Universidade Federal da Paraíba
Centro de Informática
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

INFLUÊNCIA DO RAIO, DA DISTÂNCIA E DO MOVIMENTO ESTOCÁSTICO NO PROBLEMA DE PERSEGUIÇÃO MULTIDIMENSIONAL

David Eloi dos Santos Bitencourt

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UFPB, da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional.

Orientador: Sérgio de Carvalho Bezerra

João Pessoa
Agosto de 2023

Ata da Sessão Pública de Defesa de Dissertação de Mestrado de **DAVID ELOI DOS SANTOS BITENCOURT**, candidato ao título de Mestre em Modelagem Matemática e Computacional, realizada no dia 30 de agosto de 2023.

Aos trinta dias do mês de agosto do ano de dois mil e vinte e três, às 14h, via videoconferência, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para julgar o Trabalho Final do discente DAVID ELOI DOS SANTOS BITENCOURT, vinculado a Universidade Federal da Paraíba sob a matrícula nº 20211025346, candidato ao grau de Mestre em "*Modelagem Matemática e Computacional*", na linha de pesquisa *"Modelagem Probabilística"*, do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional. A comissão examinadora foi composta pelos seguintes membros: Sérgio de Carvalho Bezerra, Orientador e Presidente da Banca; Claudio Javier Tablada, Examinador Interno ao Programa; e Luz Milea Zea Fernandez, Examinadora Externa à Instituição. Dando início aos trabalhos, o Presidente da Banca cumprimentou os presentes, comunicou a finalidade da reunião e passou a palavra ao candidato para que fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado *"Influência do raio, da distância e do movimento estocástico no problema de perseguição multidimensional"*. Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o seguinte parecer: "***aprovado***". Do ocorrido, eu, Gean Paulo P. M. de Barros, secretário do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional (PPGMMC), lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 30 de agosto de 2023.

Gean Paulo Pereira Maurício de Barros
Secretário do PPGMMC
SIAPE 2326476

Documento assinado digitalmente
gov.br
SERGIO DE CARVALHO BEZERRA
Data: 08/09/2023 19:21:09-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Sérgio de Carvalho Bezerra
Orientador (PPGMMC)

Documento assinado digitalmente
gov.br
CLAUDIO JAVIER TABLADA
Data: 06/09/2023 11:57:23-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Claudio Javier Tablada
Examinador Interno ao Programa (PPGMMC)

Documento assinado digitalmente
gov.br
LUZ MILENA ZEA FERNANDEZ
Data: 02/09/2023 18:40:21-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Drª. Luz Milea Zea Fernandez
Examinadora Externa à Instituição (UFRN)

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

B624i Bitencourt, David Eloi dos Santos.
Influência do raio, da distância e do movimento estocástico no problema de perseguição multidimensional / David Eloi dos Santos Bitencourt. - João Pessoa, 2023.
105 f. : il.

Orientação: Sérgio de Carvalho Bezerra.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CI.

1. Movimento estocástico. 2. Distribuições de probabilidade. 3. Cadeias de Markov. 4. Perseguição multidimensional - Problema. I. Bezerra, Sérgio de Carvalho. II. Título.

UFPB/BC CDU 519.216(043)

Elaborado por Larissa Silva Oliveira de Mesquita - CRB-15/746

À minha esposa Daiana e ao
meu filho João.

Agradecimentos

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional da Universidade Federal da Paraíba e seus professores(as), especialmente ao meu orientador Prof. Dr. Sérgio de Carvalho Bezerra e também aos membros da banca examinadora pelas valorosas contribuições para o desenvolvimento deste trabalho. Estendo os agradecimentos aos colegas com os quais cursei as disciplinas. Agradeço também ao Prof. Dr. Lurimar Smera Batista do IFBA, meu orientador durante a graduação, a quem devo o incentivo à pesquisa e a dedicação aos estudos. Agradeço sobretudo à minha família pelo apoio.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGMMC/CI/UFPB como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

INFLUÊNCIA DO RAIO, DA DISTÂNCIA E DO MOVIMENTO ESTOCÁSTICO NO PROBLEMA DE PERSEGUIÇÃO MULTIDIMENSIONAL

David Eloi dos Santos Bitencourt

Agosto/2023

Orientador: Sérgio de Carvalho Bezerra

Programa: Modelagem Matemática e Computacional

Este trabalho investiga a influência do raio, da distância e do movimento estocástico no problema de perseguição multidimensional. A partir de simulações de Monte Carlo, um ponto com movimento determinístico e um objeto com movimento aleatório realizam saltos discretos ou suficientemente pequenos para simular o comportamento contínuo. Utiliza-se ferramentas da inferência estatística para analisar os achados em relação ao percentual de capturas, variável aleatória. Tais achados indicam uma relação diretamente proporcional entre o percentual de capturas e o raio, bem como a distribuição probabilística dos saltos. Ademais, o crescimento da distância inicial entre o ponto e o objeto podem alterar o comportamento da variável aleatória.

Abstract of Dissertation presented to PPGMMC/CI/UFPB as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

INFLUENCE OF THE RADIUS, THE DISTANCE AND THE STOCHASTIC MOVEMENT IN THE PURSUIT PROBLEM

David Eloi dos Santos Bitencourt

August/2023

Advisor: Sérgio de Carvalho Bezerra

Program: Computational Mathematical Modelling

This work investigates the influence of the radius, the distance and the stochastic movement in the multidimensional pursuit problem. Using Monte Carlo simulation, a point in deterministic motion and an object in random motion take steps that are discrete or sufficiently small to simulate the continuous behavior. We utilize tools from the statistical inference to analyze the findings relative to the percentage of captures, random variable. These findings allow us to indicate that there is a directly proportional relationship between the percentage of captures and the radius, as well as the probabilistic distribution of the steps. Furthermore the increase of the initial distance between the point and the object can alter the behavior of the random variable.

Sumário

Lista de Figuras **x**

1 Introdução **1**
1.1 Objetivos 4
1.2 Justificativa 5
1.3 Estrutura do trabalho 5

2 Revisão Bibliográfica **7**
2.1 Distribuições de probabilidade 7
2.1.1 Distribuição uniforme 7
2.1.2 Distribuição normal 8
2.1.3 Distribuição Poisson 8
2.1.4 Distribuição exponencial 9
2.2 Discretização do contínuo 9
2.3 Abordagem de Cadeia de Markov 10
2.4 Estimador do valor esperado do salto do objeto 14

3 Método Proposto **15**
3.1 Definição de captura 15
3.1.1 Caso unidimensional 15
3.1.2 Caso bidimensional 16
3.1.3 Caso tridimensional 21
3.2 Situação com o ponto perseguido 26
3.2.1 Movimento do ponto 26
3.3 Situação com o ponto em perseguição 27
3.3.1 Movimento do ponto 27

4 Resultados e Discussões **29**
4.1 Resultados para o situação com o ponto perseguido 29
4.1.1 Unidimensional: Casos contínuo e discreto 30
4.1.2 Bidimensional: Casos contínuo e discreto 34
4.1.3 Tridimensional: Casos discreto e contínuo 52

4.2 Resultados para o situação com o ponto em perseguição 60
4.2.1 Unidimensional: Casos contínuo e discreto 61
4.2.2 Bidimensional: Casos contínuo e discreto 64
4.2.3 Tridimensional: Casos discreto e contínuo 78

5 Conclusões **87**

Referências Bibliográficas **90**

Lista de Figuras

1.1 Rascunho do problema definido por Da Vinci feito por GUHA e BISWAS [3]. 1
1.2 Rascunho do problema definido por Bouguer e desenhado em AZEVEDO e PELLUSO [1] com posição do navio mercante (x_0,V_mt) e navio pirata (x,y) no instante t>0 no qual a captura depende de suas velocidades. 2
1.3 A imagem com elementos descritos em língua inglesa retrata a trajetória do míssil e do navio de guerra. MUNGAN [5] 3
1.4 AZEVEDO e PELLUSO [1] mostram que no tempo $(t - t_r)$, no qual ocorre o reconhecimento da espaçonave mercante pelos piratas, o primeiro corpo muda de posição. 3
1.5 Círculo com movimento aleatório perseguindo ponto com movimento determinístico, ambos à direita. GOMES [2] 4

2.1 Captura aproximada no enésimo passo. P_n representa a posição do ponto no enésimo passo, C_{n-1} representa o objeto na posição anterior e C_n na posição atual. 10
2.2 Grafo da representação da cadeia de Markov. 12

3.1 Círculo ultrapassa o ponto no plano bidimensional 16
3.2 Círculo ultrapassa o ponto no plano tridimensional 22
3.3 Movimento do ponto P no caso unidimensional ao longo dos 3 primeiros instantes. 26

4.1 Resultados do caso contínuo unidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância. 31
4.2 Resultados do caso contínuo unidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 32

4.3 Resultados do caso discreto unidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância. 33
4.4 Resultados do caso discreto unidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 34
4.5 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância. 35
4.6 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância. 35
4.7 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 2$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância. 36
4.8 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 37
4.9 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 38
4.10 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 2$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 39
4.11 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 40
4.12 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 40

4.13 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 2$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 41
4.14 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 42
4.15 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 42
4.16 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 2$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 43
4.17 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição exponencial no eixo das ordenadas. 44
4.18 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição Poisson no eixo das ordenadas. 45
4.19 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição uniforme no eixo das abscissas e distribuição normal no eixo das ordenadas. 46
4.20 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição exponencial no eixo das ordenadas. 47
4.21 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição Poisson no eixo das ordenadas. 49
4.22 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição uniforme no eixo das abscissas e distribuição normal no eixo das ordenadas. 51
4.23 Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância. 53

4.24 Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância. 53
4.25 Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 2$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância. 54
4.26 Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 55
4.27 Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 55
4.28 Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 2$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 56
4.29 Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 57
4.30 Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 57
4.31 Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 2$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 58
4.32 Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 59
4.33 Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 59

4.34 Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 2$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 60
4.35 Resultados do caso contínuo unidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância. 61
4.36 Resultados do caso contínuo unidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 62
4.37 Resultados do caso discreto unidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância. 63
4.38 Resultados do caso discreto unidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 64
4.39 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância. 65
4.40 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância. 65
4.41 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 2$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância. 66
4.42 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 67
4.43 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 67
4.44 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 2$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 68

4.45 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 69
4.46 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 69
4.47 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 2$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 70
4.48 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 71
4.49 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 71
4.50 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 2$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 72
4.51 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição exponencial no eixo das ordenadas. 73
4.52 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição Poisson no eixo das ordenadas. 74
4.53 Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição uniforme no eixo das abscissas e distribuição normal no eixo das ordenadas. 75
4.54 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição exponencial no eixo das ordenadas. 76

4.55 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição Poisson no eixo das ordenadas. 77
4.56 Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição uniforme no eixo das abscissas e distribuição normal no eixo das ordenadas. 78
4.57 Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância. 79
4.58 Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância. 79
4.59 Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 2$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância. 80
4.60 Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 81
4.61 Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 81
4.62 Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 2$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 82
4.63 Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 83
4.64 Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 83

4.65 Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 2$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 84
4.66 Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 85
4.67 Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 85
4.68 Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 2$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa. 86

Capítulo 1

Introdução

Esta dissertação investiga a influência do raio, da distância e do movimento estocástico no problema de perseguição multidimensional. Utilizamos simulações de Monte Carlo de um ponto com movimento determinístico e um objeto com movimento aleatório que realizam saltos discretos ou suficientemente pequenos para simular o comportamento contínuo.
Há registros de problemas de perseguição com abordagem matemática que datam dos séculos XV e XVI, momento da passagem da Idade Média para a Idade Moderna. A figura 1.1 mostra problema proposto por Leonardo da Vinci que consistia em encontrar o ponto de intersecção e a curva de perseguição da trajetória de um gato que sempre está na direção de um rato em trajetória retilínea, na qual se movem em velocidades constantes arbitrárias e distintas (GUHA e BISWAS [3]).

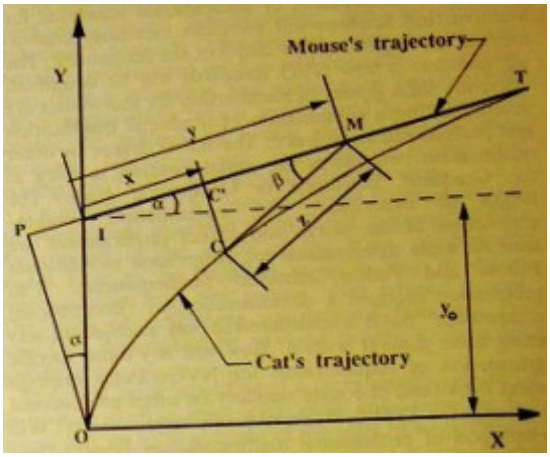


Figura 1.1: Rascunho do problema definido por Da Vinci feito por GUHA e BISWAS [3].

Da Vinci era um universalista, transitava entre diversas áreas do conhecimento, entre elas a matemática. Essa formulação é reflexo da mudança de pensamento que é a marca do Renascimento, contexto no qual os cientistas buscavam construir o

conhecimento a partir da observação da natureza e mobilizando o empirismo. Nesse período, o racionalismo greco-romano foi retomado para explicar o mundo e os seus fenômenos.

Um problema similar apresentado na figura 1.2 teve a solução publicada por Pierre Bouguer em 1732, refere-se à perseguição de uma embarcação mercante em rota retilínea por um navio pirata que traça uma rota curvílinea com tangente em direção ao objeto perseguido. Assim como no problema anterior, o que determina a captura é apenas a velocidade de ambos (AZEVEDO e PELLUSO [1]).

O problema mencionado respondeu às necessidades dos estrategistas daquele período. A pirataria preocupava as nações e mercadores da época, uma vez que ameaçava o comércio marítimo, principal ramo da economia mundial. A navegação possibilitava o intercâmbio comercial entre os continentes, pelo mar eram transportados produtos valiosos e o custo do transporte era alto, assim fazia-se necessário combater a prática de apresamento e saques dos navios mercantes (GUHA e BISWAS [3]).

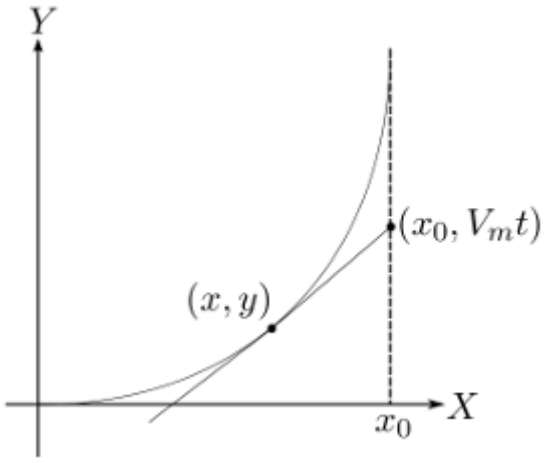


Figura 1.2: Rascunho do problema definido por Bouguer e desenhado em AZEVEDO e PELLUSO [1] com posição do navio mercante (x_0,V_mt) e navio pirata (x,y) no instante t>0 no qual a captura depende de suas velocidades.

Posteriormente, Frank Chorlton e Warren Colman apresentaram soluções para o problema mencionado utilizando referencial relativo, considerando possível inclinação α do caminho do objeto perseguido, e absoluto respectivamente (GUHA e BISWAS [3]).

MUNGAN [5] soluciona o problema utilizando derivadas no tempo, velocidade e aceleração, e vetores com foco no significado físico do problema. Além de propor, conforme ilustrado na figura 1.3, que ao invés da perseguição ser feita por um navio, seja feita por um míssil, o que abarca possíveis aplicações militares e para jogos digitais. O autor é professor da Academia Naval dos Estados Unidos, seu trabalho foi publicado durante as guerras no Oriente Médio que marcaram o ínicio do século XXI. O modelo proposto comporta o avanço tecnológico daquele momento e

os possíveis usos da tecnologia. Se nos modelos de Da Vinci e Bouguer o objetivo era entender sob quais circunstâncias um objeto seria capturado, em MUNGAN [5] o objetivo é atingir um alvo.

MUNGAN [5] apresenta também aplicações militares a exemplo da estimativa da posição do objeto perseguido para captura ou mira; em jogos para evitar que a presa alcance um local seguro; no movimento dos animais, por exemplo o deslocamento de uma aranha em sua teia; e na análise matemática como a tractriz, curva com a tangente em direção ao plano horizontal que pode representar uma perseguição.

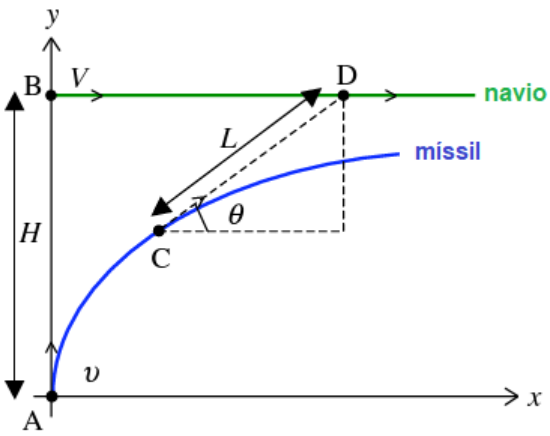


Figura 1.3: A imagem com elementos descritos em língua inglesa retrata a trajetória do míssil e do navio de guerra. MUNGAN [5]

AZEVEDO e PELLUSO [1] abordam na figura 1.4 o problema de Bouguer supondo as embarcações como naves espaciais em uma abordagem relativística, ou seja, considera que, conforme a teoria da relatividade de Einstein, a informação, seja visual, na forma de onda eletromagnética, ou sonora, na forma de onda mecânica, viaja em velocidade finita e, por consequente, envolve o conceito de tempo retardado. No trabalho mencionado, é possível observar que as descobertas científicas fomentam um novo olhar sobre os problemas de perseguição.

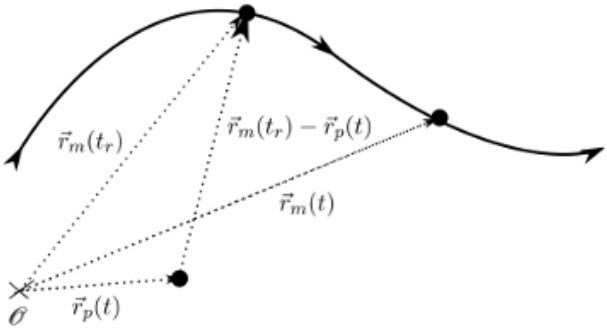


Figura 1.4: AZEVEDO e PELLUSO [1] mostram que no tempo $(t - t_r)$, no qual ocorre o reconhecimento da espaçonave mercante pelos piratas, o primeiro corpo muda de posição.

Estes estudos utilizam a matemática e ramos da ciência para solucionar modelos do mundo físico e responder aos questionamentos do seu tempo. Neles, os corpos realizam movimentos determinísticos, isto é, dadas as velocidades, suas trajetórias podem ser determinadas assim como seu ponto de intersecção. Quando o movimento de um dos objetos é aleatório, tornar-se necessário pesquisar, formular e utilizar novas abordagens matemáticas.
GOMES [2] em sua dissertação estuda o movimento estocástico de um círculo que persegue um ponto com trajetória retilínea determinística conforme descrito na figura 1.5, através de simulação computacional e de métodos de otimização.

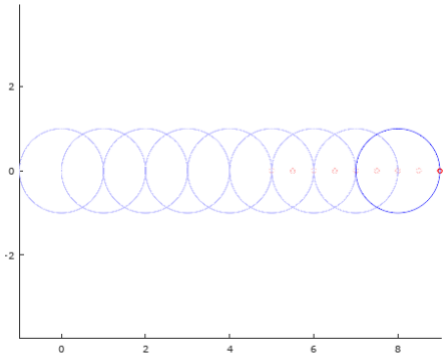


Figura 1.5: Círculo com movimento aleatório perseguindo ponto com movimento determinístico, ambos à direita. GOMES [2]

Neste trabalho, a partir da abordagem do problema de perseguição proposto por GOMES [2], são formulados modelos de uma a três dimensões com coordenadas cartesianas que se dividem em dois casos. No primeiro, o ponto é perseguido por um objeto com movimento estocástico; no segundo, o ponto tenta capturar o objeto com seus movimentos condicionados ao comportamento aleatório do objeto. Utilizamos ferramentas da inferência estatística para analisar os resultados em relação ao percentual de capturas, variável aleatória estudada.

1.1 Objetivos

Neste trabalho temos cinco objetivos principais:

- Formular resultados para o problema de perseguição em três dimensões.
- Investigar a influência de diferentes distribuições de probabilidade, com variação do respectivo valor esperado em cada eixo do plano cartesiano, em relação ao comportamento do percentual de capturas, variável aleatória considerada, no caso bidimensional.
- Estabelecer relação entre o raio da circunferência/esfera, a distância inicial

entre o objeto e o ponto e do movimento aleatório, esperança matemática e variância, em relação a variável aleatória para os modelos uni/bi/tridimensional.

- Analisar a tentativa de captura do ponto com movimentos determinísticos condicionados ao objeto com movimento aleatório.

- Comparar os resultados obtidos através de saltos discretos com os obtidos com saltos suficientemente pequenos para simular uma dinâmica de perseguição em movimento contínuo.

1.2 Justificativa

Outras abordagens supracitadas foram feitas sobre o problema de perseguição. Dentre as perspectivas exploradas, temos a perseguição de objetos em movimento determinístico, a abordagem relativística e adição de um objeto com movimento aleatório. O presente estudo considera outras dimensões do problema abordado por GOMES [2] como o problema de perseguição em três dimensões; em duas dimensões, considerando o movimento definido por uma distribuição de probabilidade diferente em cada dimensão, mostra-se o comportamento da variável aleatória, percentual de capturas, em relação a variação do valor esperado através de superfícies; o ponto perseguir o objeto; é feita a simulação com diferentes distribuições de probabilidade para o movimento do objeto; quanto aos saltos é feita a análise entre o modelo discreto e o que se assemelha ao contínuo; a variação da distância inicial, fundamental para a captura nos primeiros passos, entre outros.
O problema de perseguição terá como abordagem a influência do raio, da distância inicial e do movimento aleatório no percentual de capturas em diferentes cenários. Essa abordagem busca entender a interferência de cada elemento no comportamento da variável aleatória, percentual de capturas. Utilizamos probabilidade e ferramentas matemáticas para criar diferentes modelos para o problema, usamos a linguagem de programação R para executar as simulações de Monte Carlo e inferência estatística para analisar os achados.

1.3 Estrutura do trabalho

- Capítulo 2: Revisão bibliográfica, levantamento dos fundamentos teóricos do problema de perseguição estudado, sua estocasticidade e relação com o problema de perseguição.

- Capítulo 3: Método proposto, descrição do modelo proposto e das ferramentas matemáticas e computacionais utilizadas para estudá-lo.

- Capítulo 4: Resultados e discussões, evidências obtidas a partir da simulação computacional.
- Capítulo 5: Conclusões sobre os resultados.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

O problema de perseguição é abordado a partir do trabalho proposto por GOMES [2] considerando diferentes distribuições de probabilidade e valores de raio, de distância inicial e de esperança matemática para o movimento estocástico e analisado através de ferramentas da inferência estatística. Outro modelo estudado é com o ponto com saltos determinísticos tentando capturar o objeto com movimento aleatório.

2.1 Distribuições de probabilidade

O círculo/esfera tem movimento pseudo-aleatório em cada coordenada que segue uma distribuição uniforme, normal, Poisson ou exponencial. A simulação é feita para diferentes valores esperados e variâncias para observar o comportamento da variável aleatória, percentual de capturas.

2.1.1 Distribuição uniforme

O intervalo/círculo/esfera salta em cada eixo no intervalo de a, limite inferior até b, limite superior da função densidade de probabilidade (f.d.p.). A f.d.p. de uma variável aleatória X com distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$ é:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a \; ou \; x > b \end{cases}. \tag{2.1}$$

O valor esperado para o movimento do objeto no eixo horizontal é dado abaixo, para os demais eixos os resultados são análogos.

$$E(X) = \frac{b+a}{2}. \tag{2.2}$$

A esperança matemática de X é o ponto médio do intervalo $[a, b]$ (ROSS [6]). A variância do movimento estocástico X é:

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{2.3}$$

e o desvio padrão de X:

$$Dp(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}. \tag{2.4}$$

2.1.2 Distribuição normal

O círculo/esfera se move no intervalo de menos infinito, limite inferior, até mais infinito, limite superior da função densidade de probabilidade (f.d.p.). A f.d.p. de uma variável aleatória X com distribuição normal com parâmetros μ e σ^2 é:

$$f(x, \mu, \lambda^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right). \tag{2.5}$$

O valor esperado no eixo horizontal é dado abaixo, para os demais eixos os resultados são análogos. Então o valor esperado de X movimento aleatório é dado por:

$$E(X) = \mu, \tag{2.6}$$

sendo a variância da variável aleatória X, com distribuição normal:

$$Var(X) = \sigma^2 \tag{2.7}$$

e o desvio padrão de X:

$$Dp(X) = \sigma. \tag{2.8}$$

2.1.3 Distribuição Poisson

O círculo/esfera se move no conjunto $0, 1, 2, 3....$ A função massa de probabilidade (f.m.p.) de uma variável X com distribuição Poisson e parâmetro $\lambda > 0$ é:

$$f(x, \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}. \tag{2.9}$$

O valor esperado no eixo horizontal é dado abaixo, para os demais eixos os resultados são análogos. Então a esperança matemática da variável aleatória X com distribuição Poisson é:

$$E(X) = \lambda. \tag{2.10}$$

Para a variância da variável aleatória X com distribuição Poisson temos:

$$Var(X) = \lambda \tag{2.11}$$

e o desvio padrão de X é:

$$Dp(X) = \sqrt{\lambda}. \tag{2.12}$$

2.1.4 Distribuição exponencial

O círculo/esfera se move no intervalo de 0, limite inferior até ∞ é o limite superior da função densidade de probabilidade (f.d.p.). A f.d.p. de uma variável aleatória X com distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ é:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}. \tag{2.13}$$

O valor esperado no eixo horizontal é dado abaixo, para os demais eixos os resultados são análogos. Então o valor esperado de X com distribuição exponencial é:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}. \tag{2.14}$$

Com a variância de X com distribuição exponencial:

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \tag{2.15}$$

e o desvio padrão de X dado por:

$$Dp(X) = \frac{1}{\lambda}. \tag{2.16}$$

2.2 Discretização do contínuo

O modelo discreto considera saltos do objeto com valores aleatórios em cada eixo do plano cartesiano. Esses saltos geram uma incerteza quanto ao ocorrido no trajeto, ou seja, se houve ou não captura. Neste estudo consideramos que não há variação no caminho entre duas posições, pois o objeto salta em trajetória retilínea.

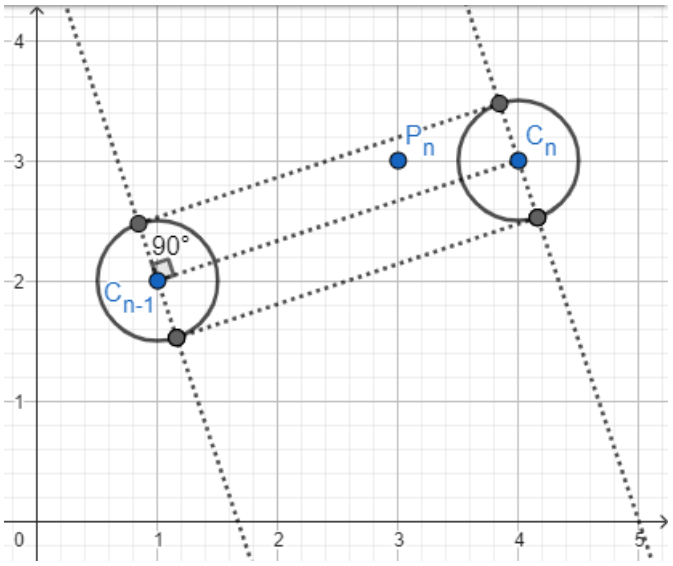


Figura 2.1: Captura aproximada no enésimo passo. P_n representa a posição do ponto no enésimo passo, C_{n-1} representa o objeto na posição anterior e C_n na posição atual.

Se o paralelogramo (caso bidimensional, conforme a figura 2.1), ou o prisma (caso tridimensional), cujas extremidades são definidas pelo raio e o centro do objeto, círculo ou esfera, na posição atual e anterior, envolve o ponto, ele foi capturado.
Outro modelo foi elaborado para investigar o que ocorre nessa trajetória, no qual o tamanho do salto do ponto e o valor esperado do salto do objeto é discretizado em valores 10 vezes menores de forma que a incerteza quanto a captura seja menor a cada passo. Ou seja, aumenta a chance do objeto envolver o ponto em vez da captura ser estimada pelo trajeto. Este modelo evidenciou uma alteração no comportamento do percentual de capturas e maximizou seus resultados.
O segundo modelo simula o comportamento do mundo real, contínuo, em que, assim como no primeiro, discreto, a diferença entre o tamanho do salto do objeto e o tamanho salto do ponto é sua velocidade relativa. Se calcularmos os quocientes entre o tamanho do salto do ponto e os valores esperados do tamanho do salto do objeto, obteremos as mesmas taxas para os modelos discreto e contínuo.

2.3 Abordagem de Cadeia de Markov

Uma cadeia de Markov é um processo onde sequências $\Phi_n, n \in N$ que evoluem aleatoriamente no tempo tem a memória de sua trajetória passada somente no seu valor mais recente (MEYN e TWEEDIE [4]). Há uma generalização quando o que ocorre no instante seguinte depende de um número fixo de instantes passados.
No problema de perseguição abordado, o instante seguinte depende de um número aleatório de instantes passados. Para o caso unidimensional temos um ponto na posição $x = d$ com $d > 0$ perseguido por um intervalo de comprimento $2r$ cen-

trado na origem ($r < d$), sendo a posição $x = (d_x, d_y)$ ou $x = (d_x, d_y, d_z)$ e $0 < r < \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$ ou $0 < r < \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$ para os casos bi/tridimensionais respectivamente. Considera-se a perseguição e a captura como estados, sendo que a transição para o sucesso ocorre quando o intervalo/círculo/esfera tangencia, envolve ou salta através do ponto. Consideraremos apenas o caso unidimensional para a abordagem abaixo.

Podemos definir o evento de não captura até o enésimo passo (A_n):

$$A_n = \left(\forall i, i = 1, \ldots, n \mid \sum_{j=1}^{i} X_j < is + d \right), \tag{2.17}$$

sendo X_j o tamanho do j-ésimo salto do intervalo, d a distância inicial e s o tamanho de cada salto do ponto. E o evento de captura até o enésimo instante como seu complementar ($A_n^{\complement}$):

$$A_n^{\complement} = \left(\exists i, i = 1, \ldots, n \mid \sum_{j=1}^{i} X_j \geq is + d \right). \tag{2.18}$$

Podemos definir o evento de não captura no enésimo passo:

$$B_n = \left(\sum_{j=1}^{n} X_j < ns + d \right), \tag{2.19}$$

e seu complementar:

$$B_n^{\complement} = \left(\sum_{j=1}^{n} X_j \geq ns + d \right). \tag{2.20}$$

A ocorrência do evento A_n é condição necessária e suficiente para os eventos B_i ocorrer para todos os $i = 1, \ldots, n$.

$$A_n = \cap_{i=1}^{n} B_i. \tag{2.21}$$

Sendo assim a ocorrência de A_n^c é condição necessária e suficiente para a realização de pelo menos um evento B_i^c com $i = 1, \ldots, n$. Se olharmos para os eventos complementares, temos:

$$A_n^c = \cup_{i=1}^{n} B_i^c. \tag{2.22}$$

O modelo proposto, para n dimensões, tem dois estados 0 e 1 descritos no grafo abaixo, onde o estado 0 representa que a perseguição continua para o instante seguinte e o estado 1 representa que a perseguição e captura já foi bem sucedida. A chance de estando no estado 0 no instante $n-1$ e permanecer no estado 0 no instante seguinte é representada pelo valor q_n cujo valor depende dos anteriores.

O estado 0 é transiente, ou seja, o estado 1 uma vez acessado a probabilidade de retorno é 0. O estado 1 de captura é absorvente, o sistema permanece neste estado com probabilidade 1.

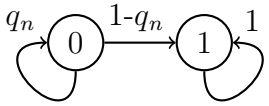


Figura 2.2: Grafo da representação da cadeia de Markov.

O grafo da figura 2.2 pode ser representado a cada passo pela matriz de probabilidade estocástica dada na equação 2.23 na qual, assim como no modelo acima, q_n depende de todos os passos,

$$P_n = \begin{pmatrix} q_n & 1-q_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

A quantidade q_n, para o caso unidimensional, representa a probabilidade de não captura no enésimo passo, que implica na não captura em todos os eventos anteriores, ou seja, ocorrência do evento A_n.

$$q_n = P\left(\sum_{j=1}^{i} X_j < is + d \ \forall i, i = 1, \ldots, n\right), \tag{2.24}$$

Podemos dividir o somatório da equação 2.24 pelo número de passos (i), para i suficientemente grande temos que $\frac{\sum_{j=1}^{i} X_j}{i} \to E(X)$. Vamos supor que $E(X) < s$, podemos analisar o que ocorre com a probabilidade da equação 2.19, evento B_n para um número de passos n suficientemente grande:

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} X_j < ns + d \mid E(X) < s\right), \tag{2.25}$$

divindindo ambos os lados da desigualdade por n, a probabilidade de não captura somente no enésimo passo, dado que $E(X) < s$, temos, com probabilidade 1 vai existir n_0, tal que para todo $n \geq n_0$:

$$P\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n} < s + \frac{d}{n} \mid E(X) < s\right) = 1, \tag{2.26}$$

esse resultado é consequência da lei dos grandes números, ou seja, com probabilidade 1 a partir de um certo n_0 não teremos captura. Consequentemente a probabilidade de captura, evento complementar, para n suficientemente grande nesse caso tende a 0, ou seja, a captura não ocorre para n suficientemente grande, todavia pode ocorrer

nos passos anteriores.
A partir da definição do evento complementar ao de não captura até o enésimo instante $\left(A_n^{\complement}\right)$ temos então $1 - q_n$ com probabilidade definida como:

$$1 - q_n = P\left(\exists i, i = 1, \ldots, n \mid \sum_{j=1}^{i} X_j \geq is + d\right). \tag{2.27}$$

Essa probabilidade da equação 2.24 também pode ser expressa usando a equação 2.21, temos que $P(A_n)$ pode ser escrita em termos da probabilidade da intersecção dos eventos B_i, que representam a não captura no i-ésimo passo.

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} X_j < is + d \ \forall i, i = 1, \ldots, n\right) = P(A_n) = P\left(B_1 \cap ... \cap B_n\right). \tag{2.28}$$

É possível representar a probabilidade de intersecção dos eventos usando a definição de probabilidade condicional:

$$P(B_1 \cap ... \cap B_n) = P(B_n \mid B_1 \cap ... \cap B_{n-1}) P(B_1 \cap ... \cap B_{n-1}). \tag{2.29}$$

No qual é introduzido a noção de recursividade dentro do modelo estudado em relação ao estado anterior, como em uma Cadeia de Markov.

$$q_{n-1} = P(B_1 \cap ... \cap B_{n-1}). \tag{2.30}$$

O que permite a reescrita da equação 2.29 obtida pelo teorema.

$$P(B_1 \cap ... \cap B_n) = P(B_n \mid B_1 \cap ... \cap B_{n-1}) q_{n-1}, \tag{2.31}$$

onde a substituição da definição da variável aleatória explicita a recursividade do modelo estudado.

$$q_n = P(B_n \mid B_1 \cap ... \cap B_{n-1}) q_{n-1}. \tag{2.32}$$

A partir dessa expressão, os q_n's são valores limitados por 1 não crescentes, e portanto convergem para um valor fixo q. Temos duas situações, se $q = 0$ dado qualquer $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq n_0$, $q_n < \epsilon$. Na outra situação $q > 0$ podemos tomar os limites na equação 2.34:

$$\lim_{n \to +\infty} q_n = \lim_{n \to +\infty} P(B_n \mid B_1 \cap ... \cap B_{n-1}) q_{n-1}, \tag{2.33}$$

e simplificar q. Assim obtemos a partir da equação 2.34:

$$\lim_{n \to +\infty} P(B_n \mid B_1 \cap ... \cap B_{n-1}) = 1. \tag{2.34}$$

Também é possível pela definição de probabilidade condicional reescrever a probabilidade de intersecção como:

$$P(B_1 \cap ... \cap B_n) = P(B_n)P(B_1 \cap ... \cap B_{n-1} \mid B_n). \tag{2.35}$$

Portanto, demonstra-se na equação 2.34 para o problema de perseguição a formulação de MEYN e TWEEDIE [4] em relação a memória de eventos passados estar apenas na posição atual.

2.4 Estimador do valor esperado do salto do objeto

O ponto na seção anterior evade do objeto com movimento determinístico, todavia foi formulada outra situação na qual o ponto persegue o objeto, conforme veremos adiante.

No capítulo anterior foram apresentadas aplicações militares do problema de perseguição abordadas por MUNGAN [5] e o conceito de tempo retardado abordado por AZEVEDO e PELLUSO [1]. Dessa forma, elaboramos uma segunda situação de perseguição na qual um objeto com movimento estocástico foge do ponto com movimento determinístico. Nessa situação é investigado se a média aritmética do tamanho dos saltos do intervalo/círculo/esfera seria um parâmetro suficiente para determinar os saltos do ponto e capturar o objeto.

A média amostral é o estimador pelo método dos momentos do valor esperado nas distribuições uniforme, normal, Poisson e exponencial. Optamos por utilizar a média amostral enquanto estimador do valor esperado e aplicamos o conceito de tempo retardado, ou seja, no passo atual não utilizamos para o cálculo do tamanho do salto do ponto o valor do último salto do objeto. Estimamos o valor esperado do salto do objeto pela média aritmética de seus passos, do primeiro até o penúltimo.

Capítulo 3

Método Proposto

A simulação foi realizada com diferentes raios, distâncias iniciais e esperanças matemáticas do movimento estocástico para investigar a influência destes na variável aleatória, percentual de capturas.

3.1 Definição de captura

Sendo a ocorrência do evento $B_n^{\complement}$, evento de captura no enésimo passo, condição suficiente para ocorrência do evento $A_n^{\complement}$, evento de captura até o enésimo passo, então analisaremos em quais circunstâncias o evento $A_n^{\complement}$ ocorre com probabilidade unitária. Analogamente o evento B_n, evento de não captura no enésimo passo, é condição necessária para ocorrência de A_n, evento de não captura dado que ela não ocorreu anteriormente, portanto analisaremos em quais circunstâncias o evento $A_n^{\complement}$ não ocorre com probabilidade unitária.
A captura e sua probabilidade de ocorrência são definidas abaixo para cada caso.

3.1.1 Caso unidimensional

A probabilidade do evento de não captura até o enésimo passo (A_n) é dada pela probabilidade do evento complementar de captura, ou seja, nos quais o ponto tangenciaria, seria envolvido pelo intervalo ou seria ultrapassado pelo mesmo.

$$P(A_n) = 1 - P\left(A_n^{\complement}\right). \tag{3.1}$$

A captura depende da posição atual da extremidade a direita do intervalo em relação ao ponto. Então, segundo GOMES [2], essa posição pode ser determinada pela soma dos movimentos aleatórios. Sendo r o raio, X_n a distância do salto do centro do intervalo no énesimo passo, d a distância inicial e s o tamanho do salto do ponto,

temos que

$$P\left(B_n^{\complement}\right) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \geq ns + d). \tag{3.2}$$

Podemos dividir ambos os lados da desigualdade por n.

$$P\left(B_n^{\complement}\right) = P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \geq s + \frac{d}{n}\right). \tag{3.3}$$

Supondo que $E(X) > s$, para n suficientemente grande $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \to E(X)$, então temos que pela lei dos grandes números que, com probabilidade 1, ocorre captura. A probabilidade de captura, evento $A_n^{\complement}$, de acordo com GOMES [2] para um valor esperado maior que o do salto do ponto com n suficientemente grande tende a 1.

3.1.2 Caso bidimensional

Para o caso bidimensional utiliza-se a simulação com as coordenadas x e y no $\mathbb{R}^2$ representadas no plano cartesiano com as distribuições apresentadas na seção anterior, inclusive associando distribuições diferentes em cada eixo do plano.
A captura pode ocorrer quando o círculo envolve ou tangencia o ponto, o que depende da relação dada por:

$$(x_{P_n} - X_{C_n})^2 + (y_{P_n} - Y_{C_n})^2 \leq r^2, \tag{3.4}$$

onde x_{P_n} e y_{P_n} representam as coordenadas do ponto no plano no enésimo salto determinístico e X_{C_n} e Y_{C_n} do énesimo salto aleatório do centro do círculo.

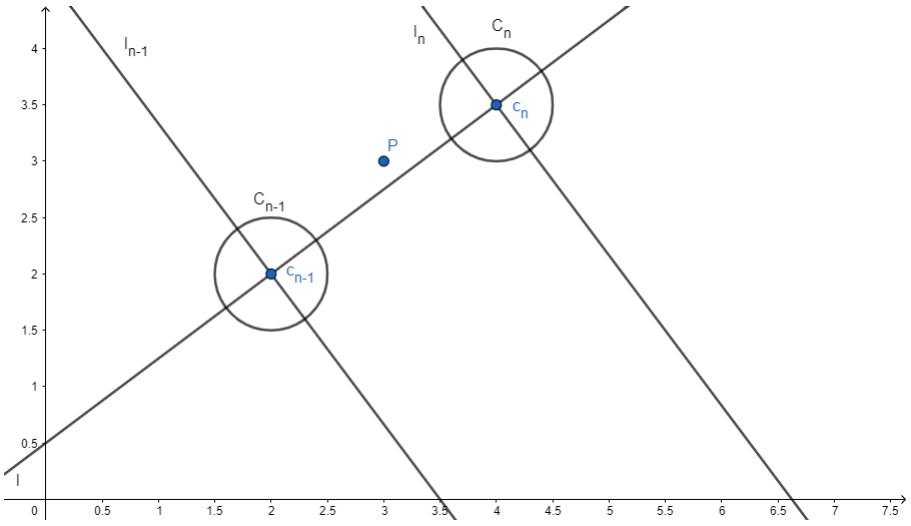


Figura 3.1: Círculo ultrapassa o ponto no plano bidimensional

A captura também pode ocorrer quando o círculo ultrapassa o ponto, estando este entre a posição anterior e a atual, dependendo das condições descritas na figura 3.1.

Os círculos C_n e C_{n-1} representam a posição no énesimo salto e o anterior respectivamente, sendo C_n o círculo com coordenadas (X_{C_n}, Y_{C_n}) e o círculo C_{n-1} é definido analogamente. Uma reta l é traçada no plano perpassando os centros dos círculos. Então a distância entre a reta l e o ponto é dada por:

$$d_{P,l} = \frac{|ax_{P_n} + by_{P_n} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \tag{3.5}$$

no qual a, b e c são constantes da equação geral da reta l, $ax + by + c = 0$.
São traçadas retas perpendiculares a esta, l_n e l_{n-1}, passando pelos centros dos respectivos círculos. O código então avalia que houve captura se duas condições forem atendidas, caso o ponto P com coordenadas (x_{P_n}, y_{P_n}) esteja entre l_n e l_{n-1}, e se a distância entre o ponto e a reta l é menor ou igual ao raio r, escrito como:

$$r \geq d_{P,l}. \tag{3.6}$$

Nesse caso o movimento tem dois graus de liberdade e é possível a não captura quando o círculo não ultrapassa o ponto ou $r < d_{P,l}$, com uma das condições satisfeitas temos a probabilidade de não captura:

$$P(A_n) = 1 - P\left(A_n^{\complement}\right). \tag{3.7}$$

Sendo C_1 o evento de captura no qual o círculo tangencia ou envolve o ponto, sua probabilidade é dada por:

$$P(C_1) = P(\exists\ n \mid (x_{P_n} - X_{C_n})^2 + (y_{P_n} - Y_{C_n})^2 \leq r^2). \tag{3.8}$$

Se $a_{l_{n-1}}$, $b_{l_{n-1}}$ e $c_{l_{n-1}}$ são constantes da equação geral da reta l_{n-1}, e a_{l_n}, b_{l_n} e c_{l_n} são constantes da equação da reta l_n, então a probabilidade do centro do círculo ultrapassar o ponto no énesimo passo, evento U_n, é dada pela probabilidade de que substituindo as coordenadas do ponto nas retas perpendiculares à reta l, suas equações resultem em valores que situem o ponto entre essas retas:

$$P(U_n) = P((a_{l_n}x_{P_n} + b_{l_n}y_{P_n} + c_{l_n}) \leq 0 \leq (a_{l_{n-1}}x_{P_n} + b_{l_{n-1}}y_{P_n} + c_{l_{n-1}})). \tag{3.9}$$

Assim, se C_2 é o evento no qual a captura é estimada dado que o centro do círculo ultrapassou o ponto e considerando que o centro do círculo realizou um movimento retilíneo no salto, calcula-se a distância entre a reta definida pelos centros da posição atual e anterior do círculo e o ponto para verificar se a distância desta ao ponto é inferior ou igual ao raio, ou seja, se no trajeto retilíneo o círculo envolveu ou

tangenciou o ponto.

$$P(C_2) = P(\exists\ n \mid r \geq d_{P,l} \cap U_n). \tag{3.10}$$

Então a probabilidade de captura é dada pela probabilidade da união dos eventos C_1 e C_2:

$$P(A_n^{\complement}) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2). \tag{3.11}$$

Captura por sobreposição no caso bidimensional

A captura por sobreposição (C_1) no caso bidimensional pode ocorrer quando o círculo envolve ou tangencia o ponto, o que depende da relação dada por:

$$\exists\ n\ \mid\ (x_{P_n} - X_{C_n})^2 + (y_{P_n} - Y_{C_n})^2 \leq r^2, \tag{3.12}$$

Sendo d_x a distância inicial no eixo x e d_y no eixo y, podemos definir o evento de captura (C_{1_i}):

$$C_{1_i} = \exists\ i\ \mid\ \left(\left(d_x + ix_P - \sum_{j=1}^{i} X_{C_j}\right)^2 + \left(d_y + iy_P - \sum_{j=1}^{i} Y_{C_j}\right)^2 \leq r^2\right). \tag{3.13}$$

Para avaliar a importância do raio no caso bidimensional, podemos considerar o caso com $r = 0$, no qual a captura ocorrerá quando o centro do objeto e o ponto se sobrepuserem. Isso ocorre quando as expressões dentro dos parênteses forem nulas, ou seja:

$$d_x + ix_P = \sum_{j=1}^{i} X_{C_j} \tag{3.14}$$

e

$$d_y + iy_P = \sum_{j=1}^{i} Y_{C_j}. \tag{3.15}$$

A probabilidade de captura nesse caso seria a probabilidade dessas expressões serem satisfeitas, o que para distribuições contínuas, como as utilizadas nesse trabalho com exceção da Poisson, é nula.

$$P\left(C_{1_i}\right) = P\left(\exists\ i\ \mid \left(d_x + ix_P = \sum_{j=1}^{i} X_{C_j}\right) \cap \left(d_y + iy_P = \sum_{j=1}^{i} Y_{C_j}\right)\right) = 0. \tag{3.16}$$

Analisando a inequação do evento de captura definido na equação 3.13, divindo todos os termos por i^2, sendo $\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^{i} X_{C_j}}{i}$ e $\bar{Y} = \frac{\sum_{j=1}^{i} Y_{C_j}}{i}$, substituindo os termos, temos:

$$\left(\frac{d_x}{i} + x_P - \bar{X}\right)^2 + \left(\frac{d_y}{i} + y_P - \bar{Y}\right)^2 \leq \frac{r^2}{i^2}. \tag{3.17}$$

Para quando $d_x = d_y = 0$, temos:

$$\left(x_P - \bar{X}\right)^2 + \left(y_P - \bar{Y}\right)^2 \leq \frac{r^2}{i^2}, \tag{3.18}$$

Considerando em $\mathbb{R}$ o tamanho do salto do ponto (x_p, y_p) como (μ_x, μ_y) obtemos:

$$\left(\bar{X} - \mu_x\right)^2 + \left(\bar{Y} - \mu_y\right)^2 \leq \frac{r^2}{i^2}. \tag{3.19}$$

Para i suficientemente grande a variância da amostra se aproxima da variância da população. Pelo Teorema de Cochran $i \,.\, \left(\bar{X} - \mu_x\right)^2 \sim \sigma_x^2 \,.\, \chi_1^2$ e $i \,.\, \left(\bar{Y} - \mu_y\right)^2 \sim \sigma_y^2 \,.\, \chi_1^2$, substituindo:

$$\sigma_x^2 \,.\, \chi_1^2 + \sigma_y^2 \,.\, \chi_1^2 \leq \frac{r^2}{i}. \tag{3.20}$$

Caso $\sigma^2 = \sigma_x^2 = \sigma_y^2$, temos:

$$\sigma^2 \,.\, \chi_2^2 \leq \frac{r^2}{i}. \tag{3.21}$$

O evento de captura no énesimo passo descrito pela inequação 3.21 pode ser estudado pelo lema de Borel-Cantelli, ou seja, caso os eventos $(B_i^{\complement})$ sejam independentes e a soma das probabilidades dos eventos mencionados divirja para infinito, podemos afirmar que a captura ocorrerá infinitas vezes.
A probabilidade de ocorrência do evento $(B_i^{\complement})$ no caso bidimensional é dada pela função distribuição acumulada, analisamos para o raio unitário e variância unitária:

$$P\left(\chi \leq \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}\gamma\left(\frac{2}{2}, \frac{\frac{1}{i}}{2}\right) = \gamma\left(\frac{2}{2}, \frac{\frac{1}{i}}{2}\right) \tag{3.22}$$

Então realizamos a soma infinita na plataforma Wolfram Alpha:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left(X \leq \frac{1}{i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma\left(\frac{2}{2}, \frac{\frac{1}{i}}{2}\right) = \infty \tag{3.23}$$

Também é possível demonstrar integrando a função densidade de probabilidade da qui-quadrado para 2 graus de liberdade:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{x^{1-1}e^{-\frac{X}{2}}}{2^1\Gamma(n/2)}dx\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{X}{2}}}{2\sqrt{\pi}}dx\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{-1}{2n}}\right) = \infty \tag{3.24}$$

Tentamos utilizar o lema de Borel-Cantelli para estudar o evento de captura $(B_i^{\complement})$, mas como a série divergiu e não conseguimos garantir a independência, o resultado não pode ser afirmado. A inequação 3.13 pode ser reescrita considerando que $d_x =$

$d_y = d$ como feito nas simulações, desenvolvendo o produto notável e fatorando:

$$\left(\frac{d}{i} + \frac{x_P - \bar{X} + y_P - \bar{Y}}{2}\right)^2 + \frac{\left(\bar{X} - x_P + y_P - \bar{Y}\right)^2}{4} \leq \frac{r^2}{2i^2}. \tag{3.25}$$

Considerando novamente que o objeto e o ponto estão na mesma direção e sentido com a mesma velocidade, ou seja, $x_P = E[X]$ e $y_P = E[Y]$ e que $\bar{X} \to E[X]$ e $\bar{Y} \to E[Y]$. O que tornaria a segunda parcela à esquerda da inequação não negativa, suficientemente pequena, portanto podemos considerar que dado $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, existe i_0 tal que para todo $i > i_0$ temos $\epsilon > \frac{\left(\bar{X} - \mu_x + \mu_y - \bar{Y}\right)^2}{4}$. Então teríamos:

$$\left(\frac{d}{i} + \frac{\mu_x - \bar{X} + \mu_y - \bar{Y}}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{d}{i} + \frac{\mu_x - \bar{X} + \mu_y - \bar{Y}}{2}\right)^2 + \epsilon \leq \frac{r^2}{2\ .\ i^2}. \tag{3.26}$$

Então temos a inequação:

$$\left(\frac{d}{i} + \frac{\mu_x - \bar{X} + \mu_y - \bar{Y}}{2}\right)^2 \leq \frac{r^2}{2\ .\ i^2}. \tag{3.27}$$

Captura estimada no caso bidimensional

Sendo a probabilidade de captura estimando o trajeto após o salto dada na equação 3.10 podemos analisar sua distribuição de probabilidade. A captura (C_2) no caso bidimensional pode ocorrer quando o círculo ultrapassa o ponto, estando este entre a posição anterior e a atual, dependendo das condições descritas na figura 3.1, para isto o prisma cujas bases tem centro na posição atual e anterior do círculo envolve ou tangencia o ponto.
Dadas as inequações:

$$(a_{l_n} x_{P_n} + b_{l_n} y_{P_n} + c_{l_n}) \leq 0 \leq (a_{l_{n-1}} x_{P_n} + b_{l_{n-1}} y_{P_n} + c_{l_{n-1}}) \tag{3.28}$$

e

$$r \geq d_{P,l} = \frac{|a x_{P_n} + b y_{P_n} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{3.29}$$

Temos que $a = -Y_{C_n}$, $b = X_{C_n}$ e $c = \sum_{j=1}^{n-1} X_{C_j}\ .\ \sum_{j=1}^{n} Y_{C_j} - \sum_{j=1}^{n} X_{C_j}\ .\ \sum_{j=1}^{n-1} Y_{C_j}$. Todavia do problema unidimensional concluímos que o objeto tem maior probabilidade de ultrapassar o ponto quando o valor esperado do objeto é maior que o salto

determinístico do ponto, caso ambos tenham a mesma direção e sentido.

$$r \geq d_{P,l} = \frac{\left|(-Y_{C_n})\, x_{P_n} + (X_{C_n})\, y_{P_n} + \left(\sum_{j=1}^{n-1} X_{C_j} \sum_{j=1}^{n} Y_{C_j} - \sum_{j=1}^{n} X_{C_j} \sum_{j=1}^{n-1} Y_{C_j}\right)\right|}{\sqrt{(-Y_{C_n})^2 + (X_{C_n})^2}}. \tag{3.30}$$

Podemos simplificar considerando que o ponto salta na direção $x = y$, portanto $x_{P_n} = y_{P_n} = C$ e colocando n em evidência.

$$r \geq d_{P,l} = \frac{\left|(X_{C_n} - Y_{C_n})\, C + n\left(\left(\bar{X} - \frac{X_{C_n}}{n}\right)\bar{Y} - \bar{X}\left(\bar{Y} - \frac{Y_{C_n}}{n}\right)\right)\right|}{\sqrt{(-Y_{C_n})^2 + (X_{C_n})^2}}. \tag{3.31}$$

O denominador da equação 3.31 segue uma distribuição qui-quadrado não central, na primeira parcela do numerador há uma diferença de variáveis normalmente distribuídas que segue uma distribuição normal e na segunda parcela temos duas subtrações em parênteses internos que analogamente seguem distribuição normal, todavia o seu produto:

$$\left(\bar{X} - \frac{X_{C_n}}{n}\right)\bar{Y} = \left(\frac{\left(\bar{X} - \frac{X_{C_n}}{n}\right) + \bar{Y}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\left(\bar{X} - \frac{X_{C_n}}{n}\right) - \bar{Y}}{2}\right)^2 \tag{3.32}$$

e

$$\bar{X}\left(\bar{Y} - \frac{Y_{C_n}}{n}\right) = \left(\frac{\bar{X} + \left(\bar{Y} - \frac{Y_{C_n}}{n}\right)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\bar{X} - \left(\bar{Y} - \frac{Y_{C_n}}{n}\right)}{2}\right)^2 \tag{3.33}$$

segue distribuição qui-quadrado não central, assim como sua diferença. Então temos a razão de uma variável com distribuição normal por uma qui-quadrado não central mais a razão de uma qui-quadrado não central por uma qui-quadrado não central.

3.1.3 Caso tridimensional

No caso tridimensional utiliza-se a simulação com as coordenadas x, y e z no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ de forma análoga.

A captura pode ocorrer quando a esfera envolve o ponto, o que depende da relação dada pela desigualdade em relação a fórmula da esfera:

$$(x_{P_n} - X_{C_n})^2 + (y_{P_n} - Y_{C_n})^2 + (z_{P_n} - Z_{C_n})^2 \leq r^2, \tag{3.34}$$

onde x_{P_n}, y_{P_n} e z_{P_n} representam as coordenadas do ponto e X_{C_n}, Y_{C_n} e Z_{C_n} do centro da esfera.

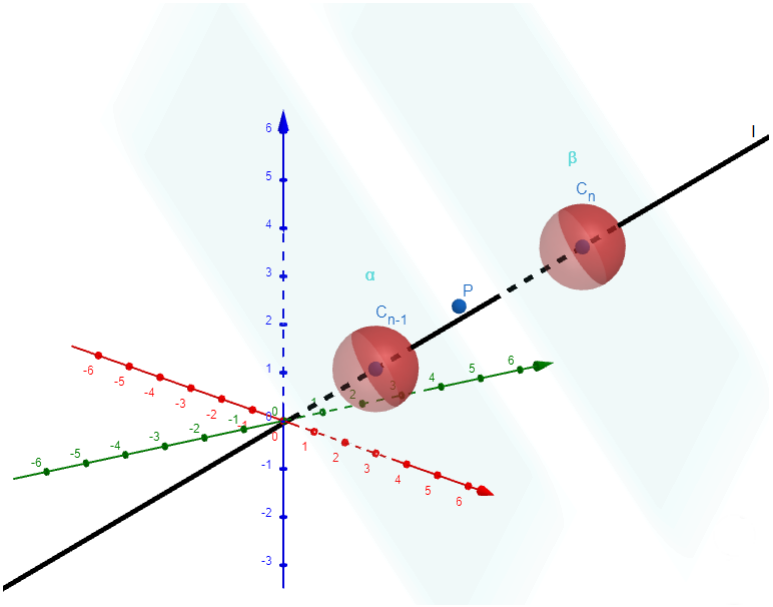


Figura 3.2: Círculo ultrapassa o ponto no plano tridimensional

Ou quando a esfera ultrapassa o ponto, estando este entre a posição anterior e a atual, com distância entre a reta imaginária l que liga o centro da esfera no énesimo salto à posição do centro no salto anterior inferior ao raio como ilustrado na figura 3.2.

Dado um ponto Q qualquer da reta l, nesse caso Q é a coordenada do centro da esfera na posição anterior $(X_{C_{n-1}}, Y_{C_{n-1}}, Z_{C_{n-1}})$, e $\overrightarrow{V}$ o vetor diretor dado pela posição atual da esfera em relação a anterior $(X_{C_n} - X_{C_{n-1}}, Y_{C_n} - Y_{C_{n-1}}, Z_{C_n} - Z_{C_{n-1}})$. Então $\overrightarrow{PQ}$ é o vetor dado pela posição anterior da esfera em relação ao ponto $(X_{C_{n-1}} - x_{P_n}, Y_{C_{n-1}} - y_{P_n}, Z_{C_{n-1}} - z_{P_n})$.

A distância do ponto P a reta l é dada pelo quociente da norma do produto vetorial entre $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{V}$ pela norma de $\overrightarrow{V}$:

$$d_{P,l} = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{V}\right|}{\left|\overrightarrow{V}\right|}. \tag{3.35}$$

Sendo que o ponto P deve estar entre os planos α que contém o ponto C_{n-1} e β que contém C_n ambos perpendiculares ao vetor diretor.

Dado um ponto qualquer P_β do plano β com coordenadas (x, y, z). De acordo com SANTOS [7] a equação do plano β é dada igualando o produto escalar dos vetores a zero, sendo C_n as coordenadas do centro da esfera no n-ésimo passo, então temos:

$$\overrightarrow{C_n P_\beta} \cdot \overrightarrow{V} = 0, \tag{3.36}$$

para o plano α com ponto P_α qualquer com coordenadas (x, y, z), a equação do

plano α é analogamente dada por:

$$\overrightarrow{C_{n-1}P_\alpha} \cdot \overrightarrow{V} = 0. \tag{3.37}$$

Nesse caso o movimento tem três graus de liberdade e também é possível a não captura quando a esfera ultrapassa o ponto e $r \leq d_{P,l}$. A Probabilidade do evento de não captura é:

$$P(A_n) = 1 - P\left(A_n^{\complement}\right), \tag{3.38}$$

sendo a probabilidade de captura para quando a esfera tangencia ou envolve o ponto dada por:

$$P(C_1) = P\left(\exists\ n \mid (x_{P_n} - X_{C_n})^2 + (y_{P_n} - Y_{C_n})^2 + (z_{P_n} - Z_{C_n})^2 \leq r^2\right). \tag{3.39}$$

Dado que P_α e P_β tem coordenadas $(x_{P_n}, y_{P_n}, z_{P_n})$. A probabilidade do centro da esfera ultrapassar o ponto P no énesimo salto, evento U_n, é:

$$P(U_n) = P\left(\overrightarrow{C_nP_\beta} \cdot \overrightarrow{V} \leq 0 \leq \overrightarrow{C_{n-1}P_\alpha} \cdot \overrightarrow{V}\right), \tag{3.40}$$

logo a probabilidade de captura dado que o centro da esfera ultrapassou o ponto P e a distância deste a reta l que passa pelo centro da posição atual e anterior da esfera definem um caso de captura analogamente ao caso bidimensional como:

$$P(C_2) = P(\exists\ n \mid r \geq d_{P,l} \mid U_n). \tag{3.41}$$

Então a probabilidade da união define a probabilidade da captura como:

$$P\left(A_n^{\complement}\right) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2). \tag{3.42}$$

Portanto para n dimensões a captura dependeria da posição de cada uma das novas coordenadas do centro e do raio.

Captura por sobreposição no caso tridimensional

Sendo as probabilidades de captura para o caso tridimensional análogas, temos a adição de uma terceira coordenada:

$$\exists\ n\ \mid\ (x_{P_n} - X_{C_n})^2 + (y_{P_n} - Y_{C_n})^2 + (z_{P_n} - Z_{C_n})^2 \leq r^2. \tag{3.43}$$

Se d_x é a distância inicial no eixo x, d_y é no eixo y e d_z é no eixo z, então o evento de captura tridimensional no i-ésimo passo (C_{1_i}) é dado por:

$$\exists\ i\ \mid\ \left(\left(d_x + ix_P - \sum_{j=1}^{i} X_{C_j}\right)^2 + \left(d_y + iy_P - \sum_{j=1}^{i} Y_{C_j}\right)^2 + \left(d_z + iz_P - \sum_{j=1}^{i} Z_{C_j}\right)^2 \leq r^2\right). \tag{3.44}$$

Para avaliar a importância do raio no caso tridimensional, analogamente ao caso bidimensional consideraramos o caso com $r = 0$, no qual a captura ocorre quando as expressões dentro dos parênteses forem nulas, ou seja:

$$d_x + ix_P = \sum_{j=1}^{i} X_{C_j}, \tag{3.45}$$

$$d_y + iy_P = \sum_{j=1}^{i} Y_{C_j} \tag{3.46}$$

e

$$d_z + iz_P = \sum_{j=1}^{i} Z_{C_j}. \tag{3.47}$$

Assim como no caso bidimensional a probabilidade dessas expressões serem satisfeitas é nula.

$$P\left(\exists\ i\ \mid\ \left(d_x + ix_P = \sum_{j=1}^{i} X_{C_j}\right) \cap \left(d_y + iy_P = \sum_{j=1}^{i} Y_{C_j}\right) \cap \left(d_z + iz_P = \sum_{j=1}^{i} Z_{C_j}\right)\right) = 0. \tag{3.48}$$

Analisando a inequação do evento de captura definido na equação 3.44, divindo todos os termos por i^2, sendo $\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^{i} X_{C_j}}{i}$, $\bar{Y} = \frac{\sum_{j=1}^{i} Y_{C_j}}{i}$ e $\bar{Z} = \frac{\sum_{j=1}^{i} Z_{C_j}}{i}$, substituindo os termos, temos:

$$\left(\frac{d_x}{i} + x_P - \bar{X}\right)^2 + \left(\frac{d_y}{i} + y_P - \bar{Y}\right)^2 + \left(\frac{d_z}{i} + z_P - \bar{Z}\right)^2 \leq \frac{r^2}{i^2}. \tag{3.49}$$

Para quando $d_x = d_y = d_z = 0$, temos:

$$\left(x_P - \bar{X}\right)^2 + \left(y_P - \bar{Y}\right)^2 + \left(z_P - \bar{Z}\right)^2 \leq \frac{r^2}{i^2}, \tag{3.50}$$

Considerando em $\mathbb{R}$ $\left(x_P - \bar{X}\right)^2 = \left(\bar{X} - x_P\right)^2$, $\left(y_P - \bar{Y}\right)^2 = \left(\bar{Y} - y_P\right)^2$, $\left(z_P - \bar{Z}\right)^2 = \left(\bar{Z} - z_P\right)^2$ e também $x_P = E[X]$, $y_P = E[Y]$ e $z_P = E[Z]$, obtemos:

$$\left(\bar{X} - \mu_x\right)^2 + \left(\bar{Y} - \mu_y\right)^2 + \left(\bar{Z} - \mu_z\right)^2 \leq \frac{r^2}{i^2}. \tag{3.51}$$

Considerando i grande, pelo Teorema de Cochran $i \ . \ \left(\bar{X} - \mu_x\right)^2 \sim \sigma_x^2 \ . \ \chi_1^2$, $i \ . \ \left(\bar{Y} - \mu_y\right)^2 \sim \sigma_y^2 \ . \ \chi_1^2$ e $i \ . \ \left(\bar{Z} - \mu_z\right)^2 \sim \sigma_z^2 \ . \ \chi_1^2$, substituindo:

$$\sigma_x^2 \ . \ \chi_1^2 + \sigma_y^2 \ . \ \chi_1^2 + \sigma_z^2 \ . \ \chi_1^2 \leq \frac{r^2}{i}. \tag{3.52}$$

Caso $\sigma^2 = \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2$, temos:

$$\sigma^2 \ . \ \chi_3^2 \leq \frac{r^2}{i}. \tag{3.53}$$

O evento de captura no i-ésimo passo descrito pela inequação 3.53 também pode ser estudado pelo lema de Borel-Cantelli, ou seja, caso os eventos de captura sejam independentes e a soma das probabilidades dos eventos divirja para infinito, podemos afirmar que a captura ocorrerá infinitas vezes.
A probabilidade de ocorrência do evento de captura no i-ésimo passo é dada pela função distribuição acumulada da distribuição qui-quadrado, analisamos para o raio unitário e variância unitária:

$$P\left(\chi \leq \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{\frac{1}{i}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{\frac{1}{i}}{2}\right) \tag{3.54}$$

Então realizamos a soma infinita na plataforma Wolfram Alpha:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left(X \leq \frac{1}{i}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{\frac{1}{i}}{2}\right) = \infty \tag{3.55}$$

Tentamos também usar o lema de Borel-Cantelli para estudar o evento de captura $(B_i^{\complement})$, mas, assim como no caso bidimensional, a série divergiu e não conseguimos garantir a independência, o resultado não pode ser afirmado.
A inequação 3.44 pode ser reescrita considerando que $d_x = d_y = d_z = d$ como feito nas simulações, desenvolvendo o produto notável e fatorando:

$$\left(\frac{d}{i} + \frac{x_P - \bar{X} + y_P - \bar{Y} + z_P - \bar{Z}}{3}\right)^2 + \frac{\left(2 \ . \ (\bar{X} - x_P) + y_P - \bar{Y} + z_P - \bar{Z}\right)^2}{2 \ . \ 3^2} + \frac{\left(\bar{Y} - y_P + z_P - \bar{Z}\right)^2}{3 \ . \ 2} \leq \frac{r^2}{3 \ . \ i^2}. \tag{3.56}$$

Considerando novamente que o objeto e o ponto estão na mesma direção e sentido com a mesma velocidade, ou seja, $x_P = E[X]$, $y_P = E[Y]$ e $z_P = E[Z]$ e que $\bar{X} \to E[X]$, $\bar{Y} \to E[Y]$ e $\bar{Z} \to E[Z]$. O que tornaria a segunda e terceira parcelas à esquerda da inequação suficientemente pequenas, portanto podemos considerar que dado $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, existe i_0 tal que para todo $i > i_0$ temos $\epsilon >$

$\frac{\left(2\ .\ (\bar{X}-x_P)+y_P-\bar{Y}+z_P-\bar{Z}\right)^2}{2\ .\ 3^2} + \frac{\left(\bar{Y}-y_P+z_P-\bar{Z}\right)^2}{3\ .\ 2}$ e que este é não negativo. Então teríamos:

$$\left(\frac{d}{i}+\frac{x_P-\bar{X}+y_P-\bar{Y}+z_P-\bar{Z}}{3}\right)^2 \leq \left(\frac{d}{i}+\frac{x_P-\bar{X}+y_P-\bar{Y}+z_P-\bar{Z}}{3}\right)^2+\epsilon \leq \frac{r^2}{3\ .\ i^2}. \tag{3.57}$$

Então temos a inequação:

$$\left(\frac{d}{i}+\frac{\mu_x-\bar{X}+\mu_y-\bar{Y}+\mu_z-\bar{Z}}{3}\right)^2 \leq \frac{r^2}{3\ .\ i^2}. \tag{3.58}$$

3.2 Situação com o ponto perseguido

Nesta situação abordamos o problema de perseguição proposto por GOMES [2] de uma a três dimensões com coordenadas cartesianas.

Os dois objetos se movem simultaneamente, em vez de alternadamente para otimizar o esforço computacional, para a direita, na direção crescente do eixo x, para o caso unidimensional e na direção crescente $y = x$ e $z = y = x$ para os casos bi/tridimensional respectivamente. O movimento do ponto é determinístico saltando uma distância d a cada vez.

No caso unidimensional o centro do intervalo salta na direção do ponto uma distância aleatória X_i com $i = 1, 2, \ldots$ Se para algum i temos $X_1 + X_2 + \ldots + X_i > i \cdot d$, dizemos que o intervalo capturou o ponto (GOMES [2]). No caso bi/tridimensional se considera a hipotése de um salto retilíneo se o objeto passou pelo ponto, então houve captura. Os casos são analisados utilizando a inferência estatística.

3.2.1 Movimento do ponto

O ponto é adimensional e tem movimento retilíneo determinístico com direção e sentido iguais a que seria traçada pelo valor esperado do movimento do objeto, intervalo/círculo/esfera, em cada eixo.

São simuladas diferentes distâncias iniciais, d, para analisar casos em que a captura pode ocorrer no primeiro salto e casos nos quais não é possível.

No caso unidimensional o ponto inicia na coordenada $r + d$, representado na figura 3.3 em P_1 e sendo r o tamanho do centro à extremidade do intervalo, do eixo das abscissas no $\mathbb{R}^1$ e acresce uma unidade no eixo x a cada salto.

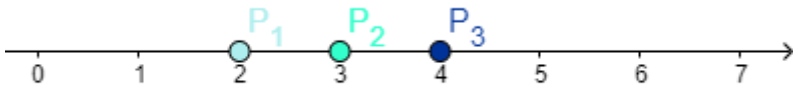
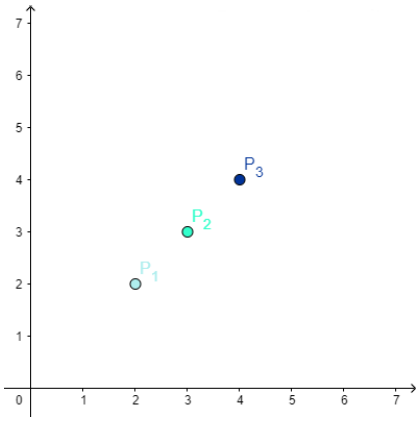
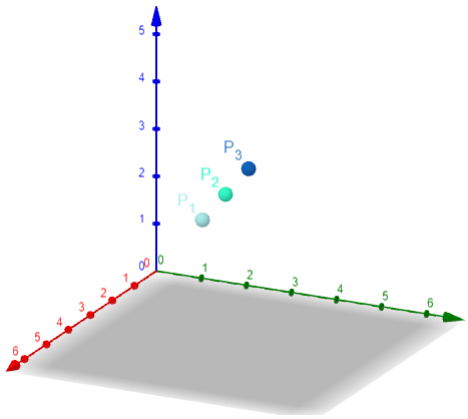


Figura 3.3: Movimento do ponto P no caso unidimensional ao longo dos 3 primeiros instantes.

No caso bidimensional abaixo, à esquerda, o ponto inicia na coordenada $(r+d, r+d)$, representado na figura 3.4a em P_1, no plano $\mathbb{R}^2$ e acresce uma unidade em cada coordenada a cada salto.
No caso tridimensional abaixo, à direita, o ponto inicia na coordenada $(r+d, r+d, r+d)$, representado na figura 3.4b em P_1, no espaço $\mathbb{R}^3$ e sua movimentação é análoga.



(a) Movimento do ponto no caso bidimensional.



(b) Movimento do ponto no caso tridimensional.

3.3 Situação com o ponto em perseguição

Nesta situação abordamos o problema de perseguição a partir do tamanho do salto do ponto P sendo determinado pela média aritmética até o penúltimo passo do objeto com movimento aleatório de uma a três dimensões com coordenadas cartesianas. O movimento do objeto é análogo ao descrito na situação anterior, assim como a definição de captura. Essa situação se diferencia da anterior pelo movimento do ponto ser aleatório, enquanto anteriormente era determinístico, e condicionado ao movimento estocástico do objeto.

3.3.1 Movimento do ponto

O ponto é adimensional e tem saltos retilíneos estocásticos determinados pela média aritmética (estimador do valor esperado do movimento do objeto) dos saltos do objeto até o penúltimo passo intervalo/círculo/esfera, em cada eixo.
No caso unidimensional o ponto inicia na coordenada $r+d$ do eixo das abscissas na reta real $\mathbb{R}^1$ e permanece devido ao movimento possuir apenas um grau de liberdade.
No caso bidimensional, o ponto inicia na coordenada $(r+d, r+d)$ no plano $\mathbb{R}^2$ e segue em perseguição com movimento aleatório até alcançar e/ou ultrapassar o círculo com captura.

No caso tridimensional, o ponto inicia na coordenada $(r + d, r + d, r + d)$ no espaço $\mathbb{R}^3$ e segue em perseguição com movimento estocástico até alcançar e/ou ultrapassar a esfera com captura.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

Realizamos simulações de Monte Carlo para o caso com o ponto perseguido e para o caso com o ponto em perseguição com salto condicionado ao movimento do objeto. Foram realizadas 1.000 simulações com 350 passos cada para o caso discreto e para o caso que será referido como contínuo, discretizado em saltos menores. A semente 2023 foi utilizada para garantir a replicabilidade dos resultados.
As referidas simulações investigam a influência da distância inicial, raio, valor esperado e variância do tamanho do salto do objeto no comportamento do percentual de capturas.

4.1 Resultados para o situação com o ponto perseguido

As simulações ocorreram com a variação da distância inicial de 0 a 3 com passo unitário e com tamanho do salto do ponto de $0,2$ para o caso contínuo e 2 para o discreto. Os referidos tamanhos foram selecionados para analisar o comportamento do percentual de capturas com quantidade aproximada de amostras similares a direita e esquerda do pico de capturas.
O valor esperado do tamanho do salto do objeto é igual ao desvio padrão ou à variância nos quatro primeiros gráficos para cada dimensão, caso (contínuo ou discreto) e raio do intervalo/círculo/esfera simulados.
Pretende-se comparar os resultados da distribuição Poisson, cuja variância é igual ao valor esperado do tamanho do salto do objeto em cada eixo, aos resultados das distribuições uniforme e normal com as mesmas características, valor esperado igual a variância do tamanho do salto do objeto em cada eixo. Além disso, comparamos os resultados da distribuição exponencial, cujo desvio padrão é igual a esperança matemática do tamanho do salto do objeto em cada eixo, com os resultados das distribuições uniforme e normal com as mesmas características.

Nos quatro gráficos seguintes de cada dimensão, caso (contínuo ou discreto) e raio do intervalo/círculo/esfera simulados, apenas a variância ou apenas a esperança matemática varia, objetiva-se investigar a influência destes, isoladamente, na variável aleatória, percentual de capturas.
Os valores da esperança matemática e/ou variância/desvio padrão foram escolhidos para ter um número similar de pontos à esquerda e à direita do ponto de máxima. Nas figuras em que somente um desses parâmetros varia, esperança matemática ou variância/desvio padrão, o outro parâmetro foi escolhido para obter maior percentual de capturas.

4.1.1 Unidimensional: Casos contínuo e discreto

Após o percentual de capturas atingir 100%, essa taxa se mantém de acordo com o resultado teórico esperado obtido por GOMES [2] devido a esperança matemática do salto do intervalo ser superior ao tamanho do salto do ponto.
Devido ao movimento ocorrer em uma dimensão e a distância inicial ser mensurada a partir do ponto do objeto mais próximo do ponto, o tamanho do raio não influencia o percentual de capturas para o caso unidimensional, o que foi corroborado pelos os resultados obtidos. Por isso, optamos por colocar os gráficos nessa subseção apenas para o raio unitário. Todavia existe uma influência da distância inicial e da distribuição utilizada para o tamanho do salto do intervalo, do seu valor esperado e da sua variância.

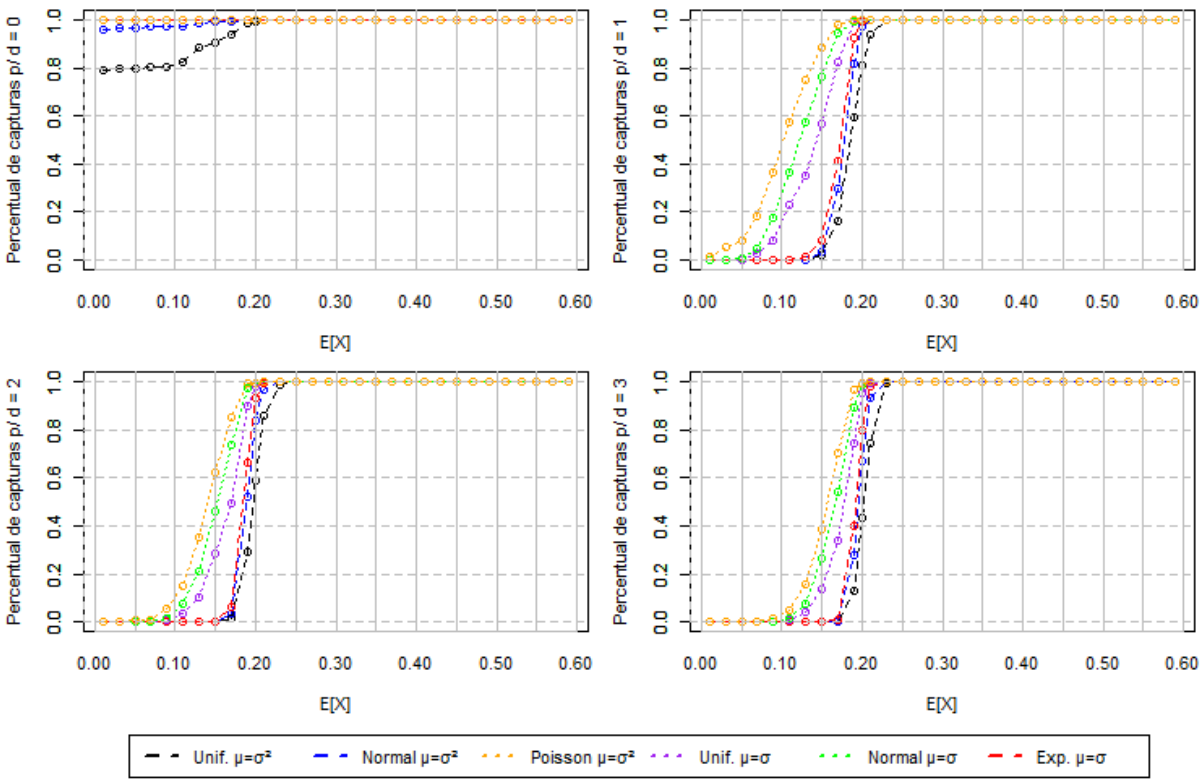


Figura 4.1: Resultados do caso contínuo unidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância.

Observamos na figura 4.1 que com o aumento da distância inicial ($d > 0$) o percentual de capturas começa a apresentar valores não nulos à direita no eixo das abscissas e atinge valor máximo na vizinhança à direita de $E[X] = 0,2$, valor do salto do ponto.

O uso da distribuição Poisson para modelar o salto apresenta maior taxa de capturas, antes de atingir valor unitário, que o uso das distribuições normal, uniforme e exponencial, as três com esperança matemática igual ao desvio padrão, seguida das distribuições normal e uniforme com valor esperado igual a variância. Sendo que, as distribuições uniforme e normal, com a esperança matemática igual a variância, para valores inferiores ao valor do salto do ponto, não atingem valor unitário de percentual de capturas para distância inicial nula. Porém a distribuição normal supracitada obtém maior taxa de capturas que a distribuição uniforme com os mesmos parâmetros.

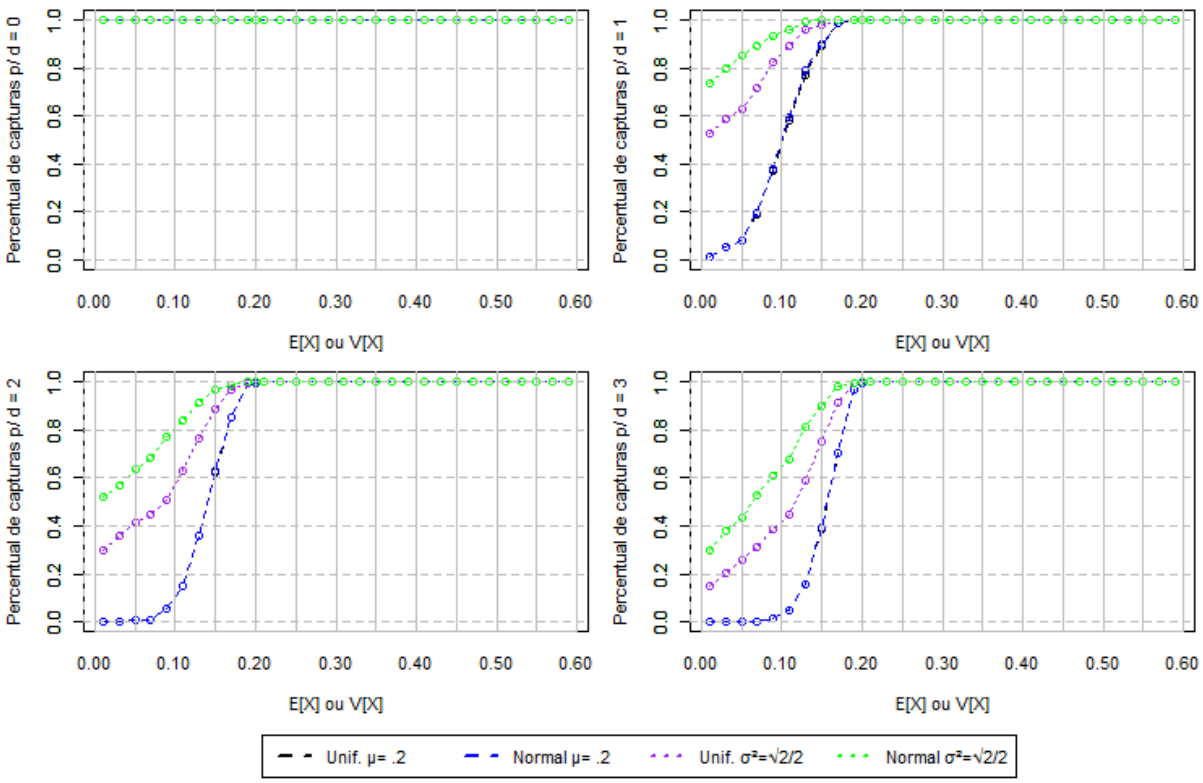


Figura 4.2: Resultados do caso contínuo unidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

Na figura 4.2 é possível observar que o percentual de capturas é unitário para distância inicial nula. Contudo, para distâncias iniciais maiores que zero, há uma maior influência da variação da variância do que da esperança matemática na redução do percentual de capturas para valores distantes à esquerda do valor do salto do ponto e um maior percentual de capturas da distribuição normal com a variação do valor esperado. Sendo que, para a variação da variância, os resultados das duas distribuições, uniforme e normal, se sobrepõem e atingem valor unitário pouco antes do valor do salto determinístico do ponto.

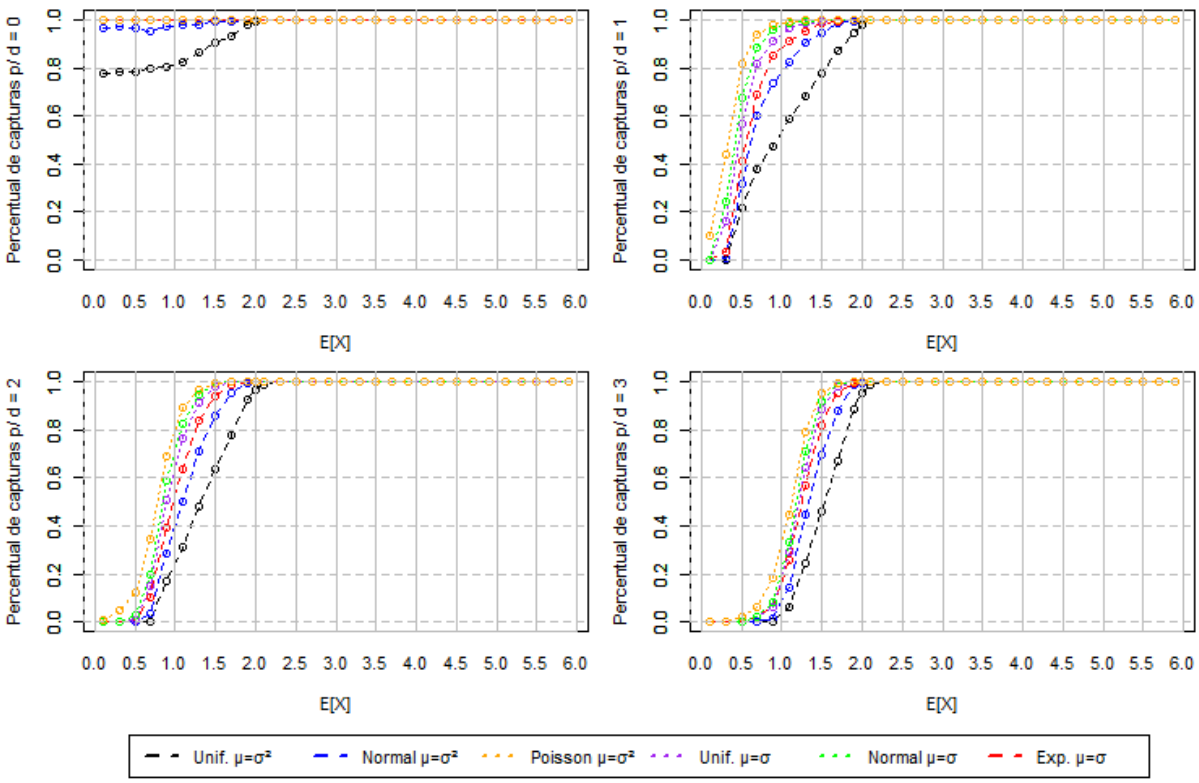


Figura 4.3: Resultados do caso discreto unidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância.

Na figura 4.3 com distância inicial maior que zero ($d > 0$), as diferentes distribuições apresentam resultados mais próximos e sua curva sobe mais rapidamente em relação ao caso contínuo. Assim como no caso contínuo, com o uso da distribuição Poisson para modelar o tamanho do salto se atinge mais rapidamente valor unitário de captura que com as distribuições normal, uniforme e exponencial, as três com variação do desvio padrão igual a esperança matemática, para distância maior que zero, seguidos das distribuições normal e uniforme com variação da variância igual ao valor esperado para todas as distâncias consideradas. O percentual máximo de capturas é atingido na vizinhança de $E[X] = 2$, valor do salto do ponto.

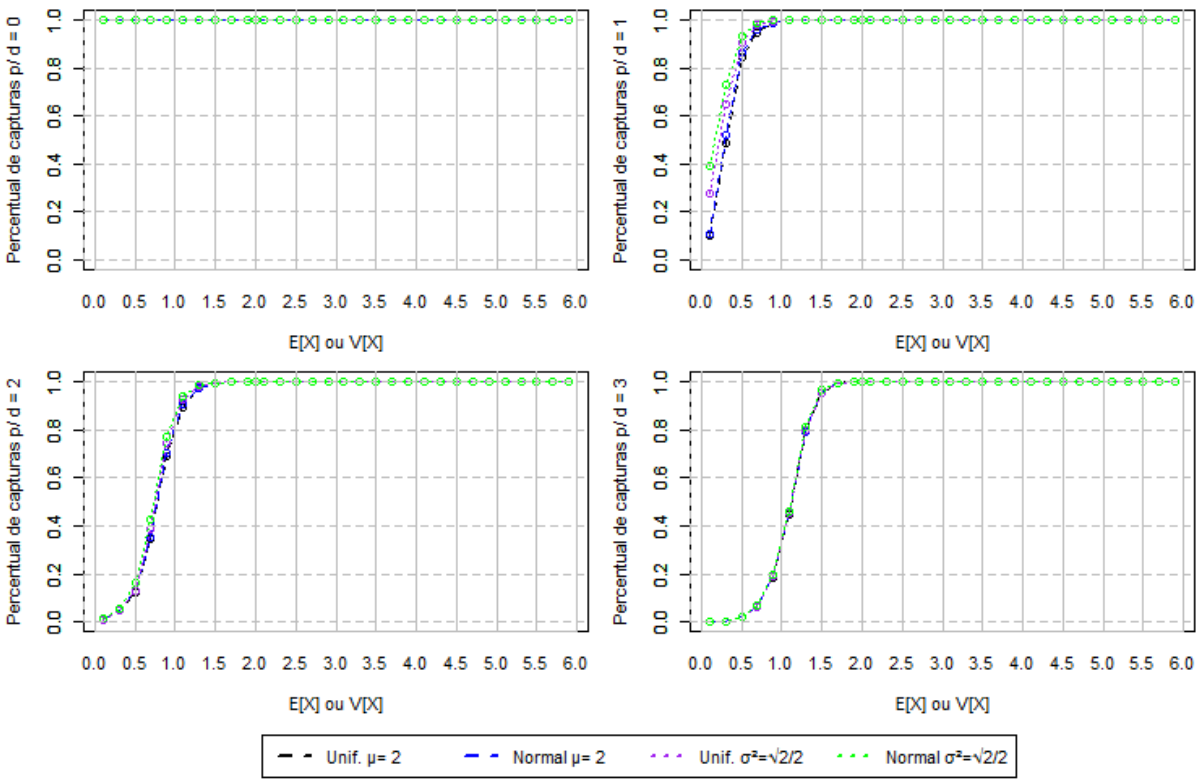


Figura 4.4: Resultados do caso discreto unidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

Na figura 4.4, para a distância inicial nula, a análise é análoga ao caso contínuo e para $d > 0$ as curvas sobem mais próximas. Sendo que, com o aumento dessa distância, as curvas se sobrepõem e atingem o valor unitário muito antes, à esquerda, do que no caso contínuo.

4.1.2 Bidimensional: Casos contínuo e discreto

As simulações ocorreram com dois graus de liberdade no plano cartesiano e o ponto que está perseguido descreve uma trajetória $y = x$.

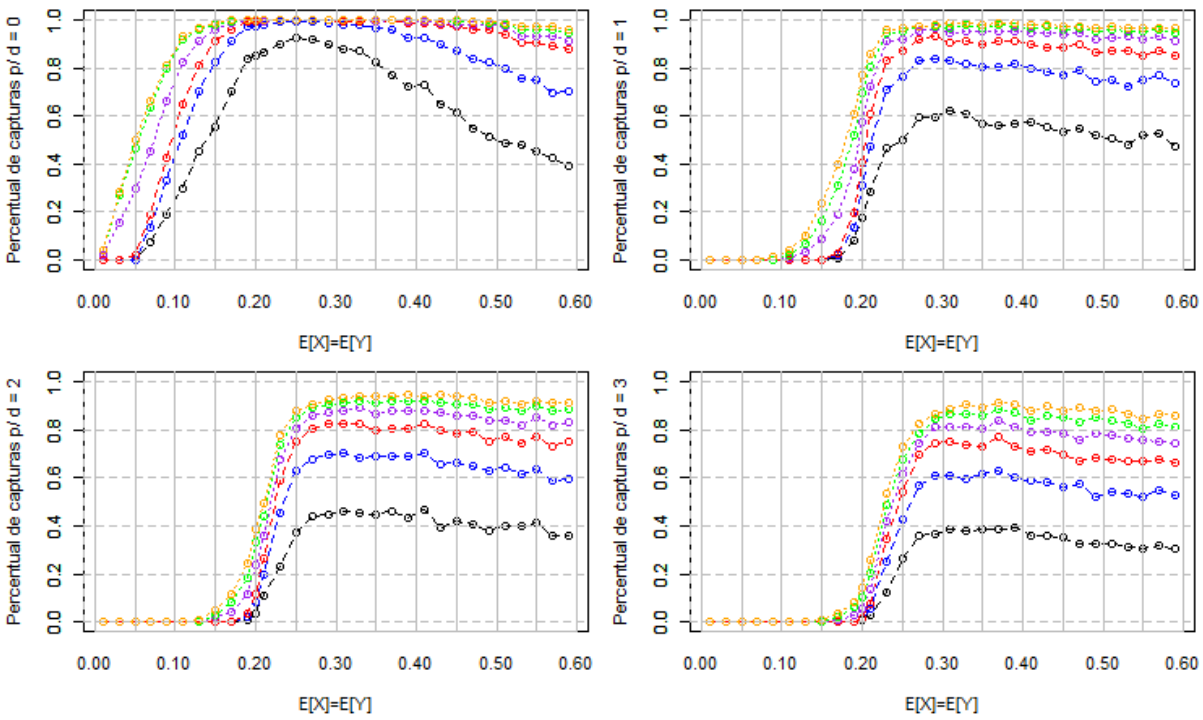


Figura 4.5: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância.

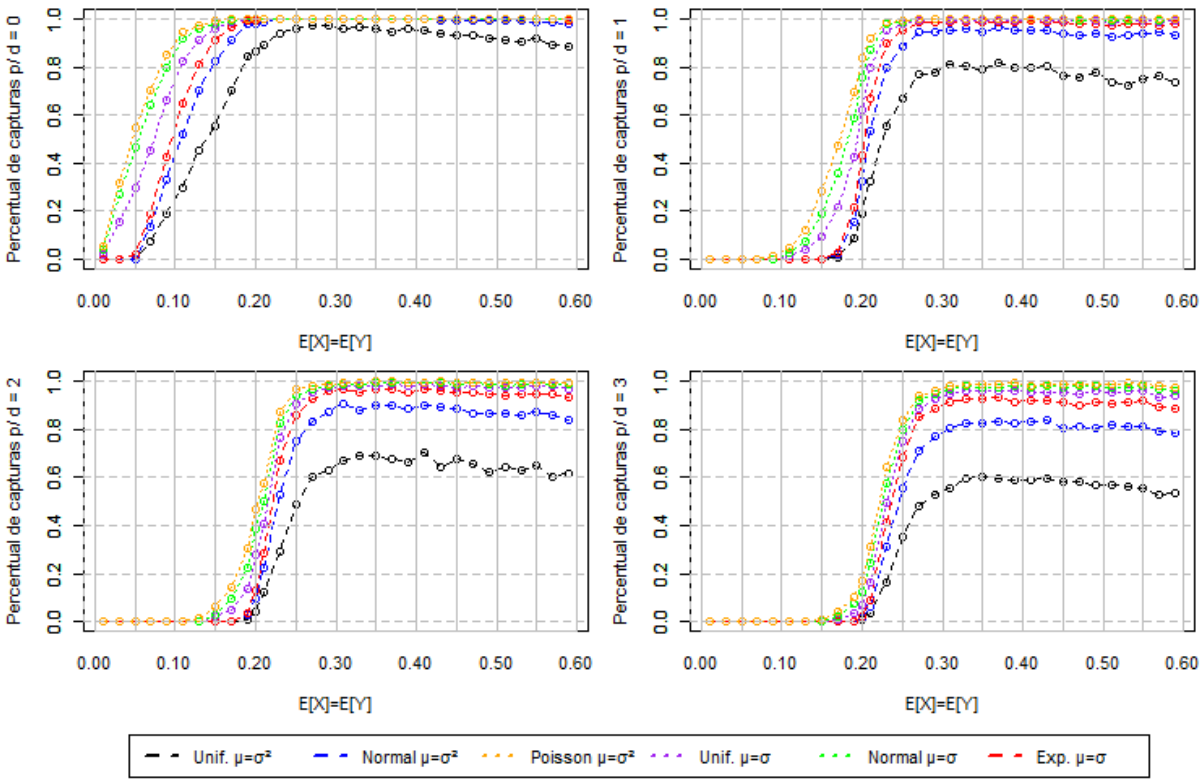


Figura 4.6: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância.

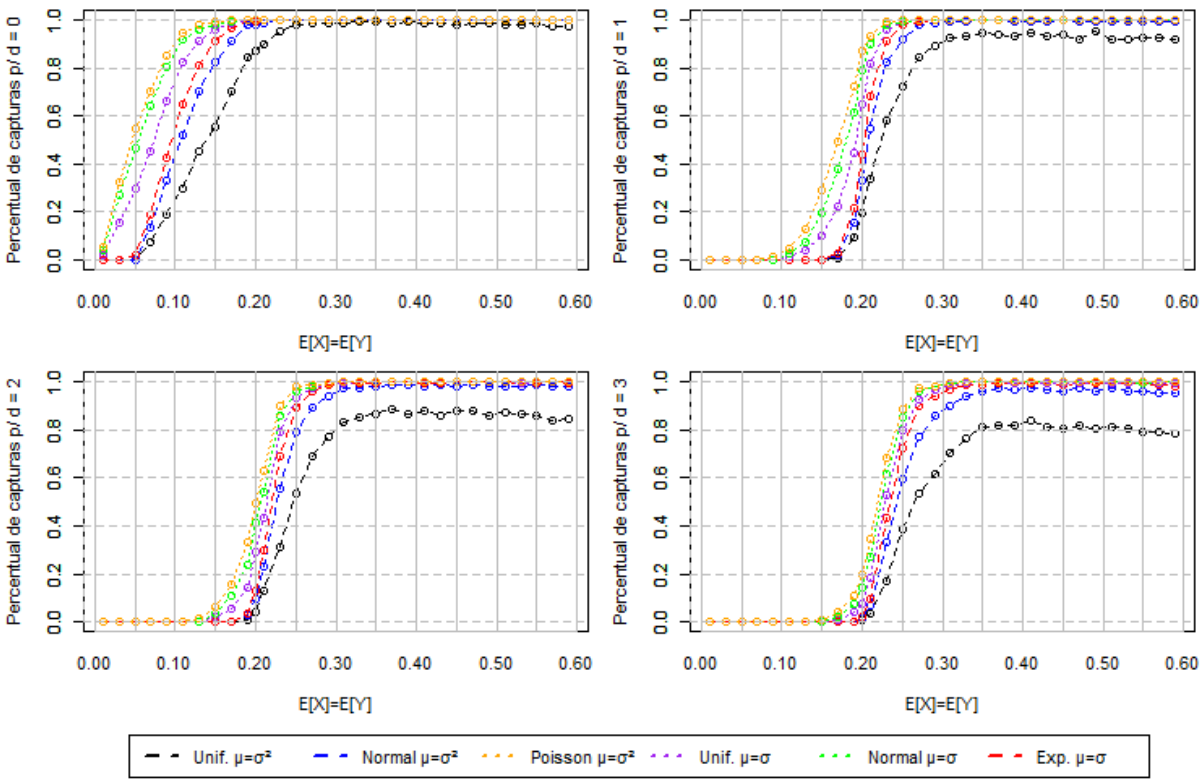


Figura 4.7: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 2$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância.

Nas figuras 4.5, 4.6 e 4.7, para $d = 0$, as capturas começam do zero com o tamanho do salto modelado pelo uso da distribuição Poisson, das distribuições uniforme e normal, com esperança matemática igual ao desvio padrão, e começam de $E[X] = E[Y] = 0,05$ com a distribuição exponencial e as distribuições normal e uniforme, ambas com valor esperado igual a variância.

Com o raio igual a $0,5$ ou unitário a distribuição uniforme, com esperança igual a variância, não atinge o percentual máximo e decai após seu máximo. É possível observar esse decaimento no final dos gráficos para todos os raios. As demais curvas atingem o máximo na vizinhança do $0,25$ e permanecem com valor unitário somente com $r \geq 1$.

Para a distância maior que zero ($d > 0$), as curvas começam a subir com valores maiores no eixo das abscissas, como se a distância inicial deslocasse o gráfico para a direita, e há uma redução do percentual de capturas máximo alcançado. O raio nos gráficos mencionados, das três figuras supracitadas, representa um fator de escala, aumentando o valor do percentual de capturas.

Analogamente ao caso unidimensional, a curva que utiliza a distribuição Poisson sobe mais rapidamente que a das distribuições normal e uniforme, ambas com valor esperado igual ao desvio padrão. Da mesma forma, para a distribuição exponencial

em relação a distribuição normal e uniforme, ambas com esperança matemática igual a variância.

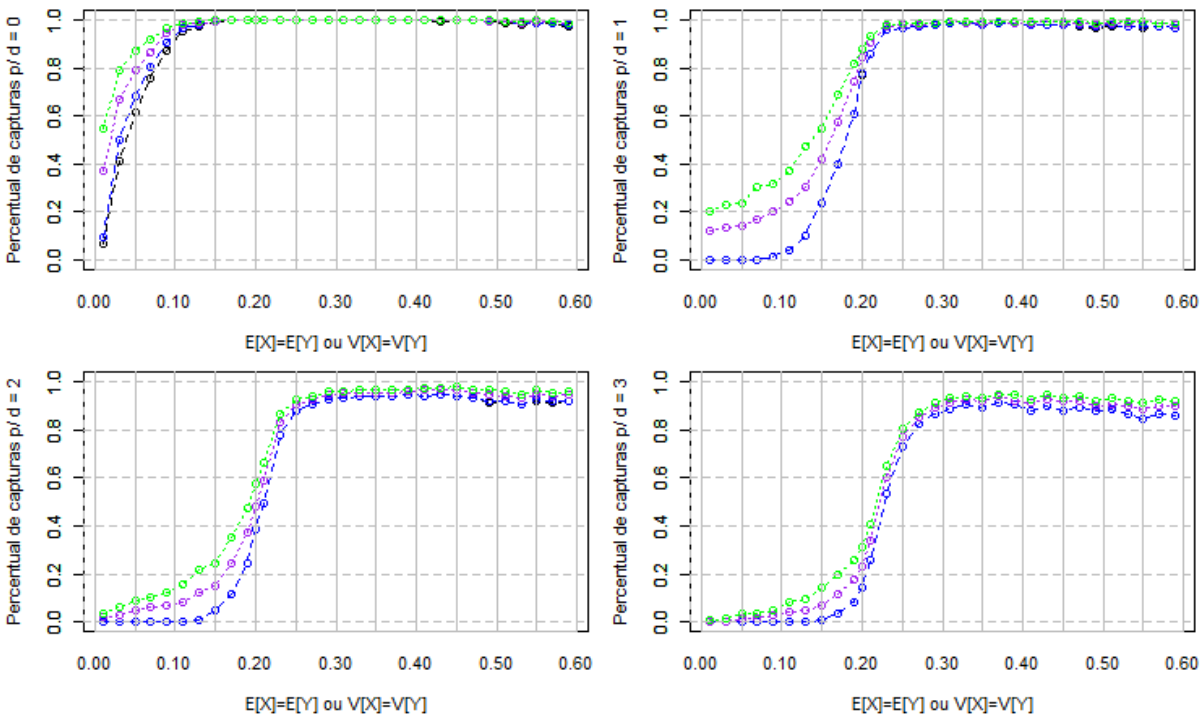


Figura 4.8: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

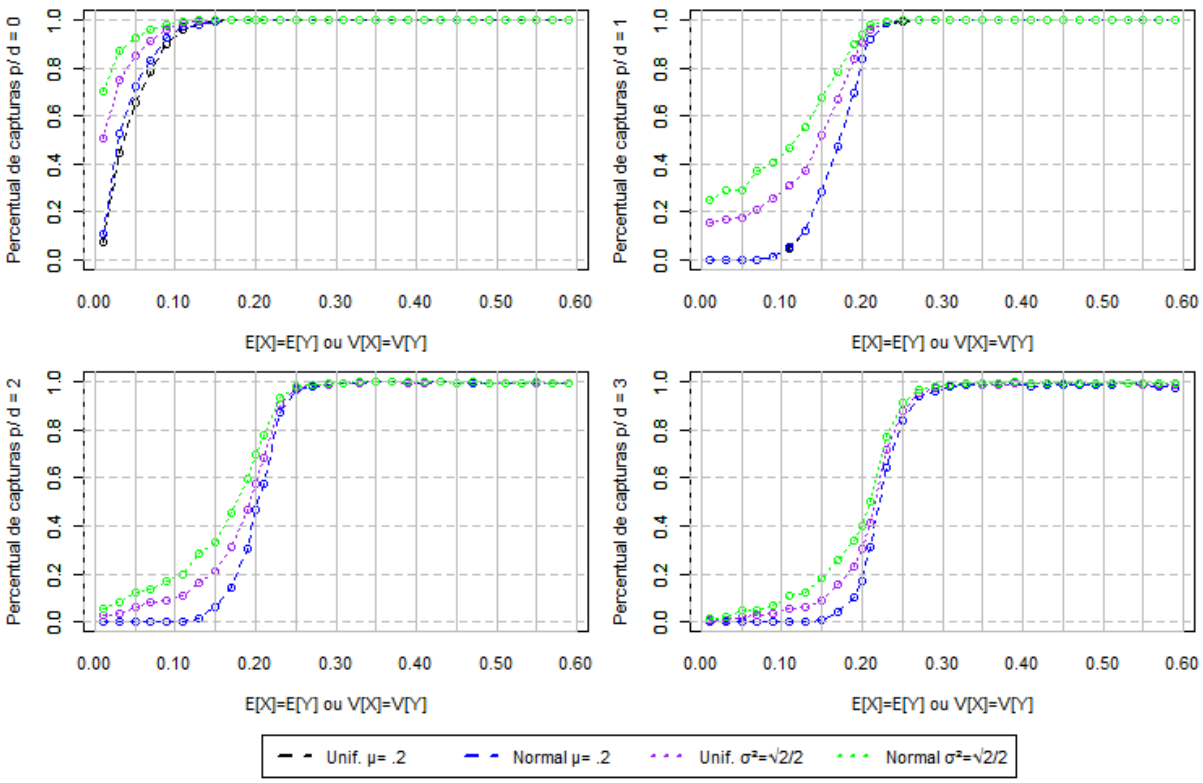


Figura 4.9: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

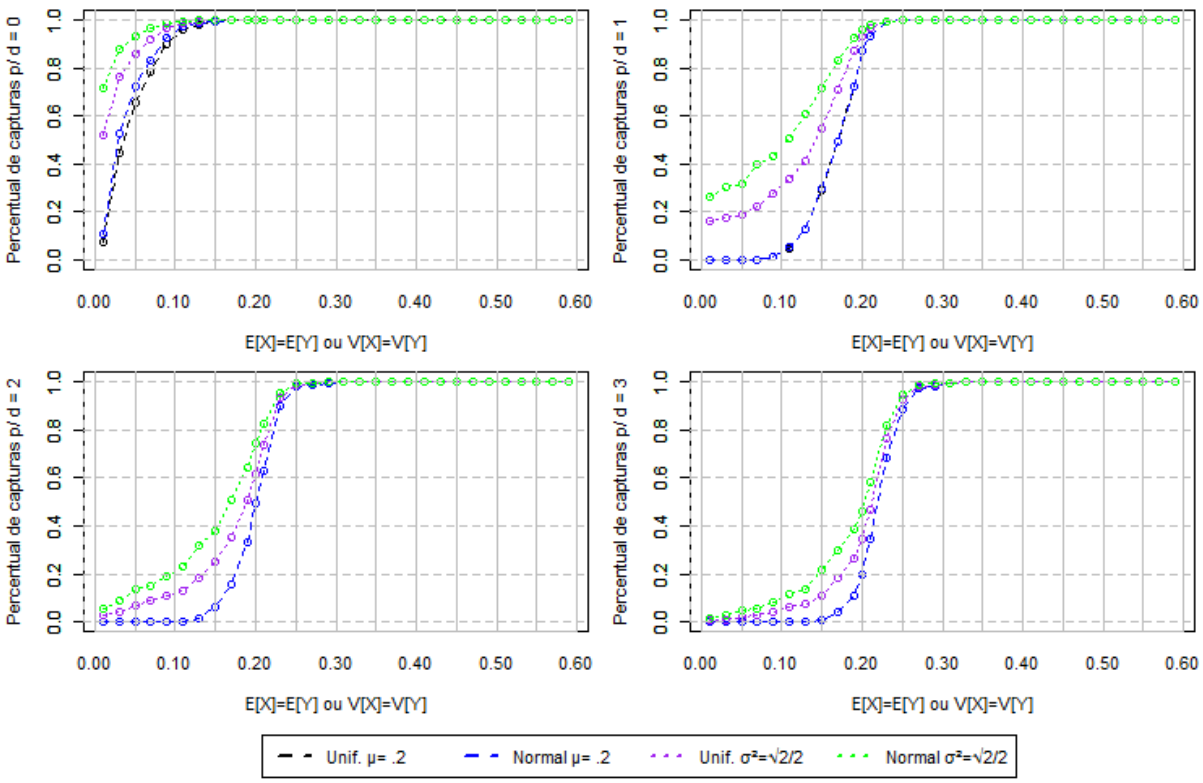


Figura 4.10: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 2$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

Nas figuras 4.8, 4.9 e 4.10, com a distância nula, o máximo do percentual de capturas é atingido na vizinhança do valor de $0,15$ no eixo das abscissas. Enquanto, para variação do valor esperado, a distribuição normal cresce mais rapidamente que a distribuição uniforme. As curvas com variação da variância praticamente se sobrepõem e crescem mais lentamente que as demais. Para distância maior que zero ($d > 0$), o aumento da distância inicial resulta em um ponto máximo do percentual de capturas à direita do gráfico.

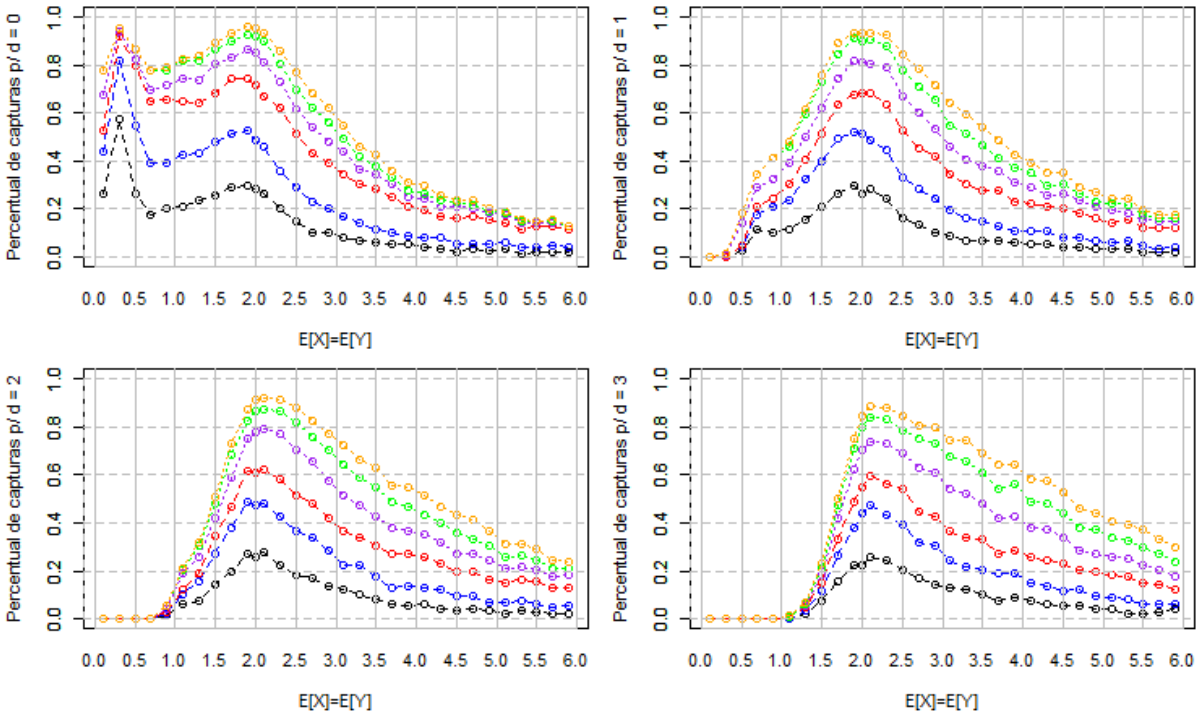


Figura 4.11: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

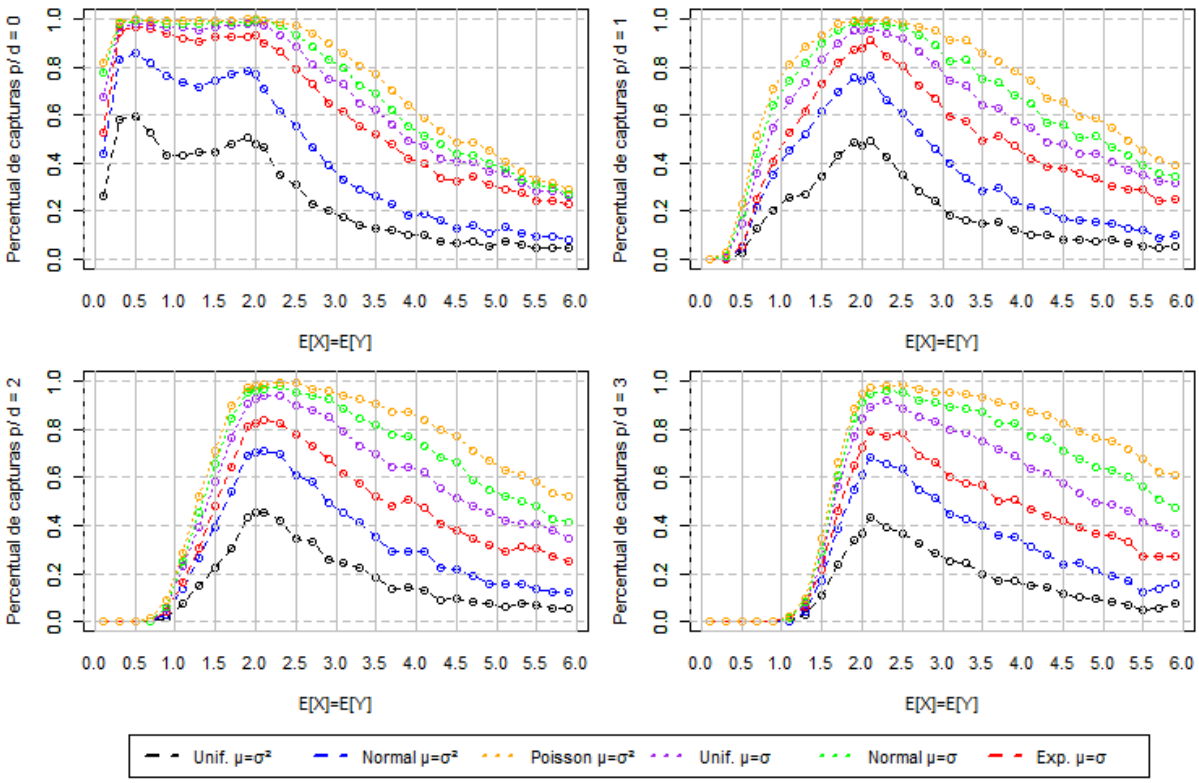


Figura 4.12: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

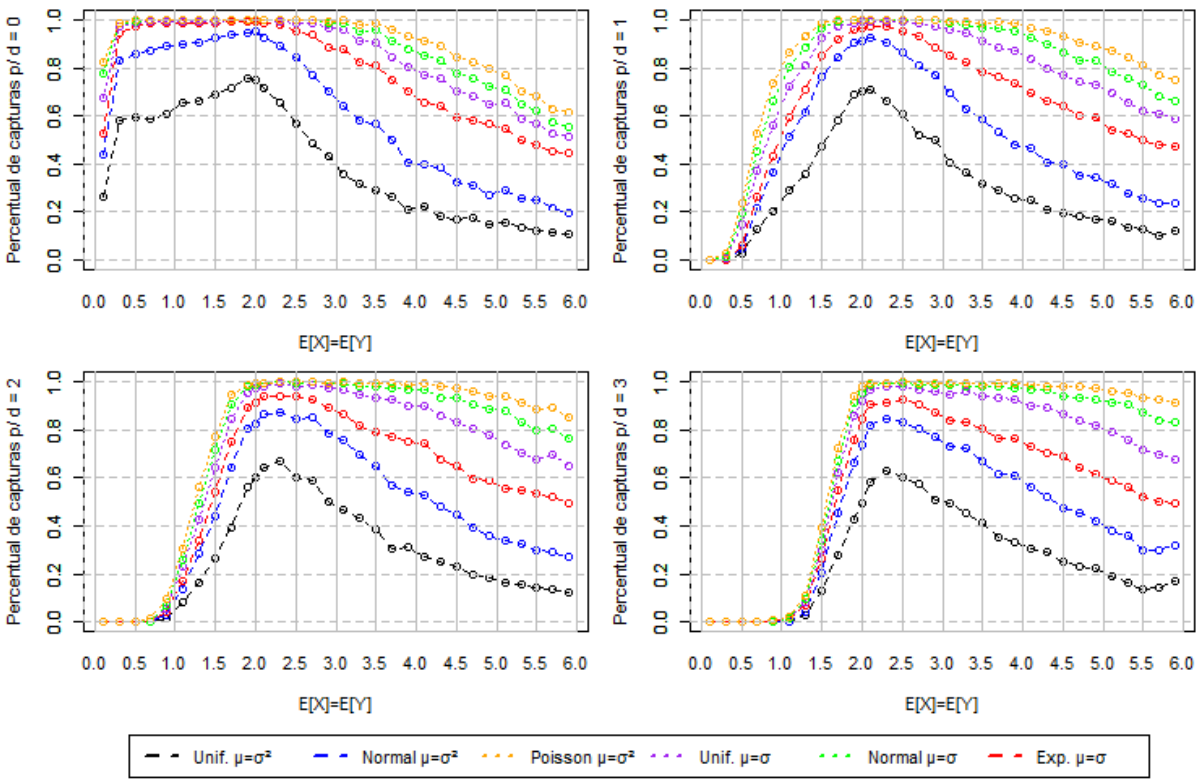


Figura 4.13: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 2$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

Nas figuras 4.11, 4.12 e 4.13, observamos que o valor máximo do percentual de capturas para distância inicial nula é atingido em $E[X] = E[Y] = 0,3$ para $r = 0,5$, em $E[X] = E[Y] = 0,5$ para $r = 1$, para $r = 2$ o máximo de capturas é atingido na vizinhança de $E[X] = E[Y] = 2$, valor do salto determinístico do ponto, assim como para distâncias iniciais não nulas.

Para distância inicial superior a zero, o percentual máximo de capturas ocorre mais à direita com o aumento da distância inicial e do raio. O aumento do raio aumenta o percentual de capturas. A forma de onda do gráfico também é distinta do caso com distância inicial nula, já que neste há uma predominância de capturas com o objeto englobando o ponto em detrimento de capturas aproximadas.

Assim como no caso anterior, com a utilização da distribuição Poisson para modelar o tamanho do salto se atinge um percentual de capturas maior mais rapidamente e cai mais lentamente que com as distribuições normal, uniforme e exponencial, as três com $\mu = \sigma$, seguidas das distribuições normal e uniforme, ambas com $\mu = \sigma^2$.

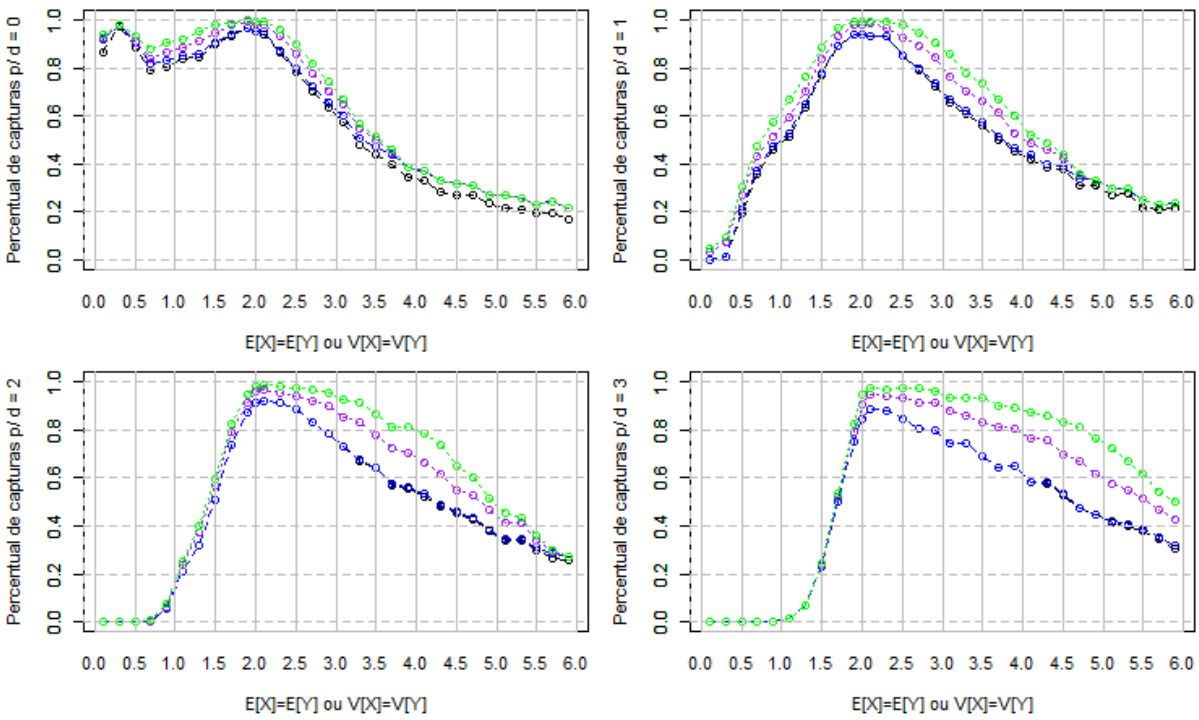


Figura 4.14: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

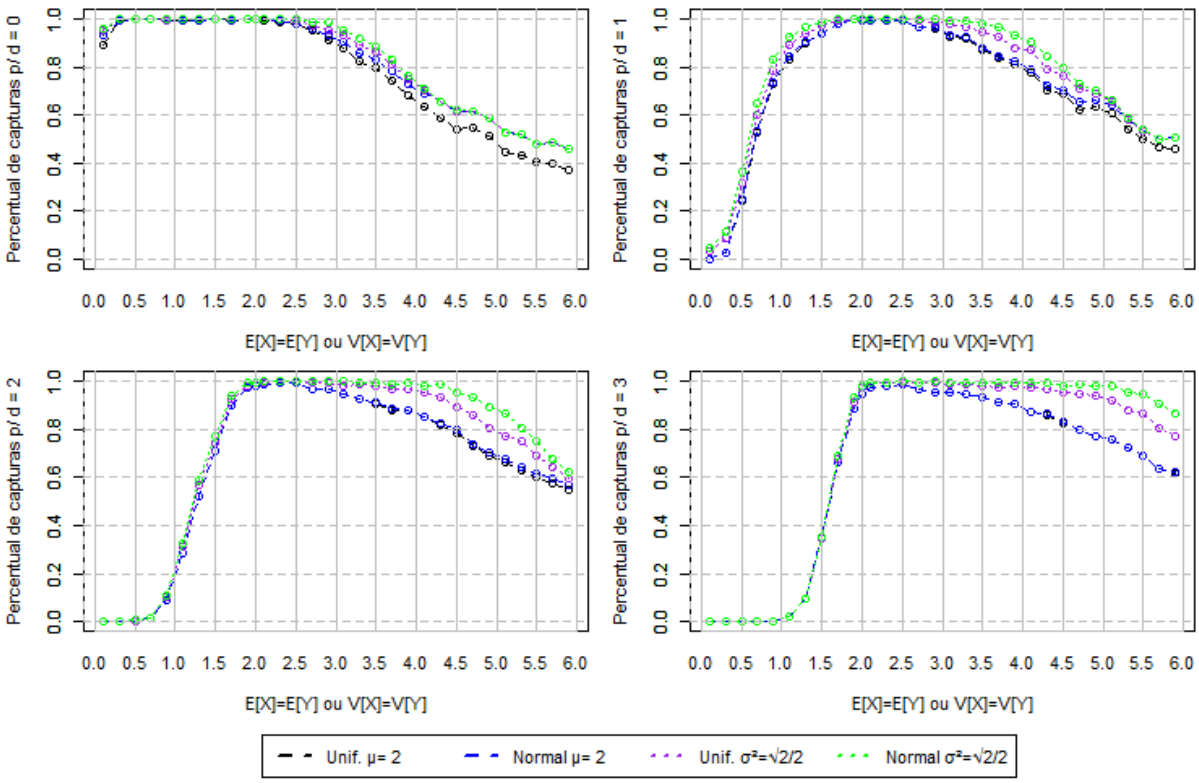


Figura 4.15: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

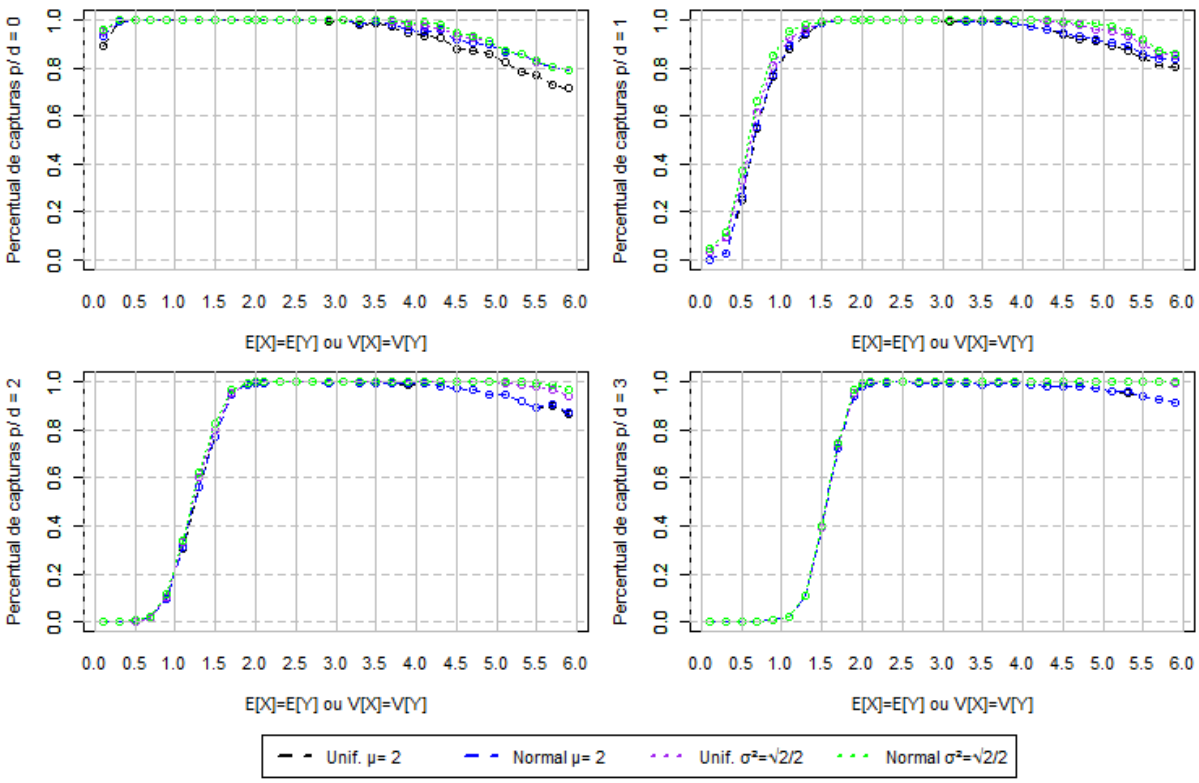


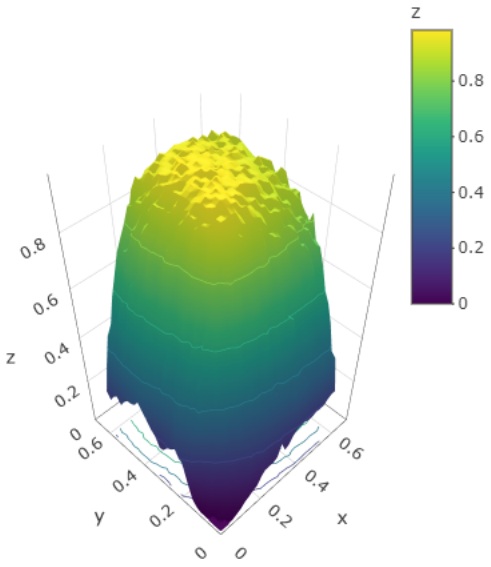
Figura 4.16: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 2$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

Nas figuras 4.14, 4.15 e 4.16, para $d = 0$ e $r = 0,5$, a curva de percentual de capturas foi similar aos gráficos anteriores com variação simultânea do valor esperado e da variância. Não obstante, para distância inicial nula e $r \geq 1$, após a taxa máxima de capturas ser atingida no eixo das abscissas em $0,3$, esta taxa permanece unitária e começa a decair em $2,5$ para $r = 1$ e em $3,1$ para $r = 2$. Esse decaimento acontece mais à direita do gráfico com o aumento do raio.
Com o aumento da distância inicial, o ponto de máxima e o de decaimento se localizam mais à direita do gráfico e o aumento do raio atua como um fator de escala aumentando o percentual de capturas.
As curvas que representam a variação da variância se sobrepõem, enquanto as curvas que representam a variação do valor esperado tem maior taxa de capturas para a distribuição normal em relação a distribuição uniforme e, com o aumento do raio, essas também se sobrepõem.

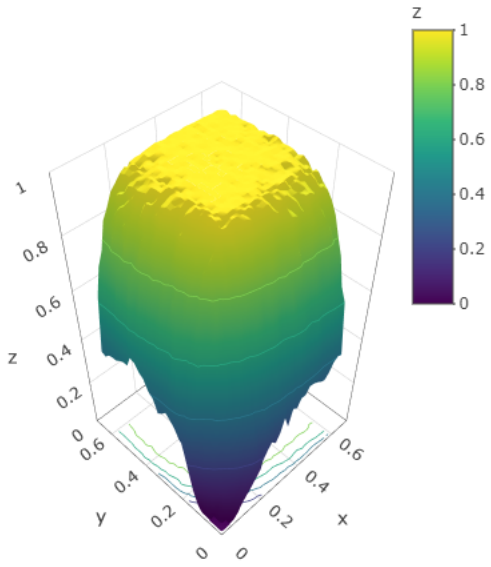
Superfícies: Casos discreto e contínuo

Foram realizadas 700 simulações de Monte Carlo com 350 passos cada devido ao esforço computacional necessário para as simulações das superfícies ser maior. O objetivo das simulações das superfícies é investigar a influência de diferentes

distribuições de probabilidade em relação ao percentual de capturas.



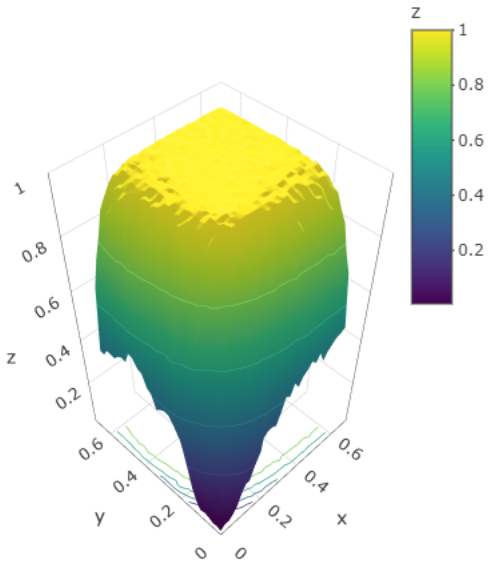
(a) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição uniforme no eixo das abscissas com esperança matemática igual ao desvio padrão, distribuição exponencial no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.



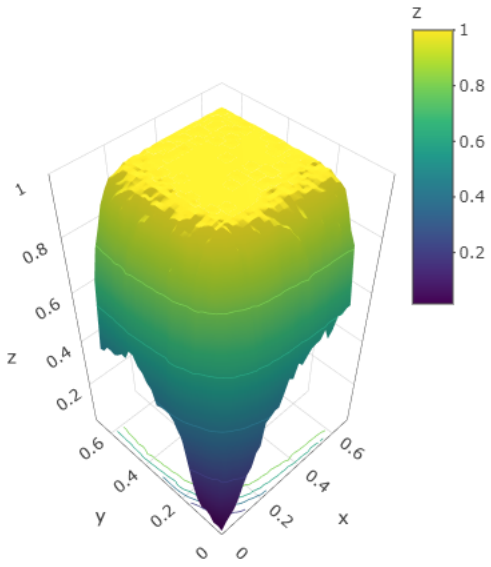
(b) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição normal no eixo das abscissas com esperança matemática igual ao desvio padrão, distribuição exponencial no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.

Figura 4.17: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição exponencial no eixo das ordenadas.

Associando a distribuição exponencial no eixo das abscissas com a distribuição normal no eixo das ordenadas para modelar o tamanho do salto do objeto no respectivo eixo, com valor esperado igual ao desvio padrão, na figura 4.17b, é possível observar um aumento na taxa de capturas e maior simetria da superfície em relação a figura 4.17a que utiliza a distribuição uniforme com os mesmos parâmetros. Nessa figura, observa-se maior percentual de capturas à esquerda da superfície com valores da distribuição exponencial maiores que os da distribuição uniforme. Em ambos os casos, o percentual de capturas se aproxima do máximo para valores esperados acima do valor do salto determinístico do ponto.



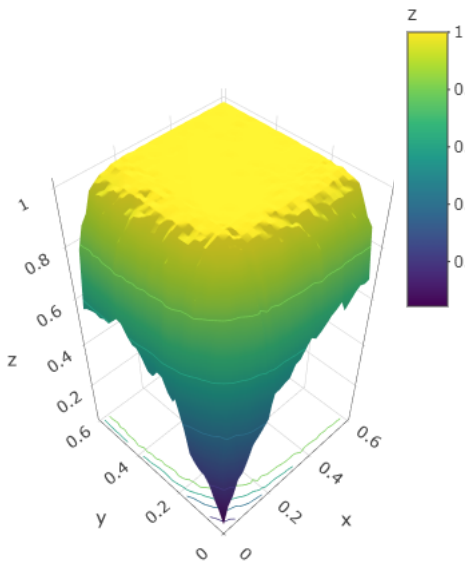
(a) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição uniforme no eixo das abscissas com esperança matemática igual a variância, distribuição Poisson no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.



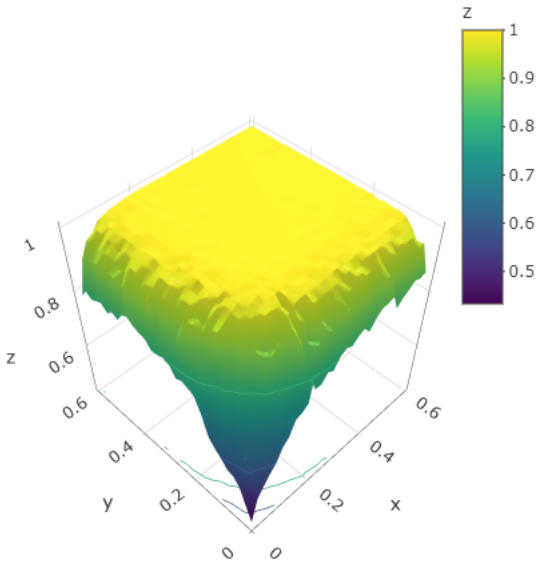
(b) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição normal no eixo das abscissas com esperança matemática igual a variância, distribuição Poisson no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.

Figura 4.18: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição Poisson no eixo das ordenadas.

A figura 4.18a, que representa os resultados com o uso da distribuição Poisson e da distribuição uniforme, com esperança matemática igual a variância, apresenta menor percentual de capturas para pequenos valores esperados em relação a figura 4.18b, analogamente às figuras anteriores. Ambas tem um percentual de capturas unitário a partir de valores esperados ligeiramente maiores que o valor do salto determinístico do ponto.



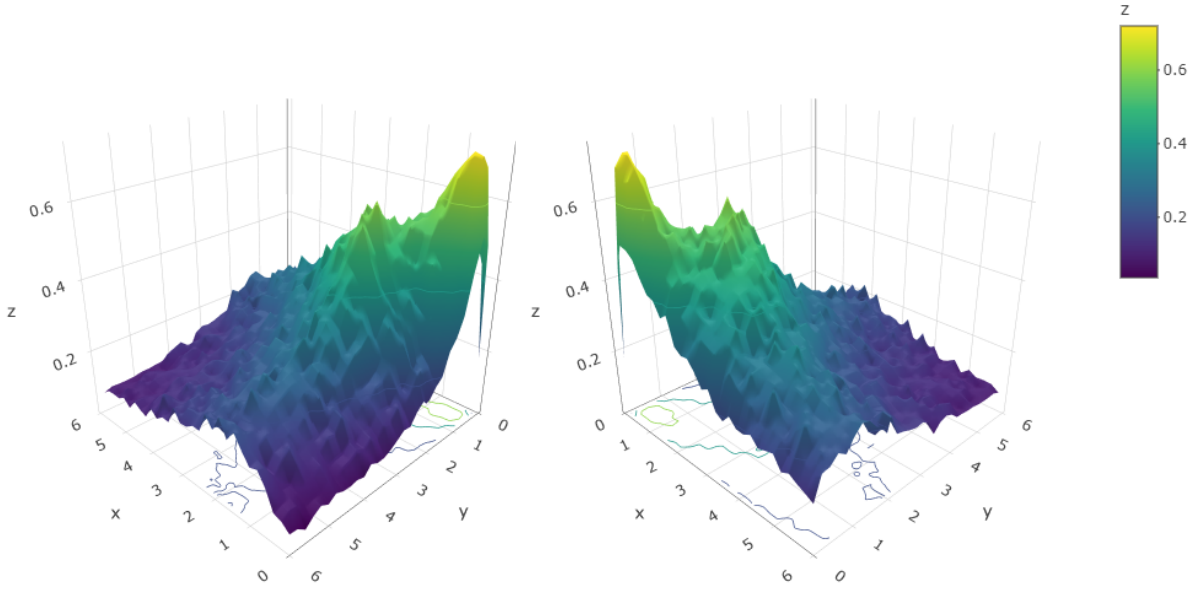
(a) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição uniforme no eixo das abscissas com esperança matemática igual a $0,2$ e variação da variância, distribuição normal com os mesmos parâmetros no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.



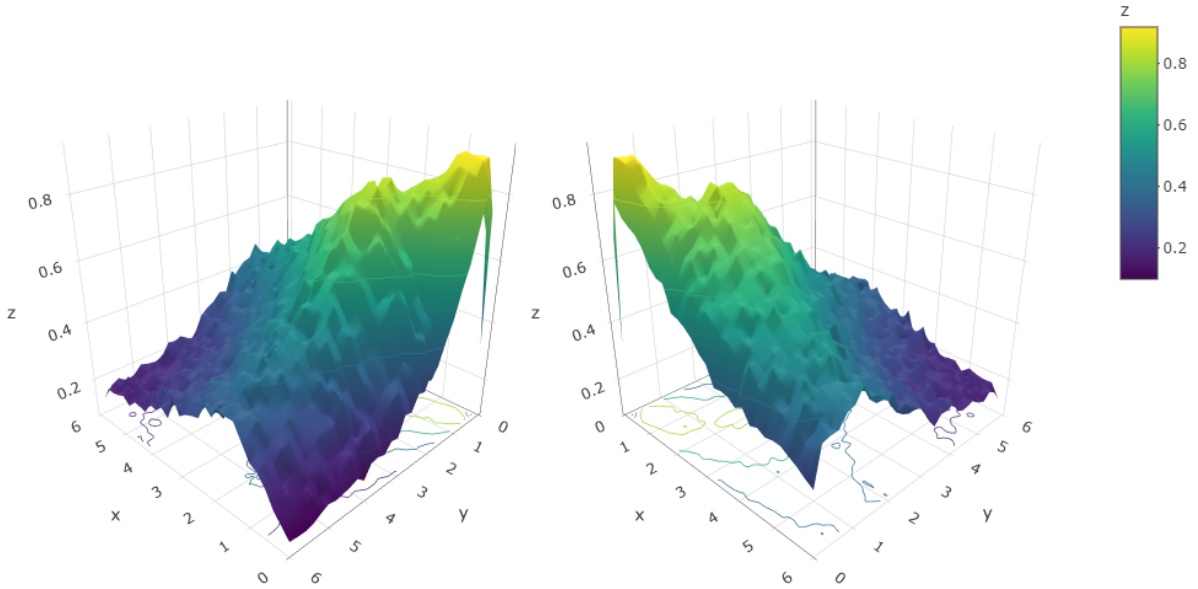
(b) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição uniforme no eixo das abscissas com variância igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e variação do valor esperado, distribuição normal com os mesmos parâmetros no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.

Figura 4.19: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição uniforme no eixo das abscissas e distribuição normal no eixo das ordenadas.

A figura 4.19a, que no eixo das abscissas e no das ordenadas representa uma variação apenas da variância, tem taxa de captura para pequenos valores maior que os gráficos com variação simultânea do valor esperado e da variância. Todavia, apresenta menor taxa de captura que a figura 4.19b, que representa a variação do valor esperado. Isso se deve ao valor da variância que possibilita a captura nos primeiros passos, antes que o ponto se afaste consideravelmente.



(a) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição uniforme no eixo das abscissas com esperança matemática igual ao desvio padrão, distribuição exponencial no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.

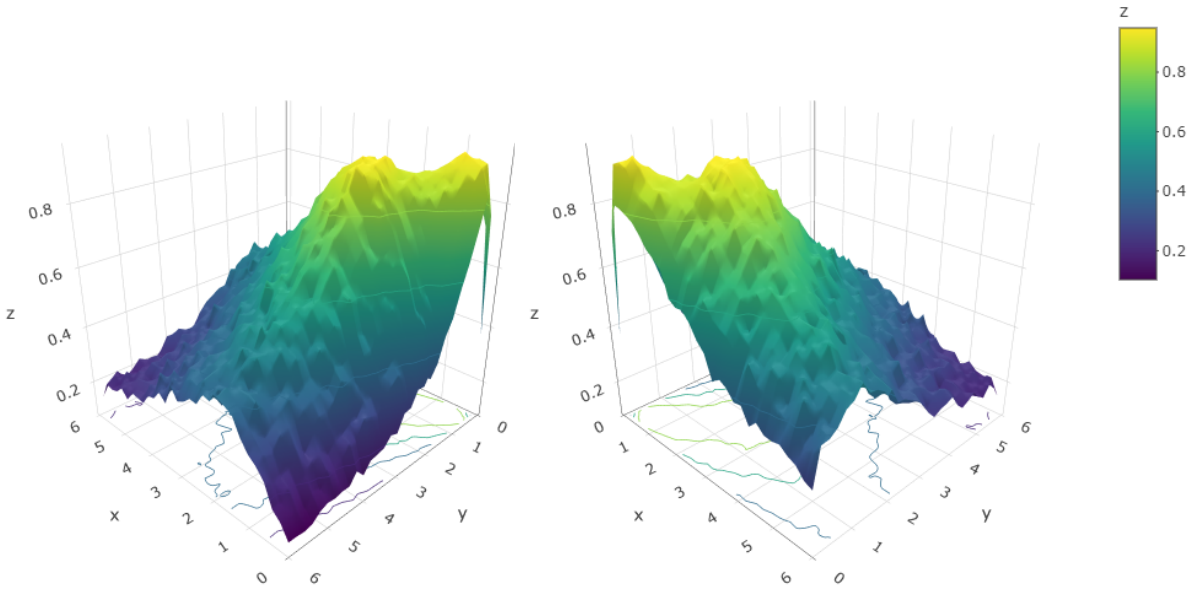


(b) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição normal no eixo das abscissas com esperança matemática igual ao desvio padrão, distribuição exponencial no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.

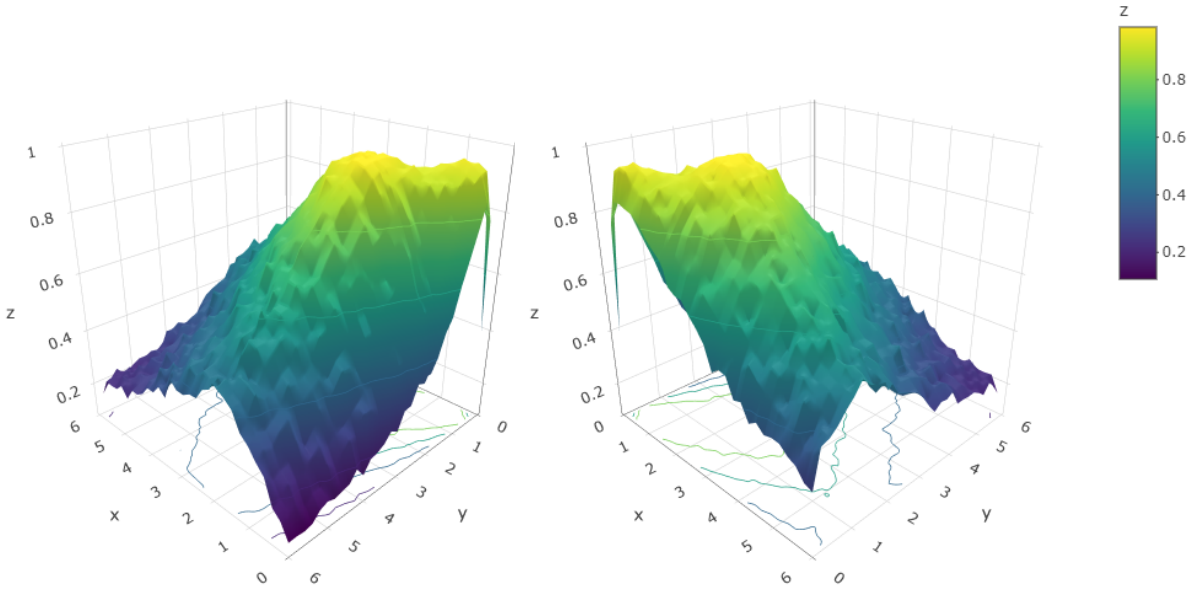
Figura 4.20: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição exponencial no eixo das ordenadas.

A figura 4.20b, com distribuição normal, com valor esperado igual ao desvio padrão, apresenta maiores taxas de captura que a figura 4.20a com distribuição uniforme

com os mesmos parâmetros, analogamente às superfícies do caso contínuo. Para ambas, o ponto de máxima situa-se em torno entre $0,3 \leq E[X] = E[Y] \leq 0,5$ assim como nos resultados obtidos com apenas uma distribuição em ambos os eixos do plano cartesiano. Há também um máximo local na vizinhança de $E[X] = E[Y] = 2$, esses dois pontos de máxima se devem aos dois tipos de captura que a simulação considera, a captura aproximada e a captura com o objeto englobando o ponto.



(a) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição uniforme no eixo das abscissas com esperança matemática igual a variância, distribuição Poisson no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.

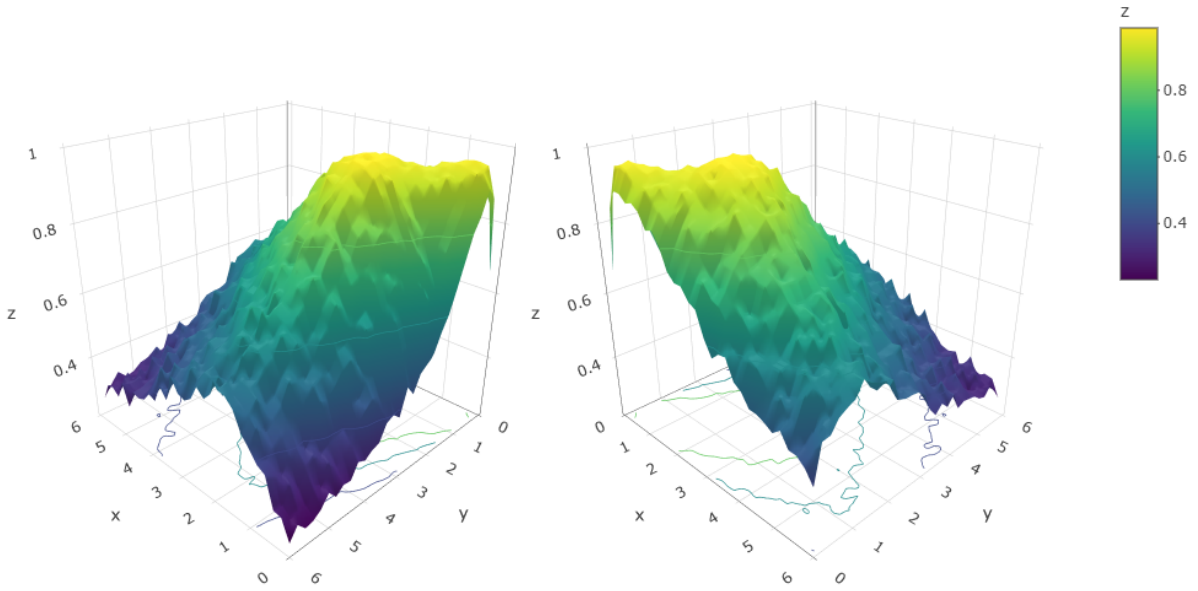


(b) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição normal no eixo das abscissas com esperança matemática igual a variância, distribuição Poisson no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.

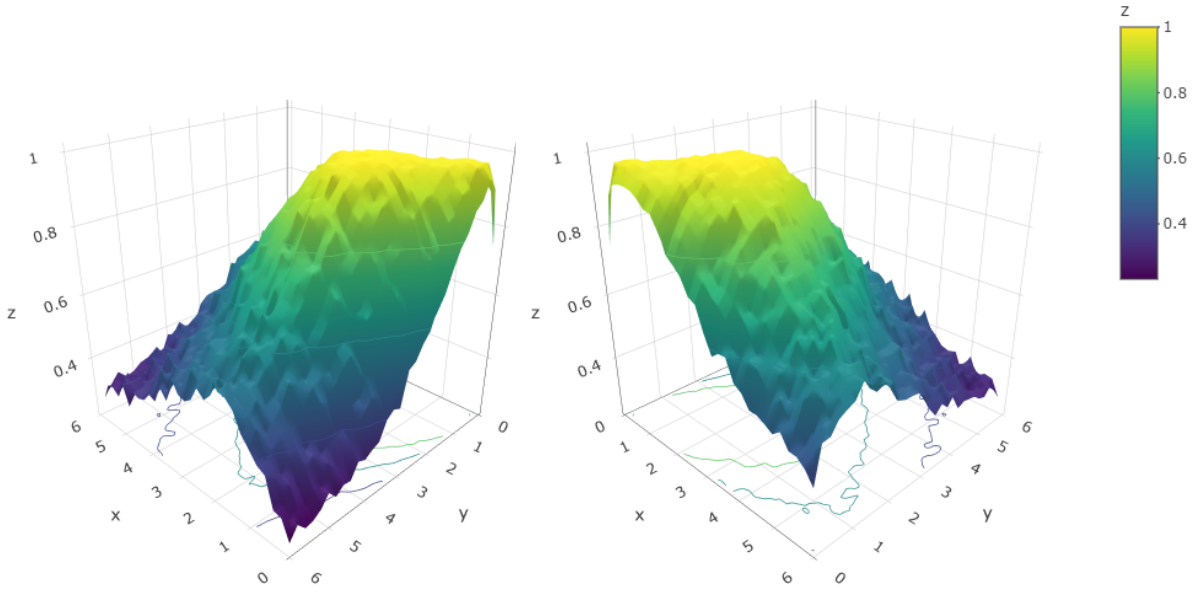
Figura 4.21: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição Poisson no eixo das ordenadas.

A figura 4.21b, com distribuição normal, com valor esperado igual ao variância, também apresenta maiores taxas de captura que a figura 4.21a com distribuição

uniforme com os mesmos parâmetros, analogamente às superfícies do caso contínuo e às figuras anteriores. No entanto, para ambas o ponto de máxima situa-se em torno de $E[X] = E[Y] = 2$ e entre $0,3 \leq E[X] = E[Y] \leq 0,5$ há um ponto de máxima local.



(a) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição uniforme no eixo das abscissas com esperança matemática igual a 2 e variação da variância, distribuição normal com os mesmos parâmetros no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.



(b) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição uniforme no eixo das abscissas com variância igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e variação do valor esperado, distribuição normal com os mesmos parâmetros no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.

Figura 4.22: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição uniforme no eixo das abscissas e distribuição normal no eixo das ordenadas.

A figura 4.22b mostra que, assim como no caso contínuo, as simulações com variação

do valor esperado obtém maior taxa de captura que as simulações com variação da variância representadas pela figura 4.22a. Ambas, assim como nas figuras anteriores, tem um ponto de máxima com valor esperado em torno $2,0$, valor do salto determinístico do ponto, e se aproximam do valor máximo de capturas em torno de $0,3$ e $0,5$. A taxa de captura decai de forma menos acentuada para valores da variância mais altos e para valores esperados mais altos, distoando dos resultados obtidos no caso contínuo para valores maiores de salto do objeto.

4.1.3 Tridimensional: Casos discreto e contínuo

As simulações ocorreram com três graus de liberdade no espaço cartesiano e o ponto que está perseguido descreve uma trajetória $y = x = z$.
Nas figuras 4.23, 4.24 e 4.25, para distância inicial nula, as capturas começam do $0,03$ para as distribuição Poisson e para as distribuições uniforme e normal, ambas com esperança matemática igual ao desvio padrão, e começam de $0,09$ para a distribuição exponencial e para as distribuições normal e uniforme, ambas com valor esperado igual a variância. O valor máximo é atingido na vizinhança de $E[X] = E[Y] = E[Z] = 0,25$.

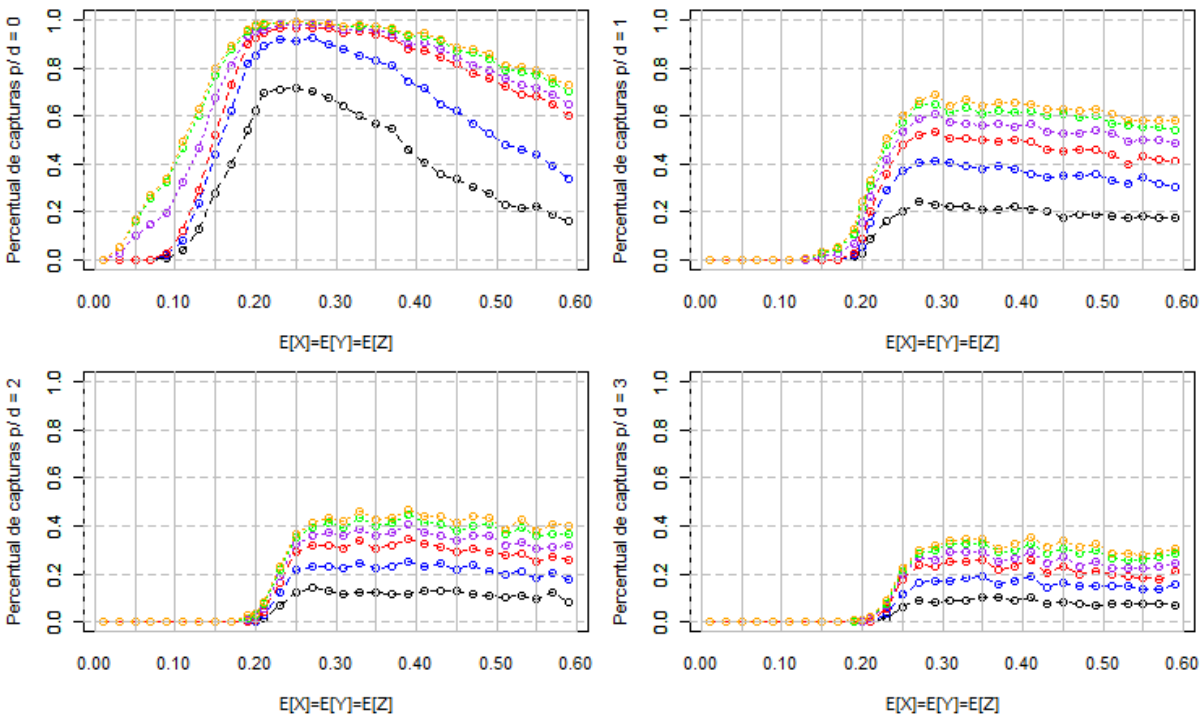


Figura 4.23: Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância.

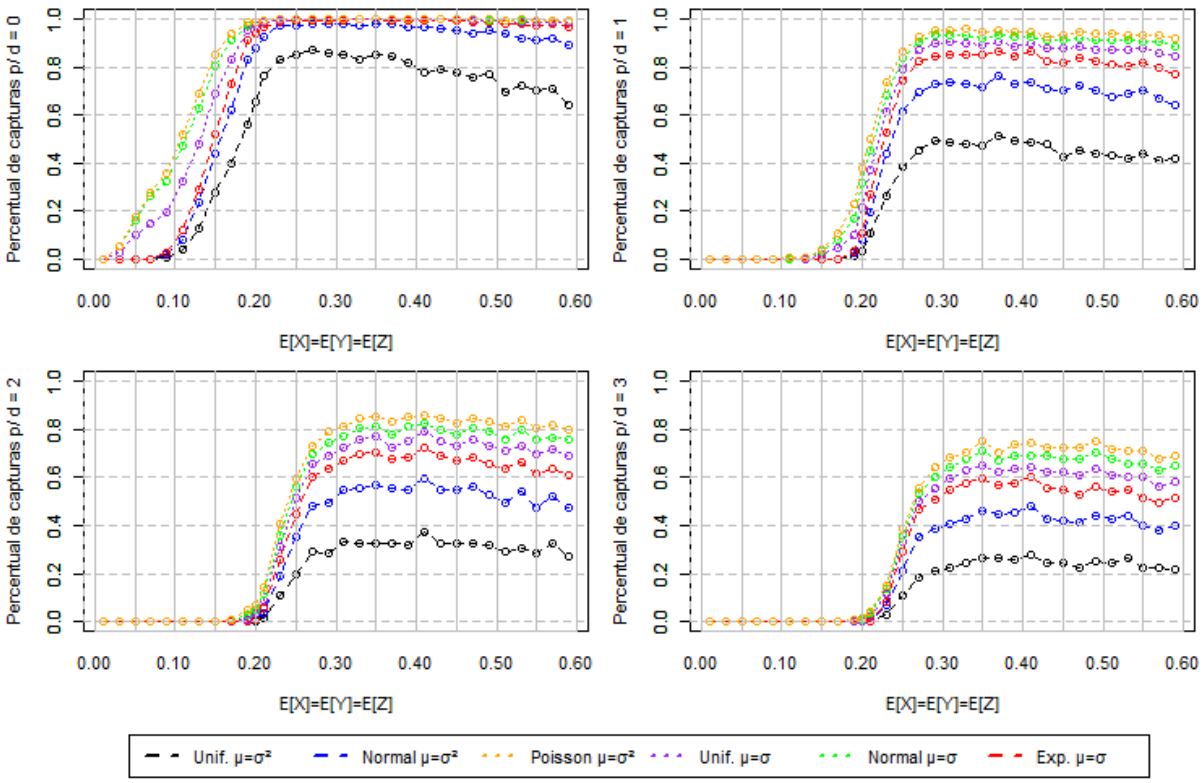


Figura 4.24: Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância.

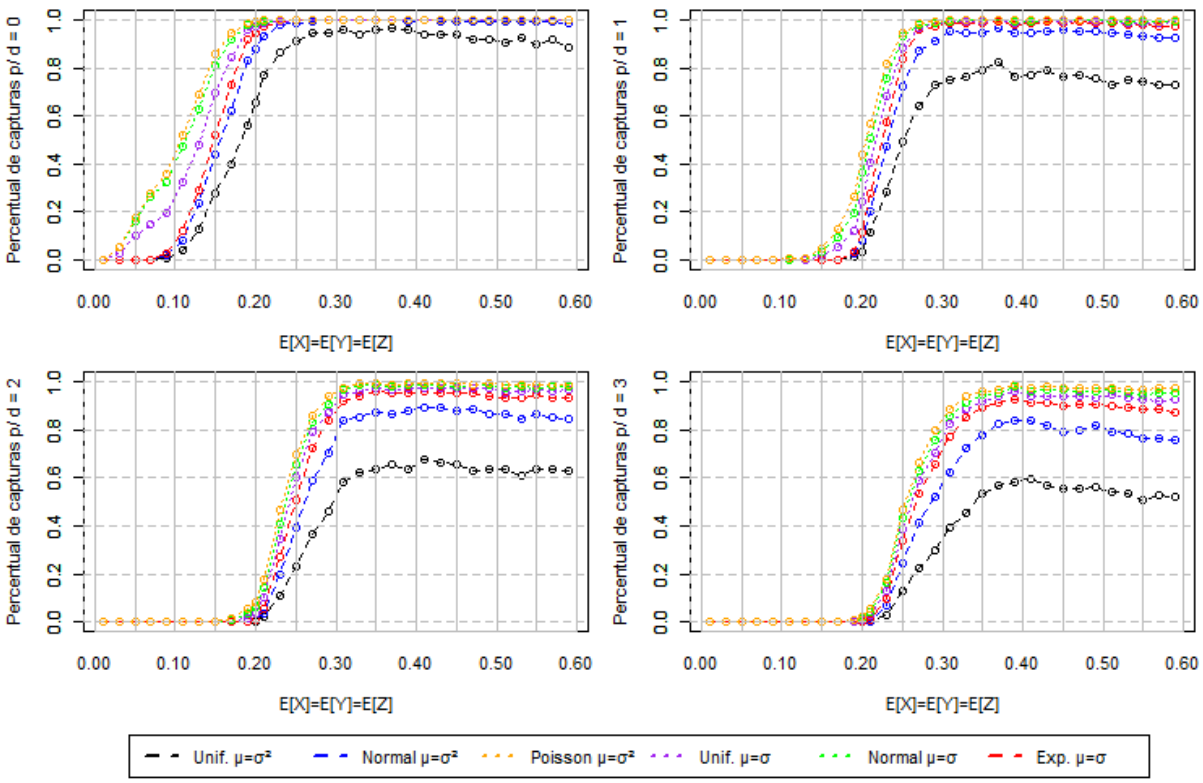


Figura 4.25: Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 2$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância.

Com o aumento do raio para $r = 2$, a distribuição normal, com valor esperado igual a variância, passa a atingir o percentual máximo de capturas e permanecer próximo a esse valor.

Para distância maior que zero ($d > 0$), assim como nos gráficos das simulações em duas dimensões, as curvas começam a subir com valores maiores, como se a distância inicial deslocasse o gráfico para a direita, e há uma redução do valor máximo alcançado devido a adição de um grau de liberdade. O raio, nos gráficos mencionados das três figuras supracitadas, representa um fator de escala, aumentando o valor do percentual de capturas.

A curva que usa distribuição Poisson para modelar o tamanho do salto atinge mais rapidamente maior valor de percentual de captura que as distribuições normal, uniforme e exponencial, as três com valor esperado igual ao desvio padrão, seguidas das distribuições normal e uniforme, ambas com esperança matemática igual a variância.

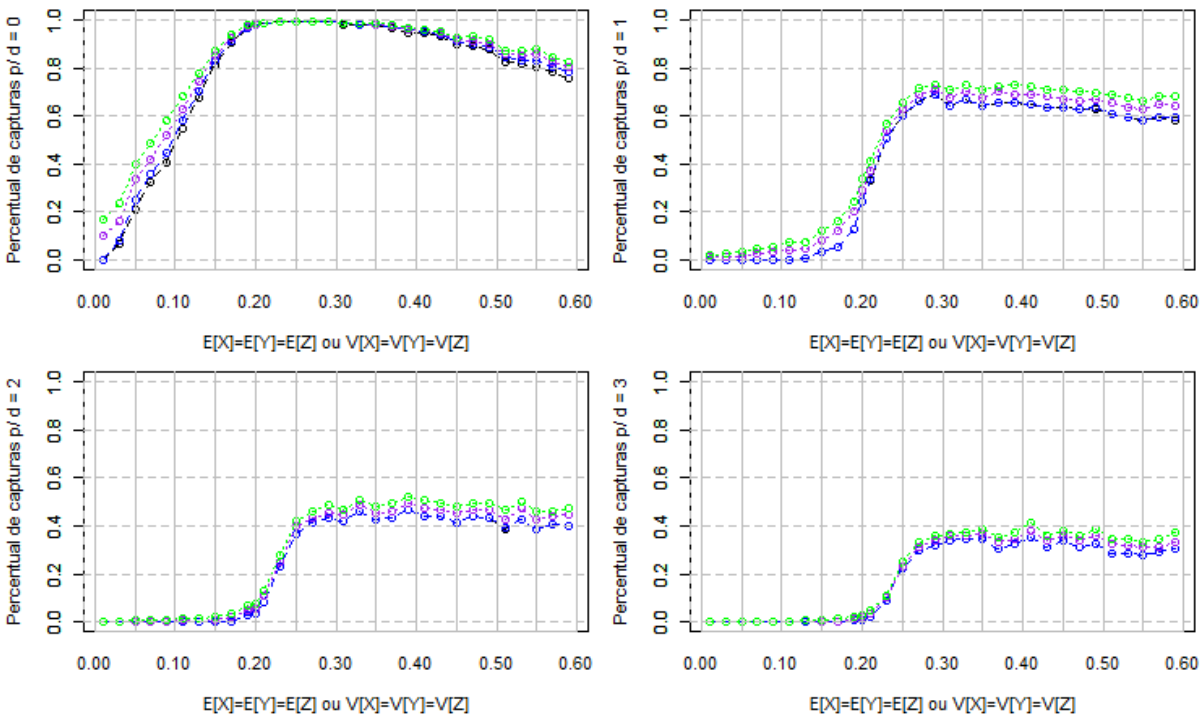


Figura 4.26: Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

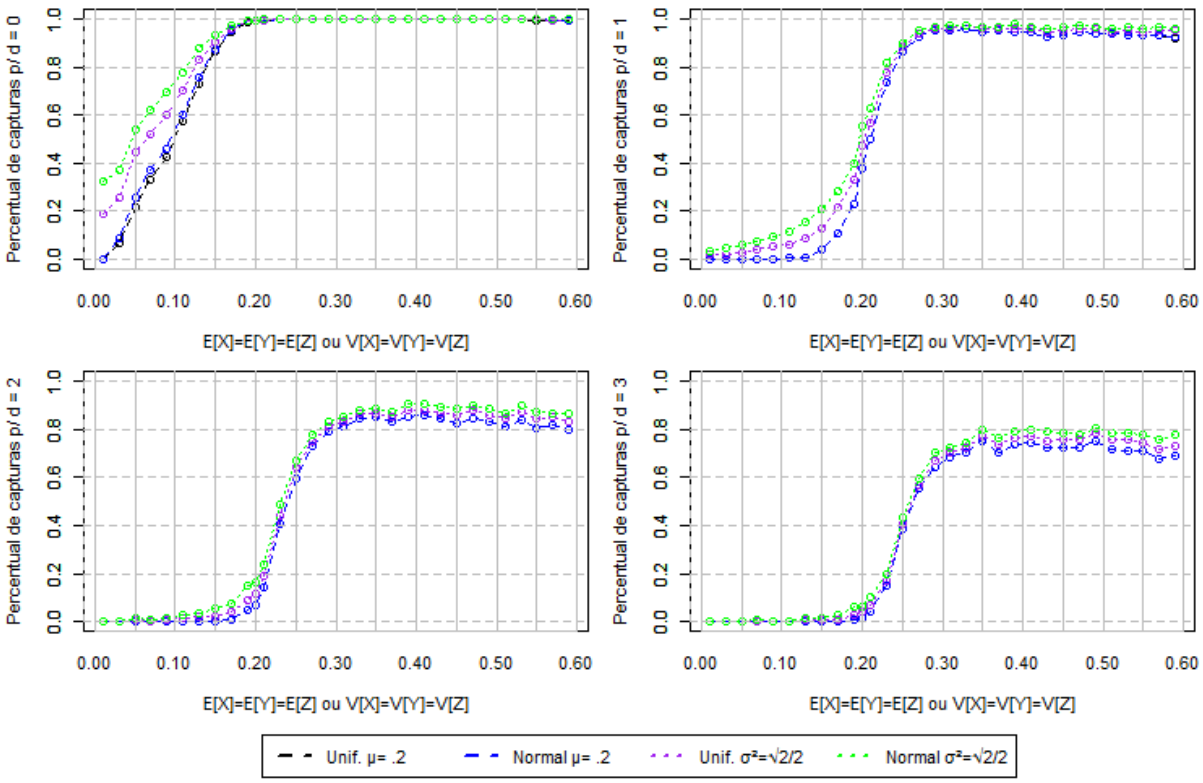


Figura 4.27: Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

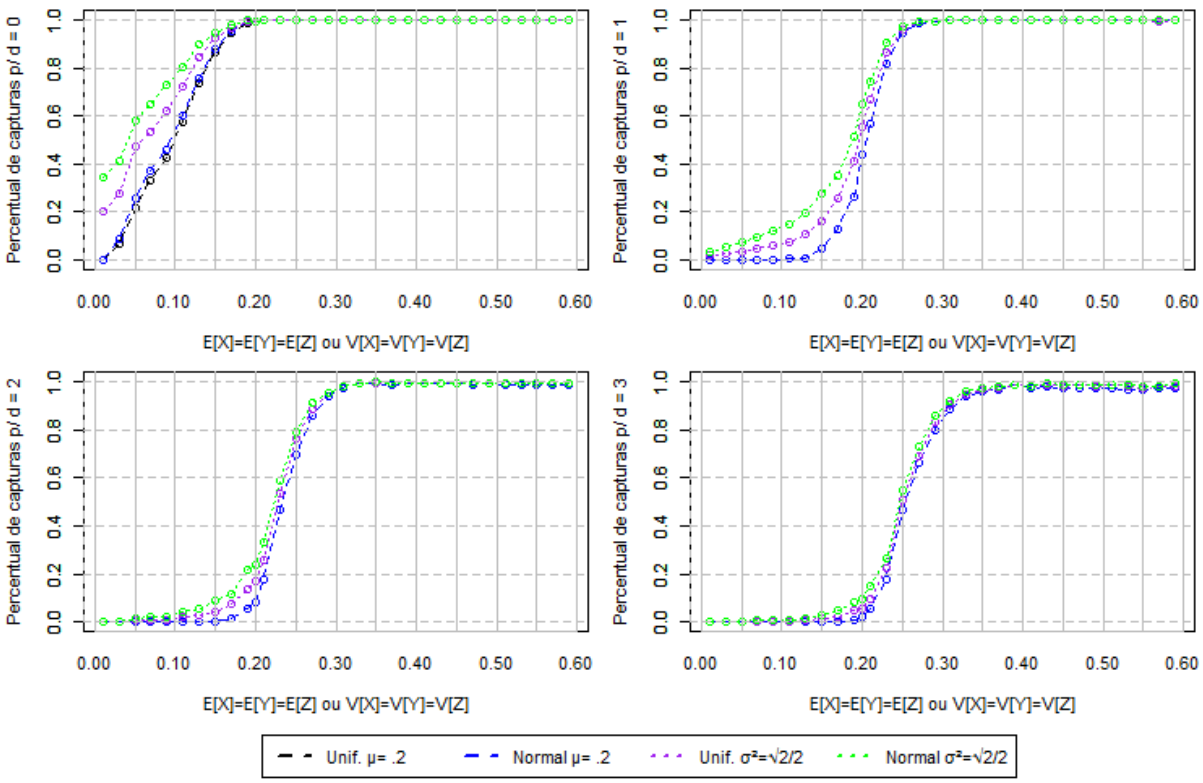


Figura 4.28: Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 2$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

Nas figuras 4.26, 4.27 e 4.28, com a distância nula, o máximo do percentual de capturas é atingido na vizinhança do valor $0,2$, tamanho do salto do ponto, no eixo das abscissas e as curvas com variação da variância praticamente se sobrepõem, enquanto, para a variação do valor esperado, a distribuição normal cresce mais rapidamente do que a distribuição uniforme. Para distância inicial maior que zero ($d > 0$), o valor máximo é atingido em valores à direita no eixo das abscissas com o aumento dessa distância.

O aumento do raio aumenta o percentual máximo de capturas para distâncias não nulas. Sendo que para $r = 2$ esse percentual de capturas se aproxima do valor unitário, com curva similar a de uma regressão logística.

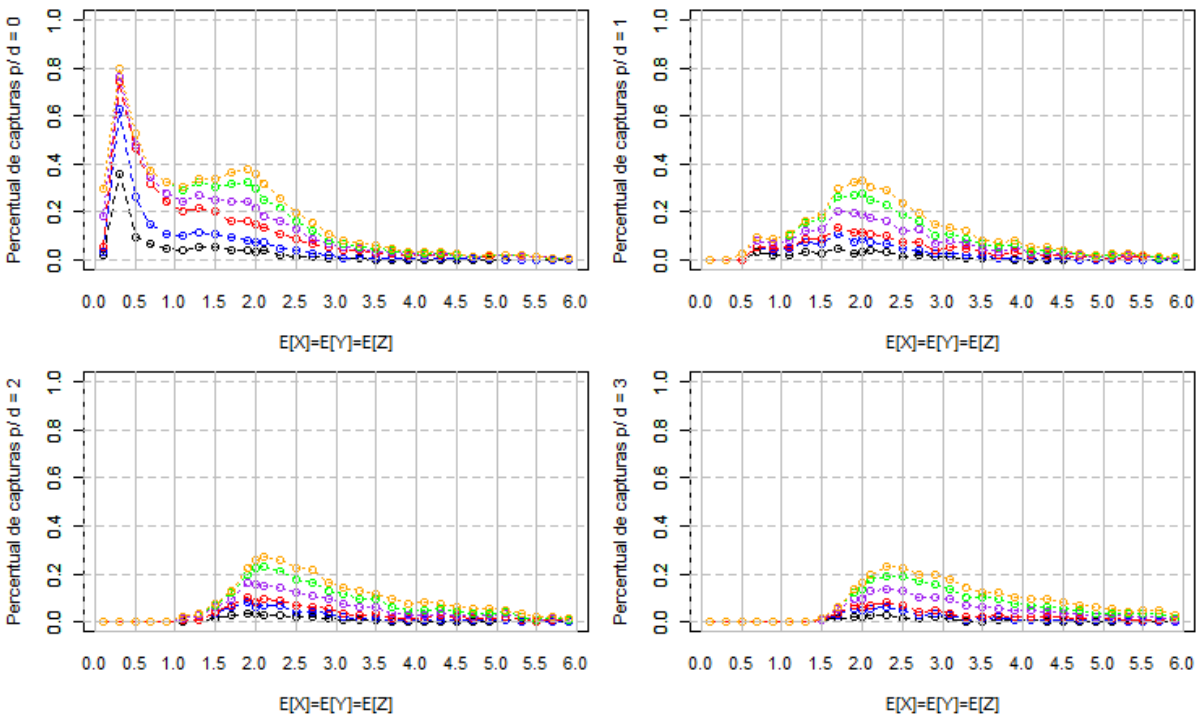


Figura 4.29: Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

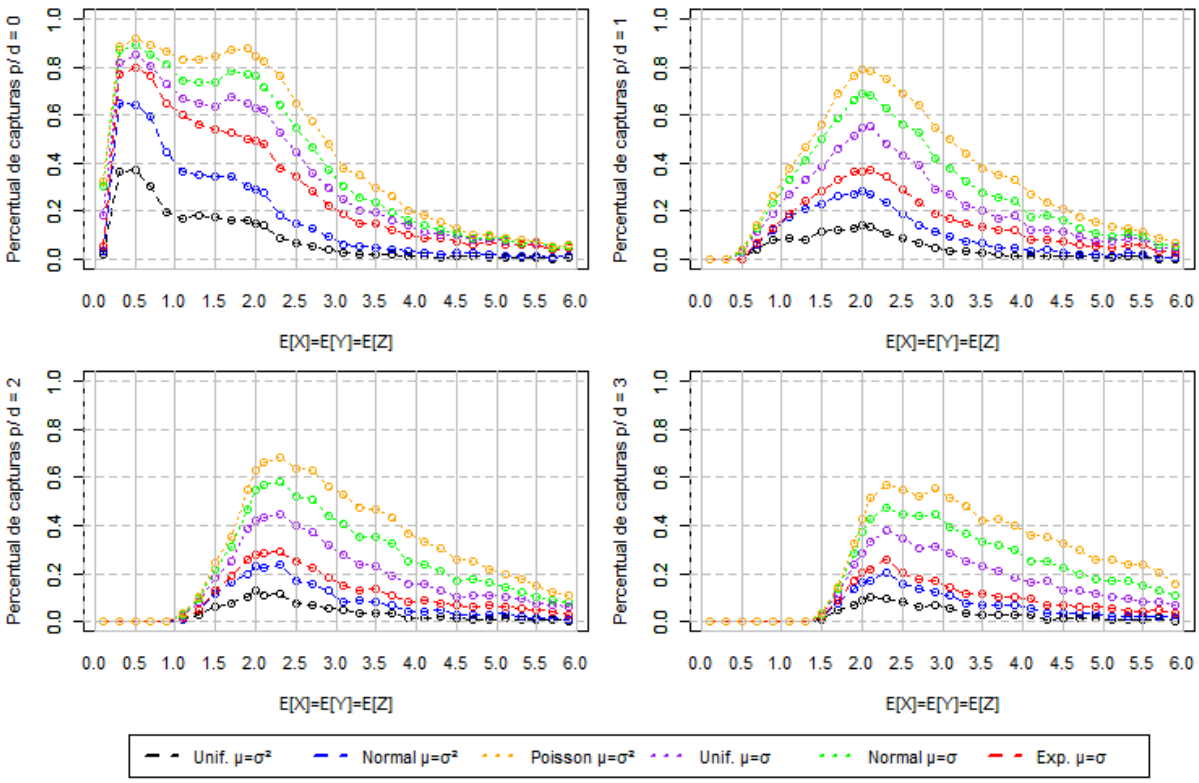


Figura 4.30: Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

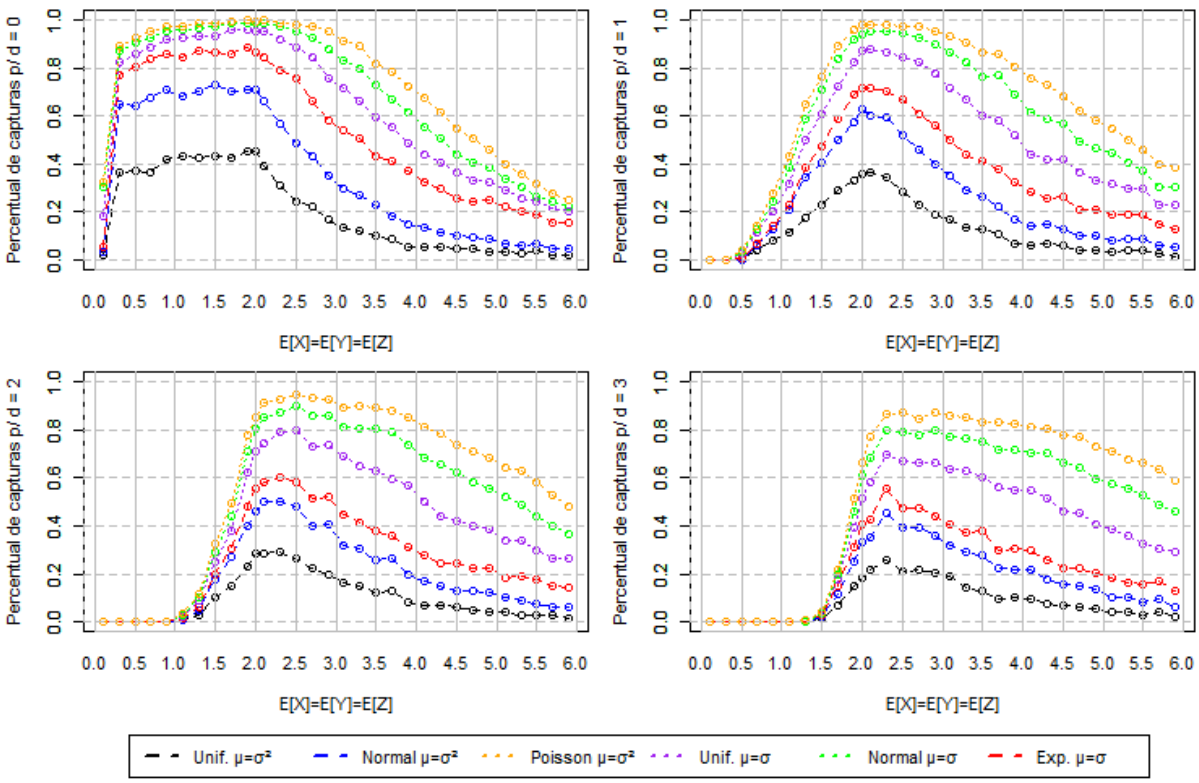


Figura 4.31: Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 2$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

Nas figuras 4.29, 4.30 e 4.31 observamos que, com a distância inicial nula para $r = 0,5$, o ponto de máxima do percentual de capturas é atingido em $E[X] = E[Y] = E[Z] = 0,3$ e para $r = 1$ em $E[X] = E[Y] = E[Z] = 0,5$, já para $r = 2$ o ponto de máxima ocorre em torno de $E[X] = E[Y] = E[Z] = 2$, valor do salto determinístico do ponto.

Em todos os gráficos o raio aumenta o percentual de capturas e a distância inicial não nula desloca o valor no qual começam as capturas para a direita. A utilização da distribuição Poisson para modelar o tamanho do salto apresenta maior taxa de capturas que das distribuições normal, uniforme e exponencial, as três com valor esperado igual ao desvio padrão, e das distribuições normal e uniforme com valor esperado igual a variância.

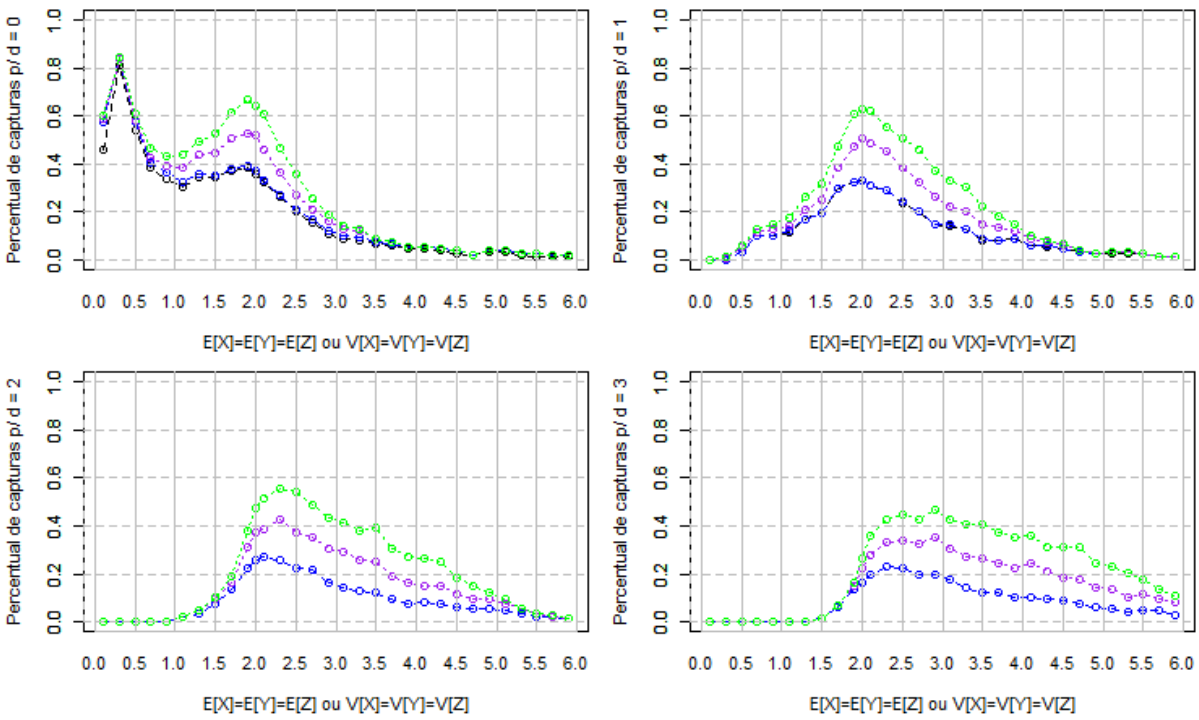


Figura 4.32: Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

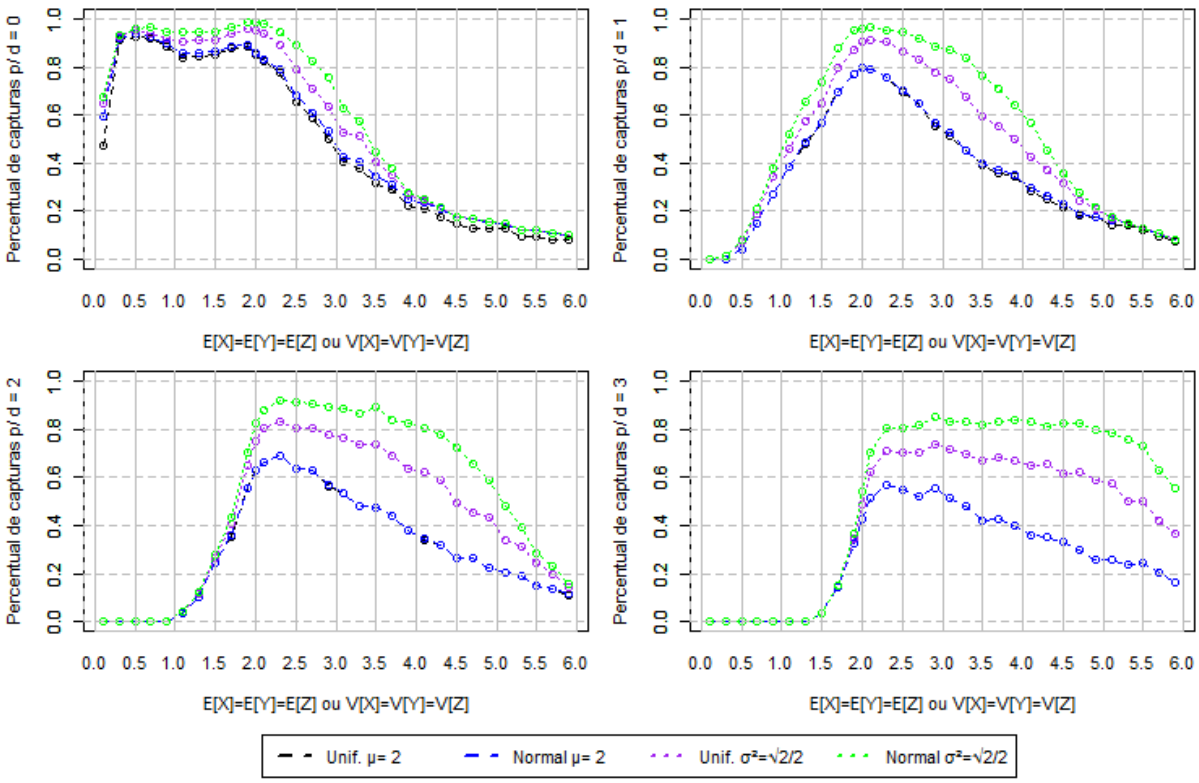


Figura 4.33: Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 1$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

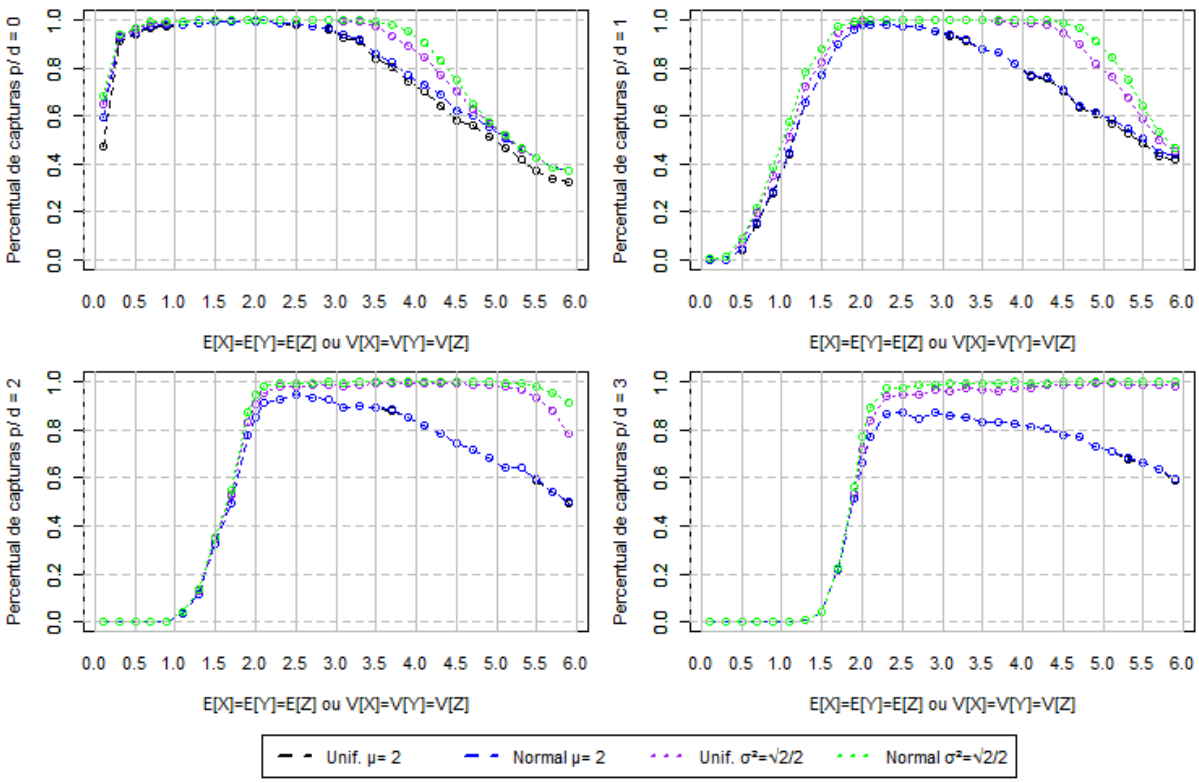


Figura 4.34: Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 2$ com o ponto perseguido por objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

Nas figuras 4.32, 4.33 e 4.34 para $d = 0$, o percentual de capturas se aproxima do valor unitário quando o parâmetro que varia tem valor de $0,3$ e decai expressivamente após este atingir $2,0$ para $r = 0,5$ ou $r = 1$. Para $r = 2$, o máximo é atingido na vizinhança do $2,0$ no eixo das abscissas. O aumento do raio aumenta também o valor do ponto no eixo das abscissas para o qual o percentual de capturas começa a diminuir.

A distinção dos resultados das distribuições normal e uniforme com variação da esperança matemática é mais notória para o raio unitário. Com o aumento do raio elas se sobrepõem. A variação da variância, mantendo $E[X] = E[Y] = E[Z] = 2,0$, tem resultados muito próximos para as distribuições normal e uniforme. Sendo que suas curvas se sobrepõem ou têm taxas de captura próximas.

4.2 Resultados para o situação com o ponto em perseguição

Foram realizadas 1.000 simulações com 350 passos cada, assim como na seção anterior, para o caso com maior espectro de valores chamado de discreto, de 0 a 6, e para o caso com menor espectro chamado de contínuo, de 0 a $0,6$. Nessa situação, o

valor dos saltos está relacionado à taxa de atualização do movimento do objeto para correção da trajetória do ponto em perseguição, quanto menor mais rapidamente os valores estão sendo observados e o movimento corrigido. As simulações ocorreram com a variação da distância inicial de 0 a 3 com passo unitário e salto do ponto igual a média aritmética dos tamanhos dos saltos do intervalo, desconsiderando o valor do último salto.

4.2.1 Unidimensional: Casos contínuo e discreto

Os gráficos foram elaborados com o raio unitário.

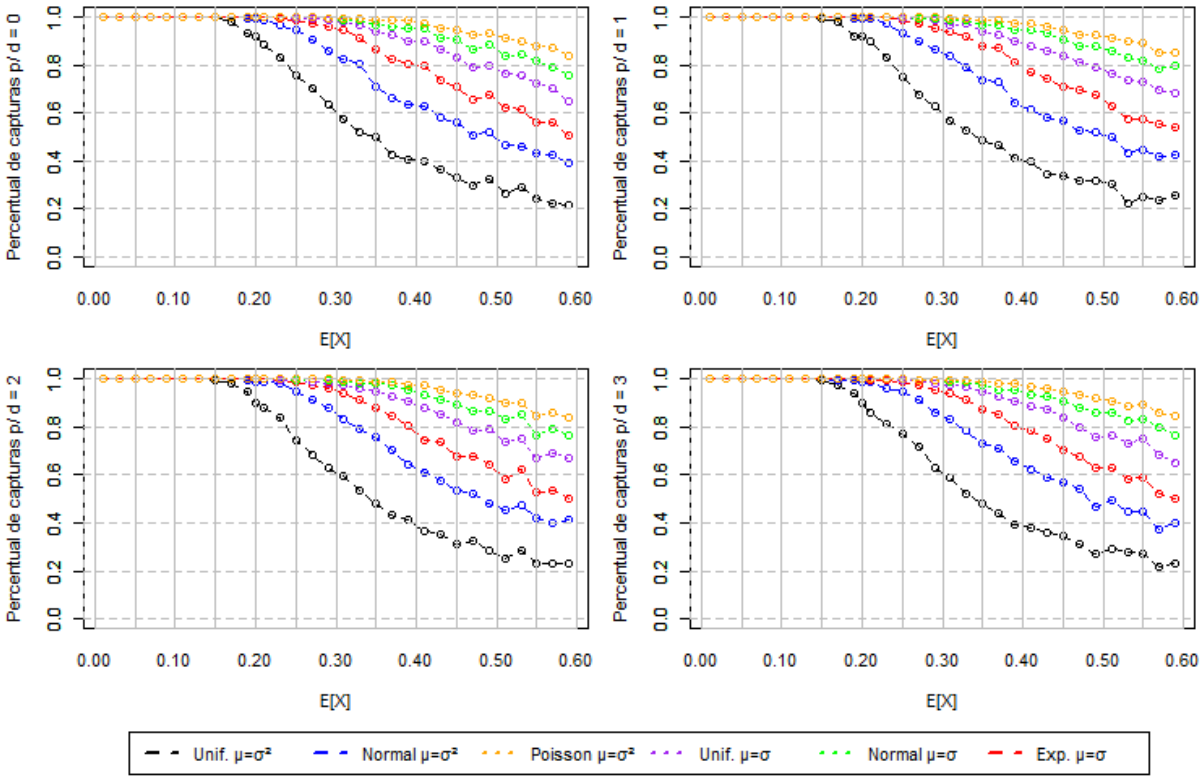


Figura 4.35: Resultados do caso contínuo unidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância.

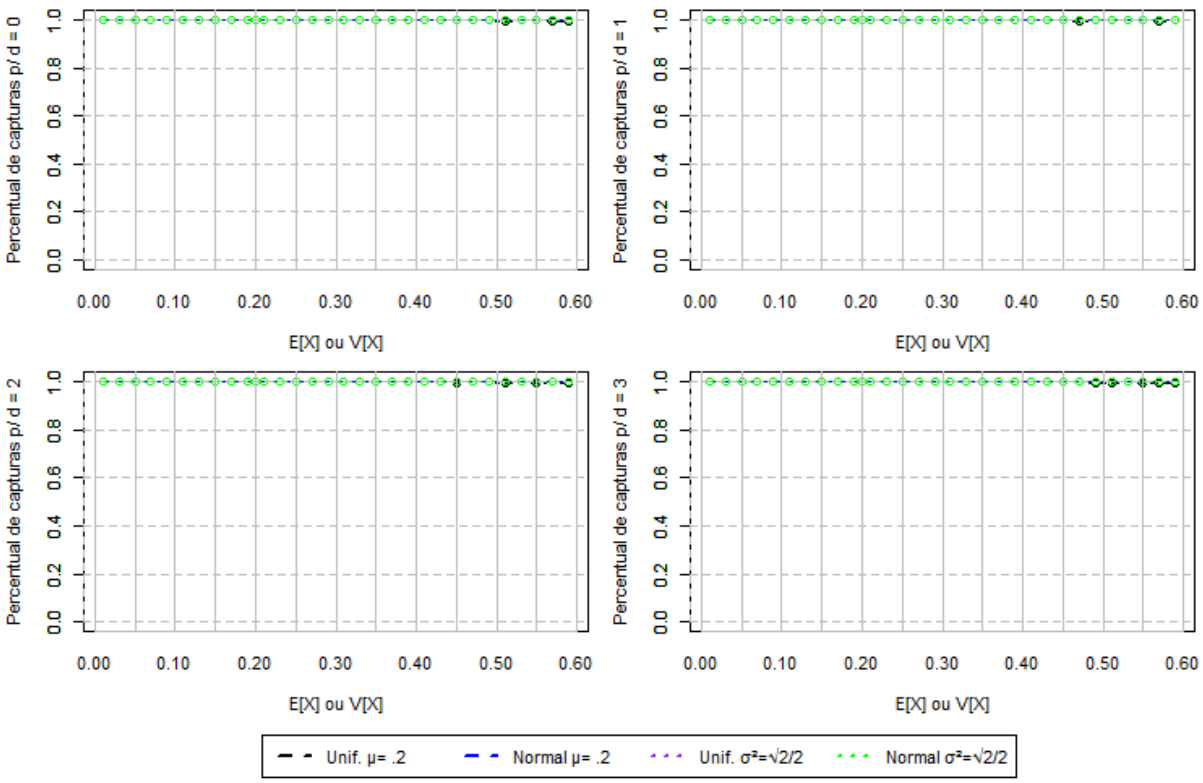


Figura 4.36: Resultados do caso contínuo unidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

Na figura 4.36 é possível observar que o percentual de capturas se mantém unitário ou próximo a esse valor para quase toda a faixa de valores, parâmetros e distribuições de probabilidade simulados.

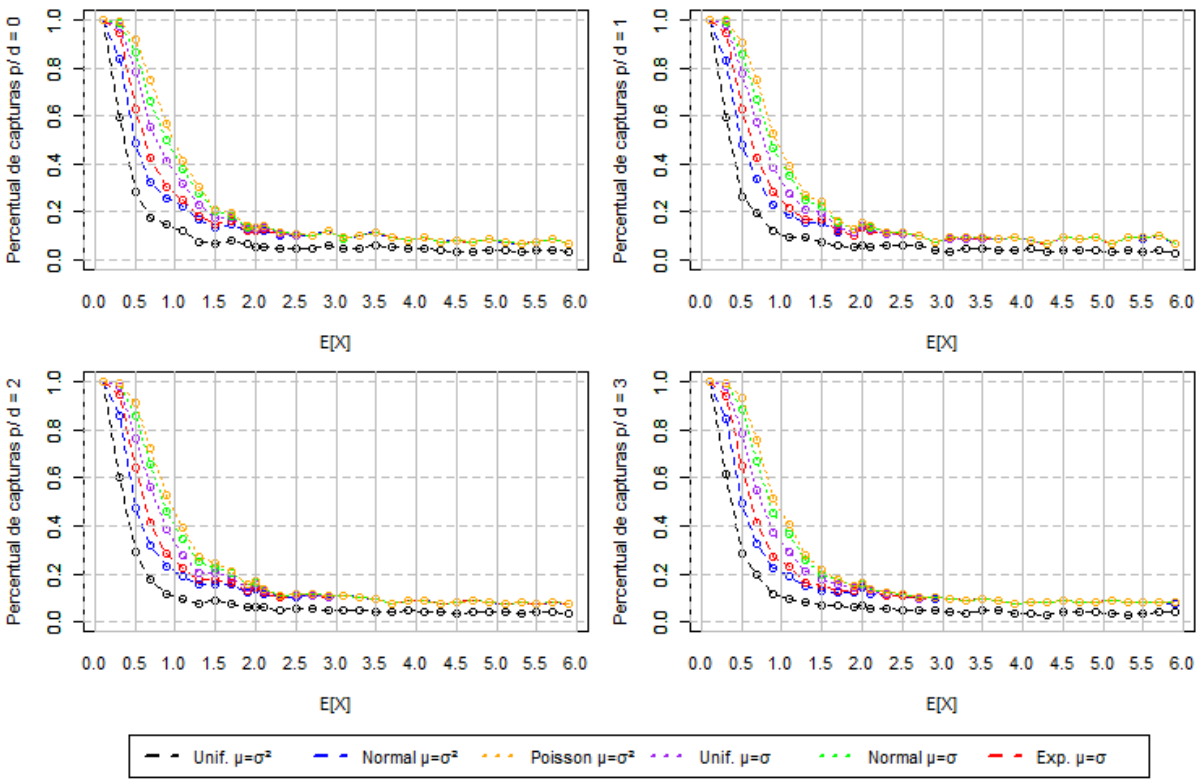


Figura 4.37: Resultados do caso discreto unidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância.

Na figura 4.37, com o aumento da faixa de valores de $0,6$ para 6, nota-se que o percentual de capturas decai exponencialmente para próximo de zero. As relações entre as distribuições de probabilidade mencionadas sobre a figura 4.35 se mantém.

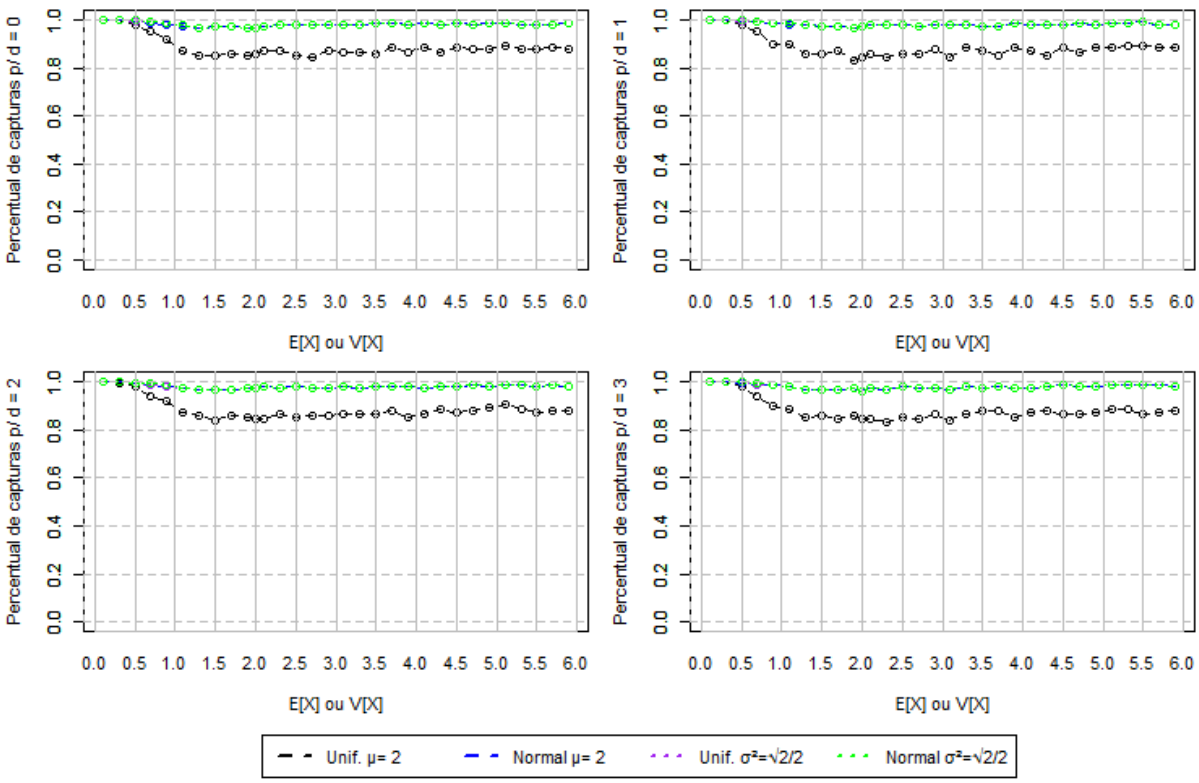


Figura 4.38: Resultados do caso discreto unidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

Na figura 4.38 temos que para a variação apenas da variância com valor esperado fixo, a taxa de capturas se mantém unitária até $\sigma^2 = 0,5$ e decai para pouco acima de $0,8$ no eixo das cotas, onde se estabiliza com pequenas oscilações. Com a variância fixa de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e com a variação da esperança matemática, o percentual de capturas se mantém em torno de 1. Concluímos que o modelo estudado tem maior queda do percentual de capturas com a variação da variância do que com a variação do valor esperado no caso unidimensional.

4.2.2 Bidimensional: Casos contínuo e discreto

As simulações ocorreram com dois graus de liberdade no plano cartesiano e o ponto que está em perseguição descreve uma trajetória $y = x$.

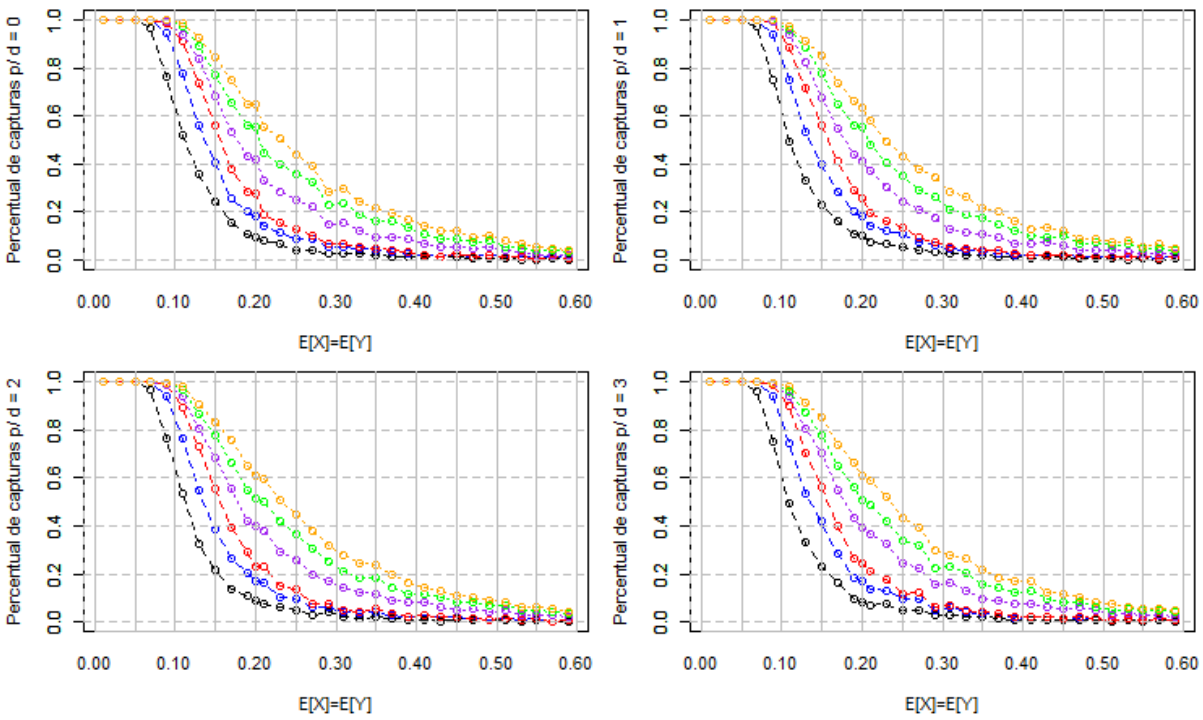


Figura 4.39: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância.

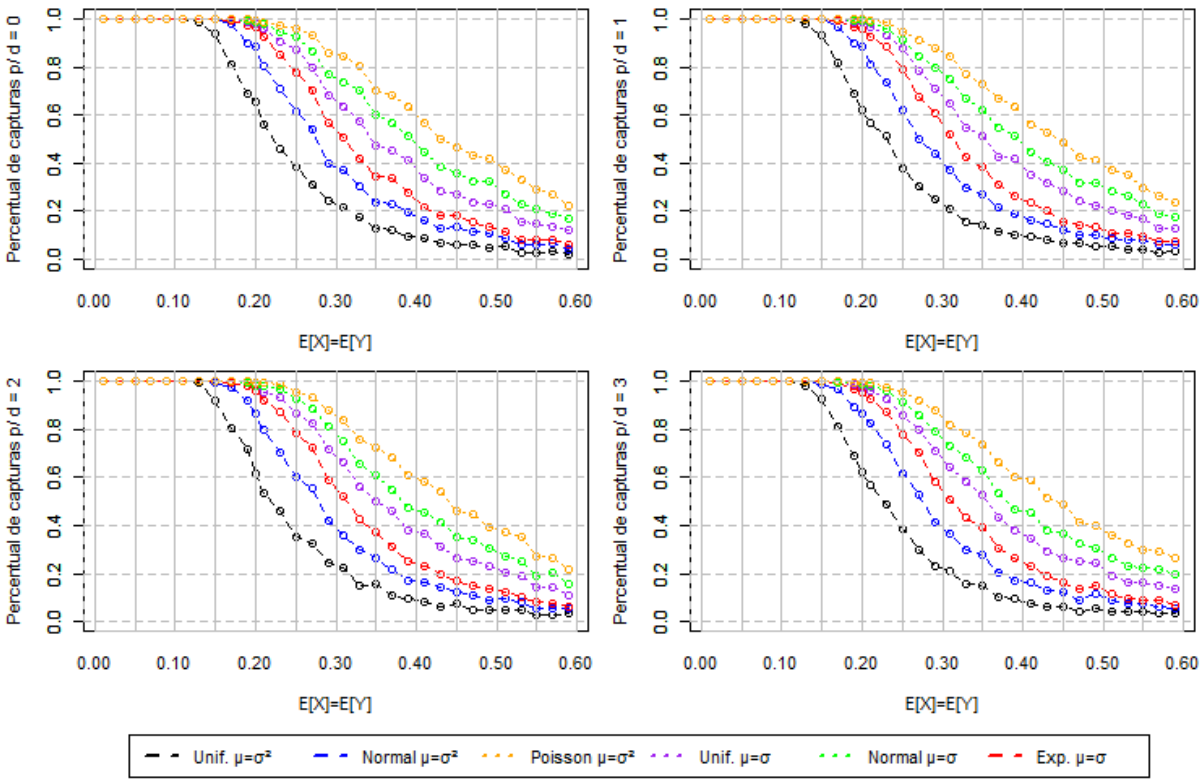


Figura 4.40: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância.

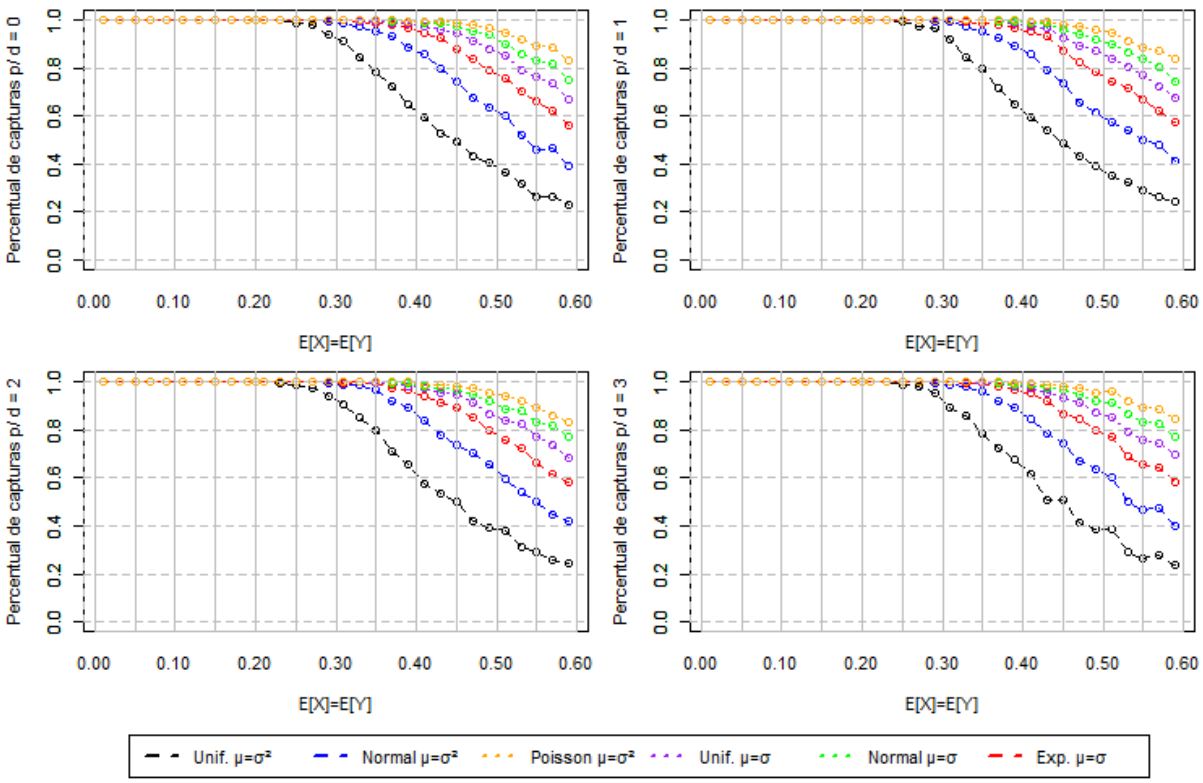


Figura 4.41: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 2$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância.

Nas figuras 4.39, 4.40 e 4.41 observamos que com o aumento do raio aumenta a faixa de valores com percentual de captura unitário e que a distância inicial exerce pouca influência devido a similaridade dos gráficos. Também é possível verificar que as relações entre as distribuições discutidas anteriormente, na figura 4.35, são análogas.

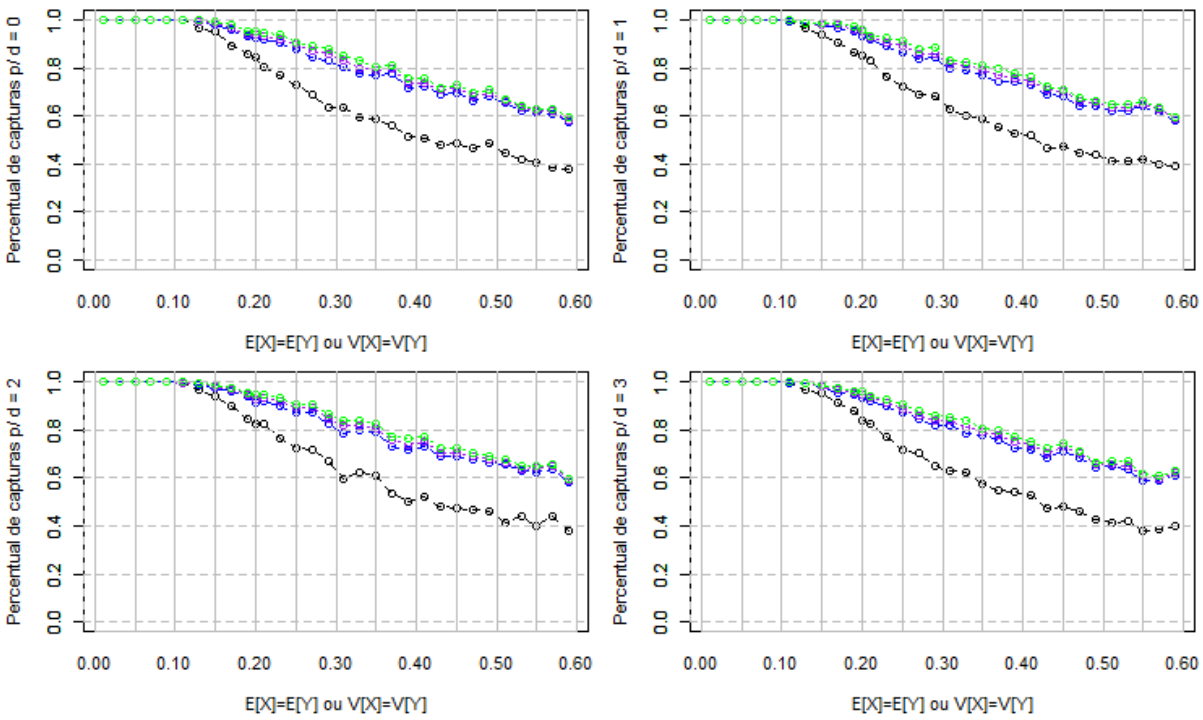


Figura 4.42: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

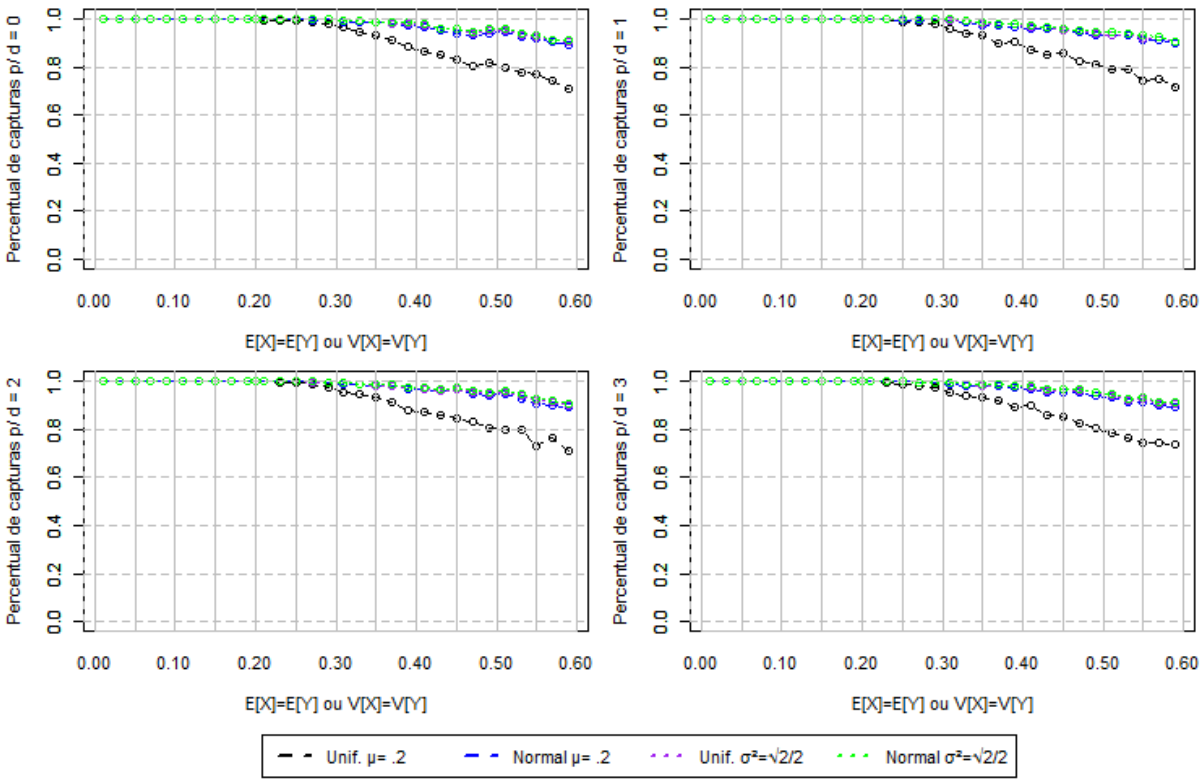


Figura 4.43: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

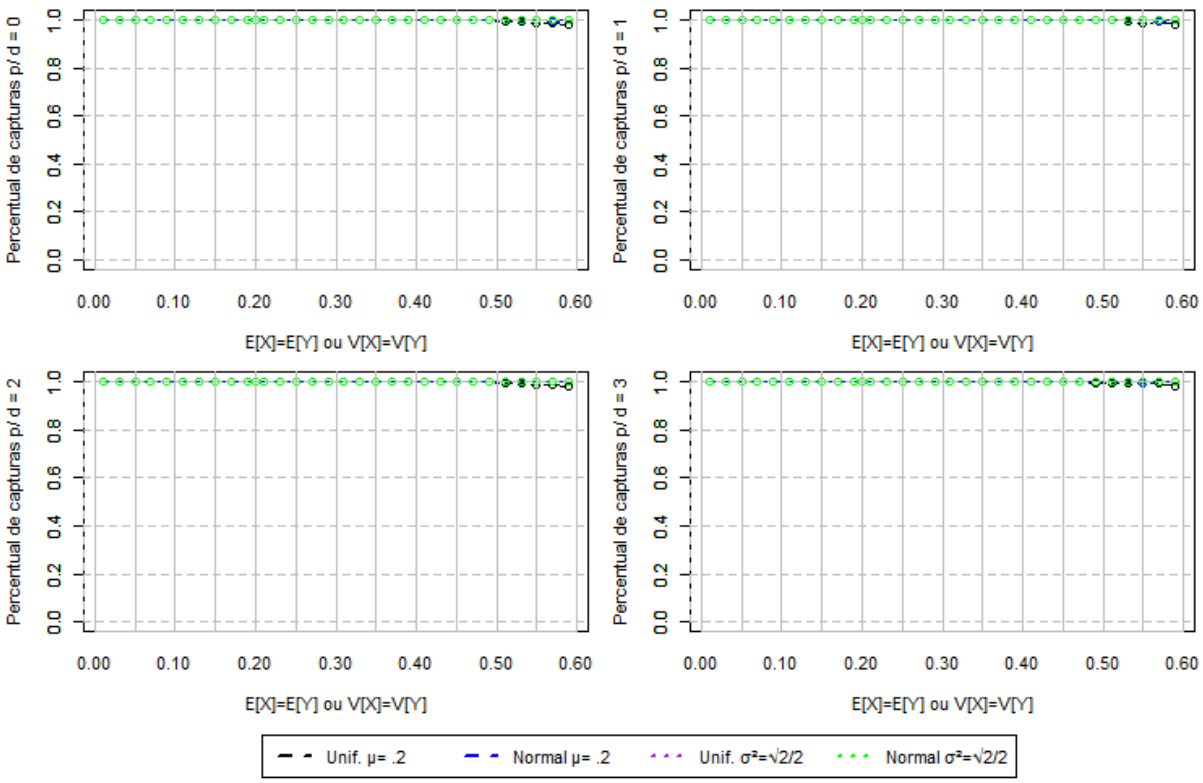


Figura 4.44: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 2$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

Nos gráficos da figura 4.42, para $r = 0,5$ e $r = 1$ nota-se que a distribuição uniforme com a variação da variância decai mais rapidamente que as demais que praticamente se sobrepõem. Na figura 4.43 para $r = 2$, ocorrem pequenas oscilações no percentual de capturas com o aumento da variância/valor esperado.

O raio aumenta o percentual de capturas e desloca para a direita o ponto no qual deixa de ser unitário, enquanto a distância inicial apresenta pequena influência, assim como nos gráficos anteriores.

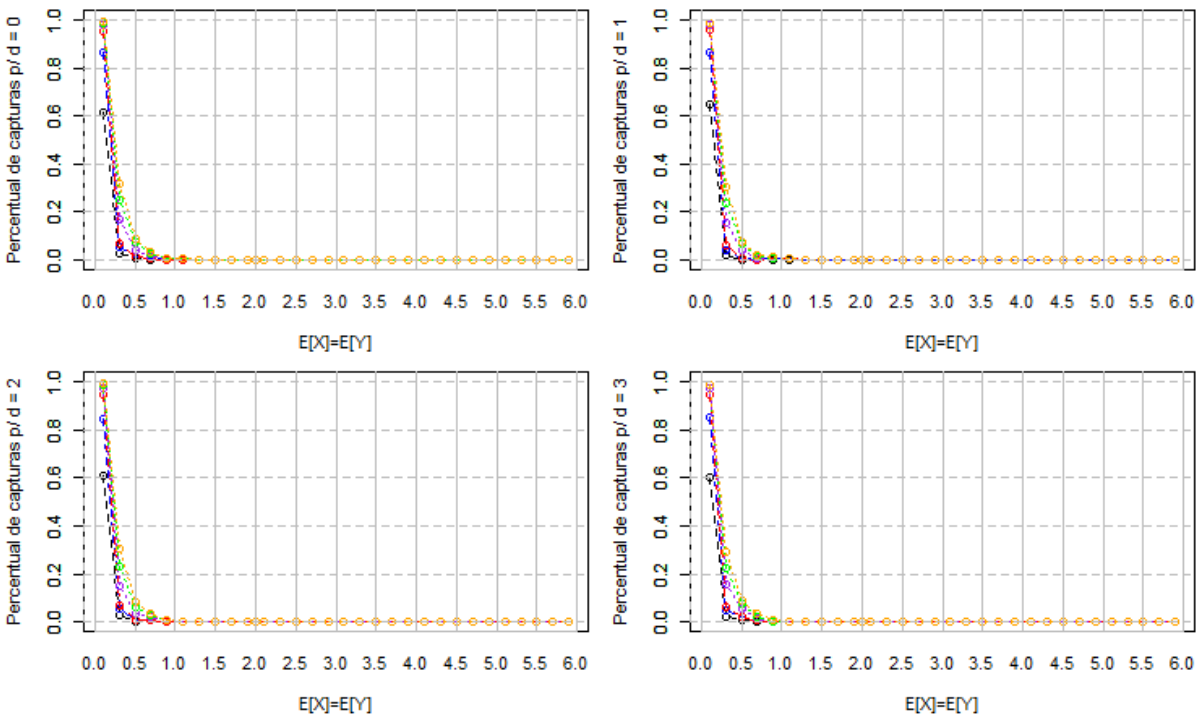


Figura 4.45: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

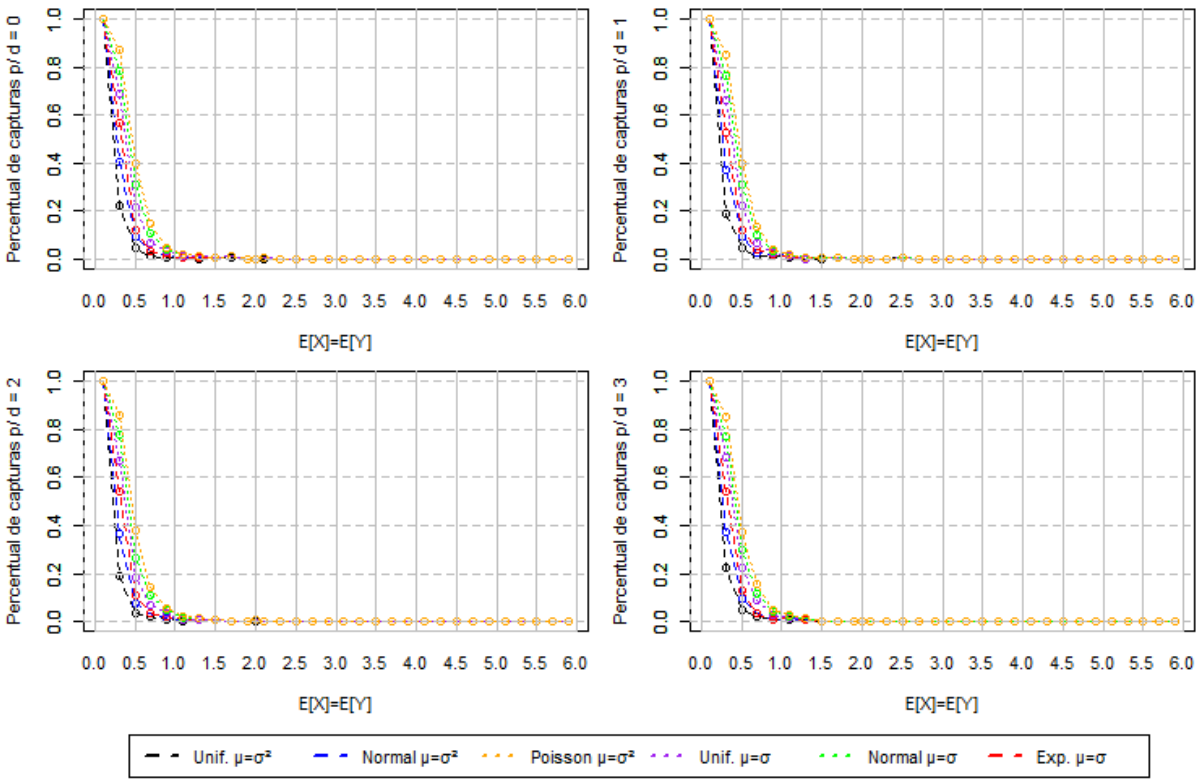


Figura 4.46: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

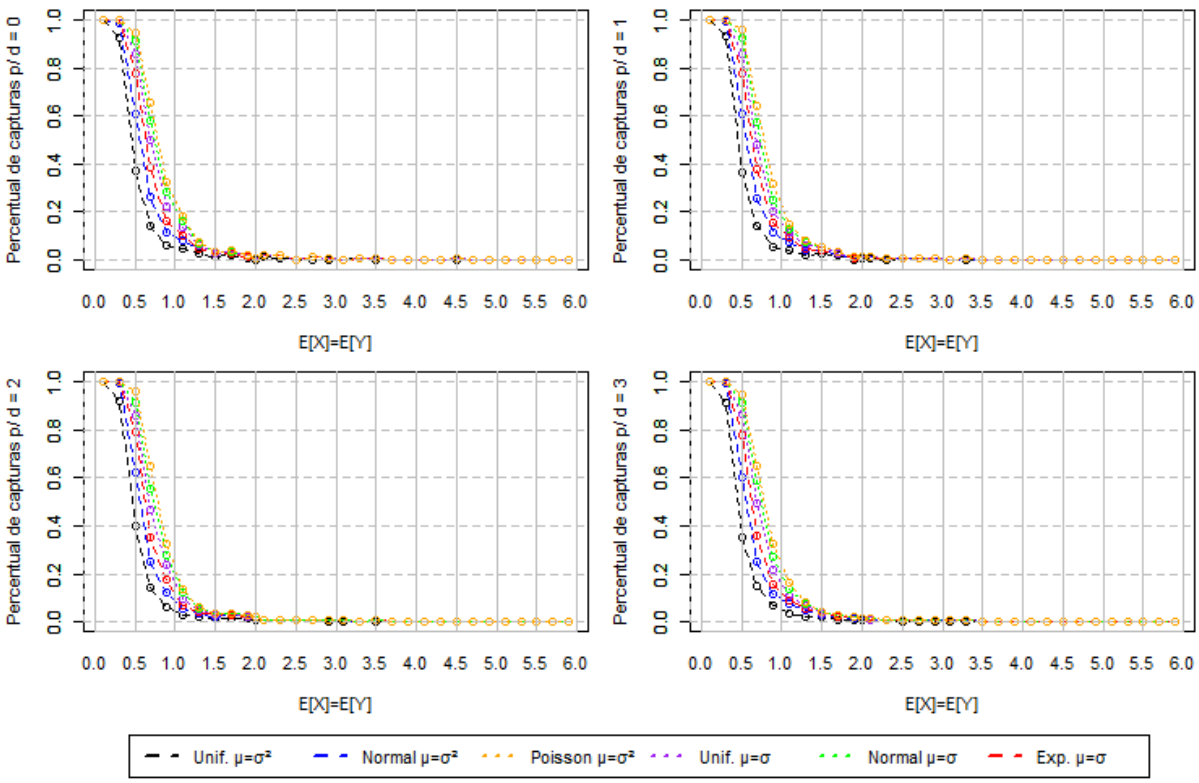


Figura 4.47: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 2$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

Nas figuras 4.45, 4.46 e 4.47 observamos que as curvas das distribuições de probabilidade mantêm as mesmas relações mencionadas anteriormente. Sendo que o aumento do raio desloca o mínimo à direita do gráfico. Similar aos casos anteriores, a distância inicial apresenta pouca influência nos gráficos.
Com o aumento do valor esperado, a taxa de capturas tende a zero. O que mostra que o modelo é eficaz apenas para pequenos valores esperados, ou seja, uma grande taxa de atualização do movimento estocástico.

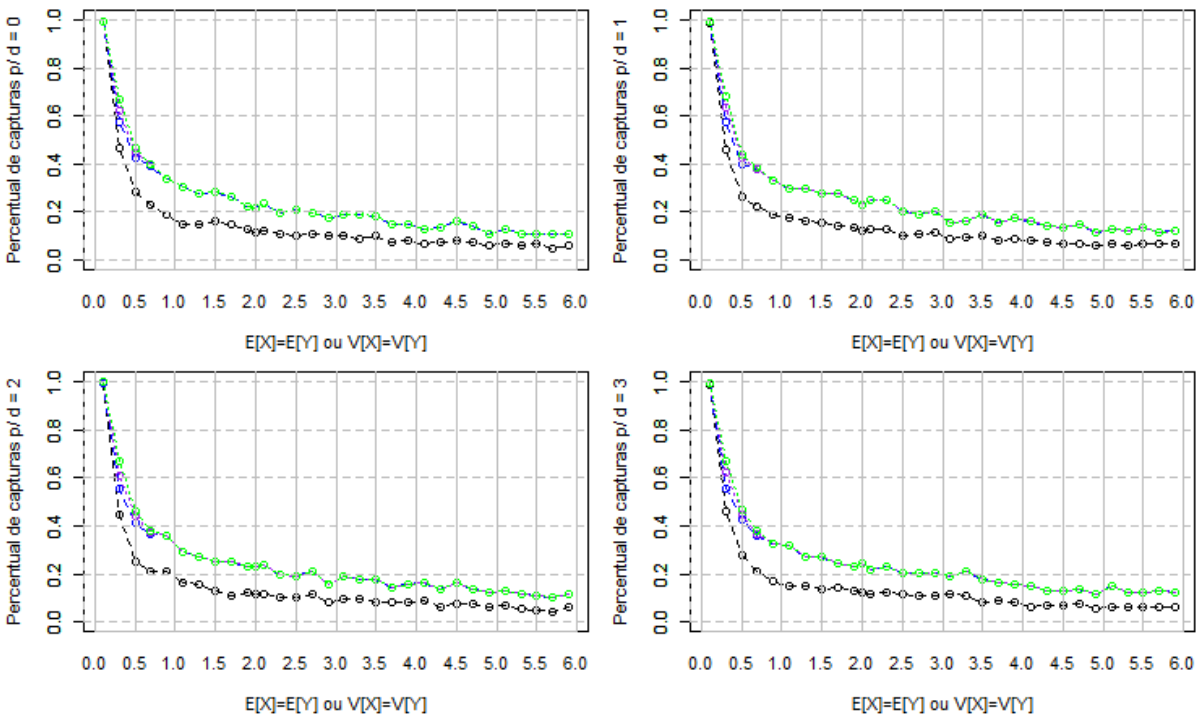


Figura 4.48: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

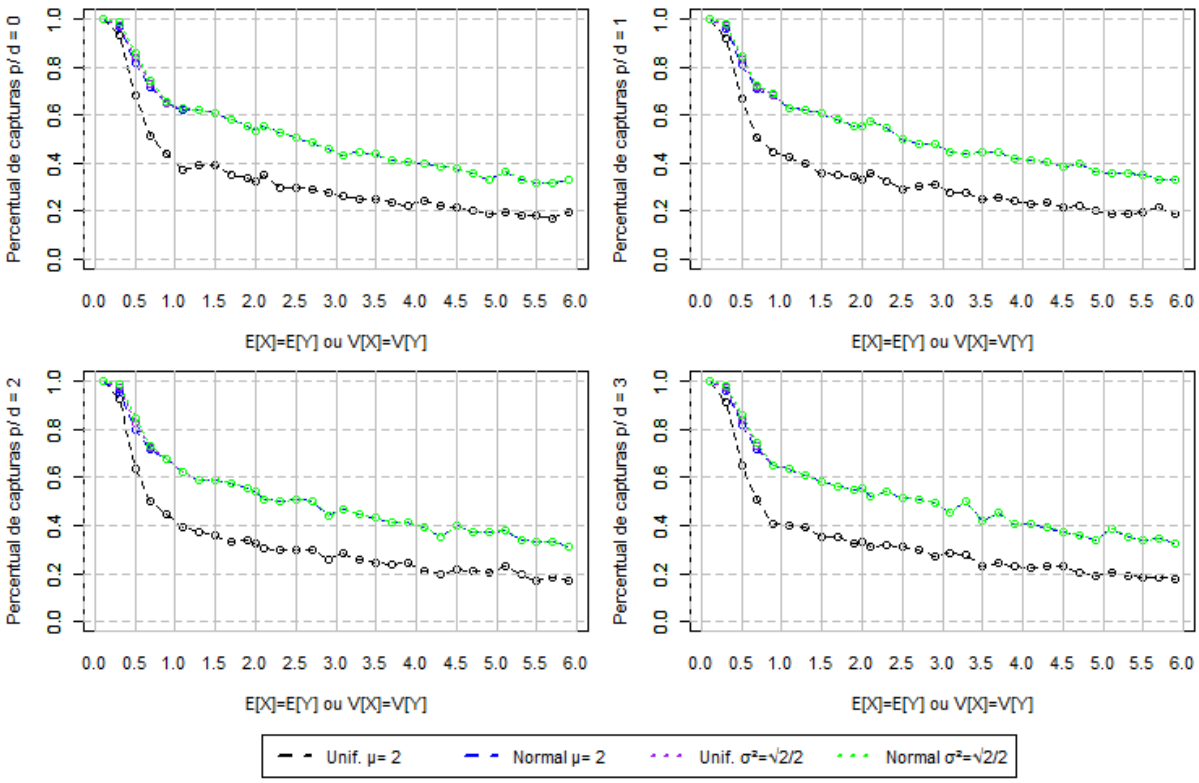


Figura 4.49: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

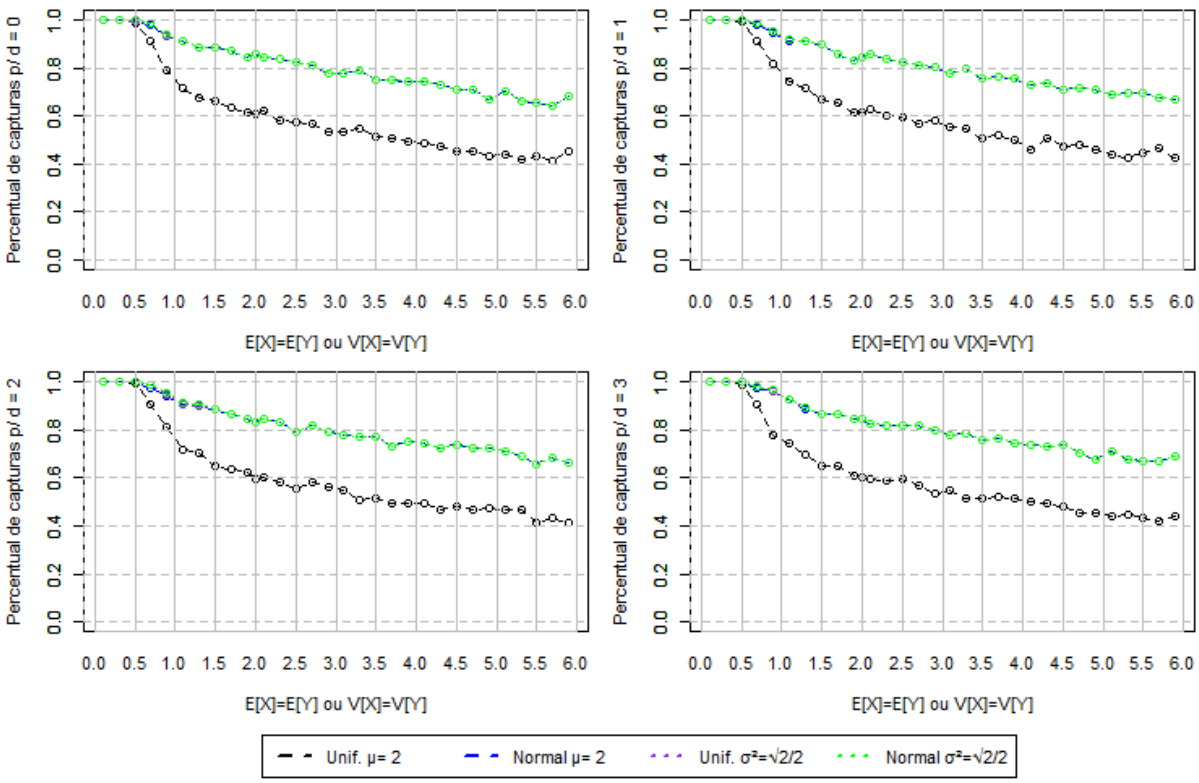
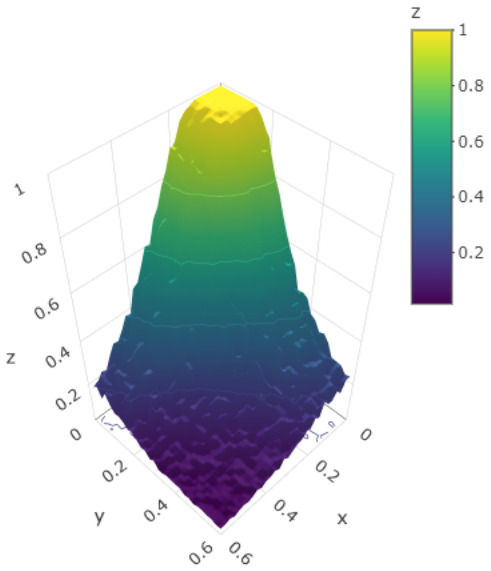


Figura 4.50: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 2$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

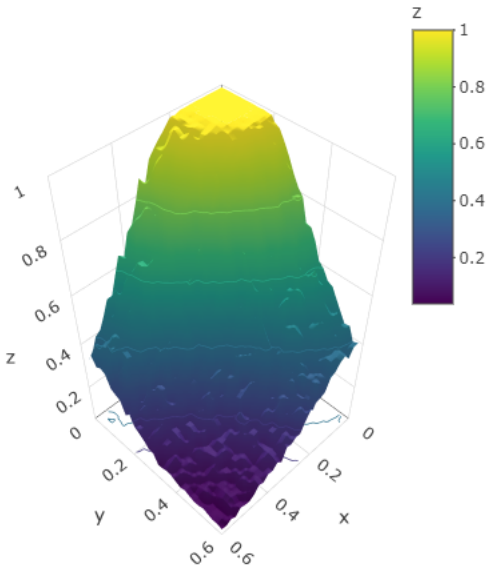
Nas figuras 4.48, 4.49 e 4.50 é possível observar pequena influência da distância inicial, o aumento do raio leva o ponto em que o decaimento se inicia para a direita do gráfico e aumenta o percentual de capturas. A distribuição uniforme com variação da variância apresenta menor taxa de capturas e as demais praticamente se sobrepõem. Os percentuais de captura, no entanto, são expressivamente mais altos que com a variação simultânea do valor esperado e da variância. Podemos concluir que, nesse caso, o modelo apresenta resultados satisfatórios, com taxa da captura superior a 70% para a distribuição normal para $r = 2$ com o aumento do valor esperado.

Superfícies: Casos discreto e contínuo

Assim como na subsubseção 4.1.2, foram realizadas 700 simulações de Monte Carlo com 350 passos cada devido ao esforço computacional necessário para as simulações das superfícies ser maior. O objetivo das simulações das superfícies também é investigar a influência de diferentes distribuições de probabilidade em relação ao percentual de capturas.



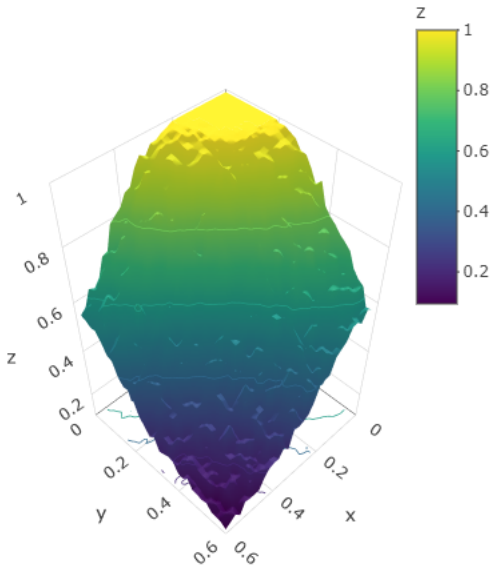
(a) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição uniforme no eixo das abscissas com esperança matemática igual ao desvio padrão, distribuição exponencial no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.



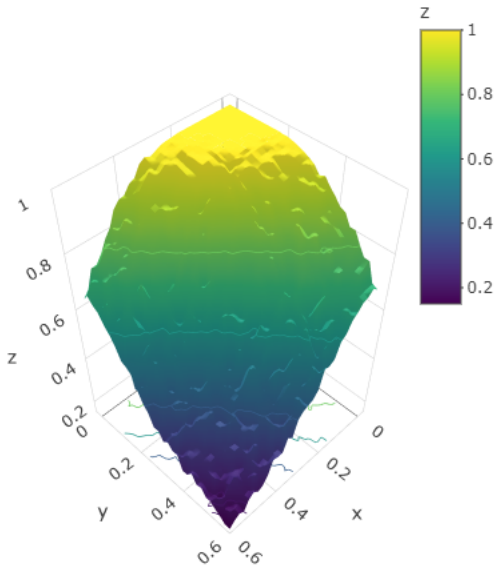
(b) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição normal no eixo das abscissas com esperança matemática igual ao desvio padrão, distribuição exponencial no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.

Figura 4.51: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição exponencial no eixo das ordenadas.

Observamos na figura 4.51b que, associando a distribuição exponencial no eixo das abscissas a distribuição normal no eixo das ordenadas para modelar o tamanho do salto do objeto no respectivo eixo, com valor esperado igual ao desvio padrão, obtemos maior percentual de capturas que com o uso da distribuição uniforme na figura 4.51a, com os mesmos parâmetros, assim como na situação abordada anteriormente na qual o objeto perseguia o ponto, na seção 4.1. As superfícies apresentam pouca assimetria e o percentual de capturas decai rapidamente com o crescimento da taxa de atualização do movimento.



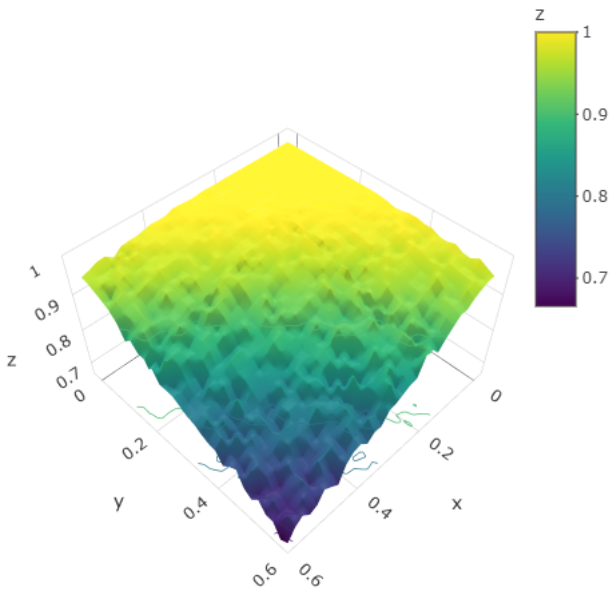
(a) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição uniforme no eixo das abscissas com esperança matemática igual a variância, distribuição Poisson no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.



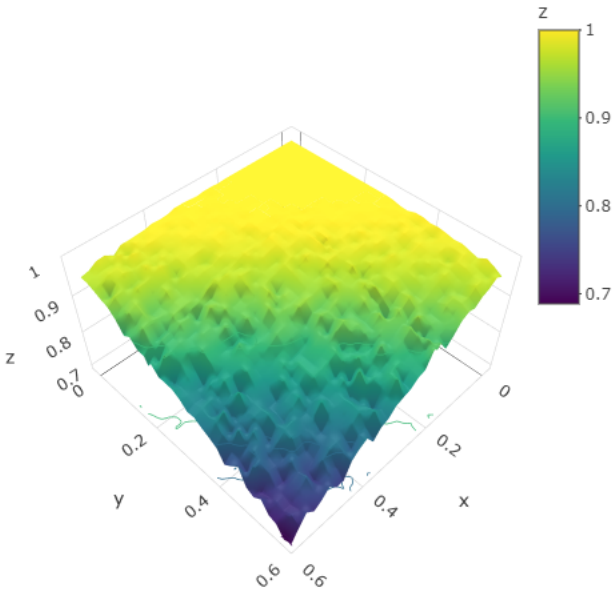
(b) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição normal no eixo das abscissas com esperança matemática igual a variância, distribuição Poisson no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.

Figura 4.52: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição Poisson no eixo das ordenadas.

É possível verificar na figura 4.52a que associando a distribuição Poisson a distribuição normal, com valor esperado igual a variância, obtemos maior percentual de capturas que com a utilização da distribuição uniforme utilizada na superfície da figura 4.52b, com os mesmos parâmetros, assim como nas figuras anteriores e na situação abordada anteriormente na seção 4.1. As superfícies também apresentam pouca assimetria e o percentual de capturas decai rapidamente com o crescimento da taxa de atualização do movimento.



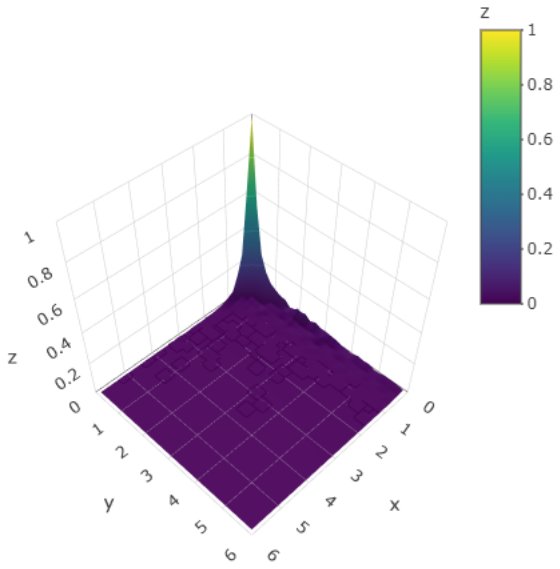
(a) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição uniforme no eixo das abscissas com esperança matemática igual a $0,2$ e variação da variância, distribuição normal com os mesmos parâmetros no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.



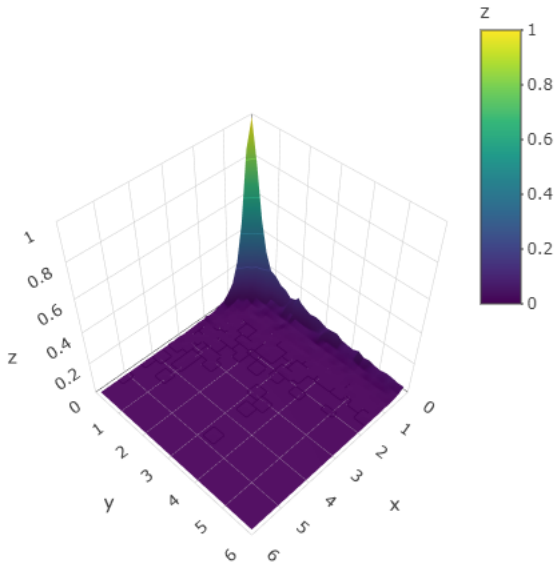
(b) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição uniforme no eixo das abscissas com variância igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e variação do valor esperado, distribuição normal com os mesmos parâmetros no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.

Figura 4.53: Resultados do caso contínuo bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição uniforme no eixo das abscissas e distribuição normal no eixo das ordenadas.

A figura 4.53a, com variação da variância, e a figura 4.53b, com variação do valor esperado, apresentam resultados similares. Ambas se destacam das figuras anteriores por apresentarem maior simetria e percentual de captura praticamente unitário para pequenos valores no eixo das abscissas ou das ordenadas.



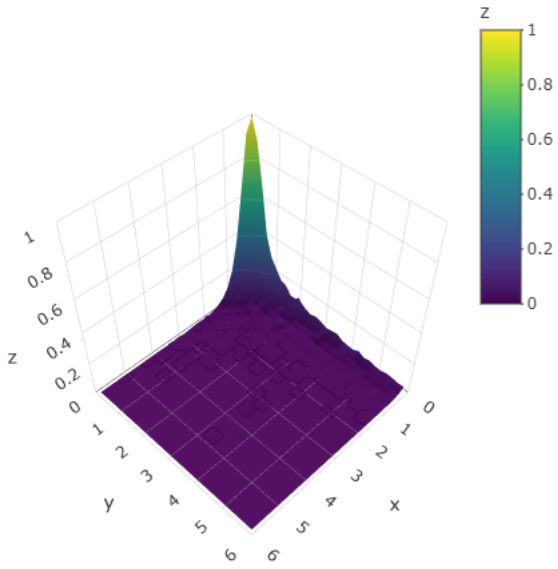
(a) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição uniforme no eixo das abscissas com esperança matemática igual ao desvio padrão, distribuição exponencial no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.



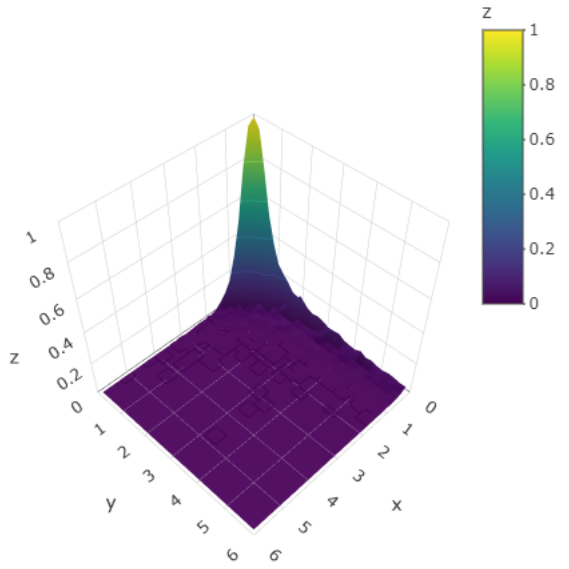
(b) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição normal no eixo das abscissas com esperança matemática igual ao desvio padrão, distribuição exponencial no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.

Figura 4.54: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição exponencial no eixo das ordenadas.

É possível verificar nas figuras 4.54a, utilizando distribuição uniforme com esperança matemática igual ao desvio padrão, e 4.54b, com o uso da distribuição normal com os mesmos parâmetros, que o percentual unitário de capturas só é atingido para valores esperados muito pequenos nos eixos das abscissas e das ordenadas, também é possível verificar uma assimetria à direita com o aumento do valor esperado da distribuição exponencial para uma pequena esperança matemática da distribuição uniforme ou normal. Também observamos maior percentual de capturas com o uso da distribuição normal assim como nas simulações anteriores.



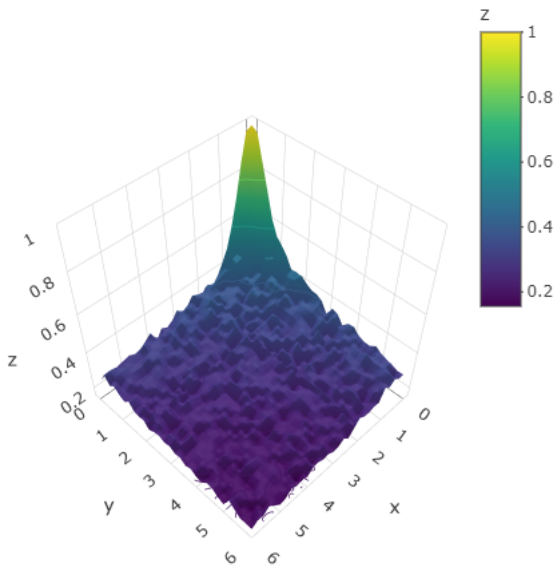
(a) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição uniforme no eixo das abscissas com esperança matemática igual a variância, distribuição Poisson no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.



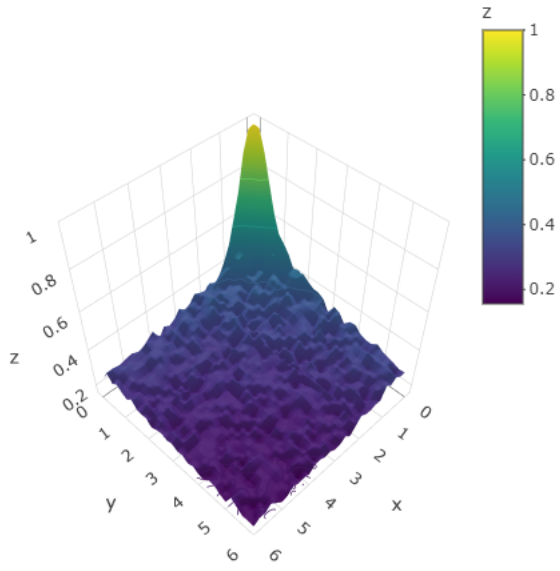
(b) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição normal no eixo das abscissas com esperança matemática igual a variância, distribuição Poisson no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.

Figura 4.55: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição Poisson no eixo das ordenadas.

As figuras 4.55a e 4.55b têm características análogas às duas figuras anteriores, com variações mais acentuadas para pequenos valores da distribuição Poisson.



(a) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição uniforme no eixo das abscissas com esperança matemática igual a 2 e variação da variância, distribuição normal com os mesmos parâmetros no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.



(b) Superfície para o objeto com movimento estocástico com distribuição uniforme no eixo das abscissas com variância igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e variação do valor esperado, distribuição normal com os mesmos parâmetros no eixo das ordenadas e percentual de capturas representado no eixo das cotas.

Figura 4.56: Resultados do caso discreto bidimensional para $r = 1$ e distância inicial nula com o ponto perseguido pelo objeto com movimento aleatório com distribuição uniforme no eixo das abscissas e distribuição normal no eixo das ordenadas.

As figuras 4.56a e 4.56b tem taxa de captura unitária apenas para pequenas taxas de atualização assim como nas figuras anteriores, porém mostram que, variando apenas a variância ou o valor esperado, é possível constatar que ocorrem capturas para todos os valores dos eixos das abscissas e das ordenadas.

4.2.3 Tridimensional: Casos discreto e contínuo

As simulações ocorreram com três graus de liberdade no espaço cartesiano e o ponto que está em perseguição descreve uma trajetória $y = x = z$.

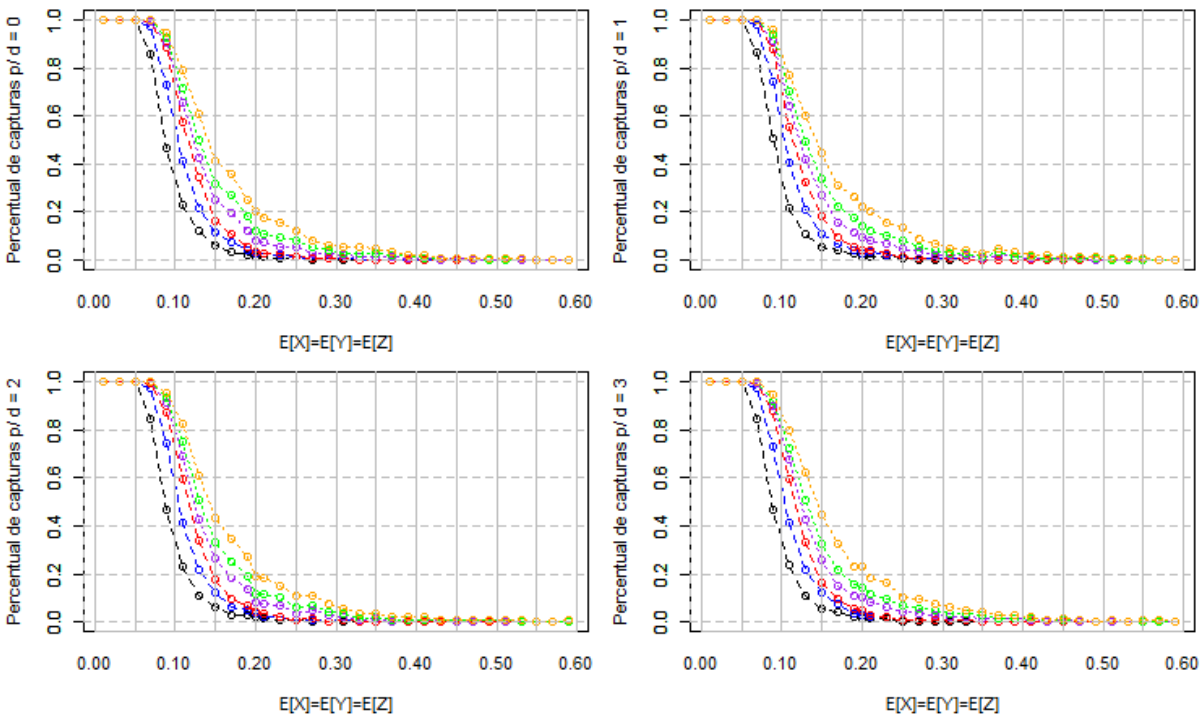


Figura 4.57: Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância.

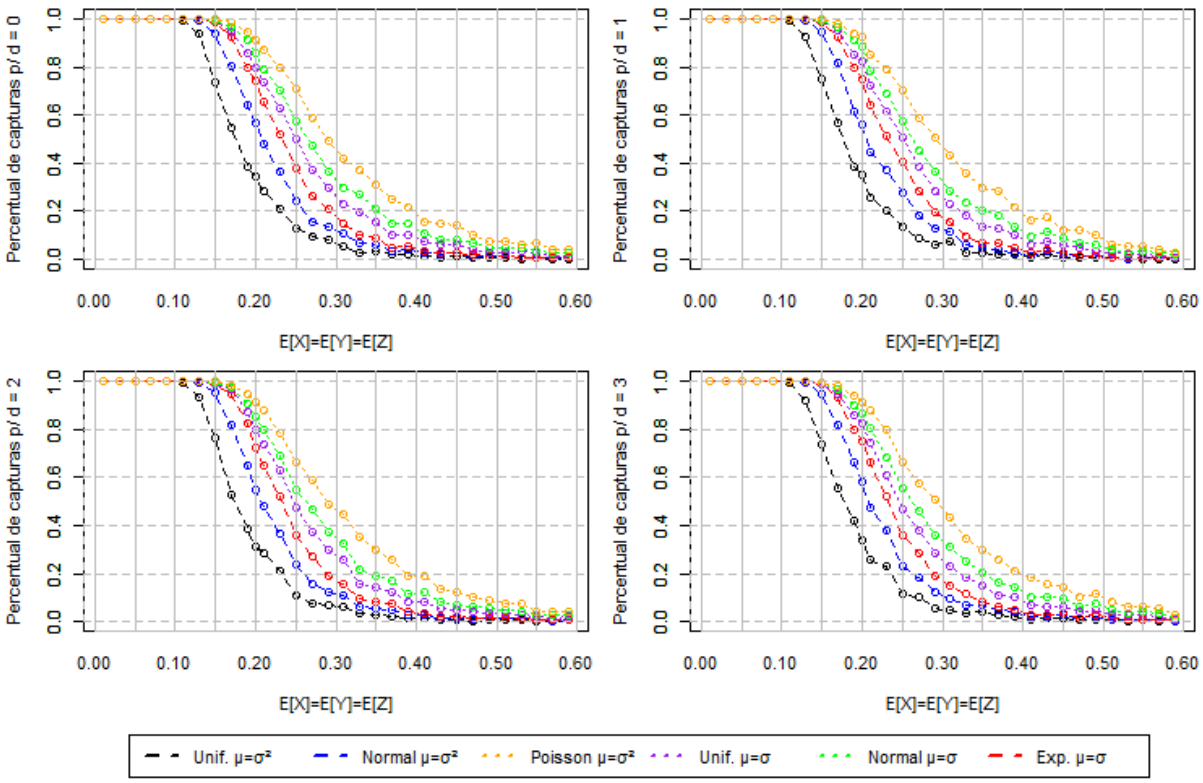


Figura 4.58: Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância.

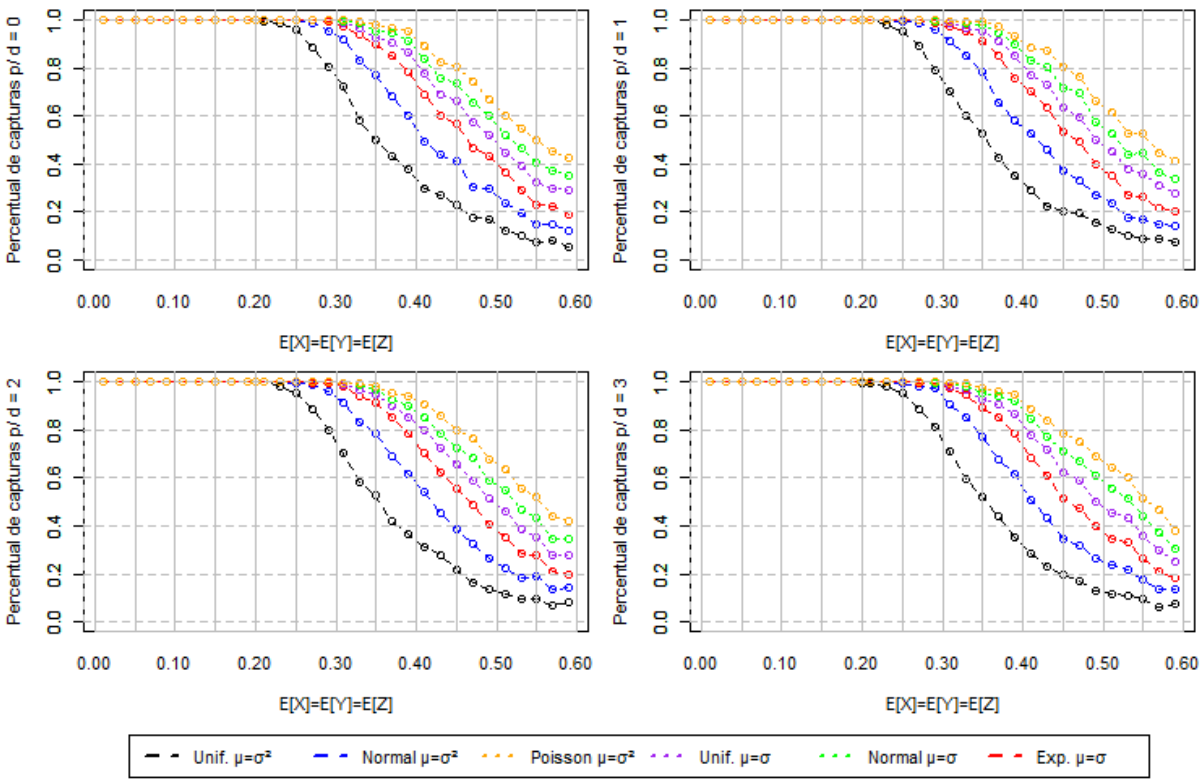


Figura 4.59: Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 2$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação simultânea da esperança matemática e da variância.

Nas figuras 4.57, 4.58 e 4.59 observamos um comportamento similar aos casos uni/bidimensionais com uma queda maior do percentual de capturas devido aos três graus de liberdade. As relações entre os resultados das distribuições são as mesmas observadas anteriormente.

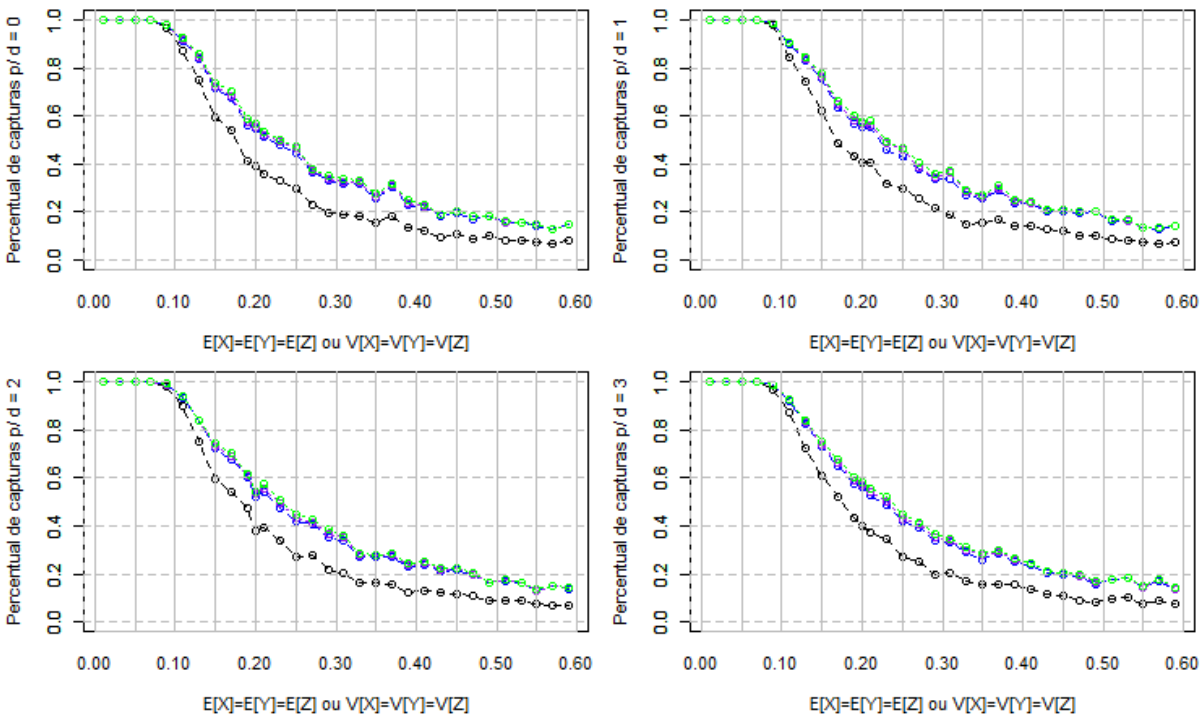


Figura 4.60: Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

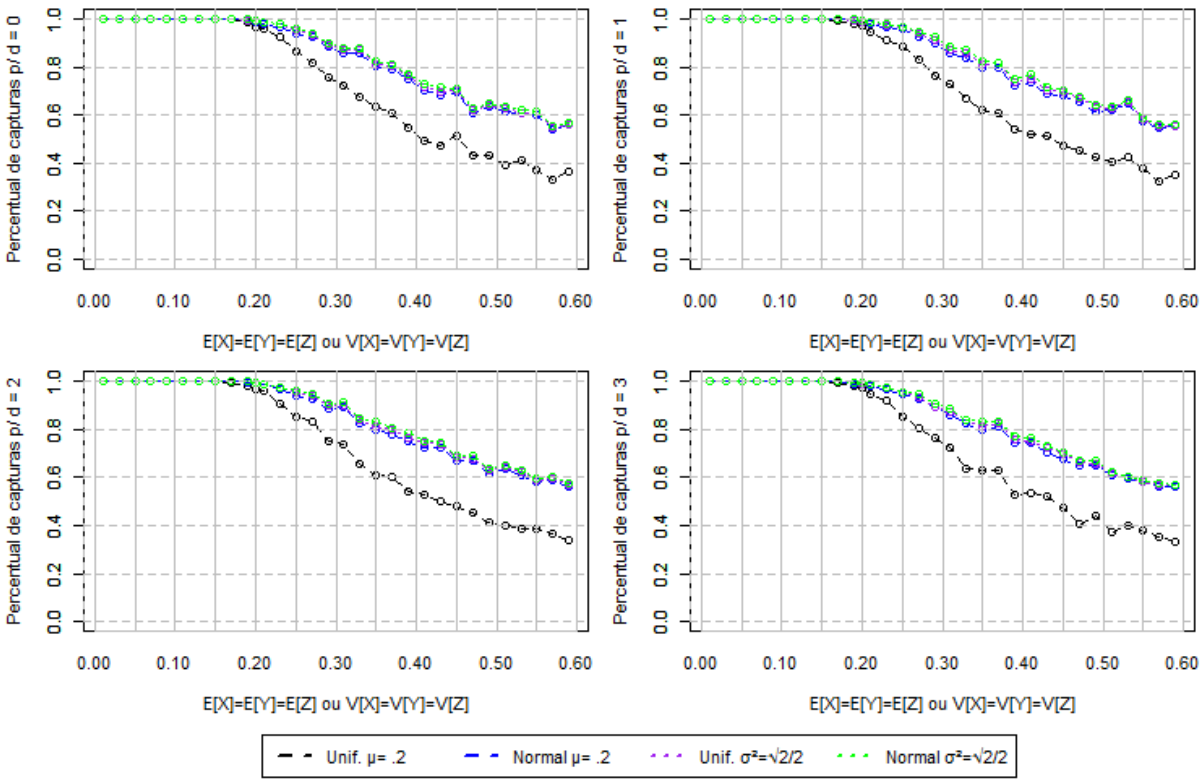


Figura 4.61: Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

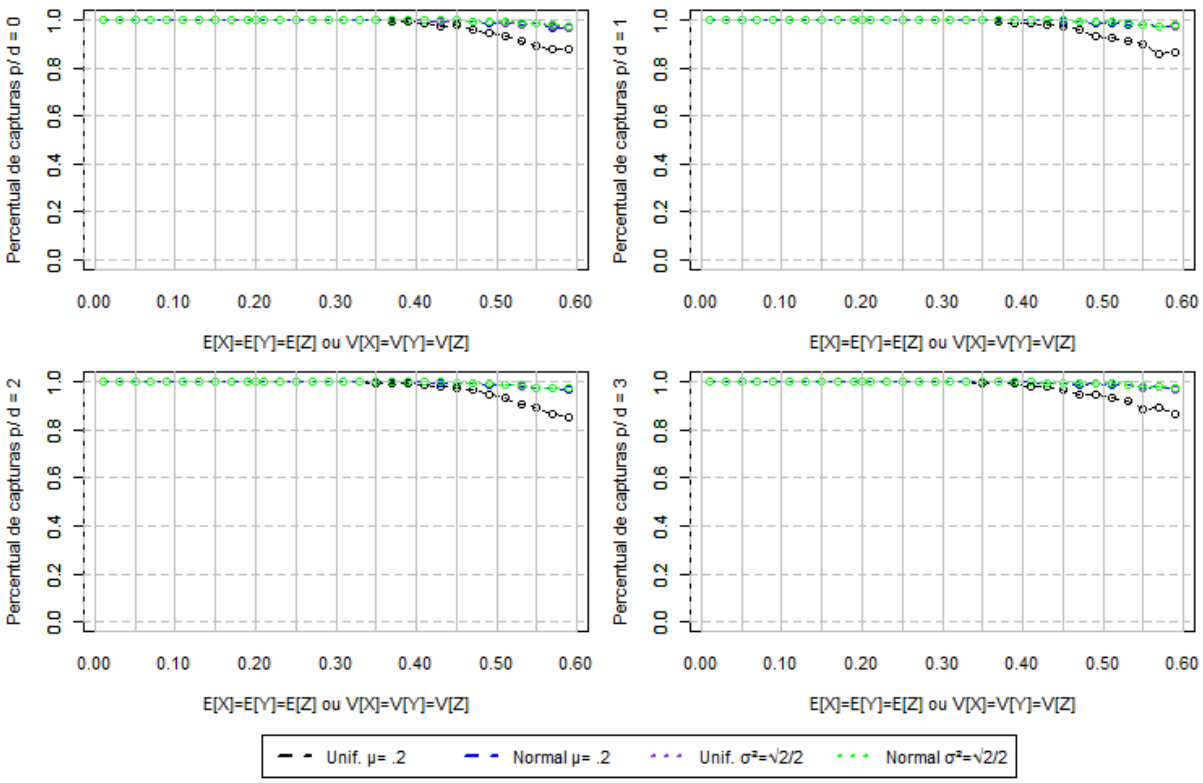


Figura 4.62: Resultados do caso contínuo tridimensional para $r = 2$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

Nas figuras 4.60 e 4.61 observamos que a distribuição uniforme com variação da variância tem menor percentual de capturas. O aumento do raio aumenta o percentual de capturas em todos os casos e desloca o ponto do gráfico em que esse percentual deixa de ser unitário para a direita.

Na figura 4.62 observamos a queda no percentual de capturas para valores mais à direita no eixo das abscissas em relação ao caso bidimensional devido a adição de um grau de liberdade.

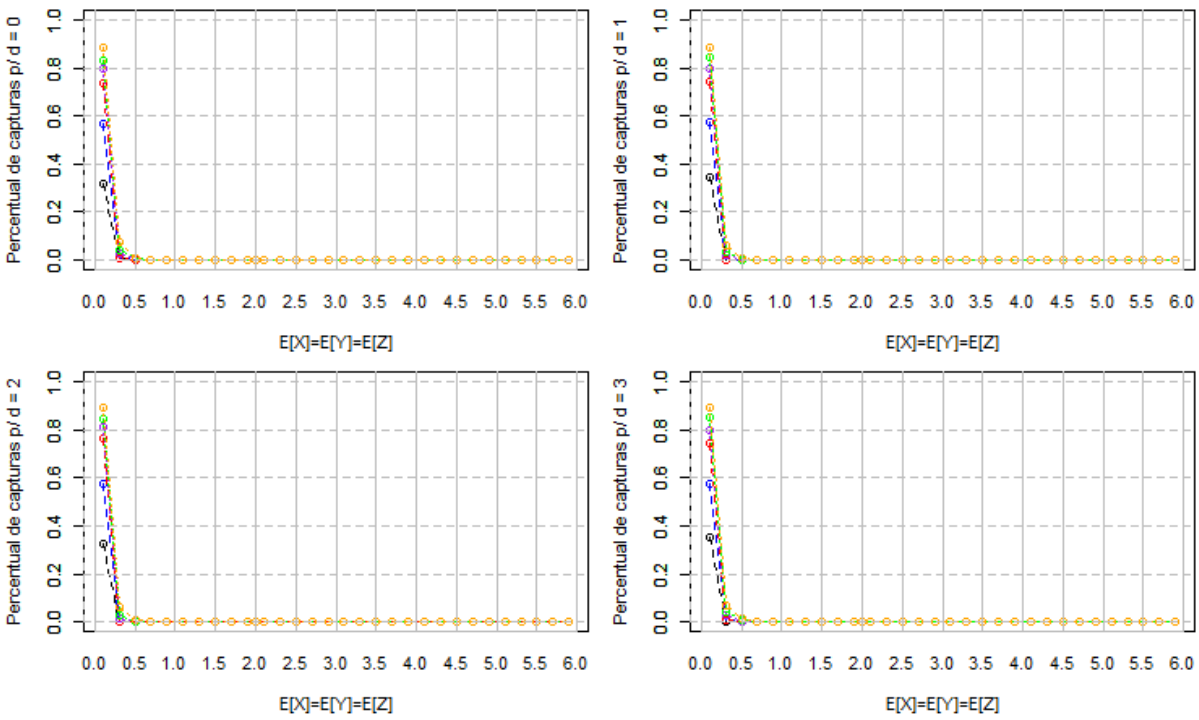


Figura 4.63: Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

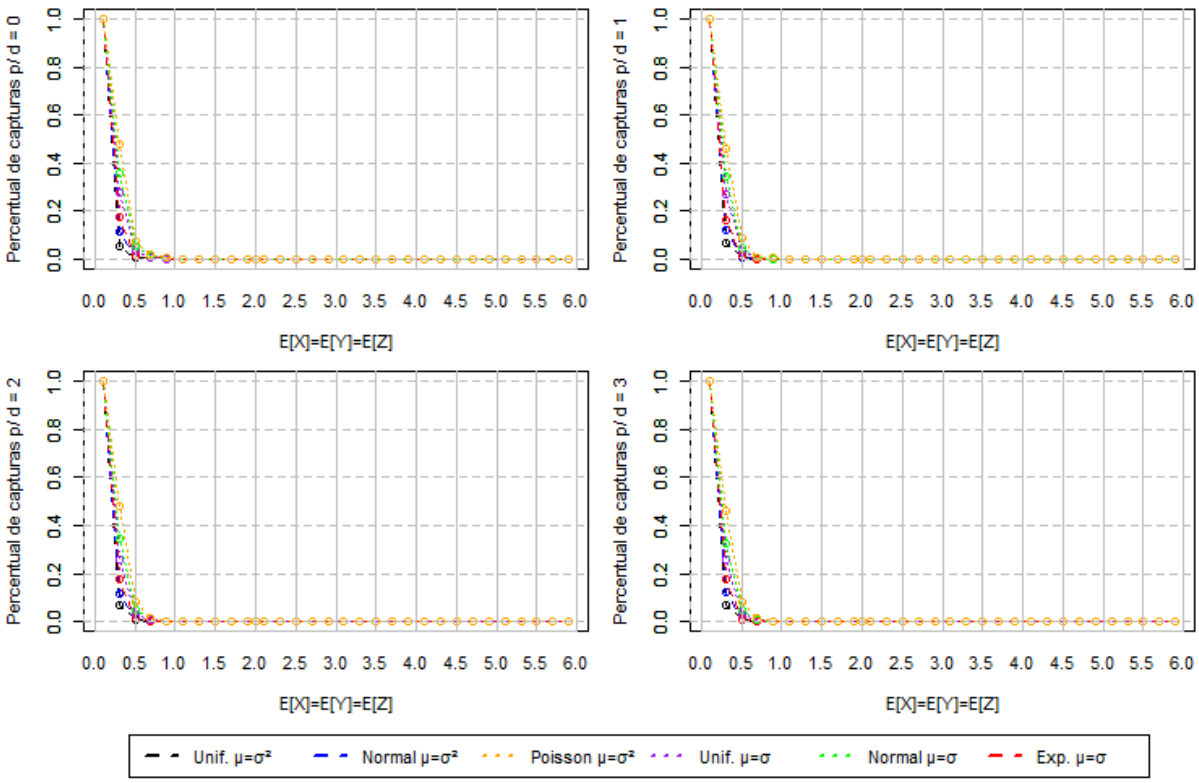


Figura 4.64: Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

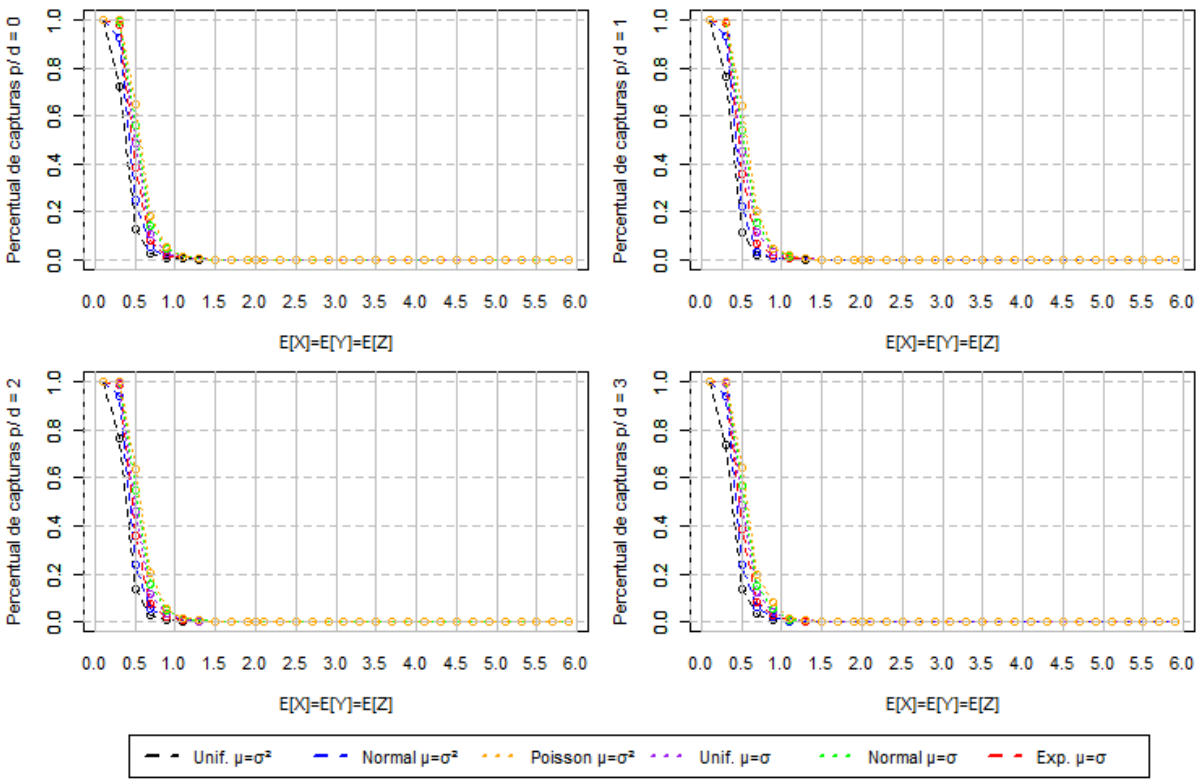


Figura 4.65: Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 2$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

Nas figuras 4.63, 4.64 e 4.65 observamos um comportamento das curvas similar ao caso bidimensional. Elas decaem exponencialmente, o ponto no qual começam a decair e o ponto no qual se sobrepõem, com taxa de captura nula, é deslocado à direita com o aumento do raio. Assim como nos demais casos, há pouca influência da distância inicial.

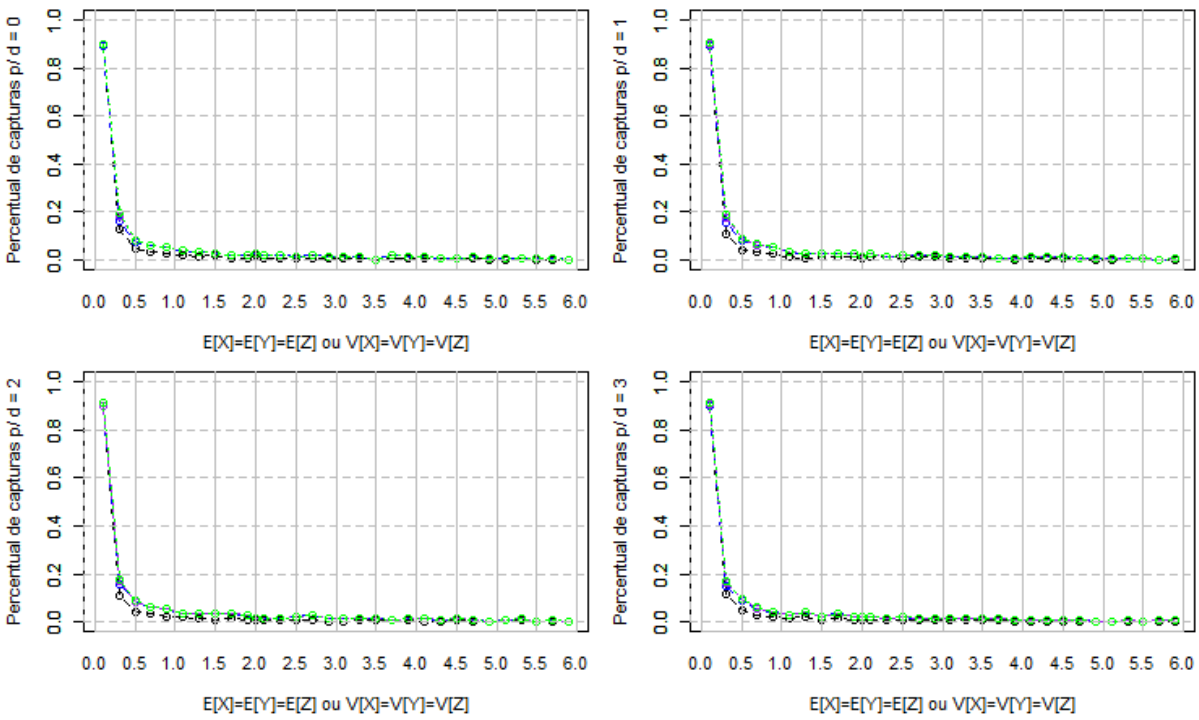


Figura 4.66: Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 0,5$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

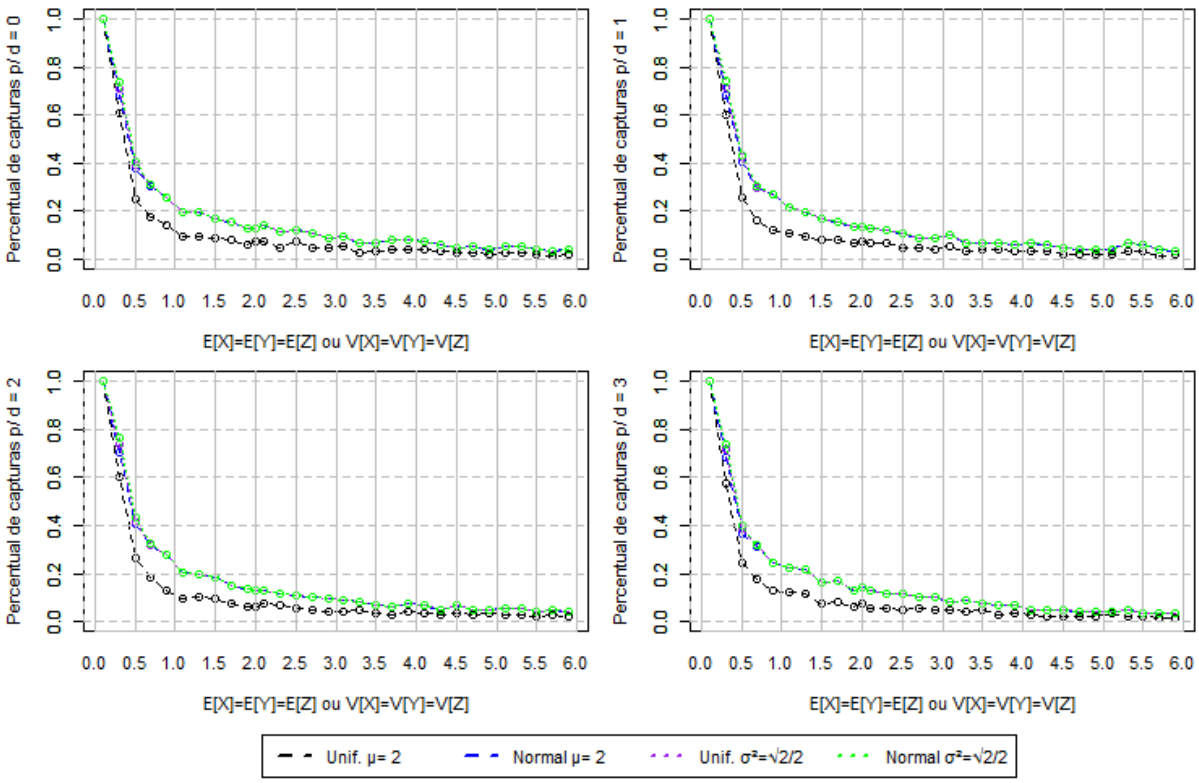


Figura 4.67: Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 1$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

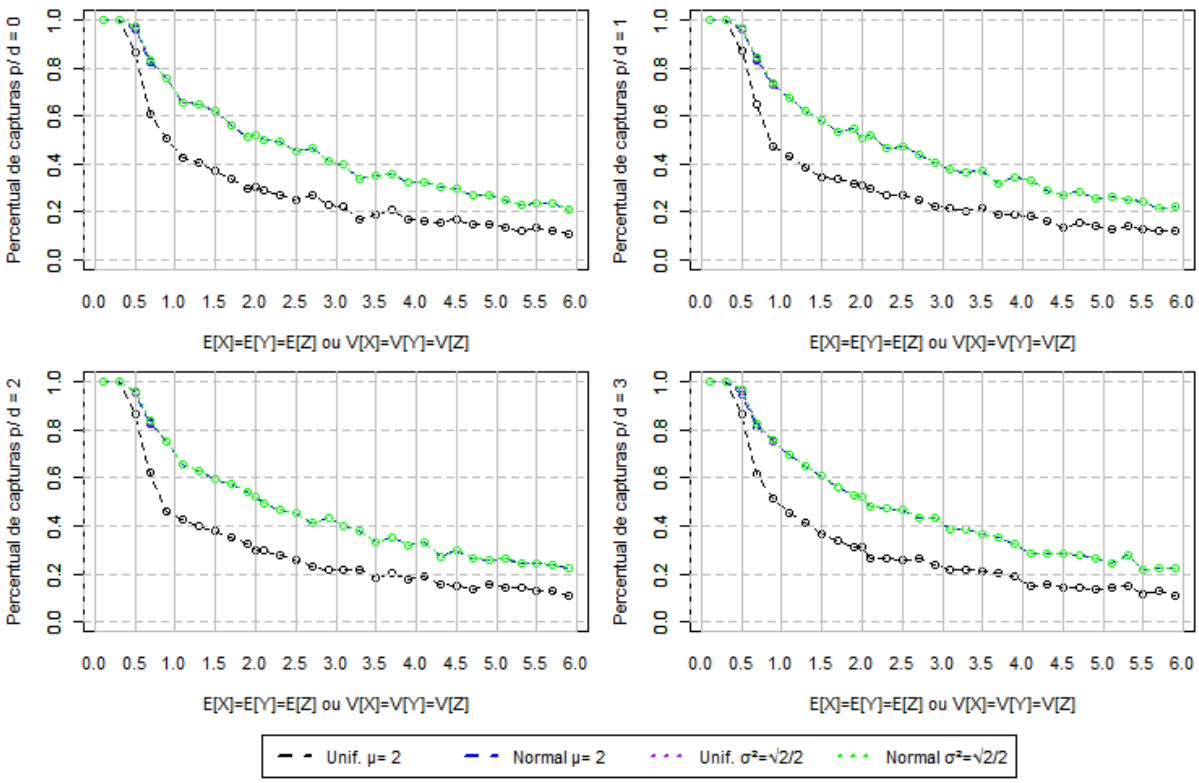


Figura 4.68: Resultados do caso discreto tridimensional para $r = 2$ com o ponto perseguindo objeto com movimento estocástico com variação da esperança matemática e variância fixa ou variação da variância e esperança matemática fixa.

Nas figuras 4.66, 4.67 e 4.68, assim como nas figuras anteriores com essas distribuições, a distribuição uniforme, com variação da variância, apresenta menor taxa de captura que a normal nas mesmas condições e que as distribuições uniforme e normal, com variação do valor esperado. Sendo que essas três últimas praticamente se sobrepõem para todos os raios e distâncias iniciais simulados. O raio aumenta o percentual de capturas e a distância inicial, assim como nas figuras anteriores, apresenta pouca influência no comportamento da variável aleatória, percentual de capturas.

Capítulo 5

Conclusões

Partimos do modelo estudado por GOMES [2], no qual o objeto persegue o ponto, expandimos o número de dimensões e investigamos a influência do raio, da distância inicial e do movimento estocástico do objeto no comportamento da variável aleatória, percentual de capturas. Vimos para os casos bi/tridimensional, nas subsubseções 3.1.2 e 3.1.3 respectivamente, que, quando o tamanho do salto do ponto é igual ao valor esperado do salto do objeto, as inequações 3.18 e 3.50 que definem a captura do objeto englobando o ponto podem ser expressas como a média aritmética dos saltos padronizada elevada ao quadrado e seguem distribuição qui-quadrado. Esse resultado teórico é relevante, pois, nas demais situações, o objeto tende a se distanciar em um número finito de passos quando a esperança matemática possui valor distinto do salto do ponto. Nesses casos, há maior influência da distância inicial e do raio.

As simulações mostraram um comportamento distinto para pequenos valores, o que trouxe a necessidade de estudá-los em um caso à parte, denominado contínuo. Os resultados do modelo, no qual o objeto persegue o ponto, evidenciam que o aumento do raio também aumenta a taxa de captura, enquanto o aumento da distância inicial diminui o percentual de capturas e desloca a curva do gráfico para a direita. Sendo que, a forma das curvas do gráfico muda, tendo resultados mais expressivos para pequenos valores de esperança matemática e/ou variância/desvio padrão quando a distância inicial entre o objeto e o ponto é nula.

Quanto ao movimento estocástico do objeto, o uso da distribuição Poisson para modelar o tamanho do salto do objeto obteve melhores resultados, seguida das distribuições normal, uniforme e exponencial, nessa ordem, com valor esperado igual ao desvio padrão, e das distribuições normal e uniforme, com esperança matemática igual a variância. Quando isolado o efeito do valor esperado e da variância, suas curvas se sobrepuseram, com exceção da distribuição uniforme com variação da variância e esperança matemática fixa.

Quanto às superfícies, as que tiveram o tamanho do salto do objeto modelado pela

distribuição normal, apresentaram maior percentual de capturas que as da distribuição uniforme. Assim como houve maior percentual de capturas com o uso da distribuição Poisson em relação a distribuição exponencial. Observamos uma maior taxa de capturas com a variação do valor esperado com apenas um parâmetro variando, valor esperado ou variância.

Considerando o esboço de um torpedo perseguindo um navio de guerra elaborado por MUNGAN [5] e o conceito de tempo retardado abordado por AZEVEDO e PELLUSO [1] vistos no capítulo 1, redefinimos o problema a partir de uma situação na qual o ponto persegue o objeto que tem movimento estocástico com seus saltos calculados pela média aritmética do tamanho dos saltos do objeto, com exceção do último salto. Esse ponto em perseguição, assim como um torpedo, corrige sua trajetória com base no movimento estocástico do objeto, o navio de guerra, porém sem conhecimento do último movimento dele, uma vez que essa informação, a posição do objeto, se deslocaria em velocidade finita. Para calcular a trajetória do ponto, trabalhamos com a média aritmética como estimador do valor esperado do movimento aleatório do objeto e essa média calculada a cada passo define o tamanho de seu salto.

As simulações do modelo no qual o ponto persegue o objeto mostram que a influência do raio é análoga ao da situação anterior, na qual o objeto persegue o ponto, enquanto o aumento da distância inicial tem pouca influência nos resultados. O percentual de capturas foi máximo para pequenos valores esperados e/ou variância do salto do objeto, o que ocorreria com uma taxa de atualização da posição dele e correção da trajetória do ponto elevada em relação a sua velocidade.

Quanto a distribuição de probabilidade do movimento estocástico do objeto, analogamente ao modelo anterior, a utilização da distribuição Poisson obteve melhores resultados para modelar o tamanho do salto, seguida das distribuições normal, uniforme e exponencial, nessa ordem, com valor esperado igual ao desvio padrão, e das distribuições normal e uniforme, com esperança matemática igual a variância. Quando isolado o efeito do valor esperado e da variância, suas curvas também se sobrepuseram com exceção da distribuição uniforme com variação da variância e esperança matemática fixa.

Quanto às superfícies, as relações entre o percentual de capturas e as distribuições de probabilidade, assim como os parâmetros utilizados, variação do valor esperado e/ou variância, foram análogas a situação em que o objeto persegue o ponto.

São propostas para novos trabalhos, o desenvolvimento de demonstrações matemáticas para os resultados das simulações aqui apresentados e um estimador, para a situação na qual o ponto persegue o objeto, que alcance maior percentual de capturas com o aumento do valor esperado ou variância. Assim como o estudo aprofundado da família de distribuições de probabilidade à qual os resultados aqui obtidos per-

tencem.

Referências Bibliográficas

[1] AZEVEDO, T., PELLUSO, A., 2022, "Space pirates: a pursuit curve problem involving retarded time", *arxiv.org*, (jul.), pp. 1–8.

[2] GOMES, O. S., 2018, *Animação e Otimização*. M.Sc. dissertation, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Paraíba, BR.

[3] GUHA, A., BISWAS, S., 1994, "On Leonardo da Vinci's cat and mouse problem", *Bulletin of Institute of Mathematics Its Applications*, v. 30 (jan.), pp. 12–15.

[4] MEYN, S. P., TWEEDIE, R. L., 1993, *Markov Chains and Stochastic Stability*. 1 ed. New York, Springer-Verlag.

[5] MUNGAN, C. E., 2005, "A classic chase problem solved from a physics perspective", *Eur. J. Phys*, v. 26 (ago.), pp. 985–990.

[6] ROSS, S. M., 1993, *Introduction to Probability Models*. 10 ed. Burlington, MA 01803, USA, Elsevier.

[7] SANTOS, R. J., 2010. "Matrizes, vetores e geometria analítica". Disponível em: <`https://www.ime.unicamp.br/~deleo/MA141/ld01a.pdf`>.