

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

ANDRÉA FREIRE DOS SANTOS

**Influência da polarização e do ambiente nos
aspectos complementares da natureza quântica
da luz**

João Pessoa

2023

Andréa Freire dos Santos

Influência da polarização e do ambiente nos aspectos complementares da natureza quântica da luz

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Doutora em Física.

Orientador: Dr. Bertúlio de Lima Bernardo

João Pessoa

2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S237i Santos, Andréa Freire dos.

Influência da polarização e do ambiente nos aspectos complementares da natureza quântica da luz / Andréa Freire dos Santos. - João Pessoa, 2023.

83 f. : il.

Orientação: Bertúlio de Lima Bernardo.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.


1. Física - Polarização. 2. Relação de complementaridade. 3. Sistema quântico aberto. 4. Decoerência. I. Bernardo, Bertúlio de Lima. II. Título.

UFPB/BC


CDU 53.082.55(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de tese de Doutorado da aluna
Andrea Freire dos Santos, candidata ao Título de Doutora em
Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.


Aos dezesseis dias do mês de março do ano de dois mil e vinte e três, às 09:00, nas dependências do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a tese de Doutorado, na área de Física da Matéria Condensada, de **Andrea Freire dos Santos**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Bertúlio de Lima Bernardo (PPGF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Jesús Pavón Lopez (PPGF/UFPB), Sérgio André Fontes Azevedo (PPGF/UFPB), José Henrique Araújo Lopes de Andrade (UFAL) e Askery Alexandre Canabarro Barbosa da Silva (UFAL). Dando início aos trabalhos, o Prof. Bertúlio de Lima Bernardo comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para a candidata para que a mesma fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de tese intitulada “*Influência da polarização e do ambiente nos aspectos complementares da natureza quântica da luz*”. Concluída a exposição, a candidata foi arguida pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer “**aprovada**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutora em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **16 de março de 2023**.

Documento assinado digitalmente
 BERTULIO DE LIMA BERNARDO
Data: 16/03/2023 12:12:07-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo
Orientador

Documento assinado digitalmente
 JESUS PAVON LOPEZ
Data: 17/03/2023 16:41:23-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dr. Jesús Pavón Lopez
PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente
 ASKERY ALEXANDRE CANABARRO BARBOSA
Data: 17/03/2023 15:15:34-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Askery Alexandre Canabarro Barbosa da Silva
UFAL

Documento assinado digitalmente
 SERGIO ANDRE FONTES AZEVEDO
Data: 17/03/2023 15:28:25-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Sérgio André Fontes Azevedo
PPGF/UFPB

Documento assinado digitalmente
 JOSE HENRIQUE ARAUJO LOPES DE ANDRA
Data: 16/03/2023 16:23:07-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Henrique Araújo Lopes de Andrade
UFAL

*Dedico este trabalho aos que não podem ouvir,
não podem ver e nem podem falar ou sentir.*

Agradecimentos

Agradeço ao criador da vida, Deus, inteligência suprema que rege o meu destino e a minha consciência.

Agradeço aos meus pais, embora o meu pai já não esteja presente entre nós, pela oportunidade de estar neste mundo, e em especial a minha mãe, dona Valdenisse, que apesar de tantas dificuldades me apoiou e continua me apoiando sempre.

Agradeço ao meu orientador Bertúlio, pelos seus exemplos, pela sua simplicidade e compreensão. Graças a você pude perseverar até o fim e esta tese pôde ser concluída.

Aos meus irmãos, minhas irmãs, pelo apoio, carinho e suporte durante as adversidades da vida.

Aos meus amigos do departamento de física, companheiros de ideais, pelos momentos de estudo; aos de outros recantos, com quem pude aprender e compartilhar a minha caminhada.

Ao grupo GTQuântica, em especial, pelos encontros, discussões, parceria e motivação.

Aos professores da pós-graduação em física, por compartilhar seus conhecimentos.

À Capes, pelo apoio financeiro e a Universidade Federal da Paraíba pelo acolhimento.

*“Quem teme a escuridão, perde-se na noite”
Joanna de Ângelis*

Resumo

Embora a dualidade onda-partícula não seja um conceito relativamente novo na física moderna, o interesse pela mesma continua sendo um importante ponto de estudos e investigações. Atribuindo comportamentos mutuamente exclusivos de um sistema quântico ao aparato experimental ao qual é submetido, no exemplo de um interferômetro de dois caminhos os aspectos de onda e de partícula são quantificados através da visibilidade das franjas de interferência e da informação sobre o caminho percorrido pelas partículas. Neste trabalho, utilizamos ferramentas teóricas da informação quântica para derivar duas quantidades que mensuram os aspectos de onda e de partícula no cenário do experimento da dupla fenda de Young para um sistema de fótons. A derivação dessas quantidades teve como base o formalismo da matriz densidade unificada de coerência e polarização, o que nos possibilitou obter quantificadores capazes de descrever a influência combinada do caminho tomado pelos fótons, bem como da polarização. É possível verificar que esses quantificadores obedecem a uma relação de complementaridade análoga à desigualdade EGY, cuja validade é testada através de alguns exemplos com estados quânticos puros e mistos. Ao estendermos o estudo da dualidade onda-partícula aos sistemas abertos, nos confrontamos com a realidade do efeito da decoerência. Apesar de desempenhar um papel fundamental no estudo da transição quântica para a clássica, em se tratando de sistemas quânticos o efeito da decoerência aparece como um obstáculo ao processamento da informação quântica. Aqui nós mostramos que os quantificadores podem ser úteis para investigar de que formas o ambiente em questão interfere na perda da informação quântica codificada nos fótons e as consequências dos tipos de ambientes usados para o processamento de informação.

Palavras-chave: Relação de complementaridade; polarização; sistema quântico aberto, decoerência.

Abstract

Although the wave-particle duality is not a relatively new concept in modern physics, the interest in it remains an important point of study and investigation. Attributing mutually exclusive behaviors of a quantum system to the experimental apparatus to which it is subjected, in the example of a two-path interferometer, the wave and particle aspects are quantified through the visibility of the interference fringes and information about the path taken by the particles. In this work, we use quantum information theoretical tools to derive two quantities that measure the wave and particle aspects in the scenario of the Young's double slit experiment for a photon system. The derivation of these quantities was based on the formalism of the unified density matrix of coherence and polarization, which allowed us to obtain quantifiers capable of describing the combined influence of the path taken by the photons, as well as the polarization. It is possible to verify that these quantifiers obey a complementarity relation analogous to the EGY inequality, whose validity is tested through some examples with pure and mixed quantum states. By extending the study of wave-particle duality to open systems, we confront the reality of the decoherence effect. Though it plays a fundamental role in the study of the quantum-to-classical transition, for quantum systems the decoherence effect acts as an obstacle to quantum information processing. We show here that quantifiers can be useful for investigating in which ways the environment in question interferes in the loss of quantum information encoded in the photons and the consequences of the types of environments used for information processing.

Keywords: Complementarity relations; polarization; open quantum systems, decoherence.

Lista de ilustrações

- Figura 1 – Experimento da fenda dupla. A Fig. a) apresenta um comportamento de partícula à medida que tentamos decifrar qual caminho percorreu o fóton. Na Fig. b) os fótons percorrem os caminhos 1 e 2 livremente, e o que se forma é um padrão de interferência acentuado. 15
- Figura 2 – Representação da Esfera de Bloch para um qubit. Figura adaptada de [1] 19
- Figura 3 – Polarização Linear. Enquanto a onda se propaga na direção z o campo elétrico segue oscilando em um mesmo plano e mesma direção formando uma linha diagonal que varia entre o primeiro e o terceiro quadrante, tornando a onda polarizada. Figura adaptada de [2]. 27
- Figura 4 – Polarização Linear. a) O campo elétrico oscila em um plano formando uma linha entre o segundo e o quarto quadrante devido à diferença de fase entre as componentes do campo ter valores múltiplos de π . Dizemos que a polarização da onda é anti-diagonal. As figuras b) e c) mostram a direção de oscilação do campo elétrico diretamente sobre o eixo de uma de suas componentes. Neste caso dizemos que a onda é linearmente polarizada horizontal e vertical, respectivamente. 28
- Figura 5 – Polarização Circular. a) Enquanto as amplitudes das componentes do campo elétrico se mantém iguais, a diferença de fase $-\frac{\pi}{2}$ entre elas garante que a ponta do vetor campo elétrico oscile formando um círculo com sentido de rotação para a direita sempre em um mesmo plano de vibração durante a propagação da onda. b) A diferença de fase $\frac{\pi}{2}$ garante que o campo elétrico oscile formando um círculo com rotação para a esquerda. 28
- Figura 6 – Polarização Elíptica. Enquanto se propaga a ponta do campo elétrico varre uma elipse. É o caso mais geral da polarização do campo elétrico com amplitudes e fases relativas diferentes. O eixo maior da elipse forma um ângulo α com o eixo x e em condições especiais essa inclinação se altera formado um círculo ou uma linha. Figura adaptada de [2]. 30
- Figura 7 – Na figura (a) notamos as fontes pontuais e a sobreposição das ondas e a (b) simula a visão dos planos de vibração das ondas oriundas dessas fontes. Figura adaptada de [2]. 34
- Figura 8 – Variação da intensidade total onda resultante em função da fase δ . Para valores de $\delta = 2m\pi$, I atinge seu valor máximo. Para valores de $\delta = (2m + 1)\pi$, I atinge seu valor mínimo. Figura adaptada de [3] . . . 35

Figura 9 – Canal binário. Do lado esquerdo a fonte X e do lado direito o receptor Y . No centro as probabilidades condicionais. A informação é transmitida sem erros quando $p = 0$ e é transmitida com erros quando $p > 0$. Figura adaptada de [4]	37
Figura 10 – Esfera de Bloch para o estado sob o efeito do canal despolarização. O lado esquerdo mostra a esfera de raio unitário e representa o estado inicial puro. Já o lado direito apresenta a contração do raio da esfera que é resultante da ação do canal para valor de $P = 1/2$	42
Figura 11 – Esfera de Bloch para o estado sob o efeito do canal defasagem. O lado esquerdo mostra a esfera de raio unitário e representa o estado inicial. Já o lado direito apresenta a contração do raio da esfera que é resultante da ação do canal para valor de $p = 0.3$. Imagem retirada de [1].	45
Figura 12 – Esfera Poincaré ou de Bloch de raio unitário. O estado de polarização totalmente polarizado é definido por qualquer um dos pontos na superfície da esfera. Todos os outros no interior são estados de polarização parcial. O ponto no centro da esfera representa o estado despolarizado. Figura adaptada de [5].	48
Figura 13 – Experimento da dupla fenda. Um ensemble de fótons passa pelas fendas 1 e 2 com um estado de polarização arbitrário, e a uma certa distância são detectados na tela B	50
Figura 14 – Comportamento dos quantificadores V e D e da relação $V^2 + D^2$ em função do parâmetro a do estado $ \psi_1\rangle$. Para os valores extremos $a = 0$ e 1 os caminhos percorridos pelos fótons são totalmente distintos. À medida que cada caminho se torna igualmente provável $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, obtemos $D = 0$ e $V = 1$. Observamos também a validade da relação de complementaridade para todos os valores de a	59
Figura 15 – Comportamento dos quantificadores V e D e da relação $V^2 + D^2$ em função do parâmetro a para o $ \psi_2\rangle$. Nos extremos $a = 0$ e 1 os caminhos percorridos pelos fótons são totalmente distintos. Na condição $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, quando ambos os fótons com as polarizações circular à direita e horizontal estão iluminando as fendas igualmente, surge então uma certa nitidez definindo um padrão de interferência com valor $D = V = \frac{1}{\sqrt{2}}$	60
Figura 16 – Comportamento dos quantificadores V e D e da relação $V^2 + D^2$ em função do parâmetro η para o estado $\hat{\rho}_W$. Para os valores extremos $\eta = 0, 1$ a distinguibilidade D é nula no caso totalmente misto e máximo para o estado puro. A visibilidade V é nula para todos os valores de η	61

- Figura 17 – Sistema de fótons em contato com um ambiente de partículas refrativas. Inicialmente o sistema e o ambiente estão descorrelacionados. Em seguida, interagem e dessa interação pode ocorrer que, em algum tempo t_n , esses fótons com estados $|x, i\rangle$ ($x = H, V$ e $i = 1, 2$) terão interagido com essas partículas que mudarão do estado $|E_0\rangle$ para outros dependendo do caminho desses fótons. Este cenário é descrito pela dupla fenda que se encontra logo à frente. Os fótons que atravessam as fendas terão uma probabilidade P associada referente à interação ambiental que gera diretamente uma mudança no estado final $\hat{\rho}'_s$ 63
- Figura 18 – Evolução temporal da distinguibilidade D , visibilidade V e da relação $D^2 + V^2$ para o estado $|\psi\rangle$ da Eq. (6.6) sob a ação do ambiente descrita das Eqs. (6.3a) a (6.3d). A ação da decoerência é vista no decaimento exponencial da visibilidade V . Enquanto isso, o valor de D se mantém invariável. 65
- Figura 19 – Evolução temporal da distinguibilidade D , visibilidade V e da relação $D^2 + V^2$ para o estado $|\psi\rangle$ da Eq. (6.6) sob a ação do ambiente descrita das Eqs. (6.7a) a (6.7d). A visibilidade V sofre, durante a dinâmica, um decaimento exponencial enquanto que D apresenta um comportamento especial para baixo e para cima se estabilizando em seguida. 67
- Figura 20 – Representação sistema composto $S + A$ envolto por um sistema maior A' . O sistema pode ser influenciado pelo ambiente A que o circunda. O ambiente maior A' pode ser usado como o sistema ‘fictício’ no processo de purificação do ambiente A . Figura adaptada de [6]. 77

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	FUNDAMENTAÇÃO	18
2.1	Estado quântico	18
2.2	Produto Tensorial	19
2.3	Operador densidade	21
2.3.1	Traço parcial e o operador densidade reduzido	25
2.4	Polarização da luz	26
2.5	Parâmetros de Stokes	30
2.6	Interferência	33
3	SISTEMAS QUÂNTICOS ABERTOS	37
3.1	Canal de comunicação	37
3.2	Evolução do sistema quântico aberto	38
3.3	Canais quânticos	40
4	DESCRIÇÃO UNIFICADA DAS PROPRIEDADES DE COERÊNCIA E POLARIZAÇÃO	46
4.1	Polarização dos Fótons	46
4.2	Parâmetros de Stokes na mecânica quântica	48
4.3	Unificando a coerência e a polarização	49
5	QUANTIFICADORES DE VISIBILIDADE E DISTINGUIBILIDADE	53
5.1	Traço da distância	53
5.2	Quantificador de Visibilidade	55
5.3	Quantificador de Distinguiabilidade	56
5.4	Relação de complementaridade	57
5.5	Exemplos	59
6	COMPORTAMENTO DA VISIBILIDADE E DA DISTINGUIBILIDADE NA DINÂMICA DE SISTEMAS QUÂNTICOS ABERTOS	62
6.1	Interação sistema-ambiente	62
7	CONCLUSÃO	68
	APÊNDICES	70

A	OBTENÇÃO DOS OPERADORES DE KRAUS E DA MATRIZ DENSIDADE REDUZIDA DO SISTEMA	71
B	DECOMPOSIÇÃO DE SCHMIDT E PURIFICAÇÃO	76
ANEXO	78
C	PUBLICAÇÕES	79
	REFERÊNCIAS	80

1 Introdução

Atualmente, a natureza da luz é melhor compreendida devido às grandes descobertas a seu respeito cujo reflexo notamos nos avanços tecnológicos dos últimos séculos. Há muito tempo filósofos e cientistas se dedicam a essa tarefa. Por volta do século XVII houve um forte movimento científico para discutir o aspecto da luz. Natureza ondulatória ou corpuscular? O que prevaleceu até o início do século XIX foi a ideia de Isaac Newton a respeito da luz composta por corpúsculos [7]. Em oposição, Thomas Young em seu célebre experimento da dupla fenda apresentou uma base experimental para a natureza ondulatória da luz, entre 1801 e 1803, verificando que a mesma se comporta como onda [7, 8]. Mais tarde, Heinrich Hertz por volta de 1887, produzia uma descarga oscilante fazendo saltar uma faísca entre dois eletrodos. Ele observou que a luz violeta e ultravioleta facilitava a descarga [9]. Posteriormente, os estudos com raios catódicos foram aprofundados por P. Lenard que obteve resultados que caracterizaram um efeito chamado de efeito fotoelétrico. Este efeito aponta que a emissão de elétrons não depende da intensidade da luz incidente e sim da frequência dessa luz, tal que para frequências altas a energia transferida aos elétrons é suficiente para arrancá-los de um metal mesmo com intensidades muito baixas. Isso foi explicado por Albert Einstein, em 1905, o qual admitiu que a luz em sua interação com a matéria é quantizada e se apresenta em pacotes, os fótons ou partículas de luz [8]. Este comportamento dual não é restrito apenas à luz. A matéria também se comporta assim. O físico de Broglie supôs que os elétrons também tinham um comprimento de onda associado e apresentou uma relação entre o comprimento de onda e o momento do elétron, o que mais tarde foi verificado experimentalmente na difração dos elétrons por Davisson e Germer [10], e separadamente por G.P.Thomson [11]. Assim, observa-se uma dualidade onda-partícula que consiste em associar a cada partícula uma onda de probabilidade.

Os aspectos de partícula e onda são classicamente opostos, visto que um é governado por leis de movimento com trajetórias bem definidas e o outro pelas leis do movimento ondulatório. Em sistemas quânticos, esses dois aspectos não são inseparáveis, mas complementares. Mas, embora essas propriedades sejam complementares, a certeza absoluta de uma impede, no mesmo aparato experimental, a observação simultânea da outra. Podemos ver isso no experimento da dupla fenda, esboçado na Fig. 1a, em que consideramos que fótons atravessam o aparato. Ao preparar o experimento de modo a tentar identificar por qual fenda o fóton passa, perdemos o caráter ondulatório. Se não perturbarmos o sistema, um padrão de interferência é formado, como mostrado na Fig. 1b, o que caracteriza sua manifestação ondulatória. Em 1928, uma discussão qualitativa da dualidade onda-partícula foi apresentada por Niels Bohr quando chamou a atenção para esses comportamentos mutuamente exclusivos, obtendo como resultado um ou outro, mas não os dois simultaneamente

[12]. Os primeiros a darem uma versão quantitativa para esta complementaridade foram Wootters e Zurek [13]. Eles usaram elementos de teoria de informação e constatam que se houver informação parcial sobre o caminho percorrido pelos fótons existe também alguma nitidez das franjas de interferência. É também possível haver uma mudança gradativa entre os comportamentos de onda e de partícula. Mais tarde, estudando a interferometria com dois feixes não balanceados, Greemberger e Yasin [14] usaram a previsibilidade do caminho mais provável percorrido por nêutrons e chegaram à desigualdade $V^2 + P^2 \leq 1$, onde P é a previsibilidade e V é a visibilidade. Separadamente, Englert [15], generalizando a ideia de Wootters e Zurek para sistemas compostos, incluiu um detector de caminho substituindo a previsibilidade pela distinguibilidade de caminho. Assim, a dualidade onda-partícula é controlada pela desigualdade EGY,

$$V^2 + D^2 \leq 1. \quad (1.1)$$

Os extremos desta relação são $V = 1$ e $D = 0$, denotando máximo padrão de interferência e nenhum conhecimento sobre o caminho percorrido. Por outro lado, $D = 1$ e $V = 0$ representa um conhecimento total sobre o caminho e nenhuma franja de interferência formada. Também são possíveis os valores intermediários $V \neq 0$ e $D \neq 0$, representando franjas de visibilidade menos intensas e conhecimento parcial sobre o caminho. Vale também salientar que a igualdade da Eq. (1.1) é atingida no regime de estados puros. Nos casos em que a soma é menor que 1, temos que o sistema em análise é misto. Experimentalmente, foram realizados testes dos comportamentos complementares com fótons [16], átomos [17] e ressonância magnética nuclear [18, 19].

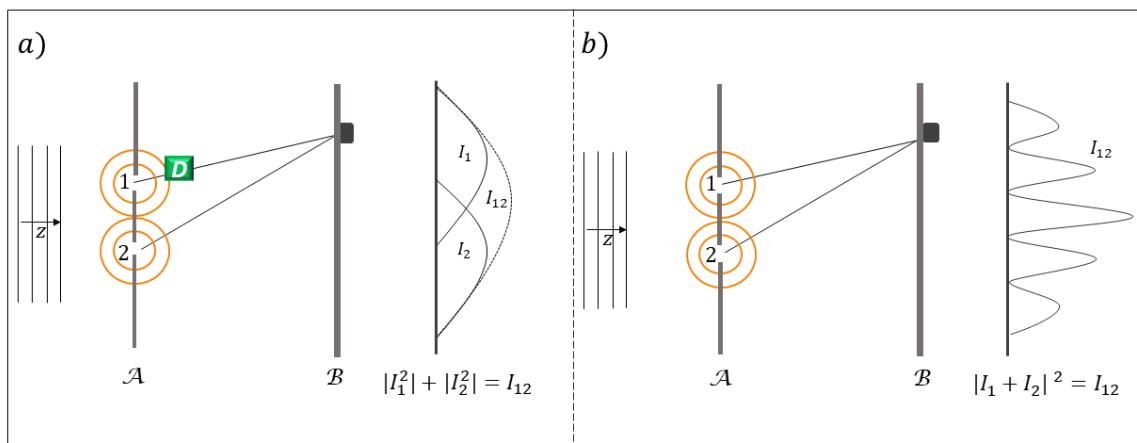


Figura 1 – Experimento da fenda dupla. A Fig. a) apresenta um comportamento de partícula à medida que tentamos decifrar qual caminho percorreu o fóton. Na Fig. b) os fótons percorrem os caminhos 1 e 2 livremente, e o que se forma é um padrão de interferência acentuado.

Recentemente, estudos sobre o princípio da complementaridade vem despertando interesse renovado. Em interferômetros de dois caminhos tem sido mostrado que as propri-

idades de polarização da luz emergente do interferômetro dependem do comportamento dual dos fótons [20, 21, 22]. Outros analisam os efeitos da fonte (alusão às fendas de um interferômetro duplo) nas propriedades da dualidade onda-partícula [23, 24]. Tem sido demonstrado também que a complementaridade está ligada ao auto emaranhamento entre caminhos e outros graus de liberdade intrínsecos da mesma entidade quântica levando a uma igualdade complementar de três quantidades [25, 26]. Por outro lado, há desenvolvimentos recentes de estudos da complementaridade se estendendo a interferômetros multipartidos [27, 28, 29].

Na informação quântica, um agravante crucial para o processamento em geral da informação é o efeito chamado de decoerência. Embora ela desempenhe um papel fundamental na dinâmica que descreve a transição quântica para a clássica [30], sua existência é um obstáculo que muitos estudiosos tentam contornar, ou aprender a lidar [1, 31]. Conseqüentemente, em se tratando de dualidade onda-partícula, seu aparecimento faz com que a informação a respeito tanto do aspecto ondulatório como o do corpuscular seja modificado ao ponto de se perder totalmente [32]. A interação sistema- ambiente produz esse efeito cujo papel desenvolvido pelo ambiente se assemelha ao de uma sonda dos estados do sistema e isso leva à perda de coerência do sistema físico.

Esta tese tem como objetivo fornecer alguns avanços ao estudo sobre a dualidade onda-partícula no cenário da dupla fenda. Neste trabalho, consideramos que o grau de liberdade de polarização é uma propriedade importante para a definição das quantidades que representam o aspecto de onda e de partícula, respectivamente, a visibilidade e a distinguibilidade. A derivação dos quantificadores de visibilidade V e de distinguibilidade D leva em consideração tanto a probabilidade de caminho como a influência da polarização. Embora seja uma forma mais geral, esses quantificadores desenvolvidos por nós obedecem a uma relação de complementaridade análoga à desigualdade EGY. Propomos também utilizar essas quantidades no estudo de sistemas quânticos abertos para observar os efeitos de decoerência, espalhamento e despolarização causados pela interação sistema-ambiente e descritos através da evolução temporal desses quantificadores.

A organização desta tese está dividida da seguinte maneira: no Capítulo 2 são apresentados fundamentos de mecânica quântica de interesse para o nosso estudo. Além disso, revisamos alguns conceitos clássicos de fenômenos ondulatórios da luz. No Capítulo 3 nós abordamos um formalismo de operações quânticas que descreve ruídos (interações indesejadas) e o comportamento de sistemas quânticos abertos. No Capítulo 4, revisamos o método de tratamento unificado de coerência e polarização através do formalismo de matriz densidade, cujos resultados formam a base de nossas ideias neste trabalho. No Capítulo 5 apresentamos a formulação matemática para obtenção dos quantificadores de visibilidade e distinguibilidade proposto por nós, a dedução da relação de complementaridade e a eficácia desses quantificadores através de alguns exemplos com estados quânticos. No Capítulo 6 serão feitas aplicações desses quantificadores no estudo de sistemas quânticos

abertos aproveitando o cenário do experimento de dupla fenda. Finalizamos com as nossas conclusões e perspectivas futuras.

2 Fundamentação

2.1 Estado quântico

Em mecânica quântica, o estado físico dos sistemas é representado por um *vetor de estado*. Este vetor reside em um espaço vetorial complexo chamado *espaço de Hilbert* \mathcal{H} . Um vetor de estado contém toda informação possível sobre o sistema de interesse. Na notação de Dirac vetores de estado são reconhecidos usando o símbolo $|\ \rangle$ chamado de *ket* [33].

O fato de poder existir superposições de estados torna a mecânica quântica diferente da clássica, tal que em geral não perguntamos se um sistema físico está, por exemplo, em um estado ou outro, mas qual é a probabilidade dele ser encontrado em um desses estados. Esta superposição de possíveis estados é composta por uma combinação linear, de modo que, o vetor estado $|\psi\rangle$ resultante é representado pela soma de outros vetores. No caso específico de o sistema poder assumir somente dois estados, temos:

$$|\psi\rangle = c_1 |a_1\rangle + c_2 |a_2\rangle, \quad (2.1)$$

onde c_1 e c_2 são números complexos que representam amplitudes de probabilidades. Este estado define um sistema em estado de superposição com espaço dimensional $n = 2$. Estados quânticos são representados por vetores unitários. Isto significa que o produto interno entre o *ket* e seu dual *bra* ($\langle \ |$) seja $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. A isto damos o nome de condição de normalização, o que equivale a $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ [33].

Quando o estado $|\psi\rangle$ estiver representado em um espaço de Hilbert de dimensão n , em geral, ele é escrito como [31]:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle. \quad (2.2)$$

Aqui, a dimensionalidade do espaço é imposta pelas condições do sistema físico de interesse. Estados desse tipo $|\psi\rangle$ são chamados de estados puros. Logo mais veremos que um estado que é composto por um conjunto de estados puros com cada um possuindo peso probabilístico são chamados de estados mistos.

Em teoria da informação quântica, o estado da Eq. (2.1) é a representação de um *qubit*. Classicamente, a informação é codificada em bits, que é a menor unidade de informação armazenável. Quanticamente, o conceito análogo desta unidade de informação é o bit quântico ou qubit. Enquanto o bit corresponde aos estados 0 ou 1, o qubit corresponde aos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ desse bit clássico. Se quisermos examinar o qubit para saber se ele está no estado $|0\rangle$ e $|1\rangle$ o resultado dá 0, com probabilidade $|\alpha|^2$, e 1 com probabilidade $|\beta|^2$. Somando essas duas probabilidades obteremos o valor um, que é a condição de

normalização referida anteriormente. Como α e β são números complexos, essa condição garante que o estado (2.1) possa ser reescrito como [1]

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \right), \quad (2.3)$$

com θ , ϕ e γ sendo as variáveis reais que representam o estado. No entanto, em se tratando de medições, essa fase global $e^{i\gamma}$ pode ser ignorada por não ter efeitos observáveis. Por exemplo, em medições, um estado $|\phi\rangle$ é equivalente ao estado $e^{i\gamma}|\phi\rangle$ por darem as mesmas previsões para quaisquer medições. Deste modo, reescrevemos o estado acima em função de duas variáveis reais:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad (2.4)$$

que pode ser representado geometricamente fazendo uma conexão com coordenadas esféricas e $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$ definirão um ponto numa esfera de raio unitário. Esta esfera é chamada de *Esfera de Bloch* de um qubit e é ilustrada na Fig 2. No caso de n qubits não existe uma generalização simples da esfera de Bloch [1].

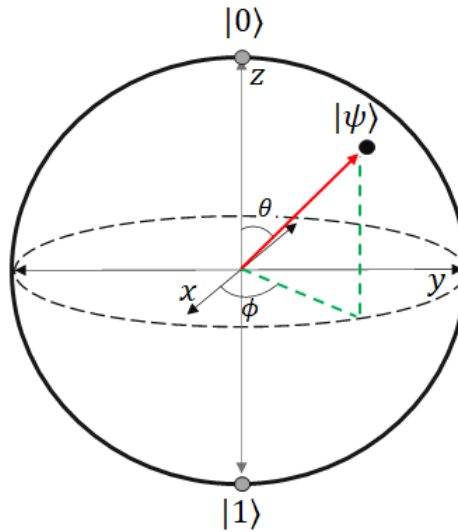


Figura 2 – Representação da Esfera de Bloch para um qubit. Figura adaptada de [1]

2.2 Produto Tensorial

Um sistema quântico pode ser uma composição de outros sistemas quânticos. Neste caso, o espaço de Hilbert referente a ele é um espaço de dimensão maior que a dos subsistemas. O responsável por reunir os espaços de cada subsistema para formar um espaço maior é o *produto tensorial*.

Dois espaços \mathcal{V} e \mathcal{W} de dimensões d_1 e d_2 são espaços vetoriais que pelo produto tensorial $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ formam um espaço vetorial de dimensão $\dim = d_1 d_2$. O espaço $\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ é

constituído pelos elementos $|v\rangle$ de \mathcal{V} e $|w\rangle$ de \mathcal{W} , que pode ser gerado a partir do produto tensorial dos vetores base dos subespaços, $|v\rangle \otimes |w\rangle$.

O produto tensorial obedece a algumas propriedades [1]:

1 - Para um escalar arbitrário λ e elementos $|v\rangle$ de \mathcal{V} e $|w\rangle$ de \mathcal{W} ,

$$z(|v\rangle \otimes |w\rangle) = (z|v\rangle) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes (z|w\rangle).$$

2 - Para $|v_1\rangle$ e $|v_2\rangle$ em \mathcal{V} e $|w\rangle$ em \mathcal{W} ,

$$(|v_1\rangle + |v_2\rangle) \otimes |w\rangle = |v_1\rangle \otimes |w\rangle + |v_2\rangle \otimes |w\rangle.$$

3 - Para $|v\rangle$ em \mathcal{V} e $|w_1\rangle$ e $|w_2\rangle$ em \mathcal{W} ,

$$|v\rangle \otimes (|w_1\rangle + |w_2\rangle) = |v\rangle \otimes |w_1\rangle + |v\rangle \otimes |w_2\rangle.$$

Para ilustrar a propriedade 2 que tem o mesmo teor da 3, se um estado

$$|v\rangle = |v_1\rangle + |v_2\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

faz parte de um produto com

$$|w\rangle = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

então o resultado do produto é

$$|v\rangle \otimes |w\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ a_2 \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Em se tratando de, por exemplo, dois sistemas quânticos, digamos S^1 e S^2 cada um com o seu espaço de Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 . O sistema composto $S = S^1 + S^2$ terá um espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Supondo que a base ortonormal em cada espaço \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 seja, respectivamente, $\{|\alpha_i\rangle\}$ e $\{|\beta_i\rangle\}$, temos que um estado puro geral de S será dado como:

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle. \quad (2.8)$$

Se A e B são dois operadores que atuam, respectivamente, nos espaços de S^1 e S^2 , então, o operador $A \otimes B$ que atua em \mathcal{H} é resultante da ação de A em \mathcal{H}_1 e B em \mathcal{H}_2 , da seguinte forma:

$$(A \otimes B)(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = A|\alpha\rangle \otimes B|\beta\rangle. \quad (2.9)$$

Esta operação também se estende para todos os elementos de \mathcal{H} tal que sob a combinação linear (2.8) a atuação resulta em

$$(A \otimes B)\left(\sum_i a_i |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle\right) = \sum_i a_i (A|\alpha_i\rangle \otimes B|\beta_i\rangle). \quad (2.10)$$

2.3 Operador densidade

Nesta seção veremos o formalismo do *operador densidade* ou *matriz densidade* que é usado para representar o estado de sistemas formados por um conjunto de sistemas físicos (*ensemble*) e em especial, e necessário, para os que são misturas estatísticas. Antes de tudo, vamos entender o que é um conjunto *puro* e *misto*. Em seguida, passaremos à definição do operador e por último à função do traço parcial usada quando estamos interessados em apenas parte de um sistema quântico composto.

◇ *Estados puros e mistos*

Se um conjunto de partículas de um feixe forem preparadas igualmente, dizemos que o estado desse conjunto é um estado puro. No entanto, sistemas quânticos não são necessariamente preparados igualmente. Caso o feixe de partículas seja formado por duas partes preparadas independentemente, ou seja, sem que exista uma relação de fase definida entre elas, o feixe combinado não pode mais ser representado por um único vetor de estado; existe uma mistura estatística envolvida tal que esse sistema físico terá uma população fracionária ou um peso probabilístico, onde digamos que 50% seja da população representada por um estado $|\psi_1\rangle$ e a outra por um estado $|\psi_2\rangle$. Dizemos que esse sistema é então representado por uma mistura de estados. É sobretudo por causa desses últimos que usamos o operador densidade.

◇ *Definição do operador densidade*

O operador densidade que descreve o estado de um sistema quântico é definido como

$$\hat{\rho} \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.11)$$

onde cada p_i representa o peso probabilístico clássico do conjunto ser caracterizado pelo estado $|\psi_i\rangle$, e $\sum_i p_i = 1$. Quando o sistema é descrito por um único estado puro o operador densidade se reduz a

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (2.12)$$

Um operador densidade deve obedecer a seguintes propriedades [1]:

- 1 - A condição de normalização: $\text{tr}(\hat{\rho}) = 1$.
- 2 - Ser positivo: $\hat{\rho} \geq 0$.
- 3 - Ser hermitiano: $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$.

A fim de demonstrar essas propriedades, vamos supor que o operador densidade seja escrito como (2.11). Então,

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(\hat{\rho}) &= \text{tr} \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \\
 &= \sum_i \sum_j p_i \langle\psi_j|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle \\
 &= \sum_i p_i \langle\psi_i|\psi_i\rangle \\
 &= 1,
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

mostrando que a condição 1 é satisfeita. Para um estado arbitrário $|\psi_j\rangle$ do espaço vetorial do sistema, o produto interno

$$\begin{aligned}
 \langle\psi_j|\hat{\rho}|\psi_j\rangle &= \sum_i p_i \langle\psi_j|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle \\
 &= \sum_i p_i |\langle\psi_j|\psi_i\rangle|^2 \\
 &\geq 0,
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

satisfazendo a condição 2. Este resultado é nulo apenas quando o produto interno $\langle\psi_j|\psi_i\rangle = 0$. Isto significa que os estados $\{|\psi_i\rangle, |\psi_j\rangle\}$ são ortogonais. A propriedade 2 garante que o operador tenha decomposição espectral [1]

$$\hat{\rho} = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|. \tag{2.15}$$

Esta é a representação na forma diagonal, $|i\rangle$ são autoestados ortogonais e os seus autovalores associados λ_i são não-negativos e reais. Operadores com autoestados ortogonais e autovalores reais são chamados de Hermitianos, e, portanto, $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$ [33].

Essas propriedades se mantêm independente do conjunto e o operador $\hat{\rho}$ é um operador densidade que satisfaz todas elas conseguindo assim representar um sistema quântico, ou seja, as condições de probabilidades reais, positivas e normalizadas são satisfeitas.

Supondo agora a medição de algum observável A atuando em um conjunto. O valor esperado desse observável sob um estado puro é calculado através da regra $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$. Para estados misturados esta regra é generalizada reunindo a probabilidade clássica e as probabilidades de natureza quântica. Assim,

$$\begin{aligned}
 \langle A \rangle &= \sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle \\
 &= \sum_i \sum_{a'} \sum_{a''} p_i \langle \psi_i | a' \rangle \langle a' | A | a'' \rangle \langle a'' | \psi_i \rangle, \\
 &= \sum_{a'} \sum_{a''} \langle a'' | \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right) | a' \rangle \langle a' | A | a'' \rangle \\
 &= \text{tr}(\hat{\rho}A).
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Esta expressão do valor esperado de A com a regra do traço é a mesma tanto para estados puros como para estados mistos. A única diferença é que a característica de mistura está

incorporada no estado $\hat{\rho}$ e os valores esperados referentes a cada estado puro $|\psi_i\rangle$ serão ponderados por pesos p_i .

Existe ainda uma outra condição interessante do operador densidade que é a identificação da pureza. Estados puros mantêm a invariância do traço para $\hat{\rho}^2$. No geral, o traço do quadrado de $\hat{\rho}$ será

$$\text{tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1. \quad (2.17)$$

Quando o estado for puro, o operador densidade é idempotente $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ e $\text{tr}(\hat{\rho}^2) = \text{tr}(\hat{\rho}) = 1$. Façamos agora p_i com mais de um valor não nulo. Usando o estado (2.11),

$$\hat{\rho}^2 = \sum_{i,j} p_j p_i |\psi_j\rangle \langle \psi_j | \psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.18)$$

Sabendo que $\langle \psi_j | \psi_i\rangle = \delta_{ij}$, então

$$\hat{\rho}^2 = \sum_i p_i^2 |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.19)$$

que difere da expressão Eq.(2.11). As probabilidades $p_i^2 \leq p_i$ obrigam que $\text{tr}(\hat{\rho}^2) < 1$ para estados misturados.

◇ *Evolução do operador densidade*

A dinâmica da evolução do operador densidade (2.11) é obtida fazendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) &= \frac{d}{dt} \sum_i p_i |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)| \\ &= \sum_i p_i \left[\frac{d|\psi_i(t)\rangle}{dt} \langle \psi_i(t)| + |\psi_i(t)\rangle \frac{d\langle \psi_i(t)|}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Do postulado da evolução de um estado na mecânica quântica, a evolução temporal de um vetor de estado $|\psi\rangle$ é regida pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (2.21)$$

e equivalentemente para o bra $\langle \psi|$,

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi(t)| = \langle \psi(t)| H, \quad (2.22)$$

onde H é o Hamiltoniano gerador da evolução. Substituindo ambas na expressão (2.20) obtemos a expressão que dita a evolução temporal do operador densidade

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \hat{\rho}(t)]. \quad (2.23)$$

Esta expressão é conhecida como equação de von Neumann. Caso $[H, \hat{\rho}] = 0$ o estado $\hat{\rho}$ permanece inalterado.

Ainda, sistemas fechados evoluem de acordo com uma operação unitária \hat{U} que relaciona o estado $|\psi\rangle$ do sistema em algum tempo t_1 com o estado $|\psi'\rangle$ do sistema no tempo t_2 , ou

seja, $|\psi'\rangle = \hat{U}(t_2, t_1)|\psi\rangle$ sendo $\hat{U} = \exp(\frac{-iHt}{\hbar})$. Estendendo esse postulado para o operador densidade, temos

$$\begin{aligned} \sum_i p_i |\psi'_i\rangle \langle \psi'_i| &= \sum_i p_i [\hat{U}(t_2, t_1) |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \hat{U}(t_2, t_1)^\dagger] \\ \hat{\rho}' &= \hat{U}(t_2, t_1) \hat{\rho} \hat{U}(t_2, t_1)^\dagger, \end{aligned} \quad (2.24)$$

que é a relação do operador densidade $\hat{\rho}'$ em um tempo qualquer com o operador densidade $\hat{\rho}$ do tempo t_0 .

◇ *Qubit e o operador densidade*

Vimos nesta seção que um estado puro é representado pelo operador densidade

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|.$$

Usando a representação geométrica de um qubit que matematicamente se dá através do estado da Eq. (2.4), o operador densidade para o estado puro é

$$\hat{\rho} = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \right] \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle 0| + e^{-i\phi} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \langle 1| \right]. \quad (2.25)$$

O resultado deste produto será

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle \langle 0| + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle \langle 1| + \\ &e^{i\phi} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \langle 0| + \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \langle 1|, \end{aligned} \quad (2.26)$$

que expresso matricialmente, fica

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\phi} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Aplicando as relações trigonométricas $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ e $\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$, chegamos ao resultado

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} & \frac{e^{-i\phi} \text{sen}\theta}{2} \\ \frac{e^{i\phi} \text{sen}\theta}{2} & \frac{1-\cos\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta & e^{-i\phi} \text{sen}\theta \\ e^{i\phi} \text{sen}\theta & 1 - \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Este resultado pode ser ainda reescrito se representarmos a exponencial em termos do cosseno e do seno. Isto é,

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta & \cos\phi \text{sen}\theta - i \text{sen}\phi \text{sen}\theta \\ \cos\phi \text{sen}\theta + i \text{sen}\phi \text{sen}\theta & 1 - \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Se formos mais adiante, esta matriz é o mesmo que

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \cos\phi \text{sen}\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \text{sen}\phi \text{sen}\theta \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right].$$

Neste ponto, podemos ver que surgiu 4 matrizes conhecidas, a primeira é a matriz identidade \hat{I} , as outras são as chamadas *matrizes de Pauli*, σ_x , σ_y e σ_z respectivamente. Os elementos são as coordenadas das projeções do vetor em uma esfera, sendo $x = \cos\phi\sin\theta$, $y = \sin\phi\sin\theta$ e $z = \cos\theta$. Assim, o operador densidade para um qubit será

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\hat{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) \quad (2.27)$$

onde $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ é um vetor unitário e é, em homenagem ao físico Felix Bloch, chamado de *vetor de Bloch*, e o vetor $\vec{\sigma} = \sigma_x\hat{x} + \sigma_y\hat{y} + \sigma_z\hat{z}$ é o *vetor de Pauli*, em homenagem ao físico Wolfgang Ernst Pauli. Qualquer sistema de dois níveis pode ser descrito através dessa representação do operador densidade e isso significa que esses sistemas serão caracterizados por um ponto na esfera de Bloch.

2.3.1 Traço parcial e o operador densidade reduzido

O operador densidade reduzido é uma ferramenta usada para caracterizar subsistemas de sistemas compostos. Esta forma reduzida do operador é muito utilizada no tratamento de sistemas quânticos abertos onde desejamos focar exclusivamente em algum sistema de interesse.

Supondo que dois subsistemas A e B fazem parte de um sistema composto $\hat{\rho}^{AB}$, então os operadores densidade reduzidos referentes aos subsistemas A e B são, respectivamente,

$$\hat{\rho}^A = \text{tr}_B(\hat{\rho}^{AB}), \quad (2.28)$$

e

$$\hat{\rho}^B = \text{tr}_A(\hat{\rho}^{AB}), \quad (2.29)$$

onde a operação traço com subscrito A ou B significa que o traço é executado apenas sob a base do espaço do subsistema que não se tem interesse. Esta operação de traço é chamada de *traço parcial*.

A medição de algum observável atuante em um dos subsistemas de interesse fornece um resultado interessante. Como vimos nas Eqs. (2.9) e (2.10), a ação de algum observável no espaço maior é fruto da atuação dos observáveis em cada um dos subsistemas. Digamos que o subsistema de interesse seja o sistema A . O observável agindo em A será $\hat{O} = \hat{O}_A \otimes \hat{I}_B$, onde \hat{I}_B é uma identidade atuando no espaço de B . Vamos considerar que $\{|\psi_k\rangle\}$ e $\{|\psi_l\rangle\}$ sejam bases dos espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B de A e B . O valor esperado do observável

será

$$\begin{aligned}
\langle \hat{O} \rangle &= \text{tr}(\hat{\rho}O) \\
&= \sum_{k,l} \langle \psi_l | \langle \psi_k | \hat{\rho} (\hat{O}_A \otimes \hat{I}_B) | \psi_k \rangle | \psi_l \rangle \\
&= \sum_k \langle \psi_k | \left(\sum_l \langle \psi_l | \hat{\rho} | \psi_l \rangle \right) \hat{O}_A | \psi_k \rangle \\
&= \sum_k \langle \psi_k | (\text{tr}_B \hat{\rho}) \hat{O}_A | \psi_k \rangle \\
&= \text{tr}_A(\hat{\rho}_A \hat{O}_A),
\end{aligned} \tag{2.30}$$

que é exatamente a média de um observável executada sob o subsistema A . Então, a matriz densidade reduzida fornece toda a estatística das medidas feitas em um subsistema, que é parte integrante de um sistema composto.

2.4 Polarização da luz

A luz, como bem sabemos, é uma pequena faixa do espectro da radiação eletromagnética. Classicamente, ela se comporta como uma onda eletromagnética. Ondas eletromagnéticas têm caráter transversal, onde os campos elétricos \vec{E} e magnético \vec{B} oscilam perpendicularmente entre si e à direção de propagação da onda. Por causa disso, a luz apresenta uma característica muito importante denominada *polarização*, e este fenômeno está diretamente relacionado à direção de oscilação do campo elétrico. Como veremos adiante, as componentes do vetor campo elétrico podem estar oscilando com a mesma fase ou fora de fase. Isto permite, juntamente com as amplitudes das componentes, que a polarização seja de 3 tipos.

O vetor campo elétrico de uma onda de luz que se propaga na direção z é resultante da soma de suas componentes

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t), \tag{2.31}$$

com a parte real dessas componentes sendo [2]:

$$\vec{E}_x(z, t) = \hat{i} E_{0x} \cos(kz - \omega t) \tag{2.32}$$

e

$$\vec{E}_y(z, t) = \hat{j} E_{0y} \cos(kz - \omega t + \phi), \tag{2.33}$$

onde \hat{i} e \hat{j} são vetores unitários nas direções x e y , E_{0x} e E_{0y} são as amplitudes das componentes do campo elétrico, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o número de onda (λ é o comprimento de onda), ω é a frequência angular e ϕ é a fase relativa entre as componentes. Caso $\vec{E}_x(z, t)$ e $\vec{E}_y(z, t)$ estejam em fase, ou seja, ϕ igual a zero ou múltiplos inteiros de $\pm 2\pi$, a onda de luz possuirá *polarização linear*. Então, a parte real da Eq. (2.31) resulta em

$$\vec{E}(z, t) = (\hat{i} E_{0x} + \hat{j} E_{0y}) \cos(kz - \omega t). \tag{2.34}$$

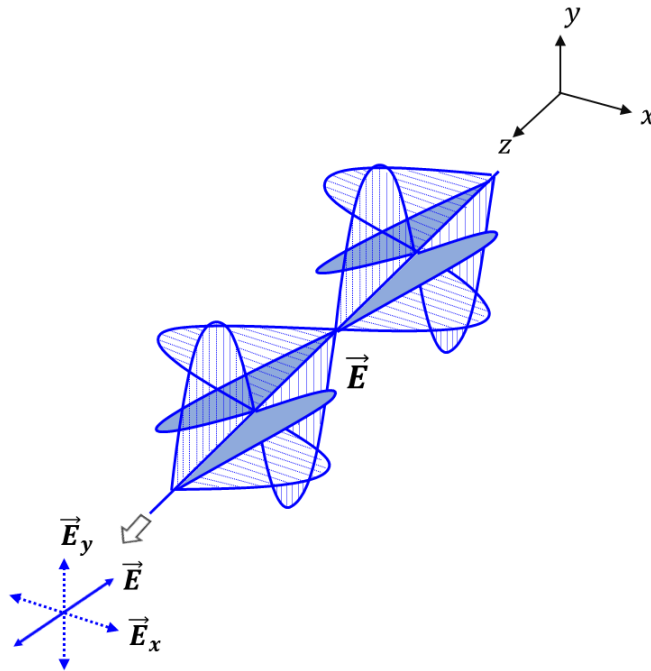


Figura 3 – Polarização Linear. Enquanto a onda se propaga na direção z o campo elétrico segue oscilando em um mesmo plano e mesma direção formando uma linha diagonal que varia entre o primeiro e o terceiro quadrante, tornando a onda polarizada. Figura adaptada de [2].

O que se observa é o campo elétrico oscilando num plano formando uma linha reta. A este tipo de polarização dá-se o nome de *linear diagonal* ilustrada na Figura 3. O oposto dessa polarização é a *linear anti – diagonal* que difere apenas pela rotação do plano de oscilação (Figura 4a). Para tal, a fase ϕ assume valores múltiplos inteiros de $\pm\pi$ e a expressão para a Eq. (2.31) é

$$\vec{E}(z, t) = (\hat{i}E_{0x} - \hat{j}E_{0y})\cos(kz - \omega t). \quad (2.35)$$

Se uma das amplitudes E_{0y} ou E_{0x} for nula, as Eqs. (2.34) e (2.35) representam a oscilação do campo apenas no eixo x ou y e a polarização será *linear horizontal* ou *vertical* (Figura 4b e 4c).

Um outro caso interessante é o da polarização circular, que ocorre quando as componentes x e y têm as mesmas amplitudes $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, e a diferença de fase relativa assume valores $\phi = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, onde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ou seja, oscilam com uma diferença de fase de 90° ou algum múltiplo inteiro ímpar de $\frac{\pi}{2}$ [2]. As Eq. (2.32) e (2.33) para este caso passam a ser

$$\vec{E}_x(z, t) = \hat{i}E_0\cos(kz - \omega t) \quad (2.36)$$

e

$$\vec{E}_y(z, t) = \mp\hat{j}E_0\sin(kz - \omega t). \quad (2.37)$$

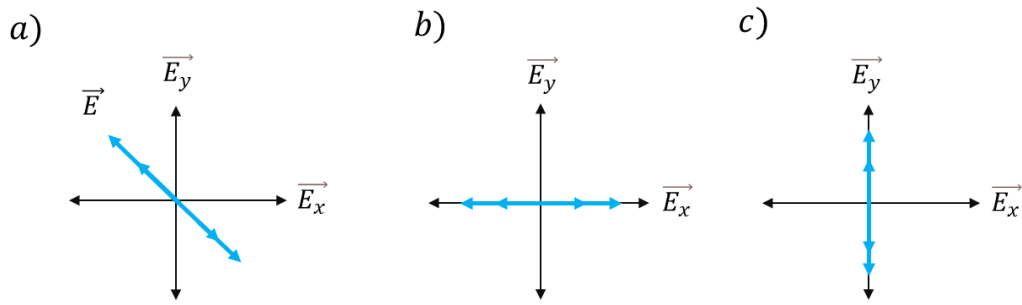


Figura 4 – Polarização Linear. a) O campo elétrico oscila em um plano formando uma linha entre o segundo e o quarto quadrante devido à diferença de fase entre as componentes do campo ter valores múltiplos de π . Dizemos que a polarização da onda é anti-diagonal. As figuras b) e c) mostram a direção de oscilação do campo elétrico diretamente sobre o eixo de uma de suas componentes. Neste caso dizemos que a onda é linearmente polarizada horizontal e vertical, respectivamente.

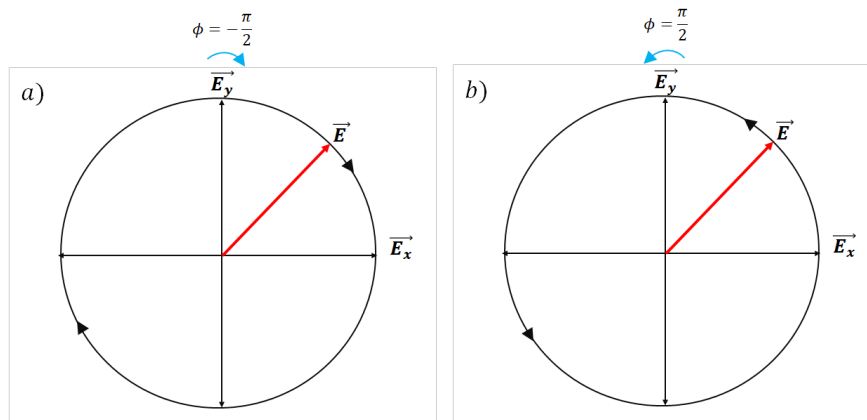


Figura 5 – Polarização Circular. a) Enquanto as amplitudes das componentes do campo elétrico se mantém iguais, a diferença de fase $-\frac{\pi}{2}$ entre elas garante que a ponta do vetor campo elétrico oscile formando um círculo com sentido de rotação para a direita sempre em um mesmo plano de vibração durante a propagação da onda. b) A diferença de fase $\frac{\pi}{2}$ garante que o campo elétrico oscile formando um círculo com rotação para a esquerda.

Conseqüentemente,

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \left(\hat{i} \cos(kz - \omega t) \mp \hat{j} \sin(kz - \omega t) \right). \quad (2.38)$$

Variando a posição z por um tempo t , o argumento do seno e do cosseno muda de 0 à 2π . Por estarem defasadas 90° , a ponta do vetor campo elétrico resultante oscilará percorrendo uma circunferência. Se $\phi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$ o campo elétrico oscila no sentido horário e a polarização é dita *circular à direita*; se $\phi = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, a oscilação é no sentido anti-horário e a polarização é *circular à esquerda* [2]. A Figura 5 representa esses dois casos.

Por fim, o caso mais geral é quando existem diferenças entre as amplitudes do campo e diferenças de fase relativa. O campo elétrico irá rotacionar acompanhando uma mudança

na sua magnitude. Assim, a ponta do campo elétrico percorrerá uma elipse e a luz será *elípticamente polarizada*. Neste caso, temos

$$E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \quad (2.39)$$

e

$$E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \phi), \quad (2.40)$$

que nos permite chegar à expressão para a curva formada. Combinando (2.39) na (2.40) expandida obtemos¹

$$\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos\phi = -\text{sen}(kz - \omega t) \text{sen}\phi. \quad (2.41)$$

Eliminaremos a dependência $(kz - \omega t)$ elevando a (2.41) ao quadrado. Usando a relação $\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$ e a Eq. (2.39), finalmente chegamos a expressão da elipse formada pelo campo elétrico

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\phi = \text{sen}^2\phi. \quad (2.42)$$

A partir desta expressão, em condições especiais, é possível chegar às outras polarizações linear e circular. O eixo maior da elipse forma um ângulo α com o eixo x (Figura 6)

$$\tan(2\alpha) = \frac{2E_{0x}E_{0y}\cos\phi}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}. \quad (2.43)$$

Na condição, ϕ é um múltiplo inteiro ímpar de $\pm\frac{\pi}{2}$, $\alpha = 0$. Isto faz (2.42) se resumir a expressão de uma elipse com semieixos em x e y :

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 = 1 \quad (2.44)$$

Além disso, acrescentando $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ teremos a polarização circular. Assim, a Eq. (2.44) fica

$$E_y^2 + E_x^2 = E_0^2, \quad (2.45)$$

que é a equação de uma circunferência.

Quando $\phi = 0$ ou múltiplos inteiros de $\pm\pi$ a elipse colapsa numa linha reta com ângulo de inclinação $\alpha = \pm \tan^{-1} \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$. A expressão (2.42) resultante é

$$\frac{E_x}{E_y} = \pm \frac{E_{0x}}{E_{0y}}. \quad (2.46)$$

A razão entre as componentes x e y é constante, portanto, a polarização é linear.

Esses formam os casos de luz polarizada, mas nem sempre a luz é polarizada. Podemos ter casos de luz despolarizada ou parcialmente polarizada. Por despolarizada entendemos

¹ Por expandida entendamos que foi usada a relação $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$.

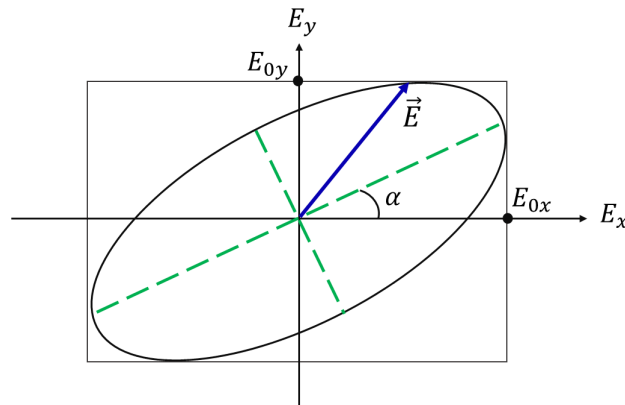


Figura 6 – Polarização Elíptica. Enquanto se propaga a ponta do campo elétrico varre uma elipse. É o caso mais geral da polarização do campo elétrico com amplitudes e fases relativas diferentes. O eixo maior da elipse forma um ângulo α com o eixo x e em condições especiais essa inclinação se altera formado um círculo ou uma linha. Figura adaptada de [2].

que o campo elétrico oscila em direções aleatórias e em escalas de tempo próximas de $10^{-8}s$ (tempo de emissão dos átomos), quando é difícil registrar alguma direção de oscilação permanente. Um exemplo de luz despolarizada é a luz natural, a luz proveniente do sol. Já a luz parcialmente polarizada apresenta uma quantidade de polarização associada que é quantificada através de um parâmetro chamado grau de polarização e será de nosso interesse nos estudos deste trabalho.

Vale ainda mencionar que existem várias formas de polarizar a luz. Os métodos são através de absorção (filtros polarizadores), reflexão, espalhamento e birrefringência. Voltamos a nossa atenção para os filtros polarizadores e a birrefringência. Na absorção há uma seleção em que parte da luz é absorvida e outra parte é transmitida. A birrefringência é a propriedade dos meios que têm dois índices de refração onde uma componente do campo que se propaga em uma direção apresenta uma velocidade enquanto a componente perpendicular apresenta outra velocidade. Com a diferença dos índices de refração a defasagem entre as componentes do campo variam à medida que a onda se propaga dentro desse meio. Assim, estabelece-se uma relação entre a espessura do meio, o tempo que a luz gasta para percorrê-lo e a defasagem entre as componentes permitindo gerar ondas com estado de polarização desejado [2, 34].

Voltaremos a falar sobre a polarização ao tratarmos de fótons nos próximos capítulos e como ferramenta dos nossos estudos.

2.5 Parâmetros de Stokes

A polarização elíptica, como vimos na seção anterior, é uma forma geral de descrever os estados de luz polarizada. Porém, partindo do pressuposto que nem sempre um feixe

de luz encontra-se polarizado, em 1852 George Gabriel Stokes apresenta uma forma de descrever o estado geral de polarização da luz a partir de observáveis [35]. Esses observáveis mostram que qualquer estado de polarização (polarizado, parcialmente ou não polarizado) pode ser descrito através de quatro quantidades conhecidas como *parâmetros de Stokes*.

◇ *Dedução dos Parâmetros de Stokes*

Considerando um par de ondas planas mutuamente ortogonais em um ponto no espaço $z = 0$ e monocromáticas. Estas ondas são representadas por [36, 37]

$$E_x(t) = E_{0x} \cos(\omega t + \delta_x) \quad (2.47)$$

e

$$E_y(t) = E_{0y} \cos(\omega t + \delta_y). \quad (2.48)$$

A fim de suprimir o termo ωt comum às duas componentes reescrevemos as duas expressões acima como

$$\frac{E_x(t)}{E_{0x}} = \cos(\omega t) \cos(\delta_x) - \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\delta_x), \quad (2.49)$$

$$\frac{E_y(t)}{E_{0y}} = \cos(\omega t) \cos(\delta_y) - \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\delta_y), \quad (2.50)$$

onde

$$\frac{E_x(t)}{E_{0x}} \text{sen}(\delta_y) - \frac{E_y(t)}{E_{0y}} \text{sen}(\delta_x) = \cos(\omega t) \text{sen}(\delta_y - \delta_x) \quad (2.51)$$

e

$$\frac{E_x(t)}{E_{0x}} \cos(\delta_y) - \frac{E_y(t)}{E_{0y}} \cos(\delta_x) = \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\delta_y - \delta_x) \quad (2.52)$$

são obtidas eliminando o termo ωt na Eq. (2.49). Elevando as Eqs. (2.51) e (2.52) ao quadrado e em seguida somando as duas, chegamos a expressão (2.42) da elipse:

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2} - \frac{2E_x(t)E_y(t)}{E_{0x}E_{0y}} \cos \delta = \text{sen}^2 \delta, \quad (2.53)$$

com $\delta = \delta_y - \delta_x$. Tomando uma média temporal da expressão dessa equação, para tempos longos de observação, ficamos com quantidade observáveis de tal modo que

$$\frac{\langle E_x^2(t) \rangle}{E_{0x}^2} + \frac{\langle E_y^2(t) \rangle}{E_{0y}^2} - \frac{\langle 2E_x(t)E_y(t) \rangle}{E_{0x}E_{0y}} \cos \delta = \text{sen}^2 \delta, \quad (2.54)$$

onde

$$\langle E_i(t)E_j(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_i(t)E_j(t)dt, \quad i, j = x, y \quad (2.55)$$

onde T é o período [38, 39]. Multiplicando por $4E_{0x}^2 E_{0y}^2$ eliminamos o denominador da Eq. (2.54),

$$4E_{0y}^2 \langle E_x^2(t) \rangle + 4E_{0x}^2 \langle E_y^2(t) \rangle - 8E_{0x} E_{0y} \langle E_x(t) E_y(t) \rangle \cos\delta = (2E_{0x} E_{0y} \sin\delta)^2. \quad (2.56)$$

Esses valores médios são encontrados usando as Eqs. (2.47) e (2.48), de modo que

$$\langle E_x^2(t) \rangle = \frac{E_{0x}^2}{2}; \quad \langle E_y^2(t) \rangle = \frac{E_{0y}^2}{2}; \quad \langle E_x(t) E_y(t) \rangle = \frac{E_{0x} E_{0y} \cos\delta}{2}. \quad (2.57)$$

O efeito de adicionar $(E_{0x}^4 + E_{0y}^4)$ em ambos os lados da Eq. (2.56), reorganizada com os valores descritos na Eq. (2.57), resulta na expressão

$$(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)^2 - (E_{0x}^2 - E_{0y}^2)^2 - (2E_{0x} E_{0y} \cos\delta)^2 = (2E_{0x} E_{0y} \sin\delta)^2. \quad (2.58)$$

Esta equação pode ser escrita também como

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \quad (2.59)$$

onde as quantidades entre parênteses são

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \quad (2.60a)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \quad (2.60b)$$

$$S_2 = 2E_{0x} E_{0y} \cos\delta \quad (2.60c)$$

$$S_3 = 2E_{0x} E_{0y} \sin\delta. \quad (2.60d)$$

Estes observáveis são os *parâmetros de Stokes da polarização*. O parâmetro S_0 representa a intensidade total da luz e os demais descrevem o estado de polarização da luz onde S_1 , S_2 e S_3 são a tendência à polarização linear horizontal ou vertical, à polarização linear diagonal ou anti-diagonal e à polarização circular à direita ou à esquerda, respectivamente.

Para qualquer estado de polarização é válida a relação [38, 37]

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \quad (2.61)$$

onde a igualdade representa luz totalmente polarizada e a desigualdade é luz parcialmente polarizada. Os parâmetros de Stokes permitem ainda escrever o grau de polarização da luz como uma fração entre a quantidade de luz polarizada dividida pela intensidade total,

$$P = \frac{I_{pol}}{I_{tot}} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}, \quad (2.62)$$

com $0 \leq P \leq 1$. $P = 0$ e $P = 1$ representam, respectivamente, luz despolarizada e luz polarizada. O valor intermediário $0 < P < 1$ significa luz parcialmente polarizada.

◇ *Parâmetros de Stokes em função da notação complexa*

As Eqs. (2.47) e (2.48) em termos de amplitudes complexas

$$E_x(t) = E_x \exp(i\omega t), \quad (2.63)$$

$$E_y(t) = E_y \exp(i\omega t), \quad (2.64)$$

com

$$E_x = E_{0x} \exp(i\delta_x), \quad (2.65)$$

$$E_y = E_{0y} \exp(i\delta_y), \quad (2.66)$$

garantem que os parâmetros de Stokes sejam escritos em termos dessas amplitudes como

$$S_0 = E_x E_x^* + E_y E_y^*, \quad (2.67a)$$

$$S_1 = E_x E_x^* - E_y E_y^*, \quad (2.67b)$$

$$S_2 = E_x E_y^* + E_y E_x^*, \quad (2.67c)$$

$$S_3 = i(E_x E_y^* - E_y E_x^*), \quad (2.67d)$$

Caso as Eqs. (2.65) e (2.66) sejam substituídas em (2.67) retornaremos às equações das amplitudes reais da Eq. (2.60). Futuramente retornaremos aos parâmetros de Stokes no arcabouço da mecânica quântica usando a linguagem da luz constituída por fótons.

2.6 Interferência

Em fenômenos ondulatórios, quando duas ou mais ondas passam ao mesmo tempo pelo mesmo ponto no espaço, ocorre um efeito conhecido como interferência. De fato, esse efeito pode ser observado em ondas formadas na superfície da água, ondas sonoras e ondas eletromagnéticas em geral. A seguir faremos uma explanação do conceito de interferência do ponto de vista da física clássica.

Vamos considerar duas fontes S_1 e S_2 emitindo ondas de luz monocromática de mesma frequência ω , em um meio homogêneo. Dispondo as fontes em posições cuja distância entre elas seja $a \gg \lambda$ e localizando o ponto de observação P distante o suficiente como ilustra a Fig. 7, as ondas que chegam nesse ponto serão consideradas planas [2]. Para ondas linearmente polarizadas, as expressões dos campos elétricos são

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{01} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \omega t + \phi_1), \quad (2.68)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \omega t + \phi_2), \quad (2.69)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são as fases de cada uma. O princípio da superposição diz que essas ondas em P se somam e a onda resultante será $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Agora, gostaríamos de expressar o

resultado dessa soma em função da intensidade total nesse ponto. Usando a expressão da intensidade de uma onda

$$I = n\epsilon v \langle \vec{E}^2 \rangle_T, \quad (2.70)$$

onde n é o índice de refração, ϵ é a permissividade do meio, e v é a velocidade de propagação e $\langle \vec{E}^2 \rangle_T$ é a média temporal do valor da intensidade do campo elétrico (ver Eq. (2.55)). Aqui, iremos deixar de lado as constantes ϵ , v e n pelo fato de estarmos usando um meio homogêneo cujas propriedades físicas se mantêm iguais em toda parte. Deste modo, sabendo que $\vec{E}^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$, encontramos que

$$\begin{aligned} \vec{E}^2 &= (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \\ &= \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2. \end{aligned} \quad (2.71)$$

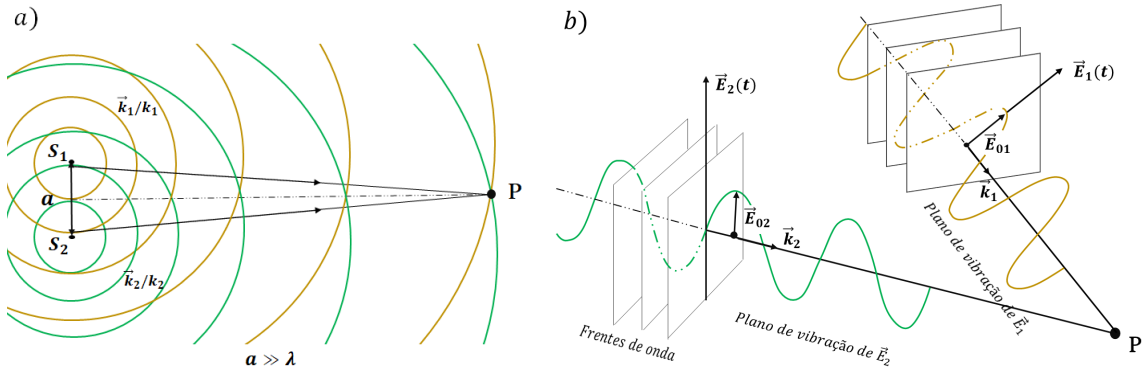


Figura 7 – Na figura (a) notamos as fontes pontuais e a sobreposição das ondas e a (b) simula a visão dos planos de vibração das ondas oriundas dessas fontes. Figura adaptada de [2].

Tirando a média temporal (2.55) dos dois lado dessa expressão, chegamos a intensidade (2.70) que será [2]:

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}, \quad (2.72)$$

onde $I_1 = \langle \vec{E}_1^2 \rangle_T$, $I_2 = \langle \vec{E}_2^2 \rangle_T$ e $I_{12} = 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle_T$. Os termos I_1 e I_2 são as intensidade relativas aos campos de cada fonte e o terceiro termo é conhecido como *termo de interferência*. Se o terceiro termo é nulo, dizemos que as ondas que chegam em P são incoerentes. Avaliando esse terceiro termo, $I_{12} = 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$, o tempo de resposta T de detecção da luz é muito maior que o período de oscilação da onda de luz, tal que ao substituir as expressões (2.68) e (2.69) nessa média, os termos $\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle_T = 0$, $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$ e $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$. Deste modo, temos

$$\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \frac{1}{2} \vec{E}_{01} \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \phi_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \phi_2). \quad (2.73)$$

Isso leva o termo de interferência a assumir a forma

$$I_{12} = \vec{E}_{01} \vec{E}_{02} \cos \delta, \quad (2.74)$$

onde $\delta = (\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \phi_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \phi_2)$ é a fase. Esse termo de interferência é nulo caso \vec{E}_{01} e \vec{E}_{02} sejam perpendiculares. Por outro lado, se \vec{E}_{01} e \vec{E}_{02} são paralelos, essa intensidade resulta em [2]

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta, \quad (2.75)$$

o que corresponde a reescrever a expressão da intensidade total em um ponto P como

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \quad (2.76)$$

Avaliando essa expressão, notamos que o valor da intensidade oscila em torno de $I_1 + I_2$ com o valor de δ , sendo por vezes maior ou menor ou igual a soma das intensidades de cada campo. Podemos ver dois lados: se o $\cos \delta = 1$, o valor da intensidade é máxima, sendo os valores de $\delta = 2m\pi$, com $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Dizemos que ocorreu interferência totalmente construtiva. Se o $\cos \delta = -1$, o valor da intensidade alcança seu valor mínimo quando $\delta = (2m + 1)\pi$. Há também os valores intermediários com interferência parcial, a depender do valor de δ . A Fig. 8 representa essa oscilação da intensidade em função do valor da fase.

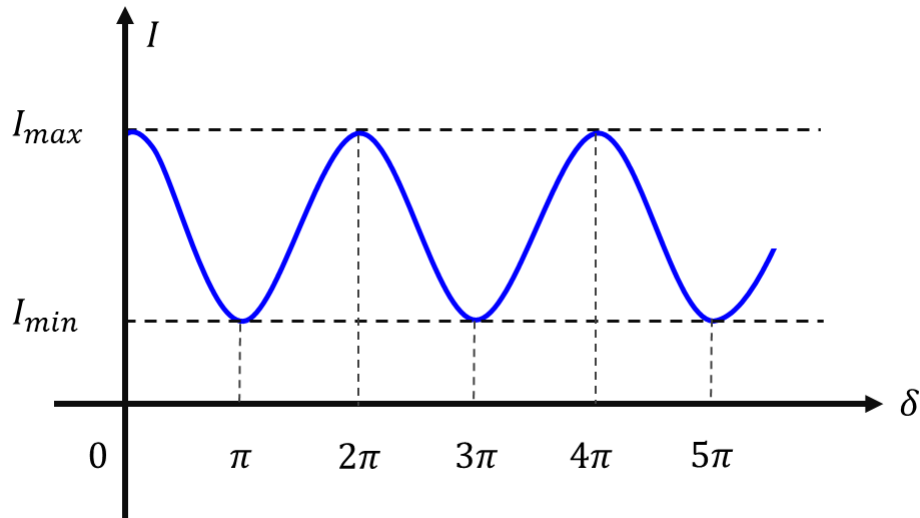


Figura 8 – Variação da intensidade total onda resultante em função da fase δ . Para valores de $\delta = 2m\pi$, I atinge seu valor máximo. Para valores de $\delta = (2m + 1)\pi$, I atinge seu valor mínimo. Figura adaptada de [3]

Particularmente, a situação em que $I_1 = I_2$ resulta em $I_{max} = 4I_1$ e $I_{min} = 0$. Dizemos que as franjas de interferência desses campos possuem, nessa condição, uma nitidez muito acentuada. É possível definir então a visibilidade, que foi introduzida por Michelson [2, 40] que é um nome dado à medida de nitidez ou qualidade das franjas de interferência num ponto de observação. Sua expressão é

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (2.77)$$

onde I_{max} e I_{min} são os máximos e mínimos da intensidade da luz registrados na tela de observação. É fácil perceber que o valor máximo de V ocorre quando $I_{min} = 0$, $V = 1$. Em oposição, se $I_{min} = I_{max}$ a qualidade das franjas desaparece formando um borrão na tela, $V = 0$.

3 Sistemas quânticos abertos

Podemos dizer que os sistemas físicos abertos são a classe dos sistemas físicos reais visto que os isolados são muito difíceis de controlar e manipular devido às influências externas. Assim, faz-se necessário o estudo desses sistemas juntamente com o ambiente que o circundam. Neste capítulo nós apresentaremos uma ferramenta que trata da dinâmica de sistemas quânticos abertos: os mapas quânticos, ou formalismo soma de operadores. Até chegar a esse ponto, teremos uma breve noção de um canal de informação clássico junto da noção de erro na transmissão de informação.

3.1 Canal de comunicação

Canal de comunicação é um meio de transmissão de informação codificada, seja ela clássica ou quântica, com a diferença de que o tratamento de uma se dá com as leis clássicas e o da outra com as leis quânticas. Um modelo simples de canal é o *canal binário*. Ele inclui a fonte e o receptor binários onde $X = \{x_1, x_2\}$ e $Y = \{y_1, y_2\}$ são as suas entradas e saídas, respectivamente, e cada qual com as suas distribuições de probabilidades associadas $p(x_i)$ e $p(y_i)$, com $i = 1, 2$ [4, 41]. A Figura 9 ilustra a transmissão de informação por esse canal. Na transmissão ideal sem erros os valores de saída correspondentes aos de entrada obedecem à relação

$$p(y_j|x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde $p(y_j|x_i)$ é a probabilidade condicional. Na presença de erros (ruídos) provenientes de interferências externas, as probabilidades já não são regidas por uma delta de Kronecker (3.1) e $p > 0$ (Figura 9).

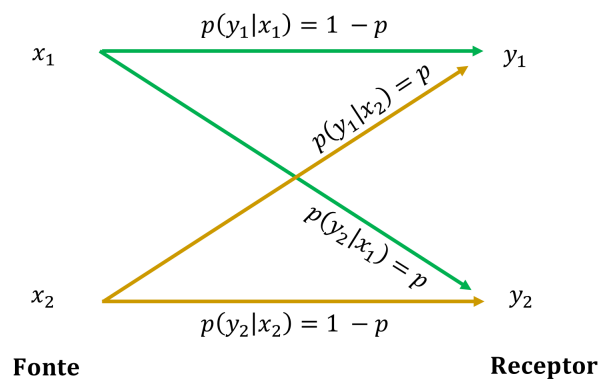


Figura 9 – Canal binário. Do lado esquerdo a fonte X e do lado direito o receptor Y . No centro as probabilidades condicionais. A informação é transmitida sem erros quando $p = 0$ e é transmitida com erros quando $p > 0$. Figura adaptada de [4]

No geral, um conjunto de probabilidades condicionais $p(y_j|x_i)$ associadas ao canal definem uma *matriz de transição* $P(Y|X)$ [4, 1]. Podemos então resumir a transformação da variável X em Y em uma matriz que relaciona as duas linearmente,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Agora, chamando a matriz de transição de B e estendendo esse processo discreto para o caso de mais passos, as probabilidades condicionais mostram uma independência da atuação dos ruídos em passos anteriores no sentido de que ao transformar $BX = Y$ e depois $BY = Z$, o passado de Y não influencia para que cheguemos em Z , só as probabilidades de Y , atuais, importam. Esses processos independentes são chamados de processos markovianos e são conhecidos por não possuírem memória do passado [1, 42, 43, 44].

As matrizes de transição obedecem às propriedades [1]:

1 - Positividade.

2 - Soma dos elementos das colunas igual a 1.

Na próxima seção continuaremos o estudo das matrizes de transição quânticas e essa propriedade 1 será reforçada para garantir que os estados emaranhados sejam corretamente contemplados pelo canal que chamaremos de *mapa quântico*.

3.2 Evolução do sistema quântico aberto

De uma forma geral podemos dizer que um sistema físico isolado é um sistema ideal, mas não real. Os efeitos externos funcionam como interferências muitas vezes incontroláveis. A esses sistemas reais damos o nome de sistemas abertos. Um sistema quântico aberto é um sistema S que está em contato ou acoplado com um outro sistema E que chamamos de *ambiente*. Esses sistemas, S e E , podem ser combinados e formarem um sistema composto $S + E$ tendo espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{SE} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$, com \mathcal{H}_S e \mathcal{H}_E sendo os espaços de Hilbert do sistema e do ambiente, respectivamente. A dinâmica desse sistema composto pode ser tratada como a de um sistema fechado cuja evolução é unitária. Todavia, com respeito a cada subsistema, a dinâmica é não unitária como consequência da interação que faz com que correlações entre sistema e ambiente sejam criadas. Para nossa satisfação veremos que é possível acompanhar a dinâmica de um subsistema a partir de uma evolução unitária se recorrermos ao operador densidade reduzido.

Segundo os postulados da mecânica quântica, a evolução de um sistema fechado é governada por uma operação unitária

$$\rho' = \hat{U} \rho \hat{U}^\dagger. \quad (3.3)$$

Assumindo que $S + E$ no tempo t_0 estão descorrelacionados, esta combinação é um estado separado

$$\hat{\rho}_{SE} = \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_E. \quad (3.4)$$

Substituindo na Eq. (3.3),

$$\hat{\rho}'_{SE} = \hat{U}[\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_E]\hat{U}^\dagger. \quad (3.5)$$

Esta equação descreve a evolução do sistema composto. No entanto, desde que o interesse seja no subsistema S vimos na subseção 2.3.1 que o operador densidade reduzida contém todas as estatísticas referentes a ele. Assim, a dinâmica do sistema de interesse S para qualquer instante de tempo t será regida por

$$\hat{\rho}'_S = \text{Tr}_E[\hat{U}(\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_E)\hat{U}^\dagger]. \quad (3.6)$$

Sabemos que o efeito de uma transformação unitária é o de preservar o produto interno entre vetores que sofrem a transformação, e que em geral acarreta uma mudança de representação do vetor em uma determinada base. A forma desta operação é a de um produto externo entre kets de uma base nova com uma base antiga [33]. Para a nossa finalidade a operação unitária que atua no espaço do sistema composto pode ser representada por [5]

$$\hat{U} = \sum_j k_j \hat{T}_{S_j} \otimes \hat{T}_{E_j}, \quad (3.7)$$

onde \hat{T}_S e \hat{T}_E são as transformações definidas em cada espaço de Hilbert \mathcal{H}_S e \mathcal{H}_E . Substituindo \hat{U} em (3.6) teremos

$$\hat{\rho}'_S = \sum_i \langle e_i | \sum_j k_j \hat{T}_{S_j} \otimes \hat{T}_{E_j} (\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_E) \sum_l k_l^* \hat{T}_{S_l}^\dagger \otimes \hat{T}_{E_l}^\dagger | e_i \rangle \quad (3.8)$$

$$= \sum_{i,j,l} k_j k_l^* \langle e_i | \hat{T}_{S_j} \hat{\rho}_S \hat{T}_{S_l}^\dagger \otimes \hat{T}_{E_j} \hat{\rho}_E \hat{T}_{E_l}^\dagger | e_i \rangle \quad (3.9)$$

$$= \sum_{i,j,l} k_j k_l^* \langle e_i | \hat{T}_{S_j} \hat{\rho}_S \hat{T}_{S_l}^\dagger \otimes \hat{T}_{E_j} | e_0 \rangle \langle e_0 | \hat{T}_{E_l}^\dagger | e_i \rangle \quad (3.10)$$

$$= \sum_{i,j,l} k_j k_l^* \hat{T}_{S_j} \hat{\rho}_S \hat{T}_{S_l}^\dagger \langle e_i | \hat{T}_{E_j} | e_0 \rangle \langle e_0 | \hat{T}_{E_l}^\dagger | e_i \rangle \quad (3.11)$$

$$= \sum_i \left(\sum_j k_j \hat{T}_{S_j} \langle e_i | \hat{T}_{E_j} | e_0 \rangle \right) \hat{\rho}_S \left(\sum_l k_l^* \hat{T}_{S_l}^\dagger \langle e_0 | \hat{T}_{E_l}^\dagger | e_i \rangle \right) \quad (3.12)$$

$$= \sum_i \left(\langle e_i | \sum_j k_j \hat{T}_{S_j} \otimes \hat{T}_{E_j} | e_0 \rangle \right) \hat{\rho}_S \left(\langle e_0 | \sum_l k_l^* \hat{T}_{S_l}^\dagger \otimes \hat{T}_{E_l}^\dagger | e_i \rangle \right) \quad (3.13)$$

$$= \sum_i \langle e_i | \hat{U} | e_0 \rangle \hat{\rho}_S \langle e_0 | \hat{U}^\dagger | e_i \rangle. \quad (3.14)$$

Na passagem da Eq. (3.8) para a (3.9) usamos a propriedade $(\hat{A} \otimes \hat{B})(\hat{C} \otimes \hat{D}) = \hat{A}\hat{C} \otimes \hat{B}\hat{D}$ [6]. Na Eq. (3.10) usamos o estado inicial do ambiente $\hat{\rho}_E = |e_0\rangle\langle e_0|$. Nomeando

$$\hat{K}_i = \langle e_i | \hat{U} | e_0 \rangle, \quad (3.15)$$

chegamos a expressão (3.14)

$$\hat{\rho}'_S = \sum_i \hat{K}_i \hat{\rho}_S \hat{K}_i^\dagger. \quad (3.16)$$

Esta é a expressão final da evolução do sistema aberto. Cada elemento \hat{K}_i é um operador residente no espaço do subsistema S , que satisfaz à relação $\sum_i \hat{K}_i^\dagger \hat{K}_i = I$, preservando assim o traço. Esta operação fornece o resultado do estado final do sistema $\hat{\rho}'_S$, e os operadores \hat{K}_i são também chamadas de *operadores de Kraus*. Podemos reescrever a Eq. (3.16) como

$$\hat{\rho}'_S = \mathcal{E}(\hat{\rho}_S). \quad (3.17)$$

$\mathcal{E}(\hat{\rho}_S)$ é um *mapa quântico* ou a *representação soma de operadores*, que mapeia toda a mudança que ocorre durante a dinâmica.

Os mapas quânticos levam matrizes densidade em matrizes densidade, e por isso devem obedecer às propriedades [1, 45, 46]:

1 - Preservar o traço $tr \{ \mathcal{E}(\hat{\rho}_S) \} = tr(\hat{\rho}_S)$;

2 - Ser linear: $\mathcal{E}(\sum_i p_i \hat{\rho}_i) = \sum_i p_i \mathcal{E}(\hat{\rho}_i)$;

3 - Ser completamente positivo;

Completamente positivo é que não apenas $\mathcal{E}(\hat{\rho}_S)$ é positivo, mas também que a operação para dimensões maiores ($\mathcal{E}_S \otimes I_E$) seja positiva.

3.3 Canais quânticos

Consideraremos agora alguns exemplos de canais quânticos para um único qubit com regras de probabilidades: existe uma probabilidade de o estado de entrada permanecer o mesmo e uma probabilidade complementar de sofrer uma alteração.

◇ Canal de despolarização

Neste modelo de canal o qubit de entrada pode permanecer inalterado com probabilidade $(1 - P)$ ou sofrer uma alteração com probabilidade P . A alteração pode ser de três tipos cada uma com igual probabilidade de ocorrência. Usando a base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ para o qubit, esses três tipos de alteração são [47]

Inversão de Bit	Inversão de fase	Inversão de Bit e fase
$ 0\rangle \longrightarrow 1\rangle$	$ 0\rangle \longrightarrow 0\rangle$	$ 0\rangle \longrightarrow i 1\rangle$
$ 1\rangle \longrightarrow 0\rangle$	$ 1\rangle \longrightarrow - 1\rangle$	$ 1\rangle \longrightarrow -i 0\rangle$

O qubit interage com o ambiente E e acompanharemos essa interação através do mapa. Para nosso objetivo não focaremos nas características do ambiente, apenas que ele deve

ter dimensão 4. Esta transformação é dada como

$$|0\rangle|e_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|0\rangle|e_0\rangle + \sqrt{\frac{P}{3}}(|1\rangle|e_1\rangle + |0\rangle|e_2\rangle + i|1\rangle|e_3\rangle), \quad (3.18)$$

$$|1\rangle|e_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|1\rangle|e_0\rangle + \sqrt{\frac{P}{3}}(|0\rangle|e_1\rangle - |1\rangle|e_2\rangle - i|0\rangle|e_3\rangle). \quad (3.19)$$

Neste caso, seguimos com a unitária

$$\begin{aligned} \hat{U} : \quad & \sqrt{1-P}(|0, e_0\rangle\langle 0, e_0| + |1, e_0\rangle\langle 1, e_0|) + \sqrt{\frac{P}{3}}(|1, e_1\rangle\langle 0, e_0| + |0, e_1\rangle\langle 1, e_0| + \\ & |0, e_2\rangle\langle 0, e_0| - |1, e_2\rangle\langle 1, e_0| + i|1, e_3\rangle\langle 0, e_0| - i|0, e_3\rangle\langle 1, e_0|). \end{aligned} \quad (3.20)$$

O ambiente evolui para um dos 4 estados base e isso para nós é um registro do que aconteceu com o sistema (qubit).

Os elementos (3.15) são

$$\hat{K}_0 = \langle e_0|\hat{U}|e_0\rangle = \sqrt{1-P}\hat{I}, \quad \hat{K}_1 = \langle e_1|\hat{U}|e_0\rangle = \sqrt{\frac{P}{3}}\sigma_x, \quad (3.21)$$

$$\hat{K}_2 = \langle e_2|\hat{U}|e_0\rangle = \sqrt{\frac{P}{3}}\sigma_z, \quad \hat{K}_3 = \langle e_3|\hat{U}|e_0\rangle = \sqrt{\frac{P}{3}}\sigma_y, \quad (3.22)$$

e a soma de todos eles, Eq. (3.16) apresenta os 4 possíveis resultados finais, expressamente

$$\hat{\rho}' = \mathcal{E}(\hat{\rho}) = (1-P)\hat{\rho} + \frac{P}{3}(\sigma_x\hat{\rho}\sigma_x + \sigma_y\hat{\rho}\sigma_y + \sigma_z\hat{\rho}\sigma_z), \quad (3.23)$$

onde $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ são as matrizes de Pauli. Para um $\hat{\rho}$ arbitrário vale a relação [1]

$$\hat{I} = \frac{\hat{\rho} + \sigma_x\hat{\rho}\sigma_x + \sigma_y\hat{\rho}\sigma_y + \sigma_z\hat{\rho}\sigma_z}{2}, \quad (3.24)$$

que pode ser substituída em (3.23). Logo,

$$\mathcal{E}(\hat{\rho}) = \left(1 - \frac{4P}{3}\right)\hat{\rho} + \frac{2P}{3}\hat{I}. \quad (3.25)$$

Usando a parametrização $\frac{4P}{3} = p$, a expressão do mapa que caracteriza um canal de despolarização é finalmente

$$\mathcal{E}(\hat{\rho}) = \frac{p\hat{I}}{2} + (1-p)\hat{\rho}. \quad (3.26)$$

Vamos analisar o que este canal faz com o estado inicial. Uma situação possível, claro, seria com $P = 0$, indicando uma preservação do estado inicial durante a interação. Por outro lado, é possível também a substituição do estado inicial por um estado completamente misturado e incoerente. A fim de visualizar melhor a sua ação, vamos recorrer à forma geométrica do estado qubit. Como vimos na seção 2.3, o operador densidade parametrizado em termos do vetor de Bloch é

$$\rho = \frac{1}{2}(\hat{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}), \quad (3.27)$$

onde \vec{r} é o vetor de Bloch. Sob a ação do canal despolarização os pontos de uma esfera com raio \vec{r} serão mapeados para uma esfera de raio [47, 46]

$$\vec{r} \longrightarrow \left(1 - \frac{4}{3}P\right) \vec{r} = \vec{r}'. \quad (3.28)$$

À medida que P aumenta torna-se menos provável a preservação do estado inicial. Analisando a situação em que $P = 1/2$ toda a esfera sofre uma contração cujo módulo do vetor \vec{r}' é $1/3$ menor que \vec{r} (Figura 10). Esta contração simétrica decorre da presença dos 3 tipos de erros igualmente prováveis. A situação extrema desse canal surge com o valor crítico $P = 3/4$. Neste momento a decoerência é total e o canal despolariza o estado levando-o a uma mistura total figurada geometricamente em $\vec{r}' = (0, 0, 0)$. Matematicamente, esse estado totalmente misturado em (3.26) se reduz a $\hat{I}/2$. De forma geral, podemos dizer que o canal de despolarização oferece ruído a qualquer estado quântico, levando qualquer estado puro para o estado totalmente misto.

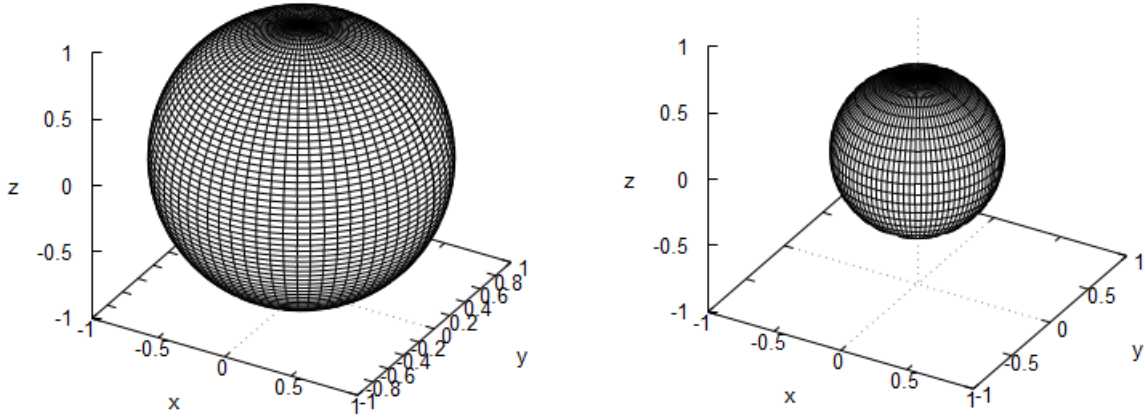


Figura 10 – Esfera de Bloch para o estado sob o efeito do canal despolarização. O lado esquerdo mostra a esfera de raio unitário e representa o estado inicial puro. Já o lado direito apresenta a contração do raio da esfera que é resultante da ação do canal para valor de $P = 1/2$.

◇ Canal amortecimento de amplitude

O canal amortecimento de amplitude é um esquema do modelo de decaimento do estado excitado de um átomo de dois níveis emitindo espontaneamente um fóton. Esta emissão causa uma modificação no estado do ambiente que o circunda. O estado fundamental do átomo é representado por $|0\rangle$ e o excitado por $|1\rangle$. Assume-se que o ambiente se encontra no estado de vácuo $|e_0\rangle$ [47]. Na ausência de interação, o átomo permanece no estado excitado e o ambiente permaneceria no estado $|e_0\rangle$. Na presença de interferência o ambiente recebe um fóton devido à transição e o átomo vai para o estado fundamental. A transformação que pode acontecer é

$$|0\rangle|e_0\rangle \longrightarrow |0\rangle|e_0\rangle, \quad (3.29)$$

$$|1\rangle|e_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|1\rangle|e_0\rangle + \sqrt{P}|0\rangle|e_1\rangle. \quad (3.30)$$

A expressão da unitária correspondente fica

$$\hat{U} : \quad |0, e_0\rangle\langle 0, e_0| + \sqrt{1-P}|1, e_0\rangle\langle 1, e_0| + \sqrt{P}|0, e_1\rangle\langle 1, e_0|. \quad (3.31)$$

Os operadores de Kraus adquirem a forma

$$\hat{K}_0 = \langle e_0|\hat{U}|e_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-P} \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\hat{K}_1 = \langle e_1|\hat{U}|e_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{P} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Assim, a evolução de ρ é dado como

$$\mathcal{E}(\rho) = \hat{K}_0\rho\hat{K}_0^\dagger + \hat{K}_1\rho\hat{K}_1^\dagger = \begin{pmatrix} \rho_{00} + P\rho_{11} & \sqrt{1-P}\rho_{01} \\ \sqrt{1-P}\rho_{10} & (1-P)\rho_{11} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Tendo em vista que os elementos fora da diagonal principal de uma matriz densidade dizem respeito à coerência, para $P = 1$ o canal amortecimento de amplitude gera perda total da coerência do sistema. Além disso, amortece, reduz a zero a amplitude do estado excitado $|1\rangle$, o que era de se esperar por ser um problema com decaimento espontâneo (e o elemento ρ_{11} vai a zero). Porém, a chance de encontrar o átomo no estado fundamental aumenta a ponto de que nesse extremo $P = 1$ o átomo tem probabilidade 1 de se encontrar no estado $|0\rangle$. No mais, manteríamos o estado do átomo preservado se $P = 0$, que seria a ausência de qualquer interferência externa.

◇ Canal defasagem

Um outro exemplo é um canal que provoca perda de informação quântica pelo sistema, sem a perda de energia, e, com isso a destruição da capacidade de produzir interferência pelo estado quântico. A consequência disso é a transição do comportamento quântico para o clássico através da decoerência. Considerando novamente um sistema como um qubit e o ambiente inicialmente no estado $|e_0\rangle$, a transformação sofrida será [47]:

$$|0\rangle|e_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|0\rangle|e_0\rangle + \sqrt{P}|0\rangle|e_1\rangle, \quad (3.35)$$

$$|1\rangle|e_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|1\rangle|e_0\rangle + \sqrt{P}|1\rangle|e_2\rangle. \quad (3.36)$$

O sistema não sofre nenhuma transição em sua base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, ao passo que o ambiente sofre uma dispersão com probabilidade P , sendo lançado para os estados $|e_1\rangle$ e $|e_2\rangle$ dependendo do estado do qubit. No entanto, como consequência dessa interação, o qubit começa a perder a fase relativa entre os estados base.

A expressão da operação unitária correspondente é

$$\hat{U} : \quad \sqrt{1-P}(|0, e_0\rangle\langle 0, e_0| + |1, e_0\rangle\langle 1, e_0|) + \sqrt{P}(|0, e_1\rangle\langle 0, e_0| + |1, e_2\rangle\langle 1, e_0|). \quad (3.37)$$

Os operadores de Kraus desse canal são:

$$\hat{K}_0 = \langle e_0 | \hat{U} | e_0 \rangle = \sqrt{1-P} I, \quad (3.38)$$

$$\hat{K}_1 = \langle e_1 | \hat{U} | e_0 \rangle = \sqrt{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

$$\hat{K}_2 = \langle e_2 | \hat{U} | e_0 \rangle = \sqrt{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Esses operadores obedecem a relação $K_0^2 + K_1^2 + K_2^2 = 1$. Também é possível expressá-los na forma [47]

$$\hat{K}_1 = \frac{\sqrt{P}}{2}(I + \sigma_3), \quad \hat{K}_2 = \frac{\sqrt{P}}{2}(I - \sigma_3), \quad (3.41)$$

que fornece a soma

$$\mathcal{E}(\hat{\rho}) = (1-p)\hat{\rho} + p\sigma_3\hat{\rho}\sigma_3, \quad (3.42)$$

onde parametrizamos $p = P/2$. Digamos que o qubit inicia-se no estado inicial $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Caso façamos uma medição nesse estado, o postulado de medição dirá que $|\alpha|^2$ é a probabilidade de encontrar o sistema no estado $|0\rangle$ e que $|\beta|^2$ é a probabilidade de encontra-lo no estado $|1\rangle$. Suponha agora que por algum motivo esquecemos os resultados dessas medidas. Daí, o que saberemos é que o sistema conjunto é descrito pelo estado [48]

$$\hat{\rho}' = |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1|. \quad (3.43)$$

O que queremos com isso é mostrar que o canal defasagem tem o mesmo efeito dessa medida esquecida. Para tal verificação, façamos $P = 1$, que significa $p = 1/2$, na Eq. (3.42). Usando o mesmo estado inicial $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ cuja representação através do operador densidade é

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(|\alpha|^2|0\rangle\langle 1| + \alpha\beta^*|0\rangle\langle 1| + \alpha^*\beta|1\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1|), \quad (3.44)$$

na condição de p mencionada, teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\hat{\rho} + \frac{1}{2}\sigma_z\hat{\rho}\sigma_z &= \frac{1}{2}(|\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + \alpha\beta^*|0\rangle\langle 1| + \alpha^*\beta|1\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1|) \\ &+ \frac{1}{2}(|\alpha|^2|0\rangle\langle 0| - \alpha\beta^*|0\rangle\langle 1| - \alpha^*\beta|1\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1|) \\ &= |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1|. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Como podemos observar, os termos fora da diagonal principal são anulados mantendo-se apenas os termos correspondentes às populações. Nesse sentido, vemos que esse tipo de canal provoca a decoerência sem perdas energéticas.

Sob a representação da esfera de Bloch, esse canal elimina as coordenadas do vetor de Bloch nos eixos x e y , alongando o esferoide sobre o eixo z (Figura 11).

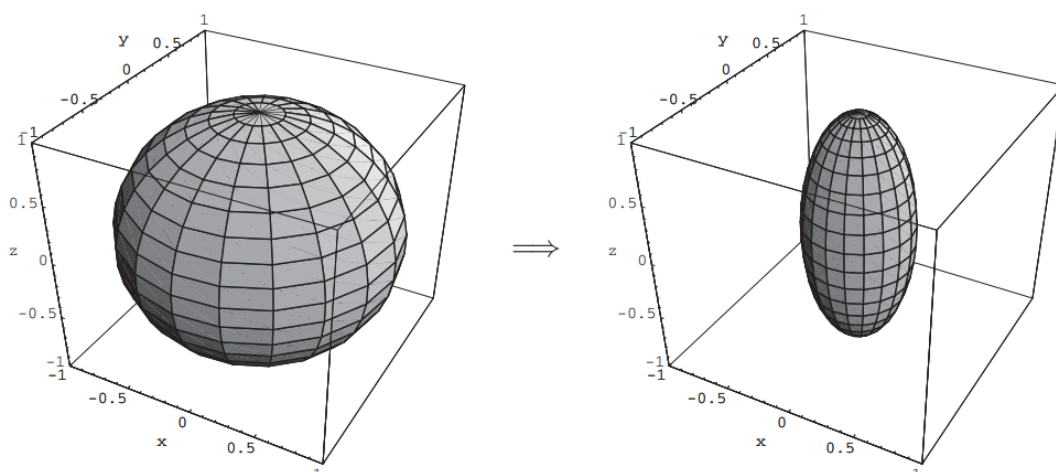


Figura 11 – Esfera de Bloch para o estado sob o efeito do canal defasagem. O lado esquerdo mostra a esfera de raio unitário e representa o estado inicial. Já o lado direito apresenta a contração do raio da esfera que é resultante da ação do canal para valor de $p = 0.3$. Imagem retirada de [1].

4 Descrição unificada das propriedades de coerência e polarização

Neste capítulo faremos uma revisão do tratamento unificado das propriedades de coerência e polarização da luz através do formalismo matriz densidade no cenário do experimento da dupla desenvolvido por Bernardo [49], que teve como motivação a descrição de unificação clássica proposta por Wolf [50]. Os resultados extraídos desse método servirão de base para os estudos por nós desenvolvidos. Antes de prosseguirmos, vamos nos familiarizar com o modo com que descrevemos a polarização da luz na teoria quântica.

4.1 Polarização dos Fótons

Após a proposta de Albert Einstein, em 1905, de que a energia da radiação eletromagnética era quantizada, o caráter corpuscular da luz foi reconhecido ao que, mais tarde, foi dado o nome de *fótons*¹, os quanta de energia.

Classicamente, é possível reduzir, bloquear ou transmitir totalmente a intensidade da luz que atravessa um filtro polarizador devido à orientação do eixo de transmissão desse filtro referente à direção de polarização da luz. Por exemplo, se um filtro de polarização linear está orientado na direção x , apenas a componente do campo elétrico paralela a direção de polarização do filtro é transmitida. A componente perpendicular é absorvida. Quanticamente, a energia total de uma onda de frequência ω se apresenta em múltiplos inteiros de $E = \hbar\omega$, onde \hbar é a constante de Planck. Quando a energia da onda é reduzida ao atravessar um polaroide significa que uma parte dos fótons atravessam e outra não [51]. Esse comportamento estranho é devido à probabilidade que cada fóton tem de passar ou não pelo dispositivo. Quando um filtro admite que um feixe de fótons o atravesse totalmente dizemos que os fótons emergentes se encontram em um único estado de polarização [52]. Esses fótons são representados por um único vetor de estado. O filtro pode transmitir todos os fótons no estado $|H\rangle$ que representa, classicamente, a luz linear horizontalmente polarizada, ou $|V\rangle$ verticalmente polarizada, ou em um estado fruto da combinação linear desses dois vetores base,

$$|\psi\rangle = a_1|H\rangle + a_2|V\rangle \quad (4.1)$$

onde a_1 e a_2 representam as amplitudes de probabilidades e obedecem à condição de normalização $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$.

¹ Os fótons têm a característica de não possuírem massa e nem carga. Dizer que uma partícula não tem massa significa que a partícula não pode estar em repouso. Ela estará sempre se movimentando [34].

Esses estados base $|H\rangle$ e $|V\rangle$ formam, semelhante ao caso clássico das componentes do vetor campo elétrico, um conjunto completo para representar os estados de polarização dos fótons. Por exemplo, os estados de polarização diagonal e anti-diagonal são estados descritos como

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) \quad (4.2)$$

e

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle). \quad (4.3)$$

No caso das polarizações circular à direita e à esquerda existe uma defasagem de $\pi/2$ entre os vetores base $|H\rangle$ e $|V\rangle$. Tais estados são:

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i|V\rangle), \quad (4.4)$$

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle). \quad (4.5)$$

Todos esses vetores de estado obedecem à condição de normalização e a ortogonalidade

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1,$$

o que significa que

$$\langle H|H\rangle = \langle V|V\rangle = 1, \quad \langle D|D\rangle = \langle A|A\rangle = 1, \quad \langle R|R\rangle = \langle L|L\rangle = 1, \quad (4.6)$$

e

$$\langle H|V\rangle = 0, \quad \langle D|A\rangle = 0, \quad \langle R|L\rangle = 0. \quad (4.7)$$

A representação matricial de cada estado desses é escrita como

$$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Neste ponto, devemos chamar a atenção que, nem sempre os fótons são polarizados. Eles podem ser encontrados em um estado parcialmente polarizado ou completamente despolarizado. Digamos que dois feixes de fótons são preparados separadamente com filtros de polarização que definem os estados de polarização $|\psi_1\rangle$ com intensidade I_1 e $|\psi_2\rangle$ com intensidade I_2 . Neste caso, temos uma mistura estatística clássica de dois grupos de fótons, cada um com estado de polarização específico [52].

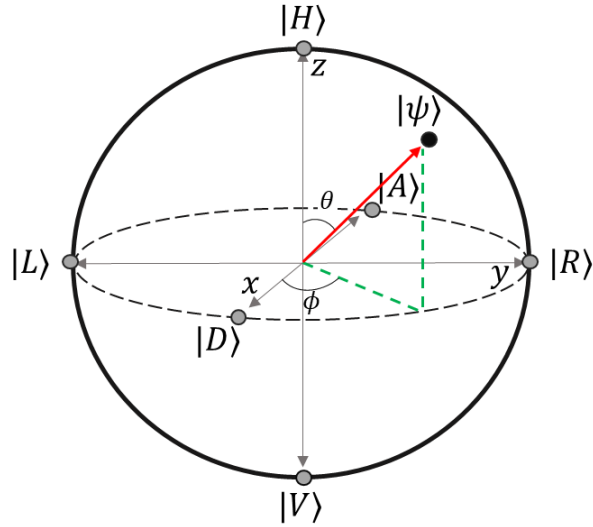


Figura 12 – Esfera Poincaré ou de Bloch de raio unitário. O estado de polarização totalmente polarizado é definido por qualquer um dos pontos na superfície da esfera. Todos os outros no interior são estados de polarização parcial. O ponto no centro da esfera representa o estado despolarizado. Figura adaptada de [5].

Geometricamente, o qubit para a polarização pode ser representado através da esfera de Poincaré (ou de Bloch). O estado (4.1) pode ser reescrito em termos de duas variáveis reais (θ, ϕ) como

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|H\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|V\rangle. \quad (4.11)$$

Os números θ e ϕ definem um ponto na esfera tridimensional de raio unitário como podemos ver pela Figura 12. Os pontos na superfície da esfera representam os estados puros e os do interior são os estados misturados. Quando mais próximo do centro da esfera, mais misturado o estado é, ou melhor, mais despolarizado.

4.2 Parâmetros de Stokes na mecânica quântica

As matrizes de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

possuem uma propriedade importante que é a capacidade de, juntamente com a matriz identidade 2×2 , servirem como base para representar qualquer matriz hermitiana [33]. Vimos na seção 2.3 que dois vetores $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}$ em que $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ dão como produto uma matriz 2×2 . Com isso, a representação de uma matriz densidade genérica, que deve ser hermitiana, pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

onde os coeficientes a_i são os elementos que caracterizam a matriz. Fazendo uma conexão com o tratamento quântico da polarização dos fótons, é possível escrever a matriz densidade em função dos parâmetros de Stokes que como sabemos, são coeficientes reais, reunindo as matrizes de Pauli na base $|H\rangle$ e $|V\rangle$ e a identidade \hat{I} . A matriz densidade em função dos parâmetros de Stokes é [53, 54]

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\hat{I} + \sum_{i=1}^3 \frac{S_i}{S_0} \sigma_i), \quad (4.14)$$

onde S_0 e S_i são os parâmetros de Stokes. Ao multiplicarmos a Eq. (4.14) por σ_i e aplicarmos o traço, explicitamos os parâmetros de Stokes que caracterizam o estado de polarização dos fótons,

$$S_i = \text{tr}(\sigma_i \hat{\rho}), \quad (4.15)$$

onde passaremos a usar

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\equiv |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|, \\ \sigma_2 &\equiv |H\rangle\langle V| + |V\rangle\langle H|, \\ \sigma_3 &\equiv i(|V\rangle\langle H| - |H\rangle\langle V|). \end{aligned}$$

Esses parâmetros da Eq. (4.15) são quantidades puramente descritas em função dos elementos da matriz densidade. Os parâmetros devem ser compreendidos como médias dos observáveis de Pauli para as polarizações, de modo que cada um quantifica o quanto de polarização horizontal ou vertical (S_1), diagonal ou anti-diagonal (S_2), circular à direita ou esquerda (S_3) os fótons possuem. O parâmetro S_0 representa a intensidade total do feixe de fótons.

4.3 Unificando a coerência e a polarização

A partir de agora veremos o modelo desenvolvido na Ref. [49] que unifica as propriedades de coerência e polarização na mecânica quântica através do formalismo de matriz densidade. Para isto, consideremos um ensemble de fótons polarizados submetidos ao aparato dupla fenda A que se encontra distante da tela de detecção B , como ilustra a Figura 13. Os fótons que chegam no ponto P da tela têm uma probabilidade de detecção associada que não depende apenas dos caminhos percorridos que são representados em termos de estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ relativos à passagem por cada fenda, mas também dos seus estados de polarização que podem ser horizontal $|H\rangle$ e vertical $|V\rangle$.

O estado desse ensemble de fótons é representado pela matriz densidade

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

cuja base é $\{|H, 1\rangle, |H, 2\rangle, |V, 1\rangle, |V, 2\rangle\}$. Esta base é fruto do produto tensorial e significa dizer que os fótons que passam pelas fendas 1 e 2, têm também os seus estados de polarização $|V\rangle$ ou $|H\rangle$ associados. A matriz (4.16) contém as informações de coerência e polarização, e por isso a chamaremos de matriz unificada de coerência e polarização.

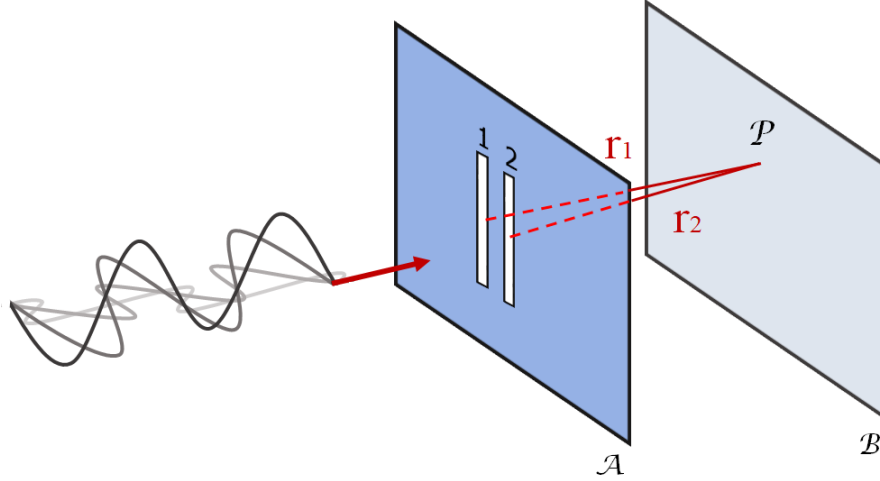


Figura 13 – Experimento da dupla fenda. Um ensemble de fótons passa pelas fendas 1 e 2 com um estado de polarização arbitrário, e a uma certa distância são detectados na tela B .

A densidade de probabilidade $\rho(P)$ de detecção dos fótons em P pode ser obtida através desta matriz. Considerando que os fótons polarizados horizontalmente não interferem com os polarizados verticalmente, e a contribuição que resta é a dos estados $|H\rangle$ e $|V\rangle$ em P de forma independente. Deste modo, a densidade de probabilidade desses fótons será

$$\rho(P) = \langle H, P | \hat{\rho} | H, P \rangle + \langle V, P | \hat{\rho} | V, P \rangle. \quad (4.17)$$

Se consideramos o comprimento de onda dos fótons maior do que a largura das fendas, as amplitudes de probabilidades dos fótons que emergem de cada uma podem ser descritas por ondas esféricas. Assim, temos

$$\langle H, 1 | H, P \rangle = \langle V, 1 | V, P \rangle = \frac{e^{ikr_1}}{r_1}, \quad (4.18)$$

$$\langle H, 2 | H, P \rangle = \langle V, 2 | V, P \rangle = \frac{e^{ikr_2}}{r_2}, \quad (4.19)$$

onde r_1 e r_2 são as distâncias das fendas ao ponto P . Substituindo (4.18) e (4.19) em (4.17), encontramos

$$\rho(P) = \rho_1(P) + \rho_2(P) + \sqrt{\frac{\rho_{11} + \rho_{33}}{r_1^2}} \sqrt{\frac{\rho_{22} + \rho_{44}}{r_2^2}} \frac{2\text{Re}[(\rho_{12} + \rho_{34})e^{ik(r_1-r_2)}]}{\sqrt{\rho_{11} + \rho_{33}}\sqrt{\rho_{22} + \rho_{44}}}, \quad (4.20)$$

com Re denotando a parte real e $\rho_1(P)$ e $\rho_2(P)$ sendo as densidades de probabilidades de detecção individuais associadas a cada fenda com valores

$$\rho_1(P) = \frac{\rho_{11} + \rho_{22}}{r_1^2} \quad (4.21)$$

e

$$\rho_2(P) = \frac{\rho_{22} + \rho_{44}}{r_2^2}. \quad (4.22)$$

Reorganizando um pouco mais a Eq. (4.20) obtemos a densidade de probabilidade

$$\rho(P) = \rho_1(P) + \rho_2(P) + 2\sqrt{\rho_1(P)}\sqrt{\rho_2(P)}Re[\mu e^{ik(r_1-r_2)}]. \quad (4.23)$$

O termo μ é o grau de coerência. Ele satisfaz a condição $0 \leq |\mu| \leq 1$ e isto é visto, fisicamente, através do padrão de interferência formado na tela. Nos limites extremos 0 e 1, $|\mu|$ representa, respectivamente, os padrões de interferência nulo e máximo. A sua expressão é

$$\mu = \frac{\rho_{12} + \rho_{34}}{\sqrt{\rho_{11} + \rho_{33}}\sqrt{\rho_{22} + \rho_{44}}}. \quad (4.24)$$

Podemos observar que nem todos os elementos da matriz densidade contribuem para a coerência. O fato de considerarmos mais de um grau de liberdade e de sabermos que estados com polarização ortogonal não interferem entre si confere a poucos elementos da matriz densidade a caracterização da coerência.

Agora, no que diz respeito ao estudo da polarização, vimos neste capítulo que o estado de polarização dos fótons é caracterizado pelos parâmetros de Stokes, a partir das médias dos observáveis da polarização, as matrizes de Pauli, Eq. (4.15). Os parâmetros de Stokes que caracterizam o estado de polarização dos fótons que atravessam a fenda 1 são

$$S_0^{(1)} = Tr[(|H, 1\rangle\langle H, 1| + |V, 1\rangle\langle V, 1|)\hat{\rho}_1] = \rho_{11} + \rho_{33}, \quad (4.25a)$$

$$S_1^{(1)} = Tr[(|H, 1\rangle\langle H, 1| - |V, 1\rangle\langle V, 1|)\hat{\rho}_1] = \rho_{11} - \rho_{33}, \quad (4.25b)$$

$$S_2^{(1)} = Tr[(|H, 1\rangle\langle V, 1| + |V, 1\rangle\langle H, 1|)\hat{\rho}_1] = \rho_{13} + \rho_{31}, \quad (4.25c)$$

$$S_3^{(1)} = -i \{Tr[(|H, 1\rangle\langle V, 1| - |V, 1\rangle\langle H, 1|)\hat{\rho}_1]\} = i(\rho_{13} - \rho_{31}). \quad (4.25d)$$

Similarmente, os parâmetros correspondentes a fenda 2 são

$$S_0^{(2)} = Tr[(|H, 2\rangle\langle H, 2| + |V, 2\rangle\langle V, 2|)\hat{\rho}_2] = \rho_{22} + \rho_{44}, \quad (4.26a)$$

$$S_1^{(2)} = Tr[(|H, 2\rangle\langle H, 2| - |V, 2\rangle\langle V, 2|)\hat{\rho}_2] = \rho_{22} - \rho_{44}, \quad (4.26b)$$

$$S_2^{(2)} = Tr[(|H, 2\rangle\langle V, 2| + |V, 2\rangle\langle H, 2|)\hat{\rho}_2] = \rho_{42} + \rho_{24}, \quad (4.26c)$$

$$S_3^{(2)} = -i \{Tr[(|H, 2\rangle\langle V, 2| - |V, 2\rangle\langle H, 2|)\hat{\rho}_2]\} = i(\rho_{24} - \rho_{42}). \quad (4.26d)$$

A partir deles, podemos definir o grau de polarização relativos a cada fenda pela expressão (2.62). Estes graus são, respectivamente,

$$p^{(1)} = \sqrt{1 - \frac{4(\rho_{11}\rho_{33} - \rho_{13}\rho_{31})}{(\rho_{11} + \rho_{33})^2}}, \quad (4.27)$$

$$p^{(2)} = \sqrt{1 - \frac{4(\rho_{22}\rho_{44} - \rho_{24}\rho_{42})}{(\rho_{22} + \rho_{44})^2}}, \quad (4.28)$$

e como vimos, seus valores obedecem a $0 \leq p^{(i)} \leq 1$, $i = 1, 2$, e os extremos $p^{(i)} = 0$ representando um estado despolarizado e $p^{(i)} = 1$ um estado polarizado.

Em suma, todas as informações que precisamos sobre coerência e polarização dos fótons estão contidas em (4.16), (4.24), (4.27), (4.28).

5 Quantificadores de Visibilidade e Distingui- bilidade

Este capítulo se destina ao desdobramento de nossa pesquisa sobre a dualidade onda-partícula onde desenvolvemos através do método unificado de coerência e polarização na seção 4.3 dois quantificadores simples do aspecto ondulatório e corpuscular partindo da visibilidade das franjas de interferência e da distinção entre estados quânticos. Mostraremos que esses quantificadores obedecem a uma relação de complementaridade provada na seção 5.4, e apresentaremos alguns exemplos a título de ilustração na seção 5.5.

5.1 Traço da distância

Medidas de distância em teorias de informação são formas de determinar o quão distintas são duas informações. Na teoria de informação clássica, os objetos de informação a serem comparados são as sequências de bits. A diferença entre um par de sequências pode ser calculada pela *distância de Hamming* $d_H(x, y)$. Essa medida dá o número de posições em que as duas sequências (de mesma quantidade de bits) são diferentes. Por exemplo, as sequências $x = 01001$, $y = 10000$, $z = 11001$ são $d_H(x, y) = 3$, $d_H(x, z) = 1$ e $d_H(z, y) = 2$. Porém, quando se trata de objetos de informação do tipo variáveis aleatórias, representadas por distribuições de probabilidades de várias sequências de bits, a maneira de diferenciá-los muda.

Podemos obter a distância entre duas distribuições de probabilidade clássicas $\{P = p_x\}$ e $\{Q = q_x\}$ através da *distância de Kolmogorov*[1, 55], que é definida como

$$D(P, Q) = \frac{1}{2} \sum |p_x - q_x|. \quad (5.1)$$

Essa medida (assim como a de Hamming) não é chamada de distância à toa: ela é uma métrica. A justificativa consiste na obediência às propriedades:

- 1) Definição positiva: $D(P, Q) \geq 0$,
- 2) Simétrica: $D(P, Q) = D(Q, P)$,
- 3) Nula se $P = Q$, $D(P, Q) = 0$,
- 4) Satisfaz à desigualdade triangular: $D(P, Q) \leq D(P, R) + D(R, Q)$.

Em teoria da informação quântica, o análogo clássico da distância de Kolmogorov é o chamado *traço da distância* $T(\hat{\rho}, \hat{\sigma})$. Dois estados quânticos $\hat{\rho}, \hat{\sigma}$ são bem parecidos ou

muito diferentes a depender do valor do traço da distância dado pela expressão

$$T(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = \frac{1}{2} \text{tr} |\hat{\rho} - \hat{\sigma}|, \quad (5.2)$$

com $|\hat{\rho} - \hat{\sigma}| = \sqrt{(\hat{\rho} - \hat{\sigma})^\dagger (\hat{\rho} - \hat{\sigma})}$ sendo o valor absoluto do operador $(\hat{\rho} - \hat{\sigma})$. Essa medida é uma métrica sobre o espaço dessas matrizes densidade que satisfaz às 4 propriedades. O seu limite superior é $T(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = 1$, quando os dois estados $\hat{\rho}$ e $\hat{\sigma}$ são ortogonais. Podemos reescrever $T(\hat{\rho}, \hat{\sigma})$ como a soma absoluta dos autovalores da matriz hermitiana $(\hat{\rho} - \hat{\sigma})$ ¹,

$$T(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = \frac{1}{2} \text{tr} \sqrt{(\hat{\rho} - \hat{\sigma})^2} = \frac{1}{2} \sum_i |\lambda_i|. \quad (5.4)$$

O traço da distância quântico coincide com a medida de distância de Kolmogorov clássica na condição em que as matrizes $\hat{\rho}$ e $\hat{\sigma}$ comutam, ou seja, quando são diagonais na mesma base. A fim de mostrar isso, vamos supor que

$$\hat{\rho} = \sum_i r_i |i\rangle\langle i|; \quad \hat{\sigma} = \sum_i s_i |i\rangle\langle i|, \quad (5.5)$$

então, o traço da distância entre elas será

$$\begin{aligned} T(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) &= \frac{1}{2} \text{tr} \sum_i (r_i - s_i) |i\rangle\langle i| \\ &= \frac{1}{2} \sum_i (r_i - s_i) \\ &= D(r_i, s_i), \end{aligned} \quad (5.6)$$

que constata a identificação.

Essa noção de distância entre dois operadores é bem visualizada no exemplo de estados de qubits na representação da esfera de Bloch. Supondo que \vec{r} e \vec{s} são os vetores de Bloch que caracterizam as matrizes

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2}; \quad \hat{\sigma} = \frac{\hat{I} + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}}{2}, \quad (5.7)$$

onde $\vec{\sigma}$ é o vetor das matrizes de Pauli, temos que o traço da distância entre esse par de estados é

$$\begin{aligned} D(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) &= \frac{1}{4} \text{tr} |(\vec{r} - \vec{s}) \cdot \vec{\sigma}| \\ &= \frac{|\vec{r} - \vec{s}|}{2}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

¹ Vamos chamar $\hat{A} = (\hat{\rho} - \hat{\sigma})$. Pela forma diagonal de $\hat{A} = S D S^{-1}$ e usando o fato que $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$, chegamos a

$$\begin{aligned} \text{tr} |\hat{A}| &= \text{tr} \sqrt{\hat{A}^\dagger \hat{A}} = \text{tr} \sqrt{\hat{A}^2} = \text{tr} \sqrt{S^2 D^2 S^{-1}{}^2} \\ &= \text{tr} (S \sqrt{D^2} S^{-1}) \\ &= \text{tr} (\sqrt{D^2} S^{-1} S) \\ &= \text{tr} (\sqrt{D^2}) \\ &= \sum_i |\lambda_i|, \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde usamos a invariância do traço nas permutações cíclicas dos elementos do seu argumento.

onde $|\vec{r} - \vec{s}|$ vem dos autovalores de $(\vec{r} - \vec{s}) \cdot \vec{\sigma}$ que são $\pm|\vec{r} - \vec{s}|$. Logo, a distância entre dois qubits na esfera de Bloch é a metade da distância euclidiana entre eles.

Uma outra característica importante do traço da distância é a sua capacidade de se manter invariante sob transformações unitárias [1],

$$D(U\hat{\rho}U^\dagger, U\hat{\sigma}U^\dagger) = D(\hat{\rho}, \hat{\sigma}), \quad (5.9)$$

cujo efeito é de não alterar a distinção entre os estados transformados.

Futuramente usaremos essa medida de distância para derivar um quantificador de distinguibilidade entre estados quânticos no experimento da fenda dupla, onde a polarização dos fótons é levada em conta. O traço da distância é também uma ferramenta muito importante nos estudos de sistemas abertos como testemunha de não markovianidade [56, 57], aparecimento de correlações entre sistema e ambiente [58], testemunha de correlação inicial entre sistema e ambiente [59, 60, 61, 62].

5.2 Quantificador de Visibilidade

Aqui, nós faremos o uso da visibilidade (ver seção 2.6) para chegarmos a um quantificador de visibilidade das franjas de interferência dos estados do fóton, quando a polarização é levada em conta, de acordo com o que foi proposto por nós na Ref. [32]. Para tal, reescrevemos a visibilidade agora não em função de intensidade, Eq. (2.77), mas em função da densidade de probabilidade de modo que

$$V = \frac{\rho_{max} - \rho_{min}}{\rho_{max} + \rho_{min}}, \quad (5.10)$$

com ρ_{max} e ρ_{min} sendo os valores máximos e mínimos. Esta densidade de probabilidade usada aqui é a oriunda da Eq. (4.23), cujos valores máximos e mínimos são obtidos pela mudança do terceiro termo da expressão que ocorre quando r_1 , r_2 e μ variam. O que faremos agora é reescrever o terceiro termo levando em conta que μ é um número complexo. Expressando $\mu = |\mu|e^{i\phi}$ na sua forma polar, a expressão (4.23) pode ser reescrita como

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + 2\sqrt{\rho_1\rho_2}|\mu|\cos[k(r_1 - r_2) + \phi]. \quad (5.11)$$

Deste modo, os máximos e mínimos são $\rho_{max,min} = \rho_1 + \rho_2 \pm 2\sqrt{\rho_1\rho_2}|\mu|$. Substituindo na Eq. (5.10) ficaremos com

$$V = \frac{2\sqrt{\rho_1\rho_2}|\mu|}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{2r_1r_2|\rho_{12} + \rho_{34}|}{r_1^2(\rho_{11} + \rho_{22}) + r_2^2(\rho_{33} + \rho_{44})}. \quad (5.12)$$

Focando na região de pontos mais próximos ao centro da tela de detecção, e considerando que as fendas e a tela estão relativamente distantes, é possível assumir que $r_1^2 \approx r_2^2 \approx r_1r_2$. Com isso, e levando em conta que $\text{tr}(\hat{\rho}) = 1$, a expressão acima se reduz a

$$V = 2|\rho_{12} + \rho_{34}|. \quad (5.13)$$

Esta é a expressão final do quantificador de visibilidade que depende unicamente dos elementos da matriz densidade de coerência e polarização.

5.3 Quantificador de Distinguibilidade

Como vimos na seção 5.1, o traço da distância diz o quão diferentes são dois estados quânticos. Aqui, derivaremos um quantificador de distinguibilidade para quantificar o quanto de informação existe a respeito dos caminhos dos fótons no interferômetro, considerando o grau de liberdade de polarização, proposto e desenvolvido por nós na Ref. [32]. O estado de polarização no caminho j (com $j = 1, 2$) pode ser descrito em termos dos parâmetros de Stokes através da expressão (4.14):

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \sum_{i=1}^3 \frac{S_i}{S_0} \sigma_i).$$

Usando agora os resultados das Eqs. (4.25) e (4.26) nós obtemos que

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{\rho_{11} + \rho_{33}} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{13} \\ \rho_{31} & \rho_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

e

$$\hat{\rho}_2 = \frac{1}{\rho_{22} + \rho_{44}} \begin{pmatrix} \rho_{22} & \rho_{24} \\ \rho_{42} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

A diferença entre os estados de polarização em cada caminho pode ser quantificada utilizando o distância da Eq. (5.4):

$$T(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = \frac{1}{2} \text{tr} \sqrt{(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_2)^2} = \frac{1}{2} \sum_i |\lambda_i|.$$

Um ponto a ser observado é que o traço da distância é baseado em iguais probabilidades de preparação dos dois estados, restringindo $T(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2)$ a quantificar apenas a capacidade de distinção relativa à polarização dos fótons em cada fenda. Para obtermos um quantificador de distinguibilidade que também considere a probabilidade do caminho, usamos a abordagem do traço da distância generalizado (ponderado), onde as atribuições de pesos são dadas pelas probabilidades de cada caminho I_1 e I_2 dos fótons passarem, respetivamente, pelas fendas 1 e 2. Assim,

$$D(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = \text{tr}(|I_1 \hat{\rho}_1 - I_2 \hat{\rho}_2|) = \text{tr}|\hat{\Delta}|, \quad (5.16)$$

onde o operador $\hat{\Delta} = I_1 \hat{\rho}_1 - I_2 \hat{\rho}_2$ é chamada de matriz de Helstrom [63]. Assim sendo, D considera a distinção entre $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$, como também a diferença nas probabilidades I_1 e I_2 de preparação dos dois estados. Em termos dos elementos de ρ , temos que $I_1 = S_0^{(1)} = \rho_{11} + \rho_{33}$ e $I_2 = S_0^{(2)} = \rho_{22} + \rho_{44}$.

Sendo assim, encontramos que

$$D = \text{tr} \left| \begin{pmatrix} (\rho_{11} - \rho_{22}) & (\rho_{13} - \rho_{24}) \\ (\rho_{31} - \rho_{42}) & (\rho_{33} - \rho_{44}) \end{pmatrix} \right|. \quad (5.17)$$

Os autovalores dessa matriz resultante $\hat{\Delta}$ são

$$\lambda_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4(|\beta|^2 - \kappa)}}{2}, \quad (5.18)$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4(|\beta|^2 - \kappa)}}{2}, \quad (5.19)$$

com $\alpha = \rho_{11} - \rho_{22} + \rho_{33} - \rho_{44}$, $\beta = (\rho_{13} - \rho_{24})$ e $\kappa = (\rho_{11} - \rho_{22})(\rho_{33} - \rho_{44})$. Chegando ao passo final, a expressão obtida para o quantificador fica

$$D = \frac{1}{2} \{|\alpha + \gamma| + |\alpha - \gamma|\}, \quad (5.20)$$

com $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + 4[|\beta|^2 - \kappa]}$. Essa é a expressão final do quantificador de distinguibilidade que considera tanto a influência dos estados de polarização como a probabilidade dos caminhos. Notamos que, usando a desigualdade triangular $|w + z| \leq |w| + |z|$, com $w = \alpha + \gamma$ e $z = \alpha - \gamma$ a Eq. (5.20) fornece $D \geq \alpha$. Isto nada mais é do que $D \geq |I_1 - I_2|$, e o lado direito dessa desigualdade é a definição de distinguibilidade/previsibilidade das Refs. [14, 15]. Isto significa que o nosso quantificador D também expressa a influência da polarização.

5.4 Relação de complementaridade

Os quantificadores derivados acima obedecem à desigualdade (1.1). Para demonstrar isto faremos nesta seção essa verificação desenvolvida pela Ref. [32]. Iniciamos lembrando que o quantificador de visibilidade encontrado foi

$$V = 2|\rho_{12} + \rho_{34}|. \quad (5.21)$$

Seu quadrado fica

$$V^2 = 4 \left\{ |\rho_{12}|^2 + |\rho_{34}|^2 + 2\text{Re}(\rho_{12}\rho_{43}) \right\}. \quad (5.22)$$

Usando a propriedade $|\rho_{nm}|^2 \leq \rho_{nn}\rho_{mm}$ [64] chegamos a uma desigualdade

$$V^2 \leq 4 \left\{ |\rho_{12}|^2 + |\rho_{34}|^2 + 2\text{Re}(\rho_{12}\rho_{43}) \right\}. \quad (5.23)$$

Agora, focando no quantificador de distinguibilidade (5.19), o quadrado de D é

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{1}{4} \{|\alpha + \gamma| + |\alpha - \gamma|\}^2 \\ &= \frac{1}{2} (\alpha^2 + \gamma^2 + |\alpha^2 - \gamma^2|) \\ &= \frac{1}{2} (2\alpha^2 + 4(|\beta|^2 - \kappa) + |4(|\beta|^2 - \kappa)|), \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde substituímos $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + 4(|\beta|^2 - \kappa)}$. Olhando para a expressão podemos observar que a igualdade só é válida em alguns casos pois, para números reais, $x + |x|$ obedece à condição

$$x + |x| = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 2x, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

o que dá a expressão (5.24) a forma de desigualdade

$$D^2 \leq \alpha^2 + 4(|\beta|^2 - \kappa). \quad (5.25)$$

Recordando também de β , verificamos que

$$\begin{aligned} |\beta|^2 &= |\rho_{13} - \rho_{24}|^2 \\ &= |\rho_{13}|^2 + |\rho_{24}|^2 - 2\text{Re}(\rho_{13}\rho_{42}), \end{aligned} \quad (5.26)$$

que, por uso da propriedade $|\rho_{nm}|^2 \leq \rho_{nn}\rho_{mm}$, fica

$$|\beta|^2 \leq \rho_{11}\rho_{33} + \rho_{22}\rho_{44} - 2\text{Re}(\rho_{13}\rho_{42}). \quad (5.27)$$

Assim, reescrevendo a Eq. (5.25) em termos de $|\beta|^2$, α^2 e κ , temos

$$\begin{aligned} D^2 &\leq \rho_{11}^2 + \rho_{22}^2 + \rho_{33}^2 + \rho_{44}^2 - 2\rho_{11}\rho_{22} + 2\rho_{11}\rho_{33} - 2\rho_{11}\rho_{44} - 2\rho_{22}\rho_{33} \\ &\quad + 2\rho_{22}\rho_{44} - 2\rho_{33}\rho_{44} + 4[(\rho_{11}\rho_{33} + \rho_{22}\rho_{44} - 2\text{Re}\rho_{13}\rho_{42}) \\ &\quad - \rho_{11}\rho_{33} + \rho_{11}\rho_{44} + \rho_{22}\rho_{33} - \rho_{22}\rho_{44}]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Podemos agora somar as duas desigualdades (5.23) e (5.28). Assim,

$$\begin{aligned} V^2 + D^2 &\leq 4\rho_{11}\rho_{22} + 4\rho_{33}\rho_{44} + 8\text{Re}\rho_{12}\rho_{43} + \rho_{11}^2 + \rho_{22}^2 + \rho_{33}^2 + \rho_{44}^2 \\ &\quad - 2\rho_{11}\rho_{22} + 2\rho_{11}\rho_{33} - 2\rho_{11}\rho_{44} - 2\rho_{22}\rho_{33} + 2\rho_{22}\rho_{44} - 2\rho_{33}\rho_{44} \\ &\quad - 8\text{Re}\rho_{13}\rho_{42} + 4\rho_{11}\rho_{44} + \rho_{22}\rho_{33}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Fazendo as operações necessárias ficamos com

$$\begin{aligned} V^2 + D^2 &\leq \rho_{11}^2 + \rho_{22}^2 + \rho_{33}^2 + \rho_{44}^2 + 2\rho_{11}\rho_{22} + 2\rho_{11}\rho_{33} \\ &\quad + 2\rho_{11}\rho_{44} + 2\rho_{22}\rho_{33} + 2\rho_{22}\rho_{44} + 2\rho_{33}\rho_{44}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde usamos a propriedade $\rho_{12}\rho_{43} = \rho_{13}\rho_{42}$ [64]. O resultado da reorganização da expressão acima fica

$$V^2 + D^2 \leq (\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44})^2, \quad (5.31)$$

e com isso chegamos ao passo final, já que a soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz densidade é a unidade. Logo,

$$V^2 + D^2 \leq 1. \quad (5.32)$$

Portando, provamos que os quantificadores que possuem influência da polarização e da coerência satisfazem à relação de complementaridade da desigualdade (1.1). Mostraremos na próxima seção alguns exemplos de aplicação e teste da desigualdade acima.

5.5 Exemplos

A fim de testar os quantificadores de visibilidade e distinguibilidade e a complementaridade de ambos faremos algumas aplicações em alguns estados quânticos. Como primeiro exemplo consideremos um conjunto de fótons com polarização horizontal atravessando a fenda dupla. O estado que representa esses fótons é escrito como

$$|\psi_1\rangle = a|H, 1\rangle + \sqrt{1-a^2}|H, 2\rangle, \quad (5.33)$$

com $0 \leq a \leq 1$ representando a amplitude de probabilidade associada aos fótons de cada fenda. Os quantificadores D e V nos extremos dos valores de a indicam sempre o comportamento de partícula, onde $D = 1$ e $V = 0$, visto que o fóton percorre apenas uma das fendas com 100% de chance. Ao observar o que acontece com a mudança desses quantificadores em virtude de a , como ilustrado na Fig. 14 verificamos que o comportamento ondulatório vai surgindo até um ponto em que $D = 0$ e $V = 1$ quando $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Esse estágio mostra um padrão de interferência com franjas maximamente definidas e de fato, ambos os caminhos percorridos são igualmente prováveis e impossíveis de serem diferenciados entre si. Vemos que a relação de complementaridade é sempre obedecida, e que para um exemplo de estado puro, temos sempre $V^2 + D^2 = 1$.

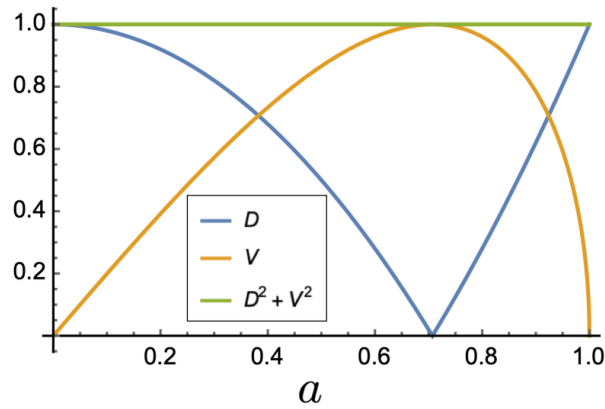


Figura 14 – Comportamento dos quantificadores V e D e da relação $V^2 + D^2$ em função do parâmetro a do estado $|\psi_1\rangle$. Para os valores extremos $a = 0$ e 1 os caminhos percorridos pelos fótons são totalmente distintos. À medida que cada caminho se torna igualmente provável $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, obtemos $D = 0$ e $V = 1$. Observamos também a validade da relação de complementaridade para todos os valores de a .

O segundo exemplo de estado que consideramos é um estado de polarização superposto, onde os fótons com polarização horizontal passam pela fenda 1 e com polarização circular à direita pela fenda 2:

$$|\psi_2\rangle = a|H, 1\rangle + \sqrt{1-a^2}(b|H, 2\rangle + i\sqrt{1-b^2}|V, 2\rangle), \quad (5.34)$$

com a, b parâmetros reais assumindo valores entre 0 e 1. Avaliando os casos para $b = 0$

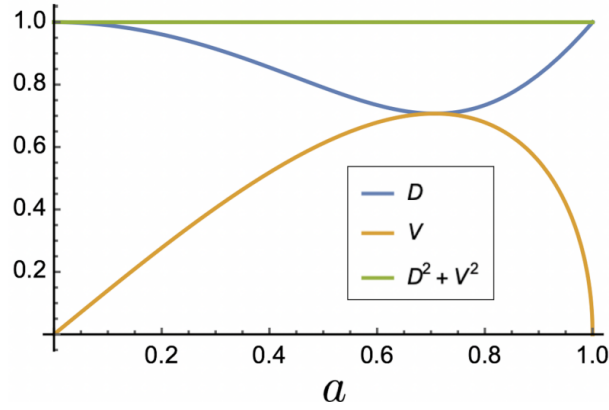


Figura 15 – Comportamento dos quantificadores V e D e da relação $V^2 + D^2$ em função do parâmetro a para o $|\psi_2\rangle$. Nos extremos $a = 0$ e 1 os caminhos percorridos pelos fótons são totalmente distintos. Na condição $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, quando ambos os fótons com as polarizações circular à direita e horizontal estão iluminando as fendas igualmente, surge então uma certa nitidez definindo um padrão de interferência com valor $D = V = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

para qualquer valor de a os caminhos são totalmente distintos e $V = 0$. Quando $b = 1$ retomamos o estado $|\psi_1\rangle$ cujo comportamento foi ilustrado na Fig. 14. O caso $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ torna o estado $|\psi_2\rangle = a|H, 1\rangle + \sqrt{(1-a^2)/2}(|H, 2\rangle + i|V, 2\rangle)$. Podemos observar o comportamento de D , V e $V^2 + D^2$ em função de a na Fig. 15. Como é possível ver, para o valor de $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, D e V assumem valores parciais $D = V = 1/\sqrt{2}$. Neste ponto, embora as probabilidades do caminho sejam iguais, existe uma polarização horizontal no caminho 1 e circular à direita no caminho 2, ou seja, a não ortogonalidade dos estados de polarização permite aumentar um comportamento híbrido de partícula e onda.

Por fim, um outro exemplo que consideramos é o estado de Werner. Estados de Werner são uma classe de estados que são definidos por um único parâmetro. Para determinados valores do parâmetro o estado é emaranhado e para outros é um estado separável. Aqui, esse estado envolverá o caminho e a polarização dos fótons da seguinte forma

$$\hat{\rho}_W = \eta|\psi^{(-)}\rangle\langle\psi^{(-)}| + \frac{1-\eta}{4}\hat{I}, \quad (5.35)$$

com valores de $0 \leq \eta \leq 1$. O termo \hat{I} é a matriz identidade 4×4 cuja base é $\{|H, 1\rangle, |H, 2\rangle, |V, 1\rangle, |V, 2\rangle\}$ e $|\psi^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H, 1\rangle - |V, 2\rangle)$ é o estado singlete de Bell que representa um estado maximamente emaranhado. Esses estados de Werner são separáveis para valores de $\eta \leq 1/3$ e emaranhados para valores acima [65]. O comportamento dos quantificadores apontando essa natureza é ilustrado na Fig. 16. Notemos que para $\eta = 0$ nem D e nem V possuem algum valor. Isto porque não existe nenhuma relação de fase entre os estados dos fótons que percorrem cada fenda, nem mesmo a intensidade da mistura que ilumina cada fenda pode dizer sobre o caminho porque é igual para cada uma. Aliás, $V = 0$ para todo valor de η . Isso decorre do fato que a formação do padrão de interferência decorreria do $|\psi^{(-)}\rangle$ mas isso não é possível pela ortogonalidade dos estados

de polarização e é por isso quando $\eta = 1$ os caminhos são perfeitamente distintos quando D atinge o valor máximo. Repousando agora o olhar sobre $V^2 + D^2$, o valor máximo é atingido e nesse ponto o estado é puro e maximamente emaranhado.

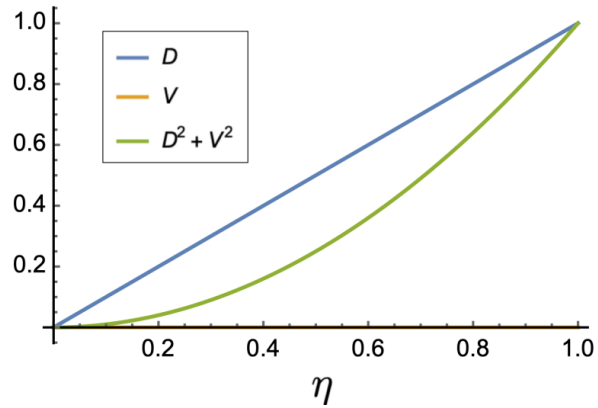


Figura 16 – Comportamento dos quantificadores V e D e da relação $V^2 + D^2$ em função do parâmetro η para o estado $\hat{\rho}_W$. Para os valores extremos $\eta = 0, 1$ a distinguibilidade D é nula no caso totalmente misto e máximo para o estado puro. A visibilidade V é nula para todos os valores de η .

6 Comportamento da visibilidade e da distinguibilidade na dinâmica de sistemas quânticos abertos

Nesta seção faremos uma aplicação dos quantificadores de distinguibilidade D e visibilidade V no contexto da dualidade onda-partícula dentro do estudo da dinâmica quântica aberta. Aqui, aproveitamos o cenário do experimento da dupla fenda em questão que permite descrever a ação de ambientes capazes de causar decoerência, despolarização e eventos de espalhamento dos fótons (sistema) [31, 66, 30], antes de passarem através das fendas, e investigamos como os quantificadores V e D podem fornecer informações sobre a interação sistema-ambiente. A dinâmica do sistema aberto é tratada através do formalismo da soma de operadores, visto na seção 3.2.

6.1 Interação sistema-ambiente

Vamos assumir aqui que o sistema (fótons) que vem sendo tratado neste trabalho interage com dois tipos de ambiente. Assumindo que o estado de entrada do sistema-ambiente é um estado não correlacionado na forma

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_E(0), \quad (6.1)$$

onde $\hat{\rho}_S$ é o operador que representa o estado de coerência-polarização dos fótons, de acordo com a Eq. (4.16), e $\hat{\rho}_E$ é o estado do ambiente, que é considerado em sua forma diagonal, $\hat{\rho}_E = \sum_i q_i |E_i\rangle\langle E_i|$, que pode ser um estado térmico [67, 68]. Aqui, para o nosso interesse, assumimos que o ambiente se encontra inicialmente num estado puro, o que é aceitável (ver Apêndice C).

Nesse contexto, considera-se que o sistema e o ambiente evoluem juntos sob uma operação unitária conjunta \hat{U}_{SE} , para que o estado reduzido do sistema evolua de acordo com a relação

$$\hat{\rho}_S(t) = \sum_i \hat{K}_i \hat{\rho}_S \hat{K}_i^\dagger, \quad (6.2)$$

onde $\hat{K}_i \equiv \langle E_i | \hat{U}_{SE} | E_0 \rangle$ são os elementos da soma, os operadores de Kraus (seção 3.2).

◇ Ambiente refrativo

Para prosseguir, começamos a estudar um exemplo de evolução sistema-ambiente que provoca apenas decoerência, apresentado pela primeira vez na ref. [49]. A ideia é que

algumas partículas ambientais ao interagirem com o sistema de fótons não alterem nem o caminho desses fótons e nem seu estado de polarização, mas como consequência, a marca da interação promove uma transição no estado do ambiente. Essa interação é representada pela seguinte transformação unitária:

$$|H, 1\rangle|E_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|H, 1\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|H, 1\rangle|E_1\rangle, \quad (6.3a)$$

$$|H, 2\rangle|E_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|H, 2\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|H, 2\rangle|E_2\rangle, \quad (6.3b)$$

$$|V, 1\rangle|E_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|V, 1\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|V, 1\rangle|E_1\rangle, \quad (6.3c)$$

$$|V, 2\rangle|E_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|V, 2\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|V, 2\rangle|E_2\rangle. \quad (6.3d)$$

Estas relações descrevem o caso de um ambiente constituído por pequenas partículas refrativas uniformemente distribuídas no espaço e que, por intermédio da interação, sofrem transições do estado inicial $|E_0\rangle$, como na Fig. 17, para um dos estados ortogonais $\{|E_1\rangle, |E_2\rangle\}$, a depender do caminho do fóton, com probabilidade P . Essa probabilidade P é a chance de ocorrer uma interação entre um fóton e um constituinte do ambiente por unidade de tempo Δt . Como consequência, a influência dessa interação provoca mudanças aleatórias de fase no sistema de fótons que atravessam a fenda dupla.

Olhando para o mapa de interação acima, notamos que o ambiente pode ser encontrado em três estados possíveis: $|E_0\rangle$, $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$. Se fossemos realizar uma medição no ambiente, o número de operadores correspondentes ao número desses estados ambientais seriam 3. O número de operadores dos elementos da soma Eq. (6.2) estão vinculados a isso. Esses operadores são:

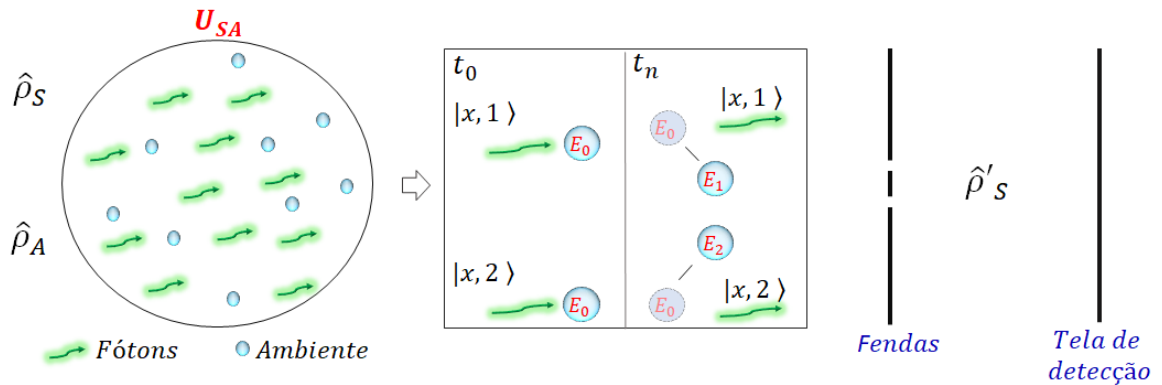


Figura 17 – Sistema de fótons em contato com um ambiente de partículas refrativas. Inicialmente o sistema e ambiente estão descorrelacionados. Em seguida, interagem e dessa interação pode ocorrer que, em algum tempo t_n , esses fótons com estados $|x, i\rangle$ ($x = H, V$ e $i = 1, 2$) terão interagido com essas partículas que mudarão do estado $|E_0\rangle$ para outros dependendo do caminho desses fótons. Este cenário é descrito pela dupla fenda que se encontra logo à frente. Os fótons que atravessam as fendas terão uma probabilidade P associada referente à interação ambiental que gera diretamente uma mudança no estado final $\hat{\rho}'_S$.

$$\hat{K}_0 = \sqrt{1-P}(|H, 1\rangle\langle H, 1| + |H, 2\rangle\langle H, 2| + |V, 1\rangle\langle V, 1| + |V, 2\rangle\langle V, 2|), \quad (6.4a)$$

$$\hat{K}_1 = \sqrt{P}(|H, 1\rangle\langle H, 1| + |V, 1\rangle\langle V, 1|), \quad (6.4b)$$

$$\hat{K}_2 = \sqrt{P}(|H, 2\rangle\langle H, 2| + |V, 2\rangle\langle V, 2|). \quad (6.4c)$$

Substituindo agora esses resultados na Eq. (6.2), expressaremos a evolução do estado do sistema em função de P . Mas também podemos considerar uma evolução que ocorre continuamente no tempo. A probabilidade de uma interação por unidade de tempo é Γ . Para um breve intervalo de tempo Δt , temos que $P = \Gamma\Delta t \ll 1$. Com isto, considerando a evolução do estado do sistema $\hat{\rho}_S(t)$ após um tempo $t = n\Delta t$, a consequência é a aplicação do mapa acima n vezes sucessivamente. Esta é uma suposição da dinâmica markoviana do sistema-ambiente, em que a evolução temporal do sistema no tempo presente não carrega memória do passado [69, 70]. Sendo assim, no limite $n \rightarrow \infty$ a relação probabilística $(1 - P) \rightarrow (1 - P)^n = (1 - \frac{\Gamma t}{n})^n = e^{-\Gamma t}$, onde assume-se que $\Delta t \rightarrow 0$. Levando todos estes pontos em consideração, o operador densidade reduzida dos fótons em função de t fica

$$\hat{\rho}_S = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \gamma\rho_{12} & \rho_{13} & \gamma\rho_{14} \\ \gamma\rho_{21} & \rho_{22} & \gamma\rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \gamma\rho_{32} & \rho_{33} & \gamma\rho_{34} \\ \gamma\rho_{41} & \rho_{42} & \gamma\rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

onde $\gamma = e^{-\Gamma t}$.

Agora, a fim de ilustrar a evolução temporal de D e V com a ação desta interação é interessante escolher um estado inicial para o sistema em que, no tempo inicial, estas duas quantidades não sejam zero. Aqui, assumimos um conjunto de fótons preparados numa sobreposição igual de polarização horizontal no caminho 1, $|H, 1\rangle$, e polarização diagonal no caminho 2, $|D, 2\rangle = 1/\sqrt{2}(|H, 2\rangle + |V, 2\rangle)$. Este estado é dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|H, 1\rangle + \frac{1}{2}(|H, 2\rangle + |V, 2\rangle), \quad (6.6)$$

e é um estado puro com distinguibilidade e visibilidade parcial. A evolução dessas duas quantidades é mostrada na Fig. 18. Os resultados estão de acordo com o que se espera das Eqs. (6.3a) a (6.3d). De fato, a visibilidade tende a zero para tempos longos, que é uma consequência das mudanças aleatórias de fase continuamente provocadas nos fótons causando a decoerência. Já a distinguibilidade entre os caminhos percorridos tem um valor constante, $D = 1/\sqrt{2}$. Isto porque as probabilidades do caminho não mudam com o tempo, dado que o mapa de evolução não prevê eventos de espalhamento dos fótons, e os estados de polarização associados a cada caminho são preservados.

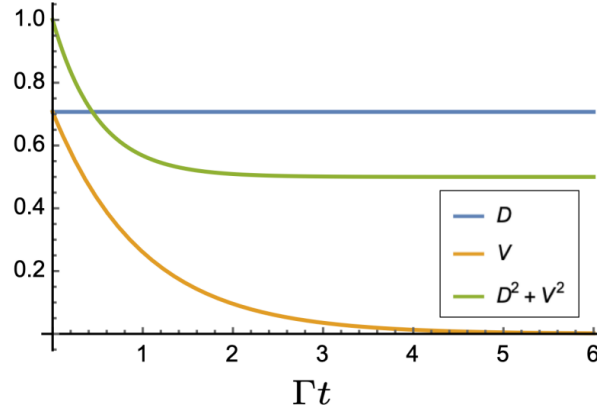


Figura 18 – Evolução temporal da distinguibilidade D , visibilidade V e da relação $D^2 + V^2$ para o estado $|\psi\rangle$ da Eq. (6.6) sob a ação do ambiente descrita das Eqs. (6.3a) a (6.3d). A ação da decoerência é vista no decaimento exponencial da visibilidade V . Enquanto isso, o valor de D se mantém invariável.

◇ Ambiente birrefringente

O segundo exemplo nosso aborda uma interação sistema-ambiente que envolve tanto decoerência como espalhamento dos fótons. A dinâmica é descrita pelo seguinte mapa unitário:

$$|H, 1\rangle|E_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|H, 1\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|H, 2\rangle|E_1\rangle, \quad (6.7a)$$

$$|H, 2\rangle|E_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|H, 2\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|H, 1\rangle|E_2\rangle, \quad (6.7b)$$

$$|V, 1\rangle|E_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|V, 1\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|V, 2\rangle|E_3\rangle, \quad (6.7c)$$

$$|V, 2\rangle|E_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|V, 2\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|V, 1\rangle|E_4\rangle. \quad (6.7d)$$

Aqui, a presença do ambiente provoca mudanças aleatórias de fase a depender da polarização dos fótons e causa também eventos de espalhamento. Na prática, isso pode vir a ocorrer num ambiente composto de pequenas partículas birrefringentes capazes de desviar as trajetórias dos fótons [71]. As relações acima referidas nos dizem que os fótons em um determinado caminho são espalhados para o outro caminho, diferente do caso anterior ilustrado na Fig. 17, em que os fótons não sofrem espalhamento com a interação. O estado do ambiente, que começa em $|E_0\rangle$, mudará para um dos estados ortogonais $\{|E_1\rangle, |E_2\rangle, |E_3\rangle, |E_4\rangle\}$, dependendo do caminho e da polarização dos fótons. Isto é, a informação do estado do fóton não é a mesma para estados de polarização e caminhos diferentes. Mais uma vez, o parâmetro P é a probabilidade de interação durante um intervalo de tempo Δt .

Os operadores de Kraus que ditam a evolução do estado dos fótons serão, ao todo, 5:

$$\hat{K}_0 = \sqrt{1-P}(|H, 1\rangle\langle H, 1| + |H, 2\rangle\langle H, 2| + |V, 1\rangle\langle V, 1| + |V, 2\rangle\langle V, 2|), \quad (6.8a)$$

$$\hat{K}_1 = \sqrt{P}(|H, 2\rangle\langle H, 1|), \quad (6.8b)$$

$$\hat{K}_2 = \sqrt{P}(|H, 1\rangle\langle H, 2|), \quad (6.8c)$$

$$\hat{K}_3 = \sqrt{P}(|V, 2\rangle\langle V, 1|), \quad (6.8d)$$

$$\hat{K}_4 = \sqrt{P}(|V, 1\rangle\langle V, 2|). \quad (6.8e)$$

Seguindo o mesmo procedimento do exemplo anterior, e assumindo outra vez uma interação sistema-ambiente markoviana, a evolução temporal do estado dos fótons pode ser escrita como

$$\hat{\rho}_S(t) = \begin{pmatrix} \gamma\rho_{11} + \epsilon\rho_{22} & \gamma\rho_{12} & \gamma\rho_{13} & \gamma\rho_{14} \\ \gamma\rho_{21} & \gamma\rho_{22} + \epsilon\rho_{11} & \gamma\rho_{23} & \gamma\rho_{24} \\ \gamma\rho_{31} & \gamma\rho_{32} & \gamma\rho_{33} + \epsilon\rho_{44} & \gamma\rho_{34} \\ \gamma\rho_{41} & \gamma\rho_{42} & \gamma\rho_{43} & \gamma\rho_{44} + \epsilon\rho_{33} \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

onde $\gamma = e^{-\Gamma t}$ e $\epsilon = (1 - e^{-\Gamma t})$.

Para efeitos de comparação, aqui também usamos o mesmo estado inicial do exemplo anterior, mostrado na Eq. (6.6), ilustrando agora diferentes aspectos presentes na dinâmica quântica aberta descrita pelas Eqs. (6.7a) a (6.7b). A evolução dos quantificadores D e V , juntamente com a função de complementaridade $D^2 + V^2$, para este caso, é mostrada na Fig. 19. Como antes, observa-se um decaimento exponencial da visibilidade representando a presença da decoerência no sistema. No entanto, chama-nos a atenção o comportamento interessante de descida e subida para a distinguibilidade. Esse comportamento não é uma característica normalmente observada na dinâmica dos processos markovianos [45, 72]. Note que no limite de tempo longo, as franjas de interferência já não são observadas, $V \rightarrow 0$, mas a distinguibilidade não é zero, $D \rightarrow 1/2$. Isso ocorre porque nesse tempo longo o estado, apesar de ter as mesmas probabilidades de caminho, já não é polarizado no caminho 1, mas é horizontalmente polarizado no caminho 2. O resultado disso é a manutenção de uma quantidade de informação parcial do caminho codificado no grau de liberdade de polarização.

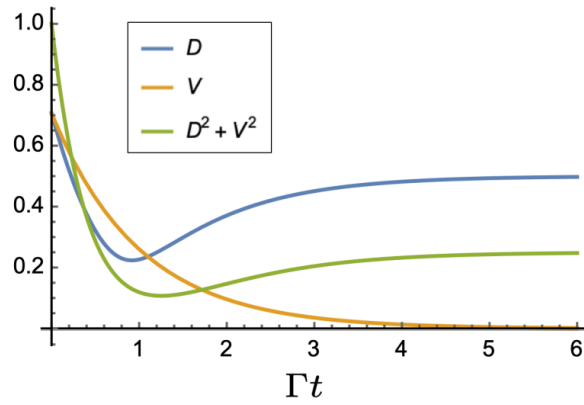


Figura 19 – Evolução temporal da distinguibilidade D , visibilidade V e da relação $D^2 + V^2$ para o estado $|\psi\rangle$ da Eq. (6.6) sob a ação do ambiente descrita das Eqs. (6.7a) a (6.7d). A visibilidade V sofre, durante a dinâmica, um decaimento exponencial enquanto que D apresenta um comportamento especial para baixo e para cima se estabilizando em seguida.

7 Conclusão

O foco central desta tese foi apresentar um quadro teórico de informação para estudar o princípio da complementaridade no contexto do experimento da dupla fenda para fótons com graus de liberdade de caminho e de polarização. Na seção 4.3 nós revisamos o método que alicerça nossas ideias no cenário da dupla fenda para um sistema de fótons com caminhos e estados de polarização arbitrários. Este método apresenta uma descrição conjunta das propriedades de coerência e polarização através do formalismo de matriz densidade.

Vimos no capítulo 5, nas seções 5.2 e 5.3 que, a partir da matriz densidade coerência-polarização, do grau de coerência e dos parâmetros de Stokes, foi possível derivar os quantificadores de visibilidade e distinguibilidade, que caracterizam o aspecto onda e partícula, respectivamente, de forma bem simples. Além disso, demonstramos que os nossos quantificadores obedecem a uma relação semelhante à desigualdade EGY, onde $V^2 + D^2 \leq 1$, na seção 5.4. A eficácia desses quantificadores pode ser comprovada posteriormente, na seção 5.6, a partir dos exemplos com estados quânticos que, a depender da amplitude de probabilidade, representam o caráter de apenas onda, apenas partícula ou ambos de forma parcial.

No capítulo 6 fizemos uma aplicação desses quantificadores para o contexto da dualidade onda-partícula no estudo do sistema quântico aberto. A simplicidade dos quantificadores nos permitiu investigar a influência das ações dos ambientes no sistema de fótons. Nesse estudo, os quantificadores se mostraram eficientes. Por um lado, o comportamento da visibilidade para os dois tipos de interações sistema-ambiente traduziu o que se espera quando a presença do ambiente induz uma aleatoriedade das relações de fase do sistema para um estado sistema-ambiente composto, que é a decoerência do sistema de interesse. Por outro lado, o comportamento da distinguibilidade apresentou, para a primeira interação, uma constância na distinção entre os caminhos dos fótons, e isso identifica um ambiente que não provoca espalhamento no sistema de fótons; e na segunda interação um comportamento que aponta para eventos de espalhamento alterando a distinção dos caminhos. Além disso, esse último exemplo fez o quantificador D apresentar um comportamento inesperado de descida e subida dentro da dinâmica markoviana abrindo possíveis portas de investigações novas.

Dos exemplos da seção 5.6, nós observamos a igualdade $V^2 + D^2 = 1$ quando os estados são puros. Para estados mistos esse valor é menor que a unidade. No caso do último exemplo dessa seção, o dos estados de Werner, a presença do emaranhamento faz o valor da distinguibilidade D sair do mínimo e aumentar ao máximo. Como perspectivas futuras, pleiteamos alguma quantidade que, juntamente com os nossos quantificadores, seja possível

atingir não mais uma desigualdade, mas uma igualdade regente seja para estados puros ou mistos de sistemas bipartidos. Além disso, pretendemos estender nossas ideias ao contexto da não-markovianidade quântica.

APÊNDICES

A Obtenção dos operadores de Kraus e da matriz densidade reduzida do sistema

Neste apêndice nós detalhamos a derivação dos operadores de Kraus e da matriz densidade reduzida para o sistema devido à interação com os dois tipos de ambientes.

Ambiente refrativo

Vamos considerar sistema e ambiente inicialmente descorrelacionados. Assim, o estado produto do sistema composto é

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_E(0), \quad (\text{A.1})$$

onde $\hat{\rho}_S(0)$ representa o estado do sistema, Eq. (4.16), e $\hat{\rho}_E(0)$ é o estado do ambiente.

O sistema e o ambiente evoluem juntos por uma operação unitária. Tendo o ambiente a característica de não provocar espalhamento no sistema de fótons, porém sofrer transições no seu estado inicial, o mapa dessa transformação unitária será:

$$|H, 1\rangle|E_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|H, 1\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|H, 1\rangle|E_1\rangle, \quad (\text{A.2a})$$

$$|H, 2\rangle|E_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|H, 2\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|H, 2\rangle|E_2\rangle, \quad (\text{A.2b})$$

$$|V, 1\rangle|E_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|V, 1\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|V, 1\rangle|E_1\rangle, \quad (\text{A.2c})$$

$$|V, 2\rangle|E_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|V, 2\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|V, 2\rangle|E_2\rangle. \quad (\text{A.2d})$$

A interação não inverte o caminho dos fótons, porém ela causa uma perda de coerência no seu estado devido à interação com o ambiente que, a depender do caminho dos fótons, sofre uma alteração para o estado $|E_1\rangle$ ou $|E_2\rangle$. A unitária correspondente a essa dinâmica tem o formato

$$\begin{aligned} \hat{U} = & \sqrt{1-P}(|H, 1\rangle|E_0\rangle\langle H, 1|\langle E_0| + |H, 2\rangle|E_0\rangle\langle H, 2|\langle E_0| + |V, 1\rangle|E_0\rangle\langle V, 1|\langle E_0| \\ & + |V, 2\rangle|E_0\rangle\langle V, 2|\langle E_0|) + \sqrt{P}(|H, 1\rangle|E_1\rangle\langle H, 1|\langle E_0| + |H, 2\rangle|E_2\rangle\langle H, 2|\langle E_0| + \\ & + |V, 1\rangle|E_1\rangle\langle V, 1|\langle E_0| + |V, 2\rangle|E_2\rangle\langle V, 2|\langle E_0|) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A partir disso, podemos encontrar os operadores elementos da operação do canal quântico. Do capítulo 3, nós vimos que os operadores de Kraus são obtidos a partir de

$$\hat{K}_i = \langle e_i|\hat{U}|e_0\rangle. \quad (\text{A.4})$$

Neste caso, encontramos os seguintes operadores:

$$\begin{aligned}\hat{K}_0 = \langle e_0 | \hat{U} | e_0 \rangle &= \sqrt{1 - \bar{P}} (|H, 1\rangle \langle H, 1| + |H, 2\rangle \langle H, 2| + |V, 1\rangle \langle V, 1|) \\ &= \sqrt{1 - \bar{P}} I,\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

$$\hat{K}_1 = \langle e_1 | \hat{U} | e_0 \rangle = \sqrt{\bar{P}} (|H, 1\rangle \langle H, 1| + |V, 1\rangle \langle V, 1|), \quad (\text{A.6})$$

$$\hat{K}_2 = \langle e_2 | \hat{U} | e_0 \rangle = \sqrt{\bar{P}} (|H, 2\rangle \langle H, 2| + |V, 2\rangle \langle V, 2|). \quad (\text{A.7})$$

As bases $|x, y\rangle$ representam um produto tensorial (ver seção 2.2) entre o grau de liberdade de caminho e o de polarização. Assim, as matrizes correspondentes a cada ket e bra, serão:

$$|H, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle H, 1| = (1 \ 0 \ 0 \ 0); \quad (\text{A.8})$$

$$|H, 2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle H, 2| = (0 \ 1 \ 0 \ 0); \quad (\text{A.9})$$

$$|V, 1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle V, 1| = (0 \ 0 \ 1 \ 0); \quad (\text{A.10})$$

$$|V, 2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle V, 2| = (0 \ 0 \ 0 \ 1). \quad (\text{A.11})$$

Com isto em mãos, cada operador das expressões de (A.5) a (A.7) serão matricialmente expressos como

$$\hat{K}_0 = \sqrt{1 - \bar{P}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{K}_1 = \sqrt{\bar{P}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{K}_2 = \sqrt{\bar{P}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Esses elementos compõem a soma de operadores que gera o estado do sistema evoluído Eq. (3.16). Assim,

$$\hat{\rho}'_S = \sum_i \hat{K}_i \rho_S \hat{K}_i^\dagger = \hat{K}_0 \rho_S \hat{K}_0^\dagger + \hat{K}_1 \rho_S \hat{K}_1^\dagger + \hat{K}_2 \rho_S \hat{K}_2^\dagger. \quad (\text{A.13})$$

Após a substituição de cada operador, lembrando que o sistema inicial é representado pela matriz (4.16), chegamos à matriz densidade reduzida

$$\hat{\rho}'_{1S} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & (1-P)\rho_{12} & \rho_{13} & (1-P)\rho_{14} \\ (1-P)\rho_{21} & \rho_{22} & (1-P)\rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & (1-P)\rho_{32} & \rho_{33} & (1-P)\rho_{34} \\ (1-P)\rho_{41} & \rho_{42} & (1-P)\rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Na condição $(1-P)^n$, com $n \rightarrow \infty$, $(1-P)^n = e^{-\Gamma t}$. Então, a matriz densidade reduzida em função de t fica

$$\hat{\rho}_{1S}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \gamma\rho_{12} & \rho_{13} & \gamma\rho_{14} \\ \gamma\rho_{21} & \rho_{22} & \gamma\rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \gamma\rho_{32} & \rho_{33} & \gamma\rho_{34} \\ \gamma\rho_{41} & \rho_{42} & \gamma\rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

onde $\gamma = e^{-\Gamma t}$.

Ambiente birrefringente

Para esse ambiente, notemos que a diferença agora reside na existência da influência dos caminhos dos fótons e do estado de polarização. Deste modo, uma vez que um fóton com algum estado de polarização interage com um constituinte do ambiente, esse por sua vez causa no fóton defasagem acompanhado com eventos de espalhamento. Isto é, da interação pode ocorrer que:

$$|H, 1\rangle|E_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|H, 1\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|H, 2\rangle|E_1\rangle, \quad (\text{A.16a})$$

$$|H, 2\rangle|E_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|H, 2\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|H, 1\rangle|E_2\rangle, \quad (\text{A.16b})$$

$$|V, 1\rangle|E_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|V, 1\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|V, 2\rangle|E_3\rangle, \quad (\text{A.16c})$$

$$|V, 2\rangle|E_0\rangle \longrightarrow \sqrt{1-P}|V, 2\rangle|E_0\rangle + \sqrt{P}|V, 1\rangle|E_4\rangle. \quad (\text{A.16d})$$

Cada interação do ambiente com os estados dos fótons fará com que ele sofra uma transição para estados diferentes. Isto porque há dois condicionantes regentes da interação: polarização e caminho. Resultado: ambiente sofre mudança de $|E_0\rangle$ para $\{|E_1\rangle, |E_2\rangle, |E_3\rangle, |E_4\rangle\}$ dependendo do estado do fóton.

O operador evolução unitária para essa interação é:

$$\begin{aligned} \hat{U} = & \sqrt{1-P}(|H, 1\rangle|E_0\rangle\langle H, 1| + |H, 2\rangle|E_0\rangle\langle H, 2| + |V, 1\rangle|E_0\rangle\langle V, 1| + |V, 2\rangle|E_0\rangle\langle V, 2|) \\ & + \sqrt{P}(|H, 2\rangle|E_1\rangle\langle H, 1| + |H, 1\rangle|E_2\rangle\langle H, 2| + |V, 2\rangle|E_3\rangle\langle V, 1| + |V, 1\rangle|E_4\rangle\langle V, 2|). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Em seguida, os operadores de Kraus ganham as expressões

$$\begin{aligned}\hat{K}_0 = \langle e_0 | \hat{U} | e_0 \rangle &= \sqrt{1-P}(|H, 1\rangle\langle H, 1| + |H, 2\rangle\langle H, 2| + |V, 1\rangle\langle V, 1|) \\ &= \sqrt{1-P}I,\end{aligned}\tag{A.18}$$

$$\hat{K}_1 = \langle e_1 | \hat{U} | e_0 \rangle = \sqrt{P}(|H, 2\rangle\langle H, 1|),\tag{A.19}$$

$$\hat{K}_2 = \langle e_2 | \hat{U} | e_0 \rangle = \sqrt{P}(|H, 1\rangle\langle H, 2|),\tag{A.20}$$

$$\hat{K}_3 = \langle e_3 | \hat{U} | e_0 \rangle = \sqrt{P}(|V, 2\rangle\langle V, 1|),\tag{A.21}$$

$$\hat{K}_4 = \langle e_4 | \hat{U} | e_0 \rangle = \sqrt{P}(|V, 1\rangle\langle V, 2|),\tag{A.22}$$

cuja representação matricial é

$$\hat{K}_0 = \sqrt{1-P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \hat{K}_1 = \sqrt{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \hat{K}_2 = \sqrt{P} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\tag{A.23}$$

$$\hat{K}_3 = \sqrt{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \hat{K}_4 = \sqrt{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\tag{A.24}$$

Construindo agora a matriz densidade reduzida, o estado final dos fótons será

$$\hat{\rho}'_S = \begin{pmatrix} \beta\rho_{11} + P\rho_{22} & \beta\rho_{12} & \beta\rho_{13} & \beta\rho_{14} \\ \beta\rho_{21} & \beta\rho_{22} + P\rho_{11} & \beta\rho_{23} & \beta\rho_{24} \\ \beta\rho_{31} & \beta\rho_{32} & \beta\rho_{33} + P\rho_{44} & \beta\rho_{34} \\ \beta\rho_{41} & \beta\rho_{42} & \beta\rho_{43} & \beta\rho_{44} + P\rho_{33} \end{pmatrix}\tag{A.25}$$

com $(1-P) = \beta$. Na condição $(1-P)^n$, com $n \rightarrow \infty$, $(1-P)^n = e^{-\Gamma t}$. Então, a matriz densidade reduzida em função de t fica

$$\hat{\rho}_{2S}(t) = \begin{pmatrix} \gamma\rho_{11} + \epsilon\rho_{22} & \gamma\rho_{12} & \gamma\rho_{13} & \gamma\rho_{14} \\ \gamma\rho_{21} & \gamma\rho_{22} + \epsilon\rho_{11} & \gamma\rho_{23} & \gamma\rho_{24} \\ \gamma\rho_{31} & \gamma\rho_{32} & \gamma\rho_{33} + \epsilon\rho_{44} & \gamma\rho_{34} \\ \gamma\rho_{41} & \gamma\rho_{42} & \gamma\rho_{43} & \gamma\rho_{44} + \epsilon\rho_{33} \end{pmatrix},\tag{A.26}$$

onde $\epsilon = (1 - e^{-\Gamma t})$ e $\gamma = e^{-\Gamma t}$.

Expressões da Visibilidade e da Distinguibilidade para os dois ambientes

Nesta seção nós mostraremos as expressões responsáveis pelos comportamentos dos gráficos do Capítulo 6.

Após encontrar as matrizes gerais (A.15) e (A.26), podemos substituir qualquer estado inicial que quisermos. Aqui, nós escolhemos usar um estado que tivesse visibilidade e distinguibilidade inicial diferente de zero. Esse estado é:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|H, 1\rangle + \frac{1}{2}(|H, 2\rangle + |V, 2\rangle), \quad (\text{A.27})$$

que na representação do operador densidade fica

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| &= \frac{1}{2}|H, 1\rangle\langle H, 1| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|H, 1\rangle\langle H, 2| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|H, 1\rangle\langle V, 2| + \\ &\frac{1}{2\sqrt{2}}|H, 2\rangle\langle H, 1| + \frac{1}{4}|H, 2\rangle\langle H, 2| + \frac{1}{4}|H, 2\rangle\langle V, 2| + \\ &\frac{1}{2\sqrt{2}}|V, 2\rangle\langle H, 1| + \frac{1}{4}|V, 2\rangle\langle H, 2| + \frac{1}{4}|V, 2\rangle\langle V, 2|. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Isso quer dizer que, para a interação com o primeiro ambiente, a Eq. (A.15) fica

$$\hat{\rho}_{1S}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.29})$$

onde $\gamma = e^{-\Gamma t}$.

Agora, relembando as expressões dos quantificadores V e D , que são

$$V = 2|\rho_{12} + \rho_{34}|; \quad D = \frac{1}{2} \{|\alpha + \gamma| + |\alpha - \gamma|\} \quad (\text{A.30})$$

com $\alpha = \rho_{11} - \rho_{22} + \rho_{33} - \rho_{44}$, $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + 4[|\beta|^2 - \kappa]}$, $\beta = \rho_{13} - \rho_{24}$ e $\kappa = (\rho_{11} - \rho_{22})(\rho_{33} - \rho_{44})$. Sendo assim, substituindo valores de (A.29) em V e em D , temos

$$V = \frac{\sqrt{2}}{2}|e^{-\Gamma t}|; \quad D = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{A.31})$$

Agora, para a interação com o segundo ambiente, a Eq. (A.26) é resumida a

$$\hat{\rho}_{1S}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{4}(1 - \gamma) & \frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma & \frac{1}{4}\gamma + \frac{1}{2}(1 - \gamma) & 0 & \frac{1}{4}\gamma \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(1 - \gamma) & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma & \frac{1}{4}\gamma & 0 & \frac{1}{4}\gamma \end{pmatrix}, \quad (\text{A.32})$$

onde $\gamma = e^{-\Gamma t}$. Por fim, as expressões de V e D para esse caso serão:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{2}|e^{-\Gamma t}|; \quad D = \left| \sqrt{\frac{5e^{-\Gamma t}}{4} - e^{-\Gamma t} + \frac{1}{4}} \right| \quad (\text{A.33})$$

B Decomposição de Schmidt e purificação

A decomposição de Schmidt está estreitamente relacionada no procedimento de purificação de um estado misto (que aqui é o ambiente). A partir dessas ferramentas, podemos assumir, sem perda de generalidade, que o ambiente se inicia em um estado puro antes da interação com o sistema. Isso porque se deixássemos que ele iniciasse num estado misto, haveria uma forma de purificação onde usaríamos o apoio de um sistema “fictício” para ajudar a purificar esse estado, de tal modo que em nossas derivações, esse procedimento entraria como um passo intermediário, apenas. Aqui, nós podemos supor que em volta do ambiente que circunda o sistema, há um outro ambiente maior como mostra a Fig. 20.

◇ *Decomposição de Schmidt*

Digamos que $\{|a_i\rangle\}$ é uma base para \mathcal{H}_A e $\{|b_j\rangle\}$ é uma base para \mathcal{H}_B , qualquer estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$, desse sistema composto, é escrito como

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=1} c_{ij} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle. \quad (\text{B.1})$$

Existe uma forma especial chamada de decomposição de Schmidt, que diz que, para bases adequadas, a soma em $\{i, j\}$ quando $i \neq j$ resulta em $c_{ij} = 0$.

Definição: Dado que $|\psi\rangle$ é um estado puro de um sistema composto, AB , existem bases ortonormais $\{|i_A\rangle\}$ para A e $\{|i_B\rangle\}$ para B , tais que podemos escrever [1, 73]

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1} c_i |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle, \quad (\text{B.2})$$

onde c_i são números reais não negativos e $\sum_i c_i^2 = 1$ são os coeficientes de Schmidt. Assim, pela decomposição de Schmidt, os estados reduzidos de cada subsistema são

$$\hat{\rho}_A = \sum_i c_i^2 |i_A\rangle \langle i_A| \quad (\text{B.3})$$

e

$$\hat{\rho}_B = \sum_i c_i^2 |i_B\rangle \langle i_B|. \quad (\text{B.4})$$

Eles são diagonais na mesma base possuindo o mesmo espectro. Seus autovalores idênticos mostram que as propriedades de ambos os subsistemas são as mesmas.

◇ *Purificação*

Vamos agora supor um estado $\hat{\rho}_A$ do ambiente A . Ao invés de usarmos esse estado misto podemos articulá-lo a um outro sistema, que denotamos por A' (Fig. 20) e definir um estado puro $|\psi_{AA'}\rangle$ composto [4, 1, 31]. O benefício disso é conseguir derivar, através da operação traço parcial, o operador densidade $\hat{\rho}_A$ diretamente do operador densidade puro

do sistema composto $\hat{\rho}_{AA'} = |\psi_{AA'}\rangle\langle\psi_{AA'}|$. Assumindo que A' tem a mesma dimensão do espaço de A e base ortonormal $|i_{A'}\rangle$ e que $\hat{\rho}_A$ tem uma decomposição ortonormal $\hat{\rho}_A = \sum_i p_i |i_A\rangle\langle i_A|$, pela decomposição de Schmidt conseguimos adivinhar que tipo de estado devemos ter desses subsistemas combinados, ou seja,

$$|\psi\rangle_{AA'} = \sum_i \sqrt{p_i} |i_A\rangle \otimes |i_{A'}\rangle. \quad (\text{B.5})$$

Aplicando o traço parcial para o sistema A' , encontramos o seguinte operador densidade do estado reduzido de A :

$$\hat{\rho}_A = \text{tr}_{B'}(|\psi_{AA'}\rangle\langle\psi_{AA'}|) = \sum_{i,j} \sqrt{p_i p_j} |i_A\rangle\langle j_A| \text{tr} |i_{A'}\rangle\langle j_{A'}| \quad (\text{B.6})$$

$$= \sum_{i,j} \sqrt{p_i p_j} |i_A\rangle\langle j_A| \delta_{ij} \quad (\text{B.7})$$

$$= \sum_i p_i |i_A\rangle\langle i_A|. \quad (\text{B.8})$$

Assim, $|\psi_{AA'}\rangle$ é a purificação de $\hat{\rho}_A$. Notamos que não importa a forma como declaramos A' , isso não afeta o operador densidade reduzida de A . Isso quer dizer que se realizarmos uma operação unitária $|\psi'\rangle = (I \otimes \mathcal{U})|\psi\rangle$, esta operação não afeta o traço parcial por ele ser independente da base e portando o estado de A .

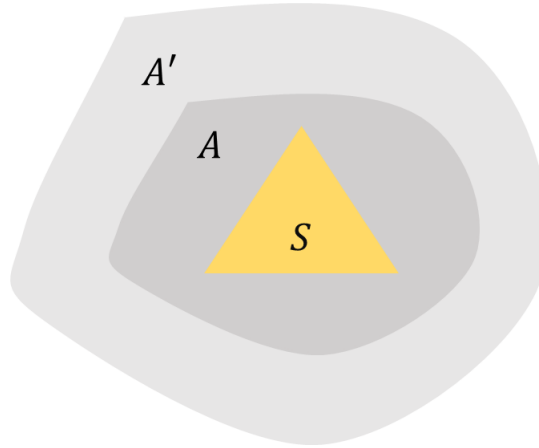


Figura 20 – Representação sistema composto $S + A$ envolto por um sistema maior A' . O sistema pode ser influenciado pelo ambiente A que o circunda. O ambiente maior A' pode ser usado como o sistema ‘fictício’ no processo de purificação do ambiente A . Figura adaptada de [6].


ANEXO

C Publicações

Quantum Information Processing (2023) 22:63
<https://doi.org/10.1007/s11128-022-03813-1>



Influence of polarization and the environment on wave–particle duality

Andréa Freire dos Santos¹ · Natália E. L. Barbosa¹ ·
J. L. Montenegro Ferreira¹ · Bertúlio de Lima Bernardo¹ 

Received: 1 July 2022 / Accepted: 26 December 2022

© The Author(s), under exclusive licence to Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature 2023

Abstract

Wave–particle duality is certainly one of the most curious concepts of contemporary physics, which ascribes mutually exclusive behaviors to quantum systems that cannot be observed simultaneously. In the context of two-path interferometers, these two behaviors are usually described in terms of the visibility of interference fringes and the path distinguishability. Here, we use quantum information-theoretic tools to derive quantifiers of these two properties, which account for the combined influence of path probability and polarization, and demonstrate that they satisfy a complementarity relation. We further show that the derived quantities can work as probes in the study of open quantum dynamics by revealing interesting facets of environment actions, such as decoherence, depolarization and scattering.

Keywords Complementarity relations · Polarization influence · Open quantum systems

1 Introduction

One of the most curious and intriguing features of quantum mechanics is the wave–particle behavior. In 1928, Bohr called attention to this dual aspect of quantum systems, which sometimes manifest themselves as waves and sometimes as particles, depending on the experimental setup to which they are submitted [1]. In the context of the double-slit experiment, the complementary wave and particle behaviors were pointed out by Feynman as “the only mystery” of quantum mechanics [2]. Later on, a quantitative approach to this problem was presented by Wootters and Zurek, who showed that the two complementary aspects might be simultaneously present [3].

Bertúlio de Lima Bernardo
bertulio.fisica@gmail.com

¹ Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB 58051-900, Brazil

Referências

- 1 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. *Quantum computation and quantum information*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2002.
- 2 HECHT, E. *Optics*. [S.l.]: Pearson Education India, 2012.
- 3 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor*. [S.l.]: Editora Blucher, 2018. v. 2.
- 4 DESURVIRE, E. *Classical and quantum information theory: an introduction for the telecom scientist*. [S.l.]: Cambridge university press, 2009.
- 5 DJORDJEVIC, I. *Quantum information processing and quantum error correction: an engineering approach*. [S.l.]: Academic press, 2012.
- 6 MAZIERO, J. The kraus representation for the dynamics of open quantum systems. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 38, 2016.
- 7 ROCHA, J. F. *Origens e evolução das idéias da física*. [S.l.]: SciELO-EDUFBA, 2002.
- 8 CARUSO, F.; OGURI, V. *Física Moderna: origens clássicas e fundamentos quânticos*. [S.l.]: Elsevier, 2006.
- 9 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: Ótica, relatividade, física quântica (vol. 4)*. [S.l.]: Editora Blucher, 2014.
- 10 DAVISSON, C.; GERMER, L. H. Diffraction of electrons by a crystal of nickel. *Physical review*, APS, v. 30, n. 6, p. 705, 1927.
- 11 THOMSON, G. P. Experiments on the diffraction of cathode rays. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, containing papers of a mathematical and physical character*, The Royal Society London, v. 117, n. 778, p. 600–609, 1928.
- 12 BOHR, N. The quantum postulate and the recent development of atomic theory. *Nature*, v. 121, p. 580, 1928.
- 13 WOOTTERS, W. K.; ZUREK, W. H. Complementarity in the double-slit experiment: Quantum nonseparability and a quantitative statement of bohr's principle. *Physical Review D*, APS, v. 19, n. 2, p. 473, 1979.
- 14 GREENBERGER, D. M.; YASIN, A. Simultaneous wave and particle knowledge in a neutron interferometer. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 128, n. 8, p. 391–394, 1988.
- 15 ENGLERT, B.-G. Fringe visibility and which-way information: An inequality. *Physical review letters*, APS, v. 77, n. 11, p. 2154, 1996.
- 16 JACQUES, V. et al. Experimental realization of wheeler's delayed-choice gedanken experiment. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 315, n. 5814, p. 966–968, 2007.
- 17 DÜRR, S.; NONN, T.; REMPE, G. Fringe visibility and which-way information in an atom interferometer. *Physical review letters*, APS, v. 81, n. 26, p. 5705, 1998.

- 18 ROY, S. S.; SHUKLA, A.; MAHESH, T. Nmr implementation of a quantum delayed-choice experiment. *Physical Review A*, APS, v. 85, n. 2, p. 022109, 2012.
- 19 AUCCAISE, R. et al. Experimental analysis of the quantum complementarity principle. *Physical Review A*, APS, v. 85, n. 3, p. 032121, 2012.
- 20 LAHIRI, M. Wave-particle duality and polarization properties of light in single-photon interference experiments. *Physical Review A*, APS, v. 83, n. 4, p. 045803, 2011.
- 21 LAHIRI, M. Wave-particle duality and polarization properties of light in single-photon interference experiments. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 83, p. 045803, Apr 2011.
- 22 NORRMAN, A. et al. Complementarity and polarization modulation in photon interference. *Physical Review Letters*, APS, v. 119, n. 4, p. 040401, 2017.
- 23 QIAN, X.-F.; AGARWAL, G. Quantum duality: A source point of view. *Physical Review Research*, APS, v. 2, n. 1, p. 012031, 2020.
- 24 YOON, T. H.; CHO, M. Quantitative complementarity of wave-particle duality. *Science Advances*, American Association for the Advancement of Science, v. 7, n. 34, p. eabi9268, 2021.
- 25 QIAN, X.-F.; VAMIVAKAS, A.; EBERLY, J. Entanglement limits duality and vice versa. *Optica*, Optica Publishing Group, v. 5, n. 8, p. 942–947, 2018.
- 26 QIAN, X.-F. et al. Turning off quantum duality. *Physical Review Research*, APS, v. 2, n. 1, p. 012016, 2020.
- 27 QURESHI, T. Interference visibility and wave-particle duality in multipath interference. *Physical Review A*, APS, v. 100, n. 4, p. 042105, 2019.
- 28 BASSO, M. L.; MAZIERO, J. An uncertainty view on complementarity and a complementarity view on uncertainty. *Quantum Information Processing*, Springer, v. 20, n. 6, p. 201, 2021.
- 29 BASSO, M. L.; MAZIERO, J. Complete complementarity relations for multipartite pure states. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 53, n. 46, p. 465301, 2020.
- 30 ZUREK, W. H. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Reviews of modern physics*, APS, v. 75, n. 3, p. 715, 2003.
- 31 SCHLOSSHAUER, M. A. *Decoherence: and the quantum-to-classical transition*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- 32 SANTOS, A. F. dos et al. Influence of polarization and the environment on wave–particle duality. *Quantum Information Processing*, Springer, v. 22, n. 1, p. 63, 2023.
- 33 SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. *Modern quantum mechanics, revised edition*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1995.
- 34 FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman lectures on physics, Vol. I: The new millennium edition: mainly mechanics, radiation, and heat*. [S.l.]: Basic books, 2011. v. 1.

- 35 STOKES, G. G. On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, v. 9, p. 399, 1852.
- 36 BORN, M.; WOLF, E. *Principles of Optics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999.
- 37 GOLDSTEIN, D. H. *Polarized light*. [S.l.]: CRC press, 2017.
- 38 COLLETT, E. The description of polarization in classical physics. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 36, n. 8, p. 713–725, 1968.
- 39 GUENTHER, B. D. *Modern optics*. [S.l.]: OUP Oxford, 2015.
- 40 MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical coherence and quantum optics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1995.
- 41 MARINESCU, D. C. *Classical and quantum information*. [S.l.]: Academic Press, 2011.
- 42 RIVAS, Á.; HUELGA, S. F.; PLENIO, M. B. Quantum non-markovianity: characterization, quantification and detection. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 77, n. 9, p. 094001, 2014.
- 43 TARANTO, P. Memory effects in quantum processes. *International Journal of Quantum Information*, World Scientific, v. 18, n. 02, p. 1941002, 2020.
- 44 MILZ, S.; MODI, K. Quantum stochastic processes and quantum non-markovian phenomena. *PRX Quantum*, APS, v. 2, n. 3, p. 030201, 2021.
- 45 BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. et al. *The theory of open quantum systems*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2002.
- 46 BENENTI, G.; CASATI, G.; STRINI, G. *Principles of Quantum Computation and Information-Volume II: Basic Tools and Special Topics*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2007.
- 47 PRESKILL, J. Lecture notes for physics 229: Quantum information and computation. *California Institute of Technology*, v. 16, n. 1, p. 1–8, 1998.
- 48 WILDE, M. M. *Quantum information theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.
- 49 BERNARDO, B. de L. Unified quantum density matrix description of coherence and polarization. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 381, n. 28, p. 2239–2245, 2017.
- 50 WOLF, E. Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams. *Physics letters A*, Elsevier, v. 312, n. 5-6, p. 263–267, 2003.
- 51 BAYM, G. *Lectures on quantum mechanics*. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- 52 BLUM, K. *Density matrix theory and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 64.
- 53 JAMES, D. F. et al. On the measurement of qubits. In: *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference: Selected Papers*. [S.l.]: World Scientific, 2005. p. 509–538.
- 54 MCMASTER, W. H. Polarization and the stokes parameters. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 22, n. 6, p. 351–362, 1954.

- 55 BARNETT, S. *Quantum information*. [S.l.]: Oxford University Press, 2009. v. 16.
- 56 BREUER, H.-P.; LAINE, E.-M.; PIILO, J. Measure for the degree of non-markovian behavior of quantum processes in open systems. *Physical review letters*, APS, v. 103, n. 21, p. 210401, 2009.
- 57 LAINE, E.-M.; PIILO, J.; BREUER, H.-P. Measure for the non-markovianity of quantum processes. *Physical Review A*, APS, v. 81, n. 6, p. 062115, 2010.
- 58 SMIRNE, A. et al. Interaction-induced correlations and non-markovianity of quantum dynamics. *Physical Review A*, APS, v. 87, n. 5, p. 052129, 2013.
- 59 LAINE, E.-M.; PIILO, J.; BREUER, H.-P. Witness for initial system-environment correlations in open-system dynamics. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 92, n. 6, p. 60010, 2011.
- 60 SMIRNE, A. et al. Initial correlations in open-systems dynamics: The jaynes-cummings model. *Physical Review A*, APS, v. 82, n. 6, p. 062114, 2010.
- 61 SMIRNE, A. et al. Experimental investigation of initial system-environment correlations via trace-distance evolution. *Physical Review A*, APS, v. 84, n. 3, p. 032112, 2011.
- 62 LI, C.-F. et al. Experimentally witnessing the initial correlation between an open quantum system and its environment. *Physical Review A*, APS, v. 83, n. 6, p. 064102, 2011.
- 63 HELSTROM, C. W. Quantum detection and estimation theory. *Journal of Statistical Physics*, Springer, v. 1, n. 2, p. 231–252, 1969.
- 64 NEUMANN, J. V. *Mathematical foundations of quantum mechanics: New edition*. [S.l.]: Princeton university press, 2018.
- 65 WERNER, R. F. Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Physical Review A*, APS, v. 40, n. 8, p. 4277, 1989.
- 66 JOOS, E.; ZEH, H. D. The emergence of classical properties through interaction with the environment. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, Springer, v. 59, n. 2, p. 223–243, 1985.
- 67 BERNARDO, B. de L. Unraveling the role of coherence in the first law of quantum thermodynamics. *Physical Review E*, APS, v. 102, n. 6, p. 062152, 2020.
- 68 BERNARDO, B. de L. Relating heat and entanglement in strong-coupling thermodynamics. *Physical Review E*, APS, v. 104, n. 4, p. 044111, 2021.
- 69 BREUER, H.-P. et al. Colloquium: Non-markovian dynamics in open quantum systems. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 88, n. 2, p. 021002, 2016.
- 70 LI, L.; HALL, M. J.; WISEMAN, H. M. Concepts of quantum non-markovianity: A hierarchy. *Physics Reports*, Elsevier, v. 759, p. 1–51, 2018.
- 71 WAI, P. K. A.; MENYUK, C. Polarization decorrelation in optical fibers with randomly varying birefringence. *Optics letters*, Optica Publishing Group, v. 19, n. 19, p. 1517–1519, 1994.

72 LIU, B.-H. et al. Experimental control of the transition from markovian to non-markovian dynamics of open quantum systems. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 7, n. 12, p. 931–934, 2011.

73 EKERT, A.; KNIGHT, P. L. Entangled quantum systems and the schmidt decomposition. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 63, n. 5, p. 415–423, 1995.