

João Marcos Lucena da Costa

Princípios variacionais na física

João Pessoa - PB

2024

João Marcos Lucena da Costa

Princípios variacionais na física

Trabalho de conclusão do curso de graduação
em Física do Centro de Ciências Exatas e da
Natureza da Universidade Federal da Paraíba
como requisito parcial para a obtenção do
título de Bacharel em Física.

Universidade Federal da Paraíba – UFPB

Centro de Ciências Exatas e da Natureza – CCEN

Departamento de Física – DF

Orientador: Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho

João Pessoa - PB

2024

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C838p Costa, João Marcos Lucena da.
Princípios variacionais na física / João Marcos
Lucena da Costa. - João Pessoa, 2024.
43 p. : il.

Orientação: Carlos Augusto Romero Filho.
TCC (Curso de Bacharelado em Física) - UFPB/CCEN.

1. Eletromagnetismo. 2. Teoria de Hamilton-Jacobi.
3. Fermat. 4. Física. I. Romero Filho, Carlos Augusto.
II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 53(043.2)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Coordenação dos Cursos de Graduação em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa do
Trabalho de Conclusão de Curso de
Bacharelado em Física, do discente João
Marcos Lucena Costa.

Aos 24 dias do mês de abril do ano de 2024, às 16h, na sala 201/DF, realizou-se a Sessão Pública da Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso de Bacharelado em Física, do discente João Marcos Lucena Costa, sendo a Banca Examinadora constituída pelos docentes Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho, orientador e presidente da banca, Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia e Prof. Dr. Paulo José Porfírio Ferreira da Silva. Dando início aos trabalhos, o professor orientador e presidente da banca examinadora comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, concedeu a palavra ao discente para que fizesse a explanação de seu Trabalho de Conclusão de Curso, intitulado “Princípios Variacionais na Física”. Concluída a exposição, o discente foi arguido pelos membros presentes da Banca Examinadora. Após as arguições, a Banca, de comum acordo, declarou que o trabalho apresentado foi aprovado com nota 9,0 (nove). E para constar, encerrada a sessão, lavrou-se esta ata que será assinada pelos presentes. João Pessoa, 24 de abril de 2024.

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
UFPB – Orientador

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia

Prof. Dr. Paulo José Ferreira Porfírio da Silva

*Dedicatória: a terna semente que germinou o fermento da curiosidade nas entrelinhas de
minha consciência, dedico-te este trabalho.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha família que apesar das divergências em relação às minhas escolhas de carreira, conseguiram superar essas discordâncias e foram as pessoas que mais me apoiaram quando notaram a chama da paixão pelo conhecimento e pelo amor à física. Irei desenvolver um obrigado mais especial para meus pais, obrigado pai por ter sido uma influência fundamental para meu gosto por literatura, creio que isso tenha desembocado no gosto pelos estudos e em especial pela curiosidade para conhecer o mundo. O outro obrigado vai para minha querida e terna mãe, apesar das nossas divergências cotidianas que ocorrem graças ao fato de que tive a doce oportunidade de ter sido mimado pela senhora, agradeço por você sempre ter puxado minhas orelhas quando desviei para caminhos errôneos, se tomei decisões certas na vida, elas certamente vieram graças a você, obrigado por tudo que a senhora fez para que eu tivesse as melhores condições para crescer como cresci, repleto de confortos e oportunidade para tomar as minhas próprias decisões.

Quero agradecer diretamente ao Mattheus, grande amigo que acompanhou o surgimento da minha paixão pela física e que foi de grande importância nesses últimos anos para manter minha mente no eixo correto, você é uma das minhas grandes referências de vida. Quero também agradecer às pessoas que pude me aproximar por meio dele e que foram grandes colaboradores para essa jornada de minha vida, entre essas pessoas estão Breno e Rodrigo, obrigado por me aguentarem reclamando sobre os estresses que estavam passando e por sempre me confortarem falando sobre suas respectivas experiências durante seus cursos, sem vocês eu estaria em apuros.

Em especial, gostaria de agradecer algumas pessoas que foram de fundamental importância na minha formação acadêmica. A Rennan Gomes e Renan Aversari, eles foram companhias fundamentais nas horas vagas para manter a chama do conhecimento, nossas conversas foram essenciais para que meu amor pela física nunca se esvaísse, um obrigado em especial para Rennan Gomes, meu grande companheiro de guerra durante essa jornada da física, você é uma das pessoas mais excepcionais que eu tive a oportunidade de conhecer nesse período, não só pelo grande exemplo de cérebro que você tem mas pela doçura inerente a sua personalidade, obrigado Rennan. Gostaria também de agradecer à João que conheci através de Cláudio, esse não está mais por João Pessoa mas foi essencial para formação de nosso grupinho de ciclismo doido, obrigado à vocês e também à Lei e Carol. Ob Algumas pessoas que estão fora do escopo do curso mas que foram de fundamental importância também, esse obrigado em especial vai para Assuério e Ginaldo, Assuério foi o grande responsável pelo despertar de uma nova paixão que germinou durante o curso, a paixão pela matemática, seus discursos eloquentes excitam o mais desacreditado dos públicos, só tenho a agradecer por escutar você falando sobre matemática. Agora,

para Ginaldo, grande amigo que eu tive a oportunidade de conhecer a partir de Renato, esse também merece meus agradecimentos especiais pelas jornadas que tivemos juntos durante o curso e pelos sofrimentos compartilhados nas respectivas situações de vida, quero agradecer pelas conversas na COPA da pós graduação que tive o privilégio de conhecer graças a você, sua maturidade e seus comentários incentivadores foram um dos principais motivos que me mantiveram no caminho certo mesmo em momentos de tão grande desmotivação. Por fim, gostaria de agradecer ao nosso pequeno grupo de fofocas que criamos para manter a sanidade durante o processo de formação, neles estão incluídos Lukas, Rafa, Fernanda, Inês e Nan; esse grupo permitiu humanizar ainda mais o processo de formação que é cheio de caminhos tão tortuosos, obrigado por todas as risadas gratuitas que vocês foram capazes de tirar durante os dias insalubres na universidade, obrigado à Tarcila também, companheira de disciplinas que me entregou várias anotações quando eu estava sem capacidades mentais de frequentar as aulas e foi palco de adoráveis conversas durante os dias cansativos no departamento. São tantas pessoas para agradecer que não posso esquecer dos meus companheiros de guerra que adentraram o curso comigo em 2019, graças às nossas interações incentivadoras e nossa empolgação conseguimos galgar esse caminho tortuoso incentivando um ao outro, seja para os estudos nas disciplinas mais difíceis de digerir, seja para conseguir iniciação científica, seja para deixar o ambiente em sala de aula mais leve com nossas piadas ridículas e nosso humor duvidoso, esse obrigado vai para Carlos, Arthur, Gabriel, Edson, José, Natali, Rennan.

Aos meus grandes amigos de infância que participaram na minha formação de vida e que corroboraram no processo de construção do que hoje sou eu. Nossas noites gloriosas na adolescência foram essenciais para o que sou hoje e queria deixar esse texto terno que, mesmo que Lucas, por exemplo, esteja longe, a nossa relação causal é válida mesmo para intervalos do tipo espaço, como diria em linguagem relativística. Um obrigado especial para Anastas e João Francisco, que sempre estão lá quando eu preciso e compartilham as trincheiras da vida comigo. Como diria Hemingway, quem está com você nas trincheiras importa mais do que a guerra em si.

Ao meu querido professor, Carlos Augusto Romero Filho, no qual tenho o prazer de estar com ele desde do segundo período do curso de física, sempre foi um prazer ser banhado por sua sabedoria e escutar-lo por longas reuniões falando sobre as diversas áreas da física, foi fundamental para meu amadurecimento enquanto físico e para chegar nesse ponto de transição no curso. Obrigado por esses anos de iniciação científica e orientação sobre o estágio, você é o motor principal da minha chama pela física, estar com o senhor durante esse processo de escrita pelo TCC me motivou a continuar estudando física, muito obrigado por todos esses anos de aprendizado.

Esse parágrafo, em especial, dedico a algumas pessoas que não estão mais presentes na minha vida devido aos caminhos aleatórios que a vida propõe. Algumas delas foram

abrigo nas horas difíceis e me forneceram forças para continuar no curso, obrigado à todas essas pessoas que, apesar de não estarem mais comigo, conseguiram transmutar o inverno na primavera, agradeço do fundo do meu coração.

Por fim, gostaria de agradecer às minhas duas falecidas gatas, Maria e Isabel, elas foram de fundamental importância durante essa trajetória. Seu amor indiscreto e sincero foi a semente da paixão dos meus dias, seu terno carinho foi combustível, não só no curso, como também na vida, obrigado meus queridos amores, amo vocês. E não menos importante, para minha viva Maria, minha querida gordinha preta que compartilha do ambiente íntimo e pessoal comigo, amo você profundamente.

*É sempre assim, pensei, o mistério só existe
do outro lado das portas. Minto. O mistério
está mesmo é do lado de cá. Para que procurar
outro mundo, se o nosso já é tão incompreensível
como ele?
(Mario Quintana)*

Resumo

Esse trabalho tem como finalidade estabelecer uma relação entre a óptica geométrica e a mecânica clássica, vimos isso por meio da chamada aproximação do comprimento de onda pequeno que nos permite ignorar efeitos microscópicos como difração e interferência no contexto de propagação de ondas em meios materiais. Com isso, obtemos imediatamente o princípio de Fermat que foi enunciado antes do surgimento do eletromagnetismo e é um corolário imediato do estudo de ondas eletromagnéticas. Após isso, adentramos no princípio mecânico enunciado no século 18, o princípio de Maupertuis que em sua primeira forma esconde, implicitamente, sua analogia com o princípio de Fermat, Jacobi foi responsável por enunciar uma forma modificada que mostra a semelhança entre esses dois princípios. Após isso, foram vistos os principais resultados da teoria de Hamilton-Jacobi que leva ao surgimento de uma suposta equação Eikonal para o contexto de partículas no espaço de configuração. Conclui-se, portanto, que a mecânica clássica é uma suposta aproximação de uma teoria ondulatória mais geral e, com a função fundamental de Hamilton, é possível construir à fase dessa suposta onda que está se propagando no espaço de fase. Vimos que a energia é discretizada e é possível obter a relação de De Broglie sobre esse ponto de vista, ainda mais, descobrimos que a equação de Hamilton-Jacobi é a equação de Schrödinger clássica. Por fim, obtemos a equação de Euler-Lagrange para o princípio de Fermat e vimos que conseguimos obter o equivalente à segunda lei de Newton para o estudo de feixes de luz no contexto da óptica geométrica. Além disso, percorremos o estudo das integrais de caminho de Feynman que servem como uma reinterpretação do princípio de Huygens.

Palavras-chave: Eletromagnetismo, teoria de Hamilton-Jacobi, Princípio de Fermat.

Abstract

This work aims to establish a relationship between geometric optics and classical mechanics. We saw this through the so-called short wavelength approximation that allows us to ignore microscopic effects such as diffraction and interference in the context of wave propagation in material media. With this, we immediately obtain Fermat's principle, which was stated before the emergence of electromagnetism and is an immediate corollary of the study of electromagnetic waves. After this, we enter the mechanical principle enunciated in the 18th century, the Maupertuis principle, which in its first form implicitly hides its analogy with Fermat's principle. Jacobi was responsible for enunciating a modified form that shows the similarity between these two principles. After that, the main results of the Hamilton-Jacobi theory were seen, which leads to the emergence of a supposed Eikonal equation for the context of particles in configuration space. It is concluded, therefore, that classical mechanics is a supposed approximation of a more general wave theory and, with Hamilton's fundamental function, it is possible to construct the phase of this supposed wave that is propagating in phase space. We saw that energy is discretized and it is possible to obtain the De Broglie relation from this point of view, furthermore, we discovered that the Hamilton-Jacobi equation is the classical Schrödinger equation. Finally, we obtained the Euler-Lagrange equation for Fermat's principle and saw that we were able to obtain the equivalent of Newton's second law for the study of light beams in the context of geometric optics. Furthermore, we covered the study of Feynman path integrals that serve as a reinterpretation of Huygens' principle. **Keywords:** Electromagnetism, Hamilton-Jacobi theory, Fermat principle.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ilustração do vetor de polarização.	15
Figura 2 – Frentes de onda definidas por uma função arbitrária $R(\mathbf{r})$	18
Figura 3 – Feixe de luz saindo do ponto A e chegando no ponto B.	20
Figura 4 – Variação envolvida no princípio de Maupertuis.	21
Figura 5 – Variação envolvida na demonstração do teorema 3.3.2.	28
Figura 6 – Frentes de onda se propagando no espaço de configuração.	29
Figura 7 – Frentes de onda definidas pelas superfícies constantes determinadas pela função principal de Hamilton para o caso do oscilador.	32
Figura 8 – Trajetórias dos raios de luz dadas pelo índice de refração $n = \sqrt{2 - r^2}$	36
Figura 9 – Feixes de luz vindo do infinito positivo sendo focalizados em único ponto dentro da lente de Luneberg.	38
Figura 10 – A figura acima representa dois caminhos virtuais ao redor do caminho verdadeiro, elas começam com a mesma amplitude na região inferior direita mas acabam com amplitude invertidas no canto superior esquerdo, e cancelam entre si de acordo com o princípio da superposição.	40
Figura 11 – Frentes de ondas planas colidindo com aparato que possui duas fen- das, como as fendas possuem dimensão de comprimento de onda, elas funcionam como fontes pontuais e, portanto, causam um padrão de interferência no anteparo mais a direita. Os vales são representados pelas linhas tracejadas e as cristas pelas linhas normais.	42
Figura 12 – Experimento da fenda dupla, o caminho dois é mais longo que o 1 por uma distância d , e portanto a fase será aumentada por um fator de $\frac{2\pi d}{\lambda}$, com λ sendo o comprimento de onda de De Broglie. A interferência construtiva ou destrutiva ocorrerá para certos valores de d . Essa imagem foi tirada de (PESKIN; SCHROEDER, 2007).	43

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	ALGUNS ELEMENTOS BÁSICOS DO ELETROMAGNETISMO . . .	14
2.1	Equações de Maxwell na matéria	14
2.1.1	Índice de refração	16
2.1.2	Equação Eikonal	17
2.1.3	Princípio de Fermat	19
3	ALGUNS ELEMENTOS DA MECÂNICA CLÁSSICA	21
3.1	Princípio de Maupertuis	21
3.2	Princípio de Jacobi	24
3.3	Teoria de Hamilton-Jacobi	24
3.4	Teoria de Hamilton-Jacobi, óptica geométrica e mecânica ondulatória .	29
3.5	Analogia Newtoniana	33
3.6	Equações de Hamilton e o princípio de Huygens	39
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	44
	REFERÊNCIAS	45

1 Introdução

A física teórica tem como um de seus objetivos primordiais obter a explicação de todos os fenômenos naturais em um único princípio. Dentre as leis descobertas durante os séculos, o princípio da mínima ação, desenvolvido por Hamilton, é o que mais se aproxima desse objetivo final da física teórica.

O primeiro princípio variacional da mecânica foi proposto por Maupertuis em 1744, que pretendeu não apenas dar uma base racional mas também teológica para a mecânica, pressupondo que esse princípio era a prova do poder e da sabedoria de Deus. Além do mais, Pierre de Fermat estabeleceu um princípio físico destinado à desenhar os contornos da óptica geométrica, e também foi responsável por dar os fundamentos da dinâmica Hamiltoniana e Lagrangiana. Sob condições específicas, Jacobi formulou a chamada forma de Jacobi para o princípio de Maupertuis, fazendo com que o princípio de Jacobi torne-se idêntico ao princípio de Fermat da óptica geométrica para a propagação de luz num meio não-homogêneo com índice de refração proporcional a $\sqrt{E - V}$. Estabelecendo uma analogia da mecânica clássica com a óptica geométrica.

A formulação mais concisa da dinâmica clássica tem a forma de um princípio variacional. Segundo esse princípio, a natureza segue o curso mais econômico de acordo com um critério de comparação entre as diversas possibilidades de escolhas. O princípio diferencial de d'Alembert nos dá a lei fundamental do movimento em termos da configuração instantânea do sistema e de desvios infinitesimais da referida configuração. É possível reformular essa lei como um princípio integral que leva em conta o movimento do sistema durante um intervalo finito de tempo. O princípio de Hamilton reduz as leis da mecânica a um enunciado simples.

Por fim, a teoria desenvolvida por Hamilton e Jacobi chamada de teoria de Hamilton-Jacobi é um método construtivo que permite produzir uma transformação canônica sobre o espaço de fase capaz de simplificar as equações de movimento de um sistema descrito pela hamiltoniana. Essa teoria desempenhou um papel crucial na construção da "mecânica ondulatória" por Schrödinger apoiada, principalmente, na analogia entre mecânica e a óptica geométrica, a qual induziu Schrödinger a pensar que se a mecânica clássica fosse uma forma aproximada de uma mecânica ondulatória. O fato da mecânica clássica não ser aplicável a fenômenos microscópicos seria análogo ao fato da óptica geométrica ser incapaz de explicar fenômenos como difração e interferência da luz.

2 Alguns elementos básicos do Eletromagnetismo

As equações de Maxwell constituem uma forma compacta de representar as leis que regem o eletromagnetismo. Elas podem ser escritas na seguinte forma

i. $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$

ii. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$

iii. $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$

iv. $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$

elas, juntamente com a força de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

resumem todo o conteúdo teórico da eletrodinâmica clássica. Até a equação de continuidade, que representaria a expressão matemática da conservação de carga, está contida implicitamente na equação número (iv.). No entanto, essas equações por mais que estejam completas e corretas na forma como estão formuladas, não são adequadas para fazer um estudo sistemático na presença de matéria. Nest capítulo, iremos deduzir as equações de Maxwell na matéria e faremos um estudo sistemático da propagação de ondas em meios homogêneos, isotrópicos e lineares.

2.1 Equações de Maxwell na matéria

Para começar a análise das equações de Maxwell em meios materiais, é preciso fazer uma breve discussão sobre a densidade de corrente $\mathbf{J}$ e a densidade de carga. Por conveniência, é comum decompor a densidade de corrente em três termos

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_m + \mathbf{J}_p$$

Primeiramente, é claro que correntes surgem pelo movimento de cargas livres, tais como elétrons nos metais. Esse tipo de corrente é denominada de $\mathbf{J}_1$. Em segundo lugar, átomos individuais podem apresentar correntes internas que geram efeitos paramagnéticos e diamagnéticos, que denotamos por $\mathbf{J}_m$, e como são de importância irrelevante para o estudo consideraremos $\mathbf{J}_m = 0$. O terceiro termo da equação acima refere-se a materiais dielétricos cujas as cargas estão ligadas a moléculas individuais e não podem se movimentar

livremente sobre o material. Embora estejam ligadas, elas podem ser distorcidas quando sujeitas a um campo elétrico externo induzindo, portanto, uma variação no dipolo elétrico de cada molécula. Descrevemos a distribuição espacial desses dipolos microscópicos com a função $\mathbf{P}$ chamada de polarização, ela é medida em unidades de dipolo por volume.

Quando aplicamos um campo elétrico que varia com o tempo, tanto a magnitude quanto a orientação do dipolo são modificadas e o movimento dessas cargas confinadas a moléculas causam o surgimento de uma densidade de corrente no meio, nas quais nos referiremos por $\mathbf{J}_p$. Note que a polarização introduz uma densidade de carga que é igual, em magnitude, ao módulo do vetor de polarização, isto é, $\sigma_b = P$, veja em (GRIFFITHS, 2017). Portanto, ao analisarmos uma pequena sessão do material polarizado, vemos que

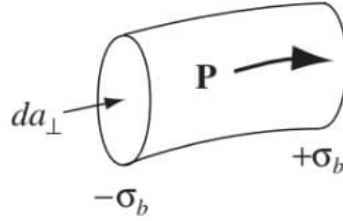


Figura 1 – Ilustração do vetor de polarização.

um pequeno aumento em P induz um aumento de carga nas extremidades do elemento de volume, dando origem a uma densidade de corrente da forma

$$dI = \frac{\partial \sigma_b}{\partial t} da_{\perp} = \frac{\partial P}{\partial t} da_{\perp}$$

A densidade de corrente é dada, portanto, por

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (2.1)$$

Agora, focaremos nossa atenção na densidade de carga que é frequentemente decomposta na densidade de carga livre e densidade de carga polarizada, ou seja, escreveremos

$$\rho = \rho_{\text{livre}} + \rho_p \quad (2.2)$$

Neste capítulo, consideraremos propagação de ondas eletromagnéticas sobre materiais eletricamente neutros, ou seja, cuja a densidade de carga livre é identicamente nula, $\rho_{\text{livre}} = 0$. É claro que estaremos tentados a supor que a densidade total de carga é nula; no entanto, o vetor de polarização pode variar no espaço, levando a uma concentração local de cargas positivas e negativas. Iremos agora deduzir a relação entre ρ_p e $\mathbf{P}$. A equação de continuidade é dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t} \quad (2.3)$$

A partir da equação (2.1) concluimos que

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (2.4)$$

É possível reescrever as equações de Maxwell para materiais eletricamente neutros, as quais ficam dadas por

- i. $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0},$
- ii. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$
- iii. $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$
- iv. $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}_{livre}.$

2.1.1 Índice de refração

Iremos estudar como ondas planas comportam-se em meio dielétrico aonde os elétrons estão ligados a átomos e moléculas, admitindo um meio isotrópico, homogêneo e não-condutor. Esperamos, ainda mais, que $\mathbf{E}$ e $\mathbf{P}$ sejam paralelos, isto é, $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$. Assim, a equação de onda para o campo elétrico fica reduzida à

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

Para deduzir essa equação, basta tomar o rotacional da equação **iii.** da seção anterior. De fato, temos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$$

Substituindo a expressão para $\nabla \times \mathbf{B}$, temos

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}_{livre}}{\partial t} = 0$$

Se aplicarmos a identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, e usarmos as hipóteses consideradas previamente, chegamos à equação (2.5). Por fim, consideraremos soluções senoidais para a equação de onda (2.5) as quais em notação complexa podemos escrever como

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{cases}$$

Note que estamos admitindo implicitamente que, caso o campo elétrico estimule o meio com uma certa frequência ω , então a polarização do meio também irá oscilar com essa mesma frequência. Substituindo diretamente na equação de onda, temos

$$-k^2 \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = -\mu_0 \omega^2 \mathbf{P}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.6)$$

Para obter uma conexão explícita entre as amplitudes do campo elétrico e do vetor de polarização, admitiremos que estamos em um meio linear, ou seja, a amplitude de polarização é proporcional à força do campo elétrico, ou seja,

$$\mathbf{P}_0(w) = \epsilon_0 \chi(w) \mathbf{E}_0(w) \quad (2.7)$$

Esta relação é chamada de relação constitutiva. O fator χ é chamado de susceptibilidade elétrica. A possibilidade de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{P}$ oscilarem fora de fase pode ser considerada se permitirmos que $\chi(w)$ seja um número complexo. Introduzindo a equação (2.7) na equação (2.6) e cancelando os respectivos termos, encontramos a relação de dispersão em dielétricos

$$k^2 = \epsilon_0 \mu_0 [1 + \chi(w)] w^2 \text{ isto é } k = \frac{w}{c} \sqrt{1 + \chi(w)}.$$

Como $v = \frac{w}{k}$ e o índice de refração é dado por $\frac{c}{v} = n$, concluímos que $n \equiv \sqrt{1 + \chi(w)}$. Como, em geral, $\chi(w)$ é um número complexo, então o índice de refração é complexo e definido por

$$\eta(w) = n(w) + i\kappa(w).$$

Isto implica que a magnitude do vetor de onda é complexa e dada por

$$k = \frac{\eta w}{c}$$

O índice de refração complexo leva em conta efeitos de absorção e o comportamento ondulatório da onda.

2.1.2 Equação Eikonal

Por simplicidade, podemos considerar a luz como sendo constituída de uma frequência fixa e equivalente a w . A equação de onda pode, então, ser deduzida para um meio isotrópico com índice de refração real. De fato, consideramos a equação

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}$$

Tendo em vista a equação (2.7) e substituindo na equação acima, temos

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \mu_0 \epsilon_0 w^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \chi w^2 \mathbf{E}$$

que leva à equação de onda independente do tempo com índice de refração real

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \epsilon_0 \mu_0 w^2 \underbrace{(1 + \chi)}_{n^2(\mathbf{w})} \mathbf{E} = 0$$

A equação permanece válida conforme o índice de refração varia pontualmente no espaço. Iremos considerar uma solução plana da forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{i((k_v R(\mathbf{r}) - wt))}, \quad (2.8)$$

onde $k_v = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vácuo}}}$ e $R(\mathbf{r})$ é uma função escalar real que tem dimensão de comprimento. Considerando que a função é real, não existe absorção ou amplificação da frente de onda. Embora a solução (2.8) seja um tipo de solução plana, o fato de considerarmos uma função real do tipo $R(\mathbf{r})$ permite que as frentes de onda possam ser curvadas ou distorcidas, conforme a figura abaixo.

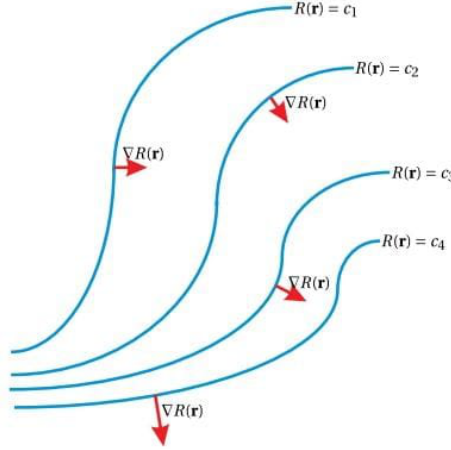


Figura 2 – Frentes de onda definidas por uma função arbitrária $R(\mathbf{r})$.

Para cada t fixo, a fase das superfícies curvas dadas por $R(\mathbf{r}) = c$ podem ser interpretadas como frentes de ondas. Note que as frentes viajam na direção que R varia o mais rápido, isto é, na direção de $\nabla R(\mathbf{r})$. Agora, substituindo a solução na equação de onda, temos que

$$\frac{1}{k_v^2} \nabla^2 [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{i(k_v R(\mathbf{r}))}] + n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{i(k_v R(\mathbf{r}))} = 0$$

onde dividimos ambos os lados por $e^{-i\omega t}$, já que a equação é independente do tempo. Computando o laplaciano considerando apenas a componente x do campo, temos

$$\nabla [E_{0x}(\mathbf{r}) e^{ik_v R}] = [\nabla E_{0x}(\mathbf{r})] e^{ik_v R} + ik_v E_{0x} [\nabla R] e^{ik_v R}$$

O laplaciano da componente x é dado pela equação abaixo

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla [E_{0x} e^{ik_v R}] &= \nabla^2(E_{0x}) e^{ik_v R} + ik_v \nabla R \cdot \nabla E_{0x} e^{ik_v R} - k_v^2 E_{0x} \nabla R \cdot \nabla R e^{ik_v R} + \dots \\ &\quad + ik_v \nabla^2 R e^{ik_v R} + ik_v \nabla E_{0x} \cdot \nabla R e^{ik_v R}, \end{aligned}$$

que pode ser simplificado para

$$\nabla^2(E_{0x} e^{ik_v R}) = \left\{ \nabla^2 E_{0x} - k_v^2 E_{0x} \nabla R \cdot \nabla R + ik_v E_{0x} \nabla^2 R + 2ik_v \nabla E_{0x} \cdot \nabla R \right\} e^{ik_v R}, \quad (2.9)$$

onde usamos a seguinte identidade vetorial:

$$\nabla \cdot (f(x)\mathbf{E}) = \nabla f \cdot \mathbf{E} + f(\nabla \cdot \mathbf{E})$$

Para obter o resultado geral, isto é, o resto das componentes do laplaciano, basta fazer $E_{0x} \rightarrow \mathbf{E}$ na equação (2.9). Por fim, ficamos com

$$\begin{aligned} \nabla^2 [\mathbf{E}_0 e^{ik_v R}] = & (\nabla^2 \mathbf{E}_0 - k_v^2 \mathbf{E}_0 \nabla R \cdot \nabla R + ik_v \mathbf{E}_0 \nabla^2 R + 2ik_v \{\hat{\mathbf{x}} \nabla E_{0x} \cdot \nabla R + \dots \\ & + \hat{\mathbf{y}} \nabla E_{0y} \cdot \nabla R + \hat{\mathbf{z}} \nabla E_{0z} \cdot \nabla R\}) e^{ik_v R} \end{aligned}$$

Substituindo na equação de onda, encontramos a seguinte relação

$$[\nabla R \cdot \nabla R - [n(\mathbf{r})]^2] \mathbf{E}_0 = \frac{\nabla^2 \mathbf{E}_0}{k_v^2} + \frac{i \mathbf{E}_0 \nabla^2 R}{k_v} + \frac{2i \hat{\mathbf{x}} \nabla E_{0x} \cdot \nabla R}{k_v} + \frac{2i \hat{\mathbf{y}} \nabla E_{0y} \cdot \nabla R}{k_v} + \frac{2i \hat{\mathbf{z}} \nabla E_{0z} \cdot \nabla R}{k_v}$$

Agora se considerarmos a aproximação do comprimento de onda pequeno, isto é, $\lambda_v \rightarrow 0$ e o lado direito da equação acima é identicamente nulo. Com isso, desconsideramos efeitos de difração e apenas efeitos macroscópicos são relevantes obtendo, com isso, a chamada aproximação para óptica geométrica. A equação de onda fica simplificada para a equação abaixo,

$$\nabla R \cdot \nabla R = [n]^2, \quad (2.10)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma

$$\nabla R = n(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{s}} \quad (2.11)$$

aonde $\hat{\mathbf{s}}$ representa o vetor unitário na direção de ∇R . A equação (2.11) é chamada de equação eikonal. Para mais informações, veja (PEATROSS; WARE, 2015).

2.1.3 Princípio de Fermat

A equação eikonal deduzida anteriormente governa o caminho de feixes de luz que atravessam uma determinada região do espaço quando o índice de refração é variável. Outra maneira de deduzir o caminho dos feixes é por meio do princípio de Fermat, o qual afirma que, caso um feixe viaje entre dois pontos fixos A e B, ele seguirá o caminho de menor tempo entre esses pontos. Deduziremos o princípio de Fermat a partir da equação eikonal. Considere o rotacional da equação (2.11)

$$\nabla \times [n(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{s}}] = \nabla \times [\nabla R] = 0.$$

Integrando sobre uma superfície arbitrária de área A, ficamos com

$$\int_A \nabla \times [n(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{s}}] = \oint_c n(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{s}} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

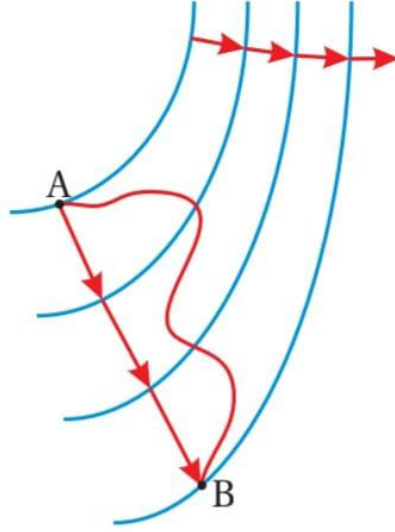


Figura 3 – Feixe de luz saindo do ponto A e chegando no ponto B.

onde aplicamos o teorema de Stokes para converter uma integral sobre uma área A numa integral ao longo de um caminho C que contorna a superfície de área A. Note que a equação acima afirma que a integral sobre um caminho fechado é sempre zero, isto significa que ao considerarmos a integral de caminho entre dois pontos fixos A e B, a integral entre esses pontos é independente do caminho que os conecta. Consideraremos, portanto, um caminho entre A e B que seja paralelo a $\hat{s}$ como pode ser visto na figura acima. Ao longo deste caminho o cosseno do produto interno é sempre igual a um. Se escolhermos qualquer outro caminho entre esses pontos, o cosseno associado ao produto interno será menor que um ao longo da maioria dos pontos do caminho escolhido e o resultado continuará sendo o mesmo graças a independência do caminho. Portanto, se removermos o produto interno artificialmente, o valor da integral irá exceder o verdadeiro valor a não ser que siga o caminho da direção de $\hat{s}$. De uma perspectiva variacional, nosso argumento pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\int_A^B n\hat{s} \cdot d\mathbf{l} = \min \int_A^B n dl \quad (2.12)$$

e a integral na direita da equação (2.12) é chamada de caminho óptico entre os pontos A e B. A conclusão da discussão acima é que o caminho verdadeiro seguido pela luz é aquele cujo caminho óptico é mínimo.

3 Alguns elementos da mecânica clássica

Agora, veremos como a óptica geométrica está relacionada com a mecânica clássica por meio de princípios variacionais e obteremos, de certa forma, um equivalente do princípio de Fermat no espaço de fase, isto é, no espaço das coordenadas generalizadas e dos momentos generalizados. Começaremos fazendo um estudo aprofundado do primeiro princípio mecânico que é o princípio de Maupertuis e seguiremos, posteriormente, para a teoria de Hamilton-Jacobi.

3.1 Princípio de Maupertuis

Notemos que a variação Δ que ocorre no princípio de Maupertuis envolve uma variação do tempo, ao posto que δ , variação feita no princípio de Hamilton, por exemplo, é feita sobre t fixo. Começaremos definindo o que seria uma variação com respeito a tempo para enunciar posteriormente o princípio,

Definição 3.1.1 A variação Δ é definida por

$$\begin{cases} t' = t + \Delta t \equiv t + \varepsilon x(t), \\ q'_{i'} = q_i(t) + \Delta q_i(t) \equiv q_i(t) + \varepsilon \eta_i(t). \end{cases}$$

onde ε é um parâmetro infinitesimal.

A variação acima pode ser elucidada geometricamente pela imagem abaixo.

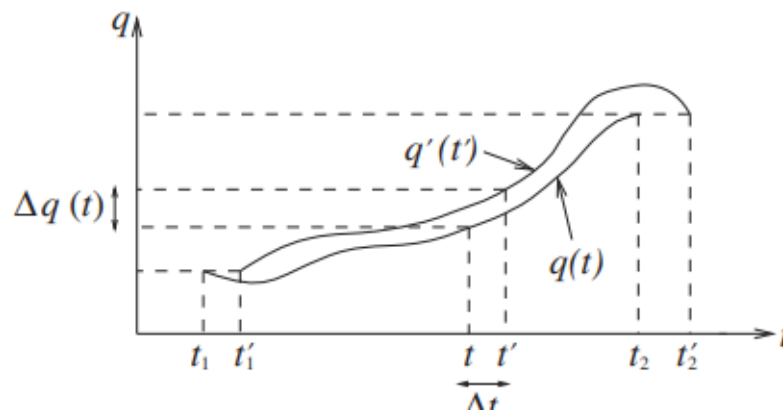


Figura 4 – Variação envolvida no princípio de Maupertuis.

Princípio de Maupertuis. Suponha que: (i) H , que é a hamiltoniana, não dependa explicitamente do tempo; (ii) H seja conservada e tenha o mesmo valor em

todas as trajetórias de comparação; (iii) as configurações inicial e final sejam fixas, isto é, $\Delta q_i(t_1) = \Delta q_i(t_2) = 0$. Então

$$\Delta I \equiv \Delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i p_i \dot{q}_i = 0$$

Para uma variação em torno da trajetória física $q(t)$. Iremos desconsiderar termos de ordem ϵ^2 e maior. Note que a ação reduzida é dada por

$$I \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i p_i \dot{q}_i = \int_{t_1}^{t_2} (L + H) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + H(t_2 - t_1)$$

onde L é a lagrangiana. Portanto, pela hipótese (ii),

$$\Delta I = \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + H(\Delta t_2 - \Delta t_1) \quad (3.1)$$

onde os Δ são dados na definição anterior. Iremos abrir, portanto, a variação da ação

$$\Delta S = \int_{t'_1}^{t'_2} L \left(q'_i, \frac{dq'_i}{dt'}, t' \right) dt' - \int_{t_1}^{t_2} L \left(q_i, \frac{dq_i}{dt}, t \right) dt$$

Temos que,

$$\begin{cases} \frac{dt'}{dt} = 1 + \epsilon \dot{x}; \\ \frac{dt}{dt'} = (1 + \epsilon \dot{x})^{-1} \equiv 1 - \epsilon \dot{x}. \end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{dq'_i}{dt'} = \frac{dq_i}{dt} \frac{dt}{dt'} = (\dot{q}_i + \epsilon \dot{\eta}_i)(1 - \epsilon \dot{x}) \rightarrow \frac{dq'_i}{dt'} = \dot{q}_i + \epsilon \underbrace{(\dot{\eta}_i - \dot{x} \dot{q}_i)}_{\xi_i}$$

Assim, expandindo a lagrangiana transformada, temos

$$L' = L(q_i + \epsilon \eta_i, \dot{q}_i + \epsilon \xi_i, t + \epsilon x) \equiv L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \epsilon \eta_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon \xi_i + \epsilon \frac{\partial L}{\partial t} x$$

Portanto,

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ L + \frac{\partial L}{\partial q_i} \epsilon \eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon \xi_i + \epsilon \frac{\partial L}{\partial t} x \right\} (1 + \epsilon \dot{x}) dt - \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

Estamos usando a convenção de Einstein para índices repetidos. Simplificando a equação acima, obtemos

$$\Delta S = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} \eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \xi_i + \frac{\partial L}{\partial t} x + L \dot{x} \right\} dt$$

Pelas equações de Euler-Lagrange, podemos simplificar mais ainda as equações acima, o argumento da integral acima torna-se

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{\eta}_i - \dot{x} \dot{q}_i) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t} x + L \dot{x}}_{-\frac{dH}{dt}}$$

Para mais informações sobre as equações de Euler-Lagrange e a identidade colocada acima, veja (LEMOs, 2013). Continuando a simplificação da equação acima, temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\eta}_i + \underbrace{\dot{x} \left(L - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{-H}$$

que possui a seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \eta_i - Hx \right)$$

A variação da ação é, então,

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \underbrace{\varepsilon \eta_i}_{\Delta q_i} - H \underbrace{\varepsilon x}_{\Delta t} \right\} dt = (p_i \Delta q_i - H \Delta t) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Pela hipótese, temos que $\Delta q_i(t_1) = \Delta q_i(t_2) = 0$, então

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = -H(\Delta t_2 - \Delta t_1)$$

aplicando na equação (3.1) verificamos que o princípio está provado. Note que o significado físico dele não está explícito na forma como ele se apresenta, para ver como ele correlaciona o estudo de sistemas mecânicos com a óptica geométrica, considere, por exemplo, que as coordenadas generalizadas não dependem explicitamente do tempo, isto significa que a energia cinética é uma função quadrática das velocidades, isto é,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l} M_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l \quad (3.2)$$

ainda mais, considere que o potencial no qual a partícula está sujeito independe das velocidades, então como $L = T - V$, temos

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

usamos o teorema de Euler para a igualdade final.

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0 \quad (3.3)$$

Na ausência de forças externas, ficamos com

$$\Delta t_2 - \Delta t_1 = 0$$

Ou seja, de todos os percursos possíveis entre duas configurações fixas, o caminho real é aquele para o qual o tempo de trânsito é mínimo, de certa maneira análogo ao princípio de Fermat.

3.2 Princípio de Jacobi

A equação (3.3) sugere que o espaço de configuração possui uma certa métrica, a distância entre dois pontos infinitesimalmente próximos pode ser expressa como

$$d\rho^2 = \sum_{k,l} M_{kl}(q) dq_k dq_l$$

$M_{kl}(q)$ desempenha o papel de tensor métrico e, a partir da equação acima, deduzimos que

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 \rightarrow dt = \frac{d\rho}{\sqrt{2T}}$$

fazendo a mudança de variáveis na equação (3.3), o princípio de Maupertuis assumi a forma

$$\Delta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{2T} d\rho = 0$$

ou, escrita de outra forma, temos que

$$\Delta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{E - V(q)} d\rho = 0$$

A equação acima é chamada de forma de Jacobi do princípio de Maupertuis. Note que ao analisarmos uma única partícula, o elemento de linha $d\rho$ é proporcional à distância infinitesimal em três dimensões sobre coordenadas curvilíneas arbitrárias, e, nesse caso, o princípio de Jacobi torna-se idêntico ao princípio de Fermat da óptica geométrica para a propagação da luz num meio não homogêneo com índice de refração proporcional a $\sqrt{E - V}$.

3.3 Teoria de Hamilton-Jacobi

Suponha que efetueemos uma transformação canônica por meio de uma função geradora e que S , veja (GOLDSTEIN, 1980), seja escolhida de tal modo que a Hamiltoniana transformada seja nula, isto é, tal que a dinâmica nesse novo sistema no espaço de fase seja a mais simples possível. Nessas circunstâncias

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \rightarrow Q_i = \beta_i; \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \rightarrow P_i = \alpha_i. \end{cases} \quad (3.4)$$

onde K representa a hamiltoniana transformada pela função geradora, β_i e α_i são constantes arbitrárias. Note que uma função geradora é definida graças a classe de equivalência da lagrangeana, sabemos que duas lagrangeanas são equivalentes se elas diferem por uma derivada temporal de uma função arbitrária, veja (LEMO, 2013), Podemos correlacionar as coordenadas transformadas por meio dessa relação a partir da seguinte diferencial

$$\sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H)dt = d\phi$$

Neste caso, note que $\phi \equiv \phi(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$. Estamos procurando uma função geradora que dependa exclusivamente das coordenadas generalizadas antigas e dos momentos generalizados transformados, isto é, $S \equiv S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$. Para obter isso, basta notar que

$$P_i dQ_i = d(Q_i P_i) - Q_i dP_i,$$

substituindo na diferencial acima, obtemos

$$\sum_i (p_i dq_i + Q_i dP_i) + (K - H) dt = d(P_i Q_i + \phi),$$

Ou seja, dado uma função do tipo ϕ , basta realizar uma transformada de legendre para obter a respectiva função S que depende tanto das coordenadas generalizadas antigas quanto dos momentos transformados. A partir da equação acima, sabemos que

$$\frac{\partial S}{\partial P_i} = Q_i, \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \quad (3.5)$$

Queremos que a hamiltoniana transformada seja identicamente nula para que o sistema de equação (3.4) seja satisfeito, ficamos com

$$K - H = \frac{\partial S}{\partial t},$$

neste caso $K \equiv 0$, a equação fica

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

Pela (3.5) chegamos a equação de Hamilton-Jacobi que é dada por

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (3.6)$$

que é uma equação diferencial parcial de primeira ordem em $n + 1$ variáveis. Chamamos S de função principal de Hamilton. A integração da equação acima apenas nos daria a dependência nas antigas coordenadas e no tempo, não nos mostra como as novas coordenadas transformadas estão contidas em S . De fato, as coordenadas não foram especificadas mas, de fato, graças ao conjunto de equações dado pela (3.4) sabemos que elas tem que ser constantes. Suponha, portanto, que existe uma solução da forma

$$S \equiv S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, t)$$

onde as quantidades $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ são $n + 1$ constantes independentes de integração. Uma dessas constantes, no entanto, é irrelevante para a solução devido ao fato de que apenas derivadas de S aparecem na equação de Hamilton. Consequentemente, se S é uma solução da equação, então $S + \alpha$, sendo α uma constante arbitrária, também deve ser solução. A solução completa pode ser escrita na forma

$$S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$$

onde nenhuma das constantes é aditiva. A função assim construída executa uma transformação canônica que reduz a zero a nova hamiltoniana. O movimento do sistema em termos das variáveis canônicas originais é determinado por

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (3.7)$$

As n equações podem ser resolvidas para q_i formando

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t) \quad (3.8)$$

Esse resultado nos leva, também, para

$$p_i = p_i(\alpha, \beta, t) \quad (3.9)$$

Vale a pena tornar a discussão feita acima mais rigorosa por meio de definições precisas e demonstrações.

Definição 3.3.1 *Uma solução completa ou integral completa de Hamilton-Jacobi é uma solução da forma $S(\mathbf{q}, \alpha, t)$ contendo n constantes aditivas e tal que*

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i} \right) \neq 0 \quad (3.10)$$

a condição acima garante que os parâmetros α_i sejam mutualmente independentes e também que o conjunto de equações para determinar β_i possam ser resolvidos para determinar $\mathbf{q}$. Agora, enunciaremos e provaremos um resultado muito importante nessa teoria.

Teorema 3.3.1 (Teorema de Jacobi) *Seja $S(\mathbf{q}, \alpha, t)$ uma integral completa da equação de Hamilton-Jacobi. Então as coordenadas generalizadas e os momentos generalizados determinados pelas equações (3.7) e (3.8) obedecem às equações de Hamilton*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Para demonstrar, iremos derivar a equação (3.7) em relação ao tempo,

$$\sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_i} = \dot{\beta}_i = 0$$

Note que a hamiltoniana na equação de Hamilton-Jacobi depende de α_i , diferenciando a equação de Hamilton-Jacobi em relação a α_i , obtemos

$$\sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t} = 0$$

comutando a ordem de diferenciação e realizando a substituição das expressões obtidas acima, obtemos

$$\sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) = 0$$

Como a matriz é não singular devido a hipótese de que a solução é uma integral completa, o sistema homogêneo acima possui somente a solução trivial, isto é,

$$\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Tomando a derivada temporal de $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$, temos

$$\dot{p}_i = \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i}$$

Diferenciando a equação de Hamilton-Jacobi em relação a q_i , obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} = 0$$

Substituindo esse termo na equação anterior, obtemos

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right)$$

e está completa a demonstração.

Agora sabemos que a ação desempenha o papel de função geradora de uma transformação canônica que leva o sistema de um tempo t a um estado num tempo fixo t_0 . Isso significa que as variáveis canônicas transformadas são constantes iguais aos valores dos q s e p s no instante t_0 . Devido a isso, vemos que a ação desempenha o papel de função geradora com as mesmas propriedades que as realizadas por uma integral completa na equação de Hamilton-Jacobi. É de esperar que a ação, portanto, difira de S a menos de uma constante arbitrária. Tome a derivada total da integral completa $S \equiv S(\mathbf{q}, \alpha, t)$, temos

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Pela equação (3.5), temos

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L$$

onde usamos a equação de Hamilton Jacobi que correlacionada a derivada parcial em relação ao tempo com a hamiltoniana. Logo,

$$S = \int L dt,$$

então S e a ação diferem apenas por uma constante. Note que a equação acima é inútil para determinar $S(\mathbf{q}, \alpha, t)$, já que é necessário conhecer a solução $q_i(t)$ das equações de

movimento e é exatamente com essa finalidade que procuramos S . Costumamos chamar a ação expressa em termos das coordenadas como função principal de Hamilton, ela é construída da seguinte forma. Seja $q(\tau)$ um segmento de trajetória física conectando uma dada configuração inicial em $\tau = 0$ à uma configuração final em $\tau = t$. A ação correspondente pode ser expressa em termos de q e t , tendo q_0 como parâmetro fixo, temos

$$S(q, q_0, t) = \int_0^t L\left(q, \frac{dq}{d\tau}, \tau\right) d\tau \quad (3.11)$$

Teorema 3.3.2 *A função principal de Hamilton $S(q, q_0, t)$ obedece à equação de Hamilton-Jacobi.*

Estudaremos como $S(q, q_0, t)$ varia com q para t fixo. Caso a configuração no instante t for modificada para de q para $q + \delta q$, a trajetória física será variada e torna-se $q'(\tau)$. O princípio de Hamilton nos diz que

$$\delta S = \int_0^t d\tau \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_0^t = \sum_i p_i \delta q_i,$$

neste caso, estamos deixando a origem fixa como mostrado na figura abaixo.

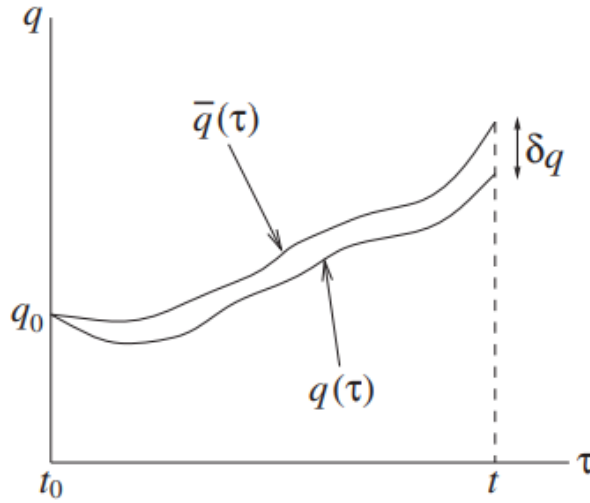


Figura 5 – Variação envolvida na demonstração do teorema 3.3.2.

Portanto, $\delta q_i(0) = 0$ e a trajetória física satisfaz as equações de Lagrange pelo princípio de Hamilton. Da equação acima deduzimos que

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i},$$

Tomando a derivada total da equação (3.11), é claro que

$$\frac{dS}{dt} = L.$$

Por outro lado, utilizando a regra da cadeia, sabemos que

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_i p_i \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t},$$

utilizando a equação anterior, chegamos na expressão abaixo,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i = -H.$$

Logo, conclui-se que S é solução para equação de Hamilton-Jacobi.

3.4 Teoria de Hamilton-Jacobi, óptica geométrica e mecânica ondulatória

Nesta seção consideraremos um sistema na qual a hamiltoniana é uma constante do movimento e é idêntica à energia total. Portanto, podemos usar o método de separação de variáveis para resolver a equação de Hamilton-Jacobi, suponha que

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = W(\mathbf{q}, \mathbf{P}) + T(t),$$

É possível inferir que a equação temporal da função principal de Hamilton é dada por $T(t) = -Et$ e a função $W(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ é chamada de função característica de Hamilton. Note que as superfícies de valor constante da função característica W possui localizações fixas no espaço de configuração.

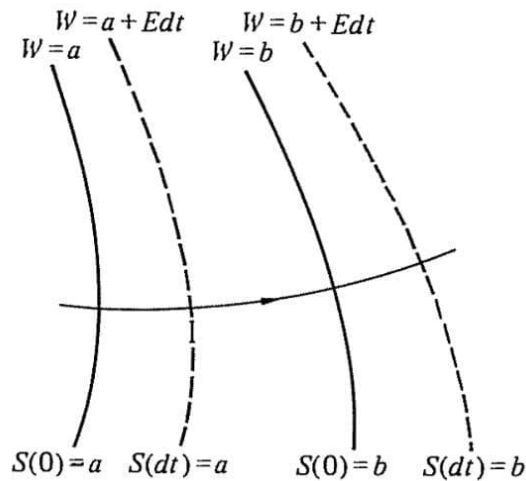


Figura 6 – Frentes de onda se propagando no espaço de configuração.

A superfície $S = C$ onde C é constante deve coincidir para um determinado t com uma superfície constante de W . Portanto, para $t = 0$ as superfícies $S = a$ e $S = b$ coincidem com as superfícies nos quais $W = a$ e $W = b$. Após um tempo dt as superfícies constantes iram coincidir com $W = a + Edt$ e $W = b + Edt$, ou seja, a superfície constante dado por $W = a$ se deslocou para $W = a + Edt$ após um tempo dt para S constante, reciprocamente para a superfície definida por $S = b$. O deslocamento da superfície no tempo é similar a propagação de uma frente de onda pelo espaço, nesse caso o espaço é o espaço de configuração. As superfícies constantes definidas por S podem ser consideradas como frentes de ondas se propagando no espaço de configuração. A propagação dessas frentes pode ser ilustrada pela figura acima.

Como as superfícies de nível definidas por S mudam de formato conforme o tempo passa, a velocidade onda, isto é, a velocidade no qual a superfície se move não será uniforme para todos os pontos. É possível, no entanto, calcular a velocidade de onda para cada ponto determinado. Consideramos, por conveniência, um sistema que consiste de apenas uma única partícula e, neste caso, as coordenadas generalizadas coincidem com as coordenadas cartesianas. O espaço de configuração se reduz ao espaço tridimensional, o que simplifica a geometria do problema. Note que a velocidade de onda é definida como ponto para o qual a distância perpendicular a superfície se desloca após um tempo infinitesimal dt . Denotaremos a distância infinitesimal perpendicular a superfície por ds , a velocidade de onda será, então

$$u = \frac{ds}{dt}$$

note que após um tempo dt a superfície de nível definida por S desloca a superfície W para uma nova superfície dada por $W + dW$, onde

$$C = W - Et \rightarrow dW = Edt,$$

É claro que dW está também relacionado a distância ds pela seguinte correlação,

$$dW = |\nabla W| ds,$$

Portanto,

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{|\nabla W|}.$$

Para achar a magnitude da norma do gradiente, considere que a partícula está sobre um potencial $V(x, y, z)$ em coordenadas cartesianas. A hamiltoniana é dada, então, por

$$H(q, p) = \frac{|p|^2}{2m} + V(x, y, z)$$

logo, a equação de Hamilton-Jacobi torna-se

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + V(x, y, z) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

como sabemos que a função principal de Hamilton é da forma

$$S(x, y, z, t) = W(x, y, z) - Et,$$

então a função característica de Hamilton satisfaz a seguinte equação

$$|\nabla W|^2 = 2m(E - V) \quad (3.12)$$

Para um exemplo prático, iremos pegar o caso do oscilador harmônico isotrópico em duas dimensões, a equação de Hamilton-Jacobi é dada, neste caso, por

$$|\nabla W|^2 = 2m \left(E - \frac{mw^2 r^2}{2} \right)$$

Assumimos que W pode ser escrita como sendo a soma de duas funções arbitrárias, uma em cada coordenada, isto é, $W = f(x) + g(y)$. Portanto, a equação acima fica na forma

$$\left(\frac{df}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dg}{dy} \right)^2 = 2m \left(E - \frac{mw^2 x^2}{2} - \frac{mw^2 y^2}{2} \right)$$

Separando as respectivas equações diferenciais ordinárias acima, obtemos a seguinte expressão

$$\left(\frac{df}{dx} \right)^2 + m^2 w^2 x^2 = \underbrace{2mE - \left(\frac{dg}{dy} \right)^2 - m^2 w^2 y^2}_{2m\alpha_1}$$

Então as funções arbitrárias f e g são dadas por

$$\begin{cases} f(x) = \int \sqrt{2m\alpha_1 - m^2 w^2 x'^2} dx', \\ g(y) = \int \sqrt{2m(E - \alpha_1) - m^2 w^2 y'^2} dy'. \end{cases} \quad (3.13)$$

Assim, a função principal de Hamilton para o caso do oscilador em duas dimensões isotrópico é dado por

$$S = \int \sqrt{2m\alpha_1 + m^2 w^2 x'^2} dx' + \int \sqrt{2m(E - \alpha_1) + m^2 w^2 y'^2} dy' - Et$$

então, as frentes de onda no espaço de configuração seriam dadas pela figura que estará na próxima página.

Observe que a equação (3.12) é idêntica à (2.10) com $n \equiv \sqrt{2m(E - V)}$. Em outras palavras, pelo mesmo raciocínio desenvolvido anteriormente, as trajetórias mecânicas possíveis serão aquelas ortogonais às superfícies de $S = C$ com C constante. Ou seja, podemos interpretar as trajetórias mecânicas do mesmo modo que raios luminosos da óptica geométrica e a ação S é encara como a fase do processo ondulatório fictício. Pela equação (3.12), podemos obter a velocidade da frente de onda,

$$u = \frac{E}{\underbrace{\sqrt{2m(E - V)}}_{\sqrt{2mT}}} \rightarrow u = \frac{E}{p}$$

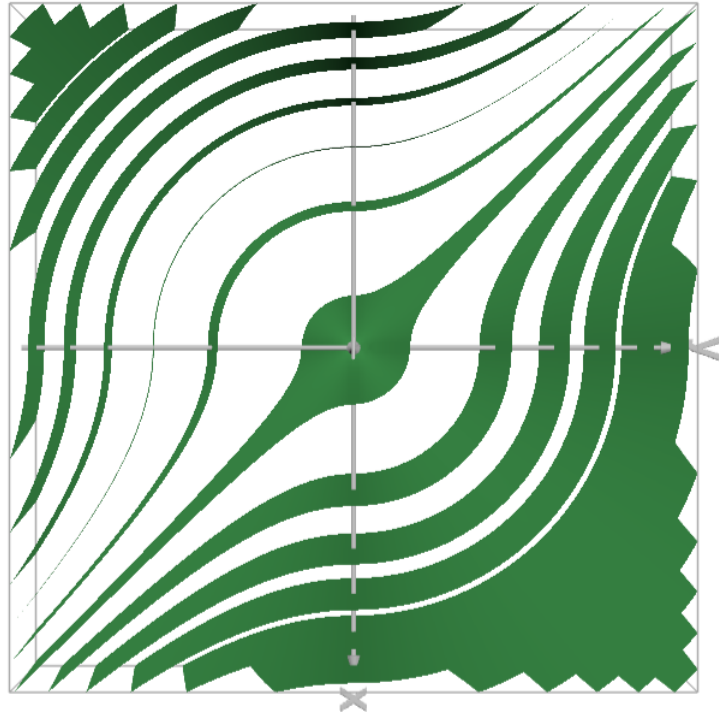


Figura 7 – Frentes de onda definidas pelas superfícies constantes determinadas pela função principal de Hamilton para o caso do oscilador.

Podemos, portanto, interpretar a mecânica clássica como sendo o limite de uma certa mecânica ondulatória onde estamos desconsiderando comprimentos de ondas associados as respectivas ondas relacionadas as trajetórias clássicas. Como uma espécie de óptica geométrica, mecânica clássica é precisamente um campo no qual fenômenos ondulatórios não podem acontecer, tais como interferência e difração. Concluimos, portanto, que existe uma dualidade no comportamento onda-partícula na mecânica clássica, mas a o comportamento corpuscular é mais evidente e sua característica ondulatória não possui oportunidades de demonstrar suas características únicas.

Podemos especular, de toda forma, que a forma para o qual a equação de onda representa a equação de *Hamilton – Jacobi* representa o limite do comprimento de onda pequeno. A similaridade da equação de Hamilton-Jacobi não implica uma equivalência entre R e W , é apenas necessário que as duas quantidades sejam proporcionais. Temos, portanto, que

$$k_0 R - wt \equiv (W - Et)$$

Logo, podemos concluir que $E \equiv w$ e a constante de proporcionalidade dessa equação será chamada de $\hbar$, isto é,

$$E = w\hbar \rightarrow E = h\nu,$$

Portanto, podemos escrever o termo de fase como sendo

$$k_0 R - \frac{E}{\hbar} t \rightarrow k_0 R - \omega t = \frac{1}{\hbar} \underbrace{(k_0 R \hbar - E t)}_S$$

ainda mais, o comprimento de onda e a frequência estão conectados pela velocidade da onda pela relação $\lambda \nu = u$, portanto

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{\frac{E}{p}}{\frac{E}{\hbar}} \rightarrow \lambda = \frac{\hbar}{p}$$

A partir do raciocínio desenvolvido acima, podemos inferir que amplitude da onda mecânica que está associada ao movimento como sendo

$$\psi = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad (3.14)$$

Se essa hipótese estiver certa, a equação que governa a amplitude dessa onda deve reduzir no limite em que o comprimento de onda vai para zero, ou seja, ela deva coincidir com a equação de Hamilton-Jacobi. É claro que sabemos que a equação que ψ obedece é a equação de Schrödinger dependente do tempo, isto é,

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - V \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (3.15)$$

Substituiremos a equação (3.13) na (3.14), a equação de Schrödinger em termos de S fica, portanto, escrita como

$$\left[\frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 S$$

A quantidade entre parênteses é justamente a hamiltoniana na equação de Hamilton-Jacobi para uma única partícula. De fato, a equação acima reduz-se para a equação de Hamilton-Jacobi caso o lado direito da equação seja identicamente nulo, ele reduz no limite clássico em que $\hbar \rightarrow 0$. Parece, então, que a diferença entre as versões clássicas e quânticas da equação de Hamilton-Jacobi dependem apenas do tamanho de $\hbar$. Quanto menor $\hbar$, menor será o comprimento de onda e maior será a aproximação para geometria óptica.

3.5 Analogia Newtoniana

Iremos aplicar o maquinário do cálculo variacional no princípio de Fermat deduzido no capítulo anterior e encontraremos uma correspondência mútua entre óptica e mecânica clássica e estudaremos as chamadas lentes de Luneburg.

Vamos derivar as equações de Euler-Lagrange para o princípio de Fermat. Denotaremos os pontos descritos pela trajetória da luz como $\mathbf{r}$ como uma função de um parâmetro real ξ . O caminho óptico é dado por

$$s = \int n \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2} d\xi, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{d\xi}.$$

a lagrangiana é dada, portanto, por $L = \sqrt{n^2 v^2}$ com q e $\dot{q}$ correspondendo à $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$. As equações de Euler-Lagrange para a lagrangiana acima são

$$\frac{d}{d\xi} n^2 \frac{\mathbf{v}}{L} = v^2 \frac{\nabla n^2}{2L}, \quad (3.16)$$

a equação (3.15) determina a trajetória seguida pelo raio de luz. Suponha que escolhamos o parâmetro ξ de tal forma que ele seja dado pela relação

$$d\xi = \frac{dl}{n}$$

neste caso, o módulo da velocidade é dado por

$$v = \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\xi} \right| = n \left| \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right| = n \quad (3.17)$$

Esse parâmetro não coincide com o tempo físico t , já que, de outra forma, a velocidade da luz seria inversamente proporcional ao índice de refração. No entanto, essa parametrização reduz as equações de Euler-Lagrange para

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\xi^2} = \frac{\nabla n^2}{2}$$

Note que essa é exatamente a segunda lei de Newton para uma partícula de massa unitária movendo sobre um "tempo" dado por ξ e, além disso, sobre um potencial dado por

$$U = -\frac{n^2}{2} + E$$

onde E é uma constante arbitrária. Ou seja, é como se a trajetória da luz correspondesse ao caminho de uma partícula que responde à uma força mecânica. Vemos, a partir da equação (3.16), que

$$E = \frac{v^2}{2} + U$$

o que implica que E é a soma da energia cinética com a energia potencial. Tanto U quanto E são quantidades adimensionais devido ao fato de que ξ possui dimensão de comprimento. Requeremos que U seja nulo no espaço vazio e que o índice de refração é unitário neste caso, então

$$E = \frac{1}{2}$$

é claro que podemos zerar o potencial para qualquer outro valor de n . Concluimos, portanto, que a óptica geométrica é reduzida à mecânica Newtoniana. Considere o índice de refração simétrico e radial, isto é, $n(\mathbf{r})$ com

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

defina o momento angular como

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{d\xi},$$

Note que,

$$\frac{d\mathbf{L}}{d\xi} = \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{d\xi} \times \frac{d\mathbf{r}}{d\xi}}_{\equiv 0} + \mathbf{r} \times \underbrace{\frac{d^2\mathbf{r}}{d\xi^2}}_{\frac{\nabla n^2}{2}} = \mathbf{r} \times \frac{\partial n^2}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} = 0$$

Consequentemente, a trajetória do raio de luz está confinada em um plano. Orientamos o sistema de coordenadas de tal forma que x e y são as coordenadas cartesianas do plano de propagação e $z=0$. É conveniente unir as coordenadas cartesianas e utilizar notação complexa para fazer a análise do movimento, seja

$$z = x + iy$$

Agora, considere o estudo de movimento mais importante do ponto de vista Newtoniano, o movimento devido à uma oscilação harmônica. Tal força é descrita por um potencial quadrático em r . Na óptica, esse caso corresponde ao índice de refração

$$n = \sqrt{2 - r^2},$$

Portanto,

$$U = -\frac{n^2}{2} + E \rightarrow U = \frac{-2 + r^2}{2} + 1 \rightarrow U = \frac{r^2}{2}, \text{ para } E = 1,$$

A equação de Euler-Lagrange será

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\xi^2} = \frac{\nabla n^2(r)}{2} \rightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{d\xi^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (2 - r^2) \frac{\mathbf{r}}{r} = -\mathbf{r}$$

como $\mathbf{r} = x + iy$, então

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = -z,$$

a solução geral é dada por

$$z = e^{i\alpha} \left(\frac{a+b}{2} e^{i\xi} + \frac{a-b}{2} e^{-i\xi} \right) \rightarrow z = e^{i\alpha} (a \cos \xi + ib \sin \xi),$$

É preciso observar que, na verdade, a solução acima deveria ser da forma $z(\xi) = \alpha e^{i\xi} + \beta e^{-i\xi}$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Porém, é fácil ver isso é equivalente à solução escrita acima, apenas é necessário que você manipule as constantes α e β . Note que essas constantes possuem significados geométricos, α descreve a rotação da trajetória relativa ao sistema de coordenadas do sistema. Note que se $\alpha = 0$, temos

$$z = a \cos \xi + ib \sin \xi,$$

que é uma parametrização da elipse. Portanto, a e b definem o semieixo maior e o semieixo menor da elipse. Para $\alpha \neq 0$ as trajetórias são elipses rotacionadas. Veja que

$$v^2 = 2 - r^2,$$

ainda mais,

$$\begin{cases} r^2 = a^2 \cos^2 \xi + b^2 \sin^2 \xi, \\ v^2 = |e^{i\alpha}(-a \sin \xi + ib \cos \xi)|^2 = a^2 \sin^2 \xi + b^2 \cos^2 \xi. \end{cases}$$

juntando a expressão acima com a escrita anteriormente, obtemos que

$$a^2 + b^2 = 2, \text{ ou } a + ib = \sqrt{2}e^{i\gamma},$$

Obtemos, ainda mais, que

$$|z|^2 = a^2 \cos^2 \xi + (2 - a^2) \sin^2 \xi = 2 \sin^2 \xi + a^2 \underbrace{(\cos^2 \xi - \sin^2 \xi)}_{\cos 2\xi}$$

portanto,

$$|z|^2 = 1 + (a^2 - 1) \cos 2\xi,$$

Logo, vemos que todas as trajetórias intersectam o círculo unitário nos zeros da função $\cos 2\xi$, com respeito aos parâmetros da elipse. Esses zeros são dados por

$$\xi_m = \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}, \text{ para } m \in \mathbb{Z}.$$

Calcularemos $z|_{\xi=\xi_1}$, temos

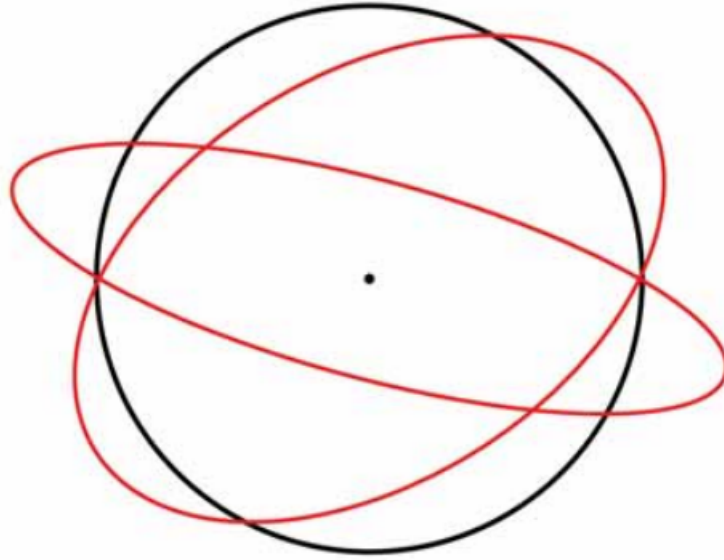


Figura 8 – Trajetórias dos raios de luz dadas pelo índice de refração $n = \sqrt{2 - r^2}$.

$$z|_{\xi=\xi_1} = e^{i\alpha} \left(a + \cos \frac{\pi}{4} + ib \cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\alpha} \underbrace{(a + ib)}_{\sqrt{2}e^{i\gamma}} = e^{i(\alpha+\gamma)}$$

Considere, agora, a velocidade calculada em ξ_1 , isto é,

$$\frac{dz}{d\xi}(\xi_0) = \left[e^{i\alpha}(-a \sin \xi + ib \cos \xi) \right]_{\xi=\xi_0}$$

neste caso, $\xi_0 = -\frac{\pi}{4}$, portanto

$$\frac{dz}{d\xi}(\xi_0) = e^{i\alpha} \left(-a \sin \frac{\pi}{4} + ib \cos -\frac{\pi}{4} \right) = e^{i(\alpha+\gamma)}$$

Podemos concluir coisas interessantes a partir dessa análise do perfil de Hooke que nos leva à um instrumento útil, chamado de lente de Luneburg. É uma lente de raio unitário preenchida de material que satisfaz a condição de que $n = \sqrt{2-r^2}$ para $r \leq 1$. Fora da lente, para $r > 1$, a luz se propaga pelo espaço vazio com índice de refração $n = 1$. Vejamos quais são os efeitos da lente sobre a trajetória da luz, como argumentamos anteriormente, é suficiente estudar sua propagação no plano cartesiano dado por (x, y) . Considere uma família de raios incidentes vindos de uma direção, estará representada na figura abaixo. Inicialmente, os raios incidentes seguem linhas retas com ângulo fixo e dado por ϕ_0 , chamado de ângulo de incidência. Uma linha reta é descrita pela equação

$$z = e^{i\phi_0}(\xi - \xi_0) + z_0 \quad (3.18)$$

com constantes reais ϕ_0 e ξ_0 e a constante complexa dada por z_0 . Como a derivada da trajetória, $\frac{dz}{d\xi}$, é uma constante dada por $e^{i\phi_0}$ que define uma linha reta. As derivadas da trajetória dão a velocidade newtoniana $\mathbf{v}$, vemos que as velocidades dos raios incidentes são todas iguais. Além disso, o módulo da velocidade é unitário, como requerido pela construção da teoria. O que comprova que a equação acima descreve feixes incidentes de luz. Quando essa família de feixes incide sobre a fronteira do instrumento, eles não são refratados imediatamente e entram com velocidade $e^{i\phi_0}$, já que o índice de refração do instrumento coincide com o espaço vazio, $n(1) = 1$, na fronteira do instrumento. Dentro das lentes de Luneburg, aonde o índice de refração obedece as equações derivadas acima para o caso de Hooke, os raios não seguem mais linhas retas, mas segmentos das elipses de Hooke discutidas acima. Para descrever a trajetória dos feixes incidentes, simplesmente conectamos a família de raios incidentes com elipses adequadas na fronteira, em $r = 1$.

Devemos apenas ajustar as constantes z_0 e ξ_0 tal que as linhas e as elipses intersectão o círculo unitário no mesmo parâmetro, seja $\xi = \xi_0$. Agora, pelo raciocínio acima, as elipses de Hooke dizem que todos os feixes com velocidade $e^{i\phi_0}$ se encontram no mesmo ponto $z = x + iy = e^{i\phi_0}$. As lentes de Luneburg focam os feixes eletromagnéticos em pontos na superfície da esfera. Iremos elaborar o raciocínio acima com mais rigor, a equação (3.18) definem retas no plano complexo, sem perca de generalidade assumiremos que essas retas seguem paralelas ao eixo real e que a lente de Luneburg está localizada no centro do nosso sistema de coordenadas, podemos assumir isso devido a simetria radial do nosso problema, neste caso as retas dadas por (3.18) tomam a seguinte forma

$$z = \xi - \xi_0 + iy, \quad \text{para } y \in (-1, 1).$$

é claro que devemos restringir os valores para y , já que apenas neste intervalo específico os feixes de luz vindo do infinito adentram a nossa lente. Neste caso em específico, note

que $\frac{dz}{d\xi} = 1$ e está de acordo com o raciocínio desenvolvido anteriormente, ou seja, que a velocidade é unitária para o vácuo. Queremos, ainda mais, que para $\xi = 0$ a reta acima esteja exatamente na superfície do círculo unitário, para isso é preciso que $\xi_0 = \sqrt{1 - y^2}$, a equação das retas que vem do infinito são dadas, portanto, por

$$z = (\xi + \sqrt{1 - y^2}) + iy, \text{ para } \xi > 0$$

essa condição garante que nossos feixes estão viajando da direita para esquerda no eixo real. Podemos, ainda mais reescrever essa equação da seguinte forma

$$z = (\xi + \cos \phi_0) + i \sin \phi_0,$$

onde $\cos \phi_0 = \sqrt{1 - y^2}$ e $\sin \phi_0 = y$. A equação que rege os feixes de luz é dada por

$$\begin{cases} \frac{d^2 z}{d\xi^2} + z = 0, \\ z(0) = \cos \phi_0 + i \sin \phi_0, \\ z'(0) = 1. \end{cases} \quad (3.19)$$

A solução geral da equação diferencial ordinária dada pelo sistema acima é

$$z(\xi) = \cos \phi_0 \cos \xi + \sin \xi + i \sin \phi_0 \cos \xi,$$

A equação acima é justamente a equação de movimento quando os feixes vindo do infinito positivo do eixo real adentram a lente de luneberg. Além do mais, vemos que para $\xi = -\frac{\pi}{2}$ todos os feixes são focalizados em um único ponto, podemos ver pela figura abaixo.

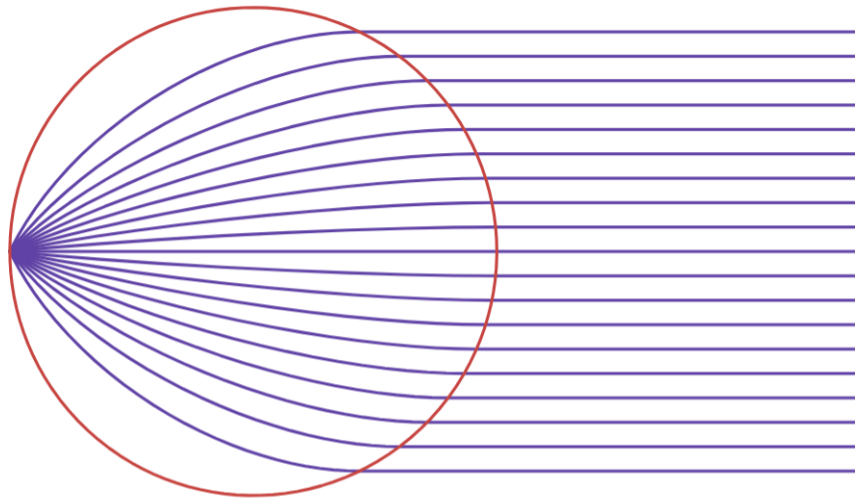


Figura 9 – Feixes de luz vindo do infinito positivo sendo focalizados em único ponto dentro da lente de Luneburg.

3.6 Equações de Hamilton e o princípio de Huygens

Provaremos o princípio de Fermat a partir da reinterpretação de Feynman do princípio de Huygens. Começaremos discutindo ondas planas e depois falaremos sobre a versão de Feynman do princípio, a ideia de que todos os caminhos percorridos pela onda interferem entre si, isto dá as equações de Hamilton para feixes e o princípio de Fermat. Finalmente, deduzimos a equações de onda para ondas escalares.

Uma onda é uma oscilação que propaga-se no espaço. É como se cada ponto no espaço fosse acoplado com um oscilador, para ondas eletromagnéticas, por exemplo, a oscilação é dada pelo campo eletromagnético com seus respectivos campos dados por $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Cada oscilador está em contato com sua vizinhança de tal maneira que o fluxo magnético sobre uma área infinitesimal induz um campo eletro na sua vizinhança e vice-versa. Para cada ponto no espaço-tempo $(\mathbf{r}, t)$ a oscilação é caracterizada por uma fase ϕ , o ângulo de oscilação. Por exemplo, para uma onda plana propagando na direção x , a fase é dada por $\phi = 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$ onde T é o período e λ é o comprimento de onda. É conveniente expressar a fase em termos do número de onda k e a frequência angular ω , portanto $\phi = kx - \omega t$, com

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

É conveniente introduzir o vetor de onda $\mathbf{k}$ com magnitude igual a k e apontando na direção de propagação da onda, podemos escrever $\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$. Um dado valor da fase se propaga com velocidade $\frac{\omega}{k}$ na direção de $\mathbf{k}$, que é a chamada de velocidade de fase. Em material ópticos isotrópicos tal como o vidro, a magnitude da velocidade de fase é determinada pelo índice de refração pelo índice de refração

$$w = \frac{ck}{n}, \tag{3.20}$$

Num meio não-uniforme, n varia pontualmente sobre o espaço, então para um certo valor w fixo, o vetor de onda precisa variar pontualmente também. Definiremos, portanto, o vetor de onda e a frequência como o gradiente parcial e temporal da fase, isto é,

$$\mathbf{k} = \nabla \phi, \quad \omega = -\frac{\partial \phi}{\partial t},$$

Então ϕ é dada pela fase integral

$$\phi = \int (\mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} - \omega dt).$$

ondas lineares obedecem o princípio de superposição, isto é, as amplitudes das ondas são aditivas. Elas podem formar a chamada interferência construtiva, onde duas amplitudes estão em fase e somam, ou interferência destrutiva onde as ondas estão fora de fase e cancelam-se. Consideraremos que as ondas eletromagnéticas são, em meio óptico, ondas lineares. Considere a propagação de uma onda linear de uma fonte A para um ponto

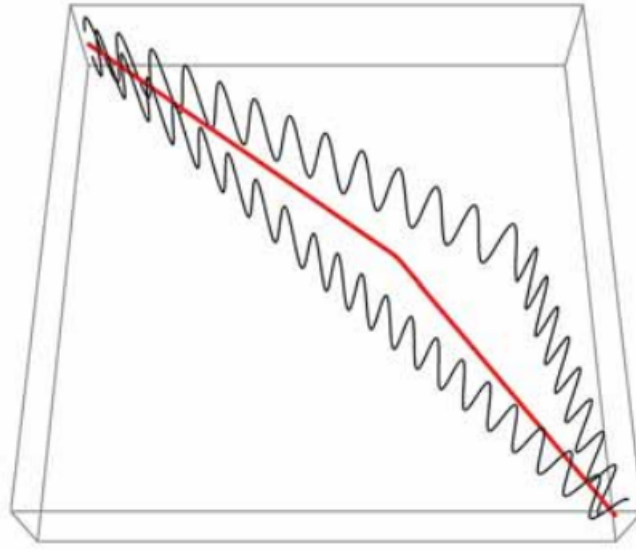


Figura 10 – A figura acima representa dois caminhos virtuais ao redor do caminho verdadeiro, elas começam com a mesma amplitude na região inferior direita mas acabam com amplitude invertidas no canto superior esquerdo, e cancelam entre si de acordo com o princípio da superposição.

espectador B. De acordo com o princípio da superposição, todos os caminhos de A para B interferem entre si. Imagine a seguinte situação, a onda oscila sobre todos os caminhos com a mesma magnitude, mas com fases que dependem do caminho. Essa é a versão de Feynman do princípio de Huygens, as ondas consistem de infinitas ondas elementares, uma para cada caminho, que interferem entre si. A maioria dessa interferência é destrutiva, suponha que a fase varia rapidamente em comparação com a variação do meio, neste caso encontramos caminhos vizinhos com uma diferença de fase de π e, portanto, de amplitude oposta o que causa interferência destrutiva, veja a figura acima. Apenas caminhos que não possuem interferência destrutiva na sua vizinhança que contribuirão com o caminho final. Ao redor deles a fase não muda, isto é,

$$\delta\theta = 0$$

Imagine que variamos o caminho por um incremento $\delta\mathbf{r}$ sobre a trajetória óptica de fase estacionária descrita acima, mas mantenhamos os pontos finais fixos. Assuma, ainda mais, que $\mathbf{k}$ é uma variável independente que pode ser variada na fase. A frequência w depende tanto de $\mathbf{r}$ quanto de $\mathbf{k}$ de acordo com a relação de dispersão (3.20). Portanto, temos

$$\begin{aligned} \delta\theta &= \int \left(\delta\mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{k} \cdot d\delta\mathbf{r} - \frac{\partial w}{\partial \mathbf{k}} \cdot \delta\mathbf{k} dt - \frac{\partial w}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} dt \right), \\ &= \int \left[\delta\mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} - \delta\mathbf{r} \cdot d\mathbf{k} - \frac{\partial w}{\partial \mathbf{k}} \cdot \delta\mathbf{k} dt - \frac{\partial w}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} dt + d(\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{r}) \right], \\ &= \int \left[\left(d\mathbf{r} - \frac{\partial w}{\partial \mathbf{w}} \right) \cdot \delta\mathbf{k} - \left(d\mathbf{k} + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{r}} dt \right) \cdot \delta\mathbf{r} \right] + (\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{r})|_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b}, \\ &= \int \left[\left(d\mathbf{r} - \frac{\partial w}{\partial \mathbf{w}} \right) \cdot \delta\mathbf{k} - \left(d\mathbf{k} + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{r}} dt \right) \cdot \delta\mathbf{r} \right]. \end{aligned}$$

A variação de θ será nula para todo $\delta \mathbf{r}$ e $\delta \mathbf{k}$ se, e somente se,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{k}}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{\partial w}{\partial \mathbf{r}}.$$

As equações acima representam as equações de Hamilton. Se o meio não muda com o tempo, então o índice de refração não depende de t e a frequência dada pela relação de dispersão não depende explicitamente de t . Obtemos, portanto, que a frequência é uma quantidade conservada, isto é

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial w}{\partial \mathbf{k}} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0$$

a última igualdade segue diretamente das equações de Hamilton. A conservação da frequência está diretamente ligada a conservação de energia pela relação $E = \hbar w$. Pela relação de dispersão e as equações de Hamilton, obtemos as equações de movimento que são dadas por

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{r}} = \frac{c}{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \sqrt{\mathbf{k}^2} = \frac{c}{n} \frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{c^2}{n^2 w} \mathbf{k},$$

quanto a equação envolvendo o vetor de onda, temos

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{\partial w}{\partial \mathbf{r}} = -ck \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{ck}{n^2} \nabla n = \frac{w}{n} \nabla n = \frac{w}{n^2} \nabla \frac{n^2}{2}.$$

como w é independente do tempo, temos

$$\frac{n^2}{c} \frac{d}{dt} \frac{n^2}{c} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{n^2}{w} \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \nabla \frac{n^2}{2}.$$

introduzindo o parâmetro de propagação ξ dado por

$$d\xi = \frac{c}{n^2} dt,$$

vemos que a equação de movimento acima está de acordo com a equação deduzida anteriormente para raios de luz. A interferência de caminhos de Feynman explica, portanto, o princípio de Fermat: o caminho seguido é justamente o de interferência construtiva onde o caminho óptico varia o mínimo.

Antes de adentrar um pouco mais no conceito de interferência de caminhos de Feynman, dissertaremos um pouco mais sobre o princípio de Huygens. Esse princípio propõe que cada ponto da frente de onda funciona como um fonte pontual, isto é, a cada instante de tempo a frente produz infinitas ondas infinitesimais que interferem entre si, dando origem a uma nova frente de onda no instante seguinte, está representado na 11.

Voltemos para o princípio de interferência de caminhos de Feynman. Podemos deduzir a partir dela a equação de onda, que é uma equação que descreve o comportamento da amplitude ψ se propaga sobre distâncias infinitesimais. Escrevemos ψ como sendo a integral do fator de fase $e^{i\phi}$ sobre todos os caminhos possíveis, pode ser simbolicamente expressar pela integral de caminho de Feynman

$$\psi = \int e^{i\phi} D\mathbf{r},$$

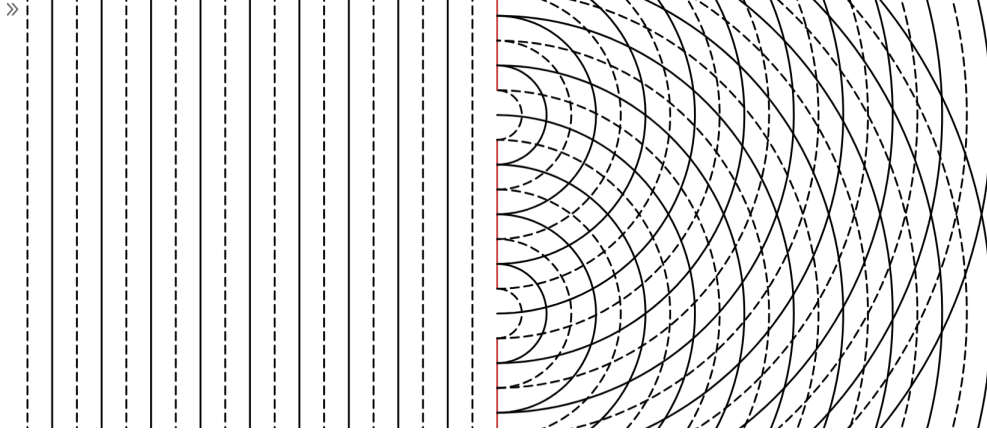


Figura 11 – Frentes de ondas planas colidindo com aparato que possui duas fendas, como as fendas possuem dimensão de comprimento de onda, elas funcionam como fontes pontuais e, portanto, causam um padrão de interferência no anteparo mais a direita. Os vales são representados pelas linhas tracejadas e as cristas pelas linhas normais.

Observamos que no limite clássico devemos obter que o caminho obtido, o caminho clássico, é o que contribui para a amplitude total. Ainda mais, o caminho clássico é aquele que satisfaz o princípio da ação mínima, isto é,

$$\frac{\delta}{\delta x(t)} (S[x(t)]) = 0$$

De acordo com a equação (3.14) usaremos $\frac{S}{\hbar}$ como fase. Nossa forma final para a propagação da amplitude é, portanto,

$$\psi = \int D\mathbf{r} e^{i\frac{S}{\hbar}}.$$

O $D\mathbf{r}$ indica que a integral deve ser performada sobre todos os caminhos possíveis da fonte $\mathbf{r}_0$ para o ponto espectador $\mathbf{r}$. Podemos tirar conclusões físicas interessantes da integral acima. Veremos que essa fórmula está de acordo com o padrão de interferência da fenda dupla, veja 12. A ação para cada caminho da figura 12 é $\frac{mv^2 t}{2}$, que é a energia cinética multiplicada pelo tempo. A fase para o caminho 1 é $\frac{mD^2}{2\hbar t}$, para o caminho dois é $\frac{m(D+d)^2}{2\hbar t}$, devemos assumir que $D \gg d$ e as velocidades serão equivalente. O excesso de fase, isto é, a diferença entre esses dois caminhos é dada por $\frac{mDd}{\hbar t} \equiv \frac{pd}{\hbar}$, e isto é o que deveríamos esperar para $p = \frac{h}{\lambda}$.

Diferenciando a amplitude com respeito à $\mathbf{r}$, usando a definição de $\mathbf{k}$ e também a relação de dispersão, obtemos

$$\nabla^2 \psi = \int (\nabla^2 e^{i\phi}) D\mathbf{r} = - \int \underbrace{k^2}_{\frac{w^2 n^2}{c^2}} e^{i\phi} D\mathbf{r} = - \frac{n^2 w^2}{c^2} \psi,$$

que dá a equação de Helmholtz,

$$\left(\nabla^2 + n^2 \frac{w^2}{c^2} \right) \psi = 0.$$

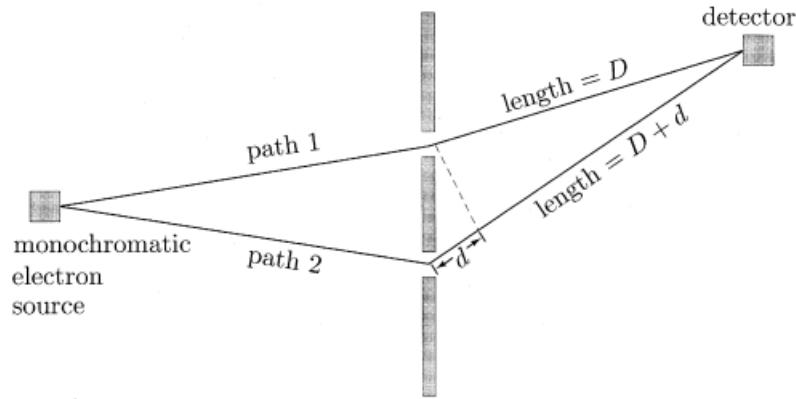


Figura 12 – Experimento da fenda dupla, o caminho dois é mais longo que o 1 por uma distância d , e portanto a fase será aumentada por um fator de $\frac{2\pi d}{\lambda}$, com λ sendo o comprimento de onda de De Broglie. A interferência construtiva ou destrutiva ocorrerá para certos valores de d . Essa imagem foi tirada de (PESKIN; SCHROEDER, 2007).

Note que na nossa derivação assumimos que a onda é caracterizada pela amplitude escalar ψ . Mas ondas eletromagnéticas são carregadas pelos respectivos campos e eles são caracterizados por vetores. Ondas eletromagnéticas são vetores de onda polarizados, as diferentes componentes nem sempre são proporcionais a amplitude ψ . A equação acima é, portanto, uma simplificação e aproximação para o regime da óptica geométrica, veja (LEONHARDT; PHILBIN, 2010).

4 Considerações finais

A partir do eletromagnetismo, obtemos naturalmente o índice de refração no contexto de propagação de ondas sobre um meio dielétrico, vimos que esse índice de refração pode ser complexo para considerar a absorção pelo meio. Ainda mais, a partir de uma hipótese para a equação de onda com índice de refração que depende pontualmente da localização no espaço, obtemos a chamada equação Eikonal pela aproximação do comprimento de onda pequena, isto é, ignoramos efeitos microscópicos no estudo de propagação de ondas, tais como difração e interferência. Com isso, derivamos diretamente o princípio de Fermat e mostramos que, na verdade, ele surge naturalmente na teoria eletromagnética, já que o princípio foi enunciado antes da existência do eletromagnetismo. Após isso, adentramos na mecânica clássica com o princípio de Maupertuis que, a priori, é desprovido de significado físico; Jacobi foi responsável por fazer uma formulação desse princípio com certas hipóteses sobre a energia cinética, ele estruturou o espaço de configuração com uma métrica e deduziu um análogo ao princípio de Fermat para partículas no espaço de configuração, a analogia com óptica começa a esclarecer à partir daí. Após isso, fizemos uma análise criteriosa da teoria de Hamilton-Jacobi, vimos o chamado teorema de Jacobi no qual nos dá condições de obter uma solução completa para essas equações e que essa solução respeita às equações de Hamilton, após isso vimos que a função fundamental de Hamilton é dada pela ação e que, no estudo de uma partícula sobre um potencial que depende das coordenadas cartesianas e no qual a hamiltoniana independe do tempo, é possível obter uma equação Eikonal no contexto do espaço de configuração o corrobora para interpretação que a ação, isto é, a função principal de Hamilton serve como fase de uma teoria ondulatória mais geral. Após isso, vimos a chamada analogia newtoniana que busca encontrar uma equação análoga à segunda lei de Newton no contexto de propagação de feixes de luz sobre meios com índice de refração variável, estudamos, nesse contexto, índices que depende da distância radial e vimos que conseguimos análogos clássicos como a conservação do momento angular. Após isso, resolvemos a propagação de feixes sobre uma lente específica denominada de lente de Luneberg, o que leva que os feixes nessa lente percorrem elipses e que, mais ainda, os feixes que vem do infinito, isto é, fora da lente, são focalizados na fronteira da lente ao adentrarem essa superfície. Por fim, estudamos as equações de Hamilton para a fase e a reinterpretação do princípio de Huygens feita por Feynman, elucidamos um exemplo de que a fórmula que ele deu para esse novo princípio variacional é condizente com a realidade física a partir do experimento da fenda dupla. Após isso, vimos que as equações de Hamilton levam naturalmente para os resultados obtidos no princípio de Fermat, ou seja, deduzimos o princípio de Fermat a partir das integrais de caminho de Feynman.

Referências

- GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. [S.l.]: Addison-Wesley publishing company., 1980.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. [S.l.]: Reed College, 2017.
- LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: 2.ed.— São Paulo : Editora Livraria da Física., 2013.
- LEONHARDT, U.; PHILBIN, T. *Geometry and Light*. [S.l.]: Dover publications, inc, 2010.
- PEATROSS, J.; WARE, M. *Physics of Light and Optics*. [S.l.]: Brigham Young University, 2015.
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Boca Raton, Florida, USA: CRC Press, 2007.