UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÂO EM FÍSICA

WILLAMES FERREIRA DE MAGALHÃES

DINÂMICA DE UM *QUBIT* INTERAGINDO COM AMBIENTES TÉRMICOS VIA MODELOS COLISIONAIS

João Pessoa-PB
2023

WILLAMES FERREIRA DE MAGALHÃES

DINÂMICA DE UM *QUBIT* INTERAGINDO COM AMBIENTES TÉRMICOS VIA MODELOS COLISIONAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Área de concentração: Física da matéria condensada.

Orientador: Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo.

João Pessoa-PB
2023

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

N799d Magalhães, Willames Ferreira de.
Dinâmica de um qubit interagindo com ambientes térmicos via modelos colisionais / Willames Ferreira de Magalhães. - João Pessoa, 2023.
142 f. : il.

Orientação: Bertúlio de Lima Bernardo.
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN.

1. Física quântica. 2. Modelos quânticos colisionais. 3. Não markovianidade quântica. 4. Markovianidade quântica. 5. Caos. 6. Regularidade. I. Bernardo, Bertúlio de Lima. II. Título.

UFPB/BC CDU 530.145(043)

Elaborado por RUSTON SAMMEVILLE ALEXANDRE MARQUES DA SILVA - CRB-15/0386

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa de tese de Doutorado do aluno Willames Ferreira De Magalhães, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física da Matéria Condensada.

Aos trinta e um dias do mês de julho do ano de dois mil e vinte e três, às 08:00, nas dependências do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para avaliar a tese de Doutorado, na área de Física da Matéria Condensada, de **Willames Ferreira De Magalhães**. A banca foi composta pelos(as) professores(as) doutores(as): Bertúlio de Lima Bernardo (PPGF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Márcio Medeiros Soares (PPGF/UFPB), Jesús Pavón López (PPGF/UFPB), Nadja Kolb Bernardes (UFPE) e Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura (UFAL). Dando início aos trabalhos, o Prof. Bertúlio de Lima Bernardo comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra para o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição da pesquisa de tese intitulada "*Dinâmica de um qubit interagindo com ambientes térmicos via modelos colisionais*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que emitiu o parecer **"aprovado".** Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, Técnico em Assuntos Educacionais, redigiu a presente ata que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **31 de julho de 2023**.

gov.br Documento assinado digitalmente
BERTULIO DE LIMA BERNARDO
Data: 31/07/2023 15:14:54-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Bertúlio de Lima Bernardo
Orientador - PPGF/UFPB

gov.br Documento assinado digitalmente
MARCIO MEDEIROS SOARES
Data: 01/08/2023 11:52:22-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Márcio Medeiros Soares
PPGF/UFPB

gov.br Documento assinado digitalmente
JESUS PAVON LOPEZ
Data: 01/08/2023 12:09:41-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Jesús Pavón López
PPGF/UFPB

gov.br Documento assinado digitalmente
FRANCISCO ANACLETO BARROS FIDELIS D
Data: 31/07/2023 15:28:29-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura
UFAL

gov.br Documento assinado digitalmente
NADJA KOLB BERNARDES
Data: 01/08/2023 10:26:50-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Nadja Kolb Bernardes
UFPE

Dedico este trabalho aos meus
pais e à memória de meu avô,
Leonardo de Oliveira Magalhães.

Agradecimentos

Sinto-me extremamente honrado em ter vivido quatro anos da minha vida vinculados à Universidade Federal da Paraíba, que é uma instituição antiga, séria e de grande renome. Além desse sentimento, quero registrar minha gratidão a pessoas e entidades que me auxiliaram neste período de doutoramento.

- A YHWH, o único e verdadeiro Deus.
- Ao professor Bertúlio de Lima Bernardo por absolutamente tudo que fez por mim durante o período de doutoramento, compartilhando seus conhecimentos e concepções sobre vários assuntos. Sinto que isto foi muito importante para minha formação profissional e pessoal. Bertúlio é alguém confiável e muito honesto.
- Ao professor Alexandre da Silva Rosas.
- À Andréa Freire dos Santos, Emanuel Wallison de Oliveira Costa, Fabiano Pereira de Oliveira, Jefferson Luan Diniz de Oliveira, Jesriel Matias da Rocha e Mauro Parnaiba Duarte, que são meus amigos e ótimas pessoas, demonstrando-se assim desde quando cheguei em João Pessoa, onde me acolheram como um membro da família. Sempre me lembrarei dos momentos de estudos para os exames de qualificação e das diversões. Também sou grato a muitos colegas da pós-graduação que me ajudaram de alguma forma quando fiz as disciplinas.
- Às professoras e aos professores que tive na vida.
- Ao programa de pós-graduação em física da UFPB e todo seu corpo docente, em especial àqueles com quem fiz algum curso.
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento dos meus estudos.
- À minha esposa, minha mãe, meu pai, minha irmã e sua família.

"Anybody who is not
shocked by quantum theory
has not understood it."
(Niels Bohr)

Resumo

Nesta tese estudamos a interação de um *qubit* inicialmente no estado puro interagindo com ambientes constituídos por *qubits* em estados térmicos, a partir de modelos quânticos colisionais. Inicialmente propomos a interação do sistema principal com um *qubit* no estado térmico (ambiente), onde foi possível percebermos o surgimento da não markovianidade quântica, que em sistemas quânticos abertos está associada aos casos onde a informação que fluiu do sistema para o ambiente eventualmente retorna do ambiente para o sistema. No estudo foram encontrados comportamentos regulares e caóticos a partir das variações nas probabilidades de transição dos níveis de energia do sistema e do ambiente. Tais comportamentos são percebidos na dinâmica do emaranhamento e da coerência do sistema. Em seguida, acrescentamos *qubits* em estados térmicos ao ambiente e investigamos as interações do sistema principal, onde já incluímos o emaranhamento ao longo das colisões. O resultado disto, além do comportamento caótico na dinâmica de coerência, foi a diminuição da não markovianidade do sistema, onde avaliamos isto pelo traço da distância e pelo quantificador BLP, quando o ambiente passa de dois para três *qubits*. A conclusão do estudo foi que o aumento de constituintes do ambiente implica numa transição da dinâmica quântica não markoviana para a markoviana, uma percepção que até então não havia sido explicada sob o presente ponto de vista na literatura.

Palavras-chave: Modelos quânticos colisionais; não markovianidade quântica; markovianidade quântica; caos; regularidade.

Abstract

In this thesis we study the interaction of a qubit initially in the pure state interacting with environments constituted by qubits in thermal states, based on collisional quantum models. We initially propose the interaction of the main system with a qubit in the thermal state (environment), where it was possible to perceive the inhabited of the quantum non-Markovianity, which in open quantum systems is associated with cases where information that flowed from the system to the environment eventually returns from the environment to the system. In the study, regular and chaotic behaviors were found from the variations in the transition probabilities of the levels of energy from the system and the environment. Such behaviors are perceived in the dynamics of the entanglement and coherence of the system. Then we add qubits into states thermal effects to the environment and investigated how the interactions of the main system, where we already included entanglement along collisions. The result of this, in addition to the chaotic behavior in the interaction dynamics, was the decrease in the non-Markovianity of the system, where we evaluate this by the trace distance and BLP quantifier, when the environment passes from two to three qubits. The conclusion of the study was that the increase of constituents of the environment implies a transition from non-Markovian to Markovian quantum dynamics, a perception that until then had not been explained under the present viewpoint in the literature.

Keywords: Collision quantum models; quantum non-Markovianity; quantum Markovianity; chaos; regularity.

Lista de Abreviaturas

Abreviatura	**Significado**
CAA	Canal amplitude de amortecimento
CAMAG	Canal amplitude de amortecimento generalizado
DB	Diagrama de bifurcação
DC	Diagrama de coerência
ESG	Experimento de Stern-Gelarch
Mapa CPTP	Mapa completamente positivo que preserva o traço, do inglês *completely positive trace-preserving*
Medida BLP	Referente a Breuer, Laine e Piilo
MQC	Modelos quânticos colisionais
TCC	Teoria do caos clássico
TP	Transposta parcial

Lista de símbolos

Símbolo	**Nome**
$c \approx 3,00 \times 10^{8}\ m/s$	Velocidade da luz no vácuo
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$m_e \approx 9,11 \times 10^{-31}\ kg$	Massa do elétron
$i = \sqrt{-1}$	Unidade imaginária
$\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34}\ J \cdot s$	Constante reduzida de Planck
$k_B \approx 1,38 \times 10^{-23}\ J/K$	Constante de Boltzmann
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$q \approx 1,60 \times 10^{-19}\ C$	Carga elementar
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}_{+}$	Conjunto dos números reais não negativos
T	Temperatura

Entidades matemáticas e notação

- Delta de Kronecker:

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & se \quad \mu = \nu, \\ 0 & se \quad \mu \neq \nu. \end{cases}$$

- Fórmula do arco metade para o cosseno:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}.$$

- Fórmula do arco metade para o seno:

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}.$$

- Notação de Dirac: $|\psi\rangle$.

- Notação para operadores: $\hat{X}$. Atentamos que as letras são maiúsculas pertencentes aos alfabetos latino e grego. Além dessas, a notação também será adotada para as letras gregas σ e ρ referentes às matrizes de Pauli (cuja abordagem se dará no capítulo 2) e ao operador densidade, respectivamente.

- Notação para vetores do espaço cartesiano: $\hat{x}$. Atentamos que as letras são minúsculas pertencentes ao alfabeto latino.

- Dada uma função $f = f(x, y, z)$, temos para o operador gradiente que

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}.$$

- Relação de Euler:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\text{sen}\,(x).$$

- Relação trigonométrica fundamental:

$$\text{sen}^{\,2}(x) + \cos^2(x) = 1.$$

- Símbolo de Levi-Civita:

$$\epsilon_{\mu\nu\iota} = \begin{cases} +1 & se \quad (\mu,\nu,\iota) \quad \text{é} \quad (x,y,z), \quad (y,z,x) \quad ou \quad (z,x,y), \\ -1 & se \quad (\mu,\nu,\iota) \quad \text{é} \quad (z,y,x), \quad (x,z,y) \quad ou \quad (y,x,z), \\ 0 & se \quad \mu = \nu \quad ou \quad \nu = \iota \quad ou \quad \iota = \mu. \end{cases}$$

Lista de figuras

Figura 1 – Esquema experimental retirado da Ref. [1]. 13
Figura 2 – Representação esquemática de um sistema quântico aberto S interagindo com um ambiente E, onde $\hat{H}_S$, $\hat{H}_E$ e $\hat{H}_I$ são os operadores hamiltonianos de S, E e de interação, respectivamente. 18
Figura 3 – Esfera de Bloch, onde cada ponto da superfície representa um estado puro do *qubit*. 26
Figura 4 – Representação esquemática da esfera de Bloch com raio $\vec{r}$, cujos estados maximamente coerentes estão sobre a região equatorial de acordo com a Eq. (2.107). 34
Figura 5 – Representação esquemática (a) da esfera de Bloch com raio unitário, cujo estado associado é dado na Eq. (2.127), e (b) o elipsóide devido à contração da esfera nas direções y e z, cujo estado é dado na Eq. (2.132). Ideia baseada na Ref. [2]. 38
Figura 6 – Representação esquemática (a) da esfera de Bloch com raio unitário, cujo estado associado é dado na Eq. (2.135), e (b) o elipsóide devido à contração da esfera nas direções x e y, cujo estado é dado na Eq. (2.137). Ideia baseada na Ref. [2]. 39
Figura 7 – Representação esquemática (a) da esfera de Bloch com raio unitário, cujo estado associado é dado na Eq. (2.143), e (b) a contração da esfera nas direções x, y e z, cujo estado é dado na Eq. (2.145). Ideia baseada na Ref. [2]. 41
Figura 8 – Sistema de coordenadas esféricas, onde θ é o angulo polar, r_0 é a projeção do vetor de Bloch ($\vec{r}$) no plano xy. 43
Figura 9 – Representação de um processo quântico (a) markoviano e (b) não markoviano, relacionado ao sistema principal $\boldsymbol{P}$ e ambiente $\boldsymbol{Q}$. 44
Figura 10 – Representação de um modelo quântico colisional markoviano, cujo sistema S interage com o ambiente E. A figura foi retirada e modificada da Ref. [3]. 50
Figura 11 – Modelo quântico colisional não markoviano que considera interações entre constituintes do ambiente. Inicialmente todos os estados estão descorrelacionados. Em (a) ocorre a primeira interação entre sistema e o primeiro elemento do ambiente. Em (b) os dois primeiros constituintes do ambiente colidem, e em seguida (c) S interage com 2. A dinâmica será assim até a interação de S com o $n-$ésimo constituinte do ambiente. A Figura foi baseada na Ref. [4]. 51

Figura 12 – Soluções dos sistemas de EDOs resolvidas pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. A imagem (a) é ponto fixo no espaço de fases do modelo Brusselator e (b) a série temporal de uma de suas variáveis, onde em ambas, utilizamos a condição inicial $(\omega_0, \kappa_0) = (0{,}9, 0{,}7)$, bem como os parâmetros $\xi = 0{,}8$ e $\mu = 1{,}5$. A imagem (c) é o ciclo limite no espaço de fases do oscilador de van der Pol e (d) sua respectiva série temporal, onde nas duas figuras utilizamos a condição inicial $(x_0, y_0) = (0{,}3, 0{,}4)$ e o parâmetro $\epsilon = 0{,}5$. Por fim, vemos em (e) o atrator caótico de Lorenz no espaço de fases deste sistema e (f) sua série temporal, onde usamos $(X_0, Y_0, Z_0) = (0{,}4, 0{,}3, 0{,}2)$ como condição inicial, bem como os parâmetros $\vartheta = 0{,}9$, $R = 25$ e $\Upsilon = 8/3$. 57
Figura 13 – Seção de Poincaré **S** bidimensional imersa em um espaço tridimensional sendo perfurada por uma trajetória **C**. Imagem retirada de [5]. 58
Figura 14 – Nas figuras à esquerda estão os espaços de fases do mapa de Hénon e à direita as séries temporais. Em todas as simulações utilizamos a condição inicial $(x_0, y_0) = (0{,}63135448, 0{,}18940634)$ e o parâmetro $b = 0{,}4$. Além disso, deixamos que o sistema passasse por 5×10^4 iterações para então salvar 100 pontos na simulação. Na imagem (a-b) usamos $a = 0{,}2$, (c-d) $a = 0{,}625$ e (e-f) $a = 1{,}15$. 59
Figura 15 – DB do mapa de Hénon, onde utilizamos a condição inicial $(x_0, y_0) = (0{,}63135448, 0{,}18940634)$, fixando o parâmetro $b = 0{,}4$ e variando a no intervalo $a \in [0, 1{,}2]$. Além disso, deixamos que o sistema passasse por 5×10^4 iterações para então salvar 100 pontos na simulação. A reta $a = 0{,}270455$ em azul é aproximadamente o valor da primeira bifurcação do sistema. Já as outras as retas em vermelho estão posicionadas respectivamente em $a = 0{,}2$, $a = 0{,}625$ e $a = 1{,}15$. 60
Figura 16 – Espaço dos parâmetros do mapa de Hénon que indicam regiões periódicas. Retirada da Ref. [6] e modificada. 61
Figura 17 – *Qubits* A e B dentro de uma caixa interagindo via colisões. 63
Figura 18 – Traço da distância $\mathcal{D}$ em função do número de colisões n. No cálculo numérico fixamos (a) $p = 0{,}5$ e (b) $p = 0{,}8$ para construírmos duas matrizes $\hat{\rho}_{AB}(0)$, onde na primeira utilizamos $a = b = 1/\sqrt{2}$ e obtivemos $\hat{\rho}_A^1(0)$, enquanto que na segunda usamos $a = 1/\sqrt{2}$ e $b = -1/\sqrt{2}$ para obter $\hat{\rho}_A^2(0)$, cujo procedimento foi discutido na subseção 5.4.1. 70
Figura 19 – Norma da coerência do sistema A (C_A) em função do número de colisões (n). No cálculo numérico fixamos (a) $p = 0{,}5$ e (b) $p = 0{,}8$ para construirmos a matriz $\hat{\rho}_{AB}(0)$, onde utilizamos $a = b = 1/\sqrt{2}$ e obtivemos $\hat{\rho}_A(0)$. Em seguida, o procedimento feito foi o discutido na subseção 5.5.1. 72

Figura 20 – Diagrama de Coerência do sistema A construído para 100 colisões com o ambiente B. O DC é o análogo do diagrama de bifurcação para sistemas dinâmicos discretos clássicos, como visto no capítulo 4. Nesta Figura as frestas indicam que para algum valor de p a dinâmica de coerência do sistema principal pode ser periódica. 74
Figura 21 – Corte da uma região do DC da Figura 20 no intervalo de $0{,}5 \leq p \leq 0{,}51$ para 100 colisões entre o sistema A e ambiente B. A reta em vermelho está posicionada em $p = 0{,}509$. 75
Figura 22 – Gráfico construído para uma dinâmica com 50 colisões entre o sistema A e o ambiente B, usando $p = 0{,}509$. Vemos a série temporal do quantificador de coerência do sistema principal em função do número de colisões. 75
Figura 23 – Corte da uma região do DC da Figura 20 no intervalo de $0{,}75 \leq p \leq 0{,}81$ para 100 colisões (iterações) entre o sistema A e ambiente B. A reta em vermelho está posicionada em $p = 0,8$. 76
Figura 24 – Gráfico construído para uma dinâmica com 50 colisões entre o sistema A e o ambiente B, usando $p = 0{,}75$. Vemos a série temporal do quantificador de coerência do sistema principal em função do número de colisões. 76
Figura 25 – Norma da coerência do sistema A em função da norma da coerência do ambiente B para $p = 0{,}8$, construído para uma dinâmica com 50 colisões de A com B. Notamos a desordem na dinâmica da coerência, devido à distribuição dos pontos apresentada no gráfico que nos remete ao espaço de fases dos sistemas dinâmicos discretos clássicos para comportamento caótico, como visto no Capítulo 4. 77
Figura 26 – (a) Negatividade do emaranhamento $\mathcal{N}$ em função do número de colisões n. No cálculo numérico utilizamos o procedimento descrito na subseção 5.6.1, onde fixamos $p = 0{,}5$. Em (b) estão postos os pontos de $\mathcal{N}$ em preto, C_A em vermelho e C_B em azul como função de n. O procedimento computacional para calcular os quantificadores de coerência foi o mesmo descrito na seção 5.5.1. 79
Figura 27 – (a) Negatividade do emaranhamento $\mathcal{N}$ em função do número de colisões n. No cálculo numérico utilizamos o procedimento descrito na subseção 5.6.1, onde fixamos $p = 0{,}8$. Em (b) estão postos os pontos de $\mathcal{N}$ em preto, C_A em vermelho e C_B em azul estão em função de n. O procedimento computacional para calcular os quantificadores de coerência foi o mesmo descrito na seção 5.5.1. 80
Figura 28 – *Qubits* A, B e C dentro de uma caixa interagindo via colisões. 81

Figura 29 – Traço da distância $\mathcal{D}$ em função das iterações n. As imagens (a) e (b) se referem aos casos das colisões envolvendo dois e três *qubits*, respectivamente. Utilizamos os parâmetros $p = 0{,}5$, $a = b = 1/\sqrt{2}$, $w_f = 0{,}73$ e $w_e = 0{,}27$. 91
Figura 30 – Traço da distância $\mathcal{D}$ em função das iterações n. As curvas se referem às colisões envolvendo três *qubits*. Utilizamos os parâmetros $a = b = 1/\sqrt{2}$, $w_f = 0{,}73$ e $w_e = 0{,}27$ para vários valores de p intitulados em cada série temporal. 93
Figura 31 – (a) Norma da coerência do sistema principal C_A em função das iterações n, diagramas (b) $C_A \times C_B$ e (c) $C_A \times C_C$. Para construção dos gráficos utilizamos os parâmetros $a = b = 1/\sqrt{2}$, $w_f = 0{,}73$, $w_e = 0{,}27$ e $p = 0{,}5$. 94
Figura 32 – Norma da coerência do sistema principal C_A em função das iterações n. As curvas se referem às colisões envolvendo três *qubits*. Utilizamos os parâmetros $a = b = 1/\sqrt{2}$, $w_f = 0{,}73$ e $w_e = 0{,}27$ para vários valores de p intitulados em cada série temporal. 95
Figura 33 – Pureza do sistema A calculada em função do número de colisões a partir das condições descritas na Figura 32. 96
Figura 34 – *Qubits* A, B, C e D dentro de uma caixa interagindo via colisões. . . . 97
Figura 35 – Traço da distância $\mathcal{D}$ em função das iterações n. As imagens (a) e (b) se referem aos casos das colisões envolvendo dois e quatro *qubits* (com a curva em preto), respectivamente. Já na imagem a curva vermelha se refere ao modelo de três *qubits*. Utilizamos os parâmetros $p = 0{,}5$, $a = 1/\sqrt{2}$, $b = 1/\sqrt{2}$ para um estado do sistema principal e $b = -1/\sqrt{2}$ para outro, $w_f = 0{,}73$ e $w_e = 0{,}27$. 104
Figura 36 – Traço da distância $\mathcal{D}$ em função das iterações n. A imagem se refere à colisão entre o *qubit* A e um ambiente com inúmeros *qubits* idênticos no estado térmico. Utilizamos os parâmetros $a = 1/\sqrt{2}$, $b = 1/\sqrt{2}$ para um estado do sistema principal e $b = -1/\sqrt{2}$ para outro, $w_f = 0{,}73$ e $w_e = 0{,}27$. 105

Sumário

Lista de figuras **12**

1 INTRODUÇÃO **12**
1.1 Modelos quânticos colisionais e não markovianidade quântica **12**
1.2 Indagações sobre a não markovianidade quântica **14**
1.3 Estrutura da tese **14**

2 CONCEITOS PRELIMINARES **16**
2.1 Os postulados da mecânica quântica **16**
2.2 Sistemas quânticos abertos **17**
2.3 Operador densidade **18**
2.3.1 Estados mistos e puros 18
2.3.2 Propriedades do operador densidade 19
2.3.3 Operador densidade reduzido 21
2.3.4 Algumas consequências do operador densidade 21
2.3.4.1 Média de um operador 21
2.3.4.2 Evolução de *ensembles* no tempo 22
2.3.5 Operador densidade no estado de Gibbs 23
2.4 *Qubit* **25**
2.4.1 O operador densidade do *qubit* 27
2.5 Emaranhamento **28**
2.5.1 Estados emaranhados 29
2.5.2 Negatividade do emaranhamento 30
2.5.2.1 Comentário acerca da matriz transposta parcial 30
2.6 Coerência quântica **32**
2.6.1 Norma da coerência 34
2.7 Canais Quânticos **34**
2.7.1 Canal mudança de *bit* 37
2.7.2 Canal mudança de fase 39
2.7.3 Canal amplitude de amortecimento 40
2.7.4 Canais quânticos e coerência 41
2.7.4.1 Comentário acerca da Eq. (2.148) 42

3 NÃO MARKOVIANIDADE QUÂNTICA **44**
3.1 Markovianidade Clássica **45**
3.1.1 Processos estocásticos 45

3.1.2 Matrizes de transição 46
3.1.3 Exemplo de não markovianidade clássica 47
3.2 Markovianidade Quântica 49
3.2.1 Divisibilidade 49
3.2.2 Modelo quântico colisional markoviano 49
3.3 Modelo quântico colisional não markoviano 50
3.4 Traço da distância 52
3.5 Quantificador BLP para não markovianidade quântica 53

4 ELEMENTOS DA TEORIA DO CAOS CLÁSSICO 54
4.1 Sistemas dinâmicos 54
4.2 Espaço de fases e sua dinâmica 55
4.3 Seção de Poincaré 58
4.4 Diagramas de bifurcação 60

5 MODELO COLISIONAL NÃO MARKOVIANO PARA A DINÂMICA DE DOIS *QUBITS* 62
5.1 Modelo físico 62
5.2 Canal amplitude de amortecimento generalizado 63
5.3 Dinâmica do modelo colisional 67
5.4 Traço da distância 68
5.4.1 Procedimento computacional 68
5.4.2 Discussão dos resultados 70
5.5 Coerência 71
5.5.1 Procedimento computacional 71
5.5.2 Discussão dos resultados 72
5.5.3 Diagramas de coerência 73
5.5.3.1 Análise da região compreendida em $0{,}5 \leq p \leq 0{,}51$ 73
5.5.3.2 Análise da região compreendida em $0{,}75 \leq p \leq 0{,}81$ 75
5.6 Emaranhamento 77
5.6.1 Procedimento computacional 78
5.6.2 Discussão dos resultados 78
5.6.2.1 Análise para o caso de $p = 0{,}5$ 78
5.6.2.2 Análise para o caso de $p = 0{,}8$ 79

6 TRANSIÇÃO DA DINÂMICA NÃO MARKOVIANA PARA A MARKOVIANA 81
6.1 Modelo físico para o ambiente de dois *qubits* 81
6.2 Construção das matrizes unitárias para dinâmica do ambiente composto por dois *qubits* 83

6.2.1 Colisão entre A e B . . . 83
6.2.2 Colisão entre A e C . . . 87
6.2.3 Colisão entre B e C . . . 88
6.3 Construção da matriz densidade inicial envolvendo o ambiente de dois *qubits* . . . **89**
6.4 Traço da distância para o ambiente composto por dois *qubits* . . . **90**
6.4.1 Procedimento computacional . . . 90
6.4.2 Discussão de resultados . . . 91
6.5 Coerência para o ambiente composto por dois *qubits* . . . **92**
6.5.1 Procedimento computacional . . . 92
6.5.2 Discussão de resultados . . . 94
6.5.2.1 Pureza do sistema principal para $p = 1$ . . . 96
6.6 Modelo físico para o ambiente de três *qubits* . . . **97**
6.7 Construção das matrizes unitárias para dinâmica do ambiente composto por três *qubits* . . . **98**
6.7.1 Colisão entre A e B . . . 98
6.8 Construção da matriz densidade inicial envolvendo o ambiente de três *qubits* . . . **101**
6.9 Traço da distância para o ambiente composto por três *qubits* . . . **103**
6.9.1 Procedimento computacional . . . 103
6.9.2 Discussão de resultados . . . 104
6.9.3 Comentários sobre a dinâmica markoviana . . . 105

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . 107

REFERÊNCIAS . . . 109

A COMENTÁRIOS SOBRE PRODUTOS TENSORIAIS . . . 117

B TEOREMA DE LAPLACE . . . 119

C CONTINUAÇÃO DA CONSTRUÇÃO DAS MATRIZES UNITÁRIAS PARA O CASO DA DINÂMICA COM AMBIENTE COMPOSTO POR TRÊS *QUBITS* . . . **121**
C.1 Colisão entre A e C . . . **122**
C.2 Colisão entre A e D . . . **123**
C.3 Colisão entre B e C . . . **125**
C.4 Colisão entre B e D . . . **127**
C.5 Colisão entre C e D . . . **129**

D ALGUNS ALGORITMOS . . . 132

D.1 Traço da distância para a interação do sistema principal com o ambiente de um *qubit* **132**
D.2 Norma da coerência do sistema principal para a interação com o ambiente de um *qubit* **133**
D.3 Traço da distância para a interação do sistema principal com o ambiente de dois *qubits* **133**
D.4 Norma da coerência do sistema principal para a interação com o ambiente de dois *qubits* **134**

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Nesta introdução buscaremos apresentar alguns contextos da mecânica quântica que motivaram a pesquisa contida na tese. Para tanto, na seção 1.1 relataremos resumidamente os aspectos fundamentais para a construção da tese, que são os modelos quânticos colisionais e a não markovianidade quântica. Na seção 1.2 serão descritas as indagações a respeito do que as pesquisas atuais não apresentam nos estudos de não markovianidade quântica e o porquê de averiguarmos isto. Já na última seção 1.3, relataremos os conteúdos presentes nos capítulos subsequentes da tese.

1.1 Modelos quânticos colisionais e não markovianidade quântica

Nos últimos vinte anos, pesquisadores têm se dedicado ao estudo de fundamentos e aplicações da mecânica quântica na computação e informação, bem como no desenvolvimento de outras tecnologias [4, 7]. Muitas das investigações já foram teorizadas e comprovadas, a exemplo da codificação superdensa, que considera *qubits* emaranhados para transmitir dois bits clássicos de informação [2, 8], ou do teletransporte quântico, onde um emissor pode enviar informação quântica para um receptor a partir do compartilhamento de partículas emaranhadas entre eles [2, 9]. Além das pesquisas em informação e computação, a mecânica quântica tem se estendido a outros campos da ciência, como a termodinâmica [10, 11], que a partir de sistemas quânticos é possível investigar ciclos termodinâmicos [12], máquinas térmicas quânticas [12, 13] e efeitos de energia coerente, a exemplo da reformulação da primeira lei da termodinâmica quântica [14].

Modelos quânticos colisionais têm sido utilizados para descrever os estudos mencionados anteriormente. Neste sentido, podemos considerar um sistema quântico interagindo com vários subsistemas que constituem o ambiente. Num dos primeiros trabalhos sobre

MQC, estudou-se como gerar relaxação de spins e osciladores harmônicos que interagem [4, 15]. Anos depois, surgiram estudos voltados para medidas quânticas [4, 16, 17].

Os MQC podem exibir dinâmica markoviana e não markoviana dentro do contexto quântico, apesar dos termos se referirem a processos estocásticos clássicos, onde se evidenciam efeitos de memória [18]. Pelo fato de não haver uma relação direta entre não markovianidade clássica e quântica, recorremos a conceitos presentes na literatura que nos permite medir o grau de não markovianidade quântica, pois assim podemos avaliar os efeitos de memória nos MQC. Durante um processo colisional quântico, percebemos que na dinâmica markoviana o sistema principal perde informação para o ambiente, enquanto que na não markoviana, além de acontecer esta situação, o ambiente acaba devolvendo informação para o sistema [19]. Este fato pode ainda estar associado à ida e volta de energia [20, 21], o que denominaremos aqui por refluxo energético.

Processos quânticos não markovianos têm sido estudados em seus fundamentos físicos através de correlações entre sistemas e ambientes a partir de experimentos, como o descrito a seguir [1].

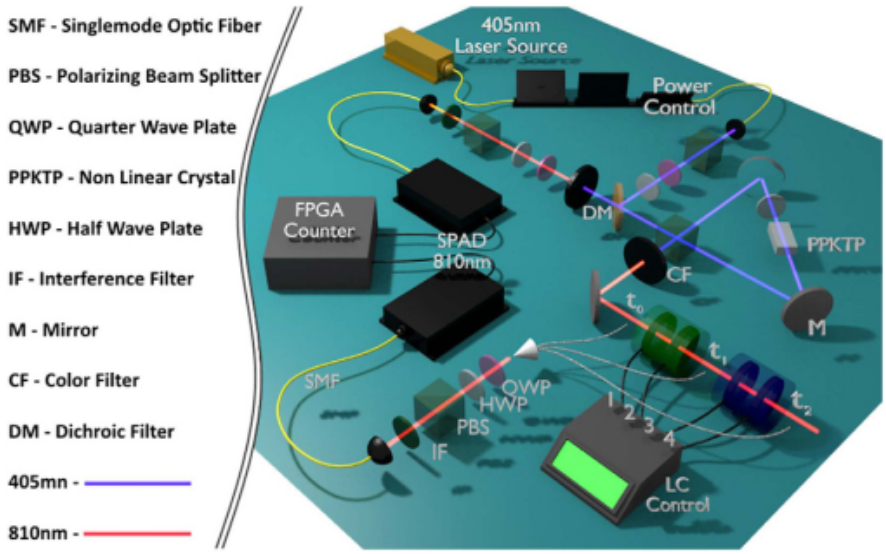


Figura 1 – Esquema experimental retirado da Ref. [1].

De acordo com a Ref. [1], no experimento da Figura 1, fótons gêmeos são criados com polarização emaranhada a partir de uma fonte. Um fóton (sistema s) é enviado a partir de um cristal líquido correlacionado que representa um ambiente, enquanto que o outro fóton (*ancilla* a) segue livremente. Assim, o estado bipartido é medido por tomografia do estado completo nos tempos t_0, t_1 e t_2. Os cristais líquidos (LCs) funcionam como retardadores de fase, com a fase relativa entre os componentes de radiação ordinária e extraordinária dependendo da voltagem aplicada. A partir do experimento os autores concluíram que a não markovianidade existe ainda que a correlação entre sistema e ambiente aumente. No

trabalho também se estuda a transição do regime de correlação forte e fraca para uma melhor compreensão da não markovianidade quântica.

1.2 Indagações sobre a não markovianidade quântica

Além do estudo demonstrado anteriormente, a não markovianidade é investigada em modelos utilizando o canal amplitude de amortecimento [22], condensado de Bose-Einstein [23, 24], biologia de complexos fotossintéticos [25–27] e na melhoria da capacidade de canais quânticos [28]. Nestes trabalhos, os pesquisadores ainda estudam a transição da markovianidade para a não markovianidade [29], mas não explicam a influência do tamanho do ambiente na dinâmica. Este é um questionamento fundamental, tendo em vista que os efeitos de decoerência ocorrem em escalas macroscópicas [30], onde o sistema quântico perde informação para o ambiente. Por conta disto, procuraremos investigar aqui a dinâmica não markoviana em MQC a partir de um ambiente com poucos constituintes. Com este intuito, consideraremos um *qubit* como sistema principal interagido com *qubits* no estado térmico.

A partir das discussões anteriores, surgem alguns questionamentos dentro do tema. Como podemos descrever o fluxo de informação entre um sistema e ambientes de diferentes tamanhos? O que caracteriza e quantifica essa dinâmica? Quais grandezas quânticas podem ser utilizadas para descrever o fluxo de informação? Dependendo dos resultados apresentados, é necessário utilizar outros conhecimentos da física? Há um limite para o qual ocorra uma transição da dinâmica não markoviana para markoviana? Veremos como responder a estas perguntas na próxima seção.

1.3 Estrutura da tese

Com o intuito de responder os questionamentos apresentados no parágrafo anterior, estruturamos a tese de forma lógica para explicar os resultados do estudo. No capítulo 2 descreveremos os conceitos teóricos da mecânica quântica utilizados na teoria da informação quântica, começando pelos postulados, passando por sistemas quânticos abertos, indo em direção a uma revisão do operador densidade. Ainda no mesmo capítulo, discorreremos sobre os *qubits* e aspectos pontuais do emaranhamento e da coerência. Nas últimas seções apresentaremos a teoria dos canais quânticos. No capítulo 3 revisaremos as características mais gerais da não markovianidade quântica, onde será necessário entendermos alguns aspectos clássicos. Com relação às particularidades quânticas, exemplificaremos MQC e depois apresentaremos o que testifica e quantifica a não markovianidade quântica.

Após as discussões apresentadas anteriormente, será necessário elencarmos alguns elementos da teoria do caos clássico no capítulo 4, onde descreveremos sobre sistemas

dinâmicos, espaços de fase, séries temporais e diagramas de bifurcação, utilizando modelos já conhecidos na literatura. Isto é importante, pois no capítulo 5 usaremos algumas noções da TCC para descrevermos a dinâmica de dois *qubits* interagindo via colisões. Para tanto, utilizaremos o canal amplitude de amortecimento generalizado. Veremos os comportamentos caótico e regular da coerência e do emaranhamento apresentados no sistema. Além disso, discutiremos sobre o diagrama de coerência, que é análogo ao diagrama de bifurcação da TCC.

No capítulo 6 mostraremos os resultados da dinâmica não markoviana quando acrescentamos mais *qubits* térmicos ao ambiente. Ainda neste estudo já consideraremos o emaranhamento incluso na dinâmica e perceberemos o comportamento caótico no traço da distância e na coerência. Além disso, mostraremos os resultados da transição entre a não markovianidade e markovianidade quântica, bem como explicitaremos que o tamanho do ambiente contribui significativamente para esta modificação da dinâmica através de resultados quantitativos da medida BLP, desenvolvidos por H. Breuer, E. Laine e J. Piilo [31, 32]. No capítulo 7, apresentaremos as considerações finais e perspectivas do nosso estudo.

CAPÍTULO 2

CONCEITOS PRELIMINARES

Este capítulo é reservado para uma revisão de fundamentos utilizados nas teorias da informação, computação e termodinâmica quântica. Inicialmente discutiremos sobre os postulados da mecânica quântica, com enfoque em sistemas quânticos fechados. Depois, descreveremos sistemas quânticos abertos. Em seguida, o capítulo se estenderá na discussão do operador densidade e suas implicações. A partir deste conhecimento, abordaremos sobre os *qubits*. No penúltimo bloco de assuntos, discutiremos sobre emaranhamento e coerência. Por fim, apresentaremos o formalismo matemático dos canais quânticos juntamente com algumas aplicações.

2.1 Os postulados da mecânica quântica

O objetivo nesta seção é de sumarizarmos alguns conceitos nos quais a teoria quântica está fundamentada, pois as ideias abordadas aqui serão vistas no decorrer da tese. Então, enunciemos os postulados da mecânica quântica [2], que neste contexto se aplicam a sistemas fechados.

Postulado 1. *Um sistema físico isolado é associado ao espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, que é um espaço vetorial complexo com produto interno. $\mathcal{H}$ é conhecido como espaço de estados do sistema. Um sistema tem sua descrição completa a partir de um vetor de estado no espaço de Hilbert.*

Postulado 2. *A dinâmica de um sistema quântico fechado se dá por uma transformação unitária. Ou seja, um estado $|\psi_0\rangle$ no tempo t_0 evolui para o estado $|\psi_1\rangle$ num tempo t_1 a partir de um operador unitário $\hat{U}$ que só depende dos tempos t_0 e t_1. Isto é,*

$$|\psi_1\rangle = \hat{U}\,|\psi_0\rangle\,. \tag{2.1}$$

Postulado 2. 1. *Este postulado é uma sofisticação do anterior. Neste se afirma que a evolução temporal de um sistema quântico fechado em um estado $|\psi\rangle$ é dada pela equação de Schrödinger como*

$$i\hbar\frac{d\,|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}\,|\psi\rangle\,, \tag{2.2}$$

onde $\hat{H}$ é o operador hamiltoniano do sistema.

Postulado 3. *As medidas quânticas são descritas por uma coleção $\{\hat{M}_m\}$ de operadores de medida que atuam no espaço de Hilbert onde o sistema é medido. Se imediatamente antes da medida o estado do sistema é $|\psi\rangle$, a probabilidade $p(m)$ de ocorrer m é expressa como*

$$p(m) = \langle\psi|\,\hat{M}_m^\dagger\hat{M}_m\,|\psi\rangle\,, \tag{2.3}$$

e depois da medida o estado $|\psi\rangle$ sofre a transformação

$$|\psi\rangle \to \frac{\hat{M}_m\,|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\,\hat{M}_m^\dagger\hat{M}_m\,|\psi\rangle}}. \tag{2.4}$$

Além disso, os operadores de medidas obedecem à relação de completeza

$$\sum_m \hat{M}_m^\dagger\hat{M}_m = \hat{I}, \tag{2.5}$$

onde $\hat{I}$ é o operador identidade.

Postulado 4. *Um sistema composto terá o espaço de estados constituído pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert dos sistemas físicos individuais. Entretanto, se existem N sistemas que podem ser enumerados e um sistema k está preparado no estado $|\psi_k\rangle$, então o estado do sistema total será $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes ... \otimes |\psi_N\rangle \equiv |\psi_1, \psi_2, ..., \psi_N\rangle$, que de agora em diante usaremos esta notação para representar o produto tensorial entre kets.*

2.2 Sistemas quânticos abertos

Um sistema quântico aberto S é aquele que está acoplado a outro sistema quântico E denominado ambiente [33], como pode ser visto na Figura 2. Desta forma, S é um subsistema de um sistema total constituído por "$S + E$". O estado de S pode mudar devido a interação com E, ocasionando até mesmo correlações entre sistema e ambiente. Assim, se quisermos saber alguma informação de S, recorremos à dinâmica do operador densidade reduzido do sistema composto [33], como veremos adiante.

Sejam $\mathcal{H}_S$ e $\mathcal{H}_E$ os espaços de Hilbert do sistema quântico aberto e do ambiente, respectivamente. Com isso, o espaço de estados para o sistema composto é $\mathcal{H}_{SE} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$. Desta forma, o operador hamiltoniano $\hat{H}_{SE}$ do sistema total é dado por

$$\hat{H}_{SE} = \hat{H}_S \otimes \hat{I}_E + \hat{I}_S \otimes \hat{H}_E + \hat{H}_I, \tag{2.6}$$

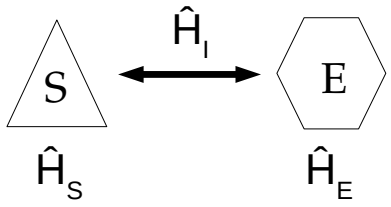


Figura 2 – Representação esquemática de um sistema quântico aberto S interagindo com um ambiente E, onde $\hat{H}_S$, $\hat{H}_E$ e $\hat{H}_I$ são os operadores hamiltonianos de S, E e de interação, respectivamente.

onde $\hat{H}_S$ e $\hat{H}_E$ são os operadores hamiltonianos do sistema aberto e do ambiente, respectivamente. Temos também que $\hat{I}_S$ e $\hat{I}_E$ são os respectivos operadores identidade do sistema e ambiente. Já $\hat{H}_I$ é o hamiltoniano de interação [18, 33].

Para a descrição da dinâmica de sistemas quânticos abertos utilizaremos o formalismo do operador densidade, como veremos na próxima seção.

2.3 Operador densidade

O operador densidade foi criado por J. von Neumann em 1927 [34] e tem uma importância fundamental no estudo de sistema quânticos abertos. Para compreendermos o conceito do operador, daqui por diante nos basearemos nas referências [2, 34], que só serão citadas em situações enfáticas. Caso seja(m) necessária(as) outra(as) referência(as), esta(s) será(ão) citada(s) no decorrer do texto.

2.3.1 Estados mistos e puros

Para entendermos os conceitos descritos no título desta subseção, comecemos por considerar átomos de prata colocados num forno e que ainda não foram submetidos ao processo de filtragem no experimento de Stern-Gelarch. Quando os átomos estão enclausurados, as orientações de seus spins são aleatórias. Pelo fato de não sabermos sobre tais orientações, recorremos ao conceito de peso probabilístico, onde podemos dizer, por exemplo, que um percentual de átomos está no estado *up* ($|e\rangle$), outro no estado *down* ($|f\rangle$) e outro numa superposição de *up* e *down* ($r_0 |f\rangle + s_0 |e\rangle : r_0, s_0 \in \mathbb{C}$). Esta situação é um

típico exemplo de *ensemble* misto, cujo operador densidade é dado por

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j \left|\psi_j\right\rangle \left\langle\psi_j\right|, \tag{2.7}$$

onde p_j é a probabilidade de uma certa quantidade de átomos estar no estado $|\psi_j\rangle$. Além disso,

$$\sum_j p_j = 1. \tag{2.8}$$

Suponhamos agora que elementos de uma certa coleção de átomos de prata ao passarem pela região de campo magnético não uniforme só adquiram spin *up* ($|e\rangle$). Este exemplo é característico do *ensemble* puro, ou seja, quando o sistema físico pode ser descrito por um ket [35]. Portanto, o operador densidade neste caso será

$$\hat{\rho} = \left|e\right\rangle \left\langle e\right|, \tag{2.9}$$

indicando que 100% dos constituintes do sistema estão em um único estado de spin. Generalizando o conceito para um dado estado puro $|\phi\rangle$ qualquer, temos que

$$\hat{\rho} = \left|\phi\right\rangle \left\langle\phi\right|. \tag{2.10}$$

Além disso, para que um *ensemble* seja puro deve satisfazer a condição de $Tr(\hat{\rho}^2) = 1$, enquanto que para o *ensemble* misto o critério $Tr(\hat{\rho}^2) < 1$ deve ser satisfeito.

Podemos fazer uma observação quanto ao estado puro. Da Eq. (2.10), temos que

$$\hat{\rho}^2 = \left|\phi\right\rangle \left\langle\phi\right| \left.\phi\right\rangle \left\langle\phi\right| = \left|\phi\right\rangle \left\langle\phi\right| = \hat{\rho}, \tag{2.11}$$

que para um autoket $|v\rangle$ de $\hat{\rho}$, obtemos

$$\hat{\rho}^2 \left|v\right\rangle = \hat{\rho} \left|v\right\rangle \Rightarrow \lambda^2 \left|v\right\rangle = \lambda \left|v\right\rangle, \tag{2.12}$$

onde λ são autovalores de $\hat{\rho}$. Desta forma, extraímos que

$$\lambda(\lambda - 1) = 0, \tag{2.13}$$

e portanto $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, significando que estes são os dois resultados para os autovalores do operador densidade de um *ensemble* puro.

2.3.2 Propriedades do operador densidade

Das Eqs. (2.7) e (2.10) percebemos que o operador densidade é hermitiano, independentemente do *ensemble* ser misto ou puro.

Demonstração. Da Eq. (2.7) temos que para o *ensemble* misto

$$\hat{\rho}^\dagger = \sum_j p_j^* (|\psi_j\rangle \langle\psi_j|)^\dagger = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j| = \hat{\rho}, \tag{2.14}$$

já que $p_j \in \mathbb{R}$.

Para o ensemble puro, temos da Eq. (2.10) que

$$\hat{\rho}^\dagger = (|\psi_j\rangle \langle\psi_j|)^\dagger = |\psi_j\rangle \langle\psi_j| = \hat{\rho}. \tag{2.15}$$

■

Enunciaremos a seguir um teorema que define duas características importantes do operador densidade.

Teorema 1. *O operador $\hat{\rho}$ é um operador densidade relacionado a algum ensemble se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:*

1. *Condição do traço, quando $Tr(\hat{\rho}) = 1$.*
2. *Condição de positividade, quando $\hat{\rho}$ é um operador positivo*[1].

Demonstração. Seja

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j |j\rangle \langle j| \tag{2.16}$$

um operador densidade. Então, o traço de $\hat{\rho}$ na base $\{|l\rangle\}$ é

$$Tr(\hat{\rho}) = \sum_{jl} p_j \langle l|j\rangle \langle j|l\rangle = \sum_{jl} p_j \delta_{lj} \delta_{jl} = \sum_j p_j = 1, \tag{2.17}$$

pela Eq. (2.8). Desta forma a primeira condição do teorema é satisfeita.

Se $|v\rangle$ é um ket qualquer no espaço de Hilbert, então,

$$\langle v| \hat{\rho} |v\rangle = \sum_j p_j \langle v|j\rangle \langle j|v\rangle = \sum_j p_j |\langle v|j\rangle|^2 \geq 0, \tag{2.18}$$

satisfazendo assim a segunda condição do teorema.

■

[1] Um operador $\hat{R}$ será positivo se para um vetor $|r\rangle$ qualquer do espaço de Hilbert em questão for sempre válida a condição $\langle r| \hat{R} |r\rangle \in \mathbb{R}_+$.

2.3.3 Operador densidade reduzido

O conceito de operador densidade reduzido foi introduzido por P. A. M. Dirac em 1930 [36]. Para compreendermos a ideia, consideremos dois sistemas quânticos J e V, em que algum procedimento tenha sido feito sobre os dois, de tal modo que tenhamos acesso ao operador densidade do sistema composto $\hat{\rho}_{JV}$. Se quisermos saber a informação sobre um dos sistemas, digamos o J, recorremos à expressão

$$\hat{\rho}_J = Tr_V(\hat{\rho}_{JV}), \tag{2.19}$$

onde $Tr_V(\hat{\rho}_{JV})$ é o traço parcial sobre os estados de V. De igual modo, se desejarmos obter uma informação do sistema V, tomamos

$$\hat{\rho}_V = Tr_J(\hat{\rho}_{JV}), \tag{2.20}$$

onde $Tr_J(\hat{\rho}_{JV})$ é o traço parcial sobre os estados de J.

2.3.4 Algumas consequências do operador densidade

Dividiremos esta subseção em duas partes, onde (i) abordaremos acerca da média de um operador e (ii) sobre a evolução de *ensembles* no tempo. Estes dois assuntos são importantes, pois servem de base para discutirmos a respeito do operador densidade no estado de Gibbs, que é conteúdo da próxima subseção.

2.3.4.1 Média de um operador

Considere um operador $\hat{O}$ atuando num *ensemble* misto. Assim, a média de $\hat{O}$ sobre o *ensemble* é

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{\sum_m p_m \langle m| \hat{O} |m\rangle}{\sum_m p_m}, \tag{2.21}$$

onde p_m está relacionado com o operador densidade, designando a probabilidade do sistema estar em um estado $|m\rangle$. Além disso, sabemos que $\sum_m p_m = 1$, de acordo com a Eq. (2.8). Desta forma, reescrevemos a equação anterior como

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_m p_m \langle m| \hat{O} |m\rangle . \tag{2.22}$$

Vamos aplicar na Eq. (2.22) um operador identidade em uma base genérica $\{|a'\rangle\}$ e outro na base $\{|b'\rangle\}$. Assim, efetuando os cálculos, temos que

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle &= \sum_m p_m \langle m| \Big(\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| \Big) \hat{O} \Big(\sum_{b'} |b'\rangle \langle b'| \Big) |m\rangle \\ &= \sum_{a'} \sum_{b'} \sum_m p_m \langle m|a'\rangle \langle b'|m\rangle \langle a'| \hat{O} |b'\rangle \\ &= \sum_{a'} \sum_{b'} \langle b'| \Big\{ \sum_m p_m |m\rangle \langle m| \Big\} |a'\rangle \langle a'| \hat{O} |b'\rangle . \end{aligned} \tag{2.23}$$

O termo entre chaves é a definição de operador densidade $\hat{\rho}$ para o estado misto, como visto na Eq. (2.7). Portanto, a Eq. (2.23) fica

$$\begin{aligned}\langle \hat{O} \rangle &= \sum_{a'} \sum_{b'} \langle b' | \, \hat{\rho} \, | a' \rangle \, \langle a' | \, \hat{O} \, | b' \rangle \\ &= \sum_{b'} \langle b' | \, \hat{\rho} \Big[\sum_{a'} | a' \rangle \, \langle a' | \Big] \hat{O} \, | b' \rangle \\ &= \sum_{b'} \langle b' | \, \hat{\rho} \hat{O} \, | b' \rangle \, ,\end{aligned} \tag{2.24}$$

cujo lado direito é a definição de traço. Logo, reescrevemos a equação anterior como

$$\langle \hat{O} \rangle = Tr\Big(\hat{\rho} \hat{O}\Big). \tag{2.25}$$

2.3.4.2 Evolução de *ensembles* no tempo

Seja

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j \, | \psi_j \rangle \, \langle \psi_j | \tag{2.26}$$

o operador densidade de um sistema quântico num tempo t_0. Então, a evolução temporal de $\hat{\rho}$ será regida pela equação

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \sum_j p_j \frac{\partial \, | \psi_j \rangle}{\partial t} \, \langle \psi_j | + \sum_j p_j \, | \psi_j \rangle \, \frac{\partial \, \langle \psi_j |}{\partial t}. \tag{2.27}$$

Multiplicando ambos os lados de (2.27) por $i\hbar$ e rearranjando os termos, obtemos

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \sum_j p_j \left(i\hbar \frac{\partial \, | \psi_j \rangle}{\partial t} \right) \langle \psi_j | - \sum_j p_j \, | \psi_j \rangle \left(- i\hbar \frac{\partial \, \langle \psi_j |}{\partial t} \right). \tag{2.28}$$

Da Equação de Schrödinger, temos que

$$i\hbar \frac{\partial \, | \psi_j \rangle}{\partial t} = \hat{H} \, | \psi_j \rangle \, , \tag{2.29}$$

enquanto que no espaço dual

$$-i\hbar \frac{\partial \, \langle \psi_j |}{\partial t} = \langle \psi_j | \, \hat{H}, \tag{2.30}$$

pois o operador hamiltoniano $\hat{H}$ é hermitiano. Substituindo as Eqs. (2.29) e (2.30) na (2.28), temos que

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} &= \sum_j p_j \hat{H} \, | \psi_j \rangle \, \langle \psi_j | - \sum_j p_j \, | \psi_j \rangle \, \langle \psi_j | \, \hat{H} \\ &= \hat{H} \left(\sum_j p_j \, | \psi_j \rangle \, \langle \psi_j | \right) - \left(\sum_j p_j \, | \psi_j \rangle \, \langle \psi_j | \right) \hat{H}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Note que os termos entre parênteses definem o operador $\hat{\rho}$ dado na Eq. (2.26). Desta forma, a Eq. (2.31) será dada por

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = \hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}, \tag{2.32}$$

que pela relação de comutação, adquirimos

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H},\hat{\rho}] = -[\hat{\rho},\hat{H}], \tag{2.33}$$

que é denominada de equação de von Neumann [33, 37].

2.3.5 Operador densidade no estado de Gibbs

Da mecânica estatística clássica sabemos que o *ensemble* canônico é um formalismo utilizado para descrever o equilíbrio térmico de um sistema termodinâmico L em contato com um reservatório F muito maior que L [38–40]. Dentro deste formalismo, através da função de partição canônica Z (cuja expressão matemática será dada adiante) conectada à energia livre de Helmholtz, somos capazes de obter as quantidades termodinâmicas desejáveis, como pressão, entropia e energia interna.

Nesta tese utilizaremos a mecânica estatística quântica para obter o operador densidade no estado de Gibbs. Assim, no equilíbrio térmico, esperamos que um sistema quântico obedeça à relação

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = 0. \tag{2.34}$$

Deste resultado e da Eq. (2.33), temos que $[\hat{\rho},\hat{H}] = 0$. A partir disto, nos basearemos no teorema enunciado a seguir [34].

Teorema 2. *Se $[\hat{\rho},\hat{H}] = 0$ e os autovalores de $\hat{H}$ não são degenerados, então $\hat{\rho}$ pode ser escrito na forma diagonal dos autokets $\{|n\rangle\}$ que constituem a base de $\hat{H}$.*

Portanto,

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n \left|n\right\rangle \left\langle n\right|, \tag{2.35}$$

onde p_n é a probabilidade do sistema estar num estado $|n\rangle$ [41].

Para prosseguir nas análises, utilizaremos a entropia termodinâmica S_T, para que haja uma conexão entre a termodinâmica e o operador densidade. Assim, temos [14]

$$S_T = -k_B Tr\Big[\hat{\rho}\ln\hat{\rho}\Big]. \tag{2.36}$$

Como $\hat{\rho}$ está na forma diagonal, podemos definir a função de tal operador como $f(\hat{\rho}) = \sum_n f(p_n)\left|n\right\rangle\left\langle n\right|$ [2]. Assim, substituindo a Eq.(2.35) na (2.36), temos que

$$\begin{aligned} S_T &= -k_B\sum_{lmn} p_l \ln(p_m)\langle n|l\rangle\langle l|m\rangle\langle m|n\rangle \\ &= -k_B\sum_{lmn} p_l \ln(p_m)\delta_{nl}\delta_{lm}\delta_{mn}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Portanto,

$$S_T = -k_B \sum_n p_n \ln(p_n). \tag{2.38}$$

Vamos agora utilizar a condição de que no equilíbrio a entropia é máxima [39]. Ou seja, tomaremos $\delta S_T = 0 \Rightarrow \delta\Big[\sum_n p_n \ln(p_n)\Big] = 0$. Para tanto, utilizaremos o método de multiplicadores de Lagrange, cujas restrições das nossas análises são (i) a energia interna do sistema dada por $U = \langle \hat{H} \rangle = Tr\Big(\hat{\rho}\hat{H}\Big) = \sum_n p_n E_n$ (onde E_n é fixa) e (ii) $\mathbb{p} = \sum_n p_n = 1$. Além disso, consideraremos a expressão $S_T/k_B = -\sum_n p_n \ln(p_n)$, pois isto não afeta a maximização da entropia. Nestas condições, escrevemos a função de Lagrange $\mathcal{L}$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{S_T}{k_B} - \beta U - \upsilon \mathbb{p} \\ &= -\sum_n p_n \ln(p_n) - \beta \sum_n p_n E_n - \upsilon \sum_n p_n. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Extremizando $\mathcal{L}$, temos que

$$\delta\mathcal{L} = \sum_n \Big\{ -\Big[\delta(p_n)\ln(p_n) + \frac{1}{p_n}\delta(p_n)p_n\Big] - \beta\delta(p_n)E_n - \upsilon\delta(p_n)\Big\} = 0. \tag{2.40}$$

Portanto, multiplicando ambos os lados da última equação por -1 e rearranjando os termos, obtemos

$$\sum_n \delta(p_n)\Big[\ln(p_n) + 1 + \beta E_n + \upsilon\Big] = 0. \tag{2.41}$$

Para qualquer variação $\delta(p_n)$, extraímos da igualdade anterior que

$$\ln(p_n) + 1 + \beta E_n + \upsilon = 0. \tag{2.42}$$

Da última equação, após algumas manipulações matemáticas, obtemos

$$p_n = C_0 e^{-\beta E_n}, \tag{2.43}$$

onde $C_0 = \exp(-1-\upsilon)$ é uma constante que pode ser obtida pela condição de normalização. Logo, $\sum_n p_n = C_0 \sum_n e^{-\beta E_n} = 1$, e portanto

$$C_0 = \frac{1}{\sum_n e^{-\beta E_n}}. \tag{2.44}$$

Agora, substituindo a Eq. (2.44) na (2.43), obtemos

$$p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_n e^{-\beta E_n}}, \tag{2.45}$$

onde $Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$ é a função de partição. Substituindo o último resultado na Eq. (2.35), temos que

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z}\sum_n e^{-\beta E_n} |n\rangle \langle n|. \tag{2.46}$$

Note que

$$e^{-\beta\hat{H}} = \sum_n e^{-\beta E_n} |n\rangle \langle n| . \tag{2.47}$$

Assim, substituindo a Eq. (2.47) na (2.46), obtemos

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta\hat{H}}}{Z}, \tag{2.48}$$

que é uma outra forma de escrever o operador densidade no estado de Gibbs, que também pode ser chamado de estado térmico.

2.4 *Qubit*

Na teoria da informação clássica o *bit* (do inglês *binary digit*) quantifica a capacidade de armazenamento da informação, podendo assumir dois valores distintos: 0 ou 1 [42, 43]. Geralmente a quantidade de informação que pode ser armazenada num sistema clássico de N estados é $\log_b N$, onde b é unidade escolhida para medir a informação, que no caso do *bit* é $b = 2$ [43–45].

Na teoria da informação quântica o *qubit* (do inglês *quantum bit*) é o análogo do *bit*, podendo assumir os estados 0 ou 1, bem como uma superposição destes. Em termos matemáticos, utilizaremos a notação de Dirac para escrever $0 \to |f\rangle$ e $1 \to |e\rangle$ (baseado em [46]), e desta forma obtemos os estados $|f\rangle$, $|e\rangle$ ou $\alpha_0 |f\rangle + \beta_0 |e\rangle : \alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{C}$ [2, 44].

Pelo fato de podermos tratar o *qubit* como qualquer sistema de dois níveis [44], vamos pensar num sistema de spin 1/2, onde $|f\rangle$ e $|e\rangle$ são autokets do operador de Pauli $\hat{\sigma}_z$. Nesta base, escrevemos os operadores de Pauli como

$$\hat{I} = |f\rangle \langle f| + |e\rangle \langle e| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.49}$$

$$\hat{\sigma}_x = |f\rangle \langle e| + |e\rangle \langle f| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.50}$$

$$\hat{\sigma}_y = i(|e\rangle \langle f| - |f\rangle \langle e|) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

e

$$\hat{\sigma}_z = |f\rangle \langle f| - |e\rangle \langle e| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

Além disso, as seguintes relações de comutação e anticomutação devem ser obedecidas:

$$[\hat{\sigma}_\mu, \hat{\sigma}_\nu] = 2i\epsilon_{\mu\nu\iota}\hat{\sigma}_\iota \tag{2.53}$$

e

$$\{\hat{\sigma}_\mu, \hat{\sigma}_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}\hat{I}, \tag{2.54}$$

onde $\epsilon_{\mu\nu\iota}$ é o símbolo de Levi-Civita e $\delta_{\mu\nu}$ o delta de Kronecker. Além disso, μ, ν e ι podem representar x, y e z.

Os autokets dos operadores de Pauli $\hat{\sigma}_x$ e $\hat{\sigma}_y$ na base dos autokets de $\hat{\sigma}_z$ são dados respectivamente como

$$|x\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|f\rangle \pm |e\rangle\,\Big) \tag{2.55}$$

e

$$|y\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|f\rangle \pm i\,|e\rangle\,\Big). \tag{2.56}$$

Podemos representar um estado de *qubit* genérico $|\eta\rangle$ em termos de coordenadas esféricas, relacionadas à esfera de Bloch, representada na Figura 3. Assim, temos que

$$|\eta\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|f\rangle + e^{i\phi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)|e\rangle\,, \tag{2.57}$$

onde $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$ são os ângulos polar e azimutal, respectivamente [47,48]. Além disso, cada ponto na superfície da esfera de Bloch representa um estado puro do *qubit* indicado pelo vetor $\vec{r}$, que é unitário [44] e está relacionado com as coordenadas cartesianas na seguinte forma

$$\vec{r} = \,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\hat{x} + \,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}, \tag{2.58}$$

cujos vetores do lado direito da Eq. (2.58) tem módulo igual a um e constituem a base canônica do espaço cartesiano [49].

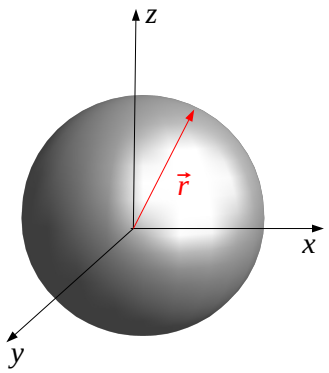


Figura 3 – Esfera de Bloch, onde cada ponto da superfície representa um estado puro do *qubit*.

2.4.1 O operador densidade do *qubit*

Da Eq. (2.57) temos que o operador densidade do *qubit* no estado puro é

$$\hat{\rho} = |\eta\rangle\langle\eta| = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|f\rangle + e^{i\phi}\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)|e\rangle\right]\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\langle f| + e^{-i\phi}\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\langle e|\right]. \quad (2.59)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\hat{\rho} = &\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)|f\rangle\langle f| + e^{-i\phi}\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|f\rangle\langle e| \\ &+ e^{i\phi}\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|e\rangle\langle f| + \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)|e\rangle\langle e|.\end{aligned} \quad (2.60)$$

Das relações trigonométricas e da fórmula de Euler, temos que

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos\theta}{2}, \quad (2.61)$$

$$\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{2}, \quad (2.62)$$

$$\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\text{sen}\,\theta}{2} \quad (2.63)$$

e

$$e^{\pm i\phi} = \cos\phi \pm i\,\text{sen}\,\phi. \quad (2.64)$$

Substituindo as Eqs. (2.61), (2.62), (2.63) e (2.64) na (2.60), bem como organizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\rho} = &\frac{1}{2}\Big\{\Big(|f\rangle\langle f| + |e\rangle\langle e|\Big) + \cos\phi\,\text{sen}\,\theta\Big(|f\rangle\langle e| + |e\rangle\langle f|\Big) \\ &+ \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\Big[i\Big(|e\rangle\langle f| - |f\rangle\langle e|\Big)\Big] + \cos\theta\Big(|f\rangle\langle f| - |e\rangle\langle e|\Big)\Big\}.\end{aligned} \quad (2.65)$$

Das Eqs.(2.49), (2.50), (2.51) e (2.52), reescrevemos (2.65) como

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \frac{1}{2}\Big\{\hat{I} + \cos\phi\,\text{sen}\,\theta\hat{\sigma}_x + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\hat{\sigma}_y + \cos\theta\hat{\sigma}_z\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\Big\{\hat{I} + \underbrace{\Big(\cos\phi\,\text{sen}\,\theta\hat{x} + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\hat{y} + \cos\theta\hat{z}\Big)}\cdot\underbrace{\Big(\hat{\sigma}_x\hat{x} + \hat{\sigma}_y\hat{y} + \hat{\sigma}_z\hat{z}\Big)}\Big\}.\end{aligned} \quad (2.66)$$

O primeiro termo destacado no lado direito de (2.66) é o vetor $\vec{r}$ da Eq. (2.58). Já o segundo termo destacado será definido como $\hat{\sigma}$. Desta forma, reescrevemos a Eq. (2.66) como

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\Big\{\hat{I} + \vec{r}\cdot\hat{\sigma}\Big\}. \quad (2.67)$$

Já sabemos que para o *ensemble* puro os autovalores de $\hat{\rho}$ valem zero ou um. Vamos agora analisar o caso para o *ensemble* misto. Portanto, consideremos a expressão

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\Big\{\hat{I} + \vec{g}\cdot\hat{\sigma}\Big\}, \quad (2.68)$$

onde

$$\vec{g} = g_x\hat{x} + g_y\hat{y} + g_z\hat{z}. \tag{2.69}$$

Substituindo a Eq. (2.69) e $\hat{\sigma}$ em (2.68), obtemos

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\Big\{\hat{I} + g_x\hat{\sigma}_x + g_y\hat{\sigma}_y + g_z\hat{\sigma}_z\Big\}. \tag{2.70}$$

A partir da matriz identidade e das matrizes de Pauli, escrevemos a Eq. (2.70) como

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{g_x}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \frac{g_y}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + \frac{g_z}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+g_z & g_x - ig_y\\ g_x + ig_y & 1-g_z\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2.71}$$

De (2.71), temos para a equação de autovalores

$$\det(\hat{\rho} - \xi\hat{I}) = 0, \tag{2.72}$$

onde ξ são os autovalores de $\hat{\rho}$. Resolvendo a Eq. (2.72), temos

$$\xi^2 - \xi - \frac{1}{4}(g_x^2 + g_y^2 + g_z^2 - 1) = 0, \tag{2.73}$$

cuja solução é

$$\xi_1 = \frac{1 + \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}}{2} \tag{2.74}$$

e

$$\xi_2 = \frac{1 - \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}}{2}. \tag{2.75}$$

Note que se $g_x^2 + g_y^2 + g_z^2 = 1$, teremos $\xi_1 = 1$ e $\xi_2 = 0$, satisfazendo a condição do operador densidade para *ensemble* puros, válido para qualquer ponto na superfície da esfera de Bloch. Por outro lado, se $g_x^2 + g_y^2 + g_z^2 \in \mathbb{R} : 0 \leq g_x^2 + g_y^2 + g_z^2 < 1$, então $\xi_1, \xi_2 \neq 0$, de onde concluímos que o *ensemble* é misto, válido para qualquer ponto no interior da esfera de Bloch. Quando $|\vec{g}| = 0 \Rightarrow \vec{g} = \vec{0}$ e o estado é completamente misto [2], que da Eq. (2.68) representamos o operador densidade como

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{I}}{2}, \tag{2.76}$$

e geometricamente é dado por um ponto no centro da esfera de Bloch.

2.5 Emaranhamento

Já que no capítulo 5 caracterizaremos o emaranhamento em nosso sistema, é necessário que nesta seção abordemos sobre o assunto, que faremos da maneira mais elementar possível. Além disso, definiremos um quantificador de emaranhamento denominado negatividade.

2.5.1 Estados emaranhados

O termo emaranhamento foi cunhado do alemão *verschränkung*, definido por E. R. J. A. Schrödinger como a propriedade de correlações entre dois ou mais sistemas quânticos, sendo esta uma característica que pertence somente à mecânica quântica [44, 50, 51]. Uma descrição bastante didática sobre o conceito se encontra na Ref. [52], onde o autor relata que dado um sistema quântico $\mathcal{S}$ descrito por um vetor $|\Psi\rangle$ e composto por dois subsistemas $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, onde tais estados podem ser puros ou mistos. Assim, $|\Psi\rangle$ está $\mathcal{S}$ está emaranhado com relação à $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, se não puder ser escrito como produto tensorial de dois estados dos subsistemas individuais, ou seja, $|\Psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$, onde o primeiro ket se refere à $\mathcal{S}_1$ e o segundo à $\mathcal{S}_2$. Com o intuito de exemplificarmos a ideia do emaranhamento, consideremos os estados puros de dois *qubits* (apesar da descrição de estender à estados mistos):

$$|\alpha_1\rangle = |f, f\rangle \tag{2.77}$$

e

$$|\alpha_2\rangle = |e, e\rangle\,. \tag{2.78}$$

Com eles, podemos construir um estado

$$|\psi\rangle = |\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle = |f, f\rangle + |e, e\rangle\,. \tag{2.79}$$

Note que a equação anterior não pode ser escrita como um estado separado de um sistema com outro. Portanto, definimos o estado anterior como emaranhado. Para que isto se torne ainda mais claro, considere o seguinte estado:

$$\begin{aligned} |Y\rangle &= \frac{1}{2}\Big[\,|f, f\rangle + |f, e\rangle + |e, f\rangle + |e, e\rangle\,\Big] \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|f\rangle + |e\rangle\,\Big)\right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|f\rangle + |e\rangle\,\Big)\right]. \end{aligned} \tag{2.80}$$

Note que a última equação pôde ser escrita como o produto tensorial de dois estados de *qubits* individuais, diferentemente do que ocorre na Eq. (2.79). Portanto, o estado da Eq. (2.80) não é emaranhado.

Para dois *qubits* emaranhados existe um conjunto de kets ortonormais que definem a chamada base de Bell. São eles [2, 44, 51]:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|f, e\rangle + |e, f\rangle], \tag{2.81}$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|f, e\rangle - |e, f\rangle], \tag{2.82}$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|f, f\rangle + |e, e\rangle], \tag{2.83}$$

e

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|f,f\rangle - |e,e\rangle]. \tag{2.84}$$

O emaranhamento não é um caso especial de apenas dois *qubits*, mas pode acontecer para um conjunto vários subsistemas, cada um representado por um espaço de Hilbert de dimensão geral. Por exemplo, podem acontecer casos, de três *qubits*, em que apenas dois estão emaranhados entre si. Um estado que representa esta situação pode ser dado como [44]

$$\begin{aligned} |\Theta\rangle &= \frac{1}{2}\Big[\,|f,e,f\rangle - |e,f,f\rangle + |f,e,e\rangle - |e,f,e\rangle\,\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\Big(\,|f,e\rangle - |e,f\rangle\,\Big)\otimes|f\rangle + \Big(\,|f,e\rangle - |e,f\rangle\,\Big)\otimes|e\rangle\,\Big)\Big] \\ &= \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|f,e\rangle - |e,f\rangle\,\Big)\right]}\otimes\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|f\rangle + |e\rangle\,\Big)\right]. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Note que o primeiro termo destacado após a igualdade é o estado $|\Psi^-\rangle$ da Eq. (2.82). Desta forma, reescrevemos a Eq. (2.85) como

$$|\Theta\rangle = |\Psi^-\rangle \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|f\rangle + |e\rangle\,\Big)\right]. \tag{2.86}$$

2.5.2 Negatividade do emaranhamento

O termo negatividade ($\mathcal{N}$) foi estabelecido por G. Vidal e R. F. Werner em 2002 [53] para quantificar o emaranhamento em sistemas quânticos de dois níveis, sejam eles mistos ou puros. A definição considera que dado um sistema composto por Ω e Γ com matriz densidade $\hat{\rho}$, temos que

$$\mathcal{N}(\hat{\rho}) = \frac{||\hat{\rho}^{T_\Omega}||_1 - 1}{2}, \tag{2.87}$$

onde $\hat{\rho}^{T_\Omega}$ é a matriz transposta parcial de $\hat{\rho}$ com relação a Ω e $||\hat{\rho}^{T_\Omega}||_1 = Tr\Big[\sqrt{(\hat{\rho}^{T_\Omega})^\dagger(\hat{\rho}^{T_\Omega})}\Big]$. Desta definição, concluímos que se $\mathcal{N}(\hat{\rho}) = 0$, então não ocorre emaranhamento. Por outro lado, se $\mathcal{N}(\hat{\rho}) \neq 0$, então há emaranhamento.

Uma forma alternativa de escrever $\mathcal{N}$ é definida nas Refs. [53, 54] como

$$\mathcal{N}(\hat{\rho}) = \frac{1}{2}\sum_j(|\tau_j| - \tau_j), \tag{2.88}$$

onde τ_j são os autovalores negativos de $\hat{\rho}^{T_\Omega}$.

2.5.2.1 Comentário acerca da matriz transposta parcial

A transposta parcial é uma operação na qual [55]

$$TP: \begin{cases} |e,x\rangle\langle f,y| \Rightarrow |f,x\rangle\langle e,y| \\ |f,x\rangle\langle e,y| \Rightarrow |e,x\rangle\langle f,y|\,, \end{cases} \tag{2.89}$$

onde $x, y \in \{f, e\}$ e estamos considerando que a alternância de estados ocorre só com o primeiro elemento de cada ket e bra, que estão relacionados ao sistema principal Ω e os estados x e y (que não se alteram) pertencem ao ambiente Γ.

Para que a descrição do parágrafo anterior se torne clara, considere o estado de Bell $|\Psi^-\rangle$ dado na Eq. (2.82). Desta forma, o operador densidade do sistema emaranhado é dado por

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= |\Psi^-\rangle \langle\Psi^-| \\ &= \frac{1}{2}\Big[\, |f,e\rangle \langle f,e| - |f,e\rangle \langle e,f| - |e,f\rangle \langle f,e| + |e,f\rangle \langle e,f| \,\Big].\end{aligned} \tag{2.90}$$

Pela definição dada em (2.89), temos que

$$\hat{\rho}^{T_\Omega} = \frac{1}{2}\Big[\, |f,e\rangle \langle f,e| - |e,e\rangle \langle f,f| - |f,f\rangle \langle e,e| + |e,f\rangle \langle e,f| \,\Big]. \tag{2.91}$$

Em termos matriciais, temos que

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.92}$$

bem como,

$$\hat{\rho}^{T_\Omega} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.93}$$

Para definir os autovalores, utilizamos a equação

$$\det(\hat{\rho}^{T_\Omega} - \alpha\hat{I}) = 0, \tag{2.94}$$

onde α são os autovalores de $\hat{\rho}^{T_\Omega}$ e $\hat{I}$ uma matriz identidade 4×4. Mas,

$$\hat{\rho}^{T_\Omega} - \alpha\hat{I} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \alpha & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}. \tag{2.95}$$

Pelo Teorema de Laplace (Apêncice B), ao escolhermos a terceira coluna, temos que

$$\det(\hat{\rho}^{T_\Omega} - \alpha\hat{I}) = 0.A_{13} + 0.A_{23} + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)A_{33} + 0.A_{43} = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)A_{33}, \tag{2.96}$$

onde $A_{kl} = (-1)^{k+l} D_{kl}$ são os cofatores de $\hat{\rho}^{T_\Omega}$ e D_{kl} o determinante da matriz $\hat{\mathbb{M}}$ construída pela eliminação da linha e coluna que contém um elemento de $\hat{\rho}^{T_\Omega}$. No caso em questão, cada matriz $\hat{\mathbb{M}}$ que determina D_{kl} terá dimensão 3×3. Assim,

$$\det(\hat{\rho}^{T_\Omega} - \alpha \hat{I}) = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \det\left(\hat{\mathbb{M}}\right), \tag{2.97}$$

onde

$$\hat{\mathbb{M}} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} - \alpha & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\alpha \end{pmatrix}. \tag{2.98}$$

A partir da Regra de Sarrus, temos que

$$\det\left(\hat{\mathbb{M}}\right) = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right). \tag{2.99}$$

Substituindo a Eq.(2.98) na (2.96) e igualando o resultado disso a zero, recuperamos a Eq.(2.94), de modo que obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2 \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right) = 0, \tag{2.100}$$

cuja solução nos dá os autovalores $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/2$ e $\alpha_4 = -1/2$. Deste último valor, podemos quantificar a negatividade a partir da Eq. (2.88), de onde obtemos

$$\mathcal{N}(\hat{\rho}) = \frac{1}{2}\left[\left|-\frac{1}{2}\right| - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}. \tag{2.101}$$

Se $\hat{\rho}^{T_\Omega}$ não tivesse autovalores negativos, $\mathcal{N}(\hat{\rho})$ seria nulo, e portanto os sistemas estariam descorrelacionados.

2.6 Coerência quântica

A coerência quântica está associada ao princípio da superposição e se refere à capacidade de um sistema quântico exibir interferência [56, 57]. A fim de enfatizarmos a importância da coerência quântica em muitas situações, resolvemos citar algumas colocações encontradas na literatura, cujas referências serão destacadas:

- Ref. [58]: a coerência quântica é comumente uma condição necessária para emaranhamento e outros tipos de correlações quânticas, além de ser um importante recurso na informação e computação quântica;
- Ref. [59]: coerência quântica refere-se a capacidade de um estado quântico manter seu emaranhamento e superposições diante de interações e efeitos de termalização;

- Ref. [30]: coerência quântica é uma propriedade intrinsecamente frágil que desaparece em escalas macroscópicas de espaço, tempo e temperatura.

Matematicamente, a manifestação de coerência por um sistema quântico é reconhecida quando existem elementos não nulos fora da diagonal principal da sua matriz densidade [56]. Desta forma, percebe-se que esta é uma propriedade dependente da base em que avaliamos o sistema. Ou seja, um sistema em um estado puro pode produzir interferência quando submetido a um determinado aparato experimental, mas pode deixar de produzir quando o aparato é modificado. Para percebermos isto, consideremos um estado de *qubit* dado como

$$|\psi\rangle = a\,|f\rangle + b\,|e\rangle\,. \tag{2.102}$$

Assim, a matriz densidade do sistema é dada por

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= |\psi\rangle\langle\psi| \\ &= (a\,|f\rangle + b\,|e\rangle)(a^*\langle f| + b^*\langle e|) \\ &= |a|^2\,|f\rangle\langle f| + ab^*\,|f\rangle\langle e| + a^*b\,|e\rangle\langle f| + |b|^2\,|e\rangle\langle e|\,.\end{aligned} \tag{2.103}$$

Em termos matriciais, obtemos

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix}. \tag{2.104}$$

Note na Eq. (2.102) que a superposição é quebrada quando $a = 0$ ou $b = 0$, o que acarretaria em elementos nulos fora da diagonal principal da matriz $\hat{\rho}$ dada na Eq. (2.104). Desta ideia já podemos definir que estados incoerentes podem ser escritos na forma diagonal como [56, 60, 61]

$$\hat{\Pi} = \sum_j \Pi j\,|j\rangle\langle j|\,. \tag{2.105}$$

Para um sistema de d dimensões, consideramos que um estado maximamente coerente na base $|j\rangle$ é dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{j=0}^{d-1}|j\rangle\,. \tag{2.106}$$

A partir da definição anterior, temos que o estado de *qubit* maximamente coerente é dado como

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|f\rangle + |e\rangle), \tag{2.107}$$

que geometricamente se encontram na região equatorial da esfera de Bloch, como pode ser visto na Figura 4. A explicação disso se dá pela forma genérica de um estado de *qubit*, como está escrito na Eq. (2.57) da seção 2.4. Ou seja,

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|f\rangle + e^{i\phi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)|e\rangle\,. \tag{2.108}$$

Note que, se $\theta = \pi/2$ e $\phi = 0$, temos $\cos(\frac{\theta}{2}) = e^{i\phi}\,\mathrm{sen}\,(\frac{\theta}{2}) = 1/\sqrt{2}$, de modo que a partir da Eq. (2.108) podemos escrever a (2.107).

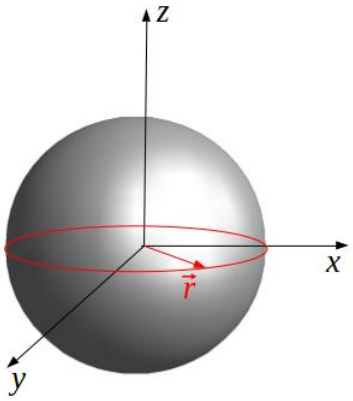


Figura 4 – Representação esquemática da esfera de Bloch com raio $\vec{r}$, cujos estados maximamente coerentes estão sobre a região equatorial de acordo com a Eq. (2.107).

2.6.1 Norma da coerência

T. Braumgratz, M. Cramer e M. B. Plenio publicaram um artigo [61] no qual determinaram um quantificador denominado *norma da coerência* (C), que para uma determinada base $\{|j\rangle\}$ da matriz densidade $\hat{\rho}$, a soma dos módulos dos elementos fora da diagonal principal definem o grau de coerência do sistema. Ou seja,

$$C(\hat{\rho}) = \sum_{i \neq j} |\langle i|\hat{\rho}|j\rangle| = \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}|. \tag{2.109}$$

A Eq. (2.109) será usada na subseção 2.7.4 para compreendermos sobre a coerência em canais quânticos, e no capítulo 5 no estudo de processos quânticos não markovianos.

2.7 Canais Quânticos

Nesta seção descreveremos a base matemática e física para entendermos os canais quânticos, que são mapas lineares completamente positivos que preservam o traço, onde denotaremos por mapas CPTP [2, 46, 62].

Antes de prosseguirmos na discussão, é necessário definirmos algumas notações. Se $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ representam espaços de Hilbert, então $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é um conjunto convexo de operadores lineares que levam elementos de $\mathcal{H}_1$ em $\mathcal{H}_2$ [20, 54, 62, 63]. Em segundo lugar, $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é um conjunto de super operadores ou mapas [62, 64] que levam elementos de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$.

Com base nas descrições anteriores, podemos tratar de algumas definições e teoremas com base nas Refs. [2, 3, 33, 54, 62].

Definição 1. *Um conjunto $\mathcal{R}(G)$ num espaço vetorial real $\mathcal{M}$ é denominado convexo se para dois vetores $a, b \in \mathcal{R}(G)$ os pontos*

$$\mathfrak{q} = \lambda a + (1-\lambda)b \quad \in \quad \mathcal{R}(G), \tag{2.110}$$

desde que $0 \leq \lambda \leq 1$. Assim, $\mathfrak{q}$ é chamado de combinação convexa de a e b.

Teorema 3. *Os operadores densidade de um sistema físico formam um conjunto convexo.*

Demonstração. Sejam $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ operadores densidade pertencentes a um conjunto $\mathcal{Z}(\mathcal{Y})$. Sabemos que tais operadores são (i) hermitianos, (ii) positivos e (iii) preservam o traço. Se estas três condições são satisfeitas para equação

$$\hat{\rho} = p\hat{\rho}_1 + (1-p)\hat{\rho}_2, \tag{2.111}$$

com $0 \leq p \leq 1$, então $\hat{\rho}$ é um operador densidade e $\mathcal{Z}(\mathcal{Y})$ é convexo.

(i) Hermiticidade:

$$\hat{\rho}^\dagger = p^* \hat{\rho}_1^\dagger + (1-p)^* \hat{\rho}_2^\dagger = p\hat{\rho}_1 + (1-p)\hat{\rho}_2 = \hat{\rho}. \tag{2.112}$$

(ii) Positividade:

$$\langle v| \hat{\rho} |v\rangle = p \langle v| \hat{\rho}_1 |v\rangle + (1-p) \langle v| \hat{\rho}_2 |v\rangle \geq 0. \tag{2.113}$$

(iii) Preservação do traço:

$$\begin{aligned} Tr(\hat{\rho}) &= pTr(\hat{\rho}_1) + (1-p)Tr(\hat{\rho}_2) \\ &= p + 1 - p \\ &= 1. \end{aligned} \tag{2.114}$$

■

Definição 2. *Um mapa linear Λ é uma operação na qual $\Lambda : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e satisfaz a condição*

$$\Lambda\Big(\sum_j \alpha_j \hat{Y}_j\Big) = \sum_j \alpha_j \Lambda\big(\hat{Y}_j\big), \tag{2.115}$$

$\forall\ \alpha_j \in \mathbb{C}$ *e* $\forall\ \hat{Y}_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Definição 3. *Um mapa linear Λ que atua num espaço $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ é positivo, se para todo operador $\hat{Y} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$,*

$$\hat{Y} \geq 0 \Rightarrow \Lambda(\hat{Y}) \geq 0. \tag{2.116}$$

Definição 4. *Dado um sistema S do qual se tem interesse em investigar e um auxiliar E com dimensão arbitrária, dizemos que Λ é um mapa completamente positivo, se para os operadores $\hat{Y}_S \geq 0$ e $\hat{Y}_E > 0$ relacionados a S e E, respectivamente, temos que*

$$(\Lambda \otimes \mathcal{I})(\hat{Y}_S \otimes \hat{Y}_E) = \Lambda(\hat{Y}_S) \otimes \hat{Y}_E \geq 0. \tag{2.117}$$

A partir da definição 4 interpretamos que Λ não só é positivo, mas completamente positivo, pois $\Lambda \otimes \mathcal{I} \leq 0$ para qualquer dimensão de E, mapeando operadores positivos do sistema composto em operadores positivos [33].

Definição 5. *Um mapa Λ preserva o traço quando dado um operador $\hat{Y}$ temos que*

$$Tr[\Lambda(\hat{Y})] = Tr(\hat{Y}) \tag{2.118}$$

Mapas lineares que satisfazem às definições 4 e 5 são denominados mapas CPTP, como definido anteriormente, ou canais quânticos. Do ponto de vista físico isto é importante para que se conservem as propriedades do operador densidade, dentre elas a positividade e o traço em cada mapeamento que leva operador densidade em operador densidade.

No formalismo de mapas completamente positivos admitimos o formalismo de operadores de Kraus [3, 18]. Para descrevermos isto, considere que o operador densidade inicial do sistema S é dado por $\hat{\rho}_S$, enquanto o ambiente E está num estado misto dado por $\hat{\rho}_E = \sum_j p_j \left|e_j\right\rangle \left\langle e_j\right|$, onde p_j é a probabilidade do ambiente está no estado $\left|e_j\right\rangle$. Desde que inicialmente S e E estejam descorrelacionados, temos que o estado inicial do sistema composto é

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_E = \hat{\rho}_S \otimes \sum_j p_j \left|e_j\right\rangle \left\langle e_j\right|. \tag{2.119}$$

A partir da evolução unitária $\hat{U}$, temos que

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}\Big(\hat{\rho}_S \otimes \sum_j p_j \left|e_j\right\rangle \left\langle e_j\right|\Big)\hat{U}^\dagger. \tag{2.120}$$

Tomando o traço parcial sobre os estados de E, temos que o operador densidade do sistema será

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_S(t) &= Tr_E\Big[\hat{U}\Big(\hat{\rho}_S \otimes \sum_j p_j \left|e_j\right\rangle \left\langle e_j\right|\Big)\hat{U}^\dagger\Big] \\ &= \sum_{ij} \sqrt{p_j} \left\langle e_i\right| \hat{U} \left|e_j\right\rangle \hat{\rho}_S \sqrt{p_j} \left\langle e_j\right| \hat{U}^\dagger \left|e_i\right\rangle \\ &= \sum_{ij} \hat{E}_{ij} \hat{\rho}_S \hat{E}_{ij}^\dagger, \end{aligned} \tag{2.121}$$

onde $\hat{E}_{ij} = \sqrt{p_j} \left\langle e_i\right| \hat{U} \left|e_j\right\rangle$ e $\hat{E}_{ij}^\dagger = \sqrt{p_j} \left\langle e_j\right| \hat{U}^\dagger \left|e_i\right\rangle$ são os operadores de Kraus [3, 18] ou elementos da operação [2].

Se voltarmos à Eq. (2.119), e considerarmos que $\hat{\rho}_E = |e_0\rangle\langle e_0|$ e fizermos todo o procedimento que deu origem à Eq. (2.121), teríamos que os operadores de Kraus seriam $\hat{E}_j = \langle e_j|\hat{U}|e_0\rangle$, de modo que $\hat{E}_j^\dagger = \langle e_0|\hat{U}^\dagger|e_j\rangle$. Neste caso, o operador densidade do sistema no tempo t seria dado por

$$\hat{\rho}_S(t) = \sum_j \hat{E}_j \hat{\rho}_S \hat{E}_j^\dagger. \tag{2.122}$$

Na próxima subseção descreveremos as propriedades de alguns canais quânticos.

2.7.1 Canal mudança de *bit*

Para um único *qubit*, que será considerado como o sistema, o canal em questão produz as mudanças de estado $|0\rangle \to |1\rangle$ e $|1\rangle \to |0\rangle$, com mesma probabilidade $1-p$ de ocorrência. Desta forma, os operadores de Kraus ou elementos da operação são dados como

$$\hat{E}_0 = \sqrt{p}\hat{I} = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.123}$$

e

$$\hat{E}_1 = \sqrt{1-p}\hat{\sigma}_x = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.124}$$

onde atentamos para o fato que na Eq. (2.123) existe uma probabilidade p de não ocorrer mudança de estado.

Sabendo que inicialmente o estado do sistema na esfera de Bloch é dado por

$$\hat{\rho}_S(0) = \frac{\hat{I} + \vec{r}\cdot\hat{\sigma}}{2}, \tag{2.125}$$

onde $\vec{r} = r_x\hat{x} + r_y\hat{y} + r_z\hat{z}$ é o vetor na esfera de Bloch e $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_x\hat{x} + \hat{\sigma}_y\hat{y} + \hat{\sigma}_z\hat{z}$ está associado às matrizes de Pauli. Assim, reescrevemos a Eq. (2.125) como

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_S(0) &= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + r_x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + r_y\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + r_z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.126}$$

Com base nos resultados anteriores e na Eq. (2.122), temos que

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_S(t) &= \sum_{j=0}^{1} \hat{E}_j \hat{\rho}_S(0) \hat{E}_j^\dagger \\ &= \hat{E}_0\hat{\rho}_S(0)\hat{E}_0^\dagger + \hat{E}_1\hat{\rho}_S(0)\hat{E}_1^\dagger. \end{aligned} \tag{2.127}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_S(t) = &\frac{p}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+r_z & r_x - ir_y\\ r_x+ir_y & 1-r_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &+\frac{1-p}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+r_z & r_x - ir_y\\ r_x+ir_y & 1-r_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+[(2p-1)r_z] & r_x - i[(2p-1)r_y]\\ r_x+i[(2p-1)r_y] & 1-[(2p-1)r_z\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2.128}$$

Tomando

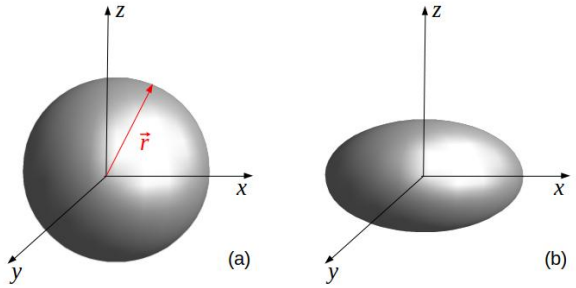


Figura 5 – Representação esquemática (a) da esfera de Bloch com raio unitário, cujo estado associado é dado na Eq. (2.127), e (b) o elipsóide devido à contração da esfera nas direções y e z, cujo estado é dado na Eq. (2.132). Ideia baseada na Ref. [2].

$$r'_y = (2p-1)r_y \tag{2.129}$$

e

$$r'_z = (2p-1)r_z, \tag{2.130}$$

reescrevemos a Eq. (2.127) como

$$\hat{\rho}_S(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+r'_z & r_x - ir'_y\\ r_x+ir'_y & 1-r'_z\end{pmatrix}. \tag{2.131}$$

Da Eq. (2.131) podemos escrever

$$\hat{\rho}_S(t) = \frac{\hat{I} + \vec{r}' \cdot \hat{\vec{\sigma}}}{2}, \tag{2.132}$$

onde $\vec{r}' = r_x\hat{x} + (2p-1)r_y\hat{y} + (2p-1)r_z\hat{z}$. Com este resultado interpretamos que a esfera de Bloch sofre uma contração nos eixos y e z, como pode ser visto na Figura 5.

2.7.2 Canal mudança de fase

Considerando novamente o *qubit* como sistema principal, o canal em questão possibilita as seguintes mudanças: $|0\rangle \to |0\rangle$ e $|1\rangle \to -|1\rangle$, que ocorre com probabilidade $1-p$. Desta forma, os elementos da operação são dados por

$$\hat{E}_0 = \sqrt{p}\hat{I} = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.133}$$

e

$$\hat{E}_1 = \sqrt{1-p}\hat{\sigma}_z = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.134}$$

Assim como na subseção anterior o estado inicial do *qubit* é dado por

$$\hat{\rho}_S(0) = \frac{\hat{I} + \vec{r}\cdot\hat{\vec{\sigma}}}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{pmatrix}. \tag{2.135}$$

Seguindo o mesmo procedimento da Eq. (2.127) com os operadores de Kraus, ao efetuar os cálculos concluímos que o novo operador densidade do sistema é

$$\hat{\rho}_S(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+r_z & (2p-1)[r_x - ir_y] \\ (2p-1)[r_x + ir_y] & 1-r_z \end{pmatrix}. \tag{2.136}$$

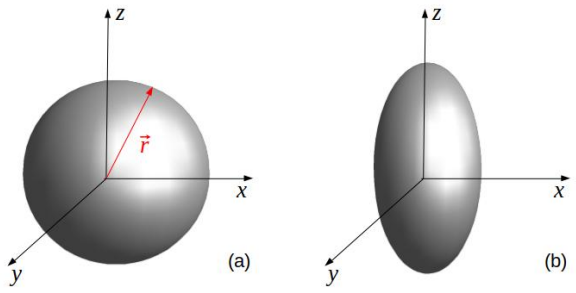


Figura 6 – Representação esquemática (a) da esfera de Bloch com raio unitário, cujo estado associado é dado na Eq. (2.135), e (b) o elipsóide devido à contração da esfera nas direções x e y, cujo estado é dado na Eq. (2.137). Ideia baseada na Ref. [2].

Tomando $p = 0{,}8$ na Eq. (2.136), por exemplo, temos que

$$\hat{\rho}_S(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+r_z & 0{,}6(r_x - ir_y) \\ 0{,}6(r_x + ir_y) & 1-r_z \end{pmatrix}, \tag{2.137}$$

onde reescrevemos

$$\hat{\rho}_S(t) = \frac{\hat{I} + \vec{r}' \cdot \hat{\vec{\sigma}}}{2}, \tag{2.138}$$

sendo $\vec{r}' = 0{,}6 r_x \hat{x} + 0{,}6 r_y \hat{y} + r_z \hat{z}$, significando que existe uma contração da esfera de Bloch nos eixos x e y, como pode ser visto na Figura 6.

2.7.3 Canal amplitude de amortecimento

O CAA é utilizado no estudo da emissão espontânea de um átomo de dois níveis devido ao decaimento do estado excitado $|e\rangle$ para o fundamental $|f\rangle$ [64]. A princípio, consideramos que além dos estados do átomo (sistema principal), o ambiente é um campo eletromagnético no estado de vácuo, ou seja, sem nenhuma excitação. Desta forma, a dinâmica deste modelo é representada na sequência.

$$|f, f\rangle \to |f, f\rangle\,, \tag{2.139}$$

$$|e, f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e, f\rangle + \sqrt{p}\,|f, e\rangle\,, \tag{2.140}$$

onde o primeiro termo no ket se refere ao átomo e o segundo ao ambiente. Da Eq. (2.139) entendemos que se o átomo e o ambiente estão no estado fundamental, nada ocorre no sistema composto. Porém, na Eq. (2.140) vemos que se o átomo estiver no estado excitado e o ambiente no fundamental, existe uma probabilidade $1 - p$ de não ocorrer mudança de estados, ou uma probabilidade p de tal mudança acontecer.

Os operadores de Kraus que caracterizam a situação descrita anteriormente são dados por [2, 14]

$$\hat{E}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}. \tag{2.141}$$

e

$$\hat{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.142}$$

Consideremos o estado inicial do sistema como

$$\hat{\rho}_S(0) = \frac{\hat{I} + \vec{r} \cdot \hat{\vec{\sigma}}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - i r_y \\ r_x + i r_y & 1 - r_z \end{pmatrix}. \tag{2.143}$$

A partir da Eq. (2.122), temos que

$$\hat{\rho}_S(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + p + (1-p) r_z & \sqrt{1-p}(r_x - i r_y) \\ \sqrt{1-p}(r_x + i r_y) & (1-p)(1 - r_z) \end{pmatrix}. \tag{2.144}$$

Desta forma, podemos escrever

$$\hat{\rho}_S(t) = \frac{\hat{I} + \vec{r}' \cdot \hat{\sigma}}{2}, \tag{2.145}$$

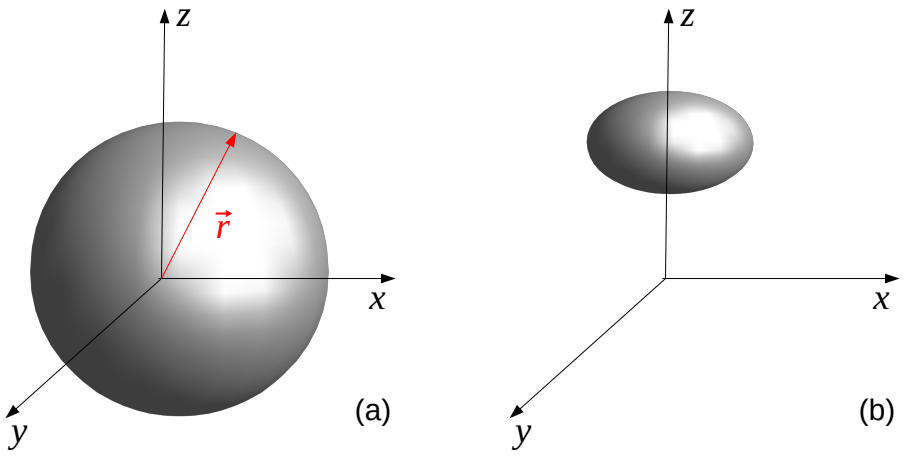


Figura 7 – Representação esquemática (a) da esfera de Bloch com raio unitário, cujo estado associado é dado na Eq. (2.143), e (b) a contração da esfera nas direções x, y e z, cujo estado é dado na Eq. (2.145). Ideia baseada na Ref. [2].

onde $\vec{r}' = \sqrt{1-p}r_x\hat{x} + \sqrt{1-p}r_y\hat{y} + [p + (1-p)r_z]\hat{z}$. Através disso, podemos ter uma interpretação geométrica observando a Figura 7, onde ocorre uma contração da esfera de Bloch nas direções x, y e z.

2.7.4 Canais quânticos e coerência

Nas três últimas subseções discutimos a interpretação geométrica da esfera de Bloch, e isto está associado à perda de coerência que o sistema sofre. Note que em todas as situações a matriz densidade inicial do sistema é dada por

$$\hat{\rho}_S(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1-r_z \end{pmatrix}. \tag{2.146}$$

A partir da Eq. (2.135), com base na (2.109), temos que o quantificador de coerência inicial do sistema é

$$\begin{aligned} C_S(0) &= \sum_{m\neq n} |\langle\rho_m|\hat{\rho}_S(0)|\rho_n\rangle| \\ &= \frac{1}{2}\Big|(r_x + ir_y)\Big| + \frac{1}{2}\Big|(r_x - ir_y)\Big|, \end{aligned} \tag{2.147}$$

onde $\{|\rho_l\rangle\}$ são os autoestados da matriz $\hat{\rho}_S(0)$.

Para um número complexo $z = a + ib$, sabemos que $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Assim, para a Eq. (2.147), temos que

$$\begin{aligned} C_S(0) &= \frac{1}{2}\sqrt{r_x^2 + r_y^2} + \frac{1}{2}\sqrt{r_x^2 + r_y^2} \\ &= \sqrt{r_x^2 + r_y^2}. \end{aligned} \tag{2.148}$$

Vamos agora avaliar como ocorre a modificação da coerência do sistema, onde podemos encontrar análises parecidas na Ref. [65].

- Canal mudança de *bit*: da Eq. (2.131) e de resultados anteriores a esta, temos que a coerência do sistema é quantificada por

$$C_S(p,t) = \sqrt{r_x^2 + (2p-1)^2 r_y^2}. \tag{2.149}$$

  Note que, se $p = 1 \Rightarrow C_S(p,t) = C_S(0)$, o que significa que há completa certeza de que o sistema não tem sua coerência alterada.

- Canal mudança de fase: da Eq. (2.136) e de resultados anteriores a esta, temos que a coerência do sistema é quantificada por

$$C_S(p,t) = |2p-1|\sqrt{r_x^2 + r_y^2} = |2p-1|C_S(0). \tag{2.150}$$

  Note que, se $p = 1 \Rightarrow C_S(p,t) = C_S(0)$, o que significa que há completa certeza de que o sistema não tem sua coerência alterada. Por outro lado, se $p = 0 \Rightarrow C_S(p,t) = C_S(0)$, ou seja, com a certeza de ocorrer mudança de fase, a coerência do sistema não muda.

- Canal amortecimento de amplitude: da Eq. (2.144) e de resultados anteriores a esta, temos que a coerência do sistema é quantificada por

$$C_S(p,t) = \sqrt{1-p}\sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{1-p}C_S(0). \tag{2.151}$$

  Note que, se $p = 0 \Rightarrow C_S(p,t) = C_S(0)$, o que significa que caso não haja decaimento do átomo, a coerência do seu estado inicial é mantida. Por outro lado, se $p = 1 \Rightarrow C_S(p,t) = 0$, ou seja, se tivermos certeza de que existirá decaimento do átomo, temos que toda a coerência inicial é perdida.

2.7.4.1 Comentário acerca da Eq. (2.148)

Baseado na Eq. (2.148), podemos escrever a norma da coerência de um *qubit* como

$$C = \operatorname{sen}(\theta). \tag{2.152}$$

Observando o sistema de coordenadas da Figura 8, podemos verificar que $\operatorname{sen}(\theta) = r_0/r$, onde $r_0 = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$ é a projeção do vetor de Bloch ($\vec{r}$) no plano xy, e $r = 1$ é o módulo de $\vec{r}$. Com estas informações, temos que $\operatorname{sen}(\theta) = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = C$, de acordo com a Eq. (2.148). Desta forma, recaímos na expressão dada em (2.152).

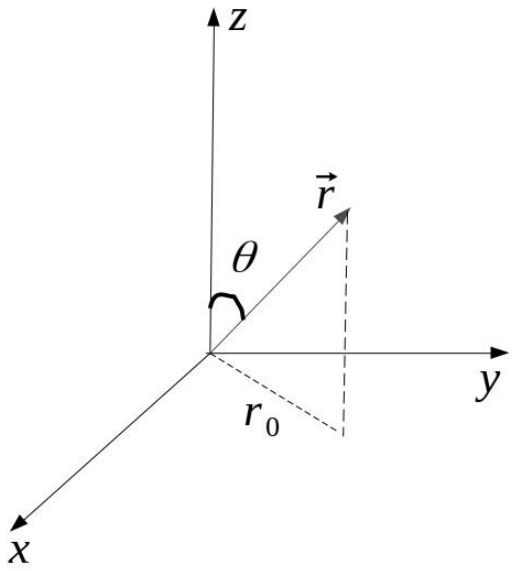


Figura 8 – Sistema de coordenadas esféricas, onde θ é o angulo polar, r_0 é a projeção do vetor de Bloch ($\vec{r}$) no plano xy.

CAPÍTULO 3

NÃO MARKOVIANIDADE QUÂNTICA

Neste capítulo descreveremos a ideia física de um processo quântico não markoviano. Para tanto, observe a Figura 9. Nela consideramos um sistema principal $\boldsymbol{P}$ interagindo com um ambiente $\boldsymbol{Q}$. Na imagem superior (a), representamos a perda de informação quântica de $\boldsymbol{P}$ para $\boldsymbol{Q}$, onde este passa a obter um caráter quântico, representando assim uma dinâmica markoviana [66, 67]. Já na Figura 9(b) existe uma troca de informação entre o sistema e o ambiente, mas parte desta informação transmitida ao ambiente pode eventualmente retornar ao sistema, levando assim a uma dinâmica não markoviana [66].

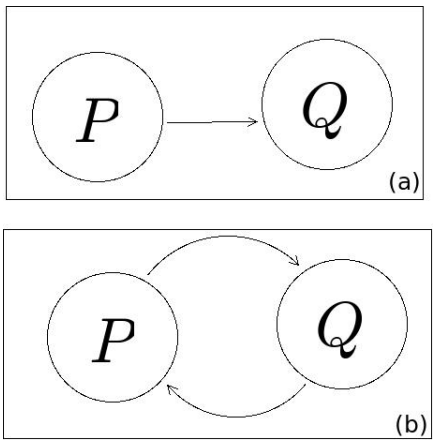


Figura 9 – Representação de um processo quântico (a) markoviano e (b) não markoviano, relacionado ao sistema principal $\boldsymbol{P}$ e ambiente $\boldsymbol{Q}$.

Para que possamos entender os aspectos da não markovianidade quântica, buscaremos inicialmente compreender as características da markovianidade clássica e quântica.

3.1 Markovianidade Clássica

3.1.1 Processos estocásticos

Seja X_t uma variável estocástica discreta e $t \in \mathbb{N}$ um parâmetro que representa o tempo. Num instante $t = l$ o processo estocástico é caracterizado por uma distribuição de probabilidade conjunta dada por

$$\mathbb{P}_l = \mathbb{P}_l(x_0, x_1, ..., x_l), \tag{3.1}$$

onde x_j é o resultado de X_t em $t = j$ de acordo com a referência [68], que servirá como base para descrição desta subseção.

A probabilidade condicional de x_l ocorrer em $t = l$, visto que ocorreram $x_0, ..., x_{l-1}$ entre os tempos $t = 0$ e $t = l - 1$ é dada por

$$P_l = P_l(x_l|x_0, ..., x_{l-1}). \tag{3.2}$$

Para um processo markoviano, a probabilidade de x_l ocorrer em $t = l$ depende somente do valor obtido anteriormente. Isto é,

$$P_l(x_l|x_0, ..., x_{l-1}) = P_l(x_l|x_{l-1}), \tag{3.3}$$

ou seja, não se tem uma memória dos valores assumidos anteriormente por X_t.

A partir da relação entre probabilidade conjunta e condicional para eventos aleatórios [69], temos que

$$\mathbb{P}_l(x_0, x_1, ..., x_l) = P_0(x_0)P_1(x_1|x_0)P_2(x_2|x_0, x_1)P_3(x_3|x_0, x_1, x_2)...P_l(x_l|x_1, ..., x_{l-1}). \tag{3.4}$$

Mas, como o processo é markoviano, utilizamos a Eq. (3.3) na Eq. (3.4). Portanto,

$$\mathbb{P}_l(x_0, x_1, ..., x_l) = P_0(x_0)P_1(x_1|x_0)P_2(x_2|x_1)P_3(x_3|x_2)...P_l(x_l|x_{l-1}), \tag{3.5}$$

e por questões de simplificação escrevemos

$$\mathbb{P}_l(x_0, x_1, ..., x_l) = P_0(x_0)...P_{l-1}(x_{l-1}|x_{l-2})P_l(x_l|x_{l-1}). \tag{3.6}$$

A probabilidade marginal $\mathcal{P}_l(x_l)$ de ocorrer $X_t = x_l$ em $t = l$ é dada por [69]

$$\mathcal{P}_l(x_l) = \sum_{\{x_0...x_{l-1}\}} \mathbb{P}_l(x_0, x_1, ..., x_l). \tag{3.7}$$

Agora, substituindo a Eq. (3.6) na (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_l(x_l) &= \sum_{\{x_0...x_{l-1}\}} P_0(x_0)...P_{l-1}(x_{l-1}|x_{l-2})P_l(x_l|x_{l-1}) \\ &= \sum_{\{x_0...x_{l-1}\}} P_l(x_l|x_{l-1}) \underbrace{P_0(x_0)...P_{l-1}(x_1|x_0)}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

cujo termo destacado é a probabilidade conjunta $\mathbb{P}_{l-1}(x_0, ..., x_{l-1})$, que substituindo em (3.8), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_l(x_l) &= \sum_{\{x_0 \ldots x_{l-1}\}} P_l(x_l|x_{l-1})\mathbb{P}_{l-1}(x_0, ..., x_{l-1}) \\ &= \sum_{x_{l-1}} P_l(x_l|x_{l-1})\Bigg[\underbrace{\sum_{\{x_0 \ldots x_{l-2}\}} \mathbb{P}_{l-1}(x_0, ..., x_{l-1})}\Bigg].\end{aligned} \tag{3.9}$$

Note que o termo destacado é a probabilidade marginal $\mathcal{P}_{x_{l-1}}(x_{l-1})$, de acordo com a Eq. (3.7). A partir destas considerações, reescrevemos (3.9) como

$$\mathcal{P}_l(x_l) = \sum_{x_{l-1}} P_l(x_l|x_{l-1})\mathcal{P}_{x_{l-1}}(x_{l-1}). \tag{3.10}$$

Este resultado é importante para a discussão que vem a seguir.

3.1.2 Matrizes de transição

A partir da Eq. (3.10) interpretamos $P_l(x_l|x_{l-1})$ como a probabilidade de transição de um estado x_{l-1} para x_l, além do que estas probabilidades não variam no tempo, visto que o processo é markoviano. Desta forma, escrevemos

$$P_l(x_l|x_{l-1}) = \mathcal{T}_l(x_l|x_{l-1}), \tag{3.11}$$

onde $\mathcal{T}$ está associado à transição. Assim, ao substituírmos (3.11) em (3.10), temos que

$$\mathcal{P}_l(x_l) = \sum_{x_{l-1}} \mathcal{T}_l(x_l|x_{l-1})\mathcal{P}_{x_{l-1}}(x_{l-1}). \tag{3.12}$$

Tomando $x_l \to i$, $x_{l-1} \to j$, $\mathcal{P}_{x_{l-1}} \to \mathcal{P}$ e $\mathcal{T}_l \to \mathcal{T}$, reescrevemos a última equação como

$$\mathcal{P}(i) = \sum_j \mathcal{T}(i|j)\mathcal{P}(j). \tag{3.13}$$

Desta forma, podemos visualizar $\mathcal{T}(i|j)$ como os elementos de uma matriz $\hat{\mathcal{T}}$ que deve satisfazer duas condições:

$$\mathcal{T}(i|j) \geq 0, \tag{3.14}$$

já que é uma probabilidade, e

$$\sum_i \mathcal{T}(i|j) = 1, \tag{3.15}$$

devido à condição de normalização. A interpretação da Eq. (3.15) é que a soma de todos os elementos de cada coluna deve ser igual a unidade. Toda matriz quadrada que possui as características definidas nas Eqs. (3.14) e (3.15) são denominadas matrizes estocásticas.

Dadas as discussões anteriores, definiremos agora a equação de Chapman-Kolmogorov [70]. Para tanto, voltemos à Eq. (3.5) e consideremos um processo que envolva apenas três valores de X_t, a saber x_0, x_1 e x_2. Assim, a probabilidade conjunta será dada por

$$\mathbb{P}_2(x_0, x_1, x_2) = P_0(x_0)P_1(x_1|x_0)P_2(x_2|x_1). \tag{3.16}$$

Dividindo ambos os lados da Eq. (3.16) por $P_0(x_0)$, efetuando a soma sobre x_1 e organizando os termos, obtemos

$$\sum_{x_1} \frac{\mathbb{P}_2(x_0, x_1, x_2)}{P_0(x_0)} = \sum_{x_1} P_2(x_2|x_1)P_1(x_1|x_0), \tag{3.17}$$

onde o lado esquerdo da equação é a probabilidade condicional $P_2(x_2|x_0)$. Portanto, reescrevemos a Eq. (3.17) como

$$P_2(x_2|x_0) = \sum_{x_1} P_2(x_2|x_1)P_1(x_1|x_0). \tag{3.18}$$

Considerando o caso em que as probabilidades expressas na última equação são probabilidades de transição, podemos escrever

$$\mathcal{T}(x_2|x_0) = \sum_{x_1} \mathcal{T}(x_2|x_1)\mathcal{T}(x_1|x_0). \tag{3.19}$$

Da Eq. (3.19) interpretamos que se um processo é iniciado em x_0 num tempo $t = 0$ e finalizado em x_2 em $t = 2$, ele pode passar por um processo intermediário em x_1 quando $t = 1$ [20], onde a soma é feita sobre todas as possibilidades de x_1 [33].

Com base no que vimos até agora, podemos enunciar a definição a seguir [70]:

Definição 6. *Um processo estocástico é dito divisível quando a matriz de transição satisfaz as Eqs. (3.14), (3.15) e (3.19).*

3.1.3 Exemplo de não markovianidade clássica

Existem processos estocáticos divisíveis e não markovianos. Para ilustrar isso, suponha um processo estocástico cuja variável X_t pode assumir apenas dois valores: 0 e 1. Considere o caso de $t = \{0, 1, 2\}$, onde a probabilidade conjunta do processo é [70]

$$\mathbb{P}(x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{4}(\delta_{x_0,1}\delta_{x_1,0}\delta_{x_2,0} + \delta_{x_0,0}\delta_{x_1,1}\delta_{x_2,0} + \delta_{x_0,0}\delta_{x_1,0}\delta_{x_2,1} + \delta_{x_0,1}\delta_{x_1,1}\delta_{x_2,1}), \tag{3.20}$$

em que $\delta_{\mu,\nu}$ é o delta de Kronecker.

Temos da probabilidade marginal que

$$\mathcal{P}(x_0, x_1) = \sum_{x_2=0}^{1} \mathbb{P}(x_0, x_1, x_2). \tag{3.21}$$

Portanto, substituindo a Eq. (3.20) na (3.21) e organizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x_0,x_1) &= \frac{1}{4}\Bigg(\sum_{x_2=0}^{1}\delta_{x_0,1}\delta_{x_1,0}\delta_{x_2,0}+\sum_{x_2=0}^{1}\delta_{x_0,0}\delta_{x_1,1}\delta_{x_2,0}\\ &+\sum_{x_2=0}^{1}\delta_{x_0,0}\delta_{x_1,0}\delta_{x_2,1}+\sum_{x_2=0}^{1}\delta_{x_0,1}\delta_{x_1,1}\delta_{x_2,1}\Bigg)\\ &= \frac{1}{4}(\delta_{x_0,1}\delta_{x_1,0}+\delta_{x_0,0}\delta_{x_1,1}+\delta_{x_0,0}\delta_{x_1,0}+\delta_{x_0,1}\delta_{x_1,1}).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Note que se $x_0 = x_1$ ou $x_0 \neq x_1$, temos que $\mathcal{P}(x_0, x_1) = 1/4$. Fazendo o procedimento anterior para as outras probabilidades, concluiremos que

$$\mathcal{P}(x_0,x_2) = \mathcal{P}(x_1,x_2) = \frac{1}{4}. \tag{3.23}$$

Da probabilidade condicional, temos que

$$P(x_2|x_0,x_1) = \frac{\mathbb{P}(x_0,x_1,x_2)}{\mathcal{P}(x_0,x_1)}, \tag{3.24}$$

tal que substituindo a Eqs. (3.20) e $\mathcal{P}(x_0, x_1) = 1/4$ na Eq. (3.24), obtemos

$$P(x_2|x_0,x_1) = \delta_{x_0,1}\delta_{x_1,0}\delta_{x_2,0}+\delta_{x_0,0}\delta_{x_1,1}\delta_{x_2,0}+\delta_{x_0,0}\delta_{x_1,0}\delta_{x_2,1}+\delta_{x_0,1}\delta_{x_1,1}\delta_{x_2,1}. \tag{3.25}$$

Note que $P(x_2 = 1|x_0 = 0, x_1 = 0) = 1$, enquanto que $P(x_2 = 1|x_0 = 1, x_1 = 0) = 0$. Isto significa que a condição $P(x_2|x_0, x_1) = P(x_2|x_1)$ não é satisfeita, e portanto o processo não é markoviano. Ou seja, precisamos acessar a memória do sistema para saber em quais condições um estado pode ocorrer. Verifiquemos agora o que acontece com a probabilidade de transição. Ela fornece

$$\mathcal{T}(x_2|x_1) = \frac{\mathcal{P}(x_1,x_2)}{\mathcal{P}(x_1)}, \tag{3.26}$$

tal que pela probabilidade marginal e conjunta, dada na Eq. (3.20), obtemos

$$\mathcal{P}(x_1) = \sum_{x_0=0}^{1}\sum_{x_2=0}^{1}\mathbb{P}(x_0,x_1,x_2) = \frac{1}{2}(\delta_{x_1,0}+\delta_{x_1,1}) = \frac{1}{2}, \tag{3.27}$$

pois se $x_1 = 0$ ou $x_1 = 1$ sobrará a unidade nos parênteses, devido à propriedade do delta de Kronecker. Assim, substituindo as Eqs. (3.23) e (3.27) na Eq. (3.26), temos que

$$\mathcal{T}(x_2|x_1) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}. \tag{3.28}$$

Analogamente, obtemos $\mathcal{T}(x_1|x_0) = \mathcal{T}(x_2|x_0) = 1/2$. Com estes três últimos resultados, concluímos que $\mathcal{T}(i|j) \geq 0$, $\sum_i \mathcal{T}(i|j) = 1$ e além disso $\mathcal{T}(i|j) = \sum_k \mathcal{T}(i|k)\mathcal{T}(k|i)$. Ou seja, é um processo divisível de acordo com a definição 6.

3.2 Markovianidade Quântica

A markovianidade quântica é assim denominada para fazer alusão aos processos clássicos, onde nestes a variável aleatória não afeta a estatística posterior. Uma particularidade do caso quântico é que as medidas realizadas perturbam o sistema e interferem nos resultados subsequentes [3].

Vejamos agora as ideias que se fazem necessárias para a construção do conceito quântico da markovianidade.

3.2.1 Divisibilidade

A divisibilidade de um mapa dinâmico refere-se a uma propriedade na qual a evolução de um sistema quântico entre dois tempos $t_2 \geq t_1$ pode ser descrita por um canal quântico, ou seja, um mapa completamente positivo que preserva o traço, no qual leva o estado $\hat{\rho}(t_1)$ no tempo t_1 para $\hat{\rho}(t_2)$ no tempo t_2. Desta forma, não se tem memória sobre o estado do sistema antes de t_1 e, portanto a noção de divisibilidade pode ser entendida como uma propriedade da markovianidade [71], de acordo com Á. Rivas, S. F. Huelga e M. B. Plenio [72]. A partir do que vemos neste parágrafo, podemos definir um conceito matemático com base na Ref. [71].

Definição 7. *Para uma família de mapas dinâmicos* $\{\Lambda(t_{j+1}, t_j)\}$ *(com* $j = 0, 1$*), a divisibilidade ocorrerá se, e somente se, para todo tempo* $t_2 \geq t_1 \geq t_0$ *existir um mapa CPTP* $\Lambda(t_2, t_1)$ *tal que*

$$\Lambda(t_2, t_0) = \Lambda(t_2, t_1)\Lambda(t_1, t_0). \tag{3.29}$$

Generalizando o conceito da definição 7, no caso em que temos $t_n \geq t_{n-1} \geq \ldots \geq t_0$, existe um conjunto $\{\Lambda(t_{j+1}, t_j)\}$ (com $j = 0, \ldots, n$) de mapas CPTP que satisfazem a relação (3.29). Ou seja,

$$\Lambda(t_n, t_0) = \Lambda(t_n, t_{n-1})\Lambda(t_{n-1}, t_{n-2}) \ldots \Lambda(t_1, t_0). \tag{3.30}$$

3.2.2 Modelo quântico colisional markoviano

Vejamos uma situação da dinâmica markoviana associada ao modelo colisional [3]. Para tanto, considere a Figura 10 na qual um sistema S interage com um ambiente E a partir de colisões nos tempos t_1, t_2, ..., t_n, onde o estado do ambiente $\hat{\rho}_E$ nunca será alterado. Assim, o estado $\hat{\rho}_S$ do sistema é modificado em cada processo, de forma que num tempo t_{n+1}, temos

$$\hat{\rho}_S(t_{n+1}) = Tr_E\Big\{\hat{U}(t_{n+1}, t_n)\Big[\hat{\rho}_S(t_n) \otimes \hat{\rho}_E\Big]\hat{U}^\dagger(t_{n+1}, t_n)\Big\}, \tag{3.31}$$

onde $\hat{U}(t_{n+1}, t_n)$ é o operador unitário responsável pela evolução do sistema composto. Neste processo consideramos que em todas as colisões o sistema e o ambiente estão

descorrelacionados, e portanto a evolução pode ser descrita por um mapa completamente positivo na representação de Kraus, de modo que, por exemplo, quando observamos o tempo t_{n+2}, temos que

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_S(t_{n+2}) &= \Lambda(t_{n+2}, t_n)\Big[\hat{\rho}_S(t_n)\Big] \\ &= \Lambda(t_{n+2}, t_{n+1})\Lambda(t_{n+1}, t_n)\Big[\hat{\rho}_S(t_n)\Big],\end{aligned} \tag{3.32}$$

e desde que

$$\Lambda(t_{n+2}, t_n) = \Lambda(t_{n+2}, t_{n+1})\Lambda(t_{n+1}, t_n) \tag{3.33}$$

seja um mapa CPTP, o processo é markoviano. Tal resultado advém do teorema enunciado a seguir [3].

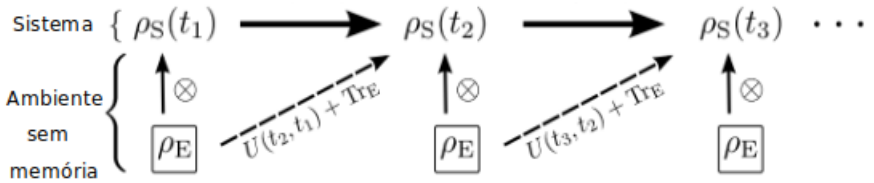


Figura 10 – Representação de um modelo quântico colisional markoviano, cujo sistema S interage com o ambiente E. A figura foi retirada e modificada da Ref. [3].

Teorema 4. *Uma dinâmica completamente positiva $\Lambda(\hat{\rho}_S)$ pode ser vista como a dinâmica reduzida de alguma evolução unitária atuando num estado composto $\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_E$, em que $\hat{\rho}_E$ é o mesmo independente de $\hat{\rho}_S$.*

Veremos adiante que ao considerarmos correlações entre sistema e ambiente a dinâmica se torna não markoviana. Contudo, vale ressaltar que alguns modelos físicos com a dinâmica mencionada já foram estudados nas Refs. [73–76].

3.3 Modelo quântico colisional não markoviano

Considere a descrição da Ref. [4], onde um sistema S interage com um ambiente E constituído por n elementos, como disposto na Figura 11. A primeira colisão ocorre entre S e 1 por meio da operação unitária $\hat{U}_1$. Em seguida os constituintes 1 e 2 interagem a partir da operação unitária $\hat{W}_{2,1}$, como é mostrado na Figura 11(b). Já na última imagem (c) o sistema interage com o segundo constituinte do ambiente através do operador $\hat{U}_2$. Tal cenário ocorre devido às correlações de são estabelecidas no sistema composto, onde a o processo ocorre sempre de maneira ordenada, alternando entre uma colisão do sistema com um elemento do ambiente e depois a colisão entre dois elementos de E.

Podemos matematizar a descrição anterior, considerando que os estados iniciais de todos os elementos estão descorrelacionados. Ou seja,

$$\hat{\Delta}_0 = \hat{\rho}_0 \otimes_{j=1}^{n} \hat{\varrho}_j, \tag{3.34}$$

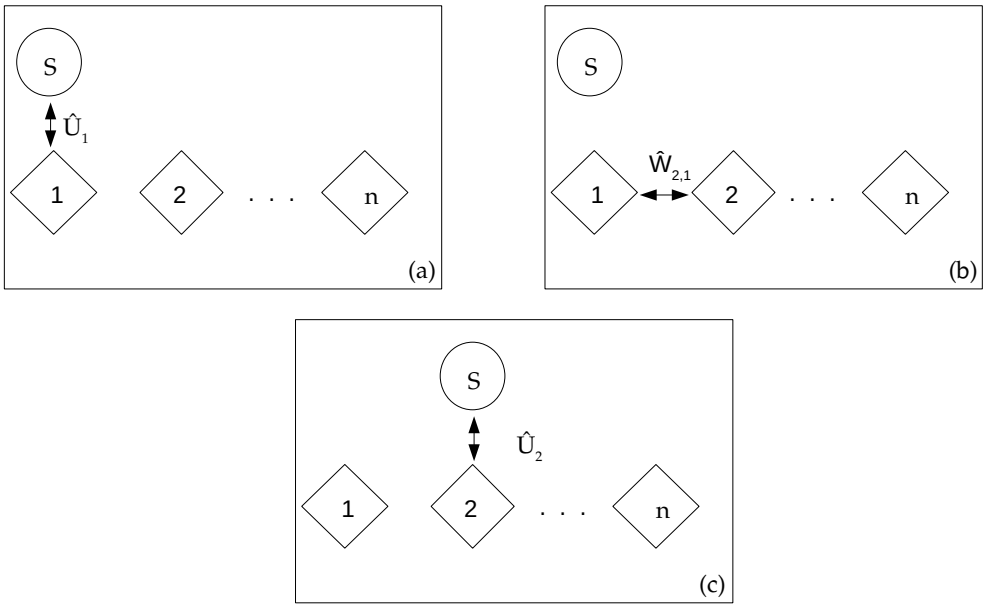


Figura 11 – Modelo quântico colisional não markoviano que considera interações entre constituintes do ambiente. Inicialmente todos os estados estão descorrelacionados. Em (a) ocorre a primeira interação entre sistema e o primeiro elemento do ambiente. Em (b) os dois primeiros constituintes do ambiente colidem, e em seguida (c) S interage com 2. A dinâmica será assim até a interação de S com o $n-$ésimo constituinte do ambiente. A Figura foi baseada na Ref. [4].

onde $\hat{\rho}_0$ é o estado inicial de S e $\hat{\varrho}_j$ os estados iniciais de cada constituinte de E. Assim, na primeira interação, temos que o estado total do sistema composto é

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{U}_1\hat{\Delta}_0\hat{U}_1^\dagger = \hat{U}_1\Big(\hat{\rho}_0 \otimes_{j=1}^{n} \hat{\varrho}_j\Big)\hat{U}_1^\dagger. \tag{3.35}$$

Após este processo, ocorre a colisão entre 1 e 2, de modo que

$$\hat{\Delta}_1' = \hat{W}_{2,1}\hat{U}_1\Big(\hat{\rho}_0 \otimes_{j=1}^{n} \hat{\varrho}_j\Big)\hat{U}_1^\dagger\hat{W}_{2,1}^\dagger. \tag{3.36}$$

Feito isto, temos que a interação entre S e 2 é dada por $\hat{U}_2$, de modo que o estado total do sistema será

$$\hat{\Delta}_2 = \hat{U}_2\hat{W}_{2,1}\hat{U}_1\Big(\hat{\rho}_0 \otimes_{j=1}^{n} \hat{\varrho}_j\Big)\hat{U}_1^\dagger\hat{W}_{2,1}^\dagger\hat{U}_2^\dagger. \tag{3.37}$$

Se prosseguirmos efetuando os cálculos para a descrição que estamos fazendo, na $n-$ésima interação teremos que o estado total se tornará

$$\hat{\Delta}_n = \hat{U}_n\hat{W}_{n,n-1}\ldots\hat{U}_2\hat{W}_{2,1}\hat{U}_1\Big(\hat{\rho}_0 \otimes_{j=1}^{n} \hat{\varrho}_j\Big)\hat{U}_1^\dagger\hat{W}_{2,1}^\dagger\hat{U}_2^\dagger\ldots\hat{W}_{n,n-1}^\dagger\hat{U}_n^\dagger. \tag{3.38}$$

Tomando $\hat{U}_1' = \hat{U}_1$ e $\hat{U}_n' = \hat{U}_n\hat{W}_{n,n-1}$, reescrevemos a Eq. (3.38) como

$$\hat{\Delta}_n = \hat{U}_n'\ldots\hat{U}_2'\hat{U}_1'\Big(\hat{\rho}_0 \otimes_{j=1}^{n} \hat{\varrho}_j\Big)\Big(\hat{U}_1'\Big)^\dagger\Big(\hat{U}_2'\Big)^\dagger\ldots\Big(\hat{U}_n'\Big)^\dagger. \tag{3.39}$$

A dinâmica aqui apresentada é não markoviana, pois não pode ser descrita por uma família de mapas CPTP aplicadas ao sistema de modo que

$$\Lambda(t_n, t_1) = \Lambda(t_n, t_{n-1})\Lambda(t_{n-1}, t_{n-2})...\Lambda(t_2, t_1), \tag{3.40}$$

que constitui uma dinâmica markoviana, como apresentado na subseção 3.2.2, e também pôde ser compreendida na Figura 10.

3.4 Traço da distância

Um outro conceito para markovianidade e não markovianidade se baseia na distinguibilidade de estados quânticos [77], o que difere da noção de divisibilidade dada na Ref. [72]. Portanto, sejam $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ os estados de um sistema. Assim, o traço da distância $\mathcal{D}$, que serve como um quantificador da distinguibilidade entre esses dois estados, é dado como [19, 31, 66, 78]

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\|\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_2\|_1, \tag{3.41}$$

onde $\|\hat{X}\|_1 = Tr\left[\sqrt{\hat{X}^\dagger \hat{X}}\right]$ é a norma do traço de um operador $\hat{X}$ [79]. Se $\hat{X}$ é hermitiano, cabe a definição [79]

$$\|\hat{X}\|_1 = \sum_j |X_j|, \tag{3.42}$$

onde X_j são os autovalores de $\hat{X}$. Sabendo que o operador densidade é hermitiano, podemos usar definição da Eq. (3.42) para escrever o traço da distância dado na Eq. (3.41) como

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\sum_j |\gamma_j|, \tag{3.43}$$

onde γ_j são os autovalores de $\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_2$.

Na Eq. (3.43) $\mathcal{D} \in [0, 1]$, tal que se $\mathcal{D} = 0$ os estados são totalmente indistingíveis, e se $\mathcal{D} = 1$ os estados são completamente distinguíveis [31]. No caso dos estados $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ serem submetidos a uma certa dinâmica, com o passar do tempo $\mathcal{D}$ pode ter um decrescimento monotônico, indicando que os estados $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ vão se tornando cada vez mais indistinguíveis no sentido de que os dois passam a se caracterizar como um só estado, fato que constata uma dinâmica markoviana [80], isto é, quando há apenas fluxo de informação do sistema para o ambiente. Do ponto de vista de H. Breuer, E. Laine e J. Piilo [3, 31, 32, 79], existe a definição dada a seguir:

Definição 8. *A evolução quântica dada por um mapa $\Lambda(t, t_0)$ é markoviana se o traço da distância entre dois estados iniciais $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ decresce monotonicamente com o tempo.*

Na evolução temporal de $\mathcal{D}$, existe a possibilidade deste quantificador descrever um comportamento oscilatório. Isto é, pode ocorrer que até certo instante o decrescimento de

$\mathcal{D}$ seja monotônico, mas em algum momento seu valor aumenta, implicando assim em um aumento na distinção entre os estados $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$. Por conta dos dois estados não tenderem a se caracterizar como um só, a dinâmica do sistema é não-markoviana, e portanto caracterizada pelo fato de não somente haver fluxo de informação do sistema para o ambiente, mas também do ambiente para o sistema [3].

3.5 Quantificador BLP para não markovianidade quântica

O termo BLP refere-se a H. Breuer, E. Laine e J. Piilo [31, 32], que desenvolveram um quantificador $\mathcal{M}_{BLP}$ para medir o grau de não markovianidade de um sistema quântico. A expressão matemática é dada por

$$\mathcal{M}_{BLP} = \max_{\hat{\rho}_1(0),\hat{\rho}_2(0)} \int_{\mathbb{d}>0} \mathbb{d}(\hat{\rho}_1(0), \hat{\rho}_2(0), t)dt, \tag{3.44}$$

onde

$$\mathbb{d}(\hat{\rho}_1(0), \hat{\rho}_2(0), t) = \frac{d}{dt}\mathcal{D}(\hat{\rho}_1(t), \hat{\rho}_2(t)) \tag{3.45}$$

é denominado fluxo de informação [81]. Quando a informação parte do ambiente para o sistema $\mathbb{d}(\hat{\rho}_1(0), \hat{\rho}_2(0), t) > 0$ implicando na dinâmica não markoviana [31].

No caso de uma dinâmica discreta, como as descritas em modelos colisionais, temos que [31]

$$\mathcal{M}_{BLP} = \max_{\hat{\rho}_1(0),\hat{\rho}_2(0)} \sum_j \Big[\mathcal{D}(\hat{\rho}_1(b_j), \hat{\rho}_2(b_j)) - \mathcal{D}(\hat{\rho}_1(a_j), \hat{\rho}_2(a_j))\Big] \tag{3.46}$$

no intervalo (a_i, b_j) onde o traço da distância aumenta.

Algumas considerações devem ser feitas com relação à Eq. (3.44). Em primeiro lugar, enfatizamos que a integração é feita quando $\mathbb{d}(\hat{\rho}_1(0), \hat{\rho}_2(0), t) > 0$ e a maximização é tomada sobre todos os pares de estados iniciais $\hat{\rho}_1(0)$ e $\hat{\rho}_2(0)$. Em segundo lugar, $\mathcal{M}_{BLP} = 0$ se, e somente se, o traço da distância entre dois pares de estados decrescem monotonicamente com o tempo [82].

Da formulação aqui apresentada, surge um questionamento: como saber quais os pares de estados iniciais são ótimos para maximizar $\mathcal{M}_{BLP}$ na Eq. (3.44)? De acordo com a Ref. [82], os melhores pares a serem usados devem ser ortogonais, de tal modo que o traço da distância inicial valha a unidade, ou seja, $\mathcal{D}(\hat{\rho}_1(0), \hat{\rho}_2(0)) = 1$, representando estados completamente distinguíveis, como visto anteriormente.

CAPÍTULO 4

ELEMENTOS DA TEORIA DO CAOS CLÁSSICO

Nesta tese é necessário abordarmos sobre elementos essenciais da teoria do caos, visto que nos capítulos 5 e 6 discutiremos sobre dinâmica regular e caótica. Sendo assim, na primeira seção descreveremos as características dos sistemas dinâmicos, e em seguida discutiremos acerca do espaço de fases, atratores e séries temporais. Logo depois analisaremos a seção de Poincaré, finalizando o capítulo com a discussão sobre os diagramas de bifurcação.

4.1 Sistemas dinâmicos

De acordo com a Ref. [83], sistema é um conjunto de elementos agrupados por intermédio de alguma interação ou dependência de modo que haja uma relação de causa e efeito frente os fenômenos que ocorrem por conta dos elementos desse conjunto. Um sistema é dinâmico quando certas grandezas passam a variar no tempo, sendo classificados em contínuos e discretos. Vejamos as definições na sequência.

- Sistemas dinâmicos contínuos: são constituídos por uma equação diferencial de primeira ordem ou um conjunto delas, podendo ser autônomas quando não dependem explicitamente do tempo, ou não autônomas no caso contrário [5, 83, 84]. Matematicamente, podemos escrever

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}), \tag{4.1}$$

onde $d\vec{x}/dt$ é a derivada de um vetor $\vec{x}$ $N-$dimensional e $\vec{F}$ um conjunto de funções não lineares ou lineares. Caso as equações não possuam soluções analíticas, existem métodos

computacionais capazes de solucionar estes problemas, como o de Runge-Kutta de quarta ordem.

- Sistemas dinâmicos discretos: são caracterizados por uma equação de diferença ou um conjunto delas. Matematicamente, escrevemos que

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n), \tag{4.2}$$

onde n é uma variável discreta no tempo, e também $\vec{x}_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, ..., x_n^{(N)})$, bem como $\vec{F}$ são funções de $\vec{x}_n$.

Em muitos casos os sistemas dinâmicos possuem parâmetros que controlam seu comportamento, podendo ser constantes ou variáveis no tempo [83]. Veremos alguns exemplos ao longo do capítulo.

4.2 Espaço de fases e sua dinâmica

O espaço de fases, também conhecido como espaço de estados, possui dimensão N que é definida pelo número de EDOs de primeira ordem que determinam a evolução no tempo de um ponto $\vec{x}(t) = (x^{(1)}(t), ..., x^{(N)}(t))$, sendo $x^{(j)} = x^{(j)}(t)$ as variáveis de estado [83]. Ainda de acordo com a última referência citada, denominamos retrato de fases o conjunto de todas as curvas obtidas pela evolução temporal do sistema a partir de condições iniciais. Por exemplo, para um conjunto de EDOs a solução de $\vec{x}(t)$, definida por I. Newton como fluxo, representa uma trajetória ou órbita no espaço de fases [85].

Os sistemas dinâmicos podem ser classificados em conservativos e dissipativos, onde nestes surgem os chamados atratores, que são regiões no espaço de fases para onde as trajetórias convergem [83]. A fim de uma melhor compreensão, considere um conjunto de condições iniciais em $t = 0$ contidas num volume $V(0)$ no espaço de fases $N-$dimensional. Se na evolução temporal o volume final $V(t)$ é igual a $V(0)$ o sistema é conservativo. Se $V(t) < V(0)$, então o sistema é dissipativo [83, 85]. Matematicamente, para classificar os sistemas utilizamos o determinante da matriz jacobiana $\bar{J}$. Se $det(\bar{J}) = 1$ o sistema é conservativo e se $det(\bar{J}) < 1$ é dissipativo, e portanto possui atratores. Para um sistema de EDOs como o da Eq. (4.1), definimos que

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\left(\frac{dx^{(1)}}{dt}\right) & \frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\left(\frac{dx^{(1)}}{dt}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x^{(N)}}\left(\frac{dx^{(1)}}{dt}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\left(\frac{dx^{(2)}}{dt}\right) & \frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\left(\frac{dx^{(2)}}{dt}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x^{(N)}}\left(\frac{dx^{(2)}}{dt}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\left(\frac{dx^{(N)}}{dt}\right) & \frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\left(\frac{dx^{(N)}}{dt}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x^{(N)}}\left(\frac{dx^{(N)}}{dt}\right) \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

A respeito de um atrator qualquer, podemos caracterizá-lo de pelo menos três formas, como veremos na sequência.

- Ponto fixo: é um ponto no espaço de fases para onde a trajetória converge [83, 84]. Este comportamento pode ser visto na Figura 12(a) a partir do modelo Brusselator, que foi desenvolvido por G. Nicolis e I. Prigogine [86] para estudar reações químicas[1]. A dinâmica do sistema pode ser entendida através de duas EDOs de primeira ordem, dadas por [87, 88]

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \chi + \omega^2\kappa - (\mu + 1)\omega, \\ \frac{d\kappa}{dt} = \mu\omega - \omega^2\kappa, \end{cases} \tag{4.4}$$

onde ω e κ são as concentrações dos reagentes. Já χ e μ são parâmetros associados ao abastecimento de produtos químicos. O comportamento do ponto fixo também pode ser percebido na série temporal da Figura 12(b), onde inicialmente ω oscila no tempo e depois tende a obter o valor próximo de 0,8.

- Ciclo limite: apresenta um comportamento periódico [83, 84], como pode ser visto no espaço de fases da Figura 12(c) para o sistema de equações do oscilador de van der Pol, desenvolvido para estudar oscilações não lineares em circuitos eletrônicos [89]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \epsilon(1 - x^2)y - x, \end{cases} \tag{4.5}$$

onde $\epsilon > 0$ é um parâmetro de controle associado ao amortecimento do sistema [90]. Percebemos o comportamento regular do modelo analisando a série temporal $x(t)$, que após um tempo passa a oscilar entre -2 e 2, aproximadamente, como podemos ver na Figura 12(d).

- Atrator caótico: é aquele que possui uma dinâmica irregular ou caótica [83, 84]. Este comportamento pode ser percebido no espaço de fases do sistema de Lorenz (Figura 12(e)), desenvolvido pelo matemático E. N. Lorenz para estudar condições climáticas. As equações são dadas como [83]:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \vartheta(Y - X), \\ \frac{dY}{dt} = (R - Z)X - Y, \\ \frac{dZ}{dt} = XY - \Upsilon Z. \end{cases} \tag{4.6}$$

Podemos entender o comportamento caótico do sistema a partir da série temporal de $X(t)$ na Figura 12(f), onde por exemplo, a dinâmica não apresenta uma região que oscile entre dois valores, como acontecia no caso do oscilador de van der Pol.

[1] Na tese não temos o intuito de explorar este sistema nem os outros clássicos, pois as equações servem para demonstrar o comportamento de atratores. Recomendamos ao leitor que para uma melhor compreensão consulte as referências citadas no texto.

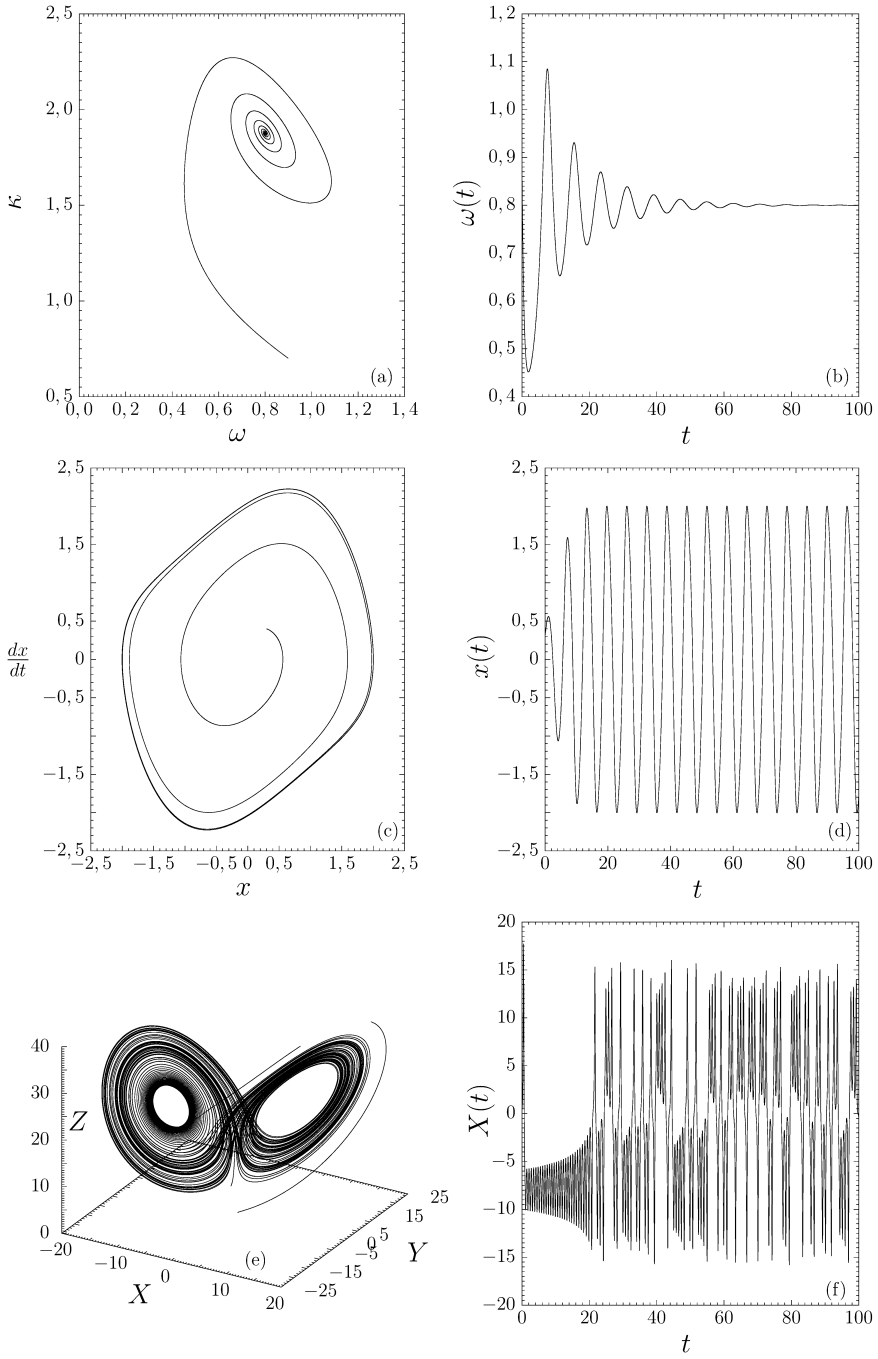


Figura 12 – Soluções dos sistemas de EDOs resolvidas pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. A imagem (a) é ponto fixo no espaço de fases do modelo Brusselator e (b) a série temporal de uma de suas variáveis, onde em ambas, utilizamos a condição inicial $(\omega_0, \kappa_0) = (0{,}9, 0{,}7)$, bem como os parâmetros $\xi = 0{,}8$ e $\mu = 1{,}5$. A imagem (c) é o ciclo limite no espaço de fases do oscilador de van der Pol e (d) sua respectiva série temporal, onde nas duas figuras utilizamos a condição inicial $(x_0, y_0) = (0{,}3, 0{,}4)$ e o parâmetro $\epsilon = 0{,}5$. Por fim, vemos em (e) o atrator caótico de Lorenz no espaço de fases deste sistema e (f) sua série temporal, onde usamos $(X_0, Y_0, Z_0) = (0{,}4, 0{,}3, 0{,}2)$ como condição inicial, bem como os parâmetros $\vartheta = 0{,}9$, $R = 25$ e $\Upsilon = 8/3$.

4.3 Seção de Poincaré

De acordo com as Refs. [5, 84], a seção de Poincaré é uma hipersuperfície no espaço de fases $N-$dimensional, cujo intuito é diminuir uma dimensão do sistema por meio de discretização. Para que isso se torne claro, observe a Figura 13, onde uma trajetória **C** perfura a seção de Poincaré **S**, gerando os pontos **A** e **B**. Neste procedimento consideramos as perfurações em apenas um sentido, que no caso da Figura 13 é de cima para baixo.

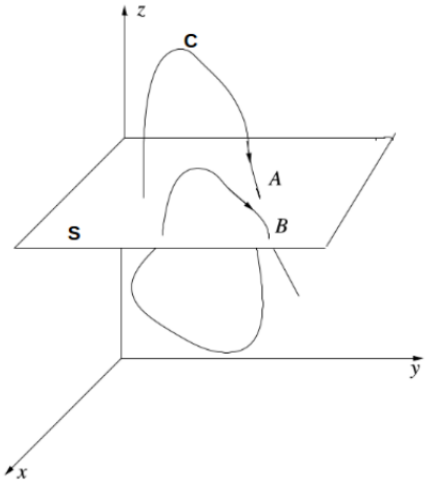


Figura 13 – Seção de Poincaré **S** bidimensional imersa em um espaço tridimensional sendo perfurada por uma trajetória **C**. Imagem retirada de [5].

Veremos a seguir três comportamentos que podem ocorrer em uma seção de Poincaré [5, 83, 84, 91] a partir do mapa de Hénon que apresenta as mesmas propriedades do sistema de Lorenz [92]. As equações são dadas por [92]

$$\begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n, \\ y_{n+1} = x_n, \end{cases} \tag{4.7}$$

onde a e b são parâmetros do sistema.

- Ponto fixo: é aquele no qual a trajetória passa sempre por ele. Isto pode ser visto na Figura 14(a), cujo único ponto apresentado durante a dinâmica é $(x, y) \approx (0{,}2385, 0{,}2385)$. Também percebemos o comportamento do ponto fixo na Figura 14(b) através da série temporal, cujos pontos estão sobre $x_n \approx 0{,}2385$ durante a iteração do sistema.

- Órbita periódica: é um conjunto de pontos cuja trajetória começa perfurando em $\mathcal{X}$ e após k iterações do sistema, o mesmo retorna a $\mathcal{X}$. Tal característica é vista na Figura 14(c), cujos pontos no espaço de fases são $(x^{(1)}, y^{(1)}) \approx (-0{,}294, 0{,}896)$ e

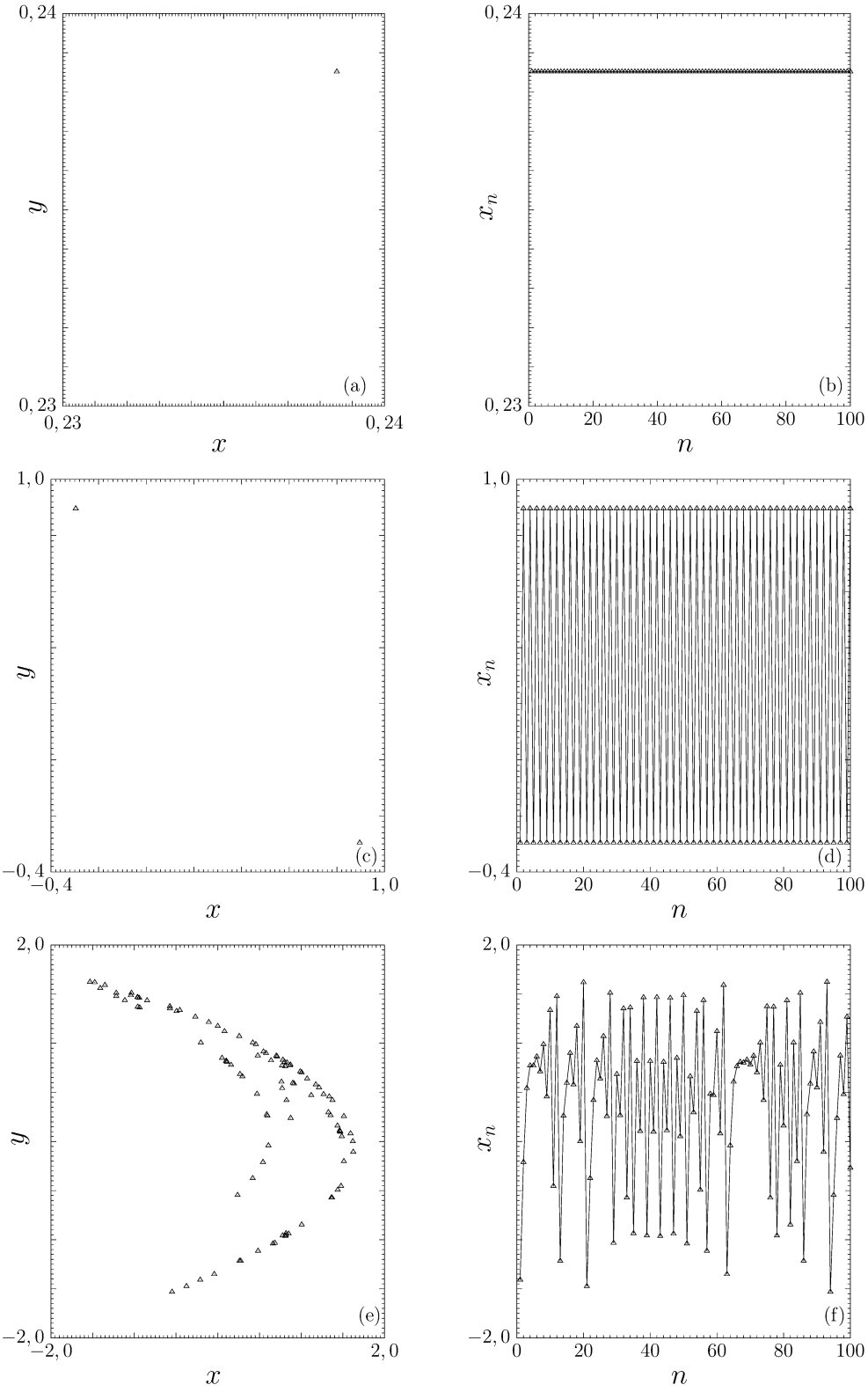


Figura 14 – Nas figuras à esquerda estão os espaços de fases do mapa de Hénon e à direita as séries temporais. Em todas as simulações utilizamos a condição inicial $(x_0, y_0) = (0{,}63135448, 0{,}18940634)$ e o parâmetro $b = 0{,}4$. Além disso, deixamos que o sistema passasse por 5×10^4 iterações para então salvar 100 pontos na simulação. Na imagem (a-b) usamos $a = 0{,}2$, (c-d) $a = 0{,}625$ e (e-f) $a = 1{,}15$.

$(x^{(2)}, y^{(2)}) \approx (0{,}895, -0{,}293)$. Além disso, notamos na série temporal da Figura 14(d) que os valores de x_n são os $x^{(j)}$ apresentados anteriormente. Nestas circunstâncias dizemos que a órbita possui período dois.

- Órbita caótica: quando ocorre uma desordem na distribuição de pontos. Tal comportamento é notado na Figura 14(e). Na série temporal da Figura 14(f) também vemos o comportamento caótico do sistema, assim como acontecia na Figura 12(f) do atrator de Lorenz.

4.4 Diagramas de bifurcação

Bifurcação foi o termo utilizado em 1885 por J. H. Poincaré para se referir a mudanças no retrato de fases a partir de valores críticos dos parâmetros do sistema [83]. Podemos observar isso na Figura 15, que para $a \approx 0,270455$ é o parâmetro onde ocorre a modificação do retrato de fases que deixa de possuir um ponto fixo e passa a obter uma órbita de período 2.

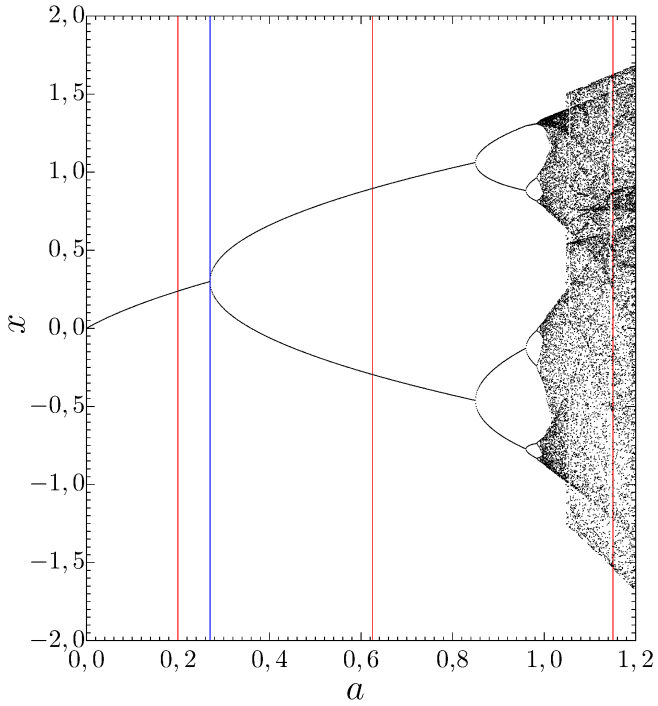


Figura 15 – DB do mapa de Hénon, onde utilizamos a condição inicial $(x_0, y_0) = (0{,}63135448, 0{,}18940634)$, fixando o parâmetro $b = 0{,}4$ e variando a no intervalo $a \in [0, 1{,}2]$. Além disso, deixamos que o sistema passasse por 5×10^4 iterações para então salvar 100 pontos na simulação. A reta $a = 0{,}270455$ em azul é aproximadamente o valor da primeira bifurcação do sistema. Já as outras as retas em vermelho estão posicionadas respectivamente em $a = 0{,}2$, $a = 0{,}625$ e $a = 1{,}15$.

A partir do diagrama de bifurcação podemos analisar regiões em que se define a

dinâmica do sistema. Por exemplo, as retas em vermelho $a = 0{,}2$, $a = 0{,}625$ e $a = 1{,}15$ se referem, respectivamente, a um ponto fixo, órbita de período dois e órbita caótica no retrato de fases, como pode ser percebido na Figura 14(a,c,e).

Existem métodos mais sofisticados para analisar parâmetros na dinâmica de sistemas discretos e contínuos, como o desenvolvido por J. A. C. Gallas, onde se varia a e b no mapa de Hénon [6]. As estruturas indicam regiões de dinâmica regular com órbitas de período 8, por exemplo, como está destacado na Figura 16. Tais estruturas são denominadas "camarões".

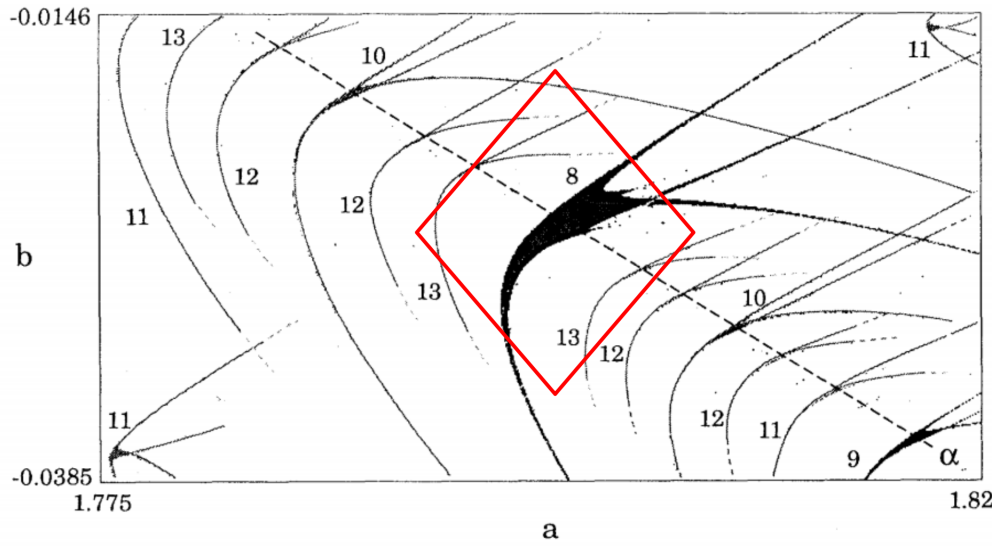


Figura 16 – Espaço dos parâmetros do mapa de Hénon que indicam regiões periódicas. Retirada da Ref. [6] e modificada.

CAPÍTULO 5

MODELO COLISIONAL NÃO MARKOVIANO PARA A DINÂMICA DE DOIS *QUBITS*

Neste capítulo estudaremos a dinâmica não markoviana do modelo de dois *qubits* colidindo no interior de uma caixa. Para tanto, descreveremos o comportamento sistema, o canal quântico utilizado e a testificação da não markovianidade quântica através do traço da distância. Em seguida, discutiremos a dinâmica regular e caótica da coerência e do emaranhamento.

5.1 Modelo físico

Consideremos que os *qubits* A e B estão aprisionados em uma caixa interagindo por meio de colisões, como disposto na Figura 17. Trataremos A como sistema principal e B como ambiente. O *qubit* A possui operador densidade $\hat{\rho}_A$ e hamiltoniano $\hat{H}_A = E_f \left|f\right\rangle \left\langle f\right| + E_e \left|e\right\rangle \left\langle e\right|$, onde $\left|i\right\rangle$ são os autoestados de $\hat{H}_A$ e E_i as autoenergias, cujos subescritos f e e referem-se aos estados fundamental e excitado, respectivamente, e terá a mesma função explicativa para os subscritos dos autokets e autoenergias do hamiltoniano de B. Analogamente, o *qubit* B tem um operador densidade $\hat{\rho}_B$ e hamiltoniano $\hat{H}_B = \mathcal{E}_f \left|\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle \mathcal{E}_f\right| + \mathcal{E}_e \left|\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle \mathcal{E}_e\right|$ com autoestados $\left|\mathcal{E}_i\right\rangle$ e autoenergias $\mathcal{E}_i$. Sabendo disso, vamos pensar que A e B estão descorrelacionados, e portanto o operador densidade inicial do sistema composto é $\hat{\rho}_{AB}(0) = \hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_B(0)$. Além disso, o hamiltoniano do sistema total fica sendo $\hat{H}_{AB}$, cuja base é $\{\left|f, \mathcal{E}_f\right\rangle, \left|f, \mathcal{E}_e\right\rangle, \left|e, \mathcal{E}_f\right\rangle, \left|e, \mathcal{E}_e\right\rangle\}$.

Pensemos agora na dinâmica do sistema. Em cada colisão dos *qubits* ocorre uma interação vinculada à transformação unitária $\hat{U}$. Desta forma, acontecem os seguintes

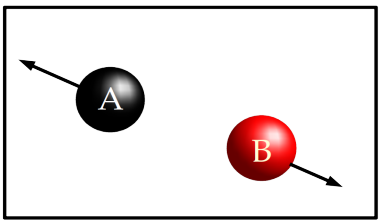


Figura 17 – *Qubits* A e B dentro de uma caixa interagindo via colisões.

processos colisionais:

$$Colisão\ 1: \quad \hat{\rho}_{AB}(0) \rightarrow \hat{\rho}_{AB}(1) = \hat{U}\hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_B(0)\hat{U}^\dagger. \tag{5.1}$$

$$Colisão\ 2: \quad \hat{\rho}_{AB}(1) \rightarrow \hat{\rho}_{AB}(2) = \hat{U}^2\hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_B(0)(\hat{U}^\dagger)^2. \tag{5.2}$$

$$\vdots$$

$$Colisão\ n: \quad \hat{\rho}_{AB}(n-1) \rightarrow \hat{\rho}_{AB}(n) = \hat{U}^n\hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_B(0)(\hat{U}^\dagger)^n. \tag{5.3}$$

Após n colisões podemos obter o estado de cada *qubit* através do traço parcial. Ou seja,

$$\hat{\rho}_A(n) = Tr_B[\hat{U}^n\hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_B(0)(\hat{U}^\dagger)^n], \tag{5.4}$$

ou

$$\hat{\rho}_B(n) = Tr_A[\hat{U}^n\hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_B(0)(\hat{U}^\dagger)^n]. \tag{5.5}$$

Na sequência abordaremos sobre o operador unitário $\hat{U}$ utilizado na evolução do sistema discutido nesta seção.

5.2 Canal amplitude de amortecimento generalizado

Na seção anterior descrevemos a dinâmica pela qual o sistema é submetido, e para tanto, será necessário definirmos uma operação unitária a fim de que o processo colisional ocorra. Sendo assim, escolhemos o canal amplitude de amortecimento generalizado, pois este possui a característica de alterar ou não os estados de energia dos *qubits* em cada colisão. De acordo com o que foi descrito anteriormente, sabemos que a base dos autokets de energia do sistema composto é $\{|f,\mathcal{E}_f\rangle, |f,\mathcal{E}_e\rangle, |e,\mathcal{E}_f\rangle, |e,\mathcal{E}_e\rangle\}$. Em posse disto e da Ref. [93], temos que as interações dos *qubits* através do CAMAG podem gerar os seguintes resultados:

$$|f,\mathcal{E}_f\rangle \longrightarrow |f,\mathcal{E}_f\rangle, \tag{5.6}$$

$$|f, \mathcal{E}_e\rangle \longrightarrow \sqrt{1-p}\,|f, \mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e, \mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{5.7}$$

$$|e, \mathcal{E}_f\rangle \longrightarrow \sqrt{1-p}\,|e, \mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f, \mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{5.8}$$

$$|e, \mathcal{E}_e\rangle \longrightarrow |e, \mathcal{E}_e\rangle\,. \tag{5.9}$$

A Eq. (5.6) significa que se A está no estado fundamental e B também, não acontece transições entre níveis energéticos de nenhum *qubit*. Da Eq. (5.7) interpretamos que se A está no estado fundamental e B no excitado, existe uma probabilidade $1-p$ de não ocorrer alteração do estado composto e probabilidade p de A subir um nível energético e B ir para o estado fundamental. Já na Eq. (5.8) percebemos que, caso A esteja no maior nível de energia e B no estado fundamental, há uma probabilidade $1-p$ dos *qubits* não alterarem suas energias, e uma probabilidade p de ocorrer transição dos níveis energéticos, ou seja, A vai para o estado fundamental e B para o excitado. Por fim, notamos na Eq. (5.9) que se cada *qubit* está no estado excitado, após a colisão o estado continua inalterado, tendo-se um caso de estado metaestável, aquele em que a permanência no maior nível de energia tem um tempo de vida muito longo dentro da escala atômica. Observar-se que a metaestabilidade é dependente das condições ambiente [94–99]. Note nas Eqs. (5.7) e (5.8) que para $p = 0$ não ocorre alteração dos níveis energéticos do sistema e do ambiente.

Baseado na explanação anterior e nas Eqs. (5.6), (5.7), (5.8) e (5.9), podemos construir um operador unitário $\hat{U}$ pensando no postulado 2 da mecânica quântica, de onde sabemos que a evolução de um estado quântico $|\psi\rangle$ é dada por

$$|\psi\rangle \to \hat{U}\,|\psi\rangle\,. \tag{5.10}$$

Desta forma, definimos $\hat{U}$ como

$$\begin{aligned}\hat{U} = &|f, \mathcal{E}_f\rangle\langle f, \mathcal{E}_f| + \sqrt{1-p}\,|f, \mathcal{E}_e\rangle\langle f, \mathcal{E}_e| \\ &+ \sqrt{p}\,|f, \mathcal{E}_e\rangle\langle e, \mathcal{E}_f| - \sqrt{p}\,|e, \mathcal{E}_f\rangle\langle f, \mathcal{E}_e| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|e, \mathcal{E}_f\rangle\langle e, \mathcal{E}_f| + |e, \mathcal{E}_e\rangle\langle e, \mathcal{E}_e|\,.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Em posse da Eq. (5.11) verificaremos algumas situações do operador $\hat{U}$.

- **Verificação da unitariedade de $\hat{U}$.**

Da Eq. (5.11) temos que

$$\begin{aligned}\hat{U}^{\dagger} = &|f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f| + \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e| \\ &+ \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e| - \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e|\,.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\hat{U}\hat{U}^{\dagger} = &|f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f| + (1-p)\,|f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e| - \sqrt{p(1-p)}\,|f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f| \\ &+ p\,|f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e| + \sqrt{p(1-p)}\,|f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f| - \sqrt{p(1-p)}\,|e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e| \\ &+ p\,|e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f| + \sqrt{p(1-p)}\,|e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e| + (1-p)\,|e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f| \\ &+ |e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e|\,,\end{aligned} \tag{5.13}$$

tal que efetuando os cálculos concluímos que

$$\hat{U}\hat{U}^{\dagger} = |f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e| + |e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e| = \hat{I}. \tag{5.14}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\hat{U}^{\dagger}\hat{U} = &|f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f| + (1-p)\,|f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e| + \sqrt{p(1-p)}\,|f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f| \\ &+ p\,|f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e| - \sqrt{p(1-p)}\,|f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f| + \sqrt{p(1-p)}\,|e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e| \\ &+ p\,|e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f| - \sqrt{p(1-p)}\,|e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e| + (1-p)\,|e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f| \\ &+ |e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e|\,.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Portanto,

$$\hat{U}^{\dagger}\hat{U} = |f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e| + |e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e| = \hat{I}. \tag{5.16}$$

A partir das Eqs. (5.14) e (5.16), verificamos que $\hat{U}\hat{U}^{\dagger} = \hat{U}^{\dagger}\hat{U} = \hat{I}$, onde $\hat{I}$ é o operador identidade. Portanto, $\hat{U}$ é um operador unitário.

Vamos agora comprovar que a aplicação de $\hat{U}$ nos estados do lado esquerdo da seta nas Eqs. (5.6), (5.7), (5.8) e (5.9) resulta nos kets do lado direito destas. Será que de fato essa verificação é necessária? Não. Mas, para cunho didático, as contas efetuadas a seguir fará com que o leitor não habituado com as operações matemáticas possa saber fazê-las. Também vale salientar que existem casos onde as operações unitárias não resultam em operadores unitários [64].

- **Verificação da aplicação de $\hat{U}$ para Eq. (5.6).**

Pela transformação unitária, temos que

$$|f,\mathcal{E}_f\rangle \to \hat{U}\,|f,\mathcal{E}_f\rangle\,. \tag{5.17}$$

Substituindo (5.11) em (5.17) e rearranjando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} |f,\mathcal{E}_f\rangle \to \hat{U}\,|f,\mathcal{E}_f\rangle &= |f,\mathcal{E}_f\rangle\,(\langle f,\mathcal{E}_f|)(|f,\mathcal{E}_f\rangle) \\ &= |f,\mathcal{E}_f\rangle\,\langle f|\,f\rangle\,\langle\mathcal{E}_f|\,\mathcal{E}_f\rangle \\ &= |f,\mathcal{E}_f\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Vemos, portanto, que o operador unitário dado na Eq. (5.11) satisfaz a Eq. (5.6).

- **Verificação da aplicação de $\hat{U}$ para Eq. (5.7).**

Pelo segundo postulado da mecânica quântica sabemos que

$$|f,\mathcal{E}_e\rangle \to \hat{U}\,|f,\mathcal{E}_e\rangle\,. \tag{5.19}$$

Substituindo a Eq. (5.11) na (5.19) e efetuando os cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} |f,\mathcal{E}_e\rangle \to \hat{U}\,|f,\mathcal{E}_e\rangle &= \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e\rangle\,(\langle f,\mathcal{E}_e|)(|f,\mathcal{E}_e\rangle) - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f\rangle\,(\langle f,\mathcal{E}_e|)(|f,\mathcal{E}_e\rangle) \\ &= \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e\rangle\,\langle f|\,f\rangle\,\langle\mathcal{E}_e|\,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f\rangle\,\langle f|\,f\rangle\,\langle\mathcal{E}_e|\,\mathcal{E}_e\rangle \\ &= \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Constatamos que $\hat{U}$ satisfaz a Eq. (5.7).

- **Verificação da aplicação de $\hat{U}$ para Eq. (5.8).**

Seguindo a estrutura de verificação dos dois últimos tópicos, temos que

$$|e,\mathcal{E}_f\rangle \to \hat{U}\,|e,\mathcal{E}_f\rangle\,. \tag{5.21}$$

Substituindo a Eq. (5.11) na (5.21), adquirimos

$$\begin{aligned} |e,\mathcal{E}_f\rangle \to \hat{U}\,|e,\mathcal{E}_f\rangle &= \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f\rangle\,(\langle e,\mathcal{E}_f|)(|e,\mathcal{E}_f\rangle) + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e\rangle\,(\langle e,\mathcal{E}_f|)(|e,\mathcal{E}_f\rangle) \\ &= \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f\rangle\,\langle e|\,e\rangle\,\langle\mathcal{E}_f|\,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e\rangle\,\langle e|\,e\rangle\,\langle\mathcal{E}_f|\,\mathcal{E}_f\rangle \\ &= \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Pelo resultado anterior percebemos que a Eq. (5.8) é satisfeita pela operação de $\hat{U}$.

- **Verificação da aplicação de $\hat{U}$ para Eq. (5.9).**

Para finalizar as verificações, analisemos a seguinte transformação:

$$|e,\mathcal{E}_e\rangle \to \hat{U}\,|e,\mathcal{E}_e\rangle\,. \tag{5.23}$$

Substituindo a Eq. (5.11) na (5.23), temos que

$$\begin{aligned} |e,\mathcal{E}_e\rangle \rightarrow \hat{U}\,|e,\mathcal{E}_e\rangle &= |e,\mathcal{E}_e\rangle\,(\langle e,\mathcal{E}_e|)(|e,\mathcal{E}_e\rangle) \\ &= |e,\mathcal{E}_e\rangle\,\langle e|\,e\rangle\,\langle\mathcal{E}_e|\,\mathcal{E}_e\rangle \\ &= |e,\mathcal{E}_e\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Com este último resultado, comprovamos que a transformação unitária aqui apresentada satisfaz as Eqs. (5.6), (5.7), (5.8) e (5.9). A partir das considerações anteriores, temos que a forma matricial do operador unitário é dada por

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} & \sqrt{p} & 0 \\ 0 & -\sqrt{p} & \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.25}$$

cujo resultado está de acordo com as Refs. [100, 101].

5.3 Dinâmica do modelo colisional

A partir de agora veremos a aplicação das discussões teóricas feitas nas seções 5.1 e 5.2. Ou seja, estabeleceremos estados quânticos para A e B com o intuito de observar o que ocorre com a evolução destes. Para o *qubit* A definimos um estado puro inicial ($n = 0$) como

$$|\psi(0)\rangle = a\,|f\rangle + b\,|e\rangle\,, \tag{5.26}$$

com $a, b \in \mathbb{C}$. Da Eq. (5.26), temos que o operador densidade inicial de A é

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A(0) =& |\psi(0)\rangle\,\langle\psi(0)| \\ =& \Big[a\,|f\rangle + b\,|e\rangle\Big]\Big[a^*\,\langle f| + b^*\,\langle e|\Big] \\ =& |a|^2\,|f\rangle\,\langle f| + ab^*\,|f\rangle\,\langle e| + a^*b\,|e\rangle\,\langle f| + |b|^2\,|e\rangle\,\langle e|\,. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Consideraremos que o *quibt* B está inicialmente em um estado térmico, cujo operador densidade é

$$\hat{\rho}_B(0) = w_f\,|\mathcal{E}_f\rangle\,\langle\mathcal{E}_f| + w_e\,|\mathcal{E}_e\rangle\,\langle\mathcal{E}_e|\,, \tag{5.28}$$

onde

$$w_j = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_j}{k_B T}}}{Z} \tag{5.29}$$

são os pesos probabilísticos, com j indicando se o estado é fundamental (w_f) ou excitado (w_e). Além disso, Z é a função de partição do sistema B, dada por

$$Z = Tr\Big(e^{-\frac{\hat{H}_B}{k_B T}}\Big). \tag{5.30}$$

Se dividirmos w_e por w_f, a partir de algumas manipulações matemáticas, temos que

$$w_e = w_g e^{-\frac{\mathcal{E}_e - \mathcal{E}_g}{k_B T}}. \tag{5.31}$$

Também sabemos que

$$w_f + w_e = 1. \tag{5.32}$$

Supomos que inicialmente os estados estão descorrelacionados. Portanto, das Eqs. (5.27) e (5.28) escrevemos o operador densidade do sistema composto como

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{AB}(0) &= \hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_B(0) \\
&= [|a|^2 |f\rangle \langle f| + ab^* |f\rangle \langle e| + a^* b |e\rangle \langle f| + |b|^2 |e\rangle \langle e|] \otimes \\
&[w_f |\mathcal{E}_f\rangle \langle \mathcal{E}_f| + w_e |\mathcal{E}_e\rangle \langle \mathcal{E}_e|] \\
&= |a|^2 w_f |f, \mathcal{E}_f\rangle \langle f, \mathcal{E}_f| + |a|^2 w_e |f, \mathcal{E}_e\rangle \langle f, \mathcal{E}_e| + ab^* w_f |f, \mathcal{E}_f\rangle \langle e, \mathcal{E}_f| + \\
&ab^* w_e |f, \mathcal{E}_e\rangle \langle e, \mathcal{E}_e| + a^* b w_f |e, \mathcal{E}_f\rangle \langle f, \mathcal{E}_f| + a^* b w_e |e, \mathcal{E}_e\rangle \langle f, \mathcal{E}_e| + \\
&|b|^2 w_f |e, \mathcal{E}_f\rangle \langle e, \mathcal{E}_f| + |b|^2 w_e |e, \mathcal{E}_e\rangle \langle e, \mathcal{E}_e|.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

A forma matricial do estado inicial composto pelo sistema A com B é dada por

$$\hat{\rho}_{AB}(0) = \begin{pmatrix} |a|^2 w_f & 0 & ab^* w_f & 0 \\ 0 & |a|^2 w_e & 0 & ab^* w_e \\ a^* b w_f & 0 & |b|^2 w_f & 0 \\ 0 & a^* b w_e & 0 & |b|^2 w_e \end{pmatrix}. \tag{5.34}$$

Se efetuarmos as operações unitárias (apresentadas na seção 5.1) na matriz da Eq. (5.34) verificaremos que em cada colisão ocorrerá uma modificação do estado $\hat{\rho}_{AB}$, e a partir deste resultado é possível estudar processos não markovianos do modelo colisional, como veremos adiante.

5.4 Traço da distância

Vimos que durante a dinâmica não markoviana o fluxo de informação do ambiente para o sistema é caracterizado pelo aumento, ainda que transitório, da distinguibilidade dos pares de estados quânticos que evoluem no tempo [66], indicando efeito de memória ao longo das colisões, o qual investigaremos na sequência.

5.4.1 Procedimento computacional

A partir de agora descreveremos o processo computacional empregado no cálculo do traço da distância. Comecemos definindo dois kets iniciais ortonormais do sistema A, onde um deles é dado por

$$|\psi_1(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|f\rangle + |e\rangle) \tag{5.35}$$

e outro é escrito como

$$|\psi_2(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|f\rangle - |e\rangle). \tag{5.36}$$

Da Eq. (5.35) temos que

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_A^1(0) =& |\psi_1(0)\rangle \langle\psi_1(0)| \\ =& \frac{1}{2}\Big[|f\rangle \langle f| + |f\rangle \langle e| + |e\rangle \langle f| + |e\rangle \langle e| \Big].\end{aligned} \tag{5.37}$$

Já pela Eq. (5.36), obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_A^2(0) =& |\psi_2(0)\rangle \langle\psi_2(0)| \\ =& \frac{1}{2}\Big[|f\rangle \langle f| - |f\rangle \langle e| - |e\rangle \langle f| + |e\rangle \langle e| \Big].\end{aligned} \tag{5.38}$$

Assim, temos as matrizes

$$\hat{\rho}_A^1(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{5.39}$$

e

$$\hat{\rho}_A^2(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{5.40}$$

Feito isto, definiremos a matriz densidade inicial do ambiente B. Para tanto, voltemos a Eq. (5.28) de onde extraímos que

$$\hat{\rho}_B(0) = \begin{pmatrix} w_f & 0 \\ 0 & w_e \end{pmatrix}. \tag{5.41}$$

Inicialmente, consideramos que os estados são separáveis. Então, as duas matrizes densidades iniciais compostas são dadas por

$$\hat{\rho}_{AB}^1(0) = \hat{\rho}_A^1(0) \otimes \hat{\rho}_B(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}w_f & 0 & \frac{1}{2}w_f & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}w_e & 0 & \frac{1}{2}w_e \\ \frac{1}{2}w_f & 0 & \frac{1}{2}w_f & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}w_e & 0 & \frac{1}{2}w_e \end{pmatrix} \tag{5.42}$$

e

$$\hat{\rho}_{AB}^2(0) = \hat{\rho}_A^2(0) \otimes \hat{\rho}_B(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}w_f & 0 & -\frac{1}{2}w_f & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}w_e & 0 & -\frac{1}{2}w_e \\ -\frac{1}{2}w_f & 0 & \frac{1}{2}w_f & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}w_e & 0 & \frac{1}{2}w_e \end{pmatrix}. \tag{5.43}$$

Voltemos para a Eq. (5.31) e tomemos $1/k_BT = 1/(\mathcal{E}_e - \mathcal{E}_f)$. Assim, obtemos $w_e = w_f e^{-1}$. Agora, utilizando a relação $w_f + w_e = 1$, obtemos $w_f \approx 0{,}73$ e $w_e \approx 0{,}27$, que serão utilizadas nas Eqs. (5.41), (5.42) e (5.43). Enfatizamos que os valores de w_e e w_f, definidos anteriormente, foram usados na Ref. [93] e permitido pelo autor do artigo, pois desejávamos analisar a não markovianidade de *qubits* numa outra perspectiva. E agora, como procedemos para estudar a dinâmica do sistema? A resposta está num conjunto de passos listados a seguir, que serão executados no computador para obtenção de resultados.

1. Através do procedimento discutido na seção 5.1, calcula-se as matrizes densidade reduzidas $\hat{\rho}_A^1$ e $\hat{\rho}_A^2$ em cada colisão com o auxílio do CAMAG.
2. Define-se a matriz $\hat{M} = \hat{\rho}_A^1 - \hat{\rho}_A^2$.
3. São calculados os autovalores γ_j de $\hat{M}$.
4. É calculado $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\sum_j |\gamma_j|$.
5. Num arquivo de dados é escrito o número da colisão (n) e o valor de $\mathcal{D}$.
6. Ao final de 5, retoma-se o passo 1 até a quantidade de colisões/iterações desejada.

5.4.2 Discussão dos resultados

A partir do procedimeto computacional descrito anteriormente, conseguimos obter o traço da distância $\mathcal{D}$ em função do número de colisões n, como pode ser observado na Figura 18. Pedimos que o leitor consulte a descrição dos gráficos antes de continuar a leitura do texto.

Notamos claramente na Figura 18(a-b) o comportamento oscilatório de $\mathcal{D}$ que é característico da dinâmica não markoviana, como já discutimos anteriormente. Contudo, os gráficos da Figura 18 têm aparências distintas para certos valores da probabilidade p presente no CAMAG, como visto na seção 5.2. Devido a estas tais aparências, podemos discutir sobre caos e regularidade no sistema, como veremos na sequência.

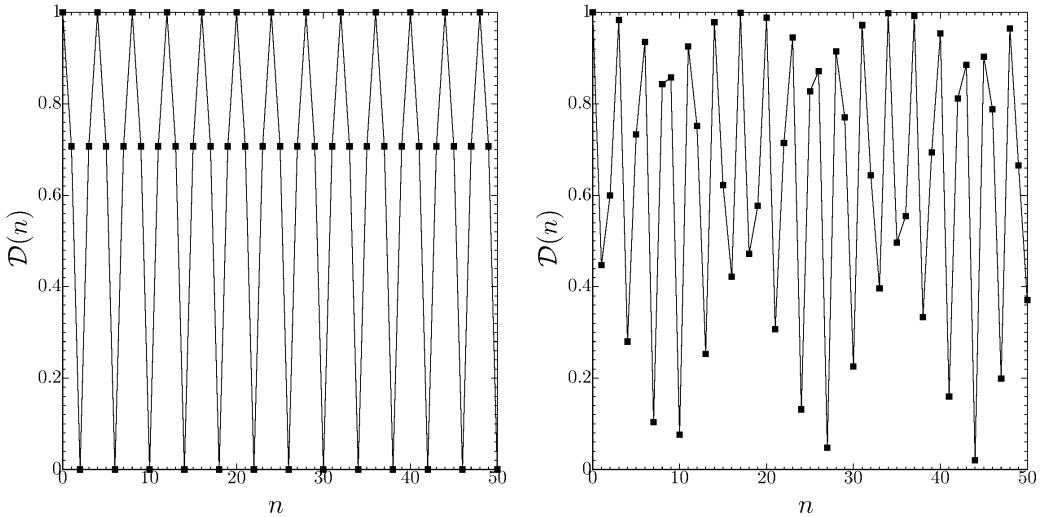


Figura 18 – Traço da distância $\mathcal{D}$ em função do número de colisões n. No cálculo numérico fixamos (a) $p = 0{,}5$ e (b) $p = 0{,}8$ para construírmos duas matrizes $\hat{\rho}_{AB}(0)$, onde na primeira utilizamos $a = b = 1/\sqrt{2}$ e obtivemos $\hat{\rho}_A^1(0)$, enquanto que na segunda usamos $a = 1/\sqrt{2}$ e $b = -1/\sqrt{2}$ para obter $\hat{\rho}_A^2(0)$, cujo procedimento foi discutido na subseção 5.4.1.

Note que na primeira colisão $\mathcal{D} \approx 0{,}706$, e portanto consiste em uma diminuição da distinguibilidade entre os estados $\hat{\rho}_A^1$ e $\hat{\rho}_A^2$. Para $n = 2$ vemos que $\mathcal{D} = 0$, evidenciando um caso de indistinguibilidade total entre os dois estados. Em $n = 3$ o traço da distância é aproximadamente 0,706. Quando $n = 4$ vemos que $\mathcal{D} = 1$, indicando a distinguibilidade completa entre os dois estados. Na quinta colisão $\mathcal{D}$ volta a obter o valor da primeira. A partir de todas estas evidências somos capazes de sumarizar algumas coisas. Em primeiro lugar, o valor de $\mathcal{D}$ é aproximadamente 0,706 sempre que ocorre a passagem entre a indistinguibilidade e distinguibilidade total dos estados. Em segundo lugar, a cada três colisões os estados são completamente distinguíveis. Em terceiro lugar, depois da segunda colisão, a cada três colisões os estados são totalmente indistinguíveis. Isto significa que o sistema apresenta uma dinâmica regular, como é percebido na série temporal da Figura 18(a) [102, 103].

Observemos agora a Figura 18(b). Nela percebemos que a testificação da não markovianidade apresenta um comportamento caótico, devido o caráter irregular apresentado na série temporal de $\mathcal{D}$ em função de n [102, 103], pois os valores de $\mathcal{D}$ podem nunca mais assumir valores anteriores, mas talvez consiga assumir valores próximos aos que já foram registrados.

Em posse do que abordamos nos dois últimos parágrafos e com base nas séries temporais da Figura 18(a-b), vemos que para dois valores distintos de p o traço da distância evidencia uma situação de regularidade ou caos. Perguntamo-nos então se é possível fazermos alusão sobre outros elementos da teoria do caos clássico [83, 84, 102–105] para compreendermos a dinâmica do modelo quântico colisional. Na sequência veremos o desencadear do questionamento aqui levantado.

5.5 Coerência

No estudo da coerência utilizamos a norma da coerência dada na Eq. (2.109) para os cálculos feitos no computador. Nesta seção utilizaremos a mesma estrutura da anterior, onde dividiremos aqui algumas subseções, começando pelo procedimento numérico e na sequência fazendo a discussão dos resultados.

5.5.1 Procedimento computacional

Revisitemos alguns resultados discutidos anteriormente que servem como base para o objetivo desta subseção. **Escolhemos um estado inicial de A maximamente coerente, cujo ket da Eq. (5.35) é dado na base hamiltoniano. Em seguida obtivemos a matriz densidade inicial de A, que está disposta na Eq. (5.37). A forma matricial de $\hat{\rho}_A(0)$ é a mesma da Eq. (5.39). Para o ambiente B escolhemos a matriz densidade dada na Eq. (5.28), cuja forma matricial está expressa**

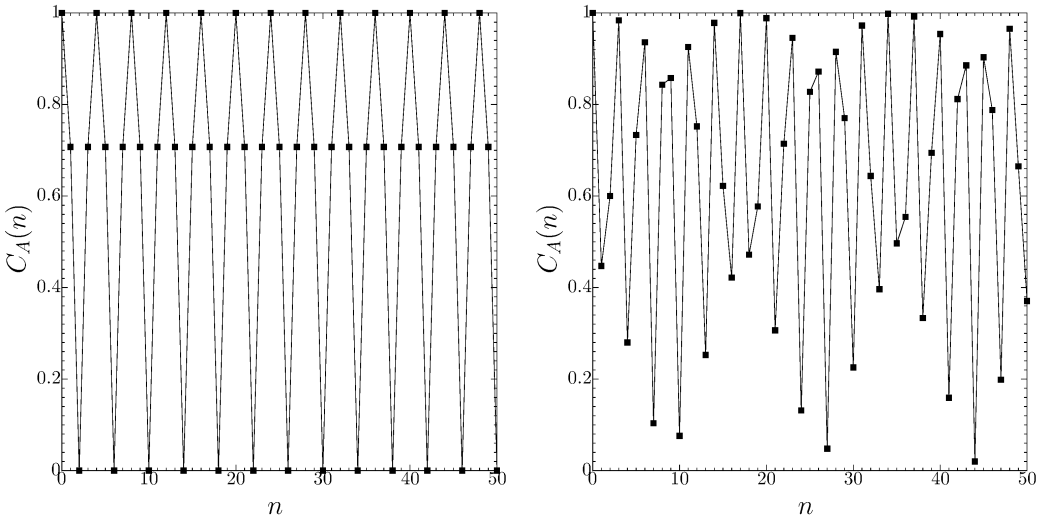
na Eq. (5.41). Por fim, supusemos que os estados iniciais estão descorrelacionados e assim construímos a matriz densidade do sistema composto, como disposto na Eq. (5.42). Em posse do que foi abordado neste parágrafo, prossigamos definindo os passos dos cálculos feitos no computador.

1. Através do procedimento discutido na seção 5.1 calcula-se a matriz densidade reduzida de A ($\hat{\rho}_A$) em cada colisão com o auxílio do CAMAG.
2. É calculada a norma da coerência (C_A), que nada mais é que a soma dos módulos dos elementos fora da diagonal principal de $\hat{\rho}_A$.
3. Num arquivo de dados é escrito o número da colisão (n) e o valor de C_A.
4. Ao final de 3, retoma-se o passo 1 até a quantidade de colisões/iterações desejada.

5.5.2 Discussão dos resultados

Como podemos ver na Figura 19, estão dispostos os gráficos da norma da coerência do sistema A (C_A) em função do número de colisões (n). Mais uma vez recomendamos que o leitor examine a legenda das séries temporais antes de continuar a leitura do texto.

Percebemos na Figura 19(a-b) dois comportamentos distintos nas representações gráficas, que discutiremos a partir do próximo parágrafo.



(a) (b)

Figura 19 – Norma da coerência do sistema A (C_A) em função do número de colisões (n). No cálculo numérico fixamos (a) $p = 0{,}5$ e (b) $p = 0{,}8$ para construirmos a matriz $\hat{\rho}_{AB}(0)$, onde utilizamos $a = b = 1/\sqrt{2}$ e obtivemos $\hat{\rho}_A(0)$. Em seguida, o procedimento feito foi o discutido na subseção 5.5.1.

Comecemos analisando a Figura 19(a). Nela visualizamos um comportamento periódico devido ao caráter da série temporal. Vejamos isso através da descrição do gráfico.

Note que na ausência de colisão a coerência de A é máxima, o que já é esperado, tendo em vista que esta abordagem foi feita no primeiro parágrafo da subseção anterior. Na primeira colisão $C_A \approx 0{,}706$, na segunda colisão $C_A = 0$, na terceira colisão $C_A \approx 0{,}706$ e na quarta $C_A = 1$, quando A volta a ter coerência máxima. Se prosseguirmos nesta discussão, constataremos que para n ímpar C_A sempre valerá aproximadamente 0,706. Já se n é par o sistema principal sempre alterna entre estados maximanemente coerente ($C_A = 1$) e completemente incoerente ($C_A = 0$). Temos aqui um indício de dinâmica não markoviana, pois o mesmo valor perdido da coerência do sistema principal é recuperado inteiramente em outras colisões. Ou seja, o ambiente devolve ao sistema a mesma característica quântica que este possuía. Algo que podemos nos questionar é se esta perda e recuperação exata do valor da coerência, que indica um processo de ida e volta completa da informação, ocorre somente quando a dinâmica é periódica, como no caso aqui discutido.

Agora, analisemos a Figura 19(b). Nela constatamos um comportamento caótico. Note que na ausência de colisão o estado é maximamente coerente, e pelo menos até $n = 50$ o sistema parece não ficar mais incoerente, pois C_A nunca atinge o zero. Percebemos que durante as colisões os valores das perdas e dos ganhos de coerência do sistema não são exatamente iguais, diferenciando assim do caso periódico ($p = 0{,}5$) discutido anteriormente, em que, por exemplo, para n ímpar C_A sempre assumia um valor próximo a 0,706, cuja conclusão foi que o ambiente fazia A perder uma quantidade de coerência e em outra colisão o sistema ganhava o mesmo valor perdido.

5.5.3 Diagramas de coerência

Esta subseção tem por objetivo dar luz à indagação feita no parágrafo anterior: se a recuperação total da coerência do sistema ocorre somente nos casos de dinâmica regular. Para tanto, exploraremos partes de um diagrama do quantificador de coerência em função da probabilidade, que é um análogo do diagrama de bifurcação na teoria do caos clássico. Nosso objetivo é entender se existem outras probabilidades de transição p que ocasionam uma dinâmica caótica ou regular para o *qubit* A.

Observando a Figura 20 poderíamos nos indagar que não existe nenhuma região que indique comportamento regular da coerência do sistema A. Contudo, se olharmos atentamente para a Figura 20, perceberemos que existem algumas frestas verticais, de onde podemos extrair informações. Portanto, fizemos cortes em algumas regiões do diagrama a fim de estudar a dinâmica do sistema principal. Sendo assim, prossigamos com as discussões.

5.5.3.1 Análise da região compreendida em $0{,}5 \leq p \leq 0{,}51$

Observe a Figura 21. Note que em $p = 0{,}5$ os pontos 0, aproximadamente 0,706 e 1 são os únicos assumidos por C_A, e este quantificador vai assumindo diversos pontos

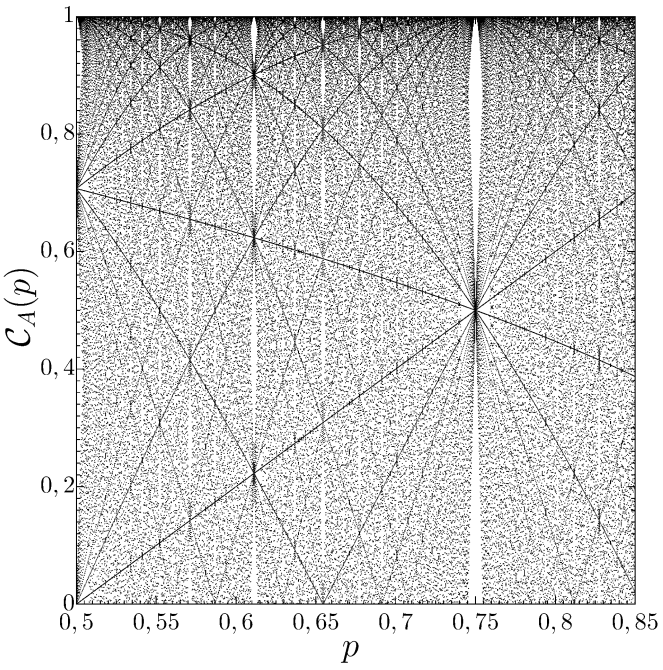


Figura 20 – Diagrama de Coerência do sistema A construído para 100 colisões com o ambiente B. O DC é o análogo do diagrama de bifurcação para sistemas dinâmicos discretos clássicos, como visto no capítulo 4. Nesta Figura as frestas indicam que para algum valor de p a dinâmica de coerência do sistema principal pode ser periódica.

à medida que $p > 0{,}5$. O fato de C_A assumir os três valores anteriormente apresentados quando $p = 0{,}5$, lembra-nos a evidência de uma órbita periódica no diagrama de bifurcação de sistemas dinâmicos discretos clássicos. No caso quântico, identificamos a dinâmica periódica observando a série temporal da Figura 19(a), onde os pontos de C_A se alternam sempre nos mesmos valores descritos anteriormente, descrevendo uma órbita de período 4.

Já que abordamos o comportamento periódico na dinâmica de coerência para o sistema A, é possível constatarmos um caráter caótico do *qubit* principal quando analisamos outro valor da probabilidade? Sim, em $p = 0,509$. Perceba na Figura 21 que existe uma grande quantidade de pontos sobre a reta $p = 0,509$. Podemos ver o efeito de caos na série temporal da Figura 22 através de C_A em função de n, onde o quantificador de coerência assume valores diferentes até $n = 50$.

Na próxima sub-subseção analisaremos outro corte no diagrama da Figura 20 para fazermos discussões semelhantes as daqui.

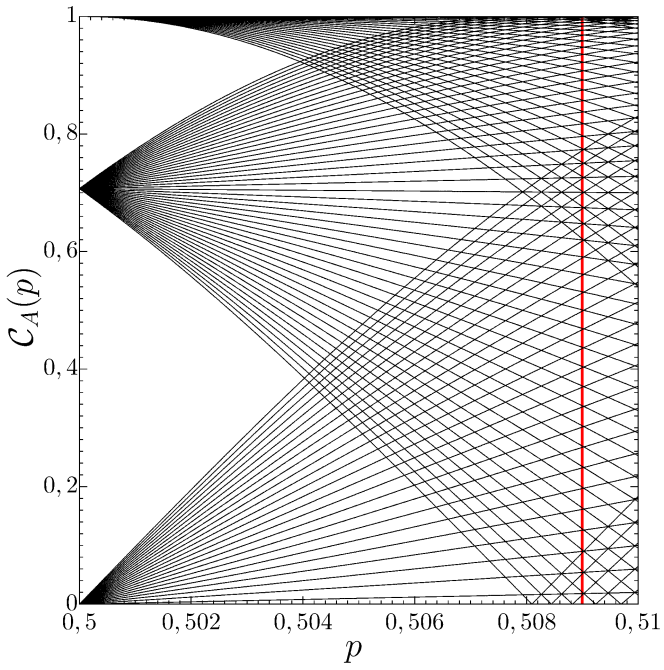


Figura 21 – Corte da uma região do DC da Figura 20 no intervalo de $0{,}5 \leq p \leq 0{,}51$ para 100 colisões entre o sistema A e ambiente B. A reta em vermelho está posicionada em $p = 0{,}509$.

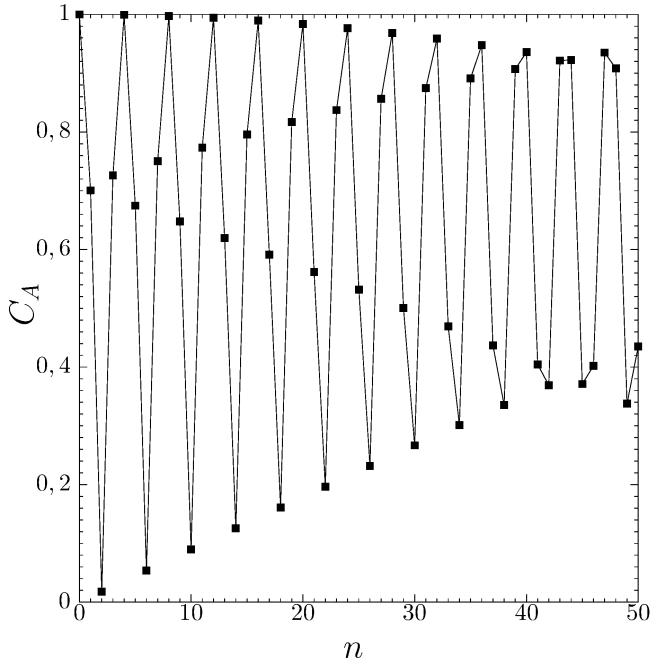


Figura 22 – Gráfico construído para uma dinâmica com 50 colisões entre o sistema A e o ambiente B, usando $p = 0{,}509$. Vemos a série temporal do quantificador de coerência do sistema principal em função do número de colisões.

5.5.3.2 Análise da região compreendida em $0{,}75 \leq p \leq 0{,}81$

Perceba na Figura 23, que em $p = 0{,}75$ o quantificador de coerência do sistema principal assume dois valores: 0,5 e 1. Podemos elucidar este fato com o análogo de uma

órbita periódica no diagrama de bifurcação para um sistema dinâmico discreto clássico.

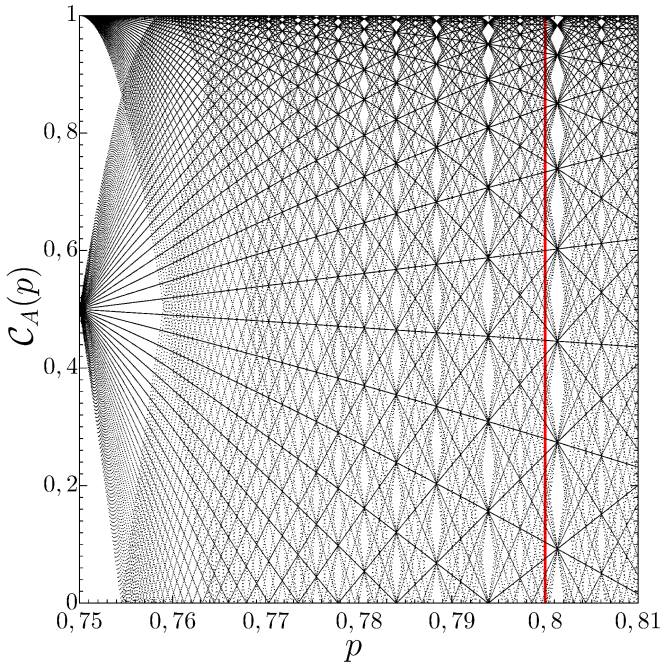


Figura 23 – Corte da uma região do DC da Figura 20 no intervalo de $0{,}75 \leq p \leq 0{,}81$ para 100 colisões (iterações) entre o sistema A e ambiente B. A reta em vermelho está posicionada em $p = 0,8$.

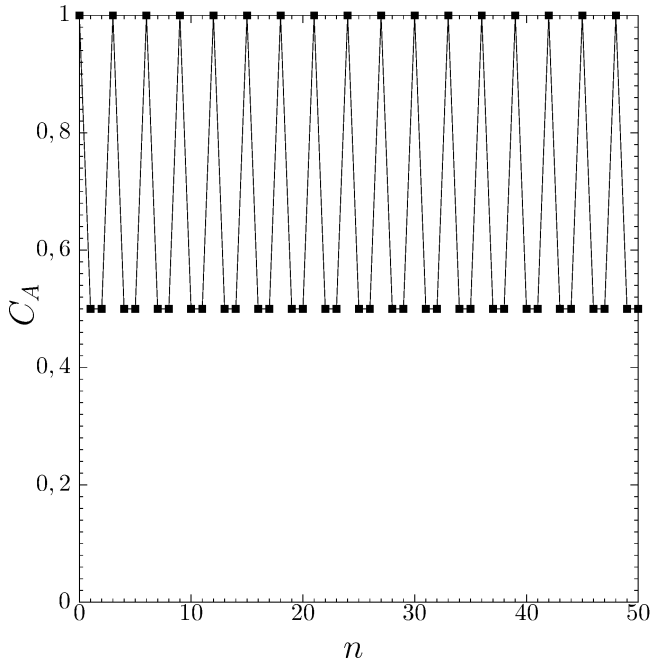


Figura 24 – Gráfico construído para uma dinâmica com 50 colisões entre o sistema A e o ambiente B, usando $p = 0{,}75$. Vemos a série temporal do quantificador de coerência do sistema principal em função do número de colisões.

A partir da Figura 24 notamos que durante a dinâmica periódica, o ganho ou

a perda da coerência do sistema A possui sempre e exatamente os dois valores citados anteriormente, e isto caracteriza uma dinâmica não markoviana, semelhantemente ao caso de $p = 0{,}5$ da Figura 19(a), cuja discussão foi feita na seção 5.5.2.

Na Figura 23, podemos indicar um valor da probabilidade para o qual A possui uma dinâmica caótica? Sim, em $p = 0{,}8$, onde uma reta está destacada em vermelho. Em tal parâmetro vemos uma distribuição enorme de pontos, cuja dinâmica indica que durante a iteração do sistema, C_A assume diversos valores. Devido a isto, o caos é evidenciado na série temporal da Figura 19(b), como discutido anteriormente.

Podemos identificar a caoticidade dinâmica de A com um outro viés, observando o gráfico da Figura 25. Vemos que existem cinquenta pontos distribuídos no diagrama $C_A \times C_B$ associados a cada colisão, o que nos lembra o espaço de fases caótico de um sistema dinâmico discreto clássico.

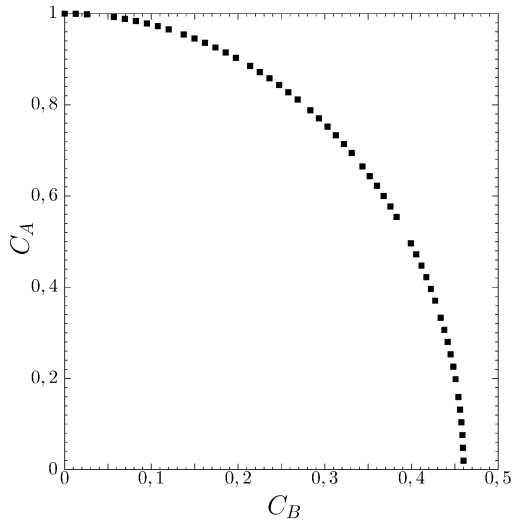


Figura 25 – Norma da coerência do sistema A em função da norma da coerência do ambiente B para $p = 0{,}8$, construído para uma dinâmica com 50 colisões de A com B. Notamos a desordem na dinâmica da coerência, devido à distribuição dos pontos apresentada no gráfico que nos remete ao espaço de fases dos sistemas dinâmicos discretos clássicos para comportamento caótico, como visto no Capítulo 4.

5.6 Emaranhamento

A partir de agora estudaremos o emaranhamento que eventualmente pode surgir durante o processo colisional dos *qubits* A e B. Estruturaremos esta seção de forma análoga às anteriores, ou seja, começaremos a abordagem pelo procedimento computacional e em seguida discutiremos os resultados obtidos.

5.6.1 Procedimento computacional

Para efetuação dos cálculos no computador utilizamos a expressão da negatividade do emaranhamento, dada na Eq. (2.88). Peço que o leitor volte à seção 5.5.1 e releia o trecho em negrito no primeiro parágrafo. Feito isso, é possível entendermos os passos que são executados no computador para obtenção dos resultados, como será descrito na sequência.

1. Através do procedimento discutido na seção 5.1 calculamos a matriz densidade do sistema composto em cada colisão com o auxílio do CAMAG.
2. A partir da matriz densidade do sistema composto, é construída a matriz transposta parcial de A ($\hat{\rho}^{T_A}$).
3. São calculados os autovalores λ_i de $\hat{\rho}^{T_A}$.
4. Se $\lambda_i < 0$, então calcula-se $\mathcal{N}(\hat{\rho}) = \sum_i[|\lambda_i| - \lambda_i]/2$.
5. Num arquivo de dados é escrito o número da colisão (n) e o valor de $\mathcal{N}(\hat{\rho})$.
6. Ao final de 5, retoma-se o passo 1 até a quantidade de colisões/iterações desejada.

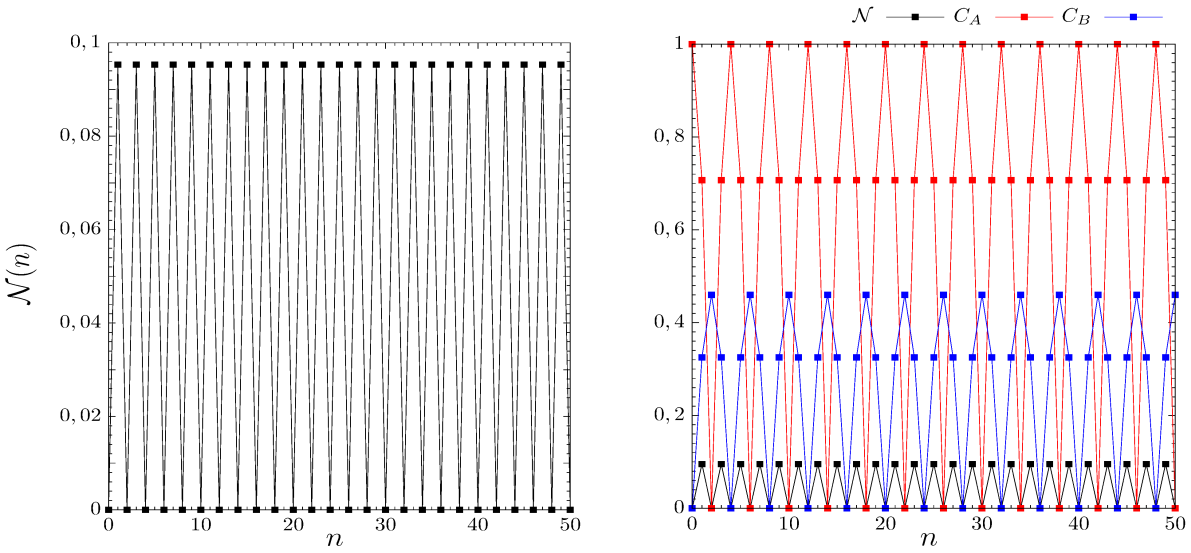
5.6.2 Discussão dos resultados

Nesta subseção faremos uma investigação sobre emaranhamento juntamente com as coerências do sistema principal e do ambiente. Sendo assim, escolhemos dois valores para as probabilidades de transição dos níveis de energia, sendo $p = 0{,}5$ o caso de comportamento periódico e $p = 0{,}8$ o de comportamento caótico.

5.6.2.1 Análise para o caso de $p = 0{,}5$

Na Figura 26(a) percebemos que a série temporal apresenta um comportamento periódico da negatividade do emaranhamento, pois os valores se alternam entre $\mathcal{N}(n) = 0$ quando n é par e $\mathcal{N}(n) \approx 0{,}095$ quando n é ímpar. No primeiro caso percebemos que a colisão entre A e B tornam o sistema composto separável, enquanto que na situação de $\mathcal{N}(n) \approx 0{,}095$ os *qubits* estão com um certo grau de emaranhamento.

Observemos agora a Figura 26(b), onde estão postos os pontos de $\mathcal{N}$ em preto, C_A em vermelho e C_B em azul como função do número de colisões. Note que na primeira colisão, quando ocorre o emaranhamento, $C_A \approx 0{,}706$ e $C_B \approx 0{,}322$, ou seja, na interação os dois *qubits* possuem coerência. Já na segunda colisão em que $\mathcal{N} = 0$, vemos que $C_A = 0$ e $C_B \approx 0{,}454$, onde esta é a maior coerência obtida pelo ambiente. Quando $n = 3$ surge então o emaranhamento, fazendo com que C_A e C_B assumam os mesmos valores da primeira colisão. Na quarta colisão $\mathcal{N} = 0$, $C_B = 0$ e $C_A = 1$, implicando que o estado do sistema é



(a) (b)

Figura 26 – (a) Negatividade do emaranhamento $\mathcal{N}$ em função do número de colisões n. No cálculo numérico utilizamos o procedimento descrito na subseção 5.6.1, onde fixamos $p = 0{,}5$. Em (b) estão postos os pontos de $\mathcal{N}$ em preto, C_A em vermelho e C_B em azul como função de n. O procedimento computacional para calcular os quantificadores de coerência foi o mesmo descrito na seção 5.5.1.

maximamente coerente. A partir da Figura 26(b) e das discussões anteriores, sumarizamos que se n é ímpar, sistema e ambiente estão emaranhados e portanto ambos possuem coerência. Já se n é par somente um dos dois *qubits* possui maior grau de coerência, corroborando assim com a teoria, pois nestas circunstâncias o emaranhamento não deve existir.

5.6.2.2 Análise para o caso de $p = 0{,}8$

Percebemos na Figura 27(a) um comportamento desordenado na série temporal da negatividade do emaranhamento $\mathcal{N}$ em função do número de colisões n. Nestas circunstâncias $\mathcal{N}$ parece não mais atingir o valor nulo, exceto em $n = 0$ e $n = 17$, quando sistema e ambiente estão descorrelacionados. O caos apresentado na Figura 27(a) implica que durante a dinâmica os *qubits* A e B estão sempre emaranhados.

Como podemos observar os efeitos do emaranhamento no caso $p = 0{,}8$? Através das coerências do sistema A e ambiente B na Figura 27(b), cujos pontos de $\mathcal{N}$ em preto, C_A em vermelho e C_B em azul estão em função do número de colisões n. Note que durante a dinâmica da coerência os valores para A e B não são maximamente coerentes ou completamente incoerentes, mas percebemos que $C_A, C_B \neq 0$, e a justificativa disso está no fato do sistema e do ambiente sempre estarem emaranhados. Nestas circunstâncias vemos que não podemos manipular sistema ou ambiente para extraírmos ao máximo a coerência

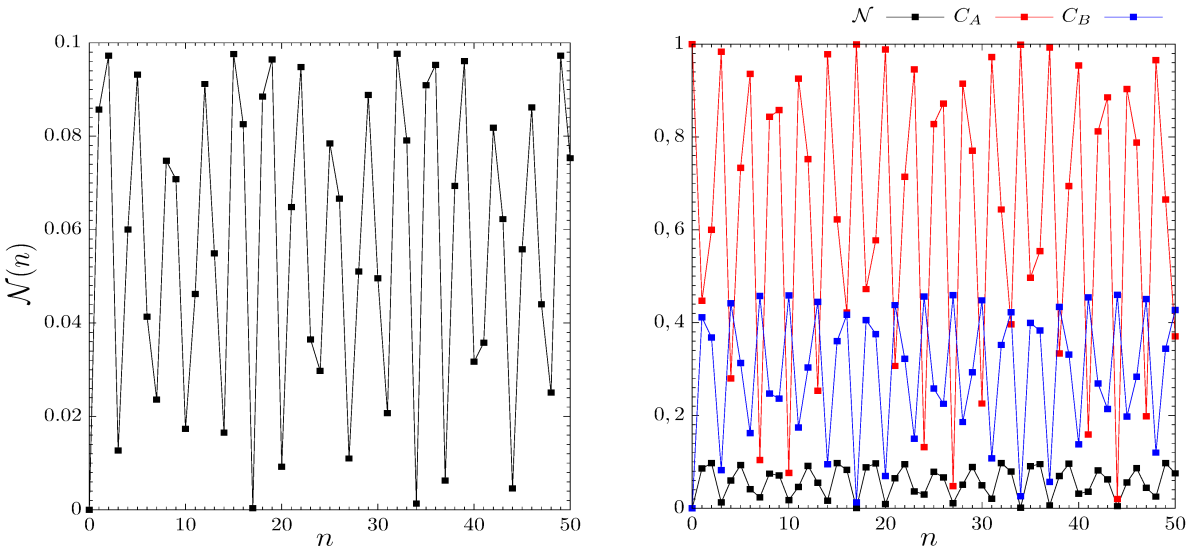


Figura 27 – (a) Negatividade do emaranhamento $\mathcal{N}$ em função do número de colisões n. No cálculo numérico utilizamos o procedimento descrito na subseção 5.6.1, onde fixamos $p = 0{,}8$. Em (b) estão postos os pontos de $\mathcal{N}$ em preto, C_A em vermelho e C_B em azul estão em função de n. O procedimento computacional para calcular os quantificadores de coerência foi o mesmo descrito na seção 5.5.1.

de cada um deles. Indagamo-nos sobre isto, pois em uma dinâmica periódica ($p = 0{,}5$) notamos que é possível sabermos quando ocorre emaranhamento e como podemos controlá-lo, a fim de potencializarmos a coerência do sistema ou ambiente. Desta forma, percebemos que se distinguirmos a dinâmica caótica da periódica, somos capazes de manipular *qubits* com eficiência, podendo, por exemplo, maximizar a coerência de um sistema. Chegamos nesta concepção a partir dos valores que são atribuídos à probabilidade de transição, que é o parâmetro que estamos utilizando para analisar a dinâmica do sistema. No nosso estudo se $p = 0{,}5$, por exemplo, podemos saber em quais momentos a coerência do sistema é máxima ou mínima e em quais intervalos de colisão isso ocorre.

CAPÍTULO 6

TRANSIÇÃO DA DINÂMICA NÃO MARKOVIANA PARA A MARKOVIANA

Neste capítulo buscaremos entender como um *qubit* representando o sistema principal se comporta frente ao aumento de constituintes do ambiente, ou seja, quando se acrescenta mais um ou dois *qubits* no estado térmico ao modelo apresentado no capítulo anterior. O objetivo da investigação é responder ao seguinte questionamento: qual a influência do tamanho do ambiente na transição da dinâmica não markoviana para a markoviana? Sendo assim, apresentaremos os modelos e os estudos do traço da distância e da coerência, levando em consideração o emaranhamento, como veremos a seguir.

6.1 Modelo físico para o ambiente de dois *qubits*

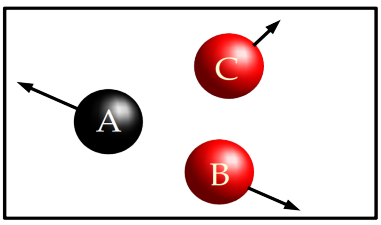


Figura 28 – *Qubits* A, B e C dentro de uma caixa interagindo via colisões.

Considere a mesma situação descrita na seção 5.1, onde tínhamos os *qubits* A e B, que representavam o sistema principal e o ambiente, respectivamente. Agora, acrescentamos ao ambiente um *qubit* C que é idêntico a B, isto é, também está no estado térmico

com os mesmos pesos probabilísticos de estar no estado fundamental e excitado. Nestas circunstâncias, as interações ocorrem entre A e B, A e C e B e C, como podem ser vistas na Figura 28.

Consideramos que A possui operadores hamiltoniano $\hat{H}_A = E_f \left|f\right\rangle \left\langle f\right| + E_e \left|e\right\rangle \left\langle e\right|$ e densidade $\hat{\rho}_A = \left|a\right|^2 \left|f\right\rangle \left\langle f\right| + ab^* \left|f\right\rangle \left\langle e\right| + a^* b \left|e\right\rangle \left\langle f\right| + \left|b\right|^2 \left|e\right\rangle \left\langle e\right|$. O *qubit* B tem operador de energia $\hat{H}_B = \mathcal{E}_f \left|\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle \mathcal{E}_f\right| + \mathcal{E}_e \left|\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle \mathcal{E}_e\right|$ e operador densidade $\hat{\rho}_B = w_f \left|\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle \mathcal{E}_f\right| + w_e \left|\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle \mathcal{E}_e\right|$. Semelhantemente, C possui operador hamiltoniano $\hat{H}_C = \mathcal{E}_f \left|\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle \mathcal{E}_f\right| + \mathcal{E}_e \left|\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle \mathcal{E}_e\right|$ e operador densidade $\hat{\rho}_C = w_f \left|\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle \mathcal{E}_f\right| + w_e \left|\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle \mathcal{E}_e\right|$. O operador hamiltoniano do sistema total é $\hat{H}_{ABC}$, cuja base dos autoestados de energia é

$$\begin{aligned} \{&\left|f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f\right\rangle, \left|f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e\right\rangle, \left|f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_f\right\rangle, \left|f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_e\right\rangle, \\ &\left|e, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f\right\rangle, \left|e, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e\right\rangle, \left|e, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_f\right\rangle, \left|e, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_e\right\rangle\}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Ressaltamos que o primeiro termo dentro de cada ket se refere ao *qubit* A, o segundo termo ao B e o terceiro ao C. Se inicialmente considerarmos que os *qubits* estão descorrelacionados, então o operador densidade inicial do sistema composto será $\hat{\rho}_{ABC}(0) = \hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_B(0) \otimes \hat{\rho}_C(0)$.

A partir de agora analisaremos a dinâmica do sistema composto. Assim, em cada colisão devemos ter uma matriz unitária que atue nos dois *qubits* em questão. Portanto, se a colisão ocorre entre A e B, a matriz unitária é $\hat{U}_1$. Já se a colisão é entre A e C, a matriz unitária é $\hat{U}_2$. Por fim, dada a colisão entre B e C, a matriz unitária é $\hat{U}_3$. As colisões ocorrem de forma aleatória, e para que possamos compreender melhor a ideia da dinâmica, vamos considerar um processo colisional na seguinte ordem: (i) A e B, (ii) A e B, (iii) B e C e (iv) A e C.

(i) Colisão entre A e B:

$$\hat{\rho}_{ABC}(0) \to \hat{\rho}_{ABC}(1) = \hat{U}_1 \Big(\hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_B(0) \otimes \hat{\rho}_C(0)\Big) \hat{U}_1^\dagger. \tag{6.2}$$

(ii) Colisão entre A e B:

$$\hat{\rho}_{ABC}(1) \to \hat{\rho}_{ABC}(2) = \hat{U}_1^2 \Big(\hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_B(0) \otimes \hat{\rho}_C(0)\Big) \hat{U}_1^{\dagger 2}. \tag{6.3}$$

(iii) Colisão entre B e C:

$$\hat{\rho}_{ABC}(2) \to \hat{\rho}_{ABC}(3) = \hat{U}_3 \hat{U}_1^2 \Big(\hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_B(0) \otimes \hat{\rho}_C(0)\Big) \hat{U}_1^{\dagger 2} \hat{U}_3^\dagger. \tag{6.4}$$

(iv) Colisão entre A e C:

$$\hat{\rho}_{ABC}(3) \rightarrow \hat{\rho}_{ABC}(4) = \hat{U}_2\hat{U}_3\hat{U}_1^2\Big(\hat{\rho}_A(0)\otimes\hat{\rho}_B(0)\otimes\hat{\rho}_C(0)\Big)\hat{U}_1^{\dagger 2}\hat{U}_3^{\dagger}\hat{U}_2^{\dagger}. \tag{6.5}$$

Perceba que durante o processo descrito já consideramos os efeitos do emaranhamento, pois quando um *qubit* colide com outro não somos capazes de garantir que eles estão descorrelacionados. Por fim, a cada colisão efetuada, os estados dos *qubits* são determinados pelo traço parcial como

$$\hat{\rho}_A(n) = Tr_{BC}\Big[\hat{\rho}_{ABC}(n)\Big], \tag{6.6}$$

$$\hat{\rho}_B(n) = Tr_{AC}\Big[\hat{\rho}_{ABC}(n)\Big], \tag{6.7}$$

e

$$\hat{\rho}_C(n) = Tr_{AB}\Big[\hat{\rho}_{ABC}(n)\Big]. \tag{6.8}$$

6.2 Construção das matrizes unitárias para dinâmica do ambiente composto por dois *qubits*

Para cada colisão existe um conjunto de equações que determinam como ou não ocorrem as transições de energia entre os *qubits* que interagem. Assim, a partir de cada situação é possível montar as matrizes unitárias descritas na seção anterior. Em posse disso, basearemo-nos na dinâmica descrita para dois *qubits* que foi apresentada na seção 5.2 para o CAMAG.

6.2.1 Colisão entre A e B

Para esta circunstância, temos o seguinte cenário:

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \rightarrow |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.9}$$

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \rightarrow |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{6.10}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \rightarrow \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.11}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \rightarrow \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{6.12}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \rightarrow \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.13}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \rightarrow \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{6.14}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \rightarrow |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.15}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \rightarrow |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,. \tag{6.16}$$

Analogamente ao que se viu na seção 5.2, as Eqs. (6.9), (6.10), (6.15) e (6.16) significam que os estados dos *qubits* não são alterados com a colisão. Já as Eqs. (6.11), (6.12), (6.13) e (6.14) significam que nas colisões pode ocorrer probabilidade $1-p$ dos estados não serem alterados ou p de acontecer a transição dos níveis de energia.

Em posse das oito últimas equações, definimos o operador unitário como

$$\begin{aligned}\hat{U}_1 =& |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| \\ &+ |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e|\,.\end{aligned} \tag{6.17}$$

A partir da Eq. (6.17) faremos algumas verificações para $\hat{U}_1$.

- **Verificação da unitariedade de $\hat{U}_1$.**

Da Eq. (6.17) temos que

$$\begin{aligned}\hat{U}_1^\dagger =& |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| - \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| - \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| + \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| \\ &+ |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e|\,.\end{aligned} \tag{6.18}$$

Portanto, das Eqs. (6.18) e (6.17) obtemos

$$\begin{aligned}\hat{U}_1\hat{U}_1^\dagger =& |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| \\ &+ |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| \\ &+ |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| \\ &+ |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| = \hat{I}.\end{aligned} \tag{6.19}$$

Analogamente, concluiremos que

$$\begin{aligned}\hat{U}_1^\dagger \hat{U}_1 = &|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| \\ &+ |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| \\ &+ |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| \\ &+ |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| = \hat{I}.\end{aligned} \tag{6.20}$$

Portanto $\hat{U}_1$ é unitário.

Vamos analisar se a aplicação de $\hat{U}_1$ nos estados do lado esquerdo da seta nas Eqs. (6.9) a (6.16) resulta nos kets do lado direito destas, satisfazendo assim o postulado 2 da mecânica quântica.

- **Verificação da aplicação de $\hat{U}_1$ para Eq. (6.9).**

  Note que das Eqs. (6.9) e (6.17), temos que

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to \hat{U}_1|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle = |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f|\, f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle = |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle. \tag{6.21}$$

Ou seja, a transformação unitária satisfaz a Eq. (6.9).

- **Verificação da aplicação de $\hat{U}_1$ para Eq. (6.10).**

  Note que das Eqs. (6.10) e (6.17), temos que

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to \hat{U}_1|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle = |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e|\, f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle = |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle. \tag{6.22}$$

Ou seja, a transformação unitária satisfaz a Eq. (6.10).

- **Verificação da aplicação de $\hat{U}_1$ para Eq. (6.11).**

  Note que das Eqs. (6.11) e (6.17), temos que

$$\begin{aligned}|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \hat{U}_1|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle &= \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f|\, f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \\ &\quad - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f|\, f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \\ &= \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle.\end{aligned} \tag{6.23}$$

Ou seja, a transformação unitária satisfaz a Eq. (6.11).

- **Verificação da aplicação de $\hat{U}_1$ para Eq. (6.12).**

Note que das Eqs. (6.12) e (6.17), temos que

$$\begin{aligned} |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to \hat{U}_1\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle &= \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e|\,f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \\ &\quad - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e|\,f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \\ &= \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Ou seja, a transformação unitária satisfaz a Eq. (6.12).

- **Verificação da aplicação de $\hat{U}_1$ para Eq. (6.13).**

Note que das Eqs. (6.13) e (6.17), temos que

$$\begin{aligned} |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to \hat{U}_1\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle &= \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f|\,e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \\ &\quad + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f|\,e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \\ &= \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Ou seja, a transformação unitária satisfaz a Eq. (6.13).

- **Verificação da aplicação de $\hat{U}_1$ para Eq. (6.14).**

Note que das Eqs. (6.14) e (6.17), temos que

$$\begin{aligned} |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to \hat{U}_1\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle &= \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e|\,e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \\ &\quad + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e|\,e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \\ &= \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Ou seja, a transformação unitária satisfaz a Eq. (6.14).

- **Verificação da aplicação de $\hat{U}_1$ para Eq. (6.15).**

Note que das Eqs. (6.15) e (6.17), temos que

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \hat{U}_1\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle = |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f|\,e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle = |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,. \tag{6.27}$$

Ou seja, a transformação unitária satisfaz a Eq. (6.15).

- **Verificação da aplicação de $\hat{U}_1$ para Eq. (6.16).**

Note que das Eqs. (6.16) e (6.17), temos que

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to \hat{U}_1\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle = |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e|\,e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle = |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,. \tag{6.28}$$

Ou seja, a transformação unitária satisfaz a Eq. (6.16).

Com este último resultado, comprovamos que a transformação unitária aqui apresentada satisfaz as Eqs. (6.9), (6.10), (6.11), (6.12), (6.13), (6.14), (6.15) e (6.16). Assim, temos a matriz

$$\hat{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-p} & 0 & \sqrt{p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1-p} & 0 & \sqrt{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{p} & 0 & \sqrt{1-p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{p} & 0 & \sqrt{1-p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.29}$$

6.2.2 Colisão entre A e C

Seguindo a lógica da subseção anterior, iremos efetuar uma sequência de passos até construir a matriz unitária da transformação $\hat{U}_2$, associada a colisão entre os *qubits* A e C.

$$|f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f\rangle \to |f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.30}$$

$$|f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.31}$$

$$|f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_f\rangle \to |f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.32}$$

$$|f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.33}$$

$$|e, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{6.34}$$

$$|e, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e\rangle \to |e, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{6.35}$$

$$|e, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{6.36}$$

$$|e, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_e\rangle \to |e, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_e\rangle\,. \tag{6.37}$$

Assim, como visto na subseção antecedente a esta, as equações anteriores representam a probabilidade de ocorrer transição entre níveis de energia ou não, bem como casos

em que a colisão não altera os estados quânticos, a exemplo da Eq. (6.30). Ainda com base nas oito últimas equações, construímos o operador unitário da transformação como

$$\begin{aligned}\hat{U}_2 = &|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| \\ &+ |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e|\,.\end{aligned} \tag{6.38}$$

Tomando $\hat{U}_2^\dagger$ na última equação, garantimos que $\hat{U}_2\hat{U}_2^\dagger = \hat{U}_2^\dagger\hat{U}_2 = \hat{I}$, comprovando assim a unitaridade de $\hat{U}_2$. Além disso, asseguramos que $\hat{U}_2$ satisfaz as Eqs. (6.30) à (6.37). Feitas as discussões anteriores, temos que a matriz de $\hat{U}_2$ é

$$\hat{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} & 0 & 0 & \sqrt{p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1-p} & 0 & 0 & \sqrt{p} & 0 \\ 0 & -\sqrt{p} & 0 & 0 & \sqrt{1-p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{p} & 0 & 0 & \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.39}$$

6.2.3 Colisão entre B e C

Para finalizar a situação de colisões entre *qubits*, vamos construir a matriz $\hat{U}_3$ que considera a interação entre B e C. Para tanto, observe a seguir as possibilidades de transição entre os estados.

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.40}$$

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.41}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{6.42}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{6.43}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.44}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.45}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{6.46}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,. \tag{6.47}$$

Com base nas oito últimas equações, construamos o operador $\hat{U}_3$, assim como fizemos nas duas últimas subseções:

$$\begin{aligned}\hat{U}_3 = {} & |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| - \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| \\ & + \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| \\ & + |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| \\ & + \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e|\,.\end{aligned} \tag{6.48}$$

A partir do adjunto de $\hat{U}_3$, asseguramos que $\hat{U}_3\hat{U}_3^\dagger = \hat{U}_3^\dagger\hat{U}_3 = \hat{I}$, satisfazendo assim a condição de operador unitário. Além do mais, garantimos que $\hat{U}_3$ não viola as Eqs. (6.40) até (6.47). Por fim, temos que a matriz de $\hat{U}_3$ é

$$\hat{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} & \sqrt{p} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{p} & \sqrt{1-p} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{1-p} & \sqrt{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{p} & \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.49}$$

6.3 Construção da matriz densidade inicial envolvendo o ambiente de dois *qubits*

Assim como no caso do capítulo anterior, consideraremos o operador densidade inicial do sistema principal A dado como

$$\hat{\rho}_A(0) = |a|^2\,|f\rangle\langle f| + ab^*\,|f\rangle\langle e| + a^*b\,|e\rangle\langle f| + |b|^2\,|e\rangle\langle e|\,. \tag{6.50}$$

Já para o ambiente constituído por dois *qubits* idênticos, os operadores densidade destes estão inicialmente no estado térmico, tal que

$$\hat{\rho}_B(0) = \hat{\rho}_C(0) = w_f\,|\mathcal{E}_f\rangle\langle\mathcal{E}_f| + w_e\,|\mathcal{E}_e\rangle\langle\mathcal{E}_e|\,. \tag{6.51}$$

Considerando que os estados iniciais estão descorrelacionados, escrevemos que o estado total dos três *qubits* é dado por

$$\hat{\rho}_{ABC}(0) = \hat{\rho}_A(0)\otimes\hat{\rho}_B(0)\otimes\hat{\rho}_C(0). \tag{6.52}$$

Portanto, substituindo as Eqs. (6.50) e (6.51) na Eq. (6.52), obtemos

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{ABC}(0) = &|a|^2 w_f^2 \,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |a|^2 w_f w_e \,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| \\ &+ |a|^2 w_f w_e \,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |a|^2 w_f^2 \,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| \\ &+ ab^* w_f^2 \,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + ab^* w_f w_g \,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| \\ &+ ab^* w_e^2 \,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| + ab^* w_f w_e \,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| \\ &+ a^* b w_f^2 \,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + a^* b w_f w_e \,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_{ef},\mathcal{E}_e| \\ &+ a^* b w_f w_e \,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + a^* b w_e^2 \,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| \\ &+ |b|^2 w_f^2 \,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |b|^2 w_f w_e \,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| \\ &+ |b|^2 w_f w_e \,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |b|^2 w_e^2 \,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e|\,.\end{aligned} \tag{6.53}$$

A representação matricial do estado inicial composto é dada por

$$\hat{\rho}_{ABC}(0) = \begin{pmatrix} |a|^2 w_f^2 & 0 & 0 & 0 & ab^* w_f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |a|^2 w_f w_e & 0 & 0 & 0 & ab^* w_f w_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |a|^2 w_f w_e & 0 & 0 & 0 & ab^* w_f w_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |a|^2 w_e^2 & 0 & 0 & 0 & ab^* w_e^2 \\ a^* b w_f^2 & 0 & 0 & 0 & |b|^2 w_f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^* b w_f w_e & 0 & 0 & 0 & |b|^2 w_f w_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^* b w_f w_e & 0 & 0 & 0 & |b|^2 w_f w_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^* b w_e^2 & 0 & 0 & 0 & |b|^2 w_e^2 \end{pmatrix}. \tag{6.54}$$

6.4 Traço da distância para o ambiente composto por dois *qubits*

Para os resultados que serão discutidos, utilizaremos os mesmos parâmetros do caso de dois *qubits*. Ou seja, o ambiente com os *qubits* B e C possuem pesos probabilísticos $w_f = 0{,}73$ e $w_e = 0{,}27$, referentes aos operadores densidade no estado térmico.

6.4.1 Procedimento computacional

Para compreensão do processo computacional utilizado nos resultados a serem discutidos, recomendamos que o leitor volte a subseção 5.4.1, mais precisamente no primeiro parágrafo, e leia o texto até a Eq. (5.41), onde definimos a forma das matrizes densidade do sistema principal a partir de estados ortogonais. Feita a leitura recomendada, temos embasamento para construir duas matrizes densidade iniciais do sistema composto com base nas Eqs. (5.39), (5.40) e (5.41), atentando que esta última é a mesma para B e C.

Para os estados ortonormais de A, a partir da Eq. (6.54) definimos $\hat{\rho}^1_{ABC}(0)$ a partir dos parâmetros $a = b = 1/\sqrt{2}$. Já para $\hat{\rho}^2_{ABC}(0)$ usaremos $a = 1/\sqrt{2}$ e $b = -1/\sqrt{2}$. Com

base nisso, vejamos a seguir os passos computacionais empregados para obtenção do traço da distância em função das iterações.

1. A partir do procedimento discutido na seção 6.1, estipulamos condições para que as colisões entre A e B, A e C e B e C ocorram aleatoriamente, onde a cada interação existe uma matriz unitária associada, respectivamente dadas por $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$ e $\hat{U}_3$. Feita uma dessas interações, calcula-se as matrizes densidade reduzidas $\hat{\rho}_A^1$ e $\hat{\rho}_A^2$.
2. Define-se a matriz $\hat{M} = \hat{\rho}_A^1 - \hat{\rho}_A^2$.
3. São calculados os autovalores γ_j de $\hat{M}$.
4. É calculado $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\sum_j |\gamma_j|$.
5. Num arquivo de dados é escrito o número da colisão (n) e o valor de $\mathcal{D}$.
6. Ao final de 5, retoma-se o passo 1 até a quantidade de colisões/iterações desejada.

6.4.2 Discussão de resultados

A Figura 29(a) se refere ao caso do capítulo 5, onde tínhamos a colisão entre o sistema principal A e B, o único constituinte do ambiente. Neste estudo percebemos que a depender da probabilidade de transição (p) entre os estados dos *qubits*, a dinâmica não markoviana pode ser regular ou caótica, que no caso da Figura 29(a), representa a primeira opção com $p = 0,5$, onde consideramos 100 colisões.

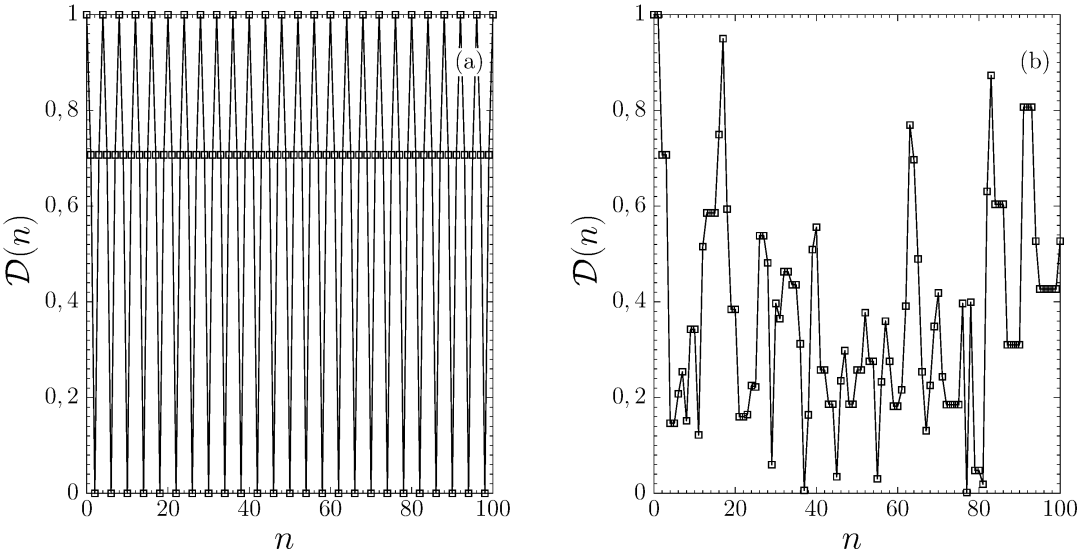


Figura 29 – Traço da distância $\mathcal{D}$ em função das iterações n. As imagens (a) e (b) se referem aos casos das colisões envolvendo dois e três *qubits*, respectivamente. Utilizamos os parâmetros $p = 0{,}5$, $a = b = 1/\sqrt{2}$, $w_f = 0{,}73$ e $w_e = 0{,}27$.

Observe agora a Figura 29(b). O resultado dela deve-se ao acréscimo de um *qubit* C ao ambiente, que antes só possuía B. As características de B e C são idênticas, como discutido anteriormente. Neste procedimento também utilizamos $p = 0,5$. Percebemos que o traço da distância apresenta oscilação ao longo das iterações indicando assim uma dinâmica não markoviana. Além disso, ao comparar as duas imagens da Figura 29 observamos que ocorre uma transição entre a dinâmica periódica para a caótica. Ainda que modifiquemos os valores para probabilidade de transição, a não markoviandade estará presente de forma caótica nas séries temporais do traço da distância, como pode ser visto na Figura 30 para $p > 0$.

É interessante observar que na situação da Figura 30(a), onde $p = 0$, não ocorre transição de estados dos níveis energéticos para nenhum dos *qubits*, implicando no valor constante de $\mathcal{D}(n) = 1$, ou seja, total distinguibilidade dos estados. Observando os outros gráficos da Figura 30(b,d,e,h) para o conjunto $p = \{0{,}1, 0{,}3, 0{,}4, 0, `8\}$, respectivamente, percebemos casos de uma diminuição substancial nos valores do traço da distância, e portanto uma diminuição na distinguibilidade dos estados que fica variando de forma caótica.

Na Figura 30(j) percebemos que o sistema principal possui inicialmente estados completamente distinguíveis. Com as interações, tal distinguibilidade diminui e às vezes é totalmente retomada quando $\mathcal{D}(n) = 1$.

6.5 Coerência para o ambiente composto por dois *qubits*

Na seção anterior abordamos os casos do traço da distância quando a probabilidade de transição entre estados assume os seguintes valores $p = \{0{,}1, 0{,}3, 0{,}4, 0{,}8, 1\}$, onde primeiramente discutimos sobre a diminuição de $\mathcal{D}$ e em seguida a devolução completa da informação partindo do ambiente para o sistema principal quando $p = 1$. Assim, desejamos avaliar essa dinâmica a partir de uma quantidade quântica, que é a coerência, onde especificamente utilizaremos a norma da coerência, discutida na subseção 2.6.1. Com esse fim, começaremos por descrever o procedimento computacional desenvolvido para a obtenção dos resultados.

6.5.1 Procedimento computacional

Para a situação em questão definimos um estado inicial maximamente coerente para A, no qual

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|f\rangle + |e\rangle \Big). \tag{6.55}$$

A partir disto definimos a matriz densidade $\hat{\rho}_A$ cuja expressão é dada na Eq. (5.37). Além disso, considerando as matrizes densidades de B e C no estado térmico, e os *qubits*

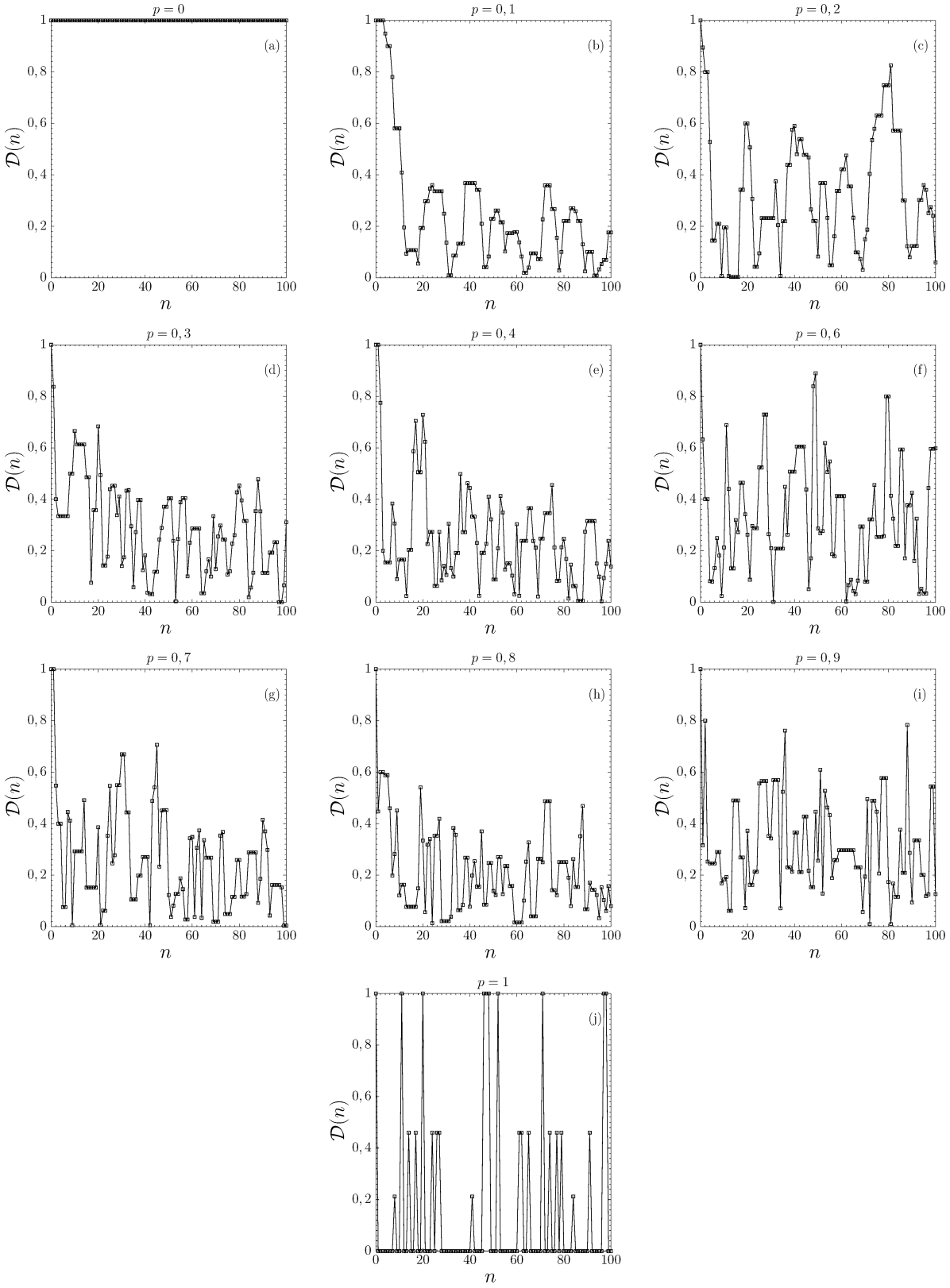


Figura 30 – Traço da distância $\mathcal{D}$ em função das iterações n. As curvas se referem às colisões envolvendo três *qubits*. Utilizamos os parâmetros $a = b = 1/\sqrt{2}$, $w_f = 0{,}73$ e $w_e = 0{,}27$ para vários valores de p intitulados em cada série temporal.

inicialmente descorrelacionados, temos que a matriz densidade inicial nestas circunstâncias é idêntica a da Eq. (6.54) para $a = b = 1/\sqrt{2}$.

1. A partir da descrição anterior e do procedimento discutido na seção 6.1, estipulamos condições para que as colisões entre A e B, A e C e B e C ocorram aleatoriamente, onde a cada interação existe uma matriz unitária associada, respectivamente dadas por $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$ e $\hat{U}_3$. A partir daí, em cada colisão calcula-se as matrizes densidade reduzidas $\hat{\rho}_A$, $\hat{\rho}_B$ e $\hat{\rho}_C$.
2. É calculada a norma da coerência para os sistemas A, B e C, respectivamente representados por C_A, C_B e C_C.
3. Num arquivo de dados é escrito o número da colisão (n) e os valores de C_A, C_B e C_C.
4. Ao final de 3, retoma-se o passo 1 até a quantidade de colisões/iterações desejada.

6.5.2 Discussão de resultados

Na Figura 31(a) vemos a série temporal da norma da coerência de A em função do número de colisões para $p = 0{,}5$. Nela percebemos o caráter caótico na troca de coerência entre o sistema principal e o ambiente. Desta interação, nas secções $C_A \times C_B$ e $C_A \times C_C$ da Figura 31(b-c) também constatamos um comportamento caótico, cuja analogia vem dos espaços de fases da TCC.

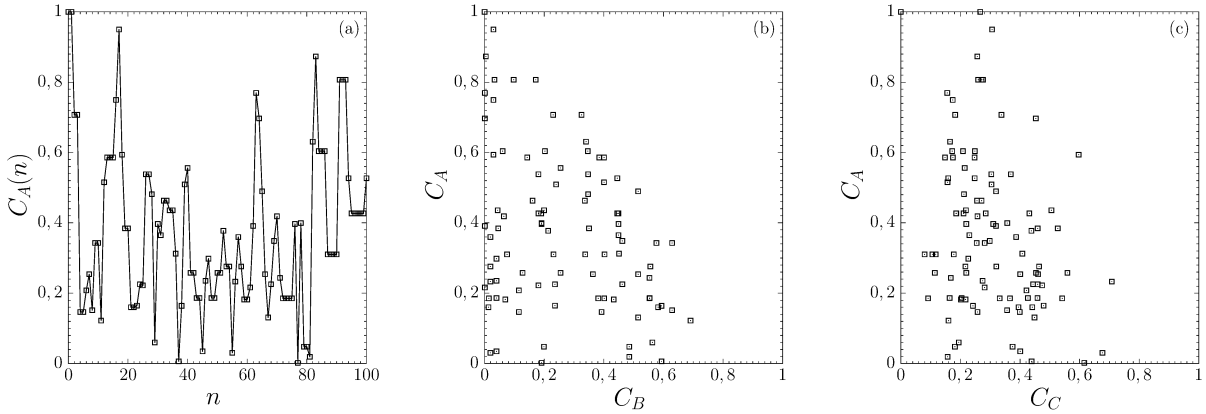


Figura 31 – (a) Norma da coerência do sistema principal C_A em função das iterações n, diagramas (b) $C_A \times C_B$ e (c) $C_A \times C_C$. Para construção dos gráficos utilizamos os parâmetros $a = b = 1/\sqrt{2}$, $w_f = 0{,}73$, $w_e = 0{,}27$ e $p = 0{,}5$.

A respeito do que foi discutido na seção 6.4.2 para o traço da distância, resolvemos plotar a norma da coerência em função das iterações na Figura 32, onde nas imagens (b,d,e,h), para o conjunto $p = \{0{,}1, 0{,}3, 0{,}4, 0{,}8\}$, vemos que o sistema principal perde coerência para o ambiente e a medida que as colisões ocorrem a coerência de A é readquirida em valores menores.

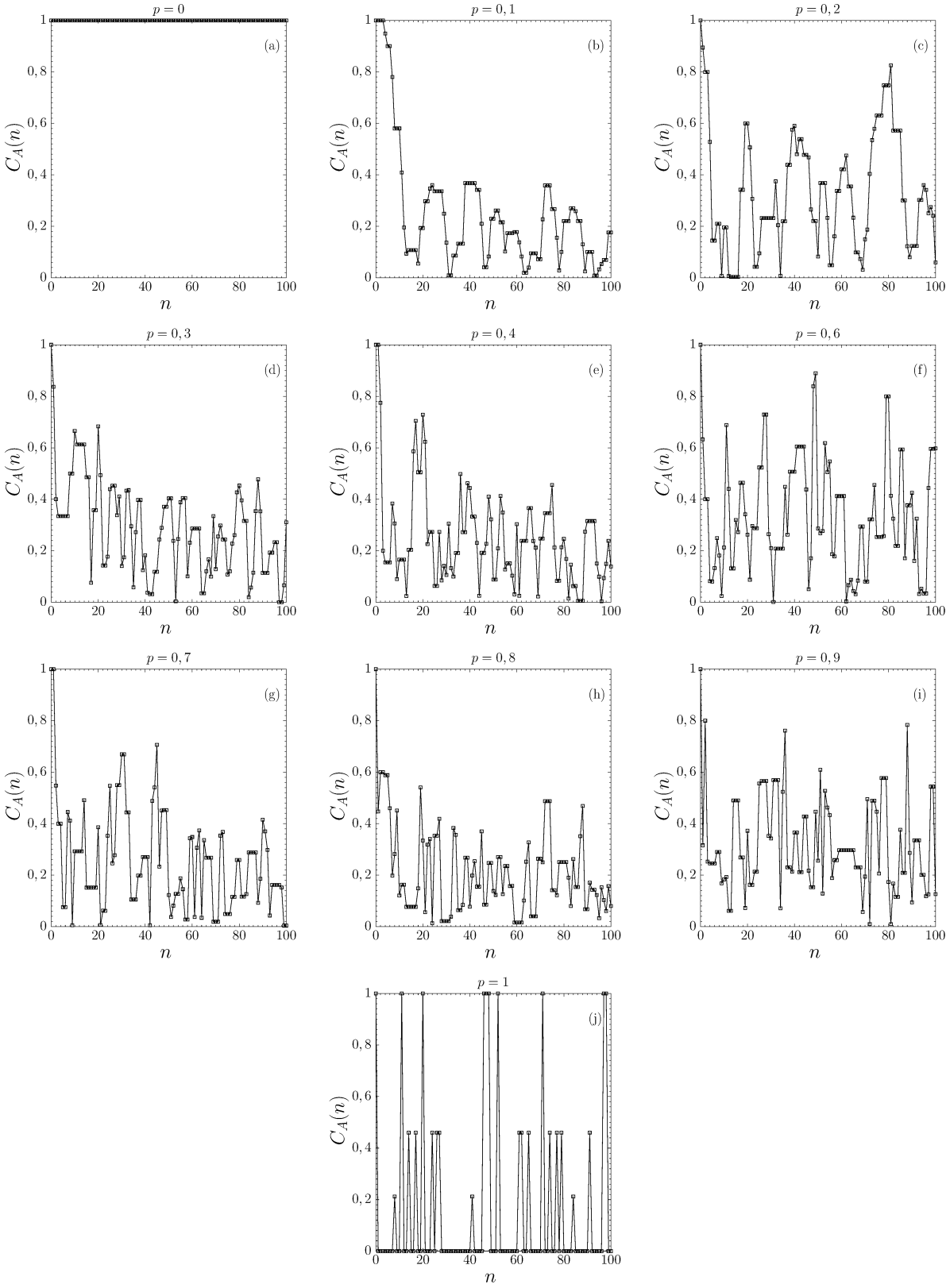


Figura 32 – Norma da coerência do sistema principal C_A em função das iterações n. As curvas se referem às colisões envolvendo três *qubits*. Utilizamos os parâmetros $a = b = 1/\sqrt{2}$, $w_f = 0{,}73$ e $w_e = 0{,}27$ para vários valores de p intitulados em cada série temporal.

6.5.2.1 Pureza do sistema principal para $p = 1$

Vamos discutir o caso da Figura 32(j), onde $p = 1$. Percebemos na imagem que há casos onde a coerência fica máxima, ou seja, atinge valores $C_A(n) = 1$. Por que isso acontece? Na Figura 33 temos o gráfico da pureza ($P_A(n)$) em função do número de colisões (n), que foi obtida a partir do procedimento computacional descrito abaixo.

1. A partir da descrição anterior e do procedimento discutido na seção 6.1, estipulamos condições para que as colisões entre A e B, A e C e B e C ocorram aleatoriamente, onde a cada interação existe uma matriz unitária associada, respectivamente dadas por $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$ e $\hat{U}_3$. A partir daí, em cada colisão calcula-se a matrizes densidade reduzida do sistema principal, ou seja, $\hat{\rho}_A$.
2. Calcula-se $\hat{\rho}_A^2$.
3. Calcula-se $Tr(\hat{\rho}_A^2)$, que é o quantificador de pureza do sistema A (como foi descrido no parágrafo abaixo da Eq.(2.10)).
4. Num arquivo de dados é escrito o número da colisão (n) e o valor de $Tr(\hat{\rho}_A^2)$.
5. Ao final de 4, retoma-se o passo 1 até a quantidade de colisões/iterações desejada.

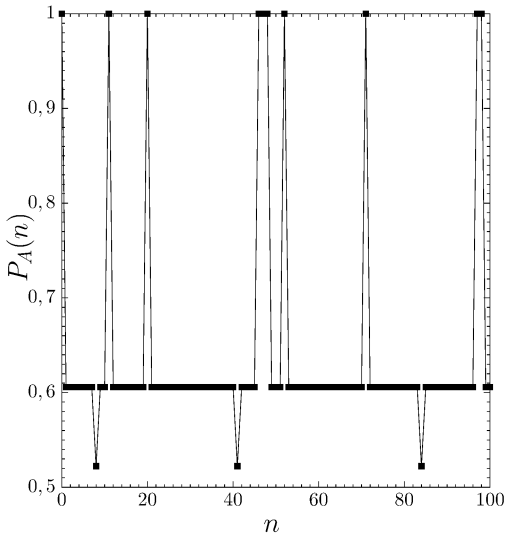


Figura 33 – Pureza do sistema A calculada em função do número de colisões a partir das condições descritas na Figura 32.

Quando $P_A(n) = 1$ o estado é completamente puro, representado por um ponto na superfície da esfera de Bloch, e como a coerência é máxima, tal ponto está localizado no equador da esfera. Por outro lado, quando a coerência do sistema é menor que a unidade, temos casos de estados mistos para A, que pode ser justificados com os valores de $P_A(n) < 1$, indicando regiões internas da esfera de Bloch. Note que $P_A(n) \neq 0,5$ sempre, isto é, nunca

haverá um estado maximamente misto, representado por um ponto no centro da esfera de Bloch, o que analiticamente seria dado por $\hat{\rho}_A = \hat{I}/2$.

6.6 Modelo físico para o ambiente de três *qubits*

A partir de agora vamos estudar a interação do sistema principal A com um ambiente de três *qubits* B, C e D idênticos, como está representado na Figura 34. Recapitulamos que A possui operador hamiltoniano $\hat{H}_A = E_f |f\rangle\langle f| + E_e |e\rangle\langle e|$ e operador densidade $\hat{\rho}_A = |a|^2 |f\rangle\langle f| + ab^* |f\rangle\langle e| + a^* b |e\rangle\langle f| + |b|^2 |e\rangle\langle e|$. Os *qubits* B, C e D têm operadores de energia dados por $\hat{H}_B = \hat{H}_C = \hat{H}_D = \mathcal{E}_f |\mathcal{E}_f\rangle\langle\mathcal{E}_f| + \mathcal{E}_e |\mathcal{E}_e\rangle\langle\mathcal{E}_e|$, e operadores densidade escritos como $\hat{\rho}_B = \hat{\rho}_C = \hat{\rho}_D = w_f |\mathcal{E}_f\rangle\langle\mathcal{E}_f| + w_e |\mathcal{E}_e\rangle\langle\mathcal{E}_e|$. O operador hamiltoniano do sistema total é $\hat{H}_{ABCD}$, cuja base dos autoestados de energia é

$$\begin{aligned}
&\{|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle, |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle, |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle, |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle,\\
&|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle, |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle, |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle, |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle,\\
&|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle, |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle, |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle, |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle,\\
&|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle, |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle, |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle, |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\}.
\end{aligned} \tag{6.56}$$

Enfatizamos que a sequência de termos dentro de cada ket se refere aos *qubits* A, B, C

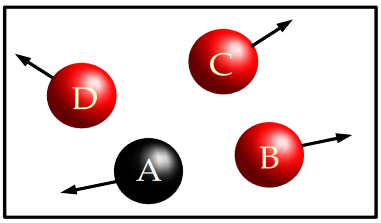


Figura 34 – *Qubits* A, B, C e D dentro de uma caixa interagindo via colisões.

e D, respectivamente. Considerando que inicialmente os *qubits* estão descorrelacionados, escrevemos o operador densidade total como $\hat{\rho}_{ABCD} = \hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_B(0) \otimes \hat{\rho}_C(0) \otimes \hat{\rho}_D(0)$.

A partir das discussões anteriores, argumentamos que a dinâmica para o sistema com quatro *qubits* é semelhante à que foi descrita na seção 6.1, onde as colisões podem acontecer entre (i) A e B, (ii) A e C, (iii) A e D, (iv) B e C, (v) B e D e (vi) C e D. Para cada caso devemos construir uma matriz unitária $\hat{\mathcal{U}}_j$. Ou seja, precisamos definir $\hat{\mathcal{U}}_1, \hat{\mathcal{U}}_2, \hat{\mathcal{U}}_3, \hat{\mathcal{U}}_4, \hat{\mathcal{U}}_5$ e $\hat{\mathcal{U}}_6$, associadas respectivamente às descrições (i), (ii), (iii), (iv), (v) e (vi) feitas anteriormente. A ideia das colisões são as mesmas apresentadas da Eq. (6.2) até a Eq. (6.5). Desta forma, ao final de cada colisão a matriz densidade de cada *qubit* é definida como

$$\hat{\rho}_A(n) = Tr_{BCD}\Big[\hat{\rho}_{ABCD}(n)\Big], \tag{6.57}$$

$$\hat{\rho}_B(n) = Tr_{ACD}\Big[\hat{\rho}_{ABCD}(n)\Big], \tag{6.58}$$

$$\hat{\rho}_C(n) = Tr_{ABD}\Big[\hat{\rho}_{ABCD}(n)\Big] \tag{6.59}$$

e

$$\hat{\rho}_D(n) = Tr_{ABC}\Big[\hat{\rho}_{ABCD}(n)\Big]. \tag{6.60}$$

6.7 Construção das matrizes unitárias para dinâmica do ambiente composto por três *qubits*

Reproduziremos aqui algo semelhante ao que fizemos na seção 6.2, ou seja, descreveremos as equações responsáveis pelas possíveis mudanças dos níveis de energia dos *qubits* quando estes colidem.

6.7.1 Colisão entre A e B

No caso intitulado nesta subseção, temos as possibilidades a seguir:

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.61}$$

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{6.62}$$

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.63}$$

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{6.64}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.65}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{6.66}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.67}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{6.68}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.69}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{6.70}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.71}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{6.72}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.73}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{6.74}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{6.75}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,. \tag{6.76}$$

Nas Eqs. (6.61), (6.62), (6.63), (6.64), (6.73), (6.74), (6.75) e (6.76) não há probabilidade dos estados de energia serem alterados no sistema. Já todas as outras equações não mencionadas possuem probabilidade $1-p$ de nada acontecer e p de alterar os níveis energéticos.

A partir das últimas dezesseis equações, podemos construir a matriz unitária como

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{U}}_1 = {} & |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| + \\
& |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| + \\
& \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + \\
& \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| + \\
& \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + \\
& \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| + \\
& \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + \\
& \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| + \\
& \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| + \\
& |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| + \\
& |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e|\,.
\end{aligned} \tag{6.77}$$

Agora, vamos tomar o operador adjunto de $\hat{\mathcal{U}}_1$, isto é, $\hat{\mathcal{U}}_1{}^{\dagger}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{U}}_1^{\dagger} = &|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| + \\
&|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| + \\
&\sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| - \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + \\
&\sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| - \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| + \\
&\sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| - \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + \\
&\sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| - \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| + \\
&\sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + \\
&\sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| + \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| + \\
&\sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| + \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| + \\
&|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| + \\
&|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e|\,.
\end{aligned} \tag{6.78}$$

A partir das Eqs. (6.77) e (6.78), constataremos que

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{U}}_1\hat{\mathcal{U}}_1^{\dagger} = \hat{\mathcal{U}}_1^{\dagger}\hat{\mathcal{U}}_1 = &|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| + \\
&|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| + \\
&|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| + \\
&|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| + \\
&|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| + \\
&|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| + \\
&|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e| + \\
&|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f| + |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e| = \hat{I}.
\end{aligned} \tag{6.79}$$

Da Eq. (6.79) verificamos que $\hat{\mathcal{U}}_1$ é um operador unitário. Portanto, quando o aplicamos nos kets do lado esquerdo das Eqs. (6.61) a (6.76), garantimos que o resultado é justamente a expressão do lado direito das setas das dezesseis equações mencionadas. Caso o leitor deseje, pode verificar. Com as informações descritas aqui, podemos construir

a matriz unitária $\hat{\mathcal{U}}_1$ como

$$\hat{\mathcal{U}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g_p & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_p & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_p & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_p & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.80}$$

onde

$$f_p = \sqrt{1-p} \tag{6.81}$$

e

$$g_p = \sqrt{p}. \tag{6.82}$$

Para não sobrecarregar a leitura do texto, a continuação das colisões se encontram no Apêndice C. Caso a ideia não esteja clara, sugerimos que o leitor leia o apêndice citado.

6.8 Construção da matriz densidade inicial envolvendo o ambiente de três *qubits*

Definiremos agora a matriz densidade do sistema composto, semelhantemente ao modo que fizemos na seção 6.3, onde consideramos o *qubit* A dado por

$$\hat{\rho}_A(0) = |a|^2 |f\rangle \langle f| + ab^* |f\rangle \langle e| + a^* b |e\rangle \langle f| + |b|^2 |e\rangle \langle e|, \tag{6.83}$$

bem como os três *qubits* do ambiente inicialmente no estado térmico, dados por

$$\hat{\rho}_B(0) = \hat{\rho}_C(0) = \hat{\rho}_D(0) = w_f |\mathcal{E}_f\rangle \langle \mathcal{E}_f| + w_e |\mathcal{E}_e\rangle \langle \mathcal{E}_e|. \tag{6.84}$$

Impomos que inicialmente os estados estão descorrelacionados, e portanto, escrevemos a matriz densidade do sistema composto como

$$\hat{\rho}_{ABCD}(0) = \hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_B(0) \otimes \hat{\rho}_C(0) \otimes \hat{\rho}_D(0). \tag{6.85}$$

Assim, substituindo as Eqs. (6.83) e (6.84) na Eq. (6.85), temos que

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{ABCD}(0) =& |a|^2 w_f^3 \left|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right| + |a|^2 w_f^2 w_e \left|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\right| + \\
& |a|^2 w_f^2 w_e \left|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right| + |a|^2 w_f w_e^2 \left|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\right| + \\
& |a|^2 w_f^2 w_e \left|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right| + |a|^2 w_f w_e^2 \left|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\right| + \\
& |a|^2 w_f w_e^2 \left|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right| + |a|^2 w_e^3 \left|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\right| + \\
& ab^* w_f^3 \left|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right| + ab^* w_f^2 w_e \left|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\right| + \\
& ab^* w_f^2 w_e \left|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right| + ab^* w_f w_e^2 \left|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\right| + \\
& ab^* w_f^2 w_e \left|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right| + ab^* w_e^3 \left|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\right| + \\
& ab^* w_f^2 w_e \left|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right| + ab^* w_f w_e^2 \left|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\right| + \\
& a^* b w_g^3 \left|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right| + a^* b w_f^2 w_e \left|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right| + \\
& a^* b w_g^2 w_e \left|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right| + a^* b w_g w_e^2 \left|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\right| + \\
& a^* b w_f^2 w_e \left|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right| + a^* b w_g w_e^2 \left|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\right| + \\
& a^* b w_g w_e^2 \left|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right| + a^* b w_e^3 \left|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\right| + \\
& |b|^2 w_g^3 \left|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right| + |b|^2 w_g^2 w_e \left|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right| + \\
& |b|^2 w_f^2 w_e \left|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right| + |b|^2 w_f w_e^2 \left|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\right| + \\
& |b|^2 w_f^2 w_e \left|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right| + |b|^2 w_f w_e^2 \left|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\right| + \\
& |b|^2 w_f w_e^2 \left|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right\rangle \left\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right| + |b|^2 w_e^3 \left|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\right\rangle \left\langle e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\right|.
\end{aligned} \tag{6.86}$$

Da última equação, construímos a matriz

$$\hat{\rho}_{ABCD}(0) = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_0 \\ L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_0 \end{pmatrix}, \tag{6.87}$$

onde $A_0 = |a|^2 w_f^3$, $B_0 = ab^* w_f^3$, $C_0 = |a|^2 w_f^2 w_e$, $D_0 = ab^* w_f^2 w_e$, $F_0 = ab^* w_f w_e^2$, $G_0 = |a|^2 w_e^3$, $H_0 = |b|^2 w_f^3$, $I_0 = |b|^2 w_f^2 w_e$, $J_0 = |b|^2 w_f w_e^2$, $K_0 = |b|^2 w_e^3$, $L_0 = a^* b w_g^2$, $M_0 = a^* b w_f^2 w_e$, $N_0 = a^* b w_f w_e^2$, $S_0 = a^* b w_e^3$, $T_0 = |a|^2 w_f w_e^2$ e $W_0 = ab^* w_e^3$.

6.9 Traço da distância para o ambiente composto por três *qubits*

Para o ambiente constituído pelos *qubits* B, C e D utilizaremos os pesos probabilísticos $w_f = 0{,}73$ e $w_e = 0{,}27$ referentes aos operadores densidade no estado térmico. Em seguida, descreveremos o processo computacional e os resultados.

6.9.1 Procedimento computacional

As mesmas ideias adotadas nas subseções 5.4.1 e 6.4.1 serão empregadas aqui, onde recomendamos que o leitor volte a elas e releia. Contudo, de forma resumida, basearemo-nos na Eq. (6.87) para definir dois estados ortonormais do sistema principal, de tal modo que as matrizes densidade do sistema composto serão dadas por $\hat{\rho}^1_{ABCD}(0)$ e $\hat{\rho}^2_{ABCD}(0)$, onde no primeiro caso usaremos $a = b = 1/\sqrt{2}$ e no segundo $a = 1/\sqrt{2}$ e $b = -1/\sqrt{2}$. Assim, podemos descrever os passos executados no computador.

1. A partir do procedimento discutido na seção 6.6, estipulamos condições para que as colisões entre A e B, A e C, A e D, B e C, B e D e C e D ocorram aleatoriamente,

onde a cada interação existe uma matriz unitária associada, respectivamente dadas por $\hat{\mathcal{U}}_1$, $\hat{\mathcal{U}}_2$, $\hat{\mathcal{U}}_3$, $\hat{\mathcal{U}}_4$, $\hat{\mathcal{U}}_5$ e $\hat{\mathcal{U}}_6$. Feita uma dessas iterações, calcula-se as matrizes densidade reduzidas $\hat{\rho}_A^1$ e $\hat{\rho}_A^2$.

2. Define-se a matriz $\hat{M} = \hat{\rho}_A^1 - \hat{\rho}_A^2$.
3. São calculados os autovalores γ_j de $\hat{M}$.
4. É calculado $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\sum_j |\gamma_j|$.
5. Num arquivo de dados é escrito o número da colisão (n) e o valor de $\mathcal{D}$.
6. Ao final de 5, retoma-se o passo 1 até a quantidade de colisões/iterações desejada.

6.9.2 Discussão de resultados

A partir do procedimento computacional descrito na subseção anterior, construímos um gráfico do traço da distância para o sistema principal quando o ambiente possui três *qubits* no estado térmico, como pode ser visto na Figura 35(b), para curva em preto.

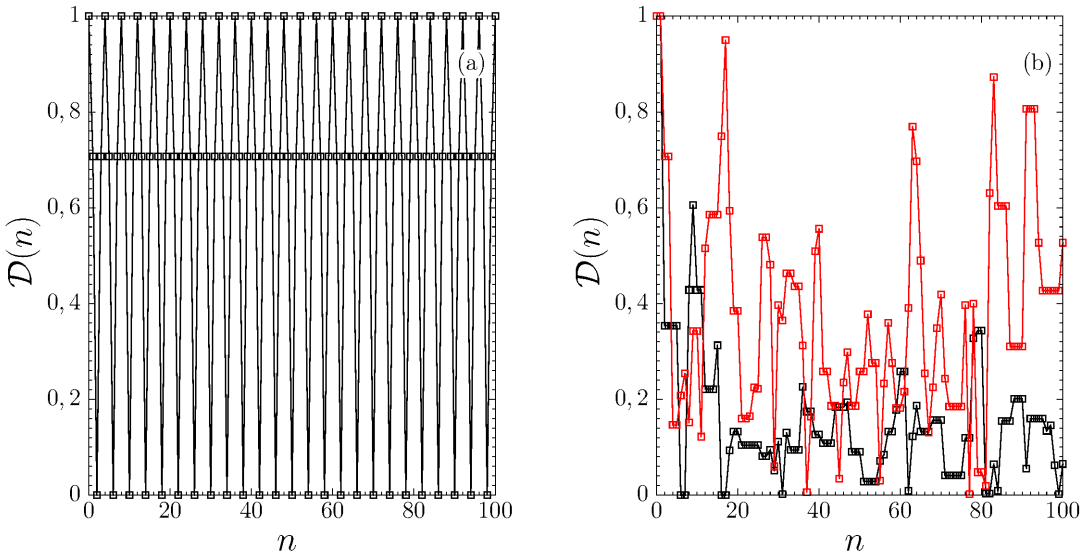


Figura 35 – Traço da distância $\mathcal{D}$ em função das iterações n. As imagens (a) e (b) se referem aos casos das colisões envolvendo dois e quatro *qubits* (com a curva em preto), respectivamente. Já na imagem a curva vermelha se refere ao modelo de três *qubits*. Utilizamos os parâmetros $p = 0{,}5$, $a = 1/\sqrt{2}$, $b = 1/\sqrt{2}$ para um estado do sistema principal e $b = -1/\sqrt{2}$ para outro, $w_f = 0{,}73$ e $w_e = 0{,}27$.

Note que a curva em preto da Figura 35(b) apresenta uma diminuição nos valores do traço da distância quando comparado com a Figura 35(a), que se refere ao ambiente com um único *qubit* no estado térmico. Desta avaliação podemos inferir que a diminuição do caráter não markoviano da dinâmica tem a ver com o tamanho do ambiente. Isto se torna

mais claro quando observamos a Figura 35(b), onde a curva em vermelho representa o traço da distância para o ambiente com dois *qubits*, que possui valores maiores em comparação ao ambiente com três *qubits* representado pela curva preta. Em termos quantitativos, podemos usar a medida BLP dada na Eq. (3.46), de modo que $\mathcal{M}_{BLP}(2) \approx 25$, $\mathcal{M}_{BLP}(3) \approx 6{,}68$ e $\mathcal{M}_{BLP}(4) \approx 2{,}83$, cujos números entre parênteses designa a quantidade de *qubits* considerados na dinâmica. Deste resultado, interpretamos que na adição de *qubits* ao sistema há uma redução do refluxo de informação, ou seja, quando o ambiente transfere informação para o sistema [106].

6.9.3 Comentários sobre a dinâmica markoviana

Recapitulemos a descrição da seção 3.2.2, mais especificamente a dinâmica da Figura 10, onde consideraremos que um *qubit* no estado puro (A) interage com um ambiente de inúmeros *qubits* idênticos no estado térmico. A dinâmica não considera a interação entre os constituintes do ambiente e A colide uma única vez com cada *qubit* térmico. Pela descrição apresentada, temos uma dinâmica markoviana, como pode ser constatada na Figura 36, onde percebemos o decaimento monotônico do traço da distância durante as colisões para diferentes valores de p. Quanto maior o valor da probabilidade de transição entre estados, mais rápido ocorre o decaimento de $\mathcal{D}$, indicando perda de informação do sistema para o ambiente.

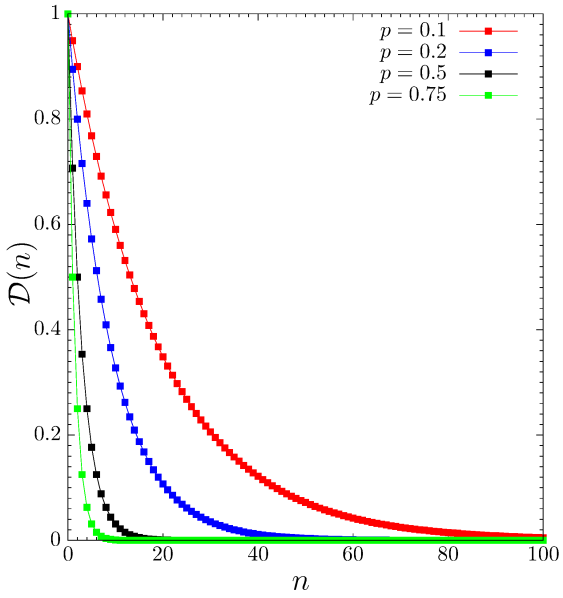


Figura 36 – Traço da distância $\mathcal{D}$ em função das iterações n. A imagem se refere à colisão entre o *qubit* A e um ambiente com inúmeros *qubits* idênticos no estado térmico. Utilizamos os parâmetros $a = 1/\sqrt{2}$, $b = 1/\sqrt{2}$ para um estado do sistema principal e $b = -1/\sqrt{2}$ para outro, $w_f = 0{,}73$ e $w_e = 0{,}27$.

Algo interessante na dinâmica markoviana é que para inúmeras colisões o sistema principal termaliza. Ou seja, $\lim_{n\to\infty} \hat{\rho}_A(n) = \hat{\rho}_E$, sendo esta a matriz densidade do

ambiente, o que corrobora com os estudos das Refs. [107, 108]. Estes resultados são verificados nos cálculos numéricos, onde na primeira colisão temos a matriz

$$\hat{\rho}_A(1) = \begin{pmatrix} 0{,}6149999499320984 & 0{,}3535533547401428 \\ 0{,}3535533547401428 & 0{,}3849999606609344 \end{pmatrix}, \tag{6.88}$$

enquanto que na centésima, constatamos

$$\hat{\rho}_A(100) = \begin{pmatrix} 0{,}7300001382827759 & 0{,}0000000000000004 \\ 0{,}0000000000000004 & 0{,}2700000703334808 \end{pmatrix}, \tag{6.89}$$

ou seja, praticamente o mesmo valor para o estado térmico de cada *qubit* do ambiente, dado por

$$\hat{\rho}_E = \begin{pmatrix} 0{,}73 & 0 \\ 0 & 0{,}27 \end{pmatrix}. \tag{6.90}$$

Este comportamento de termalização é verificado independente de qual seja o estado inicial do sistema.

CAPÍTULO 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vamos agora sumarizar as concepções apresentadas ao longo do texto que serviram de trajeto para chegarmos à conclusão do modo com que o tamanho do ambiente influencia na dinâmica quântica não markoviana, no que diz respeito a ser markoviana ou não markoviana, bem como nos efeitos físicos que surgiram ao longo do estudo. Primeiramente, diferenciamos a dinâmica de um sistema fechado de um aberto, onde neste revisamos os conceitos de operador densidade, que foi utilizado ao longo de todo o trabalho. Vimos quais são suas propriedades e como elas não foram violadas ao longo das análises computacionais que fizemos na pesquisa. Além disso, definimos o *qubit* e a partir deles estudamos alguns fenômenos inerentes da mecânica quântica, que foi o emaranhamento e a coerência, onde apresentamos quantificadores que auxiliaram neste estudo. Ainda a respeito dos *qubits*, nos preocupamos em apresentar as propriedades matemáticas dos canais quânticos, cujo intuito foi mostrar que essas operações deveriam levar um operador densidade em outro operador densidade. A partir disso, pudemos ver três aplicações dos canais quânticos, onde em todos os processos vimos como ocorre a decoerência e quantificamos isso a partir da norma da coerência.

Após as discussões apresentadas anteriormente, adentramos propriamente no conteúdo da tese, que foi perceber e diferenciar os processos quânticos markovianos e não markovianos a partir de MQC. Não só percebemos a fenomenologia de tais modelos, como também exploramos as características do operador densidade no caso markoviano, onde usamos o conceito de mapas completamente positivos que preservam o traço, ou seja, mapas ou canais quânticos. Já no caso da dinâmica não markoviana definimos que o traço da distância a testifica enquanto que a medida BLP a quantifica.

Além do arcabouço discutido no último parágrafo, foi importante introduzirmos elementos da TCC, em especial as séries temporais que caracterizam a dinâmica caótica

e regular. Em seguida consideramos as colisões entre dois *qubits* via canal amplitude de amortecimento generalizado, onde um deles foi considerado como sistema e estava em um estado genérico e o outro em um térmico. Com isso foi possível percebermos o comportamento regular e caótico na dinâmica da coerência e emaranhamento para diferentes valores da probabilidade de transição p entre os níveis energéticos do sistema e ambiente. Daí em diante, não foi possível percebermos uma dinâmica regular quando aumentamos o ambiente com mais *qubits* em estados térmicos, para que todos colidissem de forma aleatória. A respeito das colisões entre três *qubits*, sendo um deles o sistema principal, pudemos estudar a pureza deste para o caso de $p = 1$, onde constatamos que o estado pode se tornar completamente puro e quase que totalmente misto. No que se refere a um ambiente com três *qubits* em estado térmico interagindo com um *qubit* genérico, a partir do traço da distância pudemos constatar que os efeitos da não markovianidade quântica diminuem quando se aumenta o ambiente. Avaliamos isto a partir da medida BLP.

Os resultados sumarizados anteriormente nos dá a percepção de que a perda da informação quântica, associada à markovianidade, está diretamente ligada a situações em que o ambiente é composto por um grande número de constituintes, quando o sistema praticamente interage uma única vez com cada um deles, além do que verificamos a termalização do sistema com o ambiente. Isto serve como perspectiva futura que dá margem para discussões sobre a lei zero da termodinâmica no contexto quântico, para processos de termalização entre sistemas de *qubits*, por exemplo, bem como buscar explorar conceitos de poucos corpos no funcionamento de máquinas térmicas, cuja analogia clássica disso seria o caso de um gás confinado em um recipiente com paredes adiabáticas.

Em todo o estudo nos baseamos no CAMAG, cuja dinâmica permite uma boa descrição de processos térmicos que ocorrem a nível de *qubits*. A partir deste canal exploramos a riqueza fenomenológica que ele obtém, como o refluxo de informação a partir do emaranhamento e da coerência, podendo exibir comportamento regular ou caótico. Uma das perspectivas futuras a partir deste canal é estudar conceitos de reversibilidade microscópica quântica, que basicamente consiste em investigar a relação entre as probabilidades de processos quânticos de ida e volta de um sistema quântico quando interage com um ambiente que não muda, de acordo com a Ref. [109]. É importante lembrar que o princípio da microreversibilidade microscópica, juntamente com a assunção da markovianidade, foi uma das hipóteses utilizadas na derivação do celebrado teorema de flutuação de Crooks [110], como também encontrado na Ref. [11]. Não só desejamos investigar isso do ponto de vista teórico como experimental, utilizando óptica quântica.

REFERÊNCIAS

[1] N. K. Bernardes, A. Cuevas, A. Orieux, C. Monken, P. Mataloni, F. Sciarrino, and M. F. Santos, "Experimental observation of weak non-markovianity," *Scientific reports*, vol. 5, no. 1, pp. 1–7, 2015.

[2] M. A. Nielsen and I. Chuang, *Quantum computation and quantum information*. American Association of Physics Teachers, 2002.

[3] Á. Rivas, S. F. Huelga, and M. B. Plenio, "Quantum non-markovianity: characterization, quantification and detection," *Reports on Progress in Physics*, vol. 77, no. 9, p. 094001, 2014.

[4] F. Ciccarello, S. Lorenzo, V. Giovannetti, and G. M. Palma, "Quantum collision models: Open system dynamics from repeated interactions," *Physics Reports*, vol. 954, pp. 1–70, 2022.

[5] W. F. Magalhães, *Dinâmica de partículas inerciais acopladas a um meio viscoso*. (Dissertação de mestrado, UDESC), 2019.

[6] J. A. Gallas, "Structure of the parameter space of the hénon map," *Physical Review Letters*, vol. 70, no. 18, p. 2714, 1993.

[7] J. P. Dowling and G. J. Milburn, "Quantum technology: the second quantum revolution," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 361, no. 1809, pp. 1655–1674, 2003.

[8] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, "Communication via one-and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states," *Physical Review Letters*, vol. 69, no. 20, p. 2881, 1992.

[9] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels," *Physical Review Letters*, vol. 70, no. 13, p. 1895, 1993.

[10] R. Kosloff, "Quantum thermodynamics: A dynamical viewpoint," *Entropy*, vol. 15, no. 6, pp. 2100–2128, 2013.

[11] S. Deffner and S. Campbell, *Thermodynamics of quantum information*. Morgan & Claypool Publishers, 2019.

[12] H.-T. Quan, Y.-x. Liu, C.-P. Sun, and F. Nori, "Quantum thermodynamic cycles and quantum heat engines," *Physical Review E*, vol. 76, no. 3, p. 031105, 2007.

[13] J. L. D. de Oliveira, M. Rojas, and C. Filgueiras, "Two coupled double quantum-dot systems as a working substance for heat machines," *Physical Review E*, vol. 104, no. 1, p. 014149, 2021.

[14] B. de Lima Bernardo, "Unraveling the role of coherence in the first law of quantum thermodynamics," *Physical Review E*, vol. 102, no. 6, p. 062152, 2020.

[15] J. Rau, "Relaxation phenomena in spin and harmonic oscillator systems," *Physical Review*, vol. 129, no. 4, p. 1880, 1963.

[16] C. M. Caves and G. J. Milburn, "Quantum-mechanical model for continuous position measurements," *Physical Review A*, vol. 36, no. 12, p. 5543, 1987.

[17] C. M. Caves, "Quantum mechanics of measurements distributed in time. a path-integral formulation," *Physical Review D*, vol. 33, no. 6, p. 1643, 1986.

[18] H.-P. Breuer, E.-M. Laine, J. Piilo, and B. Vacchini, "Colloquium: Non-markovian dynamics in open quantum systems," *Reviews of Modern Physics*, vol. 88, no. 2, p. 021002, 2016.

[19] A. Strathearn, *Modelling Non-Markovian Quantum Systems Using Tensor Networks*. Springer Nature, 2020.

[20] R. B. B. Lima, *Controle da não markovianidade em sistemas quânticos abertos*. (Tese de doutorado) USP, 2020.

[21] G. Guarnieri, C. Uchiyama, and B. Vacchini, "Energy backflow and non-markovian dynamics," *Physical Review A*, vol. 93, no. 1, p. 012118, 2016.

[22] S. Kretschmer, K. Luoma, and W. T. Strunz, "Collision model for non-markovian quantum dynamics," *Physical Review A*, vol. 94, no. 1, p. 012106, 2016.

[23] H. Breuer, D. Faller, B. Kappler, and F. Petruccione, "Non-markovian spectral broadening in interacting continuous-wave atom lasers," *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 54, no. 1, p. 14, 2001.

[24] J. Hope, "Theory of input and output of atoms from an atomic trap," *Physical Review A*, vol. 55, no. 4, p. R2531, 1997.

[25] F. Caruso, A. W. Chin, A. Datta, S. F. Huelga, and M. B. Plenio, "Highly efficient energy excitation transfer in light-harvesting complexes: The fundamental role of noise-assisted transport," *The Journal of Chemical Physics*, vol. 131, no. 10, p. 09B612, 2009.

[26] A. Ishizaki and G. R. Fleming, "Unified treatment of quantum coherent and incoherent hopping dynamics in electronic energy transfer: Reduced hierarchy equation approach," *The Journal of chemical physics*, vol. 130, no. 23, p. 234111, 2009.

[27] A. W. Chin, Á. Rivas, S. F. Huelga, and M. B. Plenio, "Exact mapping between system-reservoir quantum models and semi-infinite discrete chains using orthogonal polynomials," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 51, no. 9, p. 092109, 2010.

[28] B. Bylicka, D. Chruściński, and S. Maniscalco, "Non-markovianity and reservoir memory of quantum channels: a quantum information theory perspective," *Scientific reports*, vol. 4, no. 1, pp. 1–7, 2014.

[29] C.-F. Li, G.-C. Guo, and J. Piilo, "Non-markovian quantum dynamics: What is it good for?," *Europhysics Letters*, vol. 128, no. 3, p. 30001, 2020.

[30] I. A. Silva, A. M. Souza, T. R. Bromley, M. Cianciaruso, R. Marx, R. S. Sarthour, I. S. Oliveira, R. L. Franco, S. J. Glaser, E. R. deAzevedo, *et al.*, "Observation of time-invariant coherence in a nuclear magnetic resonance quantum simulator," *Physical Review Letters*, vol. 117, no. 16, p. 160402, 2016.

[31] H.-P. Breuer, E.-M. Laine, and J. Piilo, "Measure for the degree of non-markovian behavior of quantum processes in open systems," *Physical review letters*, vol. 103, no. 21, p. 210401, 2009.

[32] E.-M. Laine, J. Piilo, and H.-P. Breuer, "Measure for the non-markovianity of quantum processes," *Physical Review A*, vol. 81, no. 6, p. 062115, 2010.

[33] H.-P. Breuer, F. Petruccione, *et al.*, *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, 2002.

[34] J. J. Sakurai and E. D. Commins, *Modern quantum mechanics, revised edition*. American Association of Physics Teachers, 1995.

[35] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum Mechanics, Volume 3: Fermions, Bosons, Photons, Correlations, and Entanglement*. John Wiley & Sons, 2019.

[36] P. A. Dirac, "Note on exchange phenomena in the thomas atom," in *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, vol. 26, pp. 376–385, Cambridge University Press, 1930.

[37] F. Schwabl, *Statistical mechanics*. Springer Science & Business Media, 2006.

[38] K. Huang, *Statistical mechanics*. John Wiley & Sons, 2008.

[39] S. R. Salinas, *Introdução a física estatística vol. 09*. Edusp, 1997.

[40] F. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics*. Waveland Press, 2009.

[41] W. Greiner, L. Neise, and H. Stöcker, *Thermodynamics and statistical mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.

[42] C. E. Mackenzie, *Coded-Character Sets: History and Development*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1980.

[43] I. Georgescu, "A bit on the bit," *Nature Physics*, vol. 12, no. 9, pp. 888–888, 2016.

[44] S. M. Barnett, *Quantum information*. Oxford University Press, 2009.

[45] M. Thomas and A. T. Joy, *Elements of information theory*. Wiley-Interscience, 2006.

[46] M. M. Wilde, *Quantum information theory*. Cambridge University Press, 2013.

[47] K. F. Riley, M. P. Hobson, and S. J. Bence, "Mathematical methods for physics and engineering third edition paperback set," *Mathematical Methods for Physics and Engineering-3rd Edition*, p. 1362, 2006.

[48] G. B. Arfken and H. J. Weber, "Mathematical methods for physicists," 1999.

[49] P. Winterle and A. Steinbruch, *Geometria Analítica*. Makron Books, São Paulo, 2000.

[50] E. Schrödinger, "Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik," *Naturwissenschaften*, vol. 23, no. 50, pp. 844–849, 1935.

[51] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, "Quantum entanglement," *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, no. 2, p. 865, 2009.

[52] B. L. Bernardo, *Uma visão contemporânea de alguns conceitos da teoria quântica*. Tese - Universidade Federal da Paraíba, 2013.

[53] G. Vidal and R. F. Werner, "Computable measure of entanglement," *Physical Review A*, vol. 65, no. 3, p. 032314, 2002.

[54] B. Amaral, A. T. Baraviera, and M. T. Cunha, "Mecânica quântica para matemáticos em formação," *Impa-28th Colóquio Brasileiro de Matemática*, 2011.

[55] S. Stenholm and K.-A. Suominen, *Quantum approach to informatics*. John Wiley & Sons, 2005.

[56] T. R. Bromley, M. Cianciaruso, and G. Adesso, "Frozen quantum coherence," *Physical Review Letters*, vol. 114, no. 21, p. 210401, 2015.

[57] E. Andersson and P. Öhberg, *Quantum Information and Coherence*. Springer, 2014.

[58] Z. Xi, Y. Li, and H. Fan, "Quantum coherence and correlations in quantum system," *Scientific reports*, vol. 5, no. 1, pp. 1–9, 2015.

[59] R. Konik, "Quantum coherence confined," *Nature Physics*, vol. 17, no. 6, pp. 669–670, 2021.

[60] A. Streltsov, G. Adesso, and M. B. Plenio, "Colloquium: Quantum coherence as a resource," *Reviews of Modern Physics*, vol. 89, no. 4, p. 041003, 2017.

[61] T. Baumgratz, M. Cramer, and M. B. Plenio, "Quantifying coherence," *Physical review letters*, vol. 113, no. 14, p. 140401, 2014.

[62] J. Watrous, *The theory of quantum information*. Cambridge university press, 2018.

[63] J. I. Costa-Filho, *Quantum non-Markovianity induced by classical stochastic noise*. (Tese de doutorado) USP, 2017.

[64] J. Preskill, *Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation*. California Institute of Technology, 2018.

[65] M. B. Pozzobom and J. Maziero, "Environment-induced quantum coherence spreading of a qubit," *Annals of Physics*, vol. 377, pp. 243–255, 2017.

[66] I. De Vega and D. Alonso, "Dynamics of non-markovian open quantum systems," *Reviews of Modern Physics*, vol. 89, no. 1, p. 015001, 2017.

[67] C.-F. Li, G.-C. Guo, and J. Piilo, "Non-markovian quantum dynamics: What does it mean?," *Europhysics Letters*, vol. 127, no. 5, p. 50001, 2019.

[68] T. Tomé and M. J. De Oliveira, *Stochastic dynamics and irreversibility*. Springer, 2015.

[69] C. Dantas, *Probabilidade: Um Curso Introdutório Vol. 10*. EDUSP, 2013.

[70] Á. Rivas, S. F. Huelga, and M. B. Plenio, "Quantum non-markovianity: characterization, quantification and detection," *Reports on Progress in Physics*, vol. 77, no. 9, p. 094001, 2014.

[71] L. Li, M. J. Hall, and H. M. Wiseman, "Concepts of quantum non-markovianity: A hierarchy," *Physics Reports*, vol. 759, pp. 1–51, 2018.

[72] Á. Rivas, S. F. Huelga, and M. B. Plenio, "Entanglement and non-markovianity of quantum evolutions," *Physical review letters*, vol. 105, no. 5, p. 050403, 2010.

[73] V. Scarani, M. Ziman, P. Štelmachovič, N. Gisin, and V. Bužek, "Thermalizing quantum machines: Dissipation and entanglement," *Physical Review Letters*, vol. 88, no. 9, p. 097905, 2002.

[74] M. Ziman, P. Štelmachovič, and V. Bužek, "Description of quantum dynamics of open systems based on collision-like models," *Open systems & information dynamics*, vol. 12, no. 1, pp. 81–91, 2005.

[75] M. Ziman and V. Bužek, "All (qubit) decoherences: Complete characterization and physical implementation," *Physical Review A*, vol. 72, no. 2, p. 022110, 2005.

[76] N. K. Bernardes, A. R. Carvalho, C. H. Monken, and M. F. Santos, "Coarse graining a non-markovian collisional model," *Physical Review A*, vol. 95, no. 3, p. 032117, 2017.

[77] D. Chruściński, A. Kossakowski, and Á. Rivas, "Measures of non-markovianity: Divisibility versus backflow of information," *Physical Review A*, vol. 83, no. 5, p. 052128, 2011.

[78] M. A. Rossi, C. Benedetti, D. Tamascelli, S. Cialdi, S. Olivares, B. Vacchini, and M. G. Paris, "Non-markovianity by undersampling in quantum optical simulators," *International Journal of Quantum Information*, vol. 15, no. 08, p. 1740009, 2017.

[79] H.-P. Breuer, "Foundations and measures of quantum non-markovianity," *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 45, no. 15, p. 154001, 2012.

[80] E.-M. Laine, J. Piilo, and H.-P. Breuer, "Witness for initial system-environment correlations in open-system dynamics," *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 92, no. 6, p. 60010, 2011.

[81] P. Haikka and S. Maniscalco, "Non-markovian quantum probes," *Open Systems & Information Dynamics*, vol. 21, no. 01n02, p. 1440005, 2014.

[82] S. Wißmann, A. Karlsson, E.-M. Laine, J. Piilo, and H.-P. Breuer, "Optimal state pairs for non-markovian quantum dynamics," *Physical Review A*, vol. 86, no. 6, p. 062108, 2012.

[83] L. H. A. Monteiro, *Sistemas dinâmicos.* Editora Livraria da Física, 2011.

[84] N. Fiedler-Ferrara and C. P. C. do Prado, *Caos: uma introdução.* Editora Blucher, 1994.

[85] E. Ott, *Chaos in dynamical systems.* Cambridge university press, 2002.

[86] G. Nicolis and I. Progogine, *Self-Organisation in Nonequilibrium Systems. From Dissipative Structures to Order through Fluctuations.* John Wiley & Sons, 1977.

[87] M. Ruth and B. Hannon, "The brusselator," in *Modeling Dynamic Biological Systems*, pp. 77–81, Springer, 1997.

[88] L. Arnold, G. Bleckert, and K. R. Schenk-Hoppé, "The stochastic brusselator: Parametric noise destroys hoft bifurcation," *Stochastic dynamics*, pp. 71–92, 1999.

[89] J. Guckenheimer, "Dynamics of the van der pol equation," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 27, no. 11, pp. 983–989, 1980.

[90] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, vol. 42. Springer Science & Business Media, 2013.

[91] J. C. A. Pontes, *Dinâmica de Redes de Mapas Acoplados.* Tese - Universidade Federal do Paraná, 2008.

[92] M. Hénon, "A two-dimensional mapping with a strange attractor," in *The theory of chaotic attractors*, pp. 94–102, Springer, 1976.

[93] B. d. L. Bernardo, "Relating heat and entanglement in strong coupling thermodynamics," *Physical Review E*, vol. 104, 2021.

[94] S. C. Zilio, "Óptica moderna," *São Carlos-SP: Instituto de Física de São Carlos*, vol. 93, pp. 217–233, 2009.

[95] G. R. Fowles, *Introduction to modern optics.* Courier Corporation, 1989.

[96] K. Macieszczak, M. Guţă, I. Lesanovsky, and J. P. Garrahan, "Towards a theory of metastability in open quantum dynamics," *Physical review letters*, vol. 116, no. 24, p. 240404, 2016.

[97] A. Le Boité, M.-J. Hwang, and M. B. Plenio, "Metastability in the driven-dissipative rabi model," *Physical Review A*, vol. 95, no. 2, p. 023829, 2017.

[98] D. Valenti, A. Carollo, and B. Spagnolo, "Stabilizing effect of driving and dissipation on quantum metastable states," *Physical Review A*, vol. 97, no. 4, p. 042109, 2018.

[99] W. Perrie, A. Duncan, H. Beyer, and H. Kleinpoppen, "Polarization correlation of the two photons emitted by metastable atomic deuterium: a test of bell's inequality," *Physical review letters*, vol. 54, no. 16, p. 1790, 1985.

[100] S. Khatri, K. Sharma, and M. M. Wilde, "Information-theoretic aspects of the generalized amplitude-damping channel," *Physical Review A*, vol. 102, no. 1, p. 012401, 2020.

[101] M. Rosati, A. Mari, and V. Giovannetti, "Narrow bounds for the quantum capacity of thermal attenuators," *Nature communications*, vol. 9, no. 1, pp. 1–9, 2018.

[102] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke, *Chaos: an introduction to dynamical systems*. Springer, 1996.

[103] D. Kaplan and L. Glass, *Understanding nonlinear dynamics*. Springer Science & Business Media, 1997.

[104] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Perseus, 1994.

[105] Y. A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, vol. 112. Springer Science & Business Media, 2013.

[106] W. F. Magalhães, C. O. R. Neto, and B. de Lima Bernardo, "Unveiling the markovian to non-markovian transition with quantum collision models," *Physics Open*, p. 100144, 2023.

[107] S. Jevtic, D. Newman, T. Rudolph, and T. M. Stace, "Single-qubit thermometry," *Physical Review A*, vol. 91, no. 1, p. 012331, 2015.

[108] L. Mancino, M. Sbroscia, I. Gianani, E. Roccia, and M. Barbieri, "Quantum simulation of single-qubit thermometry using linear optics," *Physical Review Letters*, vol. 118, no. 13, p. 130502, 2017.

[109] M. Bellini, H. Kwon, N. Biagi, S. Francesconi, A. Zavatta, and M. Kim, "Demonstrating quantum microscopic reversibility using coherent states of light," *Physical Review Letters*, vol. 129, no. 17, p. 170604, 2022.

[110] G. E. Crooks, "Entropy production fluctuation theorem and the nonequilibrium work relation for free energy differences," *Physical Review E*, vol. 60, no. 3, p. 2721, 1999.

[111] S. Iezzi, G; Hazzan, *Fundamentos de matemática elementar*, vol. 4. Atual Editora, 1977.

APÊNDICE A

COMENTÁRIOS SOBRE PRODUTOS TENSORIAIS

Sejam $\{|f\rangle, |e\rangle\}$ ou $\{|\mathcal{E}_f\rangle, |\mathcal{E}_e\rangle\}$ duas bases de autokets de energia para dois diferentes *qubits*. Em termos matriciais, temos que

$$|f\rangle = |\mathcal{E}_f\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

e

$$|e\rangle = |\mathcal{E}_e\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

Para um sistema de dois *qubits*, temos que a base do hamiltoniano composto é $\{|f, \mathcal{E}_f\rangle, |f, \mathcal{E}_e\rangle, |e, \mathcal{E}_f\rangle, |e, \mathcal{E}_e\rangle\}$. Em termos de produto tensorial de matrizes, temos que

$$|f, \mathcal{E}_f\rangle = \begin{pmatrix} 1\,|\mathcal{E}_f\rangle \\ 0\,|\mathcal{E}_f\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Seguindo o mesmo procedimento, temos que

$$|f, \mathcal{E}_e\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{A.4}$$

$$|e, \mathcal{E}_f\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{A.5}$$

e

$$|e, \mathcal{E}_e\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A.6}$$

No caso de um produto externo, tomamos um vetor no espaço dual e fazemos a operação apresentada no exemplo a seguir:

$$|f, \mathcal{E}_f\rangle \langle f, \mathcal{E}_f| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.7}$$

As ideias anteriormente apresentadas se estendem para sistemas de três e quatro *qubits*, como descritas no capítulo 6.

APÊNDICE B

TEOREMA DE LAPLACE

Seja $\hat{\mathbf{W}}$ uma matriz de ordem $n \geq 2$ com elementos W_{lk}. Desta forma, o determinante de $\hat{\mathbf{W}}$ é obtido pela soma de produtos dos elementos de uma coluna ou linha e seus respectivos cofatores, dados por $A_{kl} = (-1)^{k+l} D_{kl}$, tal que eliminando a linha ou coluna que possui o elemento W_{lk}, obtemos uma outra matriz cujo determinante é D_{kl} [111]. Com base nestas ideias, analisemos as situações (i) e (ii) a seguir, onde escolheremos a linha k e a coluna l, respectivamente.

(i) Escolhendo a linha k, temos os elementos de $\hat{\mathbf{W}}$ destacados em negrito, como podemos ver na sequência.

$$\hat{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} W_{11} & \dots & W_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{W_{k1}} & \dots & \mathbf{W_{kn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1} & \dots & W_{nn} \end{pmatrix}. \tag{B.1}$$

Assim,

$$\det(\hat{\mathbf{W}}) = \sum_{m=1}^{n} W_{km} A_{km}. \tag{B.2}$$

Enfatizamos que para determinar A_{km}, precisamos do determinante da matriz construída a partir de $\hat{\mathbf{W}}$, que desconsidera os elementos da linha escolhida (k).

(ii) Escolhendo a coluna l, temos os elementos de $\hat{\mathbf{W}}$ destacados em negrito, como exposto a seguir:

$$\hat{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} W_{11} & \dots & \mathbf{W_{1l}} & \dots & W_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1} & \dots & \mathbf{W_{nl}} & \dots & W_{nn} \end{pmatrix}. \tag{B.3}$$

Nestas condições, temos que

$$\det(\hat{\mathbf{W}}) = \sum_{m=1}^{n} W_{ml} A_{ml}, \tag{B.4}$$

lembrando que para determinar A_{ml}, precisamos do determinante da matriz construída a partir de $\hat{\mathbf{W}}$, que desconsidera os elementos da coluna escolhida (l).

APÊNDICE C

CONTINUAÇÃO DA CONSTRUÇÃO DAS MATRIZES UNITÁRIAS PARA O CASO DA DINÂMICA COM AMBIENTE COMPOSTO POR TRÊS *QUBITS*

Continuaremos empregando a mesma metodologia da seção 6.7 a partir da colisão entre A e C. Contudo, agora faremos um procedimento para facilitar a notação dos operadores unitários. Dada a base dos autoestados de energia do sistema de quatro *qubits* em (6.56) como

$$\begin{aligned}\{&|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,,\\ &|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,,\\ &|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,,\\ &|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\},\end{aligned} \tag{C.1}$$

associaremos os kets anteriores à notação

$$\{|1\rangle\,,|2\rangle\,,|3\rangle\,,|4\rangle\,,|5\rangle\,,|5\rangle\,,|7\rangle\,,|8\rangle\,,|9\rangle\,,|10\rangle\,,|11\rangle\,,|12\rangle\,|13\rangle\,,|14\rangle\,,|15\rangle\,,|16\rangle\}. \tag{C.2}$$

Além de tudo isso, garantimos que $\hat{\mathcal{U}}_j$ (com $j=2,3,4,5,6$) satisfaz a condição $\hat{\mathcal{U}}_j\hat{\mathcal{U}}_j^\dagger = \hat{\mathcal{U}}_j^\dagger\hat{\mathcal{U}}_j = \hat{I}$.

Por fim, apropriaremo-nos das Eqs.(6.81) e (6.82), cujos respectivos resultados são $f_p = \sqrt{1-p}$ e $g_p = \sqrt{p}$.

C.1 Colisão entre A e C

Para esta situação, utilizamos as equações a seguir:

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.3}$$

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.4}$$

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.5}$$

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.6}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.7}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.8}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.9}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.10}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.11}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.12}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.13}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.14}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \tag{C.15}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.16}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.17}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,. \tag{C.18}$$

As relações que têm dois termos do lado direito da seta indicam como que probabilidade p os estados de energia dos *qubits* se alteram devido a colisão, mas temos uma probabilidade $1-p$ de nada acontecer. A partir dessa formulação, definimos o operador unitário que caracteriza a dinâmica:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}_2 = &|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + \sqrt{1-p}\,|3\rangle\langle 3| - \sqrt{p}\,|9\rangle\langle 3| + \sqrt{1-p}\,|4\rangle\langle 4| \\ &- \sqrt{p}\,|10\rangle\langle 4| + |5\rangle\langle 5| + |6\rangle\langle 6| + \sqrt{1-p}\,|7\rangle\langle 7| - \sqrt{p}\,|13\rangle\langle 7| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|8\rangle\langle 8| - \sqrt{p}\,|14\rangle\langle 8| + \sqrt{1-p}\,|9\rangle\langle 9| + \sqrt{p}\,|3\rangle\langle 9| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|10\rangle\langle 10| + \sqrt{p}\,|4\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11| + |12\rangle\langle 12| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|13\rangle\langle 13| + \sqrt{p}\,|7\rangle\langle 13| + \sqrt{1-p}\,|14\rangle\langle 14| \\ &+ \sqrt{p}\,|8\rangle\langle 14| + |15\rangle\langle 15| + |16\rangle\langle 16|\,,\end{aligned} \tag{C.19}$$

cuja forma matricial é

$$\hat{\mathcal{U}}_2 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}, \tag{C.20}$$

lembrando que f_p e g_p são dados nas Eqs. (6.81) e (6.82), respectivamente.

C.2 Colisão entre A e D

Na representação das colisões entre A e D, temos as seguintes relações:

$$|f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f\rangle \to |f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.21}$$

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.22}$$

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.23}$$

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.24}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.25}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.26}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.27}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.28}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.29}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.30}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.31}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.32}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.33}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.34}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \tag{C.35}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.36}$$

onde algumas indicam que após a colisão existe uma probabilidade p dos estados de energia dos *qubits* se alterarem, e uma probabilidade $1-p$ de nada acontecer. A partir disto, podemos definir o operador unitário como

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}_3 = &|1\rangle\langle 1| + \sqrt{1-p}\,|2\rangle\langle 2| - \sqrt{p}\,|9\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3| + \sqrt{1-p}\,|4\rangle\langle 4| \\ &- \sqrt{p}\,|11\rangle\langle 4| + |5\rangle\langle 5| + \sqrt{1-p}\,|6\rangle\langle 6| - \sqrt{p}\,|13\rangle\langle 6| + |7\rangle\langle 7| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|8\rangle\langle 8| - \sqrt{p}\,|15\rangle\langle 8| + \sqrt{1-p}\,|9\rangle\langle 9| + \sqrt{p}\,|2\rangle\langle 9| \\ &+ |10\rangle\langle 10| + \sqrt{1-p}\,|11\rangle\langle 11| + \sqrt{p}\,|4\rangle\langle 11| + |12\rangle\langle 12| \\ &+ \sqrt{1-p}\,|13\rangle\langle 13| + \sqrt{p}\,|6\rangle\langle 13| + |14\rangle\langle 14| + \sqrt{1-p}\,|15\rangle\langle 15| \\ &+ \sqrt{p}\,|8\rangle\langle 15| + |16\rangle\langle 16|\,,\end{aligned} \tag{C.37}$$

o que nos dá

$$\hat{\mathcal{U}}_3 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_p & 0 \\
0 & -g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}, \tag{C.38}$$

onde f_p e g_p são dados nas Eqs. (6.81) e (6.82), respectivamente.

C.3 Colisão entre B e C

Para as colisões entre B e C, temos que

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.39}$$

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to |f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.40}$$

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle - \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.41}$$

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.42}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.43}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.44}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.45}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.46}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.47}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.48}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.49}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.50}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.51}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle + \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.52}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.53}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.54}$$

Das dezesseis últimas equações e com base em métodos anteriormente trabalhados, temos que o operador unitário para as colisões entre B e C fica sendo

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}_4 =& \left|1\right\rangle\left\langle 1\right| + \left|2\right\rangle\left\langle 2\right| + \sqrt{1-p}\left|3\right\rangle\left\langle 3\right| - \sqrt{p}\left|5\right\rangle\left\langle 3\right| + \sqrt{1-p}\left|4\right\rangle\left\langle 4\right| \\ &- \sqrt{p}\left|6\right\rangle\left\langle 4\right| + \sqrt{1-p}\left|5\right\rangle\left\langle 5\right| + \sqrt{p}\left|3\right\rangle\left\langle 5\right| + \sqrt{1-p}\left|6\right\rangle\left\langle 6\right| \\ &+ \sqrt{p}\left|4\right\rangle\left\langle 6\right| + \left|7\right\rangle\left\langle 7\right| + \left|8\right\rangle\left\langle 8\right| + \left|9\right\rangle\left\langle 9\right| + \left|10\right\rangle\left\langle 10\right| + \sqrt{1-p}\left|11\right\rangle\left\langle 11\right| \\ &- \sqrt{p}\left|13\right\rangle\left\langle 11\right| + \sqrt{1-p}\left|12\right\rangle\left\langle 12\right| - \sqrt{p}\left|14\right\rangle\left\langle 12\right| + \sqrt{1-p}\left|13\right\rangle\left\langle 13\right| \\ &+ \sqrt{p}\left|11\right\rangle\left\langle 13\right| + \sqrt{1-p}\left|14\right\rangle\left\langle 14\right| + \sqrt{p}\left|12\right\rangle\left\langle 14\right| + \left|15\right\rangle\left\langle 15\right| + \left|16\right\rangle\left\langle 16\right|,\end{aligned} \tag{C.55}$$

que na forma matricial fica

$$\hat{\mathcal{U}}_4 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & f_p & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & f_p & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -g_p & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -g_p & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & g_p & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_p & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_p & 0 & f_p & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}, \tag{C.56}$$

onde f_p e g_p são dados nas Eqs. (6.81) e (6.82), respectivamente.

C.4 Colisão entre B e D

Para as colisões entre B e C, escrevemos as relações a seguir:

$$\left|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right\rangle \to \left|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right\rangle, \tag{C.57}$$

$$\left|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\right\rangle \to \sqrt{1-p}\left|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\right\rangle - \sqrt{p}\left|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\right\rangle, \tag{C.58}$$

$$\left|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right\rangle \to \left|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\right\rangle, \tag{C.59}$$

$$|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.60}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.61}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.62}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.63}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.64}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.65}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.66}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.67}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.68}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.69}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.70}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.71}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,. \tag{C.72}$$

Agora podemos escrever o operador unitário para as colisões entre B e D como

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}_5 = {} & |1\rangle\langle 1| + \sqrt{1-p}\,|2\rangle\langle 2| - \sqrt{p}\,|5\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3| + \sqrt{1-p}\,|4\rangle\langle 4| \\ & - \sqrt{p}\,|7\rangle\langle 4| + \sqrt{1-p}\,|5\rangle\langle 5| + \sqrt{p}\,|2\rangle\langle 5| + |6\rangle\langle 6| + \sqrt{1-p}\,|7\rangle\langle 7| \\ & + \sqrt{p}\,|4\rangle\langle 7| + |8\rangle\langle 8| + |9\rangle\langle 9| + \sqrt{1-p}\,|10\rangle\langle 10| - \sqrt{p}\,|13\rangle\langle 10| \\ & + |11\rangle\langle 11| + \sqrt{1-p}\,|12\rangle\langle 12| - \sqrt{p}\,|15\rangle\langle 12| + \sqrt{1-p}\,|13\rangle\langle 13| \\ & + \sqrt{p}\,|10\rangle\langle 13| + |14\rangle\langle 14| + \sqrt{1-p}\,|15\rangle\langle 15| + \sqrt{p}\,|12\rangle\langle 15| + |16\rangle\langle 16|\,,\end{aligned} \tag{C.73}$$

cuja forma da matriz é

$$\hat{\mathcal{U}}_5 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & f_p & 0 & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -g_p & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -g_p & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & g_p & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & g_p & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_p & 0 & 0 & f_p & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_p & 0 & 0 & f_p & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}, \tag{C.74}$$

onde f_p e g_p são dados nas Eqs. (6.81) e (6.82), respectivamente.

C.5 Colisão entre C e D

Finalizando as ideias da seção 6.7, definiremos as equações que representam as possíveis alterações (ou não) dos níveis de energia do sistema, a partir das colisões entre C e D. Portanto,

$$|f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f\rangle \to |f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.75}$$

$$|f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.76}$$

$$|f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.77}$$

$$|f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_e\rangle \to |f, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.78}$$

$$|f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f\rangle \to |f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.79}$$

$$|f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|f, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_e, \mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.80}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.81}$$

$$|f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to |f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.82}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.83}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.84}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.85}$$

$$|e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to |e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.86}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle \to |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_f\rangle\,, \tag{C.87}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle - \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \tag{C.88}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle \to \sqrt{1-p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f\rangle + \sqrt{p}\,|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_f,\mathcal{E}_e\rangle\,, \tag{C.89}$$

$$|e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle \to |e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e,\mathcal{E}_e\rangle\,. \tag{C.90}$$

Agora podemos escrever o operador unitário para as colisões entre C e D como

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}_6 = {} & |1\rangle\langle 1| + \sqrt{1-p}\,|2\rangle\langle 2| - \sqrt{p}\,|3\rangle\langle 2| + \sqrt{1-p}\,|3\rangle\langle 3| + \sqrt{p}\,|2\rangle\langle 3| + |4\rangle\langle 4| \\ & + |5\rangle\langle 5| + \sqrt{1-p}\,|6\rangle\langle 6| - \sqrt{p}\,|7\rangle\langle 6| + \sqrt{1-p}\,|7\rangle\langle 7| + \sqrt{p}\,|6\rangle\langle 7| \\ & + |8\rangle\langle 8| + |9\rangle\langle 9| + \sqrt{1-p}\,|10\rangle\langle 10| - \sqrt{p}\,|11\rangle\langle 10| + \sqrt{1-p}\,|11\rangle\langle 11| \\ & + \sqrt{p}\,|10\rangle\langle 11| + |12\rangle\langle 12| + |13\rangle\langle 13| + \sqrt{1-p}\,|14\rangle\langle 14| - \sqrt{p}\,|15\rangle\langle 14| \\ & + \sqrt{1-p}\,|15\rangle\langle 15| + \sqrt{p}\,|14\rangle\langle 15| + |16\rangle\langle 16|\,,\end{aligned} \tag{C.91}$$

que nos fornece a matriz

$$\hat{\mathcal{U}}_6 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & f_p & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -g_p & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_p & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & g_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_p & f_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_p & g_p & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_p & f_p & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}, \tag{C.92}$$

onde f_p e g_p são dados nas Eqs. (6.81) e (6.82), respectivamente.

APÊNDICE D

ALGUNS ALGORITMOS

Neste apêndice, temos por objetivo descrever os algoritmos utilizados para obter os valores do traço da distância e da norma da coerência na interação do sistema principal com os ambientes de um e dois *qubits* em estados térmicos. Os algoritmos para o ambiente com três *qubits* têm a lógica parecida com as descrições das seções D.3 e D.4.

D.1 Traço da distância para a interação do sistema principal com o ambiente de um *qubit*

Entrada: p, número de colisões n, coeficientes a e b do primeiro estado inicial $|\psi_1(0)\rangle$ de A , coeficientes a e b do segundo estado inicial $|\psi_1(0)\rangle$ de A, w_f, w_e, $\hat{U}$, $\hat{I}\otimes|\mathcal{E}_f\rangle$, $\hat{I}\otimes|\mathcal{E}_e\rangle$, $\hat{I}\otimes\langle\mathcal{E}_f|$ e $\hat{I}\otimes\langle\mathcal{E}_e|$.

Saída: Número da colisão e traço da distância $\mathcal{D}$ associado à colisão.

Passo 1: Construa $\hat{\rho}_A^1$, $\hat{\rho}_A^2$ e $\hat{\rho}_B$.

Passo 2: Para $j = 1, ..., n$, faça do passo 3 ao 8.

Passo 3: Efetue os produtos de matrizes: $\hat{U}\Big(\hat{\rho}_A^1\otimes\hat{\rho}_B\Big)\hat{U}^\dagger$ e $\hat{U}\Big(\hat{\rho}_A^2\otimes\hat{\rho}_B\Big)\hat{U}^\dagger$.

Passo 4: Obtenha $\hat{\rho}_A^1 = \sum_{k=f}^{e}\hat{I}\otimes\langle\mathcal{E}_k|\left[\hat{U}\Big(\hat{\rho}_A^1\otimes\hat{\rho}_B\Big)\hat{U}^\dagger\right]\hat{I}\otimes|\mathcal{E}_k\rangle$ e $\hat{\rho}_A^2 = \sum_{k=f}^{e}\hat{I}\otimes\langle\mathcal{E}_k|\left[\hat{U}\Big(\hat{\rho}_A^2\otimes\hat{\rho}_B\Big)\hat{U}^\dagger\right]\hat{I}\otimes|\mathcal{E}_k\rangle$.

Passo 5: Obtenha $\hat{M} = \hat{\rho}_A^1 - \hat{\rho}_A^2$.

Passo 6: Defina os autovalores γ_1 e γ_2 de $\hat{M}$.

Passo 7: Calcule $\mathcal{D} = 0{,}5\sum_{l=1}^{2}|\gamma_l|$.

Passo 8: Saída (j, $\mathcal{D}$).

Passo 9: Pare.

D.2 Norma da coerência do sistema principal para a interação com o ambiente de um *qubit*

Entrada: p, número de colisões n, a, b, w_f, w_e, $\hat{U}$, $\hat{I}\otimes|\mathcal{E}_f\rangle$, $\hat{I}\otimes|\mathcal{E}_e\rangle$, $\hat{I}\otimes\langle\mathcal{E}_f|$ e $\hat{I}\otimes\langle\mathcal{E}_e|$.

Saída: Número da colisão e a norma da coerência C_A associada à colisão.

Passo 1: Construa $\hat{\rho}_A$ e $\hat{\rho}_B$.

Passo 2: Para $j = 1, ..., n$, faça do passo 3 ao 6.

Passo 3: Efetue o produto de matriz: $\hat{U}\Big(\hat{\rho}_A\otimes\hat{\rho}_B\Big)\hat{U}^{\dagger}$.

Passo 4: Obtenha $\hat{\rho}_A = \sum_{k=f}^{e}\hat{I}\otimes\langle\mathcal{E}_k|\left[\hat{U}\Big(\hat{\rho}_A\otimes\hat{\rho}_B\Big)\hat{U}^{\dagger}\right]\hat{I}\otimes|\mathcal{E}_m\rangle$.

Passo 5: Calcule $C_A = \sum\limits_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{2}|\rho_A(j,k)|$.

Passo 6: Saída (j, C_A).

Passo 7: Pare.

D.3 Traço da distância para a interação do sistema principal com o ambiente de dois *qubits*

Entrada: p, número de colisões n, coeficientes a e b do primeiro estado inicial $|\psi_1(0)\rangle$ de A , coeficientes a e b do segundo estado inicial $|\psi_1(0)\rangle$ de A, w_f, w_e, $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$, $\hat{U}_3$, $\hat{I}\otimes|\mathcal{E}_f\rangle\otimes|\mathcal{E}_f\rangle$, $\hat{I}\otimes|\mathcal{E}_f\rangle\otimes|\mathcal{E}_e\rangle$, $\hat{I}\otimes|\mathcal{E}_e\rangle\otimes|\mathcal{E}_f\rangle$, $\hat{I}\otimes|\mathcal{E}_e\rangle\otimes|\mathcal{E}_e\rangle$, $\hat{I}\otimes\langle\mathcal{E}_f|\otimes\langle\mathcal{E}_f|$, $\hat{I}\otimes\langle\mathcal{E}_f|\otimes\langle\mathcal{E}_e|$, $\hat{I}\otimes\langle\mathcal{E}_e|\otimes\langle\mathcal{E}_f|$ e $\hat{I}\otimes\langle\mathcal{E}_e|\otimes\langle\mathcal{E}_e|$.

Saída: Número da colisão e traço da distância $\mathcal{D}$ associado à colisão.

Passo 1: Construa $\hat{\rho}_A^1$, $\hat{\rho}_A^2$, $\hat{\rho}_B$ e $\hat{\rho}_C$.

Passo 2: Para $j = 1, ..., n$, faça do passo 3 ao 18.

Passo 3: Se é dada certa condição aleatória, efetue os produtos de matrizes: $\hat{U}_1\Big(\hat{\rho}_A^1\otimes\hat{\rho}_B\Big)\hat{U}_1^{\dagger}$ e $\hat{U}_1\Big(\hat{\rho}_A^2\otimes\hat{\rho}_B\Big)\hat{U}_1^{\dagger}$.

Passo 4: Obtenha $\hat{\rho}_A^1 = \sum_{k=f}^{e} \hat{I} \otimes \langle \mathcal{E}_k| \otimes \langle \mathcal{E}_k| \left[\hat{U}_1\Big(\hat{\rho}_A^1 \otimes \hat{\rho}_B\Big)\hat{U}_1^\dagger\right] \hat{I} \otimes |\mathcal{E}_k\rangle \otimes |\mathcal{E}_k\rangle$ e $\hat{\rho}_A^2 = \sum_{k=f}^{e} \hat{I} \otimes \langle \mathcal{E}_k| \otimes \langle \mathcal{E}_k| \left[\hat{U}_1\Big(\hat{\rho}_A^2 \otimes \hat{\rho}_B\Big)\hat{U}_1^\dagger\right] \hat{I} \otimes |\mathcal{E}_k\rangle \otimes |\mathcal{E}_k\rangle$.

Passo 5: Obtenha $\hat{M}_1 = \hat{\rho}_A^1 - \hat{\rho}_A^2$.

Passo 6: Defina os autovalores γ_1 e γ_2 de $\hat{M}_1$.

Passo 7: Calcule $\mathcal{D}_1 = 0{,}5 \sum_{l=1}^{2} |\gamma_l|$.

Passo 8: Se é dada certa condição aleatória, efetue os produtos de matrizes: $\hat{U}_2\Big(\hat{\rho}_A^1 \otimes \hat{\rho}_C\Big)\hat{U}_2^\dagger$ e $\hat{U}_2\Big(\hat{\rho}_A^2 \otimes \hat{\rho}_C\Big)\hat{U}_2^\dagger$.

Passo 9: Obtenha $\hat{\rho}_A^1 = \sum_{k=f}^{e} \hat{I} \otimes \langle \mathcal{E}_k| \otimes \langle \mathcal{E}_k| \left[\hat{U}_2\Big(\hat{\rho}_A^1 \otimes \hat{\rho}_B\Big)\hat{U}_2^\dagger\right] \hat{I} \otimes |\mathcal{E}_k\rangle \otimes |\mathcal{E}_k\rangle$ e $\hat{\rho}_A^2 = \sum_{k=f}^{e} \hat{I} \otimes \langle \mathcal{E}_k| \otimes \langle \mathcal{E}_k| \left[\hat{U}_2\Big(\hat{\rho}_A^2 \otimes \hat{\rho}_B\Big)\hat{U}_2^\dagger\right] \hat{I} \otimes |\mathcal{E}_k\rangle \otimes |\mathcal{E}_k\rangle$.

Passo 10: Obtenha $\hat{M}_2 = \hat{\rho}_A^1 - \hat{\rho}_A^2$.

Passo 11: Defina os autovalores γ_1' e γ_2' de $\hat{M}_2$.

Passo 12: Calcule $\mathcal{D}_2 = 0{,}5 \sum_{l=1}^{2} |\gamma_l'|$.

Passo 13: Se é dada certa condição aleatória, efetue os produtos de matrizes: $\hat{U}_3\Big(\hat{\rho}_B \otimes \hat{\rho}_C\Big)\hat{U}_3^\dagger$.

Passo 14: Obtenha $\hat{\rho}_A^1 = \sum_{k=f}^{e} \hat{I} \otimes \langle \mathcal{E}_k| \otimes \langle \mathcal{E}_k| \left[\hat{U}_3\Big(\hat{\rho}_A^1 \otimes \hat{\rho}_B\Big)\hat{U}_3^\dagger\right] \hat{I} \otimes |\mathcal{E}_k\rangle \otimes |\mathcal{E}_k\rangle$ e $\hat{\rho}_A^2 = \sum_{k=f}^{e} \hat{3} \otimes \langle \mathcal{E}_k| \otimes \langle \mathcal{E}_k| \left[\hat{U}_3\Big(\hat{\rho}_A^2 \otimes \hat{\rho}_B\Big)\hat{U}_3^\dagger\right] \hat{I} \otimes |\mathcal{E}_k\rangle \otimes |\mathcal{E}_k\rangle$.

Passo 15: Obtenha $\hat{M}_3 = \hat{\rho}_A^1 - \hat{\rho}_A^2$.

Passo 16: Defina os autovalores γ_1'' e γ_2'' de $\hat{M}_3$.

Passo 17: Calcule $\mathcal{D}_3 = 0{,}5 \sum_{l=1}^{2} |\gamma_l''|$.

Passo 18: Saída (j, $\mathcal{D}_m$), onde $m = 1, 2, 3$.

Passo 19: Pare.

D.4 Norma da coerência do sistema principal para a interação com o ambiente de dois *qubits*

Entrada: p, número de colisões n, a, b, w_f, w_e, $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$, $\hat{U}_3$, $\hat{I} \otimes |\mathcal{E}_f\rangle \otimes |\mathcal{E}_f\rangle$, $\hat{I} \otimes |\mathcal{E}_f\rangle \otimes |\mathcal{E}_e\rangle$, $\hat{I} \otimes |\mathcal{E}_e\rangle \otimes |\mathcal{E}_f\rangle$, $\hat{I} \otimes |\mathcal{E}_e\rangle \otimes |\mathcal{E}_e\rangle$, $\hat{I} \otimes \langle \mathcal{E}_f| \otimes \langle \mathcal{E}_f|$, $\hat{I} \otimes \langle \mathcal{E}_f| \otimes \langle \mathcal{E}_e|$, $\hat{I} \otimes \langle \mathcal{E}_e| \otimes \langle \mathcal{E}_f|$ e $\hat{I} \otimes \langle \mathcal{E}_e| \otimes \langle \mathcal{E}_e|$.

Saída: Número da colisão e a norma da coerência C_A associada à colisão.

Passo 1: Construa $\hat{\rho}_A$, $\hat{\rho}_B$ e $\hat{\rho}_C$.

Passo 2: Para $j = 1, ..., n$, faça do passo 3 ao 12.

Passo 3: Se é dada certa condição aleatória, efetue os produtos de matrizes: $\hat{U}_1\Big(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B\Big)\hat{U}_1^\dagger$.

Passo 4: Obtenha $\hat{\rho}_A = \sum_{k=f}^{e} \hat{I} \otimes \langle \mathcal{E}_k| \otimes \langle \mathcal{E}_k| \left[\hat{U}_1\Big(\hat{\rho}_A^1 \otimes \hat{\rho}_B\Big)\hat{U}_1^\dagger\right] \hat{I} \otimes |\mathcal{E}_k\rangle \otimes |\mathcal{E}_k\rangle$.

Passo 5: Calcule $C_{A,1} = \sum\limits_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{2} |\rho_A(j,k)|$.

Passo 6: Se é dada certa condição aleatória, efetue os produtos de matrizes: $\hat{U}_2\Big(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B\Big)\hat{U}_2^\dagger$.

Passo 7: Obtenha $\hat{\rho}_A = \sum_{k=f}^{e} \hat{I} \otimes \langle \mathcal{E}_k| \otimes \langle \mathcal{E}_k| \left[\hat{U}_2\Big(\hat{\rho}_A^1 \otimes \hat{\rho}_B\Big)\hat{U}_2^\dagger\right] \hat{I} \otimes |\mathcal{E}_k\rangle \otimes |\mathcal{E}_k\rangle$.

Passo 8: Calcule $C_{A,2} = \sum\limits_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{2} |\rho_A(j,k)|$.

Passo 9: Se é dada certa condição aleatória, efetue os produtos de matrizes: $\hat{U}_3\Big(\hat{\rho}_B \otimes \hat{\rho}_C\Big)\hat{U}_3^\dagger$.

Passo 10: Obtenha $\hat{\rho}_A = \sum_{k=f}^{e} \hat{I} \otimes \langle \mathcal{E}_k| \otimes \langle \mathcal{E}_k| \left[\hat{U}_3\Big(\hat{\rho}_B^1 \otimes \hat{\rho}_C\Big)\hat{U}_3^\dagger\right] \hat{I} \otimes |\mathcal{E}_k\rangle \otimes |\mathcal{E}_k\rangle$.

Passo 11: Calcule $C_{A,3} = \sum\limits_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{2} |\rho_A(j,k)|$.

Passo 12: Saída $(j, C_{A,m})$, onde $m = 1, 2, 3$.

Passo 13: Pare.