de Dirichlet e, enquanto cada função f_n é integrável e de integral nula, a função de Dirichlet sequer admite integral. Acontece que, no caso de funções Riemann integráveis, a passagem do limite sob o sinal de integração só é válida no caso de uma convergência uniforme, que é sabidamente um modo de convergência muito exigente. Era de interesse geral portanto, desenvolver uma teoria de integração que se comportasse de forma mais flexível quanto a questão anterior.

É com essa problemática, e com o objetivo de completar o espaço das funções Riemann integráveis, que apresentamos nesse texto alguns resultados envolvendo o desenvolvimento da integral de Lebesgue. É importante ressaltar que não nos propomos a apresentar uma teoria extensiva a respeito de medida e integração e focamos apenas na medida e integral de Lebesgue e em resultados envolvendo espaços $\mathbb{L}^1$

Em particular, na Seção 1 fazemos uma breve revisão da integral de Riemann e medida de Jordan para motivar a construção da medida e integral de Lebesgue. Fazemos isso no espaço euclidiano, para fortalecer a intuição e, motivamos os resultados apresentados com problemas e discussões. Na segunda seção, passamos para espaços abstratos. Mostramos como a σ-álgebra de Lebesgue é um completamento da de Borel, provamos propriedades operacionais da integral e resolvemos a passagem do limite com os teoremas de convergência. Na Seção 3, fazemos uma breve digressão sobre espaços métricos para formalizar o problema do completamento. Mostramos que o espaço $\mathbb{L}^1$ é completo e, além disso, apresentamos uma construção alternativa que mostra que a medida de Lebesgue pode ser vista como um completamento métrico da medida elementar.

1 A Integral de Lebesgue no $\mathbb{R}^n$

Na Introdução, propomos três problemas que gostaríamos de analisar; o segundo e o terceiro dizem respeito à uma flexibilização do processo de tomar limites na integral. Nesta seção iremos, portanto, desenvolver a noção de integração que irá resolver esse problema.

Dessa forma, iniciaremos com uma breve revisão da construção da medida de Jordan e da integração de Riemann; ressaltamos que não faremos uma apresentação dos resultados principais a respeito dessa integral, tais quais, critérios de integração ou passagem de limites; focaremos apenas no aspecto da construção da medida.

Dado o caráter em que a medida de Jordan é desenvolvida, daremos continuidade ao longo de toda a seção com o tratamento apenas nos espaços euclidianos. Essa escolha é feita seguindo a visão do autor da referência [8], para cumprir o propósito de ganho de intuição. Na seção seguinte veremos quais são as características marcantes a respeito da medida de Lebesgue e passaremos para um contexto de espaços abstratos; embora para efeito das aplicações propostas na terceira seção, o espaço euclidiano é suficiente para os nossos interesses.

1.1 Uma breve revisão a respeito da integral de Riemann

Relembre que queremos cumprir um aspecto intuitivo de medir conjuntos. Por exemplo, na reta considerando um intervalo $[a, b]$ nossa intuição diz que a medida desse intervalo deve ser dada pelo número real $b - a$. Extendendo essa noção ao plano, somos levados a pensar que, para um dado retângulo $[a, b] \times [c, d]$ a medida desse conjunto deva ser $(b-a) \cdot (d-c)$. Pensando em um bloco n-dimensional $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ somos levados a intuir que sua medida deve ser $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) \cdot \cdots \cdot (a_n, b_n)$.

Nossa intuição nos diz ainda que se pensamos na reta por exemplo como o caso limite de tomarmos intervalos de centro fixo e raio cada vez maior, sua medida deve ser representada por ∞; aqui tratamos portanto o infinito como uma valor que de fato será atribuido como a medida de certos conjuntos; considere por exemplo, $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.

Aqui, nossa intuição de medida ja nos permite considerar algumas propriedades interessantes. Considere dois intervalos disjuntos da reta, é razoável esperar que a medida de união seja dada pela soma das medidas de cada intervalo separadamente. Se por outro lado, tomamos dois intervalos cuja interseção é não vazia, a união desses intervalos nos dá um novo intervalo cuja medida é estritamente menor que a soma das medidas dos intervalos individualmente, isto é:

$$m(I_1 \cup I_2) < m(I_1) + m(I_2)$$

pois, ao somar as medidas individuais, contamos a interseção do intervalo duas vezes; m denota a medida.

De maneira geral, podemos sempre esperar que, dado uma coleção finita de conjuntos *elementares*, a medida da união seja menor ou igual que a soma das medidas individuais, valendo a igualdade quando eles forem disjuntos. Dizemos, desse modo, que a medida é aditiva finita. Aqui, conjunto elementar, é simplesmente um conjunto dado pela união finita de blocos e, blocos o produto cartesiano de intervalos, que portanto, nossa intuição sabe medir. Formalmente temos,

Definição 1.1. *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que E é elementar quando $E = \bigcup_{k=1}^{N} B_k$ com $\{B_k\}_{k=1}^{N}$ uma coleção finita de blocos, que podemos supor disjuntos. Além disso, $m(E) = \sum_{k=1}^{N} m(B_k)$*

É claro que a afirmação de que os blocos podem ser tomados disjuntos precisa ser verificada, bem como que a definição da medida em um conjunto elementar é independente da representação. Contudo, essas questões são amplamente encontradas na literatura e, não é o propósito dessa seção incial provar os resultados a respeito da revisão da integral de Riemann. Deixamos as provas desse texto destinada para os teoremas subsequentes. O leitor interessado pode verificar que a propriedade de monotocidade enunciada mais a frente na Propriedade 1.1 já é válida aqui, e que a indepedência da representação decorre dela.

Outra propriedade implícita na forma que pensamos em medida para conjuntos elementares é a de que, a medida de qualquer conjunto deve ser positiva, com exceção do conjunto vazio, em que a medida é nula.

Existem outras propriedades que parecem ser razoáveis, como por exemplo, invariância por translação e por rotação. Comentaremos brevemente que essas propriedades poderão ser atingidas com os axiomas que daremos logo em frente. Entretanto, existem dificuldades lógicas no processo de atribuir uma medida na família das partes do espaço euclidiano, envolvendo essas invariâncias. No processo para obter a medida de Lebesgue, veremos que será necessário exigir uma aditividade contável, isto é, para quantidades enumeráveis; o famoso problema da medida exibe um conjunto em que assumindo aditividade contável, a medida não está bem definida em todos os conjuntos do $\mathbb{R}^n$, por um problema envolvendo invariância por translação. O leitor pode, por exemplo, verificar o Apêndice A.

Ao dispensar a condição de aditividade contável e retomar apenas o caso finito, é possível obter uma medida que preserva a noção de Lebesgue em qualquer subconjunto do espaço euclidiano, preservando invariância por translação. Contudo, em $\mathbb{R}^{n\geq 3}$ racaímos no paradoxo de Banach-Tarski por um problema envolvendo invariância por rotação. Dessa forma, não somos capazes de medir todos os subconjuntos do espaço euclidiano com invariância por rotação sequer reduzindo ao caso de aditividade finita. O leitor pode verificar a referência [5].

Apenas a título de curiosidade, a construção de conjuntos patológicos que violam as propriedades que caracterizam a medida de Lebesgue necessitam do uso do Axioma da Escolha obrigatoriamente. Existem trabalhos, como em [3], que mostram que abrindo mão do uso desse axioma é possível obter modelos de medida que satisfazem todos os critérios desejados para todos os conjuntos do espaço euclidiano. No nosso contexto a solução será exigir as condições propostas na proposição 1.5 e reduzir a família dos conjuntos que queremos medir para algo menor que as partes de $\mathbb{R}^n$.

Retomando a nossa contrução vemos que, as propriedades principais que nossa intuição a respeito da medição de conjuntos espera obter são:

1. $m(\emptyset) = 0$;
2. $m(E) > 0$ com $E \subset \mathbb{R}^n,\ E \neq \emptyset$;
3. $m(\bigcup_{k=1}^{N} E_k) = \sum_{k=1}^{N} m(E_k)$ quando $\{E_k\}_{k=1}^{N}$ é disjunta.

Observamos que, embora as propriedades de invariância não sejam exigidas na axiomatização da medida, elas serão recuperadas. Por exemplo, a medida de Lebesgue é invariante por translações e rotações. Nesse texto provaremos apenas a primeira pois será a única relevante. Como visto nos cursos de análise de graduação, uma forma natural de extender a classe conjuntos que podemos medir com as três propriedades acima é considerando aproximações internas e externas. Temos:

Definição 1.2. *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ e m a medida nos conjuntos elementares. Definimos a medida interna de Jordan e respectivamente a medida externa de Jordan de E, as quais denotamos por $m_*^J(E), m^{*J}(E)$, como sendo:*

$$m_*^J(E) = \sup\{m(A) : A \subset E, A \text{ } elementar\}$$

$$m^{*J}(E) = \inf\{m(B) : E \subset B, B \text{ } elementar\}$$

Quando $m_*^J(E) = m^{*J}(E)$ dizemos que E é Jordan mensurável (J-mensurável) e denotamos $m(E) = m_*^J(E) = m^{*J}(E)$ como a medida de Jordan de E.

A notação anterior sugere que a medida de Jordan recupera a medida de conjuntos elementares e, embora isso seja um fato que necessita de verificação, é imediato da definição que isso ocorre.

Associada a noção de medida de Jordan, temos a noção de integral de Riemann. Antes de definirmos formalmente o que vem a ser essa integral, esclarecemos que historicamente a construção a seguir é relacionada à Jean-Gaston Darboux, matemático francês. Entretanto, sua construção é equivalente àquela envolvendo limites de somas de Riemann e, é escolhida para ser apresentada aqui pela relação mais clara com a posterior integral de Lebesgue. Antes disso, mais alguns preliminares.

Dizemos que $\mathcal{P}$ é uma partição de um bloco $B \subset \mathbb{R}^n$ quando é uma coleção *finita* e quase disjunta de blocos cuja união recupera B. Aqui quase disjunta quer dizer que os interiores dos blocos são dois a dois disjuntos.

Definimos e denotamos, respectivamente, as somas *inferiores* e *superiores* de uma dada função real, limitada, f num bloco $B \subset \mathbb{R}^n$ por:

$$s(f;\mathcal{P}) = \textstyle\sum_{A\in\mathcal{P}} (\inf_{x\in A} f(x)) m(A)$$

$$S(f;\mathcal{P}) = \textstyle\sum_{C\in\mathcal{P}} (\sup_{x\in C} f(x)) m(C)$$

Definição 1.3. *Seja $f : B \to \mathbb{R}$ uma função real, limitada, no bloco $B \subset \mathbb{R}^n$. Definimos a integral inferior e a integral superior de f por:*

$$\underline{\int}_B f(x)dx = \sup_{\mathcal{P}} s(f;\mathcal{P})$$

$$\overline{\int}_B f(x)dx = \inf_{\mathcal{P}} S(f;\mathcal{P})$$

Quando os dois valores acima existem e coincidem, dizemos que f é Riemann-integrável e denotamos sua integral por

$$\int_B f(x)dx$$

Mais geralmente, é claro da definição acima que se, $E \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto J-mensurável e $f : E \to \mathbb{R}$ é limitada então, podemos definir a integral de f em E por:

$$\int_B f(x) \cdot 1_E(x)dx$$

quando o número anterior estiver bem definido. Aqui $1_E(x)$ denota a função característica de E e, B é um bloco que contém E.

Veja que, das definições 1.2 e 1.3 que poderíamos definir $m(E)$ quando $E \subset \mathbb{R}^n$ pela integral de Riemann da função $1_E(x)$. Os conjuntos J-mensuráveis seriam justamente os quais essa integral estivesse bem definida. Aqui cabe fazer menção ao fato de que a família de conjuntos mensuráveis à Jordan se comporta bem tomando complementos (em conjuntos limitados) e uniões finitas. Esse é um fato que retomaremos na seção 2, mas é de fácil verificação. Uma breve observação a ser feita é de que, na definição 1.3 poderíamos reescrever o conceito de somas inferiores e superiores da seguinte forma:

Para cada partição $\mathcal{P} = \{A_j\}$ de um bloco B podemos considerar as funções constantes por partes φ, ψ em B definidas por $\varphi(x) = \inf_{x \in A_j} f(x) = a_j$ e $\psi(x) = \sup_{x \in A_j} f(x) = b_j$ quando $x \in A_j$. Definimos então a integral simples de φ por,

$$\int_B \varphi(x)dx = \sum a_j m(A_j)$$

e analogamente para ψ. Dessa maneira, podemos pensar na definição de integral inferior e superior como sendo, respectivamente, o supremo das integrais simples das funções $\varphi : B \to \mathbb{R}$ constantes por partes que são majoradas por f e, o ínfimo das integrais simples de funções $\psi : B \to \mathbb{R}$ constantes por partes que majoram f. Essa escrita, como ficará claro em breve, nos é mais adequada.

1.2 A Medida de Lebesgue

Embora a construção a seguir possa ser interpretada como parte de uma teoria mais geral, envolvendo o Teorema de Extensão de Carathéodory e conceitos que ainda iremos desenvolver de álgebras e σ-álgebras, queremos apresentar o desenvolvimento dos tópicos dessa seção motivado pelos princípios intuitivos de medida que discutimos anteriormente.

Por exemplo, um aspecto abordado nos primeiros parágrafos da subseção 1.1 é de que certos conjuntos, como a própria reta, devem admitir uma medida infinita. Todavia, o desenvolvimento teórico proposto até agora, só é capaz de lidar com conjuntos limitados; não há forma de aproximarmos a reta, ou o semi-plano positivo, por uma união finita de conjuntos elementares. Ademais, mesmo em casos limitados, os conjuntos Jordan-mensuráveis não são fechados para interseções ou uniões enumeráveis. Na realidade, não podemos esperar nem de conjuntos *bem comportados* um compromisso com a medida de Jordan. Como veremos mais adiante, podemos estudar exemplos de compactos que não são J-mensuráveis.

Como explicado na introdução é de grande interesse obter uma medida que se comporte bem com respeito a operações de limites, enquanto expande a família de conjuntos mensuráveis o máximo possível, preservando as propriedades de positividade, aditividade e recuperando a noção já desenvolvida de medida para os conjuntos da subseção anterior. O cerne dessa questão reside em, de alguma forma, evoluir a propriedade 3 para uma aditividade contável. Isso pode ser feito relaxando a definição de medida externa de Jordan.

Definição 1.4. *(Medida Exterior de Lebesgue) Seja $E \subset \mathbb{R}^n$, definimos a medida externa de Lebesgue como sendo o custo mínimo para cobrir E por uma união enumerável de conjuntos elementares, ou simplesmente blocos. Denotamos por $m^*(E)$ essa grandeza e formalmente temos:*

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} m(B_n) : E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n, B_n \text{ bloco} \right\}$$

Em analogia com a teoria de Jordan, seria interessante obter um caso simétrico para uma certa medida interna associada à m_*^J. Contudo, não há ganho na medida interna de Jordan ao substituir o caso finito pelo contável. No fundo isso está relacionado ao fato de que a medida de Jordan é subaditiva em vez de superaditiva. Seria possível obter um caso análogo tomando complementares, o que levaria para o critério de Carathéodory que não temos a intenção de desenvolver nesse trabalho. Para um discussão mais detalhada desse tema o leitor pode verificar [8] ou [1]. A forma de obter uma caracterização para os conjuntos mensuráveis segundo Lebesgue é definida a seguir e explicada pelo primeiro princípio de Littlewood, que comentaremos posteriormente.

Definição 1.5. *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que E é Lebesgue mensurável quando, para todo $\epsilon > 0$ existe $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto contendo E tal que*

$$m^*(U \setminus E) \leq \varepsilon.$$

Quando E é Lebesgue mensurável denotamos $m(E) = m^*(E)$.

Os três princípios de Littlewood são afirmações heurísticas que devem guiar a intuição no desenvolvimento da teoria de integração aqui proposta. O primeiro deles diz que *"todo conjunto mensurável é (quase) a união finita de abertos"*.

Existem uma série de situações que temos que verificar girando em torno de dois problemas centrais. Primeiro; a noção de medida proposta na definição anterior recupera a medida de Jordan? Segundo; o problema de aditividade contável está resolvido e garantindo um bom comportamento com respeito a operações de limites?

Na direção de responder essas duas perguntas precisamos apresentar algumas propriedades básicas sobre o comportamento da medida de Lebesgue. Para isso, começamos apresentando resultados sobre a medida externa. Note que, a medida de Lebesgue é simplesmente a medida externa restringida a uma família menor de conjuntos que todos os subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. Evitando assim, ter que lidar com os casos patólogicos.

Apenas uma observação sobre a notação; na Definição 1.5 usamos m para denotar a medida de Lebesgue porque, à *posteriori* seremos capazes de mostrar que ela recupera a medida de Jordan. Entretanto, isso ainda não é o caso; nos resultados seguintes até a Proposição 1.1 m denotará a medida de Jordan, m^* a medida externa de Lebesgue e m_*^J, m^{*J} como na Definição 1.2.

Propriedade 1.1. *(Os axiomas da medida externa) Para a função introduzida na Definição 1.5 são válidos:*

1. $m^*(\emptyset) = 0$;
2. *Se* $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$ *então* $m^*(E) \leq m^*(F)$;
3. *Se* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de conjuntos em* $\mathbb{R}^n$ *então* $m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(E_n)$

Demonstração. Para o primeiro ponto basta notar que, $m^*(E) \leq m^{*J}(E)$ para qualquer conjunto $E \in \mathbb{R}^n$; sabemos em particular que $m^{*J}(\emptyset) = 0$ logo $m^*(\emptyset) = 0$.

Para o segundo, basta notar que qualquer cobertura enumerável de blocos de F também é cobertura de E; tomando o ínfimo o resultado é imediato.

Para o terceiro, suponha sem perda generalidade que, $m^*(E_n) < \infty$ para todo n; caso contrário a afirmação é evidente. Fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário e, tome da definição de ínfimo, para cada E_n fixado, uma cobertura de blocos $\{B_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ (que depende de ε e n) tal que,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} m(B_{n,k}) \leq m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Evidentemente $\{B_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura enumerável para $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ donde obtemos:

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n,k\in\mathbb{N}} m(B_{n,k}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(E_n) + \varepsilon$$

Em que, na conta anterior fizemos uso do teorema de Tonelli para séries duplas. Como $\varepsilon > 0$ é qualquer, a equação anterior conclui a prova.

□

No item 3 da propriedade anterior, ao substituir os conjuntos E_n pelo vazio, a partir de um certo $N \in \mathbb{N}$, temos subaditividade finita na adição. Somos levados a nos perguntar se aditividade finita pode ser recuperada já nesse estágio. Entretanto, esse não é o caso. Aditividade nesse estágio só pode ser recuperada se os conjuntos estiverem separados por uma distância positiva. Não vamos exibir a prova desse fato aqui, mas a estratégia para abordar o problema resume-se em provar os dois lados das desigualdades. Uma delas é imediata pelo que provamos acima; para a outra basta utilizar o truque do ε que faremos uso repetidamente nos próximos teoremas e, se atentar em tomar blocos cujo diâmetro seja menor que a distância entre os conjuntos. Para detalhes, o leitor pode verificar [6] para a prova desse fato e, [7] para uma discussão sobre o truque do ε mencionado.

Já estamos em condições de responder se a medida de Lebesgue recupera a de Jordan; para isso, considere os dois resultados a seguir.

Lema 1.1. *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto elementar. A medida externa de Lebesgue coincide com a medida de Jordan.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que E é fechado; sendo também limitado, estamos de posse de um compacto.

Pela definição da medida externa de E dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe uma cobertura de E via blocos B_n tal que,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) \leq m^*(E) + \varepsilon$$

Com o objetivo de utilizar o teorema de Heine-Borel, vamos contornar o eventual problema dos blocos B_n não serem necessariamente abertos. Basta para cada B_n considerar o bloco $B_n^{'}$ que satisfaz

$$m(B_n) \leq m(B_n^{'}) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Desse modo, temos

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n^{'}) \leq m^*(E) + 2\varepsilon.$$

Em condições de aplicar Heine-Borel, obtemos uma subcoleção finita $\{B_k^{'}\}_{k=1}^{N}$ para E; por subaditividade da medida de Jordan obtemos,

$$m(E) \leq \sum_{k=1}^{N} m(B_k^{'}),$$

donde,

$$m(E) \leq m^*(E) + 2\varepsilon$$

Como ε é arbitrário, a desigualdade $m(E) \leq m^*(E)$ está consolidada. Como observado anteriormente, sempre temos $m^*(E) \leq m^{*J}(E)$, o que no caso de E elementar nos dá a desigualdade reversa.

Agora tratamos do caso em E não é fechado reduzindo à situação anterior. Pela definição de conjunto elementar, tome a decomposição $E = \bigcup_{k=1}^{N} B_k$ em blocos quase disjuntos; utilizando novamente o truque do ε podemos para cada bloco fixado na decomposição anterior, considerar um sub-bloco fechado $B_k^{'}$ contido nele, cujo volume é excedido pela grandeza de ε/N.

Dessa forma, E contém a união dos blocos fechados $B_k^{'}$ que por sua vez formam um conjunto elementar. Por sub-aditividade da medida externa, o caso anterior e, aditividade finita da medida de Jordan, obtemos

$$m^*(E) \geq m^*\left(\bigcup_{k=1}^{N} B_k^{'}\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{N} B_k^{'}\right) \geq m(E) - \varepsilon$$

como $\varepsilon > 0$ foi tomado qualquer, a afirmação segue. $\square$

À título de consolidação dos resultados, veja que o argumento usado no final da prova anterior permite concluir que a medida externa de Lebesgue majora a medida interna de Jordan; juntando com a desigualdade já obtida com respeito à medida externa de Jordan, sintetizamos:

$$m_*^J(E) \leq m^*(E) \leq m^{*J}(E)$$

Proposição 1.1. *A medida de Lebesgue recupera a medida de Jordan. Isto é, se $E \subset \mathbb{R}^n$ é J-mensurável então, E é Lebesgue mensurável e as duas medidas coincidem.*

Demonstração. Dado $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável à Jordan e $\varepsilon > 0$, queremos exibir um aberto U que contém E com um custo, na medida de externa de Lebesgue, menor que ε.

Sendo E J-mensurável, podemos obter duas coleções de blocos $\{B_i\}_{i=1}^n$ e $\{A_j\}_{j=1}^m$, cada uma delas sendo quase disjuntas, a primeira contendo E e a segunda contida em E, tais que

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) - \varepsilon \leq m(E)$$

e,

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) + \varepsilon \geq m(E)$$

isto é,

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) - m^*\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) \leq 2\varepsilon$$

em que, aqui já desconsideramos a distinção entre medida externa de Lebesgue e a medida de Jordan, amparados pelo lema 1.1.

Dessa forma,

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \setminus E\right) \leq m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \setminus \bigcup_{j=1}^{m} A_j\right)$$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \setminus \bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) = m\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) - m\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right) \leq 2\varepsilon$$

Utilizando o argumento da prova do lema, poderíamos ter tomado os blocos B_i abertos sem nenhum problema; basta agora por $U = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ e concluímos que E é L-mensurável. Para concluir que as duas grandezas coincidem basta considerar a estimativa:

$$m_*^J(E) \leq m^*(E) \leq m^{*J}(E)$$

$\square$

Antes de continuar nossa construção rumo à verificação de aditividade contável (que também chamaremos de σ-aditividade) gostaríamos de exibir um exemplo, que mostra que a medida de Jordan já era insuficiente até mesmo para compactos. Antes, fazemos menção a dois fatos, que embora pareçam razoáveis de aceitar, necessitam de verificação que omitimos aqui. O leitor pode consultar [8].

Afirmação 1: A medida externa de Jordan de um conjuto coincide com a medida externa de Jordan do seu fecho (o mesmo vale para o interior e a medida interna de Jordan).

Afirmação 2: Se E é a união enumerável, quase disjunta, de blocos então a medida externa de E concide com a série das medidas dos blocos.

A afirmação 2 é razoavelmente fácil de verificar e consiste em mostrar que valem dos dois lados da desigualdade. Para a afirmação 1 basta considerar novamente o truque do ε utilizado nas provas anteriores. Para o nosso exemplo considere o conjunto $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$

e o enumere por $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; tome $\varepsilon > 0$ pequeno ($\varepsilon = 1/3$ é suficiente) e defina:

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (r_n - \varepsilon/2^n, r_n + \varepsilon/2^n)$$

pela afirmação 2, temos:

$$m^*(U) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = 2\varepsilon$$

na realidade subatividade já seria suficiente e poderíamos dispensar o uso da afirmação 2.

Observe agora que, U é denso em $[-1,1]$, logo $m^{*J}(U) = m^{*J}(\overline{U}) = m([-1,1]) = 2$. Concluímos que, U não é mensurável à Jordan e, portanto, seu complementar em $[-1,1]$ também não o é; este é o compacto que falamos.

Uma maneira interessante e muitas vezes útil de encarar a definição 1.4 é apresentada na proposição a seguir; mostramos ainda, em sequência, um outro tipo de regularidade que é muito útil para provar resultados envolvendo o Teorema da Diferenciação de Lebesgue, que não iremos cobrir nesse texto.

Proposição 1.2. *(Regularidade Externa) Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ arbitrário. Temos,*

$$m^*(E) = \inf_{E\subset U, U \text{ aberto}} m^*(U)$$

Demonstração. Por monotonicidade temos trivialmente que,

$$m^*(E) \leq \inf_{E\subset U, U \text{ aberto}} m^*(U)$$

Para a desigualdade contrária, suponha $m^*(E) < \infty$ (o caso infinito é trivial). Tome $\varepsilon > 0$ e, da definição de medida externa, uma coleção enumerável de blocos, tais que,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(B_n) \leq m^*(E) + \varepsilon$$

Como argumentado previamente, podemos supor que a coleção tomada é de abertos (basta usar o truque do $\varepsilon/2^n$). Por sub-aditividade contável, temos

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq m^*(E) + 2\varepsilon$$

e assim,

$$\inf_{E\subset U, U \text{ aberto}} m^*(U) \leq m^*(E)$$

$\square$

Proposição 1.3. *(Regularidade Interna) Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ L-mensurável. Temos,*

$$m(E) = \sup_{K \subset E, K\, compacto} m(K)$$

Não estamos ainda em condições de provar a proposição anterior; para isso temos o próximo resultado, que coleciona alguns exemplos de conjuntos mensuráveis à Lebesgue.

Proposição 1.4. *Com respeito à medida de Lebesgue, temos:*

1. *Todo aberto é Lebesgue mensurável;*
2. *A medida de Lebesgue é fechada para complemento;*
3. *A medida de Lebesgue é fechada para união enumerável.*

A partir de agora nesse texto, sempre que nos referirmos a um conjunto ser mensurável ou não, estamos fazendo menção ímplicita à medida de Lebesgue.

Demonstração. Observamos incialmente que, todo conjunto de medida externa nula é mensurável e o vazio é mensurável com medida nula; esses dois fatos triviais juntos com a definição são suficientes para provar o item 1.

Para o item 3, basta utilizar a definição e o truque do ${}^{\varepsilon}/_{2^n}$.

Para o item 2 precisamos mostrar inicialmente o caso particular para fechados. Na realidade, com o item 3 já provado e pensando em F fechado como,

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F \cap \overline{B(0,n)})$$

é suficiente mostrar que compactos são mensuráveis.

Tome K compacto e $\varepsilon > 0$, com a regularidade externa em mente cubra K com um aberto U tal que,

$$m^*(U) \leq m^*(K) + \varepsilon$$

basta mostrar que $m^*(U \setminus K) \leq \varepsilon$.

O conjunto $U \setminus K$ é aberto e sabemos de qualquer curso de análise de graduação que todo aberto em $\mathbb{R}^n$ pode ser representado pela união de blocos (ou bolas) que podem na realidade ser tomado fechados e quase disjuntos (veja [8]). Temos então que,

$$m^*(U \setminus K) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(B_n)$$

Fixe $N \in \mathbb{N}$. O conjunto $\bigcup_{n=1}^{N} B_n$ é um compacto disjunto do compacto K; a distância entre esses dois conjuntos é portanto positiva, o que nos dá condições de utilizar aditividade finita na medida externa

$$m^*(K) + m^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) = m^*\left(K \cup \bigcup_{n=1}^{N} B_n\right)$$

por monotonicidade,

$$m^*\left(K \cup \bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) \leq m^*(U) \leq m^*(K) + \varepsilon,$$

donde, usando que $m^*(K) < \infty$, pois K é compacto, obtemos

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) \leq \varepsilon,$$

e como N foi tomado qualquer

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \varepsilon.$$

Agora voltando ao caso inicial do item 2, se E é mensurável, então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um aberto U_n que contém E com custo na medida externa menor que $1/n$ (aqui usamos a definição). Pondo F_n o complemento de U_n concluímos que $\mathbb{R}^n \setminus E \supset F_n, \forall n \in \mathbb{N}$ e,

$$m^*((\mathbb{R}^n \setminus E) \setminus F_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Pondo $F = \bigcup F_n$ temos que o complementar de E contém F e que,

$$m^*((\mathbb{R}^n \setminus E) \setminus F) = 0.$$

Assim, o complementar de E é dado pela união de F com um conjunto de medida externa nula; mas F é a união enumerável de fechados. Usando o que provamos até aqui, isso conclui que o complementar de E é mensurável.

□

Apenas a título de informação, pelas leis de De Morgan, a proposição anterior também garante que a medida de Lebesgue é fechada para interseções enumeráveis. Outro fato que fazemos menção é que, na proposição anterior provamos que todos os compactos do $\mathbb{R}^n$ são mensuráveis.

Retomamos agora a prova da proposição 1.3:

Demonstração. (da proposição 1.3) Monotonicidade garante que é suficiente provar

$$m(E) \leq \sup_{K \subset E, K\text{compacto}} m(K).$$

Dividimos em dois casos:

- E é limitado, em particular, $m(E) < \infty$. Tome $\varepsilon > 0$ e F fechado, contido em E tal que $m^*(E \setminus F) \leq \varepsilon$ (basta considerar o complementar de E, tomar um aberto que o contenha com o custo dado por ε e então tomar o complementar desse aberto).

  Evidentemente F é compacto, pela proposição anterior é mensurável; ademais, $m(F) = m(E) - m(E \setminus F) \geq m(E) - \varepsilon$.

- E é ilimitado. Considere a decomposição de E nos conjuntos $E_n = E \cap (B(0, n) \setminus B(0, n-1))$. Cada um dos conjuntos anteriores é limitado e portanto admitem $K_n \subset E_n$ compactos, tais que, $m(K_n) \geq m(E_n) - \varepsilon 2^{-n}$. Usaremos aqui, finalmente, σ-aditividade, que provaremos logo a seguir. Como os E_n são disjuntos, temos,

  $$m(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(E_n).$$

  Assim
  $$m\left(\bigcup_{j=1}^{N} K_j\right) = \sum_{j=1}^{N} m(K_j) \geq \sum_{j=1}^{N} m(E_j) - \varepsilon \to m(E) - \varepsilon$$

  Isso implica que existe N grande o quanto necessário tal que $m(\bigcup_{j=1}^{N} K_j) \geq m(E) - 2\varepsilon$.

$\square$

Como feito menção no fim da demonstração da proposição anterior, o que desenvolvemos até aqui já nos permite provar σ-aditividade.

Proposição 1.5. *(Axiomas da Medida) Para a medida de Lebesgue são válidos:*

1. $m(\emptyset) = 0$;

2. *Se E é mensurável, então* $m(E) \geq 0$;

3. *Se* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma família da conjuntos mensuráveis disjutnos, então* $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n)$.

Demonstração. Os items 1 e 2 são evidentes da definição; vamos provar o item 3. Relembramos inicialmente o fato topólogico que a distância entre dois compactos disjuntos é sempre positiva e que, a medida de Lebesgue é finita aditiva para conjuntos cuja distância é não nula (veja o comentário ao fim da propriedade 1.1).

Exploramos inicialmente o caso em que a sequência $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de compactos. Para qualquer $N \in \mathbb{N}$ fixado temos que,

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m(E_n).$$

Fazendo uso de monotonicidade, obtemos

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{N} m(E_n).$$

Passando ao limite, a desigualdade anterior nos dá

$$m(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

Por outro lado, subaditividade contável da propriedade 1.1 já nos garantia a outra desigualdade; consolidamos assim o caso em que a sequência é de compactos.

Agora, considere o caso em que $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de limitados. Vamos explorar o truque do $\varepsilon/2^n$. Para cada E_n tome um fechado K_n dentro dele, que é portanto compacto, tal que

$$m(E_n) \leq m(K_n) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

e portanto,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(K_n) + \varepsilon.$$

Donde, pelo caso compacto que já provamos e, monotonicidade, a desigualdade anterior se torna:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n) \leq m(E) + \varepsilon.$$

Enquanto subaditividade contável da propriedade 1.1 nos dá a outra desigualdade.

Finalmente trataremos do caso geral; decomponha cada E_n como sendo a união

$$E_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (E_n \cap A_m),$$

com cada $A_m := \{x \in \mathbb{R}^n : m-1 \leq x < m\}$. Pelo caso anterior, $m(E_n) = \sum_{m\in\mathbb{N}} m(E_n \cap A_m)$, donde, $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} m(E_n \cap A_m) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n)$. $\square$

Concluímos essa subseção com mais dois resultados. O primeiro ilustra o bom comportamento da medida de Lebesgue com respeito à passagem de limites; note por exemplo que poderíamos utilizá-lo para provar de forma alternativa a proposição 1.3. Além disso, eles se relacionam profundamente com os teoremas que iremos apresentar na subseção 2.3. O segundo diz respeito à invariância por translação, que será útil no Apêndice A.

Proposição 1.6. *(Teoremas de Convergência para Conjuntos) Se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos mensuráveis, podemos afirmar*

1. *No caso de $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ser crescente, temos que $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$;*
2. *No caso de $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ser decrescente com $m(E_n) < \infty$ para algum $n \in \mathbb{N}$, temos que $m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$.*

Demonstração. Para o item 1, suponha que todos os E_n tem medida finita; o caso complementar é evidente. Reescreva a sequência $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pondo $A_1 = E_1$ e $A_n = (E_n \setminus E_{n-1}), n > 1$. Estamos de posse de uma sequência $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuja união, coincide com a união de $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e que, é formada por conjuntos mensuráveis disjuntos. Logo,

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n).$$

Mas a série dos $m(A_n)$ é telescópica e, portanto, converge à $\lim_{n\to\infty} m(E_n)$.

Para o item 2, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $m(E_N) < \infty$. Em particular, a medida de todos os conjuntos que sucedem E_N tem medida finita. Como vamos tomar interseções podemos desconsiderar os conjuntos de 1 à $N-1$. Considere a sequência $\{A_k\}_{k\geq N}$ dada por $A_k = E_N \setminus E_k$; a sequência assim formada é crescente, donde, ao aplicar o item 1, obtemos:

$$m\left(\bigcup_{k\geq N} A_k\right) = m(E_N) - \lim_{k\geq N} m(E_k).$$

Como, $\bigcup_{k\geq N} A_k = E_N \setminus \bigcap_{k\geq N} E_k \Rightarrow m(\bigcup_{k\geq N} A_k) = m(E_N) - m(\bigcap_{k\geq N} E_k)$, o resultado é imediato. $\square$

É importante notar que no item 2 acima a hipótese de que para algum N os conjuntos passam a ter medida finita é essencial. Caso contrário, não podemos operar com o cancelamento da soma na etapa final. Considere a sequência $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $E_n = \mathbb{R}^+ \setminus [0, n]$; ela deve ser suficiente para oferecer um contra-exemplo.

Propriedade 1.2. *(Invariância por Translação)*

Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ e $h \in \mathbb{R}^n$. Se E é mensurável então $E_h = E + h$ é mensurável e $m(E) = m(E_h)$.

Demonstração. Note inicialmente que se $[a, b]$ é intervalo então $m([a, b] + h) = m([a + h, b + h]) = b + h - a - h = b - a = m([a, b])$. Desse modo, se

$$B = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

é bloco e $h = (h_1, \cdots, h_n)$ é um vetor no $\mathbb{R}^n$ temos que

$$\begin{aligned} m(B_h) &= m(\textstyle\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] + h) \\ &= m(\textstyle\prod_{i=1}^{n}[a_i + h_i, b_i + h_i]) \\ &= \textstyle\prod_{i=1}^{n} m([a_i + h_i, b_i + h_i]) \\ &= \textstyle\prod_{i=1}^{n} m([a_i, b_i]) \\ &= m(\textstyle\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]) \\ &= m(B). \end{aligned}$$

Basta notar agora que para cada família enumerável de blocos que cobre E podemos considerar a família de blocos translada por h que cobre E_h. Reciprocamente, para cada família que cobre E_h podemos associar a uma família transladada por $-h$ que cobre E. Desse modo, E_h é mensurável e, $m(E) = m(E_h)$ pela definição da medida via ínfimo e invariância por translação de blocos. $\square$

Estamos finalmente em condições de desenvolver a integral de Lebesgue.

1.3 A Integral de Lebesgue

Na discussão proposta na introdução existe um problema que é mais profundo que os demais. No primeiro problema apresentado, motivado pela identidade de Parseval, observamos que o espaço das funções Riemann integráveis não é completo; no segundo discutimos sobre como a noção intuitiva de distribuição de massa de uma função é prejudicada no modelo anterior. Acontece que, o exemplo que apresentamos explorava a construção da função de Dirichlet através do limite pontual de funções Riemann integráveis; enquanto no primeiro, a incompletude de $\mathcal{R}$ interpreta-se como o problema de ter sequências de Cauchy que não admitem limite.

Dessa forma, vemos que o ponto chave que devemos tratar está sintetizado no terceiro problema; obter um modelo de integração que satisfaça

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)dx = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx,$$

para convergências pontuais. Veremos na realidade que, seremos capazes de fazer mais que isso.

Motivados pela discussão proposta em nossa revisão sobre a construção da integral de Riemann e, inspirados pelas propriedades que nossa nova medida satisfaz, gostaríamos de definir nossa integral de Lebesgue de uma forma equivalente à definição 1.3; veremos entretanto que por alguns motivos vamos considerar apenas a integral inferior.

Antes, precisamos fixar alguns conceitos e gostaríamos de reforçar que toda a construção que apresentaremos a seguir deve ser encarada pela motivação que a integral de Riemann já nos deu; bem como, guiados com o objetivo de explorar nossa nova medida.

Assim como, ao final da subseção 1.1, propomos uma forma de encarar a integral de Riemann através de limites de funções constantes por partes, aqui vamos extender esse conceito para o de funções simples.

Definição 1.6. *Uma função $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita simples, quando é da forma*

$$\varphi(x) = \sum a_i 1_{A_i}(x),$$

em que $\{a_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}$ e $\{A_i\}_{i=1}^N$ são mensuráveis.

A definição de função simples traz de forma ímplicita que podemos tomar os conjuntos $\{A_i\}_{i=1}^N$ disjuntos e os $\{a_i\}_{i=1}^N$ distintos; esse é um fato simples de verificar. Veja que, se A_k e A_{k+1} tem interseção não-vazia com valores associados a_k, a_{k+1}, então podemos atualizar a coleção $\{A_i\}_{i=1}^N$ removendo os conjuntos em questão e pondo, $\tilde{A}_k = A_k \setminus (A_k \cap A_{k+1})$, $\tilde{A}_{k+1} = A_{k+1} \setminus (A_k \cap A_{k+1})$, $A_{N+1} = (A_k \cap A_{k+1})$ com valores associados a_k, a_{k+1}, $(a_k + a_{k+1})$. Por outro lado, se A_i e A_j são conjuntos distintos com valor associado $a_i = a_j$ basta atualizar a coleção $\{A_i\}_{i=1}^N$ removendo os conjuntos em questão e pondo, $\tilde{A}_i = A_i \cup A_j$ como valor associado igual a a_i. Como a coleção $\{A_i\}_{i=1}^N$

possui apenas uma quantidade finita de elementos, o algoritmo anterior se esgota após uma quantidade finita de etapas.

Associada à definição anterior definimos a integral simples (ou simplesmente integral) de uma função simples como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{N} a_i m(A_i).$$

em que, a função simples está em sua representação canônica, isto é $\{A_i\}_{i=1}^N$ são quase disjuntos e os a_i são distintos.

Uma série de fatos, associados à definição anterior necessitam de verificação. Vamos comentar brevemente alguns deles. Contudo, deixamos as provas omitidas e recomendamos a leitura do capítulo 4 de [1]. Primeiramente, é importante notar que o número anterior está bem definido, isto é, independe da representação da função simples; em segundo lugar, fazemos menção ao fato de que a integral de funções simples é linear. Outras propriedades de simples verifiação que a integral de funções simples satisfaz estão listadas abaixo; indicamos [1] para as demonstrações.

Propriedade 1.3. *Sejam φ, ϕ funções simples e $a, b \in \mathbb{R}$. Sobre sua integral são válidas:*

1. *A integral é linear:*
$$\int a\varphi + b\phi = a \int \varphi + b \int \phi.$$

2. *(Aditividade) Se E, F são disjuntos com medida finita então,*
$$\int_{E\cup F} \varphi = \int_E \varphi + \int_F \varphi.$$

3. *(Monotonicidade) Se $\varphi \leq \phi$, então*
$$\int \varphi \leq \int \phi.$$

4. *(Desigualdade Triangular)*
$$\left| \int \varphi \right| \leq \int |\varphi|.$$

Amparados pela definição anterior e em busca de propor uma definição para o que virá a ser nossa integral, precisamos estabelecer a classe de função em que queremos integrar. Lembre que, nossa motivação inicial é obter uma integração que permita passagem do limite sob o sinal de integração; nada mais razoável portanto, que definir as funções que desejamos integrar motivados por isso.

Definição 1.7. *Dizemos que f é mensurável quando é o limite pontual de funções simples.*

Uma primeira razão, a ser mostrada em breve, do porquê iremos considerar apenas a integral inferior para definir integração, tem um aspecto teórico relacionado à definição acima. Vamos mostrar que, a sequência de funções simples que converge para f pode sempre ser tomada monótona e crescente, mesmo quando f é ilimitada (as propriedades marcantes que aqui relacionamos à funções simples são as de limitação na imagem e no suporte); um caso análogo para uma sequência monótona decrescente não pode ser estabelecida no caso de f ilimitada. Para detalhes dessa discussão, recomendamos [8] e a subseção 2.2 em que discutimos isso a fundo.

Um leitor experiente pode se lembrar de um resultado a respeito de integração de Riemann que diz que *"uma função num intervalo compacto é Riemann integrável se, e só se, é contínua à menos de um conjunto de medida nula"*. Com isso em mente seríamos levados a nos perguntar se na definição anterior não estaríamos sendo muito restritivos; melhor pondo, se em vez de pedir limite pontual deveríamos pedir limite pontual a menos de um conjunto de medida nula. Acontece que isso será uma forma equivalente de estabelecer a definição anterior.

Aqui é um bom momento para estabelecer dois conceitos que serão constantemente utilizados. Dizemos que, uma propriedade vale em *quase todo ponto* e escrevemos *q.t.p* ou *a.e*, para abreviar, quando ela for verdadeira a menos de um conjunto de medida nula. Definimos também, o *suporte* de uma função f e, escrevemos $supp(f)$, como o conjunto dos pontos em que ela não se anula.

Ainda pensando na integral de Riemann, acabamos de lembrar que ela se comporta muito bem com funções contínuas de suporte compacto, no sentido estabelecido logo acima. Tendo em mente a definição de continuidade em contextos mais gerais de topologia, isto é, *"uma função é contínua quando a pré-imagem de abertos é aberta"*, poderíamos desejar definir as nossas funções mensuráveis com esse viés. Definir de tal modo que elas fossem quase contínuas; na linguagem anterior com o primeiro princípio de Littlewood em mente, diríamos que *"uma função é mensurável quando a pré-imagem de abertos é (quase) aberta"*, isto é, *"quando a pré-imagem de conjuntos abertos é mensurável.* Ora, mas a nossa definição via limites de funções simples será equivalente a essa formulação.

O próximo resultado e o teorema 1.2 mais adiante, irão formalizar as ideias discutidas acima. Antes disso, estamos prontos para enunciar mais uma ideia heurística sobre a teoria de Lebesgue. O segundo princípio de Littlewood diz que *"uma função é mensurável quando é (quase) contínua"*.

Proposição 1.7. *(Formulações Equivalentes de Mensurabilidade) Para uma função* $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *são equivalentes:*

1. *f é mensurável;*
2. *Para todo $U \subset \mathbb{R}$ aberto, $f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável;*
3. *f é o supremo de uma sequência crescente de funções simples.*

Demonstração. Vamos mostrar que 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1). Sendo f o limite pontual de funções simples $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ temos para todo $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \limsup_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq N} \varphi_n(x)$$

Para cada λ a observação anterior pode ser reescrita como:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \lambda\} = \bigcup_{M\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} \left\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_n(x) > \lambda + \frac{1}{M}\right\}.$$

Como cada φ_n é simples, o conjunto $\left\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_n(x) > \lambda + \frac{1}{M}\right\}$ é mensurável; e como a medida de Lebesgue é fechada para uniões e interseções enumeráveis, o conjunto $f^{-1}((\lambda, \infty))$ é mensurável.

Um argumento similiar mostra que a pré-imagem de qualquer intervalo *(aberto, fechado, semi-aberto, semi-fechado)* é mensurável. Também é possível mostrar que a pré-imagem de pontos no infinito é mensurável, basta considerar $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq n\}$. Fazendo o mesmo para $-\infty$.

O que é importante para o nosso argumento é que tomando interseções, acabamos de mostrar que a pré-imagem de qualquer intervalo é mensurável. Na reta sabemos que, todo aberto é dado pela união enumerável de intervalos abertos disjuntos (de forma única, embora isso não tenha relevância aqui). Logo, tomando uniões, acabamos de mostrar que $f^{-1}(U)$ é mensurável para U aberto.

Agora mostraremos que 2) $\Rightarrow$ 3). Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina φ_n pondo em $|x| \leq n$, $\varphi_n(x)$ como o maior inteiro possível vezes 2^{-n}; isto é ($\varphi_n(x) = k2^{-n}$), de tal forma que esse valor seja menor ou igual a $\min(f(x), n)$. Quando $|x| > n$ pomos $\varphi_n(x) = 0$.

Por construção é possível verificar que, a sequência proposta é crescente e tem f como seu supremo. Além disso, cada função da sequência assume apenas uma quantidade finita de valores e para cada $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(c)$ é igual à $\varphi_n^{-1}(I_c) \cap [-n, n]$ para algum intervalo I_c, logo é mensurável.

Desse modo, cada φ_n é função simples, limitada de suporte com medida finita.

Finalmente 3) $\Rightarrow$ 1) é evidente e concluímos a prova. Observamos apenas que, precisamos da hipótese de f ser não negativa apenas na equivalência 1) $\Leftrightarrow$ 3); se quiséssemos provar diretamente 1) $\Leftrightarrow$ 2) poderíamos dispensar essa hipótese.

$\square$

Note que, à luz do item 2 da proposição anterior, se f é mensurável e $g(x) = f(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ então g é mensurável. Isso pode ser visto notando que $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \lambda\}$ difere de $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) < \lambda\}$ apenas em um conjunto de medida nula. Dessa forma, as afirmações 1 à 3 poderiam ser obtidas com a condição *a.e.*

A forma como enunciamos o segundo princípio de Littlewood pode levar o leitor a se questionar se, a família dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue é, em vista da proposição 1.4, obtida através de uma quantidade enumerável de operações de, união e tomada do complementar, em abertos. Veja que, no item 2 da proposição anterior dizemos que *"a pré-imagem de abertos é mensurável"*, e não que *"a pré-imagem de mensuráveis é mensurável"*. Estaríamos dizendo implicitamente que a família dos Lebesgue mensuráveis e a família dos conjuntos obtidos através de abertos com as operações da proposição 1.4 (chamamos esses de Borel mensuráveis) é a mesma?

A resposta para essa pergunta é negativa. Estamos fazendo um esforço nesse primeiro momento de evitar tratar de conceitos de álgebras e σ-álgebras; queremos primeiro construir a nossa teoria de forma rigorosa porém motivada. Guardamos a discussão de porquê essas duas famílias são distintas para a subseção 2.1.

Motivamos uma das equilavências anteriores através do segundo princípio de Littlewood, que afirma que funções mensuráveis são (quase) contínuas. Deveríamos portanto, dizer que para uma função mensurável:

1 - "a pré-imagem de mensuráveis é mensurável"

e não que:

2 - "a pré-imagem de abertos é mensurável".

Para a teoria integral de Lebesgue não há ganho nem perda de generalidade em fazer isso (embora a família dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue seja *maior* que a família dos mensuráveis à Borel).

Como veremos na subseção 2.1 todo conjunto Lebesgue mensurável está contido num conjunto de Borel de mesma medida. Como consequência, a segunda formulação é utilizada por ser mais vantajoso trabalhar com a família de Borel. Portanto, a construção apresentada até aqui é suficiente.

Antes de partir para a definição da integral de Lebesgue, vamos elencar uma lista com as principais propriedades a respeito das operações entre funções mensuráveis, cuja prova iremos dispensar.

Propriedade 1.4. *Sejam ϕ contínua, φ simples, f, g mensuráveis e, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis. São válidos:*

1. *ϕ é mensurável;*
2. *φ é mensurável;*
3. *$\inf f_n$, $\sup f_n$, $\liminf f_n$, $\limsup f_n$ são mensuráveis;*
4. *Se $\{f_n\}$ converge pontualmente a.e, então o limite é mensurável;*
5. *$\phi \circ f$ é mensurável;*
6. *$f + g$ e fg são mensuráveis;*
7. *A parte positiva $f^+ = \max(f, 0)$, a parte negativa $f^- = \max(-f, 0)$ e, o módulo $|f|$, de uma função mensurável são mensuráveis.*

Nós gostaríamos nesse momento de apresentar mais uma manifestação do segundo princípio de Littlewood na figura do Teorema de Lusin; para provar esse resultado precisaremos ainda de mais resultados. Para manter um encadeamento lógico dos nossos conceitos vamos seguir com a construção da integral de Lebesgue e, ao final apresentaremos esse resultado para concluir a seção.

Definição 1.8. *(Integral de Lebesgue)*

Para $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ mensurável definimos a integral de Lebesgue como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx := \sup_{\varphi \leq f,\ \varphi \ simples} \int_{R^n} \varphi(x)dx;$$

Para $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável definimos a integral de Lebesgue como:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x)dx;$$

Dizemos que $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ é absolutamente integrável quando,

$$||f||_{\mathbb{L}^1} := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx < \infty$$

Na definição anterior estabelecemos a integral em $\mathbb{R}^n$. Se queremos falar de integral em um conjunto mensurável E pomos:

$$\int_E f(x)dx := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)1_E(x)dx.$$

Note que, a definição de integral que apresentamos leva em conta apenas aproximações inferiores. Motivados pela integral de Riemann poderíamos querer definir uma integral superior. Acontece que, desse modo perdemos a possibilidade de medir funções que assumem pontos no infinito. Além disso, no caso de funções mensuráveis limitadas com suporte de medida finita essas duas noções obrigatoriamente coincidem (vamos provar isso em outro momento), logo não haveria necessidade de considerar a integral superior. Em vista da proposição 1.7 é também mais adequado considerar apenas aproximações inferiores via funções simples.

Na próxima proposição sintetizamos várias propriedades a respeito da integral. Iremos dedicar a subseção 2.2 inteiramente para a demonstração dessas e de outras propriedades, como os tipos de truncamento. Faremos isso pois queremos dedicar o restante dessa seção para desenvolver resultados que mostram como a nossa nova noção de integração recupera Riemann e, para construir resultados que vão mostrar como o espaço das funções Riemann integráveis pode ser visto como sub-espaço denso do espaço das funções Lebesgue integráveis.

Propriedade 1.5. *Sejam f, g funções mensuráveis não negativas. Com respeito à integral de Lebesgue, verifica-se:*

1. *(Linearidade)*

$$\int af + bg = a\int f + b\int g, \text{ com } a, b \in [0, \infty)$$

2. *(Aditividade) Se E, F são disjuntos e mensuráveis então,*

$$\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f$$

3. *(Monotonicidade) Se $0 \le f \le g$ então,*

$$\int f \le \int g$$

4. *(Desigualdade Triangular)*
$$\left|\int f\right| \leq \int |f|$$

5. *Se f é integrável então $f(x) < \infty$ a.e.*

6. *Se a integral de f é nula, então $f(x) = 0$ a.e.*

Na realidade, com exceção do item 6, todos os itens acima valem para funções com sinal e nesse caso no item 1 podemos tomar $a, b \in \mathbb{R}$.

Na definição 1.8 ao estabelecer quando uma função mensurável é dita absolutamente integrável (ou simplesmente integrável na prática) introduzimos sutilmente a notação $||\cdot||_{\mathbb{L}^1}$, que usualmente é associada à normas. Contudo, o que apresentamos como $||\cdot||_{\mathbb{L}^1}$ não é uma norma; veja que, por conta do item 6 do resultado acima, não podemos concluir que $||f||_{\mathbb{L}^1} = 0 \Rightarrow f = 0$.

Existe uma maneira de contornar esse problema estabelecendo uma relação de equivalência e tomando o quociente. Essa etapa será crucial para resolver nosso problema de completamento do espaços das funções Riemann intgráveis, uma vez que ao falar de completamento, precisamos de um espaço métrico. O nosso será obtido via essa futura norma. No momento damos continuidade com resultados que serão cruciais para obter o completamento e guardamos a relação com espaços métricos para a seção 3.

O próximo resultado é um análogo para a proposição 1.1 e mostra como nossa integral é coerente com a teoria anterior.

Teorema 1.1. *Se $f : E \to R$ uma função Riemann integrável no conjunto J-mensurável $E \subset \mathbb{R}^n$, então f é Lebesgue integrável e,*

$$\int_E^{(\mathcal{R})} f(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

Em que, a integral na esquerda se refere à Riemann e a da direita à Lebesgue.

Embora a prova do teorema anterior seja bem simples, ela recai no uso dos teoremas da Convergência Dominada e Convergência Monótona, que embora já tenhamos condições de enunciar e provar, postergamos para a subseção 2.2. Desse modo, guardamos a prova desse teorema para um momento futuro.

O próximo resultado reinterpreta o segundo príncipio de Littlwood na *"norma"* (semi-norma no momento) $||\cdot||_{\mathbb{L}^1}$. Esclarecemos antes que, uma função degrau é definida de forma análoga a de função simples, trocando o uso de conjuntos mensuráveis por blocos.

Teorema 1.2. *(O Segundo Princípio de Littlewood na norma $\mathbb{L}^1$)*
Seja f absolutamente integrável e $\varepsilon > 0$. Temos que,

1. *Existe g simples e absolutamente integrável, tal que, $||f - g||_{\mathbb{L}^1} \leq \varepsilon$;*
2. *Existe uma função degrau g, tal que, $||f - g||_{\mathbb{L}^1} \leq \varepsilon$;*
3. *Existe g contínua de suporte compacto, tal que, $||f - g||_{\mathbb{L}^1} \leq \varepsilon$.*

Demonstração. Para o item 1, considere incialmente f não negativa; pela definição, tome $g \leq f$ simples, logo integrável em vista da propriedade 1.4 e da propriedade 1.4, tal que,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx - \varepsilon,$$

donde, por linearidade $||g - f||_{\mathbb{L}^1} \leq \varepsilon$. No caso de f com sinal, quebre f em parte positiva e parte negativa e aplique o que acabamos de provar ajustando ε para $\frac{\varepsilon}{2}$.

Para o item 2, usamos o item 1 para argumentar que, com um ajuste de ε e o uso da desigualdade triangular, basta aproximar uma função simples por uma função degrau. Com o uso de linearidade, mais ajustes de ε e, novamente desigualdade triangular, é suficiente aproximar a função característica $1_E(x)$ de um E mensurável, por função degrau. Mas da nossa construção da medida Lebesgue, todo conjunto mensurável pode ser aproximado por um conjunto elementar com custo mínimo.

Formalmente, tome uma família de blocos quase disjuntos $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, que podemos supor fechados, que cobre E, satisfazendo:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} m(B_k) \leq m(E) + \varepsilon.$$

Como $m(E) < \infty$, (lembre que tomamos esse mensurável de uma função simples absolutamente integrável) a série das medidas dos blocos converge. Logo para N suficientemente grande, a "cauda"da série fica suficientemente pequena, isto é,

$$\sum_{k\geq N} m(B_k) \leq \varepsilon.$$

Pondo F a união dos blocos de índicie até $N - 1$ temos finalmente:

$$m(E\triangle F) = m(E \setminus F) + m(F \setminus E) \leq 2\varepsilon.$$

Finalmente para o item 3, repetindo as considerações anteriores de ajustes com o ε, lineariedade e o uso da desigualdade triangular, basta aproximar a função característica de um bloco por uma função contínua de suporte compacto. Para uma construção mais simples, observamos que as funções características de um bloco no $\mathbb{R}^n$ são produtos de funções características nos intervalos que o compõe. Desse modo, fazemos o caso unidimensional da forma mais natural possível.

Considere o bloco unidimensional $[a, b]$ e sua função característica associada. Defina g com suporte em $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ pondo $g(x) = 1$ em $[a, b]$ e g em $[a-\varepsilon, a], [b, b+\varepsilon]$ a reta que liga os extremos do zero ao um.

É claro da construção anterior que $||g - 1_{[a,b]}||_{\mathbb{L}^1} \leq 2\varepsilon$. No $\mathbb{R}^n$ a função g é tomada como o produto das funções definidas acima em cada intervalo que compõe o bloco. $\square$

Como comentado previamente, a chave para a passagem do limite sob o sinal de integração na integral de Riemann era convergência uniforme. Nos propomos a apresentar o desenvolvimento de uma integral que fosse mais flexível quando a esse quesito. No momento, já estamos em condições de provar os Teoremas de Convergência, contudo, queremos fazer uma última discussão.

Nossa integral foi construída de tal modo que não precisamos nos preocupar com conjuntos de medida nula; usaremos isso para provar que apenas com uma condição razoável de limitação ou monotonicidade, convergência pontual $a.e$ será suficiente para passagem do limite sob a integral. Queremos chamar atenção ao fato de que, na nossa teoria convergência pontual $a.e$ é *"quase"* convergência uniforme.

Na figura do terceiro, e portanto último, princípio de Littlewood temos que *"toda convergência pontual de funções mensuráveis é (quase) uniforme"*. Formalmente, temos:

Teorema 1.3. *(Teorema de Egorov) Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis que converge pontualmente a.e à f. Dado $\varepsilon > 0$, existe $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável, de medida menor que ε ,tal que $f_n \to f$ localmente uniformemente em $\mathbb{R}^n \setminus E$.*

Demonstração. Modificando f_n e f em um conjunto de medida nula, que pode ser absorvido à E no final do argumento, podemos supor que f_n converge à f ponto a ponto. Ponha, por exemplo, $f_n(x) = f(x) = 0$ nesse conjunto desprezível.

Dessa forma, para cada $m \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m}, \forall n \geq N.$$

Defina $E_{N,m} := \{x \in \mathbb{R}^n : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m},$ para algum $n \geq N\}$ e note que a afirmação anterior pode ser reescrita como:

$$\bigcap_{N \in \mathbb{N}} E_{N,m} = \emptyset, \forall m \in \mathbb{N}.$$

É claro que cada $E_{N,m}$ é mensurável e que a sequência desses conjuntos é decrescente em N. Pela proposição 1.6, que para cada $R > 0$ temos,

$$\lim_{N\to\infty} m(E_{N,m} \cap B(0,R)) = 0.$$

Observamos que é preciso tomar a interseção com a bola, para garantir que cada conjunto da sequência tenha medida finita.

Do limite anterior podemos concluir que, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m(E_{N,m} \cap B(0,m)) \leq \frac{\varepsilon}{2^m}, \forall N \geq N_m.$$

Finalmente, ponha $E := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_{N_m,m} \cap B(0,m)$. É claro que, E é mensurável e por subaditividade $m(E) \leq \varepsilon$.

Por construção,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m},$$

para todo m natural, $x \in (\mathbb{R}^n \setminus E) \cap B(0,m)$ e $n \geq N_m$.

Isto é, para cada bola centrada na origem e de raio natural, a sequência converge uniformemente no complementar de E. $\square$

Para concluir essa seção, apresentamos mais uma manifestação do segundo princípio de Littlewood. Fazemos menção antes à desigualdade de Markov.

Proposição 1.8. *(Desigualdade de Markov) Seja f não negativa e mensurável e $\lambda \in (0,\infty)$. Temos que,*

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

Demonstração. Basta considerar a evidente desigualdade:

$$\lambda 1_{\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\geq\lambda\}}(x) \leq f(x)$$

$\square$

Teorema 1.4. *(Teorema de Lusin) Seja f integrável e $\varepsilon > 0$. Existe $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável, $m(E) \leq \varepsilon$, tal que $f|_{(\mathbb{R}^n\setminus E)}$ é contínua em $\mathbb{R}^n \setminus E$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tome f_n contínua de suporte compacto tal que, $||f_n - f||_{\mathbb{L}^1} \leq \frac{\varepsilon}{4^n}$.

Pela desigualdade de Markov, temos que:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

para todo x fora de um conjunto mensurável E_n de medida $m(E_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Ponha $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$; E é mensurável de medida menor ou igual a $\frac{\varepsilon}{2}$ e f_n converge uniformemente à f fora de E. Como o limite uniforme de funções contínuas é contínua, isso conclui a prova. $\square$

2 Espaços Abstratos de Medida

Dividiremos essa seção em três objetivos. A ideia central dela é apresentar os teoremas de convergência que garantem o bom funcionamento da integral de Lebesgue. Da forma como apresentamos a teoria na seção anterior, poderíamos provar diretamente esses resultados no $\mathbb{R}^n$ com a medida de Lebesgue.

Entretanto, para aproximar esse trabalho do aspecto mais geral da teoria vamos extrair da medida de Lebesgue os seus aspectos marcantes e definir o conceito de espaços abstratos de medida. Isto é, vamos provar indiretamente os resultados no $\mathbb{R}^n$, provando-os em um contexto mais geral.

Além disso, aproveitamos essa seção para aprofundar a discussão de que a família dos conjuntos Lebesgue mensuráveis não são simplesmente os conjuntos de Borel. Vamos mostrar que, podemos obter o primeiro como um completamento do segundo. Dedicaremos também essa seção para provar alguns resultados técnicos que omitimos as demonstrações anteriormente, tirando proveito e fazendo uso dos teoremas de convergência.

2.1 Preliminares Algébricos

Queremos passar do contexto de espaços euclidianos para contexto mais gerais, filtrando as características marcantes. Como discutimos no começo da subseção 1.1, não somos capazes de medir, com as propriedades desejadas, todos os conjuntos do $\mathbb{R}^n$; melhor pondo: com o intuito de atribuir uma função real-extendida que, atuasse nos conjuntos do espaço euclidiano e que possuísse as propriedades de não negatividade e σ-aditividade, precisamos passar um filtro no espaço e selecionar apenas os conjuntos que fossem mensuráveis.

Vimos na medida de Lebesgue que esses conjuntos possuíam as propriedades de serem fechados para o complementar e uniões enumeráveis. Além disso, o vazio e o próprio espaço euclidiano podiam ser medidos. Nesse viés, motivados pela proposição 1.4, definimos:

Definição 2.1. *(σ-Álgebra) Dado um conjunto X e 2^X o conjunto de suas partes, uma σ-álgebra de X é uma sub-família $\mathcal{F}$ de 2^X tal que:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$;

2. *Se $E \in \mathcal{F}$ então $E^c \in \mathcal{F}$. Em que E^c denota o complementar de E em X;*

3. *Se $\{E_n\}$ é uma família enumerável de conjunto de $\mathcal{F}$ então $\bigcup E_n \in \mathcal{F}$.*

Prévio ao conceito anterior existe uma noção mais fraca, mas que teve parte na subseção 1.1, de *álgebra Boolena*. Uma álgebra Booleana é definida como na definição anterior com o ajuste de ser fechada apenas para uniões finitas. Se considerarmos por exemplo, a família dos conjuntos que são Jordan mensuráveis ou co-Jordan mensuráveis (conjunto cujo complementar é mensurável) é fácil verificar que essa família é uma álgebra Booleana. Álgebras Booleanas não serão um interesse nesse texto.

Tendo estabelecido uma família em que faz sentido medir conjuntos, definimos agora, com a proprosição 1.5 em mente, o que seria propriamente uma medida.

Definição 2.2. *(Medida) Uma medida é uma função $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, numa σ-álgebra $\mathcal{F}$, tal que:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. *Se $\{E_n\}$ é uma família enumerável de conjuntos disjuntos mensuráveis então $\mu(\bigcup E_n) = \sum \mu(E_n)$.*

Analogamente à definição de *álgebra Booleana* podemos definir uma medida aditiva finita enfraquecendo a condição 2 acima; note que a medida de Jordan seria uma medida desse tipo e, em contraste com uma medida aditiva finita, dizemos que a medida da definição anterior é σ-aditiva.

Outros dois conceitos que usualmente associamos à medida é dela ser finita ou σ-finita. Dizemos que, uma medida μ é finita quando $\mu(X) < \infty$ e, dizemos que μ é σ-finita quando X pode ser escrito como a união de uma sequência crescente de conjuntos de medida finita. Por exemplo, a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ é σ-finita; podemos escrever $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B(0, k)$.

Um aspecto que nos será relevante para a discussão que queremos propor envolvendo as σ-álgebras de Borel e Lebesgue envolve a geração de σ-álgebras. É de fácil verificação que, se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são σ-álgebras de um conjunto X a interseção delas, isto é, a família de conjuntos em comum as duas, também é σ-álgebra. Nesse sentido, dada uma família F de subconjuntos de X, a σ-álgebra gerada por F, que denotamos $\mathcal{F} = \langle F \rangle$, é a interseção de todas as σ-álgebras que contém F.

Definição 2.3. *(σ-álgebra de Borel) Dado um espaço métrico (veja a seção 3) definimos a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$, como a σ-álgebra gerada por abertos.*

Na subseção 1.3 fizemos menção de que a σ-álgebra de Lebesgue é maior que a σ-álgebra de Borel, contudo, para todo conjunto Lebesgue mensurável, podemos obter um Borel mensurável que o contenha com a mesma medida. Queremos dedicar o restante dessa subseção para provar esse fato.

Já sabemos que todo aberto é Lebesgue mensurável, logo a σ-álgebra de Borel está contida na de Lebesgue. Vamos exibir agora um conjunto Lebesgue mensurável que não é Borel.

Defina em $[0,1]$ a função de Cantor-Lebesgue φ da seguinte forma: para cada $k \in \mathbb{N}$ estabeleça $\mathcal{O}_k$ como a união dos $2^k - 1$ intervalos que foram removidos na k-ésima etapa da construção do conjunto de Cantor C. Ponha $\mathcal{O} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_k$.

Começamos definindo φ em $\mathcal{O}$ e depois em C. Em cada $\mathcal{O}_k$ ponha φ como a função crescente, que é constante em cada um dos $2^k - 1$ intervalo de $\mathcal{O}_k$ assumindo os valores $\{1/2^k, 2/2^k, \cdots, [2^k-1]/2^k\}$. Em C como $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(x) = \sup\{\varphi(t) : t \in \mathcal{O} \cap [0,x)\}$ quando $x \in C \setminus \{0\}$.

Afirmamos que φ é crescente, contínua, com imagem $[0,1]$ e com derivada existente e nula em $\mathcal{O}$. Além disso, $m(\mathcal{O}) = 1$.

De fato, como φ é crescente em $\mathcal{O}$ sua extensão também é crescente. φ é contínua em $\mathcal{O}$; tomando $x \in C \setminus \{0,1\}$ para k suficientemente grande x está entre dois intervalos consecutivos de $\mathcal{O}_k$. Tomando a_k no da esquerda e b_k no da direita notamos que,

$$a_k < x < b_k, \varphi(b_k) - \varphi(a_k) = \frac{1}{2^k}.$$

Fazendo $k \to \infty$ e notando que sendo crescente a função φ só admitiria descontinuidades se elas fossem saltos podemos concluir que φ é contínua em x. Para $x = 0$ ou 1 podemos aplicar um argumento análogo.

As afirmações de que $\varphi'(x) = 0$ em $\mathcal{O}$ e que $m(\mathcal{O}) = 1$ são evidentes (na segunda usamos que $m(C) = 0$). Usando o Teorema do Valor Intermediário podemos concluir que φ tem imagem $[0,1]$. Detalhes da construção anterior podem ser encontrados na seção 2.7 de [4].

Definimos agora $\psi : [0,1] \to [0,2]$ por $\psi(x) = \varphi(x) + x$. Afirmamos que, ψ é crescente, contínua e bijetiva que, mapeia o conjunto de Cantor C num conjunto de medida positiva e, mapeia um subconjunto mensurável do conjunto de Cantor em um conjunto não-mensurável.

Com efeito, sendo a soma de duas funções contínuas e crescentes, ψ é contínua e crescente. Pelo Teorema do Valor Intermediário, ψ assume todos os valores em $[0,2]$. Para ver que $h = \psi^{-1}$ é contínua tome $U \subset [0,1]$ aberto, desse modo $[0,2] \setminus U$ é fechado; $\psi([0,1] \setminus U) = \psi([0,1]) \setminus \psi(U)$ (da injetividade). Por sua vez, $\psi([0,1]) \setminus \psi(U) = [0,2] \setminus h^{-1}(U)$, donde concluímos que, $h^{-1}(U)$ é aberto.

Notamos que ψ mapeia os intervalos removidos na construção do conjunto de Cantor em intervalos de mesma medida. Basta observar que, φ é constante em cada intervalo desse tipo.

Por conta da observação anterior, se $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma enumeração dos intervalos removidos na construção do conjunto de Cantor, peja injetividade de ψ suas imagens são disjuntas; pela propriedade de aditividade contável temos:

$$m(\psi(\mathcal{O})) = \sum m(\psi(I_j)) = \sum m(I_j) = m(\mathcal{O}).$$

Donde, $m(\psi(C)) = 1$, o que conclui uma etapa.

Um fato relevante que iremos usar agora é que, todo conjunto de medida positiva admite um subconjunto não mensurável. A prova desse fato está no Apêndice A.

Continuando nossa construção, tome $N \subset \psi(C)$ não mensurável. Afirmamos que, $\psi^{-1}(N)$ é mensurável à Lebesgue mas não à Borel. De fato, como $\psi^{-1}(N) \subset C$ e $m(C) = 0$ então $m(\psi^{-1}(N)) = 0$ como provamos na seção anterior. Pelo lema seguinte, nossa função ψ leva conjuntos de Borel em conjuntos de Borel, mas $\psi(\psi^{-1}(N)) = N$ sequer é mensurável, o que é uma contradição.

Lema 2.1. *Uma função ψ crescente e contínua num intervalo I, mapeia conjuntos de Borel em conjuntos de Borel.*

Poderíamos provar o lema anterior sem a hipótese de continuidade. Como é um fato bem conhecido de análise na reta, toda função crescente em um intervalo tem inversa contínua (veja [2]). Entretanto preferimos não fazer isso, pois no caso da nossa função ψ já sabemos que ela é contínua, o que evita a verificação (de mais uma!) etapa.

Demonstração. Por ser contínua e crescente, a inversa de ψ é contínua (ψ é homeomorfismo). Daí, temos que, $\psi^{-1}(U)$ é aberto para todo $U \subset I$. Esse fato nos permite provar que, ψ mapeia conjunto de Borel em conjuntos de Borel.

Para tal, é suficiente mostrar que se f é uma função contínua qualquer, a família $\mathcal{F} = \{E : f^{-1}(E) \text{ é Borel}\}$ é uma σ-álgebra contendo os abertos. Uma vez que provarmos isso, basta tomar $f = \psi^{-1}$ e de $(\psi^{-1})^{-1}(E) = \psi(E)$ vamos ter nosso resultado. Portanto,

- Se $\{E_n\} \subset \mathcal{F}$ então $f^{-1}(\bigcup E_n) = \bigcup f^{-1}(E_n)$ mostra que, $f^{-1}(\bigcup E_n) \in \mathcal{F}$, já que cada $\bigcup f^{-1}(E_n)$ é Borel.

- Se $E \in \mathcal{F}$ então $\mathcal{F}^{-1}(E^c) = (\mathcal{F}^{-1}(E))^c$ mostra que $E^c \in \mathcal{F}$ pelo mesmo argumento anterior.

- Se U é aberto $f^{-1}(U)$ é aberto.

$\square$

O cerne do problema anterior, de exibir um conjunto Lebesgue mensurável que não é Borel, foi mostrar que a medida de Borel não é *completa*, enquanto a de Lebesgue o é. Por completa queremos dizer:

Definição 2.4. *Uma medida μ em uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ é dita completa, quando, qualquer subconjunto de um conjunto de medida nula possui medida nula.*

Nesse viés, acabamos de mostrar na construção anterior que a σ-álgebra de Borel não é completa, enquanto já sabíamos que a de Lebesgue o é. Felizmente, dada qualquer σ-álgebra não completa, podemos completá-la. A σ-álgebra de Lebesgue é o completamento da de Borel. Provamos isso nas próximas duas proposições. Nesse momento introduzimos a notação $(X, \mathcal{F})$, em que X é um conjunto e $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra, para dizer que X é um espaço mensurável (isto é, existe a possibilidade de introduzir uma medida) e, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ para dizer que X é um espaço com medida $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$.

Proposição 2.1. *Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida. Existe um único refinamento $(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$, chamado de completamento de $(X, \mathcal{F}, \mu)$, que é o refinamento mais grosso de $(X, \mathcal{F}, \mu)$ que é completo. Mais que isso, esse refinamento é obtido através dos conjuntos que diferem dos de $\mathcal{F}$ por um conjunto de medida nula.*

Demonstração. Seja $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} : \mu(N) = 0\}$ a família dos conjuntos de medida nula de $\mathcal{F}$ e, $\overline{\mathcal{N}} = \{F \subset N : N \in \mathcal{N}\}$.

Definimos $\overline{\mathcal{F}} = \{F \cup E : F \in \overline{\mathcal{N}} \text{ e } E \in \mathcal{F}\}$ e $\overline{\mu}$ por, $\overline{\mu}(F \cup E) = \mu(E), \forall F \cup E \in \overline{\mathcal{F}}$. Vamos verificar as propriedades pedidas.

Primeiro, provamos que $\overline{\mathcal{F}}$ é σ-álgebra. Com efeito, é evidente que $\emptyset, X \in \overline{\mathcal{F}}$, pois $\emptyset, X \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$; para mostrar que é fechada no complementar, tome $\overline{E} \in \overline{\mathcal{F}}$ e pela definição, escreva $\overline{E} = F \cup E$ com $F \in \overline{\mathcal{N}}$ e $E \in \mathcal{F}$. Temos que $\overline{E}^c = F^c \cap E^c$. Sabemos também que, $F \subset N$ com N de medida nula, escrevemos então $F^c = N^c \cup (N \setminus F)$. Desse modo, $\overline{E}^c = (N^c \cup (N \setminus F)) \cap E^c = (E^c \cap N^c) \cup ((N \setminus F) \cap E^c)$. Como $(E^c \cap N^c) \in \mathcal{F}$ e $((N \setminus F) \cap E^c) \subset N$ concluímos que $\overline{E}^c \in \overline{\mathcal{F}}$.

Para ver que é fechada em uniões enumeráveis, tome $\{\overline{E}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequência em $\overline{\mathcal{F}}$ e, usando a notação estabelecida, escreva $\overline{E}_n = F_n \cup E_n$ com F_n subconjunto de um conjunto de medida nula N_n, e E_n elemento da σ-álgebra $\mathcal{F}$. Assim,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{E}_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right);$$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{F}$ e $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ é subconjunto do conjunto de medida nula $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$.

Provamos agora que $\overline{\mu}$ é medida. De fato, é imediato que $\overline{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Além disso, usando a notação estabelecida, se $\{\overline{E}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência disjunta de mensuráveis em $\overline{\mathcal{F}}$ e os representamos por F_n subconjunto de um conjunto de medida nula N_n, e E_n elemento da σ-álgebra $\mathcal{F}$. Concluímos, do fato de que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{F}$, e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ é subconjunto do conjunto de medida nula $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$, que

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{E}_n\right) = \overline{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)$$

por outro lado,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(\overline{E}_n)$$

conclui σ-aditividade.

Finalmente, mostramos que $(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ é o refinamento mais grosseiro de $(X, \mathcal{F}, \mu)$ que é completo. Na realidade, ele é completo e refinamento por construção, basta mostrar que é o mais grosso com essas propriedades. Nesse viés, tome $(X, \overline{\mathcal{F}'}, \overline{\mu}')$ outro refinamento de $(X, \mathcal{F}, \mu)$ que seja completo. Tome $\overline{E} \in \overline{\mathcal{F}}$, isto é, $\overline{E} = F \cup E$ com F subconjunto de um conjunto de medida nula N e $E \in \mathcal{F}$; como $\overline{\mathcal{F}'}$ é refinamento de $\mathcal{F}$ temos que $E \in \mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}'} \Rightarrow E \in \overline{\mathcal{F}}'$ e como $\overline{\mathcal{F}}'$ é completo $\overline{\mu}'(F) = 0 \Rightarrow F \in \overline{\mathcal{F}}'$. Donde, $\overline{E} \in \overline{\mathcal{F}}'$, ou seja, $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}'$. $\square$

Proposição 2.2. *A família dos conjuntos Lebesgue mensuráveis é o completamento dos Borel mensuráveis.*

Demonstração. Iniciamos estabelecendo uma notação. Denotamos por $\mathcal{B}$ e $\mathcal{L}$ as σ-álgebras de Borel e Lebesgue. Seguindo a demonstração da proposição anterior, pomos que $\overline{\mathcal{B}}$ é o completamento de $\mathcal{B}$, obtido como mostramos acima. O que vamos provar nesse teorema é que $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{B}}$.

Tome $\overline{E} \in \overline{\mathcal{B}}$, isto é, $\overline{E} = F \cup E$ com F subconjunto de um conjunto de medida nula N e E um conjunto de Borel. Como já sabemos, todo conjunto Borel mensurável é Lebesgue mensurável, logo, $E \in \mathcal{L}$. Além disso, como $\mathcal{L}$ é completo, a medida de Lebesgue de F é nula, em particular $F \in \mathcal{L}$. Isso mostra que $\overline{E} \in \mathcal{L}$.

Para a outra inclusão, devemos mostrar que, todo conjunto de Lebesgue pode ser obtido como a união de um conjunto de Borel e outro de medida nula. De fato, se pretendemos mostrar que podemos representar um conjunto de Lebesgue como a união de um de Borel e um subconjunto de um conjunto de Borel com medida nula, basta notar que pela completeza da σ-álgebra de Lebesgue, um subconjunto desse tipo deve ter medida nula.

Seja E conjunto de Lebesgue e, para cada $n \in \mathbb{N}$ tome F_n fechado contido em E de tal modo que,

$$m(E \setminus F_n) = m(E) - m(F_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Já mostramos como fazer para obter esse fechado, para relembrar, basta tomar um aberto que contenha o complementar de E (que é mensurável), com custo mínimo pela definição 1.5; em seguida tome o complementar desse aberto e eis o F_n. Agora, tome a união dos F_n e chame de F; é evidente por construção que F é conjunto de Borel, $E = F \cup (E \setminus F)$ e $m^*(E \setminus F) = m(E \setminus F) = 0$. E isso conclui a prova.

Apenas para cumprir a promessa feita na subseção 1.3 e no começo dessa seção, vamos mostrar que, dado um cojunto de Lebesgue, podemos obter um conjunto de Borel que o contenha e com mesma medida.

Tome, para E Lebesgue mensurável e, para cada $n \in \mathbb{N}$ o aberto U_n contendo E com custo menor que $1/n$. Tomando interseção em $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, obtemos o desejado.

$\square$

2.2 Propriedades Operacionais da Integral

Dedicamos essa subseção para provar propriedades operatórias da integral que deixamos para trás na subseção 1.3. Aproveitamos para provar mais algumas propriedades interessantes que usaremos nas demonstrações dos teoremas de convergência.

As definições de, função mensurável e da integral, são formuladas de mesma forma que na subseção 1.3, substituindo $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ por um espaço com medida qualquer $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Quando queremos dizer que uma propriedade se verifica em quase todo ponto fazendo referência a medida tomada, escrevemos μ-*a.e.*

Formalmente, dizemos que $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é função simples quando é da forma $\varphi = \sum_{j=1}^{k} c_j 1_{A_j}$ com A_j mensurável; dizemos que φ está na representação canônica quando a escrita anterior tem os conjuntos A_j disjuntos e os c_j distintos. Uma função simples sempre admite representação canônica. Além disso, definimos a integral de função simples como

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^{k} c_j m(A_j)$$

Dizemos que, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável quando é o limite pontual μ-*a.e* de funções simples.

A integral inferior de f mensurável não negativa é definida como,

$$\underline{\int} f \, d\mu = \sup_{\varphi \leq f,\ \varphi \text{ simples}} \int \varphi \, d\mu.$$

A integral superior de f mensurável não negativa é definida como,

$$\overline{\int} f \, d\mu = \inf_{\psi \geq f,\ \psi \text{ simples}} \int \psi \, d\mu.$$

A integral de f mensurável não negativa é definida como sendo a integral inferior e denotada como anteriormente (sem a barra). A mesma construção para funções com sinal apresentada na definição 1.8, quebrando como a diferença da parte positiva e negativa, repete-se aqui e evitamos exibí-la para evitar pedantismo.

Agora reformulamos e provamos a propriedade 1.5 com nossa nova notação:

Propriedade 2.1. *Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida e f, g funções mensuráveis não negativas. Com respeito à integral, verifica-se:*

1. *(Linearidade)*

$$\int af + bg = a \int f + b \int g, \text{ com } a, b \in [0, \infty)$$

2. *(Aditividade) Se E, F são disjuntos e mensuráveis então,*

$$\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f$$

3. *(Monotonicidade) Se $f \leq g$ então,*

$$\int f \leq \int g$$

4. *(Desigualdade Triangular)*

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|$$

5. *Se f é integrável então $f(x) < \infty$ a.e.*

6. *Se a integral de f é nula, então $f(x) = 0$ a.e.*

Novamente observamos que, com exceção do item 6, todos os itens acima valem para funções com sinal e nesse caso no item 1 podemos tomar $a, b \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Mostramos primeiro a monotonicidade. Note que, se φ é simples e majorada por f então, g também majora φ. Desse modo o conjunto A das funções simples que são majoradas por f está contido no conjunto B das funções simples que são majoradas por g. A afirmação é consequência da observação $A \subset B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$.

Agora vejamos a linearidade no produto. Se $a \in [0, +\infty)$ então $\int af = a \int f$. A afirmação é evidente para funções simples. Considerando agora que se F é um conjunto qualquer da reta extendida então, $\sup(aF) = a \sup F$ a afirmação é consequência da observação de que, se $\varphi \leq af$ é simples então $\frac{1}{a}\varphi \leq f$ também é simples. E reciprocamente, se $\varphi \leq f$ é simples então, $a\varphi \leq af$ é simples.

A linearidade na soma é mais complicada e precisaremos dos resultados seguintes dessa seção. Portanto, a apresentaremos após o teorema 2.1. Nos resultados seguintes dessa demonstração eventualmente usaremos esse fato. Atentamos que por motivos lógicos, naturalmente não usaremos nenhuma das propriedades seguintes na demonstração dos tipos de truncamento nem na linearidade.

Uma vez provada a lineridade na soma, para a aditividade basta notar que,

$$\int_{E \cup F} f = \int f \cdot 1_{E \cup F} = \int f(1_E + 1_F) = \int_E f + \int_F f.$$

Para a desigualdade triangular, no caso de f não negativo não há o que fazer. Para f com sinal lembre que, $f = f^+ - f^-$. Portanto,

$$\left|\int f\right| = \left|\int f^+ - f^-\right| \leq \int f^+ + \int f^- = \int f^+ + f^- = \int |f|.$$

Para mostrar que se f é integrável então ela é $a.e$ finita, relembre a desigualdade de Markov 1.8:

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X f(x) d\mu, \forall \lambda \in (0, \infty)$$

que evidentemente é válida aqui, pelo mesmo argumento anterior de considerar a desigualdade trivial $\lambda 1_{\{x \in X : f(x) \geq \lambda\}} \leq f$.

Considere agora que, existe E de medida positiva tal que $f(x) = \infty$ em E. Para qualquer $\lambda > 0$ a desigualdade de Markov nos diz:

$$\lambda \mu(E) \leq \lambda \mu(\{x \in X : f(x) \geq \lambda\}) \leq \int_X f(x) d\mu$$

Isto é, a integral de f fica arbitrariamente grande, uma contradição. Finalmente, mostramos que se $\int f = 0$ então $f = 0$ $a.e.$

Novamente pela desigualdade de Markov:

$$\mu\left(\left\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n \int_X f(x) d\mu = 0$$

Pela proposição 1.6 (que é válida para qualquer medida σ-finita) temos:

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq 0\}) = \mu\left(\bigcup \left\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim \mu\left(\left\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

O que conclui o argumento.

$\square$

Agora mostramos os tipos de truncamento da integral, que dentre outras coisas, nos auxiliarão a concluir a demonstração da aditividade da integral e a provar os teoremas de convergência.

Teorema 2.1. *(Tipos de Truncamento) Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida e f mensurável não negativa. Temos:*

1. *(Truncamento Vertical) Quando $n \to \infty$,*

$$\int \min(f(x), n) d\mu \to \int f(x) d\mu.$$

2. *(Truncamento Horizontal) Se $\{E_n\}$ é uma sequência crescente de conjuntos mensuráveis então,*

$$\lim_{n \to \infty} \int f \cdot 1_{E_n} d\mu = \int f \cdot 1_{\cup E_n} d\mu$$

Demonstração. Façamos por partes.

Truncamento Vertical: Consideremos incialmente o caso em que f não é finita $a.e$ e tome esse conjunto $B = \{x \in X : f(x) = \infty\}$. Temos então que $\int f \geq \int f 1_B \geq \int \infty 1_B = \infty$. Por outro lado,

$$\forall n \in \mathbb{N} : \int \min(f, n) \geq \int \min(f, n) 1_B = \int n 1_B$$

mostra que a sequência é ilimitada e portando também diverge à infinito.

Considere agora que f é finita $a.e.$ Pela definição de integral inferior, podemos tomar $h_n \leq f$ simples tal que,

$$\int f - \int h_n \leq \frac{1}{n}$$

Ademais, para cada h_n existe $N_n \in \mathbb{N}$ que majora h_n. pela desigualdade trivial $\min(f, n) \leq f$ temos:

$$\int h_n \leq \int \min(f, N_n) \leq \int f$$

Tomando $n \to \infty$ acima, obtemos o desejado.

Truncamento Horizontal: Tome $\varepsilon > 0$ e $h_\varepsilon \leq f$ simples tal que,

$$\int f \cdot 1_{\cup E_n} - \int h_\varepsilon \cdot 1_{\cup E_n} \leq \varepsilon.$$

Se pomos, $h_\varepsilon = \sum_{j=1}^{k} c_j 1_{A_j}$ a representação canônica de h_ε notamos que, $h_\varepsilon 1_{E_n}$ é função simples com representação canônica, $h_\varepsilon 1_{E_n} = \sum_{j=1}^{k} c_j 1_{A_j \cap E_n}$. Temos daí,

$$\int h_\varepsilon \cdot 1_{E_n} \leq \int f \cdot 1_{E_n} \leq \int f \cdot 1_{\cup E_n}.$$

Pela proposição 1.6 (esse resultado vale para qualquer medida σ-finita) podemos ver que $\lim_{n\to\infty} \int h_\varepsilon 1_{E_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} c_j m(A_j \cap E_n) = \sum_{j=1}^{k} c_j m(A_j \cap (\cup E_n)) = \int h_\varepsilon 1_{\cup E_n}$. Dessa forma, basta tomar $n \to \infty$ e $\varepsilon \to 0$ na estimativa acima e obtemos o resultado.

$\square$

Retomamos agora com a prova da linearidade da soma. Por um lado,

$$\int f + g \geq \int f + \int g$$

De fato, lembre que se A, B são conjuntos da reta então, $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$. Basta notar que, o conjunto C, das funções simples que são majoradas por $f + g$ contém a soma dos conjuntos A, das funções simples que são majoradas por f e B, o conjunto das funções simples que são majoradas por g. Com efeito, tome $\varphi \in A$ e $\psi \in B$. É evidente que, $\varphi + \psi \leq f + g$, o que implica em $A + B \subset C$. Logo, $\sup(C) \geq \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

A outra desigualdade é mais delicada e iremos prová-la por partes. Primeiro assumimos que $\mu(X) < \infty$ e f, g são limitadas. Fixe $\varepsilon > 0$ e defina f_ε como f arredondada para baixo pelo múltiplo inteiro de ε ($k\varepsilon$) mais próximo e f^ε como f arredondada para cima, pelo múltimo inteiro de ε mais próximo.

Claramente temos as estimativas: $f_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq f^\varepsilon(x)$ e $f^\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x) \leq \varepsilon$. Além disso, como f é mensurável e limitada, $f_\varepsilon, f^\varepsilon$ são simples (veja na proposição 2.3 e no lema 2.2 uma contrução detalhada de como obter essas funções). De forma análoga defina $g_\varepsilon, g^\varepsilon$. Obtemos mais uma estimativa pontual: $f + g \leq f^\varepsilon + g^\varepsilon \leq f_\varepsilon + g_\varepsilon + 2\varepsilon$.

Logo,

$$\int f + g \leq \int f_\varepsilon + \int g_\varepsilon + 2\varepsilon\mu(X)$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos o resultado. Dando continuidade, trate agora com a hipótese de que $\mu(X) < \infty$, mas dispensando a consideração de que f e g são limitadas.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos o caso anterior nos garantindo que:

$$\int \min(f, n) + \min(g, n) \leq \int \min(f, n) + \int \min(g, n)$$

Além disso, a estimativa trivial $\min(f + g, n) \leq \min(f, n) + \min(g, n)$ nos dá:

$$\int \min(f + g, n) \leq \min(f, n) + \int \min(g, n)$$

Usando de truncamento horizontal quando $n \to \infty$, obtemos o resultado. Agora dispensamos as hipóteses de $\mu(X) < \infty$ e f, g limitadas para tratar do caso geral.

Se $\int f$ ou $\int g$ são infinitas, então por monotonicidade $\int f + g$ também o é, e o resultado segue. Desse modo, supomos que $\int f$ ou $\int g$ são ambas finitas. Pela desigualdade de Markov, conluímos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto,

$$E_n = \left\{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\right\} \bigcup \left\{x \in X : g(x) > \frac{1}{n}\right\}$$

tem medida finita.

A sequência $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, cuja união contém os suportes de $f, g, f + g$. Pelo truncamento vertical temos,

$$\int f + g = \lim_{n\to\infty} \int (f + g)1_{E_n}$$

Por outro lado, pelo caso anterior, temos:

$$\int (f + g)1_{E_n} \leq \int f \cdot 1_{E_n} + \int g \cdot 1_{E_n}$$

Com essas duas observações, tomando o limite quando $n \to \infty$ concluímos que:

$$\int f + g = \lim_{n\to\infty} \int (f + g)1_{E_n} \leq \int f + \int g.$$

E isso finaliza a linearidade na soma. Finalizamos essa subseção com uma discussão envolvendo a integral superior.

Na subseção 1.3 argumentamos que, em contraste com a teoria de Riemann, consideramos apenas aproximações inferiores na definição da nossa integral pois no caso de funções não negativas ilimitadas, podemos sempre considerar aproximações via funções simples por baixo; o mesmo obviamente não é possível com aproximações por cima. Além disso, comentamos que não havia problema em desconsiderar aproximações superiores no caso limitado, pois sendo f mensurável e limitada, com suporte de medida finita, a integral inferior e superior (nas aproximações via funções simples) obrigatoriamente coincidem. A proposição a seguir formaliza essa discussão.

Proposição 2.3. *Seja $f : X \to [0, \infty]$ mensurável, limitada e de suporte com medida finita. Para f nessas condições a integral superior e inferior de Lebesgue coincidem.*

Antes de apresentar a prova para a proposição anterior, temos o lema auxilar:

Lema 2.2. *Uma função $f : X \to [0, \infty]$ é mensurável e limitada se, e somente se, f é o limite uniforme de funções simples.*

Demonstração. Seja $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples que converge uniformemente para f, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\varphi_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$ e $n \geq N$.

Seja também $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $|\varphi_k(x)| \leq M_k, \forall x \in X$. A desigualdade triangular nos dá:

$$|f(x)| \leq |f(x) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x)|.$$

Pelas considerações prévias, basta tomar $\varepsilon = 1$ por exemplo e, proceder como de costume para concluir que $|f(x)|$ é limitada. Que f é mensurável é evidente.

A outra direção é mais delicada. Seja $M = \sup f(x)$ e, considere a sequência de funções simples $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definidas por:

$$\varphi_k(x) = \frac{M}{2^k}\lfloor \frac{2^k}{M} f(x) \rfloor.$$

Essa construção imita a da proposição 1.7 e argumentamos que suas funções são simples pois para cada $k \in \mathbb{N}$ a função φ_k so pode assumir os valores entre 0 e M em pulos de $M/2^k$. Essa sequência converge uniformemente para f. Com efeito,

$$|f(x) - \varphi_k(x)| \leq \frac{M}{2^k}\left|\frac{2^k}{M} f(x) - \lfloor \frac{2^k}{M} f(x) \rfloor\right| \leq \frac{M}{2^k}.$$

E isso conclui o racíocinio.

$\square$

Na demonstração anterior evitamos o uso da notação para convergência uniforme; a introduziremos agora. Numa situação como a anterior *"dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\varphi_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$ e $n \geq N$"*, poderíamos dizer a mesma coisa com a nova notação: *dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_\infty(\varphi_n, f) \leq \varepsilon$ e $n \geq N$.* Retornando, eis a demonstração da proposição anterior:

Demonstração. (da proposição 2.3). Seja S o suporte de f. Pelo lema anterior, considere uma sequência $\{\varphi_n\}$ de funções simples que são crescentes, de suporte com medida finita S, convergindo uniformemente para f. Note que, podemos extrair uma subsequência de $\{\varphi_n\}$, tal que, $d_\infty(\varphi_{n_k}, f) \leq \dfrac{1}{k}$.

Renomeando a sequência se necessário supomos que: $d_\infty(\varphi_n, f) \leq \dfrac{1}{n}$. Construímos de forma auxiliar uma sequência $\{\psi_n\}$ que majora f com as mesma propriedades de $\{\varphi_n\}$ pondo $\psi_n = \varphi_n + \dfrac{2}{n}$.

Agora provamos a afirmação. Tome $g \leq f$ simples tal que,

$$\underline{\int} f - \int g \leq \frac{1}{n},$$

daí,

$$\underline{\int} f - \int \varphi_n = \left(\underline{\int} f - \int g\right) + \left(\int g - \int \varphi_n\right).$$

Tomando módulos temos as estimativas:

$$\left|\underline{\int} f - \int g\right| \leq \frac{1}{n} + \int |g - \varphi_n| \leq \frac{1}{n} + \int d_\infty(g, \varphi_n) \cdot 1_S$$

Usando desigualdade triangular:

$$\leq \frac{1}{n} + \int [d_\infty(g, f) + d_\infty(f, \varphi_n)] 1_S \leq \frac{1}{n} + \frac{2m(S)}{n}$$

O que mostra que, $\lim \int \varphi_n = \underline{\int} f$.

Por outro lado, tomando $h \geq f$ tal que,

$$\int h - \overline{\int} f \leq \frac{1}{n}$$

Provamos por uma conta similar que $\lim \int \psi_n = \overline{\int} f$. Donde, concluímos que,

$$\underline{\int} f = \lim \int \varphi_n = \lim \int \psi_n = \overline{\int} f$$

sendo a igualdade do meio evidente.

□

2.3 Teoremas de Convergência

Dedicamos essa seção para enunciar e provar os Teoremas de Convergência e resultados relacionados; aproveitamos também para apresentar a prova do teorema 1.1. Ao longo dessa subseção seguimos a construção anterior em que trabalhamos no espaço com medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Vamos enunciar, os teoremas de convergência mostrando primeiro o da monotonicidade, como consequência o lema de Fatou e por fim o da convergência monótona. Esclarecemos entretanto que esse teoremas estão tão profundamente conectados e que existem outras formas de usar um para deduzir os outros. Em [6] o caminho é um pouco diferente e recomendamos a leitura para cultura geral.

Teorema 2.2. *(Convergência Monótona) Sejam* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *um espaço com medida e* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência crescente de funções mensuráveis não negativas:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$$

Demonstração. Ponha $f = \lim f_n = \sup f_n$; já sabemos que f é mensurável. Como f_n é crescente e não negativa podemos concluir que, $\int_X f_n$ é crescente. Da monotonicidade, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$$

Vamos nos dedicar a provar a desigualdade contrária. Para tal é suficiente mostrar que

$$\int_X g \; d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

quando g é uma função simples limitada pontualmente por f. Sem perda de generalidade, usando trucamento vertical, podemos assumir que g é finita. Escrevemos desse modo $g = \sum_{i=1}^k c_i 1_{A_i}$ na representação canônica. Tome agora $0 < \varepsilon < 1$ e observe que

$f(x) = \sup f_n(x) > (1-\varepsilon)c_i, \forall x \in A_i$. Defina,

$$A_{i,n} = \{x \in A_i : f_n(x) > (1-\varepsilon)c_i\}$$

então $A_{i,n}$ são mensuráveis e crescentes para A_i. Pela proposição 1.6 temos $\lim_{n\to\infty} \mu(A_{i,n}) = \mu(A_i)$.

Por outro lado, temos a estimativa pontual,

$$f_n \geq \sum (1-\varepsilon)c_i 1_{A_{i,n}}.$$

Integrando,

$$\int_X f_n(x)d\mu \geq (1-\varepsilon)\sum c_i\mu(A_{i,n}).$$

Tomando limites quando $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu \geq (1-\varepsilon)\sum c_i\mu(A_{i,n}).$$

E ao tomar $\varepsilon \to 0$ concluímos a prova.

□

Teorema 2.3. *(Lema de Fatou) Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida e $\{f_n\}$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas. Temos,*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu$$

Demonstração. Defina $F_N = \inf_{n\geq N} f_n$. Dessa forma, as F_N formam uma sequência mensurável e crescente. Pelo teorema anterior:

$$\int_X \sup_{N\in\mathbb{N}} F_N(x)d\mu = \sup_{N\in\mathbb{N}} \int_X F_N(x)d\mu.$$

Por monotonicidade temos, $\int_X F_N \leq \int_X f_n$ para todo $n \geq N$ e como consequência,

$$\int_X F_N \; d\mu \leq \inf_{n\geq N} \int_X f_n d\mu.$$

Portanto,

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)d\mu \leq \sup_{N\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq N} \int_X f_n d\mu$$

□

Teorema 2.4. *(Convergência Dominada) Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço com medida $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis que convergem μ-a.e para uma função f. Suponha que existe G integrável não negativa que majora $\{|f_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ μ-a.e. Nessa situação, temos:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$$

Demonstração. Podemos supor sem perda de generalidade que $f_n \to f$ pontualmente em todo $x \in X$; novamente, sem perda de generalidade podemos assumir que $\{|f_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ é majorada por G em todo ponto.

Temos inicialmente a estimativa pontual, $-G \leq f_n \leq G$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e por consequência $-G \leq f \leq G$. Pelo Lema de Fatou, aplicado na sequência $\{f_n + G\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\int_X f + G \; d\mu \leq \liminf \int_X f_n + G \; d\mu.$$

Como G é integrável, usando de lineariedade na expressão anterior, obtemos:

$$\int_X f \; d\mu \leq \liminf \int_X f_n \; d\mu.$$

.

Novamente pelo Lema de Fatou, aplicado em $\{G - f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ chegamos em:

$$\limsup \int_X f_n \;\; \leq \int_X f \; d\mu.$$

As duas últimas desigualdades nos dão o resultado.

□

Provamos agora o Teorema 1.1 usando os resultados anteriores. Enunciamos novamente para um bom cadenciamento:

"Se $f : E \to R$ uma função Riemann integrável no conjunto J-mensurável $E \subset \mathbb{R}^n$, então f é Lebesgue integrável e,

$$\int_E^{(\mathcal{R})} f(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

Em que, a integral na esquerda se refere à Riemann e a da direita à Lebesgue."

Demonstração. (do teorema 1.1)

Por definição, uma função Riemann integrável é limitada por uma constante $M > 0$. Vamos mostrar que f é mensurável e em seguida estabelecer a igualdade para as integrais.

Pela definição, podemos obter duas sequências de funções constantes por partes (que viemos a chamar de função degrau) $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{\psi\}_{k\in\mathbb{N}}$ limitadas por M, com $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ majorada por f e $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ majorando f. Além disso,

$$\lim_{k\to\infty}\int_E^{(\mathcal{R})}\varphi_k(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_E^{(\mathcal{R})}\psi_k(x)dx = \int_E^{(\mathcal{R})} f(x)dx.$$

Em primeiro lugar note que,

$$\int_E^{(\mathcal{R})}\varphi_k(x)dx = \int_E \varphi_k(x)dx \text{ e } \int_E^{(\mathcal{R})}\psi_k(x)dx = \int_E \psi_k(x)dx.$$

Em segundo lugar, pondo $\overline{\varphi} = \lim\varphi_k$ e $\overline{\psi} = \lim\psi_k$ vemos que $\overline{\varphi} \leq f \leq \overline{\psi}$. Ademais, $\overline{\varphi}$ e $\overline{\psi}$ são mensuráveis; pelo teorema da convergência monótona obtemos:

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \varphi_k(x)dx = \int_E \overline{\varphi}(x)dx \text{ e } \lim_{k\to\infty}\int_E \psi_k(x)dx = \int_E \overline{\psi}(x)dx.$$

Donde, concluímos que:

$$\int_E (\overline{\psi}(x) - \overline{\varphi}(x))dx = 0.$$

Como $\psi_k - \varphi_k \geq 0 \Rightarrow \overline{\psi} - \overline{\varphi} \geq 0$ temos da integral anterior que $\overline{\psi} = \overline{\varphi}$, $a.e$ e portanto $\overline{\psi} = \overline{\varphi} = f$, $a.e$ mostra que f é mensurável.

Como $\varphi_k \to f$ $a.e$ temos por definição que

$$\lim_{k\to\infty}\int_E \varphi_k(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

E isso conclui o nosso resultado. □

Com essas questões bem estabelecidas, estamos prontos para resolver nosso problema da completude.

3 O Completamento

Vamos dedicar essa seção para estabelecer formalmente o que vem a ser o completamento do espaço das funções Riemann integráveis. Precisamos portanto, em primeiro lugar, explicar o que queremos dizer por completamento.

Comentamos na introdução que o grande problema em torno da integral de Riemann é que ela não se comporta bem com limites. Vamos ver que, isso se traduz em dizer que o espaço métrico dessas funções não é completo.

Dedicamos então, a primeira subseção para esclarecer o que é um espaço métrico, o que ser completo quer dizer, e como isso se relaciona com a questão da passagem de limite. Vamos provar também que um espaço métrico sempre pode ser completado.

Na segunda parte, mostramos como o espaço métrico das funções Lebesgue integráveis é completo, e usamos isso junto com resultados das seções 1 e 2 para solucionar o problema que propomos no início.

Por fim, apenas para enriquecer o texto, apresentamos na terceira subseção uma pequena construção algébrica, que mostra como a medida de Lebesgue pode ser vista como um completamento métrico da medida elementar (Jordan).

3.1 Preliminares Métricos

Usualmente, motivamos a definição de um espaço métrico, fazendo alusão ao espaço euclidiano com a distância entres dois pontos usual, dada pelo teorema de Pitágoras. Nesse sentido, abstrai-se as propriedades relevantes a respeito da distância entre dois pontos, que listamos a seguir.

Primeiro, é natural intuir que a distância entre dois pontos deve ser um número real positivo, à exceção do caso degenerado em que falamos da distância de um ponto a si mesmo como sendo nula. Em segundo lugar, intuímos que a distância entre dois pontos é a mesma independente da direção que se tome, isto é, se x e y são pontos no nosso ambiente, a distância de x à y é a mesma que a distância de y à x. Por fim, queremos preservar a noção intuitiva de que a distância entre dois pontos x e y é menor ou igual a distância de x à y passando por um terceiro ponto intermediário z. Formalmente, temos:

Definição 3.1. *(Espaço Métrico). Um espaço métrico é um par (M, d) em que M é um conjunto e $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é uma função chamada distância (ou métrica) tal que:*

1. *Para todo $x \in M$ temos que $d(x, x) = 0$;*

2. *Para todo $x, y \in M$ com $x \neq y$ temos $d(x, y) > 0$;*

3. Para todo $x, y \in M$ temos $d(x, y) = d(y, x)$;

4. Para todo $x, y, z \in M$ temos $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

O exemplo de espaço métrico que estaremos interessado nesse trabalho é o que surge ao dotarmos um espaço vetorial com uma norma. Se V é um espaço vetorial real, dizemos que $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}^+$ é uma norma quando:

1. $||v|| = 0 \Rightarrow v = 0$;

2. $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$;

3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||, \forall u, v \in V$.

Desse modo, é de fácil verificação que, dado um espaço vetorial normado $(V, ||\cdot||)$ podemos induzir uma métrica $d : V \times V \to \mathbb{R}$ por $d(x, y) = ||x - y||$.

A partir do momento que temos posse de uma noção de distância d associada à um conjunto M podemos reconstruir toda a noção familiar de limites estudados em disciplinas de análise. Dada uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em M, dizemos que a é limite de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge à a, e escrevemos $a_n \to a$ ou $\lim a_n = a$ quando:

"Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n, a) \leq \varepsilon$ sempre que $n \geq N$".

Para toda sequência convergente é natural imaginar que, quando a ordem dos termos da sequência torna-se grande, a distância entre os termos fica pequena. De maneira formal:

"Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $d(a_n, a_m) \leq \varepsilon$ sempre que $n, m \geq N$".

Uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfaz a propriedade anterior é dita *Cauchy*. Assim como intuímos à pouco, toda sequência convergente é Cauchy. A verificação desse fato é muito simples e requer apenas o uso da desigualdade triangular. O que é mais complicado de notar, principalmente tendo apenas o caso euclidiano em mente, é que existem espaços para os quais é possível obter sequências de Cauchy não convergentes. Um exemplo esdrúxulo, apenas para fornecer um cadenciamento lógico adequado, é considerar o intervalo $M = (0, 1)$ com a métrica induzida da reta, isto é, $d(x, y) = |x - y|$. É fácil ver que a sequência $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy mas não é convergente em M.

Um exemplo mais interessante que já propomos de forma indireta nesse trabalho é considerar o espaço das funções Riemann integráveis; vamos entender na seção seguinte que tipo de métrica estamos considerando nesse espaço e, desse modo, formalizar a discussão de $\mathcal{R}$ ter sequências de Cauchy não convergentes.

Um tipo especial de espaço métrico que será de nosso interesse, são justamente aqueles em que, a questão da existência de limites está bem posta.

Definição 3.2. *Dizemos que, um espaço métrico é completo, quando toda sequência de Cauchy é convergente.*

Nesse momento, o exemplo que propomos acima pode ser incomodo pois é fácil pensar numa maneira de completá-lo. Basta considerar $\overline{M} = [0, 1]$ e dessa forma qualquer sequência de Cauchy que pensarmos em M convergirá em $\overline{M}$. É simples intuir porquê isso é verdade. O intervalo $(0, 1)$ foi tomado justamente de um ambiente que já é completo, a saber $\mathbb{R}$, basta então considerar seu fecho e por definição estamos resolvidos. No exemplo acima podemos proceder dessa forma justamente pela completude de $\mathbb{R}$.

Felizmente, mesmo em casos menos evidentes, como as situações em que nosso espaços surgem sem estarem imbuidos num ambiente completo, é possível obter uma forma de completá-lo de uma maneira fina. Intuitivamente falando, tapando apenas os pequenos buracos. Formalmente, temos:

Teorema 3.1. *Todo espaço métrico admite um completamento, que é único a menos de isometrias.*

Mas ainda não definimos o que é um completamento. Esperamos, é claro, que um completamento seja completo. Queremos também que ele não seja tão *distante* do espaço original, isto é, queremos que nosso espaço original esteja bem entrelaçado com seu completamento. Por último é claro, a noção de distância anterior, deve ser preservada. A próxima definição formaliza o que se espera de um completamento.

Definição 3.3. *Sejam (M, d) e $(\overline{M}, \overline{d})$ espaços métricos. Dizemos que, $(\overline{M}, \overline{d})$ é um completamento de (M, d) quando:*

1. *$(\overline{M}, \overline{d})$ é completo;*
2. *Existe uma imersão isométrica $\phi : M \to \overline{M}$;*
3. *$\phi(M)$ denso em $\overline{M}$.*

Quando as métricas $d, \overline{d}$ e a imersão isométrica ϕ estão subentendidas, podemos escrever $(\overline{M}, \phi)$ para dizer que $\overline{M}$ é completamento de M.

Antes de provarmos o teorema 3.1 esclarecemos dois conceitos que apareceram nos parágrafos anteriores.

Uma imersão isométrica é uma aplicação injetiva $\phi : (M, d_M) \to (N, d_N)$ entre espaços métricos, que preserva distâncias, ou seja, $d_M(x, y) = d_N(\phi(x), \phi(y))$. Uma isometria é uma aplicação entre espaços métricos que é bijetiva e preserva distâncias.

Demonstração. (Teorema 3.1).

Seja (M,d) espaço métrico e $C[M]$ o conjunto das sequências de Cauchy em M. Defina uma relação de equivalência $\sim$ em $C[M]$ por $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ quando $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0$.

Defina $\overline{M} = \dfrac{M}{\sim}$ e detone por $[\{x_n\}]$ a classe de equivalência de uma sequência $\{x_n\} \in C[M]$. Ponha também, $\overline{d} : \overline{M}\times\overline{M} \to [0,\infty)$ como $\overline{d}([\{x_n\}],[\{y_n\}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$.

Em primeiro lugar, observamos que $\overline{d}$ está bem definida, isto é, não depende do representante. De fato, sejam $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$, $\{y_n\}$ e $\{y'_n\}$ sequências de Cauchy tais que: $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ e $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$. Temos, em vista do uso da desigualdade triangular, que:

$$|d(x_n,y_n) - d(x'_n,y'_n)| \leq d(x_n,x'_n) + d(y_n,y'_n) \to 0$$

logo, $\lim d(x_n,y_n) = \lim d(x'_n,y'_n)$ mostra que $\overline{d}$ está bem definida.

Mostramos agora que $\overline{d}$ é uma métrica. Tome, $[\{x_n\}],[\{y_n\}],[\{z_n\}] \in C[M]$.

- $\overline{d}([\{x_n\}],[\{y_n\}]) = 0 \Leftrightarrow \lim d(x_n,y_n)=0 \Leftrightarrow \{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow [\{x_n\}] = [\{y_n\}]$.
- $\overline{d}([\{x_n\}],[\{y_n\}]) = \lim d(x_n,y_n) = \lim d(y_n,x_n) = \overline{d}([\{y_n\}],[\{x_n\}])$.
- Como $d(x_n,y_n) \leq d(x_n,z_n) + d(z_n,y_n) \Rightarrow \lim d(x_n,y_n) \leq \lim d(x_n,z_n) + \lim d(z_n,y_n)$ temos: $\overline{d}([\{x_n\}],[\{y_n\}]) \leq \overline{d}([\{x_n\}],[\{z_n\}]) + \overline{d}([\{z_n\}],[\{y_n\}])$

Vamos construir agora nossa imersão isométrica ϕ e mostrar que $\phi(M)$ é denso em $\overline{M}$. Para cada $x \in M$ denotemos por $\overline{x}$ a classe de equivalência da sequência constante igual a x (que é evidentemente de Cauchy). Definimos $\phi : M \to \overline{M}$ por $\phi(x) = \overline{x}$. Para qualquer $x,y \in M$ temos que,

$$\overline{d}(\phi(x),\phi(y)) = \overline{d}(\overline{x},\overline{y}) = \lim d(x,y) = d(x,y)$$

o que verifica isometria. Para ver que, $\phi(M)$ é denso em $\overline{M}$ tome $[\{x_n\}] \in C[M]$ e $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m,x_n) \leq \varepsilon, \forall n,m \geq N$. O processo agora é o natural; considere a sequência constante igual a x_N, que na notação anterior, tem classe de equivalência representada por $\overline{x}_N$. Por construção, $\overline{x}_N \in \phi(M)$ e $\overline{d}([\{x_n\}],\overline{x}_N) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,x_N) \leq \varepsilon$, o que conclui a prova de densidade.

Para mostrar que $(\overline{M},\overline{d})$ é completo, provamos antes uma afirmação auxiliar:

Afirmação: Se (M,d) espaço métrico e $X \subset M$ denso, tal que, toda sequência de Cauchy em X converge em M. Nessas condições, M é completo.

Com efeito, seja $\{x_n\}$ Cauchy em M, sendo $X \subset M$ denso, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in X$ tal que $d(a_n,x_n) \leq \dfrac{1}{n}$.

A sequência $\{a_n\}$ assim formada é de Cauchy; para ver isso note que fixado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ que proporciona:

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon, \forall n, m \geq N.$$

Daí, $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, a_m) \leq \dfrac{1}{n} + \varepsilon + \dfrac{1}{m} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$ e $n, m \to \infty$. Sendo de Cauchy, $\{a_n\}$ converge à $a \in M$ por hipótese. É evidente pela construção que $\{x_n\}$ deve convergir para a. O que mostra que M é completo.

Retomando para a prova de que $(\overline{M}, \overline{d})$ é completo: é suficiente mostrar que toda sequência de Cauchy em $\phi(M)$ converge em $\overline{M}$.

Seja $\{\overline{z}_k\}$ uma sequência de Cauchy em $\phi(M)$, em que $\overline{z}_k$ é a classe de equivalência representada pela sequência constante $(z_k, z_k, \cdots)$. Como ϕ é isometria: $d(z_n, z_m) = \overline{d}(\overline{z}_n, \overline{z}_m), \forall n, m \in \mathbb{N}$.

Daí, $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em M, seja $z^* = [\{z_i\}_{i=1}^{\infty}] \in \overline{M}$. Vamos mostrar que $\{\overline{z}_k\}$ converge para z^*. Tome $\varepsilon > 0$, veja que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(z_k, z_n) \leq \varepsilon$ quando $k, n \geq N$.

Temos portanto, para $k \geq N$ que $\overline{d}(\overline{z}_k, z^*) = \lim_{n\to\infty} d(z_k, z_n) \leq \varepsilon$. E isso conclui a prova de que $(\overline{M}, \overline{d})$ é completo.

Resta apenas mostrar a unicidade a menos de isometrias. Isto é, se para M espaço métrico os pares $(X, \varphi), (Y, \psi)$ são completamentos, então, existe isometria f de X em Y tal que $f \circ \varphi = \psi$.

Note que, temos de maneira natural um isometria em subconjuntos densos de X e Y a saber: $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(M) \to \psi(M)$. Afirmamos que podemos extendê-la para uma isometria $\psi \circ \varphi^{-1} : X \to Y$. Observamos incialmente que, a inversa de isometria é isometria e, composição de isometrias é isometria.

Defina a extensão de $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(M) \to \psi(M)$ da seguinte forma: para cada $x \in X \setminus \varphi(M)$ tome uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \varphi(M)$ que converge à x. Tome $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que $\varphi(y_n) = x_n$. Como φ^{-1} é isometria e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy. Pelo mesmo motivo $\{\psi(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy em $\psi(M)$; sendo $\psi(M)$ denso em Y, a sequência $\{\psi(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge à um $y \in Y$. Pomos portanto, $\psi \circ \varphi^{-1}(x) := y$. É claro pela desigualdade triangular e o fato de $\psi \circ \varphi^{-1}$ é isometria em $\varphi(M)$, que y não depende da escolha de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Argumentamos que $\psi \circ \varphi^{-1}$ é isometria em X e é bijetiva (e portanto a notação é coerente). De fato, tome $x, y \in X$. Existem sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\varphi(M)$ que convergem à x e y respectivamente. Daí $\psi \circ \varphi^{-1}(x_n) \to \psi \circ \varphi^{-1}(x)$ e

$\psi \circ \varphi^{-1}(y_n) \to \psi \circ \varphi^{-1}(y)$. Portanto,

$$\overline{d}(\psi \circ \varphi^{-1}(x), \psi \circ \varphi^{-1}(y)) = \lim \overline{d}(\psi \circ \varphi^{-1}(x_n), \psi \circ \varphi^{-1}(y_n)) = \lim d(x_n, y_n) = d(x, y)$$

Mostra que a extensão é isometria. Para ver que a extensão é bijetiva podemos por exemplo notar que $\psi \circ \varphi^{-1}(X)$ é completo (logo é fechado) e contém o denso $\psi(M)$. Tomando fechos, vemos que $\psi \circ \varphi^{-1}(X) = Y$. E isso conclui a prova, mostrando também que a notação tomada é coerente.

□

Retomando o exemplo de espaços vetorias normados, dizemos que $(V, ||\cdot||)$ é Banach quando é completo na métrica induzida. Em vista do teorema 3.1 temos:

Corolário 3.1. *Se é V espaço de Banach e W é um subespaço denso de V, então V é o completamento de W.*

3.2 A Completude de $\mathbb{L}^1$

Agora nos propomos a resolver o problema colocado no começo do trabalho. Iniciamos a introdução fazendo menção ao fato de que o espaço das funções Riemann integráveis não é completo e motivamos dessa forma a construção de um espaço de funções integráveis que seja completo.

Nessa subseção vamos dotar o espaço das funções Lebesgue integráveis com uma métrica e mostrar sua completude. Vamos verificar também que, o espaço das funções Riemann integráveis pode ser visto como um subespaço denso desse ambiente, que entretanto não é completo e, em vista do que provamos no teorema 3.1 concluir que obtivemos um completamento.

Ao longo dessa seção retomamos a abordagem de atuar com a medida de Lebesgue no espaço Euclidiano $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, m)$ e vamos tirar proveito da "norma"apresentada na definição 1.8. Relembrando, uma função $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável é dita absolutamente integrável, ou simplemente integrável, quando:

$$||f||_{\mathbb{L}^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx < \infty$$

Primeiramente, é de fácil verificação pelo que provamos na propriedades 1.4 e 1.5 que o espaço das funções integráveis é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Além disso, o que apresentamos como $||\cdot||_{\mathbb{L}^1}$ é uma semi-norma. Novamente, é de fácil verificação que $||af||_{\mathbb{L}^1} = |a| \cdot ||f||_{\mathbb{L}^1}$ qualquer que seja o $a \in \mathbb{R}$ e, $||f + g||_{\mathbb{L}^1} \leq ||f||_{\mathbb{L}^1} + ||g||_{\mathbb{L}^1}$.

O título de semi-norma é devido pois, não podemos concluir que $||f||_{\mathbb{L}^1} = 0 \Rightarrow f = 0$. Por conta da propriedade 1.5. Sendo $|f| \geq 0$ sua integral ser nula garante apenas que $|f| = 0$ $a.e$

Felizmente existe uma maneira simples de contornar esse problema. Lembre-se que na filosofia de integração de Lebesgue estamos dispostos a perder controle do que acontece em um conjunto de medida nula. Dessa forma, duas funções que diferem em um conjunto de medida nula são do ponto de vista de integração de Lebesgue, indistinguíveis.

Introduzimos portanto, uma relação de equivalência $\sim$ no espaço das funções integráveis, de tal modo que, $f \sim g$ quando $f = g$ $a.e.$ Chamamos de $\mathbb{L}^1$ o conjunto quociente, do espaço das funções integráveis pela relação de equivalência $\sim$. É claro que, com as operações de soma e multiplicação por escalar induzidas, $\mathbb{L}^1$ é ainda espaço vetorial real. Mais que isso, definindo a função $||\cdot||_{\mathbb{L}^1} : \mathbb{L}^1 \to \mathbb{R}^+$ por $||[f]||_{\mathbb{L}^1} = ||f||_{\mathbb{L}^1}$, podemos dizer que $||[f]||_{\mathbb{L}^1} = 0 \Leftrightarrow [f] = 0$.

Dessa maneira, $(\mathbb{L}^1, ||\cdot||_{\mathbb{L}^1})$ é espaço vetorial normado. O objetivo principal dessa seção será mostrar que esse espaço é completo. Antes, um breve comentário.

Poderíamos definir um espaço $(\mathbb{L}^p, ||\cdot||_{\mathbb{L}^p})$ com $1 \leq p < \infty$ de funções tais que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty \text{ com a norma } ||f||_{\mathbb{L}^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

aplicando a mesma relação de equivalência.

Os espaços $\mathbb{L}^p$ são de extrema importância em análise, e o que tratamos é um caso particular ($p = 1$) das funções integráveis. A prova de que os espaços $\mathbb{L}^p$ são completos é a mesma para qualquer $1 \leq p < \infty$, contudo para obter a desigualdade tringular em $\mathbb{L}^p$ precisaríamos desenvolver as desigualdades de Hölder e Minkowski, cuja construção embora seja acessível para o leitor que acompanhou esse texto até o momento, é muito extensa. Portanto recomendamos o primeiro capítulo de [5] para um estudo dessas desigualdades e o os espaços $\mathbb{L}^p$ e seguimos com a filosofia de [8] e [6] de estudar o caso $p = 1$.

Teorema 3.2. *(Riesz-Fischer). O espaço* $\mathbb{L}^1$ *é Banach.*

Demonstração. Fazemos um menção incial de que, embora o espaço $\mathbb{L}^1$ seja formado por classes de equivalência, há pouco risco de erro em pensar nos seus elementos como funções.

Tome $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de Cauchy em $\mathbb{L}^1$. Dessa sequência, extraia uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_{\mathbb{L}^1} \leq 2^{-k}$. Defina as séries:

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

e

$$g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

e as respectivas somas parciais:

$$S_N(f)(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{N}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

e

$$S_N(g)(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{N}|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

A desigualdade triangular na norma $\mathbb{L}^1$ mostra que

$$||S_N(g)||_{\mathbb{L}^1} \leq ||f_{n_1}||_{\mathbb{L}^1} + \sum_{k=1}^{N}||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_{\mathbb{L}^1} \leq ||f_{n_1}||_{\mathbb{L}^1} + \sum_{k=1}^{N}2^{-k}$$

Donde, pondo $N \to \infty$ e aplicando o teorema da convergência monótona vemos que g é integrável. Logo, a série definindo g, e por consequência, a série definindo f, convergem *a.e.* Além disso, temos também que $f \in \mathbb{L}^1$.

Pela construção de f via uma série telescópica, vemos que, $f_{n_k} \to f$ *a.e.* Note que, $f_{n_k} \to f$ em $\mathbb{L}^1$. Com efeito, $|f - f_{n_k}| \leq g$ para todo $k \in \mathbb{N}$; aplicando o teorema da convergência dominada $||f - f_{n_k}||_{\mathbb{L}^1} \to 0$. Mostramos finalmente que $||f - f_n||_{\mathbb{L}^1} \to 0$.

Para isso, basta tomar $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que $||f_m - f_n||_{\mathbb{L}^1} \leq \varepsilon$ sempre que $n, m \geq N$. Se n_K é tomado maior que N e tal que $||f_{n_K} - f||_{\mathbb{L}^1} \leq \varepsilon$ temos:

$$||f_n - f||_{\mathbb{L}^1} \leq ||f_n - f_{n_K}||_{\mathbb{L}^1} + ||f_{n_K} - f||_{\mathbb{L}^1} \leq 2\varepsilon$$

o que conclui a demonstração.

□

Com o teorema anterior, queremos argumentar que o espaço das funções integráveis à Lebesgue completa o espaço das funções Riemann integráveis; para isso fixe um conjunto E mensurável à Jordan. Em primeiro lugar, sabemos das propriedades básicas de funções Riemann integráveis em E que, elas formam um espaço vetorial real. Quocientando pela relação de equivalência $\sim$ e com o teorema 1.1 em mente, podemos considerar esse conjunto, que chamamos de $\mathcal{R}(E)$, um subespaço vetorial de $\mathbb{L}^1(E)$. Mais que isso, tendo em vista o teorema 1.2 item 2, esse subespaço é denso. Logo, pelo corolario 3.1 do fim da subseção anterior, $\mathbb{L}^1(E)$ é o completamento de $\mathcal{R}(E)$.

E isso conclui a questão que propomos no começo. Vamos apenas mostrar que essa construção não foi desnecessária, isto é, nesse momento argumentamos que $\mathcal{R}(E)$ de fato não era completo.

Restringimos nosso ambiente para o intervalo $[0,1]$. Considere a sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em que $f_n(x) = \dfrac{1_{[1/n,1]}(x)}{\sqrt{x}}$. Note que as funções da sequência são integráveis a Riemann e diferem umas das outras *a.e.* Para todo, $n, m \in \mathbb{N}$ com $m > n$ temos:

$$f_m(x) - f_n(x) = \frac{1_{[1/m,1/n)}(x)}{\sqrt{x}}$$

E verificamos que a sequência é Cauchy pois,

$$||f_m(x) - f_n(x)||_{\mathbb{L}^1} = \int_{1/m}^{1/n} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{m}} \to 0 \text{ quando } n, m \to \infty$$

Contudo, não existe função g em $[0,1]$ Riemann integrável que seja o limite de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na norma $\mathbb{L}^1$. Se esse fosse o caso, para cada $0 < a < 1$ a sequência $\{1_{[a,1]}(x)f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergiria à $1_{[a,1]}(x)g(x)$. Para cada $n > a^{-1}$ temos que, $1_{[a,1]}(x)f_n(x) = 1_{[a,1]}(x)x^{-1/2}$ donde $1_{[a,1]}(x)g(x) = 1_{[a,1]}(x)x^{-1/2}$. Se esse fosse o caso para cada $0 < a < 1$, temos que $g(x) = x^{-1/2}$. Que não é Riemann integrável por não ser limitada.

3.3 A Medida de Lebesgue e a Medida Elementar

Nessa subseção queremos mostrar uma construção extra, que mostra como podemos considerar a medida de Lebesgue um completamento métrico da medida de elementar. Para evitar dificuldades técnicas consideramos o problema restrito ao bloco n-dimensional $A = [0,1]^n$

Considere 2^A o conjunto das partes de A e defina a relação de equivalência $\sim$ em 2^A pondo $E \sim F$ quando $m(E \triangle F) = 0$. De fato, $m(E \triangle E) = 0, \forall E \in 2^A$; $E \triangle F = F \triangle E \Rightarrow m(E \triangle F) = m(F \triangle E)$; transitividade é mais delicado. Tome $E, F, G \in 2^A$ tais que $m(E \triangle F) = m(F \triangle G) = 0$. Daí,

$$m(E \triangle G) = m^*(E \triangle G) \leq m^*(E \setminus G) + m^*(G \setminus E)$$

Como $E \setminus G = [(E \cap F) \cup (E \setminus F)] \setminus G = [(E \cap F) \setminus G] \cup [(E \setminus F) \setminus G]$ e analogamente $G \setminus E = [(G \cap F) \setminus E] \cup [(G \setminus F) \setminus E]$ temos:

$$\leq m^*((E \cap F) \setminus G) + m^*((E \setminus F) \setminus G) + m^*((G \cap F) \setminus E) + m^*((G \setminus F) \setminus E)$$

donde, por monotonicidade,

$$\leq m^*(F \setminus G) + m^*(E \setminus F) + m^*(F \setminus E) + m^*(G \setminus F) = 0.$$

Agora tomamos o quociente. Considere $2^A_\sim := \dfrac{2^A}{\sim}$ e a função $d : 2^A_\sim \times 2^A_\sim :\to R^+$ definida por $d([E], [F]) = m^*(E \triangle F)$. Afirmamos que $(2^A_\sim, d)$ é espaço métrico completo.

Verificamos que d é métrica. Com efeito, $d([E], [E]) = 0$ pois $m(E \triangle E) = 0$; se $[E], [F]$ são classes distintas então $m(E \triangle F) > 0$ donde $d([E], [F]) > 0$; se $[E], [F]$ são classes, então $d([E], [F]) = m(E \triangle F) = m(F \triangle E) = d([F], [E])$; se $[E], [F], [G]$ são classes, note que,

$$E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) = [E \cap G \setminus F] \cup [E \setminus G \setminus F] \cup [F \cap G \setminus E] \cup [F \setminus G \setminus G]$$

que por sua vez está contido em

$$\subset [G \setminus F] \cup [E \setminus G] \cup [G \setminus E] \cup [F \setminus G] = [E \triangle G] \cup [G \triangle F]$$

A desigualdade triangular vem como consequência da subaditividade e monotonicidade da medida externa. Veja que o argumento anterior também mostra que $d([E], [F])$ não depende do representante.

Vejamos agora a completude. Seja $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $2^A_\sim$. Vamos provar que $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge à $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq k} E_m = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq k} E_m = E$. Tome $\varepsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$ tenhamos $m(E_N \triangle E_n) \leq \varepsilon$. Temos portanto:

$$d(E_N, \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq k} E_m) \leq m^* \left((\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq k} E_m) \setminus E_N \right) + m^* \left(E_N \setminus (\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq k} E_m) \right)$$

que é igual à:

$$m^* \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq k} (E_m \setminus E_N) \right) + m^* \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq k} (E_N \setminus E_m) \right)$$

que por sua vez, pela proposição 1.6 é igual à:

$$\lim_{k\to\infty} m^*(\bigcap_{m\geq k}(E_m \setminus E_N)) + \lim_{k\to\infty} m^*(\bigcup_{m\geq k}(E_N \setminus E_m))$$

Da condição incial $m(E_N \triangle E_n) \leq \varepsilon$, podemos concluir:

$$m(E_N \setminus E_n), m(E_n \setminus E_N) \leq \varepsilon$$

Portanto, para o primeiro limite acima, existe $K_1 \geq N$ tal que,

$$m^*(\bigcap_{m\geq K_1}(E_m \setminus E_N)) \leq \varepsilon$$

Analogamente, para o segundo limite, existe $K_2 \geq N$ que satisfaz,

$$m^*(\bigcup_{m\geq K_2}(E_N \setminus E_m)) \leq \varepsilon$$

Tomando, $K \geq N, K_1, K_2$ temos,

$$m^*(\bigcap_{m\geq K}(E_m \setminus E_N)) + m^*(\bigcup_{m\geq K}(E_N \setminus E_m)) \leq 2\varepsilon$$

E isso conclui a prova de completude fazendo $N \to \infty$.

Denotamos por $\mathcal{E} \subset 2^A$ a família dos conjuntos elementares e $\mathcal{L} \subset 2^A$ a família dos conjuntos mensuráveis. Vamos mostrar que, $\mathcal{E}_\sim = \dfrac{\mathcal{E}}{\sim}$ é denso em $\mathcal{L}_\sim = \dfrac{\mathcal{L}}{\sim}$ e que $\mathcal{L}_\sim$ é o completamento métrico de $\mathcal{E}_\sim$

A densidade é simples. Dado qualquer $[E] \in \mathcal{L}_\sim$ basta mostrar que existe um conjunto elementar $[F]$ tal que $m(E\triangle F) \leq \varepsilon$, daí teremos $d([E],[F]) \leq \varepsilon$. Seja E um representante da classe e $\{B_n\}$ uma sequência de blocos que cobre E tal que $\sum m(B_n) - m(E) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Para cada $N \in \mathbb{N}$ ponha $F_N = \bigcup_{k=1}^{N} B_k$. Note que, $\{E \setminus F_N\}$ é uma sequência descrescente de blocos com interseção vazia. Pela proposição 1.6 $\lim m(E \setminus F_N) = 0$. Logo, podemos tomar N_1 grande o suficiente para ter $m(E \setminus F_{N_1}) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Considerando a sequência $\{F_N \setminus E\}$ vemos que ela é crescente e que $\lim m(F_N \setminus E) = m(\cup B_n \setminus E) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Tome então N_2 grande o suficiente para $m(F_{N_2} \setminus E) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Pondo, $F = F_K$ com $K = \max\{N_1, N_2\}$ temos o conjunto desejado.

Para ver que $\mathcal{L}_\sim$ é o fecho de $\mathcal{E}_\sim$ basta usar a construção anterior. Isto é, se $\{E_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{E}_\sim$ sabemos que cada um desses conjuntos é mensurável, logo seu limite $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\geq k} E_m$ é mensurável, já que a medida de Lebesgue é uma σ-álgebra. $\mathcal{L}_\sim$ é completo por construção. Logo, em vista do teorema 3.1 $\mathcal{L}_\sim$ é o completamento métrico de $\mathcal{E}_\sim$.

Por fim, abusando da notação, vamos mostrar que a função $m : \mathcal{L}_\sim \to [0, \infty)$ induzida por $\mathcal{L} \to [0, \infty)$ é a única extensão contínua de $m : \mathcal{E}_\sim \to [0, \infty)$ induzida por $m : \mathcal{E} \to [0, \infty)$.

Fixe $\varepsilon > 0$ e $[E] \in \mathcal{L}_\sim$, é suficiente tomar $\delta = \varepsilon$. Com efeito, se $[F]$ está ε-próxima de $[E]$ temos:

$$|m(E) - m(F)| = |m(E) - m(E \cap F) + m(E \cap F) - m(F)| = |m(E \setminus F) - m(F \setminus E)|$$

por sua vez,

$$|m(E \setminus F) - m(F \setminus E)| \leq m(E \setminus F) + m(F \setminus E) \leq \varepsilon$$

Quando a unicidade, seja $\{[E_n]\}$ uma sequência de conjuntos elementares que converge à $[E]$. Pela continuidade de m temos, $\lim m([E_n]) = m(E)$; qualquer outra escolha iria contradizer a continuidade.

Apêndice A

Teorema A.1. *Todo conjunto mensurável do espaço euclidiano, com medida estritamente positiva, admite um subconjunto não mensurável.*

Demonstração. Por simplicidade tomamos a reta como ambiente. Seja A o mensurável em questão. É suficiente supor que $A \subset (0,1)$, pois se A tem medida positiva $A \cap (n, n+1)$ também tem, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Por invariância por translação 1.2 temos a simplificação que afirmamos.

Defina a relação de equivalência $\sim$ em $\mathbb{R}$ dizendo que $r \sim s$ quando $r - s \in \mathbb{Q}$. Cada elemento $C \in \dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{Q}}$ é da forma $\mathbb{Q} + c$, logo C é denso em $\mathbb{R}$, donde $C \cap A \neq \emptyset$. Utilizando o Axioma da Escolha, forme o conjunto $N = \{x_C \in A : x_C \in C \cap A$, com x_C o único escolhido para cada $C \in \dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{Q}}\}$ e suponha que N é mensurável.

Agora observe que $A \subset \bigcup_{r \in (-1,1) \cap \mathbb{Q}} (r + N)$. De fato, tome $a \in A$, existe $n_a \in N$ tal que $a \sim n_a$, isto é, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a - n_a = r$. Em particular, como $a, n_a \in (0,1)$, $r \in (-1,1) \cap \mathbb{Q}$.

Além disso, a união anterior é disjunta. Com efeito, suponha que existem $r, s \in (-1,1) \cap \mathbb{Q}$ distintos tais que $(N+r) \cap (N+s) \neq \emptyset$. Deveriam existir portanto, $n_1, n_2 \in N$ que satisfizessem $n_1 + r = n_2 + s$. Portanto $n_1 - n_2 = s - r \in \mathbb{Q}$ implicaria em $n_1 \sim n_2$. Pela construção de N temos que, $n_1 = n_2 \Rightarrow s = r$; uma contradição.

Considere agora, $\{r_n\}$ uma enumeração de $(-1,1) \cap \mathbb{Q}$. O que mostramos acima garante que,

$$m(A) \leq m(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n + N)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(r_n + N) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(N)$$

Isso diz que $m(N) > 0$. Caso contrário, isto é, $m(N) = 0$ teríamos $m(A) = 0$ um absurdo. Por outro lado, como $\{r_n\} \subset (-1,1)$ e $N \subset A \subset (0,1)$ temos que, $(N + r_n) \subset (-1,2)$ qualque que seja $n \in \mathbb{N}$. Logo

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (N + r_n) \subset (-1,2)$$

donde,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} m(N) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(N + r_n) \leq 3$$

mostra que $m(N) = 0$. Caso contrário teríamos $\infty \leq 3$ um absurdo. Ora, mas já sabíamos que $m(N) > 0$. Temos uma contradição e portanto N não pode ser mensurável.

Referências

[1] Bartle, Robert G. The elements of integration and Lebesgue measure. John Wiley Sons, 2014.

[2] Lima, Elon Lages. Análise real. Vol. 1. Rio de Janeiro: Impa, 2004.

[3] R. Solovay, A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Annals of Mathematics 92 (1970), 1–56

[4] Royden, Halsey Lawrence, and Patrick Fitzpatrick. Real analysis. Vol. 2. New York: Macmillan, 1968.

[5] Stein, Elias M., and Rami Shakarchi. Functional analysis: introduction to further topics in analysis. Vol. 4. Princeton University Press, 2011.

[6] Stein, Elias M., and Rami Shakarchi. Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces. Princeton University Press, 2009.

[7] Tao, Terence. An Epsilon of Room, I: Real Analysis: pages from year three of a mathematical blog. Vol. 117. American mathematical society, 2022.

[8] Tao, Terence. An introduction to measure theory. Vol. 126. American Mathematical Soc., 2011.