



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA (CCEN)
DEPARTAMENTO DA GRADUAÇÃO EM FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FERNANDO ANTONIO SOARES DE ALMEIDA

**UM ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DA GRAVITAÇÃO NA MEDIÇÃO DO FATOR
GIROMAGNÉTICO DO MÚON.**

JOÃO PESSOA- PB

2024

FERNANDO ANTONIO SOARES DE ALMEIDA

UM ESTUDO SOBRE A INFLUÊNCIA DA GRAVITAÇÃO NA MEDIÇÃO DO FATOR
GIROMAGNÉTICO DO MÚON.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA (CCEN) da Universidade Federal da Paraíba, como requisito para à obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia

JOÃO PESSOA- PB

2024

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

A447e Almeida, Fernando Antonio Soares de.

Um estudo sobre a influência da gravitação na
medição do fator giromagnético do múon / Fernando
Antonio Soares de Almeida. - João Pessoa, 2024.
50 p. : il.

Orientação: Fábio Leal de Melo Dahia.

TCC (Curso de Bacharelado em Física) - UFPB/CCEN.

1. Gravitação. 2. Spin. 3. Precessão - Física. 4.
Relatividade - Física. 5. Fator giromagnético. 6. Múon.
7. Teorias alternativas da gravitação. I. Dahia, Fábio
Leal de Melo. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 53(043.2)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Coordenação dos Cursos de Graduação em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa do Trabalho de
Conclusão de Curso de Bacharelado em Física, do
discente Fernando Antonio Soares de Almeida.

Aos 26 dias do mês de abril do ano de 2024, às 10 h, na sala 201 - DF, realizou-se a Sessão Pública da Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso de Bacharelado em Física, do discente Fernando Antonio Soares de Almeida, sendo a Banca Examinadora constituída pelos docentes Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia (UFPB), orientador e presidente da banca, Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho (UFPB) e Prof. Dr. Paulo J. Ferreira Porfírio da Silva (UFPB). Dando início aos trabalhos, o professor orientador e presidente da banca examinadora comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, concedeu a palavra ao discente para que fizesse a explanação de seu Trabalho de Conclusão de Curso, intitulado “*Um estudo sobre a influência da gravitação na medição do fator giromagnético do múon*”. Concluída a exposição, o discente foi arguido pelos membros presentes da Banca Examinadora. Após as arguições, a Banca, de comum acordo, declarou que o Trabalho apresentado foi aprovado com nota 10,0 E para constar, encerrada a sessão, lavrou-se esta ata que será assinada pelos presentes. João Pessoa, 26 de abril de 2024.

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
UFPB – Orientador

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
UFPB

Prof. Dr. Paulo J. Ferreira Porfírio da Silva
UFPB

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo o estudo da precessão do spin de uma partícula eletricamente carregada girando em um anel de armazenamento magnético. Pretendemos discutir a influência da gravidade na dinâmica desse sistema. Nossa motivação baseia-se nos experimentos recentes, realizados no Fermilab, em que foram detectados incompatibilidades na medida do fator giromagnético do múon em relação às previsões teóricas do modelo padrão. Gostaríamos de investigar se uma teoria modificada da gravitação, como a teoria de dimensões extras, poderia explicar ou amenizar essa discrepância. Para isso, vamos seguir uma abordagem semiclássica para descrever o spin. Inicialmente discutiremos o caso sem a gravitação, ou seja, de uma partícula se movendo sob a ação de um campo eletromagnético em um espaço-tempo de Minkowski. A inclusão da gravitação será feita adaptando-se a equação de movimento para um espaço curvo usando o formalismo de tétradas, que nos permite fazer a transformação entre os referenciais da partícula e do laboratório.

Palavras-chave: gravitação. spin. precessão. relatividade. fator giromagnético. múon. teorias alternativas da gravitação.

ABSTRACT

This work aims to study the spin precession of an electrically charged particle rotating in a magnetic storage ring. We intend to discuss the influence of gravity on the dynamics of this system. Our motivation is based on recent experiments, carried out at Fermilab, in which incompatibilities were detected in the measurement of the muon's gyromagnetic factor in relation to the theoretical predictions of the standard model. We would like to investigate whether a modified theory of gravitation, such as the theory of extra dimensions, could explain or alleviate this discrepancy. To do this, we will follow a semi-classical approach to describing spin. Initially we will discuss the case without gravitation, that is, of a particle moving under the action of an electromagnetic field in a Minkowski spacetime. The inclusion of gravitation will be done by adapting the equation of motion to a curved space using the tetrad formalism, which allows us to make the transformation between the particle and laboratory frames of reference.

Keywords: gravitation. spin. precession. relativity. gyromagnetic ratio. muon. alternative gravitational theories.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Direção de movimento do Múon e do Spin em um anel com $g = 2$ (adaptação da figura encontrada na Scientific American [1]).	8
Figura 2 – Direção do movimento do Múon (seta preta) e do Spin (seta vermelha) durante o movimento no anel com g anômalo e a detecção do pósitron pelo detector (adaptação da figura encontrada na Scientific American [1])	9
Figura 3 – Taxa de pósitrons detectados (adaptação da figura encontrada na Scientific American [1])	10
Figura 4 – Modelo de Dimensão Compacta	15
Figura 5 – Modelo de Dimensão Compacta	15
Figura 6 – Movimento hiperbólico de um observador submetido a uma aceleração constante.	22

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
2	A GRAVIDADE E AS DIMENSÕES EXTRAS	12
2.1	Potencial Gravitacional em n-dimensões	12
2.1.1	<i>Dimensões Extras Não-Compactas</i>	12
2.1.2	<i>Dimensões Extras Compactas</i>	14
3	O ESPAÇO DE MINKOWSKI E A ÁLGEBRA COVARIANTE	17
3.1	Velocidade e aceleração no espaço-tempo	18
3.2	Referencial uniformemente acelerado e o tratamento das grandezas . . .	21
4	A PRECESSÃO DO SPIN EM UM CONTEXTO SEMI-CLÁSSICO . .	27
4.1	A equação de Bargmann-Michel-Telegdi	28
4.2	A frequência de precessão no espaço de Minkowski	31
5	A PRECESSÃO DO SPIN NUM ESPAÇO CURVO	34
5.1	O efeito gravitacional na relação entre o fator (g-2) do múon e a frequên- cia de precessão	36
6	CONCLUSÕES	39
	REFERÊNCIAS	41
7	FUNÇÃO GAMA NO CÁLCULO DE SUPERFÍCIES	42
8	CÁLCULO PARCIAL DA PRECESSÃO DO SPIN UTILIZANDO A EQUA- ÇÃO DE BMT E AS RELAÇÕES ENTRE REFERENCIAIS	44
9	CORREÇÕES DO POTENCIAL GRAVITACIONAL PARA DIMENSÕES EXTRAS DE TAMANHOS DIFERENTES	47

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho tem por objetivo estudar o efeito da gravitação sob a precessão do spin de uma partícula relativística acelerada dentro de um campo magnético. A motivação se deve ao fato de que experimentos recentes no Fermilab com a medida do fator giromagnético do múon revelaram uma incompatibilidade com a previsão teórica do modelo padrão.

Sabemos que uma partícula carregada se movendo sob efeito de um campo magnético uniforme realiza uma trajetória circular com a frequência ciclotrônica $\omega = \frac{eB}{m}$ (para baixas velocidades e utilizando o sistema internacional de unidades). Se essa partícula possui spin, então, devido a este giro intrínseco, ela se comporta como um pequeno ímã. Sendo assim, enquanto a partícula gira, o seu spin também está sujeito a um torque, devido à ação do campo magnético, que provoca a precessão do spin, conhecida como precessão de Larmor.

A frequência de precessão do spin está relacionada à frequência de revolução ciclotrônica e depende do chamado fator giromagnético (g). De fato, as características principais de um pequeno ímã podem ser descritas por meio do momento magnético ($\vec{\mu}$). No caso de uma partícula elementar, seu momento magnético é proporcional ao seu spin. Usualmente a relação entre essas duas grandezas é escrita como

$$\vec{\mu} = g \left(\frac{e}{2m} \right) \vec{S}.$$

Para uma partícula de spin $1/2$, a equação de Dirac prevê que $g = 2$. Nesse caso, a frequência de precessão irá coincidir com a frequência de revolução da partícula.

Acontece que o modelo padrão está baseado na teoria quântica de campos e uma das previsões fundamentais dessa teoria é a de que no vácuo os campos flutuam e que as partículas reais interagem com as partículas virtuais produzidas pelas flutuações quânticas do vácuo.

Em razão disso, o modelo padrão prevê que a precessão do spin será influenciada pelas flutuações do vácuo e que, por isso, o fator giromagnético não será exatamente igual a 2. O efeito dessas flutuações é pequeno e, geralmente, é medido pelo parâmetro $a_\mu = (g - 2)/2$, chamado de fator giromagnético anômalo. Embora seja muito pequeno, é possível calcular esse fator com alto grau de precisão, usando os diagramas de Feynman. Por esse motivo, as medições experimentais de tais fatores servem como um excelente teste para o modelo padrão.

Nas últimas décadas, o ramo da física de partículas tem sido aprimorado com inúmeros experimentos e estudos que validam cada vez mais a teoria do modelo padrão. A medida do fator giromagnético do elétron é um exemplo [2]. Os valores experimental e teórico

coincidem até a décima casa decimal [3]. No entanto o experimento com múons, considerado um dos principais nas últimas décadas, coloca o modelo padrão em conflito com os dados observacionais.

O experimento realizado no Fermilab [4] consiste em injetar feixes de anti-múons polarizados, com 3.1 GeV de energia, no anel de armazenamento de 7.1 m de raio, onde há um campo magnético uniforme de 1.5 T de intensidade.

O múon é uma partícula elementar semelhante ao elétron, porém com uma massa aproximadamente 200 vezes maior. Além disso, essa partícula é instável. Seu tempo de vida médio é de $2.2 \mu s$ no referencial próprio. No principal canal de decaimento, provocado pela interação fraca, o múon decai em um elétron, um neutrino e um anti-neutrino. O anti-múon, usado no experimento do Fermilab, é a anti-partícula do múon e, portanto, tem carga positiva. Ele decai em um pósitron e num par neutrino e anti-neutrino.

Esses anti-múons são produtos do decaimento de píons gerados através de um feixe de prótons arremessados em um anteparo de níquel. O feixe de múons então é acelerado para dentro do anel de armazenamento, onde fica girando sob efeito do campo magnético, como ilustrado na figura 1, até que decaia em um pósitron e num par neutrino e anti-neutrino.

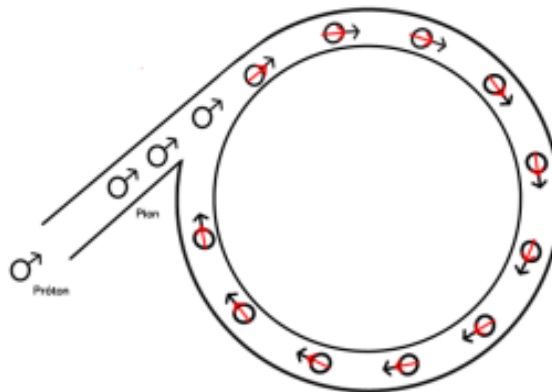


Figura 1 – Direção de movimento do Múon e do Spin em um anel com $g = 2$ (adaptação da figura encontrada na Scientific American [1]).

O pósitron é emitido preferencialmente na mesma direção do spin, medido no referencial próprio da partícula. Por outro lado, quando observado do referencial de laboratório, é esperado que, devido à conservação de energia e momento linear haja uma correlação entre a energia da partícula emitida e a sua direção. Assim, esperamos que se no momento da emissão o spin estiver alinhado com a direção de movimento do múon, o pósitron emitido será mais energético.

Assim, medindo a quantidade de pósitrons emitidos com energia acima de um certo nível, por meio de detectores espalhados pelo interior do anel, é possível medir a taxa de revolução do spin do múon em relação à direção de movimento. A figura 2 ilustra essa situação.

Com base nesses argumentos, é esperado que o número de pósitrons detectados com energia superior a um certo valor E tenha o seguinte comportamento no tempo:

$$N(E) = Ne^{-t/\gamma\tau_\mu} [1 + A \cos(\omega_a t + \varphi)]. \quad (1.1)$$

O fator exponencial é decorrente do decaimento dos múons. No referencial do laboratório, esse decaimento ocorrerá no tempo médio $\gamma\tau_\mu \approx 64.4\mu s$. Além disso, $N(E)$ depende da direção relativa entre o spin e a velocidade da partícula. Com $g \neq 2$, a direção relativa oscila com uma certa frequência ω_a .

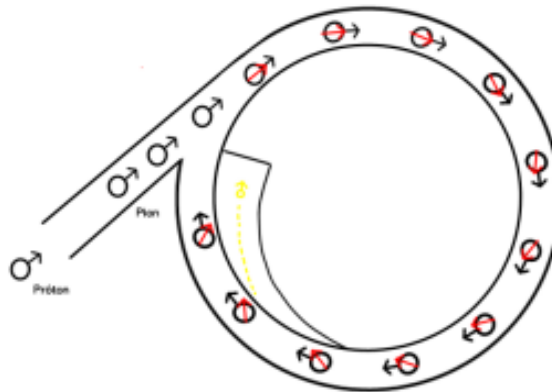


Figura 2 – Direção do movimento do Múon (seta preta) e do Spin (seta vermelha) durante o movimento no anel com g anômalo e a detecção do pósitron pelo detector (adaptação da figura encontrada na Scientific American [1])

A partir dos dados experimentais (ver figura 3) é possível medir o valor de ω_a . Com base na relação teórica entre ω_a e o fator anômalo (que veremos no capítulo 4, no caso sem gravitação, e depois, no capítulo 5, com a gravitação), infere-se o valor de a_μ (fator giromagnético anômalo do múon).

Essa é uma das medições mais precisas que se conhece atualmente. De acordo com os dados do experimento a média dos dados medidos é[5]:

$$a_\mu = 116592059(22) \times 10^{-11} \quad (1.2)$$

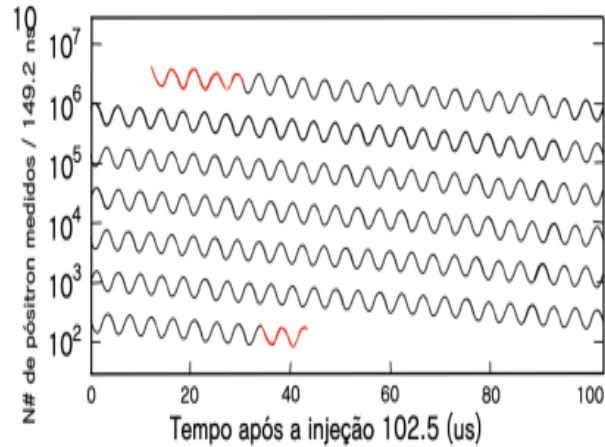


Figura 3 – Taxa de pósitrons detectados (adaptação da figura encontrada na Scientific American [1])

O valor teórico do modelo padrão é de $a_{\mu}^{SM} = 116591810(43) \times 10^{-11}$ [6]. Isso resulta numa diferença de 230×10^{-11} entre os dois valores, mais de três vezes maior que o erro total de 69×10^{-11} .

Diante desse conflito, temos assistido ao surgimento de inúmeras teorias que procuram explicar essa discrepância, especulando sobre interações além do modelo padrão. Mas, até onde sabemos, no momento não há uma solução consensual para esse problema.

Motivados por esse conflito, no capítulo 3, falaremos da gravidade em um contexto mais geral. Sabemos que em escalas muito pequenas, a gravitação usual teria uma contribuição muito pequena a ponto de ser desprezível em comparação com as outras forças. Porém em um cenário em que a gravitação é modificada, como no caso de dimensões extras, a gravidade pode ser amplificada e, portanto, oferecer uma leve contribuição para a precessão do spin.

Além disso, o cenário de dimensões extras é de grande interesse, principalmente com o desenvolvimento da teoria de Branas. Nesse modelo, a nossa realidade estaria disposta em um espaço tridimensional imerso em um espaço multi-dimensional. Esse modelo pode explicar a discrepância entre alguns aspectos da gravidade e das outras forças fundamentais. Para escalas pequenas, a intensidade do campo gravitacional é desprezível em relação à intensidade das demais forças. De acordo com o modelo de branas, isso seria explicado pelo fato que, diferente da matéria, o campo gravitacional se propagaria por todas as dimensões de espaço, incluindo as dimensões extras. Mostraremos que, nessa teoria, a modificação direta nos potenciais poderá ser calculada e com esse potencial podemos investigar o comportamento das partículas.

Ainda no capítulo 3, falaremos brevemente das ferramentas que iremos utilizar para a introdução da gravitação no contexto do experimento de múons. Teremos que utilizar a teoria

relativística para identificar os potenciais gravitacionais modificados, uma vez que a partícula se move com velocidades relativísticas nesse experimento. Começamos analisando o problema no espaço de Minkowski, caso sem gravitação, que servirá como base para os cálculos posteriores quando incluirmos os efeitos de referenciais não-inerciais (uma vez que a partícula sob ação do campo magnético está acelerada) e da própria gravitação terrestre no problema.

No capítulo 4, trataremos então do problema principal do trabalho, seguindo a seguinte metodologia: Primeiro, é necessário ter uma noção básica do problema inicialmente sem a presença gravitacional. Assim, estudaremos a precessão do spin, observando o efeito direto do campo magnético (precessão de Larmor) e também os efeitos do movimento acelerado do múon (precessão de Thomas).

Depois, no capítulo 5, investigaremos os efeitos gravitacionais separadamente. Isto é, estudaremos a precessão do spin de uma partícula que se move em uma geodésica em um espaço-tempo curvo.

E por último, consideramos o caso geral de uma partícula acelerada sob a ação de um campo eletromagnético, também sujeita à influência do campo gravitacional da Terra, ou de outra fonte. Com a equação dinâmica para o spin, obtida a partir dessa análise, poderemos tratar do experimento do Fermilab com o múon. Determinaremos a influência da gravitação sobre a frequência de precessão do spin do múon girando no anel magnético de armazenamento do Fermilab.

2 A GRAVIDADE E AS DIMENSÕES EXTRAS

Na física temos quatro forças fundamentais conhecidas, sendo elas a força forte, força fraca, a força eletromagnética e a força gravitacional. Cada uma dessas forças possuem suas características intrínsecas e fundamentos que as definem.

Com o avanço da física na modernidade, compreendeu-se que três dessas forças conhecidas possuem certas semelhanças que permitem unificá-las em um único formalismo teórico, exceto a gravidade.

A gravidade, grande conhecida de Newton, vem intrigando os físicos pois, em um certo sentido, ela se distingue das outras três forças. Além do mais, ela é a interação mais fraca de todas, sendo superada facilmente por todas as outras em seus domínios de atuação. Essa discrepância é conhecida como o problema da hierarquia.

Existem várias teorias que tentam explicar esse fenômeno e nessa parte da pesquisa vamos estudar as teorias que usam dimensões extras para explicar o motivo da gravidade ser relativamente “fraca”.

No modelo que vamos utilizar nesse trabalho, a matéria e os campos estão presos em uma “membrana” tridimensional mergulhada em um espaço extradimensional. A gravidade seria a única interação capaz de “escapar” para essas dimensões extras, sendo esse o motivo que a torna mais “fraca” em comparação com as outras forças.

2.1 Potencial Gravitacional em n-dimensões

2.1.1 Dimensões Extras Não-Compactas

Iniciamos fazendo uma revisão de gravitação e cálculo de campos.

Classicamente o campo gravitacional \vec{g} satisfaz a equação:

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho(\vec{r}), \quad (2.1)$$

onde ρ é a densidade de massa de algum corpo material.

Integrando a equação em um 3-bola, obtemos:

$$\int_{B_3} \nabla \cdot \vec{g}(\vec{r}) d^3\vec{r} = - \int_{B_3} 4\pi G\rho(\vec{r}) d^3\vec{r}.$$

É possível ver que há como aplicar o teorema da divergência no lado esquerdo, transformando a equação em uma integral sobre a superfície de uma 3-bola, e como ρ é a densidade de massa da 3-bola, temos na direita a massa contida na 3-bola, pois os outros valores são constantes.

Recaímos então numa lei de Gauss para a gravitação:

$$\int_{S_2} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = -4\pi Gm. \quad (2.2)$$

Essa informação é importante, pois como \vec{g} é dependente apenas do raio r , no caso de um sistema com simetria esférica, e estamos integrando em uma superfície em uma raio $r \neq 0$ arbitrário, temos a seguinte relação:

$$\int_{S_2} |g|dA = |g|S_2(r) = |g|4\pi r^2. \quad (2.3)$$

Substituindo 2.3 em 2.2, encontramos:

$$\vec{g}(r) = \frac{-Gm}{r^2} \hat{e}_r. \quad (2.4)$$

Onde \hat{e} é o vetor uniário radial.

Esse resultado pode ser generalizado para um espaço com n dimensões.

Em um contexto de uma n -bola e inspirado pela equação 2.3, vemos que aparecerá um fator $S_{n-1}(r)$, que podemos substituir na equação 2.2. Além disso, a constante gravitacional G será $G^{(n+1)}$. Aqui $n + 1$ é o número total de dimensões do espaço-tempo e n o número total de dimensões espaciais. Desse procedimento, encontramos:

$$\vec{g}(r) = \frac{-4\pi G^{(n+1)}m}{S_{n-1}(r)} \hat{e}_r. \quad (2.5)$$

Podemos calcular expressamente $S_{n-1}(r)$ pela função Gama e outros termos conforme o apêndice 7. Finalmente, encontramos:

$$\vec{g}(r) = \frac{-2\Gamma(\frac{n}{2})G^{(n+1)}m}{\pi^{\frac{n-2}{2}}r^{n-1}} \hat{e}_r. \quad (2.6)$$

Pela teoria de campos, um campo conservativo tem rotacional igual a zero, sendo possível ser representado por um gradiente de uma função escalar. Função escalar essa que no caso do campo gravitacional será chamada de potencial gravitacional:

$$\vec{g}(r) = -\vec{\nabla} \psi(r). \quad (2.7)$$

Entendendo que o campo gravitacional é apenas dependente da coordenada radial, no caso de simetria esférica, o gradiente da função escalar se resume a apenas uma derivada simples da função pelo componente radial. Assim o potencial gravitacional em $n = 3 + \delta$ dimensões espaciais em um espaço-tempo de $n + 1$ é dado por:

$$\psi(r) = \frac{2\Gamma(\frac{3+\delta}{2})}{(1-\delta)\pi^{\frac{\delta+1}{2}}} \frac{G^{(4+\delta)}m}{r^{1+\delta}}. \quad (2.8)$$

Vemos assim que em grandes distâncias, o potencial gravitacional tende a cair muito mais rapidamente do que no modelo sem dimensão extra ($\delta = 0$). Porém, em dimensões extras o potencial tende a crescer muito rapidamente para distâncias muito pequenas.

2.1.2 Dimensões Extras Compactas

Seguindo essa linha de raciocínio, o próximo passo é considerar o caso do potencial em dimensões extras compactas, por exemplo, cuja topologias se assemelham ao formato de um círculo. Considerando uma única dimensão adicional, o espaço se assemelha a um hipercilindro, onde o nosso universo ordinário se encontra na hiper-superfície se estendendo paralelamente ao longo do eixo do cilindro e a dimensão extra corresponde a círculos em torno do eixo central do cilindro, possuindo um tamanho proporcional a um raio de tamanho 'l'.

O interessante desse modelo é o fato de que como a dimensão extra é compacta, devido ao formato de cilindro, as linhas de força não somente se estendem diretamente da fonte até o observador, mas também darão voltas ao redor da dimensão extra. Essa característica pode ser representada como se existissem várias fontes extras atuando sobre a massa teste, formando assim várias fontes parecidas com “imagens”. Isso é semelhante ao que ocorre na ótica. A distância entre todas as fontes imagens será o comprimento de uma circunferência com o raio 'l' (raio da dimensão extra).

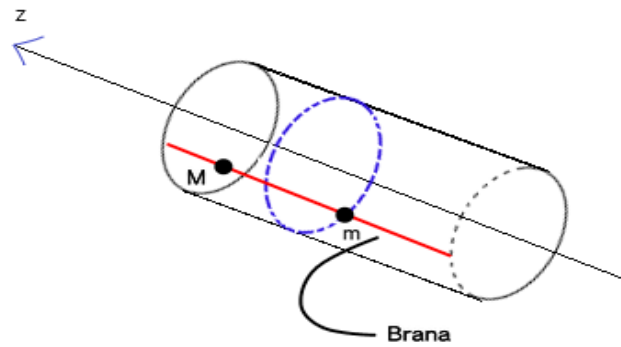


Figura 4 – Modelo de Dimensão Compacta

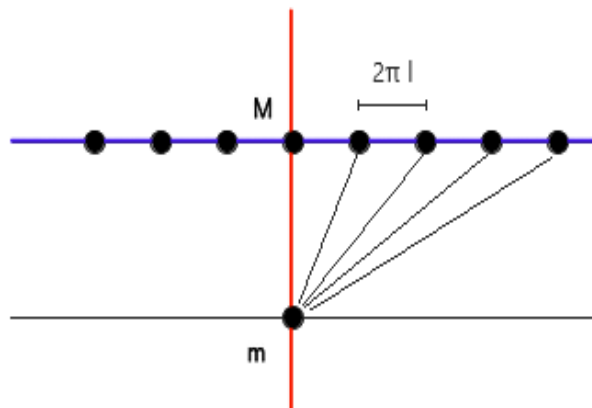


Figura 5 – Modelo de Dimensão Compacta

Quando a distância entre a fonte e a massa de teste for muito maior do que a separação entre as imagens, podemos idealizar a fonte como sendo uma linha contínua infinita, permitindo a aplicação da lei de Gauss da equação 2.2. Chamaremos de R a distância entre a fonte e o observador e L a altura da superfície gaussiana envolvendo as massas virtuais. Aqui, vamos admitir que R é muito maior que l . Segue, então, da lei de Gauss que:

$$\int_S \vec{g}(R) \cdot d\vec{A} = -4\pi G^{(5)} M_{int}. \quad (2.9)$$

Sendo M_{int} a massa total (incluindo as imagens) dentro da gaussiana. Essa massa será igual a $\frac{L}{2\pi l}m$, sendo m a massa da fonte. Como utilizamos uma superfície gaussiana hipercilíndrica, então a sua hiper-área será $4\pi R^2 L$. Logo, encontramos:

$$\vec{g}(R) = -\frac{G^{(5)}m}{2\pi R^2 l} \hat{e}_R. \quad (2.10)$$

Aplicando o mesmo procedimento da equação 2.3, obtemos o seguinte potencial gravitacional:

$$\psi(R) = -\frac{G^{(5)} m}{2\pi l} \frac{1}{R}. \quad (2.11)$$

Se identificarmos $G^{(5)}$ como a constante gravitacional newtoniana $G^{(4)}$, por meio da fórmula

$$G^{(4)} = \frac{G^{(5)}}{2\pi l}, \quad (2.12)$$

verificamos que esse modelo de dimensões extras consegue recuperar o potencial gravitacional para longas distâncias ($R \gg r$). Lembramos novamente que os cálculos foram feitos considerando uma única dimensão extra. Mas ele pode ser generalizado para um número qualquer.

Esse método é importante porque mostra a viabilidade de dimensões extras fenomenológicas da teoria.

Agora, é importante destacar que para curtas distâncias o potencial será amplificado em relação ao seu comportamento usual e isso pode ter influência na dinâmica dos sistemas. Em particular, na precessão do spin, o nosso sistema de interesse nesse estudo.

É importante salientar que, mesmo para longas distâncias, existem correções. É possível mostrar que elas podem ser descritas pela parametrização de Yukawa, esse cálculo pode ser verificado no apêndice 9.

3 O ESPAÇO DE MINKOWSKI E A ÁLGEBRA COVARIANTE

De maneira bastante simplificada podemos dizer que o espaço de Minkowski surge com a união do tempo como coordenada definitiva de espaço. Assim, o espaço tridimensional euclidiano é substituído pelo espaço-tempo de quatro dimensões com a adição da coordenada temporal. Assim, um ponto nesse espaço é localizado pelo chamado 4-vetor. Teríamos a seguinte "passagem":

$$\vec{A} = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow A^\mu = (ct, x_1, x_2, x_3). \quad (3.1)$$

Essa mudança decorre da nova ideia de referencial seguindo a lógica relativística, onde a velocidade da luz no vácuo agora é uma constante, $c \approx 2.998 \times 10^{10} \text{ cm/s}$, sendo invariante, ou seja, independente do referencial.

A relatividade galileana diz que se temos um objeto com velocidade \vec{v}_1 em um referencial X, e esse referencial está em movimento em relação ao referencial Y com velocidade \vec{v}_X , a velocidade do objeto no referencial Y é $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_X$. Esse exemplo pode ser melhor visto como o caso de um observador jogando uma bola para cima dentro de um carro, e outro observador do lado de fora vendo o carro e a bola passar por ele, a velocidade da bola para o observador do lado de fora do carro será a velocidade do carro adicionada a velocidade da bola.

Vamos, agora, considerar um experimento mais sofisticado. Imaginemos duas dimensões de espaço. Um observador em X irá ligar um LASER que emitirá um feixe que percorrerá uma altura h , baterá em um espelho e voltará ao ponto inicial percorrendo uma distância $2h$ em um tempo Δt .

O observador em Y verá o carro percorrer uma distância $v\Delta t'$, na horizontal, e o feixe $c\Delta t'$, na diagonal. Com esse deslocamento, podemos imaginar um triângulo retângulo cujos lados podem ser identificados da seguinte forma:

$$\begin{cases} h = c\Delta t & \text{(cateto oposto)} \\ \Delta x = v\Delta t' & \text{(cateto adjacente)} \\ \Delta h = c\Delta t' & \text{(hipotenusa)} \end{cases} \quad (3.2)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$c^2 (\Delta t')^2 = c^2 (\Delta t)^2 + v^2 (\Delta t')^2. \quad (3.3)$$

E colocando Δt em função de $\Delta t'$:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t. \quad (3.4)$$

Onde $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ que é chamado de fator de Lorentz.

Esse resultado demonstra que ao manter a velocidade da luz constante, o tempo, e consequentemente, o espaço não são mais invariantes diante essas condições.

3.1 Velocidade e aceleração no espaço-tempo

Dado que tempo e espaço não são mais isoladamente invariantes, surge a necessidade de identificar algum tipo de grandeza que seja invariante perante as novas transformações que observamos.

Antes de definirmos essa grandeza que queremos obter, vamos analisar como eventos, pontos no espaço-tempo, podem ser tratados nessa nova álgebra.

Imaginemos dois eventos, o primeiro referente à emissão de um sinal, que se move na velocidade da luz, e é captado no segundo evento. Vamos considerar aqui dois referenciais inerciais (não acelerados). O evento pode ser descrito através das três coordenadas dessa partícula e o tempo em que esse evento ocorreu [7].

Em um referencial X, o sinal foi emitido sob as coordenadas x_1, y_1, z_1 no tempo t_1 e o sinal foi recebido nas coordenadas x_2, y_2, z_2 no tempo t_2 . Para o referencial Y, temos que o sinal foi emitido sob as coordenadas x'_1, y'_1, z'_1 no tempo t'_1 e o sinal foi recebido nas coordenadas x'_2, y'_2, z'_2 no tempo t'_2 .

A distância percorrida pelo sinal pode ser tanto definida através do quadrado da soma das coordenadas como sendo a velocidade da luz multiplicada pelo intervalo do tempo medido. Assim, em cada referencial, teremos:

$$\begin{cases} c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0 \\ c^2 (t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Como a velocidade da luz é independente do referencial, vemos que caso a quantidade $s_{12}^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$ seja zero em um referencial, ela também é zero em todos os outros. Essa quantidade é chamada de intervalo entre eventos.

As transformações entre as coordenadas dos referenciais inerciais são, então, aquelas que preservam o intervalo entre eventos. Elas são conhecidas como as transformações de Lorentz.

Uma transformação particular, chamada de boost, de um observador "parado" de coordenadas (t, x, y, z) para um observador nas coordenadas (t', x', y', z') com velocidade v relativa ao referencial do observador "parado", é dada por:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ x' = \gamma (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (3.6)$$

Considerando dois eventos infinitesimais próximos, podemos escrever o intervalo entre eles da seguinte forma:

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.7)$$

Com:

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz). \quad (3.8)$$

Onde dx^μ são as variações infinitesimais do espaço-tempo, ou 4-deslocamento, e $g_{\mu\nu}$ é chamada de métrica do espaço-tempo. A métrica de Minkowski é a mais simples e acomoda uma espaço plano que admite referenciais inerciais globais. Podemos ter assinaturas $(+, -, -, -)$ ou $(-, +, +, +)$. A assinatura que adotaremos nesse trabalho é a primeira.

Em referenciais inerciais, a métrica de Minkowski em sua forma matricial assume, no sistema de coordenadas cartesianas, a seguinte forma:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Uma grandeza importante para a nossa discussão é o tempo próprio. Imaginamos um observador no referencial X vendo um objeto se movimentar. Esse objeto, por sua vez, está em um referencial Y co-móvel, ou seja, instantaneamente em repouso. Temos, então, o sistema:

$$\begin{cases} dS^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ dS'^2 = c^2 dt'^2 \end{cases} \quad (3.10)$$

Como no referencial Y o objeto está efetivamente em repouso, sua variação espacial é nula. Sabemos que $dS^2 = dS'^2$ independente do referencial, então podemos fazer uma associação entre dt e dt' :

$$\begin{aligned} c^2 dt'^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ dt'^2 &= dt^2 \left(1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Se aplicarmos a ideia de que

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2, \quad ,$$

temos que $dt = \gamma dt'$, onde γ é o fator de Lorentz que definimos anteriormente e v^2 é o modulo da velocidade do objeto no referencial X. Admitimos, então, $dt' = d\tau$ como sendo o tempo próprio do objeto no seu referencial e $dS = cd\tau$.

Com essa base, podemos definir, então, o que seria a 4-velocidade própria.

Anteriormente definimos o 4-deslocamento na equação 3.8, se dividirmos essa quantidade em relação ao tempo próprio, obtemos a 4-velocidade.

$$\begin{aligned} u^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau} \\ u^\mu &= \gamma(c, \vec{v}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vale salientar que é possível expressar as componentes de 4-vetores de duas formas diferentes. Índices em cima denotam tensores contravariantes e índices em baixo covariantes. A relação entre eles é dada a partir da métrica: $A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$.

Usando a métrica de Minkowski, podemos calcular a norma do 4-vetor. No caso da 4-velocidade, encontramos:

$$u_\mu u^\mu = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = c^2. \quad (3.13)$$

Podemos definir a chamada 4-aceleração da seguinte forma:

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}. \quad (3.14)$$

Uma propriedade importante é a ortogonalidade da 4-velocidade com a 4-aceleração:

$$\begin{aligned} a_\mu u^\mu &= \frac{du_\mu}{d\tau} u^\mu \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (u_\mu u^\mu) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (c^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

O formalismo que utilizamos para definir 4-vetores, como a 4-velocidade, pode ser estendido para tensores de ordem mais altas. Ele permite descrever apropriadamente grandezas físicas no espaço-tempo relativístico.

No restante do trabalho, usaremos esse formalismo para descrever algumas grandezas físicas pertinentes ao nosso problema de precessão do spin.

3.2 Referencial uniformemente acelerado e o tratamento das grandezas

Até agora falamos apenas de referenciais inerciais, referenciais estes que não estão sob efeito de nenhuma espécie de aceleração. A introdução da gravitação pode ser formalmente associada à presença de aceleração. Assim, é importante discutir como essa situação mais geral, envolvendo aceleração, é descrita dentro do formalismo covariante.

Imaginemos um espaço-tempo bidimensional, onde $x^\mu = (ct, x)$, $u^\mu = (u^0, u^1)$ e $a^\mu = (a^0, a^1)$. Por definição:

$$u^0 = \frac{cdt}{d\tau}, \quad u^1 = \frac{dx}{d\tau}a^0 = \frac{du^0}{d\tau}, \quad a^1 = \frac{du^1}{d\tau} \quad (3.15)$$

Agora, suponha que uma partícula se move com aceleração constante. Nesse caso, $a^\mu a_\mu = a^2$. Assim, a solução das equações acima são dadas por [8]:

$$\begin{aligned} t(\tau) &= \frac{c}{a} \sinh\left(\frac{a}{c}\tau\right), \\ x(\tau) &= \frac{c^2}{a} \cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Vemos então que o movimento é hiperbólico como na figura 6.

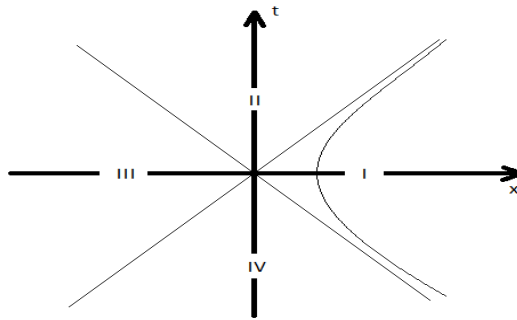


Figura 6 – Movimento hiperbólico de um observador submetido a uma aceleração constante.

Olhando para a figura, vemos três zonas problemáticas. A localização de um evento pode ser feita por meio do envio de um sinal luminoso, porém na zona III nenhum sinal pode ser recebido do observador nem pode ser enviado para o observador. A zona II apenas recebe sinais e a zona IV apenas pode enviar. Nas palavras de Misner [8]: "É difícil ver como um observador possa definir de qualquer forma um sistema de coordenadas que cubram eventos nos quais ele não tenha nenhuma relação causal, em que ele não possa vê-los, e em que ele não possa ser visto". No entanto, na zona I, é possível construir um sistema de coordenadas associado ao referencial acelerado da partícula.

Uma questão importante nessa tarefa é determinar a direção dos eixos temporal e espaciais desse referencial que acompanha a partícula.

Isso pode ser feito através do formalismo de tétradas. A tétrada $(E^{\mu}_{\hat{0}}, E^{\mu}_{\hat{1}})$ é um conjunto de quatro 4-vetores que nos dão localmente as direções dos eixos (t, x, y, z) de um referencial que se move junto com a partícula.

Como esses vetores devem ser ortonormais entre si pela métrica de Minkowski, a primeira condição que eles devem satisfazer é:

$$g_{\mu\nu}E^\mu_{\hat{a}}E^\nu_{\hat{b}} = \eta_{\hat{a}\hat{b}}. \quad (3.17)$$

Onde $\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ é a métrica de Minkowski.

Para determinar $E^\mu_{\hat{a}}$ podemos seguir o seguinte procedimento [9]: Em cada instante, a partícula acelerada estará instantaneamente em repouso em relação a um referencial inercial co-móvel. A ideia é identificar os elementos da tétrada $E^\mu_{\hat{a}}$ com os 4-vetores unitários do referencial inercial co-móvel S' .

Assim, suponha que \vec{v} é a velocidade instantânea da partícula e, portanto, do referencial co-móvel $S'(\vec{v})$, em relação a um certo referencial inercial do laboratório S . A transformação entre as coordenadas dos dois referenciais é dada pela transformação de Lorentz abaixo [9]:

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left(t' + \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}'}{c^2} \right) \\ \vec{x} &= \vec{x}' + (\gamma - 1) \frac{(\vec{x}' \cdot \vec{v})}{v^2} \vec{v} + \gamma \vec{v} t'. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Essa transformação é uma generalização da transformação da equação 3.6. Ela é válida para um vetor velocidade com direção arbitrária.

Fazemos, então, a identificação:

$$\begin{aligned} E^\mu_{\hat{0}} &= \left(\frac{\partial}{\partial t'} \right)_{x'} \cdot \\ E^\mu_{\hat{i}} &= \left(\frac{\partial}{\partial x'^i} \right)_{t', x'^j} \cdot \end{aligned} \quad (3.19)$$

Assim, a partir da relação, $\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, podemos escrever $E^\mu_{\hat{a}}$ na base de vetores unitários do referencial S .

Dessa forma, a tétrada do observador com boost em relação aos observadores associados ao referencial S será:

$$E^\mu_{\hat{0}} = \gamma \left(1, \frac{\vec{v}}{c} \right). \quad (3.20)$$

É interessante destacar que $E^\mu_{\hat{0}} = \frac{1}{c} u^\mu$. Por sua vez, os vetores do tipo espaço são dados por Mashhoon [9]:

$$E^{\mu}_{\hat{i}} = \delta^{\mu}_i + v_i \left(\frac{\gamma}{c}, \frac{(\gamma-1)}{v^2} \vec{v} \right). \quad (3.21)$$

Aqui, podemos pensar em generalizar essa discussão para incluir a gravitação. Vamos seguir o método proposto por Mashhoon [9]. Primeiro, consideremos um espaço cuja métrica tem a forma:

$$ds^2 = V^2 c^2 dt^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.22)$$

onde V é uma função qualquer de \vec{x} . Inicialmente, derivando por $d\tau$, podemos encontrar o novo fator gama:

$$\begin{aligned} c^2 &= c^2 V^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - v^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\ \Gamma &= \frac{dt}{d\tau} = \left(V^2 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Usando o argumento anterior, ou seja, identificando $E^{\mu}_{\hat{0}} = \frac{1}{c^2} u^{\mu}$, podemos verificar que:

$$E^{\mu}_{\hat{0}} = \Gamma \left(1, \frac{\vec{v}}{c} \right). \quad (3.24)$$

Seguindo Mashhoon, é possível verificar que os 3 vetores do tipo espaço abaixo:

$$E^{\mu}_{\hat{i}} = \delta^{\mu}_i + v_i \left(\frac{\Gamma}{Vc}, \frac{(\Gamma V - 1)}{v^2} \vec{v} \right), \quad (3.25)$$

satisfazem à condição de ortonormalidade da equação 3.17. Além disso, quando $V = 1$, eles se reduzem ao caso anterior da equação 3.21.

Agora, para lidarmos com uma métrica mais geral, vamos considerar o elemento de linha:

$$ds^2 = V^2 c^2 dt^2 - \delta_{ij} W^2 dx^i dx^j. \quad (3.26)$$

Podemos pensar [9] que passamos de 3.22 para 3.26 através de uma transformação conforme da métrica anterior $g_{\mu\nu} \rightarrow W^2 g_{\mu\nu}$, e redefinindo $V^2 W^2 \rightarrow V^2$. Esse tipo de transformação não modifica a direção dos 4-vetores. Assim os 4-vetores 3.24 e 3.25 continuam ortogonais entre si. Temos apenas que renormalizá-los usando o fator W . Fazendo isso, temos [9]:

$$E^\mu_{\hat{0}} = \frac{\Gamma}{W} \left(1, \frac{\vec{v}}{c} \right) \quad (3.27)$$

$$E^\mu_{\hat{i}} = \frac{1}{W} \delta^\mu_i + v_i \left(\frac{\Gamma}{cV}, \frac{(\Gamma V - W)}{W^2 v^2} \vec{v} \right), \quad (3.28)$$

onde, por conveniência, redefinirmos $\Gamma = \left(\frac{V^2}{W^2} - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$.

Vale salientar que, com a métrica mais geral, podemos descrever também um espaço curvo como o espaço-tempo de Schwarzschild. Nesse ponto, é importante discutir como tratar as derivadas das grandezas físicas no formalismo covariante.

Temos que a transformação de um 4-vetor de um sistema de coordenadas x'^μ para um sistema de coordenadas x^μ é dado como:

$$A_\mu = \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right) A'_\nu. \quad (3.29)$$

Se tirarmos a diferencial da equação anterior, teremos:

$$dA_\mu = \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right) dA'_\nu + A'_\nu \left(\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \right) dx^\alpha. \quad (3.30)$$

Devido a presença do termo $\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\mu \partial x^\alpha}$, dA_μ não pode ser interpretada como uma grandeza vetorial. Isso aconteceria apenas no caso de um espaço plano e em um sistema de coordenadas cartesianas.

Para lidar com uma situação mais geral, defini-se a derivada covariante que tem a forma:

$$\frac{DA^\mu}{d\tau} = \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha u^\beta. \quad (3.31)$$

Onde:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{g^{\mu\eta}}{2} \left(\frac{\partial g_{\eta\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\eta\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\eta}} \right), \quad (3.32)$$

é o termo de conexão, que é visivelmente nulo para uma métrica de Minkowski expressa em coordenadas cartesianas.

Com essas ferramentas, podemos então partir para o cálculo principal desse trabalho.

4 A PRECESSÃO DO SPIN EM UM CONTEXTO SEMI-CLÁSSICO

Para estudar a precessão do spin do múon no experimento do Fermilab, é conveniente descrever esse fenômeno no contexto covariante, pois os múons se movem com velocidade relativística.

O experimento trata a partícula sendo acelerada sob influência de campos eletromagnéticos externos. Teremos então que aplicar o tratamento covariante dos campos elétricos e magnéticos nesse contexto.

No contexto covariante, os campos podem ser tratados através de um tensor específico chamado de tensor eletromagnético que pode ser definido com base nas equações de Maxwell.

Escrevendo às equações de maxwell em termos do potencial vetor \vec{A} e do potencial escalar Φ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{dt^2} - \nabla^2 \vec{A} &= \mu_0 \vec{J} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{dt^2} - \nabla^2 \Phi &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Onde o campo magnético \vec{B} e o elétrico \vec{E} são expressos como:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi \end{aligned} \quad (4.2)$$

Definindo $\partial^\mu = (\partial/\partial x_0, -\vec{\nabla})$ e $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$, podemos condensar as equações em um único tensor de segunda ordem com $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$.

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Esse tensor é chamado de tensor eletromagnético. As equações de Maxwell podem ser reescritas em termos desse tensor da seguinte forma:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta, \quad (4.4)$$

onde $J^\nu = (c\rho, \vec{J})$.

As equações de maxwell que não envolvem fontes, podem ser escritas de maneira covariante como:

$$\partial_\alpha G^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0, \quad (4.5)$$

onde $G^{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$ é o tensor dual e $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ é o símbolo de Levi-Civita.

A equação de movimento de uma partícula carregada sob a influência desses campos pode ser reescrita também sob o formalismo covariante. Ela tem a seguinte forma:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{m} F^{\mu\nu} u_\nu \quad (4.6)$$

4.1 A equação de Bargmann-Michel-Telegdi

Inicialmente falamos de spin da partícula numa abordagem semiclássica. Como estamos trabalhando com equações covariantes, temos a introdução de um 4-vetor polarização $S^\mu = (S^0, \vec{S})$ que engloba tanto o vetor espacial do spin quanto uma componente temporal S^0 .

Admite-se que no referencial da partícula, a componente temporal $s^0 = 0$, de forma que $S'^\mu = (0, \vec{s})$. Lembrando da transformação de boost de um referencial para outro, a componente temporal se transforma como $s^0 = \gamma(S^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{S})$, onde s^0 é a componente temporal no referencial da partícula e S^0 é componente temporal em um referencial inercial qualquer. Temos assim a relação:

$$S^a u_a = 0. \quad (4.7)$$

Sendo essa válida para qualquer referencial. Em termos das componentes, temos: $S^0 = \vec{\beta} \cdot \vec{S}$. Essas equações são válidas para qualquer referencial inercial, onde $u^a = \gamma c(1, \vec{\beta})$ é a 4-velocidade da partícula com $\beta = v/c$.

No referencial da partícula, apesar de $s^0 = 0$ instantaneamente, se a partícula estiver acelerada, a sua evolução não será necessariamente nula. Derivando a equação 4.7 no tempo próprio, podemos mostrar que:

$$\frac{dS^0}{d\tau} = \vec{S} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{d\tau} + \vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{S}}{d\tau}. \quad (4.8)$$

Como, no referencial da partícula, $\vec{v} = 0$, obtemos:

$$\frac{ds^0}{d\tau} = \vec{s} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{d\tau}.$$

Para encontrar a equação de evolução das componentes espaciais, vamos utilizar como ponto de partida a equação de movimento escrita no referencial comóvel de uma partícula que está sob a ação de um campo magnético externo.

A evolução do spin é governada pela precessão de Larmor [10]. Se \vec{B}' é o campo magnético no referencial próprio da partícula, então:

$$\frac{d\vec{s}}{d\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}'. \quad (4.9)$$

Relacionando o momento angular magnético com o spin $\vec{\mu} = \frac{eg}{2mc}\vec{S}$, temos que a variação do spin dessa partícula é proporcional ao produto vetorial do vetor espacial do spin com o próprio campo magnético:

$$\frac{d\vec{s}}{d\tau} = \frac{eg}{2m}\vec{s} \times \vec{B}'. \quad (4.10)$$

onde \vec{s} é a parte espacial do spin, "e" é a carga da partícula, g é o fator giromagnético, m é a massa em gramas e c é a velocidade da luz em metros por segundo.

As equações tanto de $ds^0/d\tau$ e de $d\vec{s}/d\tau$ são importantes para definirmos uma precessão para esse 4-vetor polarização:

$$\frac{dS'^{\mu}}{d\tau} = \left(\frac{ds^0}{d\tau}, \frac{d\vec{s}}{d\tau} \right) = \left(\frac{1}{c}\vec{s} \cdot \frac{d\vec{u}'}{d\tau}, \frac{eg}{2m}\vec{s} \times \vec{B}' \right). \quad (4.11)$$

Para podermos analisar essa equação 4.11 em outro referencial, é interessante reescrevê-la no formalismo covariante.

Vamos observar a seguinte contração $F'^{\mu\nu}S'_{\nu}$ no referencial da partícula. Escrevendo em termos das componentes, encontramos:

$$F'^{\mu\nu}S'_{\nu} = \left(\frac{\vec{s} \cdot \vec{E}'}{c}, \vec{s} \times \vec{B}' \right). \quad (4.12)$$

Note que $\vec{s} \times \vec{B}'$ coincide com a parte espacial da equação 4.11. Sendo assim, podemos escrever a equação para a precessão em termos de $F'^{\mu\nu} S'_\nu$:

$$\frac{dS'^{\mu}}{d\tau} = \frac{eg}{2m} F'^{\mu\nu} S'_\nu + \left(\frac{1}{c} \vec{s} \cdot \frac{d\vec{u}'}{d\tau} - \frac{eg}{2mc} \vec{s} \cdot \vec{E}', \vec{0} \right) \quad (4.13)$$

Considerando que $\vec{u}' = 0$ no referencial da partícula, e levando em conta que a componente espacial do segundo termo também é nula, somos levados a escrever a equação com a forma:

$$\frac{dS'^{\mu}}{d\tau} = \frac{eg}{2m} F'^{\mu\nu} S'_\nu + ku'^{\mu}, \quad (4.14)$$

onde $k = \frac{1}{c} \vec{s} \cdot \frac{d\vec{u}'}{d\tau} - \frac{eg}{2mc} \vec{s} \cdot \vec{E}'$.

Para encontrar uma forma covariante para esse fator k , podemos tomar a contração de toda a equação 4.14 por u'_μ , e depois isolar o fator k . Fazendo isso, encontramos:

$$u'_\mu \frac{dS'^{\mu}}{d\tau} = \frac{eg}{2m} F'^{\mu\nu} S'_\nu u'_\mu + ku'^{\mu} u'_\mu.$$

Devido a anti-simetria do tensor eletromagnético, e a derivação da relação dada pela equação 4.7, temos respectivamente:

$$\begin{aligned} u'_\mu F'^{\mu\nu} S'_\nu &= -S'_\mu F'^{\mu\nu} u'_\nu \\ \frac{d}{d\tau} (S'^{\mu} u'_\mu) &= S'^{\mu} \frac{du'_\mu}{d\tau} + u'_\mu \frac{dS'^{\mu}}{d\tau}. \end{aligned}$$

Sabemos que o lado esquerdo da equação na segunda linha se anula devido a invariância dada por 4.7. E dado que $u'^{\mu} u'_\nu = c^2$, podemos concluir que:

$$k = \frac{eg}{mc^2} S'_\mu F'^{\mu\nu} u'_\nu - \frac{1}{c^2} S'^{\mu} \frac{du'_\mu}{d\tau}. \quad (4.15)$$

Finalmente, podemos escrever a equação da precessão totalmente através de uma forma covariante que é válida para qualquer referencial inercial:

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = \frac{eg}{2m} \left[F^{\mu\nu} S_\nu + \frac{1}{c^2} (S_\alpha F^{\alpha\beta} u_\beta) u^\mu \right] - \frac{1}{c^2} \left(S_\alpha \frac{du^\alpha}{d\tau} \right) u^\mu. \quad (4.16)$$

O último termo é responsável pela precessão de Thomas que surge para partículas aceleradas.

Se a partícula se move sujeita à apenas ação do campo eletromagnético, temos:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{m} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (4.17)$$

Substituindo em 4.16, encontramos que a dinâmica do spin será determinada pela equação [11]:

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = \frac{e}{m} \left[\frac{g}{2} F^{\mu\nu} S_\nu + \frac{1}{c^2} \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \left(S_\alpha F^{\alpha\beta} u_\beta \right) u^\mu \right]. \quad (4.18)$$

Esta é a equação conhecida como equação de B.M.T. (Bargmann-Michel-Telegdi).

4.2 A frequência de precessão no espaço de Minkowski

Começamos a nossa discussão com a equação 4.10, que é válida no referencial próprio da partícula. A equação 4.18 nos permite analisar a precessão num referencial inercial qualquer. Do ponto de vista prático, isso é importante para discutirmos o nosso problema de interesse em que a múon está girando nos anéis magnéticos do Fermilab. Isso porque podemos exprimir a frequência de precessão em termos dos campos \vec{B} e \vec{E} medidos no laboratório.

Com isso em mente, nossa tarefa agora é escrever a variação da componente espacial da polarização (vetor do spin) explicitamente em termos da velocidade e dos campos medidos no referencial do laboratório. A estratégia adotada aqui é a de achar a componente espacial da polarização no referencial da partícula em termos do referencial de medição (laboratório).

Aplicando um 'boost' para o referencial da partícula, temos:

$$s^0 = \gamma \left(S^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{S} \right) \quad (4.19)$$

e

$$\vec{s} = \vec{S} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \left(\vec{S} \cdot \vec{\beta} \right) \vec{\beta} \quad (4.20)$$

Podemos obter uma relação de $\vec{\beta}$, \vec{S} e \vec{s} fazendo o produto interno da equação acima e observando a relação de $\beta^2 \gamma^2 = (\gamma - 1)(\gamma + 1)$ obtida da própria definição de γ .

Temos então a relação:

$$\vec{S} \cdot \vec{\beta} = \gamma (\vec{s} \cdot \vec{\beta}) \quad (4.21)$$

Que se aplicada em 4.20, temos uma passagem de \vec{S} para \vec{s} :

$$\vec{S} = \vec{s} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\vec{\beta} \cdot \vec{s}) \vec{\beta} \quad (4.22)$$

Derivando a equação 4.20 no tempo próprio, obtemos:

$$\frac{d\vec{s}}{d\tau} = \frac{d\vec{S}}{d\tau} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \vec{\beta} \right) \quad (4.23)$$

O procedimento agora é eliminar $d\vec{S}/d\tau$ usando parte espacial da equação BMT (que é dado em termos dos campos \vec{E} e \vec{B} medidos no laboratório) em 4.16 e eliminar \vec{S} usando a equação 4.22.

Dessa forma, obtemos uma equação da precessão do vetor \vec{s} (o spin medido no referencial próprio da partícula) em termos das grandezas medidas no referencial do laboratório (\vec{E} , \vec{B} e \vec{u}). Esse calculo pode ser visto com um pouco mais de detalhe no apêndice 8.

A equação encontrada é:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{s} \times \vec{\Omega}_s, \quad (4.24)$$

com

$$\vec{\Omega}_s = \frac{e}{m} \left[\left(\frac{g}{2} - 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \vec{B} - \frac{1}{c} \left(\frac{g}{2} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \right) (\vec{\beta} \times \vec{E}) - \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) (\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \vec{\beta} \right]. \quad (4.25)$$

Essa equação é também chamada de equação de Thomas [10] para a precessão do spin, lembrando que γ é o fator de Lorentz, definido como $\sqrt{1-\beta^2}$, \vec{E} e \vec{B} são os campos medidos no laboratório.

Com a equação 4.25 é instrutivo analisar uma situação particular em que $\vec{E} = \vec{0}$ e \vec{B} é ortogonal a velocidade \vec{v} . Esse seria o caso idealizado do experimento. Sob tais condições, a frequência de precessão se reduz a:

$$\vec{\omega}_s = \frac{e}{m} \left(\frac{g}{2} - 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \vec{B}. \quad (4.26)$$

Por sua vez, a frequência de revolução ciclotrônica seria:

$$\vec{\omega}_c = \frac{e}{m} \frac{1}{\gamma} \vec{B}, \quad (4.27)$$

o fator γ vem da correção relativística.

Com essas duas expressões, podemos determinar a frequência relativa $\vec{\omega}_a$

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_s - \vec{\omega}_c, \quad (4.28)$$

que é a grandeza medida com base nos dados experimentais (ver figura 2 e 3).

Usando as expressões acima, encontramos:

$$\vec{\omega}_a = \frac{e}{m} \left(\frac{g-2}{2} \right) \vec{B}. \quad (4.29)$$

Portanto, como esperado, a frequência relativa depende do fator giromagnético anômalo $a_\mu = \frac{g-2}{2}$.

5 A PRECESSÃO DO SPIN NUM ESPAÇO CURVO

A partir de agora, nosso objetivo é estudar as modificações sobre a equação BMT (equação 4.16) ao sairmos de um espaço-tempo de Minkowski para um espaço-tempo curvo, para levarmos em consideração os efeitos do campo gravitacional sobre a precessão do spin.

Inicialmente, vamos considerar a métrica dada pelas seguintes componentes:

$$g_{00} = V^2, \quad (5.1)$$

onde no regime de campo fraco

$$V = 1 + \frac{\phi}{c^2} \quad (5.2)$$

Além disso:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= -W^2 \delta_{ij} \\ W &= 1 - \alpha \frac{\phi}{c^2}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

Aqui $\phi = -\frac{GM}{r}$ é o potencial gravitacional newtoniano. V e W nesse contexto são considerados diferentes pela presença do coeficiente α , que diferencia o potencial newtoniano presente na componente temporal daquele introduzido pela componente espacial no W.

A presença da interação gravitacional agora introduz algumas modificações.

Devido a gravidade, o espaço onde a partícula se move não é mais plano, dessa forma as derivadas nos 4-vetores agora serão derivadas covariantes, com a presença de termos de conexão.

A questão é resolvida simplesmente reescrevendo a equação 4.16 em termos das derivadas covariantes, como determina o princípio da equivalência de Einstein. Assim temos:

$$\frac{DS^\mu}{d\tau} = \frac{eg}{2m} \left[F^{\mu\nu} S_\nu + \frac{1}{c^2} \left(S_\alpha F^{\alpha\beta} u_\beta \right) u^\mu \right] - \frac{1}{c^2} \left(S_\alpha \frac{Du^\alpha}{d\tau} \right) u^\mu, \quad (5.4)$$

com

$$\frac{DS^\mu}{d\tau} = \frac{dS^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu S^\alpha u^\beta \quad (5.5)$$

e

$$\frac{Du^\mu}{d\tau} = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta, \quad (5.6)$$

com $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ sendo os termos das conexões.

Outra questão importante é a relação entre o referencial da partícula e o de laboratório. Na presença da gravitação, essa transformação pode ser obtida com a introdução do formalismo de tétradas. Podemos definir os quatro 4-vetores da tetrada. O primeiro vetor coincide com a 4-velocidade, ou seja, a componente $E^\mu_{\hat{0}} = \frac{1}{c}u^\mu$.

Considerando que

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\Gamma}{W}, \quad (5.7)$$

onde $\Gamma = \left(\frac{V^2}{W^2} - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, e relembrando da equação 3.27, a tetrada pode ser dada por [9]:

$$E^\mu_{\hat{0}} = \frac{\Gamma}{W} \left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right). \quad (5.8)$$

e

$$E^\mu_{\hat{i}} = \frac{1}{W} \delta^\mu_i + v_i \left(\frac{\Gamma}{cV}, \frac{(\Gamma V - W)}{W^2 v^2} \vec{v}\right). \quad (5.9)$$

Se S^μ corresponde as componentes do spin no laboratório, então, da condição dada pela equação 4.7, temos:

$$S^0 = \frac{W^2}{V^2} (\vec{S} \cdot \vec{\beta}). \quad (5.10)$$

Agora, seguindo o procedimento da seção anterior, é importante escrever \vec{s} em função de \vec{S} . Isso pode ser feito com base na relação $s_{\hat{i}} = g_{\mu\nu} E^\mu_{\hat{i}} S^\nu$. Usando 5.8 e 5.9, encontramos:

$$s_{\hat{i}} = W S_i - \frac{W^3}{V} \frac{\Gamma}{V\Gamma + W} (\vec{S} \cdot \vec{\beta}) \beta_i. \quad (5.11)$$

Com as relações 5.10 e 5.11, podemos agora realizar o nosso objetivo de obter a equação de evolução das componentes do spin no referencial da partícula em termos das grandezas medidas no laboratório.

O procedimento é basicamente o mesmo do apêndice 8, porém há a adição de dois novos termos devido à presença das derivadas covariantes.

O resultado obtido pode ser colocado na forma $\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{s} \times \vec{\Omega}$, com $\vec{\Omega}$:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} = \frac{e}{m} \left[VW^2 \left(\frac{g}{2} - 1 + \frac{W}{V\Gamma} \right) \vec{B} - \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \left(\frac{W^4\Gamma}{V\Gamma+W} \right) (\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \vec{\beta} - VW^2 \frac{1}{c} \left(\frac{g}{2} - \frac{V\Gamma}{V\Gamma+W} \right) (\vec{\beta} \times \vec{E}) \right] \\ + c \left(\frac{\Gamma}{V\Gamma+W} \right) (\vec{\beta} \times \vec{\nabla}V) - \frac{c}{W} (\vec{\beta} \times \vec{\nabla}W). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Essa frequência generalizada é válida para V e W quaisquer. É interessante observar que desligando a gravitação, isso é, tomando $V = W = 1$, a equação 5.12 recupera 4.25. Além disso, quando desligamos os campos $\vec{E} = 0$ e $\vec{B} = 0$, obtemos a equação no limite de campo fraco:

$$\vec{\Omega}_M = \frac{3}{2} \frac{\vec{v} \times \vec{g}}{c^2}, \quad (5.13)$$

que coincide com o resultado do Mashhoon [9].

5.1 O efeito gravitacional na relação entre o fator (g-2) do múon e a frequência de precessão

Como dito no começo do trabalho, a forma de medição do fator giromagnético anômalo do múon, $a_\mu = \frac{g-2}{2}$ é feita através do uso da equação da frequência de precessão do spin da partícula em relação à direção do movimento da partícula ($\vec{\omega}_a$). A medição é feita utilizando o número de pósitrons em uma respectiva energia que que surgem do decaimento do múon em relação a polarização do múon (ver equação 1.1).

A relação entre $\vec{\omega}_a$ e a_μ pode ser determinada estudando-se a variação Longitudinal da Polarização, ou seja, derivando-se $\hat{\beta} \cdot \vec{s}$, onde $\hat{\beta} = \frac{\vec{\beta}}{\beta}$ é a direção do movimento da partícula vista no laboratório. Tomando a derivada, encontramos:

$$\frac{d}{dt} (\hat{\beta} \cdot \vec{s}) = \hat{\beta} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} + \frac{1}{\beta} \left[\vec{s} - (\vec{s} \cdot \hat{\beta}) \hat{\beta} \right] \cdot \frac{d\hat{\beta}}{dt}. \quad (5.14)$$

Observamos que $\vec{s}_\perp = \left[\vec{s} - (\vec{s} \cdot \hat{\beta}) \hat{\beta} \right]$ é a componente perpendicular do vetor \vec{s} em relação a direção de movimento.

Além disso, sabendo que

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{s} \times \vec{\Omega},$$

podemos separar $\vec{s} = (\vec{s}_\perp + \vec{s}_\parallel)$, onde \vec{s}_\parallel é a componente do spin paralela à velocidade. Obtemos então:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{s}_\perp \times \vec{\Omega} + \vec{s}_\parallel \times \vec{\Omega}.$$

Como o termo $\hat{\beta} \cdot (\vec{s}_\parallel \times \vec{\Omega}) = 0$, temos:

$$\frac{d}{dt} (\hat{\beta} \cdot \vec{s}) = -\vec{s}_\perp \cdot \left(\hat{\beta} \times \vec{\Omega} - \frac{1}{\beta} \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right). \quad (5.15)$$

Utilizando a equação de movimento em 4.17, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \frac{d\vec{\beta}}{dt} = \frac{e}{mc} & \left[\frac{V^2 W}{\Gamma \beta} \vec{E} + c \frac{W^3}{\Gamma} (\hat{\beta} \times \vec{B}) \right] \\ & - 2c \frac{1}{W \beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{\nabla} W) \vec{\beta} - c \frac{V}{W^2 \beta} \vec{\nabla} V + c \frac{1}{W} \beta \vec{\nabla} W \\ & - \frac{W}{\Gamma \beta} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Gamma}{W} \right) \vec{\beta}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

E utilizando a equação 5.12, encontramos:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} \times \vec{\Omega} = \frac{e}{m} & \left[VW^2 \left(\frac{g}{2} - 1 + \frac{W}{V\Gamma} \right) \hat{\beta} \times \vec{B} - VW^2 \frac{1}{c} \left(\frac{g}{2} - \frac{V\Gamma}{V\Gamma + W} \right) \hat{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{E}) \right] \\ & + c \left(\frac{\Gamma}{V\Gamma + W} \right) \hat{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{\nabla} V) - \frac{c}{W} \hat{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{\nabla} W). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Tomando o produto interno com \vec{s}_\perp , todos os termos na direção de $\vec{\beta}$ se anulam. Assim, juntando as duas equações através de 5.15:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\hat{\beta} \cdot \vec{s}) = -\frac{e}{m} \vec{s}_\perp \cdot & \left[VW^2 \left(\frac{g}{2} - 1 \right) (\hat{\beta} \times \vec{B}) + VW^2 \left(\frac{g\beta}{2} - \frac{V^2}{W^2} \frac{1}{\beta} \right) \vec{E} \right] \\ & - c \frac{1}{W\Gamma\beta} (\vec{s}_\perp \cdot \vec{\nabla} V). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Temos então uma equação específica que relaciona a polarização longitudinal do spin com o fator a_μ do múon.

A equação obtida é geral, no sentido de que não foram introduzidas nenhum tipo de aproximação para as funções V e W . A presença dessas funções nos permite investigar os efeitos gravitacionais sobre a precessão do spin do múon, inclusive em cenários de teorias alternativas da gravitação. Pretendemos fazer essa análise em um trabalho futuro.

6 CONCLUSÕES

Nesse estudo, nosso objetivo foi discutir a influência da interação gravitacional sobre a precessão de uma partícula girando em um anel de armazenamento magnético. Nossa motivação surgiu devido ao experimento realizado no Fermilab no qual foi constatada uma discrepância no fator giromagnético do múon quando comparado com os dados teóricos.

O experimento consiste em injetar feixes de anti-múons polarizados no anel de armazenamento. O anti-múon, no seu canal principal de decaimento, decai em um pósitron e no par neutrino e antineutrino. Os pósitrons são emitidos preferencialmente na direção do spin do múon no seu referencial próprio. Essa característica da interação nuclear fraca, mediadora do decaimento, estabelece uma correlação entre a direção do spin (relativa à direção da velocidade do múon) e a energia da partícula emitida, medida no referencial do laboratório. Essa é uma das medições mais precisas que temos atualmente. A diferença entre o valor obtido da medição e o teórico calculado é três vezes maior que o erro total. Essa diferença é a base motivacional para o estudarmos a influência da gravitação na precessão do spin.

Na verdade, os efeitos gravitacionais sobre esse sistema, previstos pela Teoria da Relatividade Geral, são muito fracos. No entanto, segundo teorias alternativas da gravitação, a interação gravitacional poderia ser amplificada. Isso ocorre, por exemplo, no cenário de dimensões extras, como verificamos no capítulo 2. Diante dessa possibilidade, procuramos investigar os efeitos gravitacionais sobre a precessão do spin num contexto mais geral, ou seja, num espaço-tempo curvo, mas sem adotar uma teoria de gravitação específica.

Com esse propósito, iniciamos nossa discussão analisando a precessão de Larmor do spin da partícula no seu referencial próprio, devido à ação do campo magnético. Vimos que é possível escrever esta equação na forma covariante, que é válida para qualquer referencial inercial. Essa equação é conhecida como a equação BMT. Com ela podemos determinar a frequência de precessão do spin (medido no referencial próprio da partícula) em termos dos campos elétrico e magnético medidos no referencial do laboratório. A partir dessa equação podemos também relacionar a frequência ($\vec{\Omega}_a$) medida no experimento com o fator giromagnético anômalo do múon.

Com a finalidade de investigar os efeitos gravitacionais sobre a precessão do spin, adaptamos a equação BMT, formulada no espaço-tempo de Minkowski, para o espaço-tempo curvo. Isso foi feito aplicando-se o princípio da equivalência de Einstein. Com essa equação podemos estudar a precessão do spin medida no laboratório.

No entanto, para análise dos dados do experimento, é importante estudarmos a precessão do spin no referencial próprio da partícula. A transformação entre o referencial comóvel que acompanha partícula e o referencial do laboratório foi determinada usando-se o formalismo de tétradas.

Com a equação BMT, adaptado ao espaço curvo, e com a tetrada associada ao movimento da partícula, encontramos a equação de evolução do spin (medido em relação às tétradas) em termos dos campos eletromagnético e gravitacional medidos no laboratório. A equação obtida tem um caráter geral, no sentido de que ela é válida para um espaço curvo genérico, isto é, não foi especificado nenhuma teoria da gravitação para a sua dedução. Assim, com esta equação podemos explorar os efeitos fenomenológicos de teorias alternativas da gravitação sobre a precessão do spin. Pretendemos fazer essa análise dos dados experimentais nesse contexto em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

- 1 CARENA, M. The unseen universe. *Scientific American*, SPRINGER ONE NEW YORK PLAZA, SUITE 4600, NEW YORK, NY, UNITED STATES, v. 325, n. 4, p. 56–63, 2021. 5, 8, 9, 10
- 2 FAN, X. et al. Measurement of the electron magnetic moment. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 130, p. 071801, Feb 2023. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.130.071801>>. 7
- 3 CHALUPSKY, J. *A classical approach to the electron g-factor*. 2018. 8
- 4 RIFKI, O. *THE MUON ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT*. Tese (Doutorado) — UNIVERSITY OF OKLAHOMA, 2014. 8
- 5 AGUILLARD, D. P. et al. Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.20 ppm. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 131, p. 161802, Oct 2023. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.131.161802>>. 9
- 6 ALBAHRI, T. et al. Measurement of the anomalous precession frequency of the muon in the fermilab muon $g - 2$ experiment. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 103, p. 072002, Apr 2021. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.072002>>. 10
- 7 LANDAU, L. D. *The classical theory of fields*. [S.l.]: Elsevier, 1975. v. 2. ISBN 0-08-018176-7. 18
- 8 MISNER, C. W.; THORNE, K.; WHEELER, J. *Gravitation*. San Francisco: 2808 WH Freeman, 1973. isbn: 978-0-7167-0344-0. [S.l.: s.n.]. 15 p. 22
- 9 MASHHOON, B.; OBUKHOV, Y. N. Spin precession in inertial and gravitational fields. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 88, p. 064037, Sep 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.064037>>. 23, 24, 25, 35, 36
- 10 JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. [S.l.]: Wiley, 1998. ISBN 978-0-471-30932-1. 29, 32
- 11 BARGMANN, V.; MICHEL, L.; TELEGDI, V. L. Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 2, p. 435–436, May 1959. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.2.435>>. 31

7 FUNÇÃO GAMA NO CÁLCULO DE SUPERFÍCIES

Inicialmente, foi feito um breve estudo da Função Gama, função essa que vai aparecer bastante em alguns dos cálculos seguintes, e de como pode ser obtido o volume de uma n-esfera em qualquer dimensão, resultado importante no estudo da gravidade em dimensões superiores.

A função gama de forma resumida é uma generalização da função fatorial.

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad (7.1)$$

Essa função possui as mesmas propriedades do fatorial, porém ela é definida para todos os complexos com exceção dos inteiros negativos, em especial podemos falar da função gama para o fatorial de números não inteiros.

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \quad (7.2)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (7.3)$$

Para encontrarmos o valor do volume, e conseqüentemente a área de superfície, de uma n-bola iniciamos com uma pequena manipulação matemática. Primeiramente tentamos descobrir qual seria a área de uma Gaussiana $y(x) = e^{-x^2}$, ou seja, integramos a função $y(x)$.

Apesar de que essa integral seja bastante difícil de ser resolvida, se a colocarmos ao quadrado, podemos a converter em uma integral dupla.

$$[f(x)]^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-x^2} dx dx \quad (7.4)$$

A cara da integral dupla é a de uma que pode facilmente ser transformada em uma integral em coordenadas polares. A parte angular é facilmente calculável e fazendo uma simples substituição de variáveis é possível encontrar o resultado da parte radial.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2)} dx_1 dx_2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta \quad (7.5)$$

$$2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{2} du \quad (7.6)$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \quad (7.7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (7.8)$$

O impressionante dessa manipulação se dá através do fato que independente do valor que elevamos a função $f(x)$, seguindo os mesmos passos, obtemos um padrão facilmente observável quando convertemos a integral para a forma polar. Tomaremos aqui um $[f(x)]^n$, sendo n um número inteiro positivo qualquer.

$$\int \dots \int e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n = \int e^{-r^2} r^{(n-1)} dr \int d\Omega_{n-1} \quad (7.9)$$

O padrão observável é o de que dependendo do valor n que utilizamos obtemos uma integral cuja parte angular é peculiar.

Com $n = 2$ temos:

$$\int d\Omega_1 = \int d\theta = 2\pi = S_1 \quad (7.10)$$

E com $n = 3$ temos:

$$\int d\Omega_2 = \int \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi = S_2 \quad (7.11)$$

O resultado é o valor do que chamamos de área de superfície $S_{n-1}(r) = S_{n-1} \cdot r^{n-1}$ de uma n -bola de raio $r = 1$. No caso para o $n = 2$, essa seria a circunferência de um círculo, ou a área de superfície de uma 2-bola. O mesmo padrão acontece para uma 3-bola.

Mais interessante ainda é o fato de que a função gama aparece na parte radial da integral quando se faz a substituição de $r^2 = t$:

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{(n-1)} dr = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \quad (7.12)$$

$$S_{n-1}(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \cdot r^{n-1}}{\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (7.13)$$

Assim temos a área da superfície de uma n -bola de raio r .

8 CÁLCULO PARCIAL DA PRECESSÃO DO SPIN UTILIZANDO A EQUAÇÃO DE BMT E AS RELAÇÕES ENTRE REFERENCIAIS

Relembrando a transformação de uma coordenada S^μ para uma s^μ é dada por:

$$\begin{aligned} s^0 &= \gamma(S^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{S}) \\ \vec{s} &= \vec{S} - \frac{\gamma}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \vec{S})\vec{\beta} \end{aligned} \quad (8.1)$$

E a inversa:

$$\vec{S} = \vec{s} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}(\vec{\beta} \cdot \vec{s})\vec{\beta} \quad (8.2)$$

Levaremos também em consideração as relações:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{d\tau} &= \gamma^3(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) &= \frac{\gamma^3}{(\gamma+1)^2} \vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \\ \frac{\gamma^2 \beta^2}{(\gamma+1)} &= (\gamma-1) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Expandindo os termos espaciais da equação de BMT, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{S}}{d\tau} &= \frac{eg}{2mc} \left[\left(S^0 \frac{\vec{E}}{c} + \vec{S} \times \vec{B} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\gamma S^0 \vec{\beta} \cdot \vec{E} - \gamma \vec{S} \cdot \vec{E} - \gamma c \vec{S} \cdot \vec{\beta} \times \vec{B} \right) \gamma c \vec{\beta} \right] \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \left(S_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} \right) \gamma c \vec{\beta} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Vamos analisar o ultimo termo, lembrando que $d\tau = dt/\gamma$:

$$\begin{aligned} \frac{du^\mu}{d\tau} &= \left(\gamma c \frac{d\gamma}{dt}, \gamma \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \\ &= \left(\gamma c \frac{d\gamma}{dt}, \gamma \vec{v} \frac{d\gamma}{dt} + \gamma^2 \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{du^\mu}{d\tau} &= \left[c \gamma^4 \vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt}, \gamma^2 \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\gamma^4}{c^2} \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \vec{v} \right] \\ &= \gamma^3 \left(\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right) u^\mu + \left(0, \gamma^2 \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (8.6)$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \left(S_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} \right) \gamma c \vec{\beta} &= \frac{1}{c^2} \left(\gamma^3 \left(\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right) u^\mu S_\mu + \left(0, \gamma^2 \frac{d\vec{v}}{dt} \right) S_\mu \right) \gamma c \vec{\beta} \\ \frac{1}{c^2} \left(S_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} \right) \gamma c \vec{\beta} &= -\gamma^3 \left(\vec{s} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right) \vec{\beta} \end{aligned} \quad (8.7)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{S}}{d\tau} &= \frac{eg}{2mc} \left[\left(\frac{1}{c} S^0 \vec{E} + \vec{s} \times \vec{B} \right) + \gamma^2 \left(\frac{1}{c} S^0 \vec{\beta} \cdot \vec{E} - \frac{1}{c} \vec{s} \cdot \vec{E} - \vec{s} \cdot \vec{\beta} \times \vec{B} \right) \vec{\beta} \right] \\ &\quad + \gamma^3 \left(\vec{s} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right) \vec{\beta} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Vamos adicionar o termo $\vec{\beta}$ a expressão acima para usarmos mais a frente.

$$\begin{aligned} \vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{S}}{d\tau} &= \frac{eg}{2mc} \left[\left(\frac{1}{c} S^0 \vec{\beta} \cdot \vec{E} - \vec{s} \cdot \vec{\beta} \times \vec{B} \right) + \gamma^2 \beta^2 \left(\frac{1}{c} S^0 \vec{\beta} \cdot \vec{E} - \frac{1}{c} \vec{s} \cdot \vec{E} - \vec{s} \cdot \vec{\beta} \times \vec{B} \right) \right] \\ &\quad + \gamma^3 \beta^2 \left(\vec{s} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (8.9)$$

E em termos de dt :

$$\begin{aligned} \vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} &= \frac{eg}{2\gamma mc} \left[\left(\frac{1}{c} S^0 \vec{\beta} \cdot \vec{E} - \vec{s} \cdot \vec{\beta} \times \vec{B} \right) + \gamma^2 \beta^2 \left(\frac{1}{c} S^0 \vec{\beta} \cdot \vec{E} - \frac{1}{c} \vec{s} \cdot \vec{E} - \vec{s} \cdot \vec{\beta} \times \vec{B} \right) \right] \\ &\quad + \gamma^2 \beta^2 \left(\vec{s} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (8.10)$$

Vamos olhar agora para a transformação $\vec{s} = \vec{S} - \frac{\gamma}{\gamma+1} (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \vec{\beta}$:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{S}}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \vec{\beta} \right) \quad (8.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}}{dt} &= \frac{d\vec{S}}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \vec{\beta} - \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \left(\frac{d\vec{\beta}}{dt} \cdot \vec{S} \right) \vec{\beta} - \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \left(\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} \right) \vec{\beta} \\ &\quad - \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \frac{d\vec{\beta}}{dt} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Sabemos que $S^0 = \gamma \vec{\beta} \cdot \vec{s}$ e qual o resultado para a segunda derivada do lado direito.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{S}}{dt} - \frac{\gamma^3}{(\gamma+1)^2} \left(\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right) (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \vec{\beta} - \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \left(\frac{d\vec{\beta}}{dt} \cdot \vec{S} \right) \vec{\beta} \\ - \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \left(\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} \right) \vec{\beta} - \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \frac{d\vec{\beta}}{dt} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Temos agora que substituir os termos adequados. O primeiro termo é a componente espacial da equação de BMT, que já encontramos e o terceiro termo é encontrado com base nessa mesma equação.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}}{dt} = & \frac{eg}{2\gamma mc} \left[\left(\frac{1}{c} S^0 \vec{E} + \vec{S} \times \vec{B} \right) + \gamma^2 \left(\frac{1}{c} S^0 \vec{\beta} \cdot \vec{E} - \frac{1}{c} \vec{S} \cdot \vec{E} - \vec{S} \cdot \vec{\beta} \times \vec{B} \right) \vec{\beta} \right] + \gamma^2 \left(\vec{S} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right) \vec{\beta} \\ & - \frac{eg}{2\gamma mc} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \left[\left(\frac{1}{c} S^0 \vec{\beta} \cdot \vec{E} - \vec{S} \cdot \vec{\beta} \times \vec{B} \right) + \gamma^2 \beta^2 \left(\frac{1}{c} S^0 \vec{\beta} \cdot \vec{E} - \frac{1}{c} \vec{S} \cdot \vec{E} - \vec{S} \cdot \vec{\beta} \times \vec{B} \right) \right] \vec{\beta} \\ & - \gamma^2 \beta^2 \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \left(\vec{S} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right) \vec{\beta} - \frac{\gamma^3}{(\gamma+1)^2} \left(\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right) (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \vec{\beta} - \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \left(\frac{d\vec{\beta}}{dt} \cdot \vec{S} \right) \vec{\beta} \\ & - \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) (\vec{\beta} \cdot \vec{S}) \frac{d\vec{\beta}}{dt} \end{aligned} \quad (8.14)$$

O resto dos cálculos consistem em substituir todos os \vec{S} por \vec{s} utilizando as relações que encontramos anteriormente, adicionar os termos e obter o resultado.

O resultado acaba se tornando uma equação que será:

$$\frac{d\vec{s}}{d\tau} = \vec{s} \times \vec{\Omega} \quad (8.15)$$

9 CORREÇÕES DO POTENCIAL GRAVITACIONAL PARA DIMENSÕES EXTRAS DE TAMANHOS DIFERENTES

Como os cálculos até então foram feitos considerando cada dimensão extra possuindo o mesmo tamanho, é importante avaliar como seria o potencial sendo avaliado para dimensões extras com tamanhos diferentes.

Usando o modelo anterior, o potencial exato pode ser achado fazendo a soma de todos os potenciais produzidos com cada massa imagem. Utilizaremos o somatório de Poisson.

O potencial seria do tipo:

$$\psi^{(\delta+4)}(\vec{r}) = - \frac{G^{(4+\delta)}M}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{(1+\delta)}} \quad (9.1)$$

Para questões de generalização temos o ponto $\vec{r} = (x, y, z, w_1, \dots, w_n)$ e a massa fonte $\vec{r}' = (0, 0, 0, m_1, \dots, m_n)$. Se houvesse apenas uma única dimensão extra, as massas "imagem" estariam separadas a uma distância $2\pi R$ cada uma. Assim:

$$\psi^{(5)}(\vec{r}) = - \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{G^{(5)}M}{(x^2 + y^2 + z^2 + (w_1 - 2\pi R m_1)^2)} \quad (9.2)$$

Mas para a generalização cada massa 'imagem' de cada dimensão extra deve ser considerada, então um termo extra aparece na equação. Por conveniência chamaremos $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Assim quando falamos no potencial total, estamos pensando nos potenciais individuais de cada dimensão:

$$\psi^{(4+\delta)}(\vec{r}) = - \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{G^{(4+\delta)}M}{(r^2 + \sum_{i=1}^{\delta} (w_i - 2\pi R m_i)^2)^{\frac{\delta+1}{2}}} \quad (9.3)$$

Para simplificar essa soma foi utilizada a formula do Somatório de Poisson.

Ela demonstra que se você tem o somatório de uma função periódica, esse somatório pode ser escrito com base no somatório de sua transformada de Fourier.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k}{T}\right) e^{\frac{2\pi i k t}{T}} \quad (9.4)$$

Se temos múltiplas dimensões extras, no exemplo a seguir será considerando apenas duas extras, o formato da equação se modifica para se adequar a esse fato:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_1 + n_1 T_1, t_2 + n_2 T_2) = \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} g\left(\frac{k_1}{T}, \frac{k_2}{T}\right) e^{\frac{2\pi i k_1 t_1}{T_1}} e^{\frac{2\pi i k_2 t_2}{T_2}} \quad (9.5)$$

Tomaremos nesse caso cada w_i como um t diferente da mesma forma que o $2\pi R_i$ como um T_i . Como forma de simplificar ainda mais a equação, iremos suprimir algumas integrais e somatórios, trataremos $T_1 \dots T_n = \xi_n$, com $\frac{2\pi i k_i}{T} = \frac{m_i}{R}$ e pela supressão de alguns termos, teremos:

$$\psi^{(4+\delta)} = -\frac{G^{(4+\delta)} M}{\xi_n} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i \frac{m_1}{R_1} w_1 + \dots + i \frac{m_\delta}{R_\delta} w_\delta} \int_{\mathbb{R}^\delta} \frac{e^{i \frac{m_1}{R_1} w_1 + \dots + i \frac{m_\delta}{R_\delta} w_\delta}}{r^2 + w_1^2 + \dots + w_\delta^2} dw_1 \dots dw_\delta \quad (9.6)$$

Dessa vez iremos tratar os termos que se repetem como um vetor, transformando cada $\frac{m_i}{R_i}$ em um \vec{m}' e cada w_i em um vetor \vec{w} , formando assim o somatório total em um produto interno. O termo $w_1^2 + \dots + w_\delta^2 = w^2$ e o integrante $dw_1 \dots dw_\delta = d^\delta \vec{w}$.

$$\psi^{(4+\delta)} = -\frac{G^{(4+\delta)} M}{\xi_n} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i \vec{m}' \cdot \vec{w}} \int_{\mathbb{R}^\delta} \frac{e^{i \vec{m}' \cdot \vec{w}}}{(r^2 + w^2)^{\frac{\delta+1}{2}}} d^\delta \vec{w} \quad (9.7)$$

Fazendo um procedimento bem parecido com o que é feito para o caso da função gama no apêndice 7. Transformamos a integral na forma polar e aplicamos uma identidade do resultado de uma integral, lembrando a integral só vai depende do primeiro angulo θ_1 fazendo com que os outros se transformem na superfície de uma n-bola:

$$\psi^{(4+\delta)} = -\frac{G^{(4+\delta)} M}{\xi_n} S_{(\delta-2)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i \vec{m}' \cdot \vec{w}} \int_0^\infty \frac{x^{\delta-1}}{(r^2 + w^2)^{\frac{\delta+1}{2}}} dx \int_0^\pi e^{i |m'| |w| \cos(\theta_1)} \sin^{\delta-2} \theta_1 d\theta_1 \quad (9.8)$$

Como a integral angular é conhecida:

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\pm i z \cos \theta_1} \text{sen}^{(\nu-2)} \theta d\theta \quad (9.9)$$

Separamos aqui as funções gama em razão da área de superfície de uma n-bola, que se anula com a superfície anterior. Utilizando agora de uma nova identidade e da equação 7.13 temos que:

$$\phi^{(4+\delta)} = -\frac{G^{(4+\delta)} M \pi^{\frac{\delta}{2}} 2^{\frac{\delta}{2}}}{\xi_n} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-i \vec{m}' \cdot \vec{w}}}{|m'|^{\frac{\delta}{2}-1}} \int_0^\infty dx \frac{w^{\frac{\delta}{2}} J_{\frac{\delta}{2}-1}(x|w'|)}{(r^2 + w^2)^{\frac{\delta+1}{2}}} \quad (9.10)$$

$$\int_0^{\infty} x^{v+1} (x^2 + a^2)^{-v-\frac{3}{2}} J_v(bx) dx = \frac{b^v \sqrt{\pi}}{2^{v+1} a e^{ab} \Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right)} \quad (9.11)$$

$$\int_0^{\infty} dx \frac{w^{\frac{\delta}{2}} J_{\frac{\delta}{2}-1}(x|w'|)}{(r^2 + w^2)^{\frac{\delta+1}{2}}} = \frac{|m'|^{\frac{\delta}{2}-1} \sqrt{\pi} e^{r|m'|}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)} \frac{1}{r} \quad (9.12)$$

Para no fim como o r não tem termos no somatório podemos retirá-lo. Como vimos anteriormente, a parte da constante gravitacional tem que ser proporcional a constante $G^{(4)}$, então os termos são suprimidos nessa constante sobrando apenas o somatório:

$$\phi^{(4+\delta)} = -\frac{G^{(4)}M}{r} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-r|m'|} e^{-ixm} \quad (9.13)$$

Tomando $w = 0$ por conveniência temos:

$$V_{\delta+4} = -\frac{G^{(4)}M}{r} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-r|m'|} \quad (9.14)$$

Da equação achada é possível fazer uma aproximação para longas distâncias, chegando a equação:

$$\phi = -\frac{G^{(4)}M}{r} (1 + 2d \cdot e^{-\frac{r}{R}}) \quad (9.15)$$

Onde o “d” é relativo ao número de dimensões extras com o mesmo tamanho. É uma aproximação bastante parecida com o potencial de Yukawa.

Para encontrar o potencial exato com uma única dimensão extra, devemos fazer outra aproximação. Relembrando que $m' = \frac{m}{R}$ então:

$$\phi^{(4+\delta)} = -\frac{G^{(4)}M}{r} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(e^{-\frac{r}{R}} \right)^{|m|} \quad (9.16)$$

Primeiramente podemos ver que o somatório é uma série geométrica onde $e^{-\frac{r}{R}} < 1$. Também vemos que como o m está em módulo, o somatório se repete duas vezes, exceto pelo termo $m = 0$, assim:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(e^{-\frac{r}{R}} \right)^{|m|} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{r}{R}} \right)^m - 1 \quad (9.17)$$

Resolvendo a série geométrica vemos uma a relação trigonométrica.

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(e^{-\frac{r}{R}} \right)^{|m|} = \frac{2}{1 - e^{-\frac{r}{R}}} - 1 = \coth \left(\frac{r}{2R} \right) \quad (9.18)$$

E a equação exata para o potencial gravitacional é:

$$\phi^{(4+delta)} = -\frac{G^{(4)}M}{r} \coth \left(\frac{r}{2R} \right) \quad (9.19)$$

Nós vemos então uma boa relação entre as dimensões extras e o potencial gravitacional. Com essa fundamentação, iremos agora analisar como se comporta se adicionarmos o acoplamento spin-órbita nessa teoria.