

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**GEOMETRIA ESPACIAL E TECNOLOGIAS: análise de livros
didáticos do Ensino Médio**

NATHALIA DA SILVA PEREIRA

João Pessoa – Paraíba

Abril de 2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

NATHALIA DA SILVA PEREIRA

**GEOMETRIA ESPACIAL E TECNOLOGIAS: análise de livros
didáticos do Ensino Médio**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Coordenação do curso de
Licenciatura em Matemática da
Universidade Federal da Paraíba como
requisito parcial para obtenção do título de
licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rogéria Gaudencio
do Rêgo

João Pessoa – Paraíba

Abril de 2024

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

P436g Pereira, Nathalia da Silva.

Geometria espacial e tecnologias : análise de livros didáticos do ensino médio / Nathalia da Silva Pereira.

- João Pessoa, 2024.

49 p. : il.

Orientação: Rogéria Gaudencio do Rêgo.

TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) -
UFPB/CCEN.

1. Geometria espacial. 2. Livro didático. 3.
Tecnologias digitais. 4. Matemática. I. Rêgo, Rogéria
Gaudencio do. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

NATHALIA DA SILVA PEREIRA

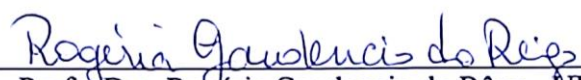
**GEOMETRIA ESPACIAL E TECNOLOGIAS: análise de livros
didáticos do Ensino Médio**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo

Aprovado(a) em: 02 / 05 / 2024.

BANCA EXAMINADORA



Profª. Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo - UFPB
(Orientadora)



Profª. Dra Miriam da Silva Pereira - UFPB
(Avaliadora)



Prof. Dr Vinícius Martins Varella - UFPB
(Avaliador)

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Marilene e Joseildo, e aos meus irmãos, por terem me escolhido para compartilhar esta vida, assim como eu os escolhi. Obrigada.

E a todas as meninas para que não desistam de lutar por seus sonhos e saibam que ciência, matemática e tecnologia também é coisa de mulher.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sempre estar presente em minha vida e ser meu guia em cada passo da minha caminhada. A mim mesma por independente das dificuldades, não desistir de lutar pelos meus sonhos.

Aos meus pais, Marilene e Joseildo Pereira, por me educarem, me amarem e me escolherem para compartilhar a vida. Em especial, ao meu pai, que perdi tão repentinamente, para que saiba que onde estiver tenho orgulho de ser sua filha. A minha mãe, por sempre cuidar de mim e dos meus irmãos, e estar ao nosso lado em todos os momentos sendo mãe, professora, mulher em todas as suas versões possíveis. Você é meu exemplo e inspiração!

Aos meus irmãos, Josilene e Ailton, por estarem ao meu lado em todos os momentos da minha vida - tenho muito orgulho de vocês, os melhores irmãos que eu poderia ter. Saibam que essa conquista também é de vocês.

Ao meu namorado, Victor Rodrigues, por todo amor, carinho e paciência em todos esses anos juntos. Por todas as vezes em que você, com seu apoio e abraços acolhedores, me incentivou a dar o meu melhor. Você é, sem dúvida, único. Obrigada por estar ao meu lado e ser o melhor companheiro dessa vida. Juntos alcançaremos nossos sonhos.

A toda equipe da Escola Estadual João XXIII, onde iniciei meus estudos e retornei como estagiária, por todo acolhimento e contribuição para minha formação. Em especial, ao Prof. Lijecson Souza, que me recebeu tão bem como sua primeira estagiária, com todos os ensinamentos, trocas de conhecimento e interações. Pelo incentivo em colaborar comigo na jornada do TCC quando ainda era só uma ideia e por sua busca em melhorar a Educação Básica. Muito obrigada.

A minha orientadora Profa. Dra. Rogéria Gaudencio, por todos os momentos de diálogos e orientações, não apenas na elaboração deste trabalho, mas durante uma boa parte da minha graduação. Desde a primeira vez em que tive o privilégio de ser sua aluna, na disciplina de Pesquisa Aplicada à Matemática, vi nela uma inspiração de professora e mulher, que com toda sua representatividade se dedica a contribuir para um ensino de qualidade. Obrigada por todo conhecimento compartilhado, por ser uma verdadeira inspiração para todas nós mulheres que fazemos Matemática, e além disso, por ser uma professora com um olhar tão humano para com seus alunos. Saiba que seus ensinamentos seguirão comigo ao longo de toda minha vida, querida professora.

Aos meus amigos, que ao longo dessa jornada estiveram ao meu lado nos momentos bons e difíceis. Sem vocês a graduação não teria sido a mesma: Alisson Cavalcanti, Maurício Vieira, Gêneses Granja e Julinery Ferreira. Obrigada por todos os sorrisos e todo companheirismo. Torço muito pelo sucesso de vocês.

À Capes, pelo fomento do Programa de Iniciação à Docência (PIBID) e do Programa da Residência Pedagógica que contribuíram para minha formação, me inserindo no contexto real das escolas.

Aos colegas do Pibid e da Residência Pedagógica, por todas as trocas e incentivos não apenas durante os programas. Vocês são feras!

Ao professor Antônio Sales por aceitar generosamente o convite em participar da minha banca, mas por alguns imprevistos não pôde comparecer. Aos professores Vinícius Varella e Miriam Pereira que compõe a banca desse trabalho, e aos demais professores que fizeram parte da minha graduação. Vocês são exemplos para todos nós que caminhamos na docência. Obrigada!

Por fim, agradeço a todos (as) que de maneira direta ou indireta contribuíram para minha jornada!

RESUMO

O tema do presente trabalho é focado na relação entre tecnologias e ensino de Matemática, considerando que as tecnologias têm ganhado cada vez mais espaço no cenário educacional. O presente estudo teve como objetivo geral analisar se há indicação de uso de tecnologias na abordagem de Geometria Espacial em livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio de duas coleções aprovadas pelo PNLD 2021. Para realizar esse objetivo realizamos uma pesquisa de natureza qualitativa, do tipo bibliográfica. Como referencial teórico foram utilizados artigos de pesquisadores relativos ao tema, a Teoria de Van Hiele para o pensamento geométrico, bem como a Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba (Paraíba, 2020) e a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018). Os resultados da pesquisa apontam que há indicação do uso das tecnologias, como softwares e sites, em uma das coleções analisadas. Também observamos que a metodologia mais utilizada no trabalho com o conteúdo nos livros didáticos analisados é a resolução de problemas e que o contexto das questões usa contextos que se aproximam da realidade. Em relação aos níveis de Van Hiele mais explorados nos livros didáticos, estes são os níveis da *Visualização*, *Análise e Dedução*, sendo o nível de dedução explorado em apenas uma coleção, que apresenta demonstração, hipótese e tese acerca de teoremas da Geometria. A segunda coleção optou por tomar esses conceitos como verdadeiros, sem discutir suas demonstrações. Concluímos fortalecendo a defesa da inclusão do uso das tecnologias digitais na abordagem da Geometria Espacial para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, bem como contribuir para sua formação integral, em razão da inserção das tecnologias nas mais diversas áreas da sociedade.

Palavras-chaves: Geometria Espacial; livro didático; tecnologias digitais.

ABSTRACT

The theme of this work is focused on the relationship between technologies and Mathematics teaching, considering that technologies have increasingly gained space in the educational scenario. The general objective of this study was to analyze whether there is an indication of the use of technologies in the Spatial Geometry approach in Mathematics textbooks for High School from two collections approved by PNLD 2021. To achieve this objective, we carried out qualitative research, of the type bibliographical. As a theoretical reference, articles from researchers related to the topic were used, Van Hiele's Theory for geometric thinking, as well as the Paraíba High School Curricular Proposal and the National Common Curricular Base. The research results indicate that there is an indication of the use of technologies, such as software and websites, in one of the collections analyzed. We also observed that the methodology most used in working with the content in the textbooks analyzed is problem solving and that the context of the questions uses contexts that are closer to reality. In relation to the Van Hiele levels most explored in textbooks, these are the levels of Visualization, Analysis and Deduction, with the level of deduction explored in only one collection, which presents demonstration, hypothesis and thesis about Geometry theorems. The second collection chose to take these concepts as true, without discussing their demonstrations. We conclude by strengthening the defense of the inclusion of the use of digital technologies in the Spatial Geometry approach to promote the development of students' geometric thinking, as well as contributing to their comprehensive training, due to the insertion of technologies in the most diverse areas of society.

Keywords: Spatial Geometry; textbook; digital technologies.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Abertura do capítulo de Geometria Espacial do Livro 1	24
Figura 2: Introdução à Geometria espacial - Situação 1	25
Figura 3: Página de Abertura do Livro 2	26
Figura 4: Página dupla da Abertura do Livro 2	27
Figura 5: Apresentação de ponto, reta e plano no Livro 1	28
Figura 6: Definição da distância entre dois pontos	29
Figura 7: Determinação de um plano	29
Figura 8: Poliedro convexo e poliedro não convexo	30
Figura 9: Representação do Tetraedro e sua planificação	30
Figura 10: Princípio de Cavalieri apresentado no Livro de Dante e Viana (2020)	31
Figura 11: Representação da secção de um Prisma	32
Figura 12: Dados médios do volume de chuva e das temperaturas em Araripe - PE	32
Figura 13: A produção de carvão vegetal em Queimadas - PB	33
Figura 14: Alguns poliedros arquimedianos no livro 1	34
Figura 15: Investigação de deformações em projeção cartográfica	34
Figura 16: Postulado da reta de Euclides	35
Figura 17: Demonstração de um teorema por redução ao absurdo	35
Figura 18: Apresentação de um tipo de fluxograma sobre retas	36
Figura 19: Atividade respondida sobre plano e retas distintas	37
Figura 20: Apresentação da profissão do arquiteto na seção Conexões	38
Figura 21: Questões de investigação da seção Conexões	38
Figura 22: Programando a posição relativa de retas e planos com uso do software Scratch	39
Figura 23: Alguns passos para execução do programa Scratch	39
Figura 24: Seção História da Matemática sobre Academia de Platão	40
Figura 25: Construção de sólidos geométricos utilizando o software GeoGebra	41
Figura 26: Decomposição da esfera em pirâmides	42
Figura 27: Os estudos de Arquimedes sobre a esfera e o cilindro	42
Figura 28: Questão 12 do capítulo Poliedros do livro de Dante e Viana (2020)	44
Figura 29: Questão 18 do Livro 2 indicando o uso da calculadora	44

LISTA DE SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

MEC – Ministério da Educação

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PCEM – Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO E JUSTIFICATIVA DO TEMA DE PESQUISA	11
1.1 INTRODUÇÃO	11
1.2 OBJETIVOS	12
1.3 METODOLOGIA	13
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	14
2. SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA	15
2.1 O ENSINO DE GEOMETRIA E O PENSAMENTO GEOMÉTRICO	15
2.2 A GEOMETRIA, O LIVRO DIDÁTICO E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS..	19
3. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS DA PESQUISA	24
3.1 ABORDAGEM INICIAL DE GEOMETRIA ESPACIAL NOS LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS	24
3.2 SOBRE O APROFUNDAMENTO DO CONTEÚDO E A PRESENÇA DAS TECNOLOGIAS	28
3.3 ATIVIDADES PROPOSTAS	44
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	46
REFERÊNCIAS	48

1. APRESENTAÇÃO E JUSTIFICATIVA DO TEMA DE PESQUISA

1.1 INTRODUÇÃO

A Geometria é considerada um campo essencial da Matemática que pode ser associada a formas presentes na natureza e em construções humanas, o que permite ao estudante condições mais favoráveis para resolução de problemas da área associados a práticas sociais. Na apresentação da Unidade Temática de Geometria na parte da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) voltada para o Ensino Fundamental o documento afirma que

[...] a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam “fazer a quadratura de uma figura”). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau.

Embora a parte de Matemática do documento dirigida ao Ensino Médio na BNCC (Brasil, 2018) não esteja organizada em Unidades Temáticas, mas em torno de cinco Competências Específicas, entendemos que esse nível de escolaridade é uma continuidade do Ensino Fundamental e, portanto, as mesmas ideias lá defendidas valem para a etapa seguinte da Educação Básica. Os conhecimentos geométricos são fundamentais para a formação do estudante, pois possibilitam o desenvolvimento de capacidades cognitivas como abstrair, generalizar, localizar-se no tempo e raciocinar logicamente (Ferner et al, 2022).

Assim como a Geometria pode ser facilmente relacionada a elementos do cotidiano, o que pode motivar os estudantes para o estudo de conteúdos desse ramo da Matemática, também destacamos o fato de que as novas tecnologias precisam estar cada vez mais atreladas ao contexto escolar, pelas necessidades formativas dos estudantes e pelas contribuições que podem dar para o ensino dos conteúdos escolares, em especial no caso da Matemática. Nessa perspectiva, Amaral (2018) destaca que o bom uso que se

possa fazer desses recursos contemporâneos, como computadores e a própria calculadora, deve ser incorporado à prática pedagógica para facilitar a aprendizagem, uma vez que são recomendações de documentos como a BNCC (Brasil, 2018).

De acordo com Queiroz e Borges (2022), o ensino de Geometria tende a ser dominado pela apresentação expositiva da sequência de conteúdos teóricos presentes nos livros didáticos, mas deve apresentar uma ligação com tendências pedagógicas atuais, como a investigação matemática, o uso de tecnologias, o uso da história da Matemática, entre outros, que possibilitam a compreensão de conceitos geométricos, sob diferentes perspectivas.

Levando em consideração o atual cenário do ensino da Geometria e pesquisas que tem como foco a discussão sobre a presença de recursos tecnológicos em livros didáticos, nosso interesse por esse tema de estudo foi decorrente da experiência que vivenciamos durante o Programa da Residência Pedagógica (pós pandemia COVID-19), atuando na etapa do Ensino Médio, quando constatamos que os alunos possuíam dificuldades diversas em relação ao conteúdo de Geometria Espacial.

A presente pesquisa partiu da necessidade de entendermos como o ensino do conteúdo de Geometria Espacial é proposto em livros didáticos de Matemática dirigidos ao Ensino Médio, entendendo que esse recurso é importante para a prática do professor desse nível de escolaridade. A partir deste contexto, nossa pesquisa foi baseada na busca de resposta para a seguinte questão de investigação: A proposta de trabalho para o conteúdo de Geometria Espacial em livros didáticos do Ensino Médio orienta para a exploração de recursos tecnológicos? Considerando a questão, elencamos o objetivo geral e os objetivos específicos de nosso estudo, apresentados em seguida.

1.2 OBJETIVOS

Objetivo Geral

Este trabalho teve como objetivo geral investigar se há indicação de uso de tecnologias na abordagem de Geometria Espacial em livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio.

Objetivos Específicos

- Identificar nos referenciais teóricos adotados as recomendações para o ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio;
- Levantar nos referenciais teóricos adotados as recomendações para o uso de tecnologias no ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio;
- Identificar as estratégias indicadas/exploradas nas atividades propostas nos livros didáticos analisados.

1.3 METODOLOGIA

Nosso estudo foi estruturado como uma pesquisa de natureza qualitativa, visto que não utilizamos métodos e técnicas estatísticas como o centro do processo de análise do problema ou fenômeno em questão (Prodanov; Freitas, 2013). O fenômeno destacado em nossa pesquisa abrangeu a indicação de uso de tecnologias na abordagem de Geometria Espacial em livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio.

Com o intuito de conhecer a problemática sobre a área de estudo foi realizada uma pesquisa exploratória, a qual, segundo Prodanov e Freitas (2013, p. 52), “[...] possui planejamento flexível, o que permite o estudo do tema sob diversos ângulos e aspectos. Em geral, envolve: levantamento bibliográfico; entrevistas com pessoas que tiveram experiências práticas com o problema pesquisado; análise de exemplos que estimulem a compreensão”.

Do ponto de vista dos procedimentos técnicos, utilizamos a pesquisa bibliográfica, elaborada a partir de materiais já publicados, constituído principalmente de livros e artigos científicos, entendendo que a pesquisa bibliográfica tem o objetivo de “colocar o pesquisador em contato direto com todo material já escrito sobre o assunto da pesquisa” (Prodanov; Freitas, 2013, p. 54).

Os dados da pesquisa foram levantados em duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo PNLD (2021), editadas no ano de 2020 e ainda em vigência nas escolas para essa etapa escolar. A seleção se deu em consulta ao site do Guia Digital PNLD (2021), disponibilizado pelo MEC. Dentre as dez coleções aprovadas, selecionamos as coleções que tivemos acesso, sendo uma delas utilizada na escola pública que fez parte do Programa da Residência Pedagógica, uma vez que o acesso aos livros físicos é limitado às escolas. As coleções selecionadas para nossa pesquisa foram:

Matemática em Contextos – Geometria plana e espacial, editora Ática cujos autores são: Luiz Roberto Dante e Fernando Viana; e Matemática Ensino Médio – Geometria, coleção Prisma da editora FTD, dos autores: Jose Roberto Bonjorno; Jose Ruy Giovanni Junior e Paulo Roberto Câmara de Sousa, denominadas Livro 1 e Livro 2.

Para realização da análise das coleções foram consideradas as abordagens dos tópicos da Geometria Espacial, o contexto e as metodologias das atividades propostas e a presença das tecnologias digitais. Nesse sentido, a pesquisa foi conduzida pelas seguintes etapas: 1) identificação dos capítulos referentes à Geometria Espacial; 2) verificação do contexto e das metodologias exploradas nas atividades propostas; 3) indicação das tecnologias digitais como *softwares*, planilhas, entre outros. Essas etapas deram suporte à pesquisa, com foco na presença (ou não) da indicação de uso de tecnologias digitais associadas ao livro didático, possibilitando reflexão acerca do material de apoio ao professor.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Esta monografia está estruturada da seguinte forma: no primeiro Capítulo apresentamos a introdução com uma breve abordagem sobre o tema; a problemática da pesquisa; os Objetivos a serem alcançados e a abordagem metodológica que adotamos.

No segundo Capítulo foi desenvolvido o referencial teórico sobre o ensino de Geometria, alguns de seus conceitos e o desenvolvimento do pensamento geométrico; dissertamos sobre aspectos da trajetória da Geometria no livro didático bem como sobre o livro didático associado à formação de professores; e destacamos a importância do uso de recursos tecnológicos para o ensino e aprendizagem de Geometria Espacial.

No terceiro Capítulo trazemos a análise dos dados da pesquisa realizada com base nas duas coleções de livros didáticos de Matemática no Ensino Médio selecionadas. Finalizamos nosso texto com as Considerações finais, retomando o objetivo e a questão-problema, além das discussões acerca das contribuições do estudo para nossa formação como docente que ensina Matemática na Educação Básica.

2. SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA

No presente Capítulo discutimos acerca do ensino de Geometria Espacial, bem como o uso de recursos tecnológicos associados ao livro didático. Para tanto, consideramos textos de pesquisas sobre o tema, além do documento da BNCC (Brasil, 2018) e a Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba (Paraíba).

2.1 O ENSINO DE GEOMETRIA E O PENSAMENTO GEOMÉTRICO

O ensino de Geometria se destaca pela relevância no desenvolvimento de um raciocínio que contribui para abstrair e compreender o meio em que se está inserido. Revela-se como um campo da Matemática que sofreu inúmeras alterações quanto à sua importância ao longo dos anos, tornando-se imprescindível à formação humana, “a descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços” (Brasil, 2002, p.123 *apud* Ferner et al, 2016).

No âmbito escolar brasileiro, enquanto campo de conhecimento, “a geometria se desenvolveu a partir de estudos, análises e sistematizações das relações entre figuras, espaços e formas geométricas, sendo o ponto, a reta e o plano os entes primitivos” (Queiroz; Borges, 2022, p.889). Nesse contexto, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aponta que

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes (Brasil, 2018, p. 271).

Assim, o desenvolvimento desse pensamento possibilita a interação dos alunos com o espaço físico e seus componentes, de modo a facilitar a compreensão sobre a conexão entre elementos matemáticos de natureza bidimensional e tridimensional. A compreensão dessa relação está presente também em outras áreas da Matemática, como

Grandezas e Medidas, Álgebra e Aritmética, permitindo aos alunos aproveitarem essas conexões sempre que for necessário utilizá-las (Van de Walle, 2009). Desse modo, torna-se essencial a construção do pensamento geométrico, que favorece a observação e estudos de elementos de variância espacial presentes nos espaços em que o estudante vive.

Sob essa perspectiva, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), (Brasil, 1998) ressaltam que o estudo da Geometria oferece muitas possibilidades para explorar situações-problema em situações do cotidiano, o que ajuda a despertar o interesse natural dos alunos pelo estudo do conteúdo. Além disso, muitos conceitos geométricos contribuem para a compreensão de conteúdos relacionados a números e medidas, e também no incentivo ao desenvolvimento da capacidade de observação, reconhecimento de regularidades, semelhanças e diferenças, entre outros. Dessa forma, o aluno desenvolve uma forma especial de pensamento que o capacita a compreender, descrever e representar o espaço ao seu redor.

Van de Walle (2009) trata de um modelo teórico voltado para o ensino de Geometria, que proporciona a ampliação do pensamento geométrico do aluno. Ele trata, em especial, do senso espacial (ou raciocínio espacial), que está ligado à forma como os alunos pensam e raciocinam sobre formas e espaços, podendo ser descrito como uma intuição de visualização mental dos objetos para descrição dos aspectos geométricos. Van de Walle (2009) destaca ainda que experiências geométricas enriquecedoras e envolventes favorecem o desenvolvimento desse raciocínio.

Sob esse entendimento, Van de Walle (2009) destaca estudos envolvendo o pensamento geométrico que foram realizados pelo casal Van Hiele, que desenvolveram um modelo composto por cinco níveis de compreensão, numerados de 0 a 4, que apresentam os processos do pensamento em contextos geométricos.

O Nível 0, da *Visualização*, tem foco na percepção das formas dos elementos estudados em Geometria e sua aparência geral. As propriedades dos objetos geométricos aparecem de maneira informal e não são, necessariamente, percebidas pelo estudante desse nível de pensamento. Por exemplo, nesse nível o estudante é capaz de reconhecer e nomear um retângulo, associando-o a formas presentes no cotidiano, como portas e janelas de uma casa, mas não conseguem definir o que é um retângulo ou identificar as propriedades centrais que o definem.

No Nível 1, da *Análise*, as formas geométricas são identificadas pelas propriedades e o estudante começa a ser capaz de organizar formas em uma classe. De acordo com Van de Walle (2009, p. 441),

Os estudantes operando no Nível 1 podem ser capazes de listar todas as propriedades de quadrados, retângulos e paralelogramos, mas não percebem que esses são subclasses de outra classe, que todos os quadrados são retângulos e todos os retângulos são paralelogramos. Ao definir uma forma, os pensadores no Nível 1 vão, provavelmente, listar as muitas propriedades de uma forma que conhecem.

No Nível 2, de *Dedução informal*, a classificação das formas se dá pela quantidade mínima de características essenciais que as definem. “Quando os alunos começam a ser capazes de pensar sobre as propriedades de objetos geométricos sem as restrições de um objeto particular, são capazes de desenvolver relações entre essas propriedades” (Van de Walle, 2009, p. 442). Nesse nível são capazes de compreender que todo quadrado é um retângulo, pois eles satisfazem as condições mínimas que definem um retângulo.

No Nível 3, da *Dedução formal*, o estudante consegue estabelecer relações entre propriedades, compreender argumentos dedutivos, assim como realizar demonstrações formais no campo da Geometria. Para Van de Walle, o estudante que se encontra no Nível 3 do Modelo Van Hiele consegue observar que as diagonais de um retângulo se interceptam, assim como pensadores do Nível 2, mas, nesse nível o estudante sente a necessidade de verificação formal dessa propriedade, com base em um processo dedutivo formal.

O Nível 4, do *Rigor*, é alcançado apenas pelo estudante que consegue transitar formalmente entre sistemas dedutivos axiomáticos para a Geometria, além do sistema euclidiano. É o nível mais elevado da teoria dos Van Hiele, sendo, em geral, o nível de um especialista em Matemática no ensino superior que esteja estudando Geometria (Van de Walle, 2009).

Os níveis apresentados seguem uma sequência, ou seja, para alcançar um determinado nível é necessário que o aluno avance por todos os níveis anteriores. O fator idade não interfere nesses avanços, mas estes têm relação com as experiências geométricas vivenciadas, que exercem influência nesse processo. Ademais, a linguagem presente no ensino deve ser adequada ao nível de compreensão do aluno, caso contrário, haverá falhas de comunicação que podem resultar em uma aprendizagem mecânica, por memorização (Van de Walle, 2009).

Nessa perspectiva, ao almejar o desenvolvimento do pensamento geométrico, um dos principais desafios no ensino de Geometria é ampliar a capacidade de visualização dos alunos. No modelo de Van Hiele, a visualização é fundamental para perceber as

semelhanças e diferenças entre as figuras e objetos, pois contribui significativamente para a compreensão de conceitos geométricos.

Nessa linha de raciocínio, a BNCC destaca que “a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas” (Brasil, 2018, p. 272). Porém, muitas abordagens educacionais não promovem a visualização e análise de figuras geométricas em diversas situações fundamentais para estimular o pensamento geométrico, abrindo lacunas nesse conhecimento matemático.

Almouloud et al (2004, p. 95), apontam que, “desta forma não podemos esperar que os alunos construam uma pluralidade de conceitos geométricos a partir de conhecimentos obtidos por procedimentos experimentais, tal como recomendam os PCN”. Os autores fazem referência aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que, embora não constituíssem documento definidor de currículos da Educação Básica, desde que foram lançados passaram a servir de referência para práticas matemáticas nesse nível de escolaridade.

Diante disso, é essencial que o desenvolvimento do pensamento geométrico seja explorado desde o Ensino Fundamental e que as experiências sejam proporcionadas ao longo da jornada educacional. Uma vez que, “em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos” (Brasil, 2018, p. 528).

À vista disso, se faz necessário o desenvolvimento de habilidades relativas a “processos de investigação, criação de modelos e resolução de problemas, a fim de que os alunos sejam protagonistas na mobilização de seu próprio modo de raciocínio” (Brasil, 2018, p. 529). Para tanto, na etapa do Ensino Médio, a BNCC propõe que as habilidades matemáticas a serem alcançadas não necessitam seguir uma serialização predefinida, para auxiliar as escolas na definição das suas propostas pedagógicas (Brasil, 2018, p. 530).

No que tange o ensino de Geometria para a etapa do Ensino Médio, são elencadas as seguintes habilidades pela BNCC:

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo

medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital (Brasil, 2018, p. 545).

As Habilidades destacadas representam aprendizagens essenciais mínimas de Geometria para o Ensino Médio que devem ser garantidas ao estudante. Dentre elas destacamos as cinco primeiras Habilidades, que têm conexão direta ou indireta com conteúdos de Geometria Espacial, foco de nossa pesquisa.

2.2 A GEOMETRIA, O LIVRO DIDÁTICO E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS

Queiroz e Borges (2022) destacam que é necessário que os professores estejam atentos à qualidade das suas abordagens de ensino e o uso de recursos didáticos, para variar as fontes de informação e garantir aos alunos uma visão ampla do conhecimento geométrico. Dentre esses recursos destacamos o livro didático, que constitui um dos principais materiais de apoio didático, sendo seu papel “dar suporte ao professor, que tem liberdade para usá-lo à sua maneira, por exemplo, com outras mídias, com computador, vídeo, material concreto, outros livros, etc” (Amaral, 2018, p. 128).

O livro didático é um recurso de ensino adotado nas escolas públicas de forma sistemática e gratuita nas últimas décadas, os quais só podem ser adquiridos com recursos federais se estiverem incluídos no Guia do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD). O PNLD é responsável pela análise de livros didáticos das diversas áreas de conhecimento da Educação Básica e os livros aprovados formam os Guias das

áreas, de diferentes níveis de escolaridade, que são encaminhados às escolas para escolha de coleções pelos professores.

No que se refere aos conhecimentos matemáticos que compõe as obras, Amaral (2018) aponta que “a trajetória da Geometria nos livros didáticos merece um estudo cuidadoso”, pois no período pós Movimento da Matemática Moderna houve um abandono quase total da Geometria, visto que

Ensinar e aprender Geometria por meio de espaços vetoriais ou por meio de transformações, como pregava a Matemática Moderna, era difícil tanto para professores, como para alunos, por se tratar de nova abordagem. E a Geometria, cada dia mais, foi sendo relegada ao último plano do currículo escolar de 1º. Grau (Gouvêa, 1998, p.43 *apud* Amaral, 2018).

Considerando esses aspectos, a Geometria costumava ser relegada ao final dos livros didáticos, o que implicava que os professores só a abordavam se conseguissem cobrir todo o conteúdo do livro. Caso contrário, essa parte do currículo era frequentemente deixada de lado, resultando em prejuízos para os alunos (Amaral, 2018). Desse modo, o ensino do conteúdo tornou-se um desafio para os professores, os quais frequentemente enfrentam dificuldades tanto na compreensão de seus conceitos quanto no seu ensino (Almouloud et al, 2004).

Contudo, há alguns anos, “muitas ações foram direcionadas para reverter essa realidade, e dentre estas o redimensionamento da distribuição dos tópicos de geometria não sendo mais incluídos no final dos livros didáticos” (Queiroz; Borges, 2022, p. 891). Nessa direção, com um destaque maior dos “softwares de geometria dinâmica, mais fortemente a partir de meados do ano 2000, muitas têm sido as pesquisas que apontam suas potencialidades para os processos de ensino e aprendizagem de Geometria, dando novo “status” a ela” (Amaral, 2018, p. 129).

Nesse sentido, a Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba (2020, p. 285), destaca que, atualmente

Ferramentas tecnológicas como o computador, os diversos softwares, a calculadora, o smartphone, o tablet, os vários Apps, os games, dentre outros, são utilizadas com intuito de aumentar a eficiência do ensino e desenvolver o senso crítico, o raciocínio lógico e dedutivo, a capacidade de observação, de pesquisa e estratégias de comunicação.

Sob essa perspectiva, a BNCC defende o uso de novas tecnologias, como computador, calculadoras e planilhas eletrônicas, para estimular o desenvolvimento do pensamento computacional (Brasil, 2018, p. 528). Rêgo, Farias e Azeredo (2016), apontam que “usando computador podemos aguçar a percepção dos estudantes em diversos aspectos como: experimentação; intuição; inferência de resultados; construção de enunciados e justificativas” (p.81).

Por sua vez, os computadores podem ser vistos como um grande aliado no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, embora ainda não seja um recurso disponível na maioria das escolas (Brasil, 1998). Nesse sentido, os PCN (Brasil, 1998) destacam que eles podem ser usados em várias finalidades, dentre elas

[...] como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem; como auxiliar no processo de construção de conhecimento; como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções; como ferramenta para realizar determinadas atividades uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados etc. (Brasil, 1998, p.44)

No entanto, em relação ao ensino de Geometria, é preciso observar em particular a formação dos professores que ensinam Matemática na Educação Básica, visto que “esta é muito precária quando se trata de geometria, pois os cursos de formação inicial não contribuem para que [os futuros professores] façam uma reflexão mais profunda a respeito do ensino e da aprendizagem dessa área da matemática”, como afirmam Almouloud et al (2004, p.99).

Os PCN (Brasil, 1998), ainda no final da década de 1990 alertavam que tanto a formação inicial quanto a continuada pouco contribuíam na qualificação dos professores para o exercício da docência. Fatores como a falta de condições favoráveis para aprimorar sua formação e até de recursos para desenvolver suas práticas, fazia com que os professores se apoiassem quase que exclusivamente em livros didáticos, que muitas vezes não ofereciam qualidade satisfatória.

Cabe ressaltar que “o livro continua sendo um dos caminhos para a educação” (Paraíba, 2020, p. 31), porém, frente à realidade que envolve o processo educativo, é preciso que o professor tenha um olhar criterioso diante do seu uso, já que o livro didático pode contribuir para “induzir qual o tipo de conhecimento que deve circular na sala de

aula, estabelecendo limites na apresentação dos conteúdos” (Queiroz; Borges, 2022, p. 892).

Queiroz e Borges (2022) chamam a atenção para a necessidade de os professores adotarem uma postura crítica frente ao uso desse recurso didático, uma vez que ele pode ser considerado um recurso à sua disposição para o planejamento de suas aulas, mas não pode ser tomado como o único definidor daquilo que irá trabalhar com os alunos em sala de aula.

Nesse contexto, as Diretrizes Curriculares Nacionais (Brasil, 2013) consideram que é exigido do professor “mais do que um conjunto de habilidades cognitivas, sobretudo se ainda for considerada a lógica própria do mundo digital e das mídias em geral, o que pressupõe aprender a lidar com os nativos digitais” (p. 59). Por sua vez, o conhecimento acerca de diversas possibilidades de trabalho em sala de aula torna-se fundamental para permitir ao professor a construção da sua prática. Assim, é entendido que os recursos de tecnologias devem ser incorporados a essas práticas metodológicas e aproveitados ao máximo nas aulas de Matemática em diferentes situações de aprendizagem (Brasil, 1998).

Nesse sentido, considerando as habilidades para a Geometria propostas pela BNCC, o bom uso que se possa fazer das tecnologias digitais como o computador “na sala de aula, depende da escolha de *softwares*, em função dos objetivos que se pretende atingir e da concepção de conhecimento e de aprendizagem que orienta o processo” (Brasil, 1998, p.44).

Rêgo, Farias e Azeredo (2016) destacam que ao trabalhar pela primeira vez com um *software*, é preciso que o professor oriente os estudantes sobre os procedimentos iniciais básicos de uso, propondo questões que servirão de guia para as atividades que exploram o recurso e promovendo discussões acerca das descobertas alcançadas. Para tanto, é indispensável que ao selecionar *softwares*, o professor tenha conhecimento e segurança quanto ao uso do recurso, de modo que o foco seja a aprendizagem dos estudantes.

Dessa forma, algumas questões como: “O que isso faz melhor do que poderia ser feito sem computador? Como os estudantes serão envolvidos com o conteúdo matemático? O programa é fácil de usar? Este software funciona nos computadores de minha escola?”, precisam ser respondidas antes da utilização desse recurso (Rêgo; Farias; Azeredo, 2016, p. 82). Sob esse entendimento, as autoras destacam ainda que os *softwares* variam com o conteúdo a ser proposto, o ano de ensino e o próprio recurso, levando-se em consideração perante a escolha do professor que,

1) os softwares devem contribuir com os objetivos de ensino; 2) não devem ser usados apenas como uma novidade, sem planejamento; 3) seu uso deve visar às vantagens que a tecnologia pode trazer, como eficiência, qualidade de representações produzidas e rapidez na produção de grandes quantidades de informações; 4) o uso individual ou em grupos deve ser bem planejado, administrando o tempo para os alunos explorarem o recurso (Rêgo; Farias; Azeredo, 2016, p. 82).

Desse modo, a utilização de *softwares* deve proporcionar foco, disciplina e aprendizagem aos estudantes, que através desses usos podem aguçar sua curiosidade e interesse em aprender Geometria. Assim, ao optar pelo uso de recursos tecnológicos, deve-se compreender as possibilidades, potencialidades e desafios para associá-los a outras metodologias de ensino, de modo a facilitar a aprendizagem dos conteúdos.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006, p. 87), a “formação escolar deve completar o sentido da Matemática como ferramenta para tecnologia e vice versa. Desse modo, a aprendizagem de Geometria através dos programas de geometria dinâmica provoca o pensar geometricamente, ou seja, estimulam o processo de experimentar, testar hipóteses, esboçar conjecturas e desenvolver a visualização espacial” (Brasil, 2006, p. 88).

3. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS DA PESQUISA

No presente Capítulo, discutimos os dados oriundos da análise dos capítulos de Geometria Espacial dos livros didáticos selecionados, tendo como base o referencial teórico apresentado anteriormente.

3.1 ABORDAGEM INICIAL DE GEOMETRIA ESPACIAL NOS LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS

Considerando o livro didático um material de apoio fundamental no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, a abordagem dos conteúdos deve apresentar uma linguagem que facilite o entendimento dos conteúdos pelo estudante e ser relevante metodologicamente para o professor. Em nossa pesquisa analisamos os livros didáticos de Matemática de duas coleções dirigidas ao Ensino Médio, nos quais eram abordados conteúdos de Geometria Espacial.

Os livros da coleção dos autores Dante e Viana (2020), são compostos por capítulos organizados em tópicos, nos quais há seções e boxes que apresentam dicas, reflexões e verificação de aprendizagem dos conteúdos trabalhados. No capítulo de Geometria Espacial do volume 1, destacam-se cinco tópicos: o primeiro explora ponto, reta e plano, posições relativas e distância; o segundo tópico aborda primas e cilindros e o processo de obtenção da medida de volume por meio do princípio de Cavalieri; no terceiro tópico são estudadas as pirâmides e os cones; a medida da área da superfície e medida de volume desses sólidos; no quarto tópico o foco são os elementos da esfera; e, para finalizar, o quinto tópico apresenta algumas noções de projeções cartográficas.

A página de abertura do Capítulo, visando uma aproximação do conteúdo com o cotidiano do estudante, traz uma abordagem que explora os conhecimentos matemáticos utilizados por profissionais da construção civil para introdução da Geometria Espacial, conforme pode ser visto na Figura 1.

Figura 1: Abertura do capítulo de Geometria Espacial do Livro 1

Atualmente, na construção de casas, prefere-se utilizar o tijolo cerâmico para algumas finalidades, em vez do bloco de concreto, por ser mais leve e mais fácil de manusear e de transportar. Esses fatores possibilitam aumento de produtividade. Além disso, as ranhuras nos tijolos cerâmicos proporcionam mais aderência à argamassa e a outros tipos de revestimento, evitando o desperdício de material.

Escolhido o tipo de tijolo, é necessário saber a quantidade a ser comprada para que não falte material nem haja sobra excessiva.

Antes de erguer uma parede, como o pedreiro calcula a quantidade de tijolos que será utilizada?

O pedreiro costuma fazer o seguinte cálculo para determinar o número de tijolos que serão utilizados por metro quadrado:

$$n^{\circ} \text{ de tijolos} = \frac{1}{\text{largura do tijolo} \times \text{altura do tijolo}}$$

Fonte: Dante; Viana (2020, p. 64)



Tijolo cerâmico sendo utilizado na construção de um muro.

A exploração dos elementos presentes na construção civil apresentada na Figura 1, possibilita uma perspectiva etnomatemática dos conhecimentos empíricos utilizados por pedreiros cuja profissão exige habilidades matemáticas que não são ensinadas nas escolas. Desse modo, o tema pode ser plenamente aproveitado para relacionar a importância da Geometria no cotidiano das profissões uma vez que ressalta a articulação do conteúdo abordado com a resolução de problemas do contexto social.

Na página de introdução de cada tópico, os autores introduzem os conteúdos a serem abordados com duas situações contextualizadas, que possibilitam ao aluno uma aproximação da Geometria Espacial ao cotidiano, como mostra a Figura 2, do tópico de Introdução ao conteúdo.

Figura 2: Introdução à Geometria espacial - Situação 1

Situação 1

Não escreva no livro.

Luis Kallio/Wikimedia Commons

Pinar/Vale/Shutterstock

Cubo mágico

Desde o seu lançamento internacional em 1980, estima-se que foram vendidos mais de 350 milhões de cubos. Aproximadamente uma a cada sete pessoas já brincaram com o quebra-cabeça. Este pequeno cubo de seis cores passou a representar uma década. Ele apareceu em obras de arte, vídeos famosos, filmes de Hollywood e até teve o seu próprio programa de TV, ele representava tanto genialidade quanto confusão, deu início a um novo esporte (*speedcubing*) e já até foi para o espaço.

CUBO VELOCIDADE. História do cubo mágico. Disponível em: <http://www.cubovelocidade.com.br/info/historia-do-cubo-magico.html>. Acesso em: 13 abr. 2020.

Responda às perguntas abaixo sobre o cubo mágico (ou cubo de Rubik).

- As peças de centro de cada face do cubo mágico são sempre fixas e possuem apenas um adesivo com uma única cor. Quantas peças de centro há no cubo mágico?
- As peças de meio pertencem sempre a duas faces adjacentes (lados vizinhos do cubo) e possuem dois adesivos de cores diferentes. Quantas são as peças de meio?
- As peças de quina pertencem a três faces simultaneamente e são compostas de três adesivos de três cores distintas. Quantas são as peças de quina do cubo mágico?
- Quantos adesivos há em um cubo mágico?

Fonte: Dante; Viana (2020, p. 66)

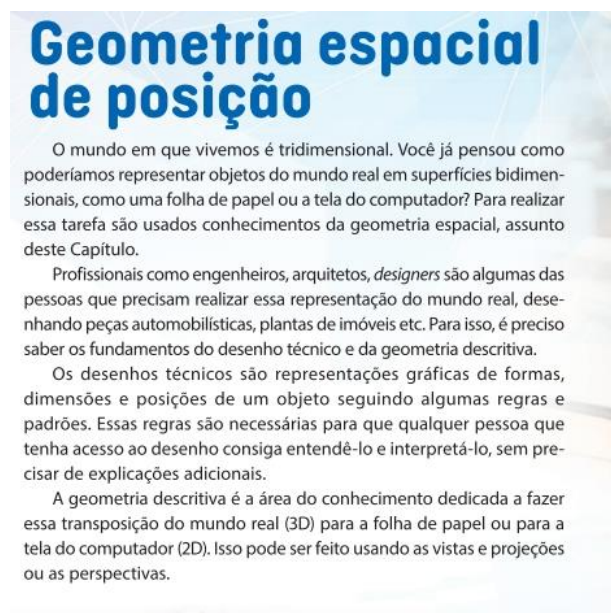
Na situação apresentada na Figura 2 estimula-se a investigação das peças do cubo mágico, mas a associação aos elementos do sólido geométrico cubo acontece de modo informal, o que caracteriza uma atividade de Nível 0 (visualização) da teoria dos Van Hiele (Van de Walle, 2009), pois nesse nível a forma de uma figura é determinada por sua aparência geral, nesse caso, através da figura do cubo mágico.

Dessa forma, o livro de Dante e Viana (2020), apresenta possibilidades para compreensão do conteúdo a partir do que o estudante já sabe ou conhece, uma vez que o estudante possui experiências significativas para serem usadas no seu processo de ensino e aprendizagem. Assim, é possível despertar o interesse pelo estudo da Geometria presente no espaço que vive, como indicam os (PCN), (Brasil, 1998).

O livro da segunda coleção, de autoria de Bonjorno, Giovanni Júnior e Sousa (2020), relacionado ao conteúdo de Geometria Espacial, é organizado em três Capítulos e estes contêm tópicos e seções para aprofundamento do conteúdo: introdução à geometria de posição; poliedros; e corpos redondos.

Na página de abertura, os autores apresentam o conteúdo de Geometria de posição abordando a representação do mundo tridimensional (3D) no plano bidimensional (2D), citando algumas profissões que fazem uso dessas representações no seu cotidiano (Figura 3).

Figura 3: Página de Abertura do Livro 2



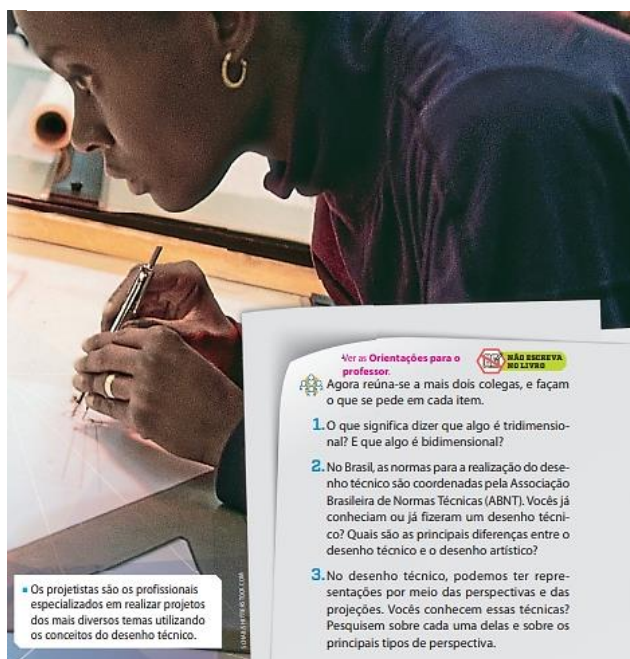
Fonte: Bonjorno; Giovanni Júnior; Sousa (2020, p. 44)

Na página dupla da abertura, a imagem apresenta elementos como o compasso, o esquadro e a prancheta que remetem à Geometria e as orientações específicas propõem, através das profissões listadas no texto, explorar o mundo do trabalho para o desenvolvimento da Competência Geral 6, da BNCC (Brasil, 2018),

(CG06) Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade (Brasil, 2018, p. 09).

Além disso, explora o Tema Contemporâneo Transversal “Trabalho”. Para tanto, apresenta questões de investigações acerca da visão dos estudantes sobre bidimensionalidade e tridimensionalidade (Figura 4).

Figura 4: Página dupla da Abertura do Livro 2



Fonte: Bonjorno; Júnior; Sousa (2020, p. 45)

Na orientação para complementação do item 3 na atividade da Figura 4 (Manual do Professor), é indicado integrar a pesquisa com a colaboração do professor de Língua Portuguesa, sobre as ideias principais ligadas às palavras “perspectiva” e “ponto de vista”, que serão necessárias para o estudo dos corpos redondos. É indicado também o uso do

software *Tinkercad*, um aplicativo computacional gratuito e de fácil acesso, que permite realizar a modelagem em 3D.

Em nossa ótica, na parte introdutória do conteúdo, podemos perceber que ambos os livros trazem uma contextualização com referência à realidade, mas somente o livro didático da segunda coleção propõe o uso de tecnologia para aguçar o interesse dos estudantes no desenvolvimento do pensamento geométrico, em seus textos introdutórios aos conteúdos de Geometria Espacial.

3.2 SOBRE O APROFUNDAMENTO DO CONTEÚDO E A PRESENÇA DAS TECNOLOGIAS

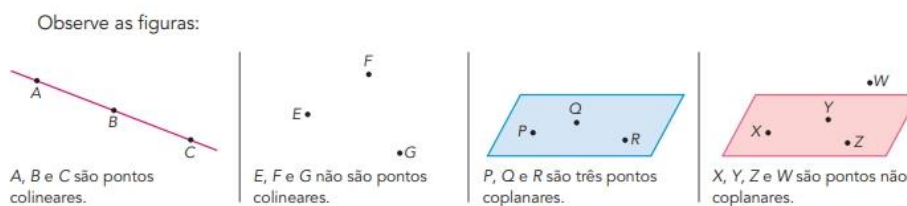
Consideramos como aprofundamento do conteúdo de Geometria Espacial a parte em que o conteúdo é trabalhado nos livros didáticos analisados, além da Introdução ao tema. No conteúdo de Geometria Espacial dos dois livros há tópicos e seções entre a Introdução e as atividades propostas. Assim, percebemos que os dois livros apresentam estruturas parecidas nos Capítulos analisados.

3.2.1 OS RESULTADOS RELATIVOS À PRIMEIRA COLEÇÃO ANALISADA

No tópico inicial de aprofundamento do conteúdo “Geometria espacial de posição”, no livro da primeira coleção analisada, são apresentados os entes primitivos da Geometria: o ponto, a reta e o plano. A partir deles são desenvolvidos outros conteúdos e o tópico é constituído por definições e a apresentação de formas e propriedades gerais.

Na Figura 5, por exemplo, os autores solicitam que o estudante observe figuras dadas, sobre a posição de pontos em relação a retas e planos, e no texto após as imagens tratam, de modo pouco claro, de axiomas que relacionam os entes primitivos da Geometria.

Figura 5: Apresentação de ponto, reta e plano no Livro 1



Os seguintes axiomas, que são afirmações admitidas como verdadeiras sem a necessidade de demonstração, relacionam os entes primitivos da Geometria:

- 1º) Dois pontos distintos determinam uma única reta.
- 2º) Três pontos não colineares determinam um único plano.

Fonte: Dante; Viana (2020, p. 68)

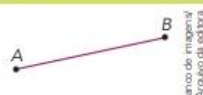
No texto os autores fazem uso dos dois axiomas presentes na Figura 5 nas posições relativas de duas retas distintas; definições de um plano; posições relativas de dois planos distintos; perpendicularismo; projeção ortogonal; e distâncias. Como podemos observar nas (Figuras 6 e 7) abaixo.

Figura 6: Definição da distância entre dois pontos

Distâncias

Distância entre dois pontos

Dados dois pontos distintos A e B, a distância entre A e B é o comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$.



Fonte: Dante; Viana (2020, p. 72)

Figura 7: Determinação de um plano

Em decorrência dos axiomas anteriores, pode-se determinar um plano por meio de duas retas paralelas distintas, duas retas concorrentes ou uma reta e um ponto que não pertence a ela.

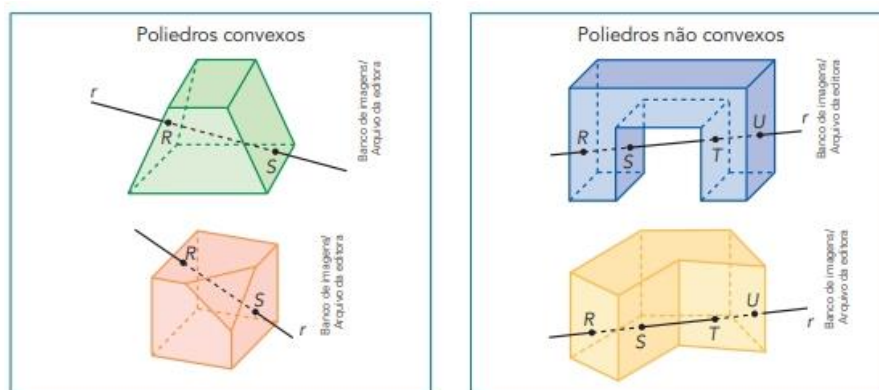
- Duas retas paralelas distintas determinam um plano.
 - Duas retas concorrentes determinam um plano.
 - Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.
-
- β : plano determinado pelas retas a e b.
- γ : plano determinado pelas retas r e s.
- δ : plano determinado pela reta r e pelo ponto A.
- Ilustrações: Banco de imagens /
Arquivo da editora

Fonte: Dante; Viana (2020, p. 69)

Na sequência do trabalho com o conteúdo é apresentado o tópico de Poliedros, com a representação de figuras geométricas espaciais e suas propriedades, para adentrar nas classificações dos poliedros convexos e não convexos. Os autores apresentam brevemente esse tópico, denominando como Poliedro o sólido geométrico formado pela reunião de um número finito de polígonos e pela região do espaço limitada por eles.

Nas classificações dos poliedros, são apresentadas as regiões planas convexas para associar ao poliedro convexo. Dessa forma, descreve-se que um poliedro é convexo se qualquer reta não paralela a nenhuma das faces intersecta as faces em, no máximo, dois pontos. Assim, mostram um exemplo de poliedro convexo e outro exemplo de poliedro não convexo, conforme apresenta a (Figura 8) abaixo.

Figura 8: Poliedro convexo e poliedro não convexo

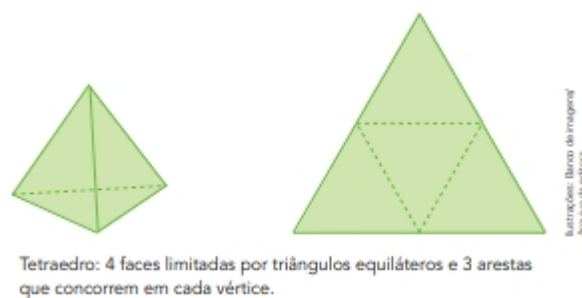


Fonte: Dante; Viana (2020, p. 76)

Desse modo, para o estudo do conteúdo considera apenas os poliedros convexos, uma vez que ao aparecer a palavra poliedro subentende-se que seja convexo. Não existem conexões com objetos do cotidiano, o tópico se encerra com duas atividades propostas que exploram as características do poliedro.

Dando continuidade ao estudo de Poliedros, é apresentada a Relação de Euler, que relaciona o número de vértices (V), arestas (A) e faces (F) de poliedros convexos ($V - A + F = 2$) e exemplos de figuras que satisfazem essa relação. Além disso, apresentam imagens de poliedros regulares convexos e a planificação das suas superfícies, conforme exemplo do tetraedro da (Figura 9).

Figura 9: Representação do Tetraedro e sua planificação



Fonte: Dante; Viana (2020, p. 78)

No segundo tópico os autores aprofundam o estudo dos sólidos geométricos prisma e cilindro. A medida de área da superfície do prisma considera as áreas lateral e total, e as superfícies lateral e total do prisma, além da planificação para generalização da expressão de medida.

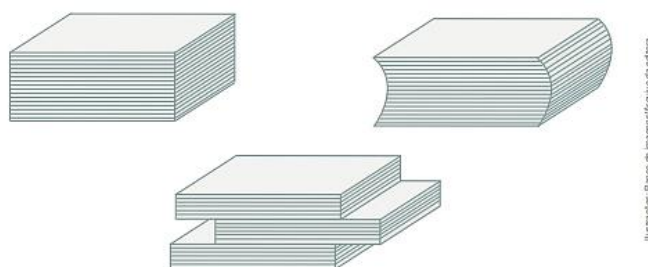
O mesmo ocorre na explanação sobre a área da superfície do cilindro, do cone, da pirâmide e da esfera. Já para a medida de volume dos sólidos espaciais os autores iniciam o tópico indicando o uso do material dourado (ou de pequenos cubos, se houve disponível) para calcular a medida de volume do paralelepípedo retângulo pela contagem de cubos e relacionar a contagem às dimensões da figura construída.

Na sequência os autores apresentam o Princípio de Cavalieri, através da ilustração de uma pilha formada com papel, conforme indicado na (Figura 10).

Figura 10: Princípio de Cavalieri apresentado no Livro de Dante e Viana (2020)

Princípio de Cavalieri

Imagine três pilhas com o mesmo número de folhas de papel, arrumadas de maneiras diferentes, como indicam as figuras:



Note que qualquer plano horizontal que seccione as três pilhas terá intersecções de mesma medida de área (uma folha). Note também que as três pilhas têm medidas de volume iguais (só mudam as formas).

Essa situação serve para ilustrar o **princípio de Cavalieri**, que veremos em seguida.

Fonte: Dante; Viana (2020, p. 90)

No Manual do Professor os autores sugerem a reprodução dessas pilhas de papel em sala de aula, para mostrar que qualquer plano horizontal que secciona as três pilhas

terá intersecções com a mesma medida de área, e mesmo que haja um pouco de inclinação do empilhamento, a medida do volume da pilha não se altera.

Nesse sentido, utiliza-se o mesmo raciocínio para aplicar o Princípio de Cavalieri nos cálculos da medida de volume de sólidos geométricos em geral e concluem, por meio de generalização, que para medir o volume de qualquer sólido geométrico basta traçar um plano horizontal paralelo à base, conforme indicado na (Figura 11), de modo que a seção do sólido, paralela à base seria congruente a essa base.

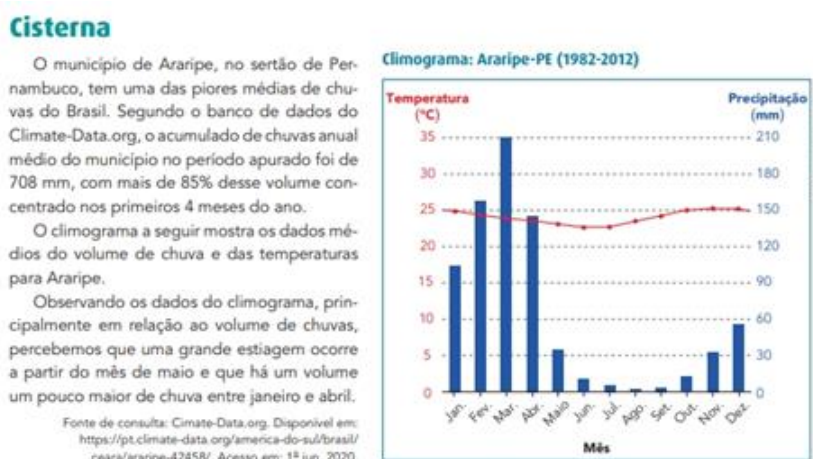
Figura 11: Representação da secção de um Prisma



Fonte: Dante; Viana (2020, p. 91)

Na seção “Além da sala de aula”, são abordadas as temáticas “cisterna” e “produção artesanal de carvão vegetal”. Na primeira parte os autores apresentam uma estratégia adotada em muitas comunidades localizadas em regiões com baixo índice pluviométrico para armazenamento de água da chuva, o modelo de cisterna (Figura 12).

Figura 12: Dados médios do volume de chuva e das temperaturas em Araripe - PE



Fonte: Dante; Viana (2020, p. 120)

Os autores promovem a investigação por meio de questões que envolvem o cálculo direto de medida de volume. Entre elas, uma pesquisa orçamentária para organização da criação de uma cisterna.

Na segunda parte da seção Dante e Viana (2020) apresentam a prática de produção de carvão vegetal, que faz parte da cultura local de moradores do Sítio Zumbi, na cidade de Queimadas (PB) (Figura 13).

Figura 13: A produção de carvão vegetal em Queimadas - PB

A produção artesanal de carvão vegetal em Queimadas (PB)



Fonte: Dante; Viana (2020, p.122)

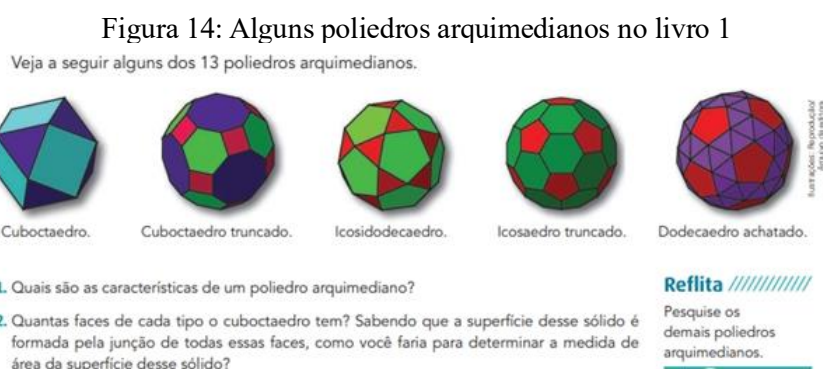
A carvoeira é um tipo de trincheira cavada no chão onde a madeira é colocada e depois coberta com folhagem e terra, para ser queimada. De acordo com os autores, a proposta permeia o Tema Contemporâneo Transversal “Diversidade Cultural”, favorecendo o debate sobre a valorização da cultura, além de desenvolver as habilidades EM13MAT307, EM13MAT504 (Brasil, 2018).

Ressaltamos, entretanto, que embora seja importante valorizar práticas culturais diversificadas de comunidades brasileiras, é importante discutir outros elementos vinculados a essas culturas. Por exemplo, em relação ao carvão vegetal, é fundamental discutir que essa prática pode ser danosa ao meio ambiente quando a madeira a ser queimada é retirada de áreas protegidas ou são árvores nativas importantes para a diversidade ambiental.

Na seção “Conexões”, Dante e Viana (2020) apresentam um texto sobre a tecnologia 3D e as suas aplicações na indústria, entretenimento e na odontologia, visto que a Tecnologia 3D é o processo que cria digitalmente objetos, personagens, cenários e

fenômenos em três dimensões. O livro não sugere o uso de nenhum *software* para ser utilizado na criação de protótipos desse tipo.

Cabe ressaltar que das duas únicas indicações do uso de tecnologia no livro, uma está na seção de “*Leitura e compreensão*”, na qual os autores apresentam um texto com aspectos da História da Matemática envolvendo os Poliedros arquimedianos (Figura 14) e alguns feitos de Euclides. Nela fazem a indicação do uso do *software* Poly Pro 1.12, um aplicativo computacional gratuito que permite a visualização, a construção e análise gráfica de vários conjuntos de poliedros para a investigação das características e medida de área desses sólidos.



Fonte: Dante; Viana (2020, p. 81)

A segunda indicação aparece na seção *Tecnologias digitais*, que aparece uma única vez no tópico de projeções cartográficas (Figura 15). Notamos então, que há apenas essa seção das *Tecnologias digitais* ao longo do capítulo da Geometria Espacial.

Figura 15: Investigação de deformações em projeção cartográfica

Investigando deformações em uma projeção cartográfica

A maioria dos mapas com que temos contato em nossa vida escolar sofre de um grave problema de distorção. Isso ocorre, como relatado anteriormente, por ser impossível realizar a planificação da superfície esférica em um plano. A projeção de Mercator (um dos casos da projeção cilíndrica) pode fazer com que países que apresentam no globo terrestre pequenas medidas de área pareçam ser maiores quando planificados. As deformações ocorrem não somente nas medidas da área desses países, mas também nas medidas dos ângulos, como poderemos observar.

Faremos uso do site: <https://thetruesize.com> (“o verdadeiro tamanho”, em tradução livre; acesso em: 10 jun. 2020), em que poderemos comparar visualmente a medida da área de diversos países representados na projeção de Mercator.



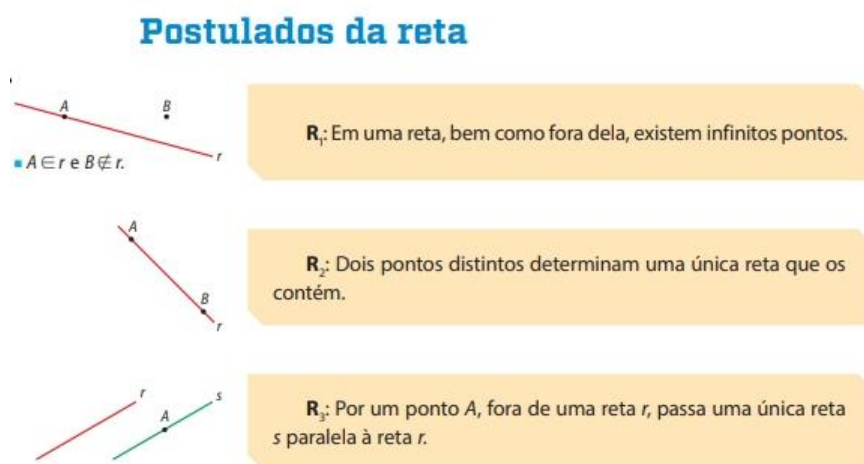
Fonte: Dante; Viana (2020, p. 142)

Nesse caso os autores sugerem o uso do site *The True Size* para investigação das deformidades apresentadas pelas representações dos países na projeção de Mercator.

3.2.2 RESULTADOS DA SEGUNDA COLEÇÃO ANALISADA

No início do tópico de Geometria de posição, os autores apresentam as noções primitivas de ponto, reta e plano como base para a definição de vários conceitos geométricos (Figura 16).

Figura 16: Postulado da reta de Euclides



O postulado R_3 também é conhecido como postulado de Euclides. Por causa

Fonte: Bonjorno; Giovani Júnior; Sousa (2020, p. 48)

Destacamos, nesse texto, a apresentação de afirmações como postulados, teoremas e definições, além da apresentação de alguns tipos de demonstração (direta; por redução ao absurdo; por contrapositiva; e indução finita) (Figura 14), além de contraexemplos para auxiliar no entendimento dos conceitos.

Figura 17: Demonstração de um teorema por redução ao absurdo

Teorema 4: Se uma reta r é paralela a um plano α e se um plano β contém r e é secante a α , segundo uma reta s , então as retas r e s são paralelas.

Para demonstrar esse teorema, vamos primeiro explicitar a hipótese e a tese.

Hipótese

$r \parallel \alpha$
 $\beta \supset r$
 $\alpha \cap \beta = s$

Tese

$r \parallel s$

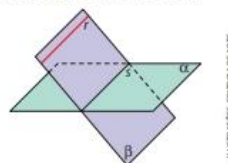
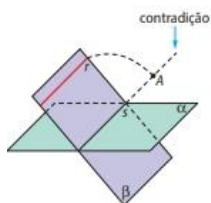


ILUSTRAÇÃO EDITORA DA ANITE

Demonstração



Vamos realizar a demonstração por absurdo. Para isso, admitimos que a negação da tese seja verdadeira, isto é, r não é paralela a s . Se isso fosse verdade, como r e s estão contidas no plano β , elas seriam retas concorrentes e teriam um ponto A em comum. Mas, como $s \subset \alpha$, o ponto A pertenceria a r e a α , o que contraria a hipótese $r \parallel \alpha$.

Como chegamos a uma contradição da hipótese, concluímos que a afirmação inicial de que r não é paralela a s é falsa. Portanto, r é paralela a s .

Fonte: Bonjorno; Giovani Júnior; Sousa (2020, p. 56)

Essa apresentação de postulados, teoremas e demonstrações contribui para explicitar o raciocínio de dedução. Nas orientações específicas, sugerem que a abordagem seja feita por meio da contextualização e informações de aspectos da história da Matemática, em especial relacionados a Euclides.

Nesse caso, percebemos que o nível 3 (dedução) de Van Hiele é explorado já no início do aprofundamento do conteúdo, tendo em vista que o estudante que opera nesse nível começa a apreciar um sistema fundamentado sobre um conjunto de suposições das quais outras verdades possam ser derivadas. Assim, configura-se a necessidade de provar uma série de argumentos dedutivos (Van de Walle, 2009).

No decorrer do tópico de posições relativas de retas, o boxe “Pense e responda” estimula a construção de fluxogramas para organização das ideias, com o intuito de desenvolver o raciocínio lógico. Para isso, apresentam um tipo de fluxograma (Figura 18) e indicam que a construção seja realizada em dupla, incentivando a aprendizagem com a colaboração dos pares.

Figura 18: Apresentação de um tipo de fluxograma sobre retas



Fonte: Bonjorno; Giovani Júnior; Sousa (2020, p. 53)

Em seguida os autores apresentam uma atividade resolvida, relacionada a planos e retas distintas (Figura 19).

Figura 19: Atividade respondida sobre plano e retas distintas

> ATIVIDADE RESOLVIDA

1. Dados, em um plano, duas retas distintas tangentes a uma mesma circunferência, classifique as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas, justificando-as.

a) As retas são necessariamente concorrentes. c) As retas podem ser paralelas.
b) As retas são necessariamente paralelas.

Resolução

Para cada item, vamos buscar um contraexemplo para comprovar que a afirmação é falsa ou utilizaremos os resultados já estudados para mostrar que a afirmação é verdadeira.

a) Essa afirmação é falsa, pois, caso as retas sejam tangentes em pontos diametralmente opostos da circunferência, elas serão paralelas.
b) Essa afirmação é falsa, pois as retas só serão paralelas na situação indicada no item anterior. Em qualquer outra situação, as retas serão concorrentes.
c) Como vimos nos itens anteriores, as retas podem ser paralelas ou concorrentes. Então essa afirmação é verdadeira. Note que a afirmação traz uma possibilidade e não uma afirmação absoluta, válida para todos os casos. Isso faz com que não precisemos demonstrá-la, mas apenas determinar um caso que a atenda.

Fonte: Bonjorno; Giovani Júnior; Sousa (2020, p. 54)

Os autores sugerem, no Manual do Professor, que a construção de exemplos de cada situação indicada na atividade (itens a e c) seja feita no software GeoGebra, com a movimentação dos pontos de tangência no aplicativo para verificar cada afirmação. Dessa forma, a atividade permite que os conceitos estudados sejam postos em prática de maneira dinâmica.

Na seção *Conexões*, observamos que é explorado tema da Arquitetura, versando sobre a profissão do arquiteto e os conceitos utilizados para execução de um projeto arquitetônico. As atividades propostas levantam a discussão sobre o mundo do trabalho e

sugerem que sejam exploradas as opções profissionais dos estudantes do Ensino Médio para o Ensino Superior (Figura 20).

Figura 20: Apresentação da profissão do arquiteto na seção Conexões



Fonte: Bonjorno; Giovani Júnior; Sousa (2020, p. 68)

No item (3) da Figura 20 é proposta a realização de uma pesquisa relacionada às construções arquitetônicas que são destaque no município em que os estudantes vivem. Já no item (4) propõem a escolha de um objeto para desenvolvimento de projeções das vistas desse objeto.

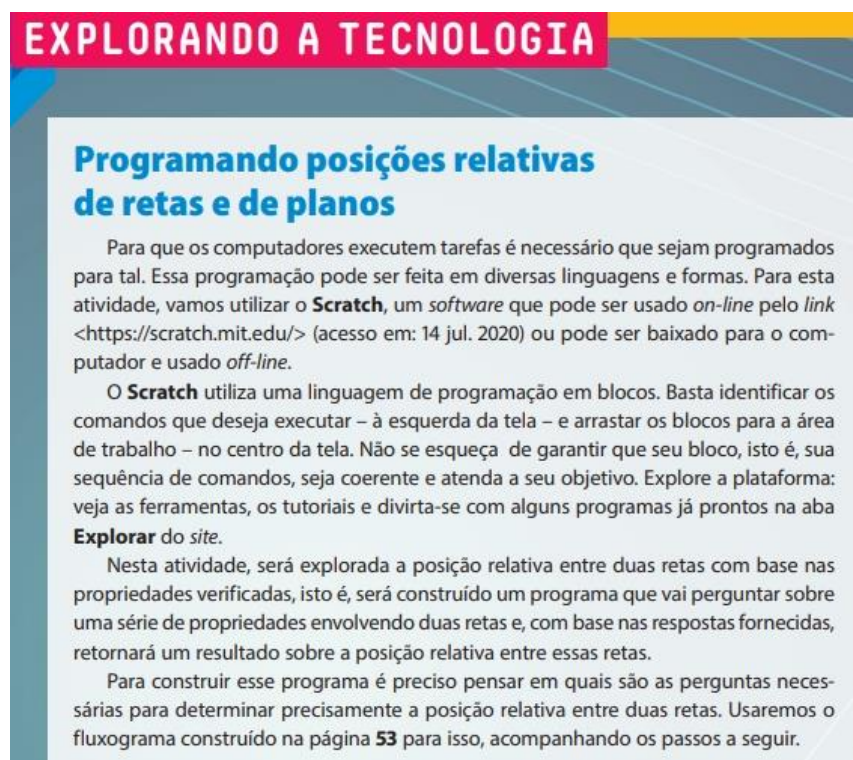
Figura 21: Questões de investigação da seção Conexões

3. Reúna-se a dois colegas e escolham um monumento ou um edifício que seja conhecido na sua cidade. Pesquisem quem foi o responsável pela concepção do projeto: foi um arquiteto? Ele tem outros projetos na cidade? Apresentem a pesquisa feita para o restante da turma. *Resposta pessoal.*
4. Reúna-se a dois colegas e escolham um objeto para fazer a projeção ortogonal das vistas frontal, superior e lateral. *Resposta pessoal.*

Fonte: Bonjorno; Giovani Júnior; Sousa (2020, p. 69)

Em continuidade, o final do capítulo apresenta a seção “*Explorando a tecnologia*”, que trata do *software* Scratch para trabalhar o pensamento computacional e utilizar conceitos de programação por meio da construção de um algoritmo. O programa tem como apoio o fluxograma construído pelos estudantes no tópico Posições relativas de duas retas no plano (Figura 22).

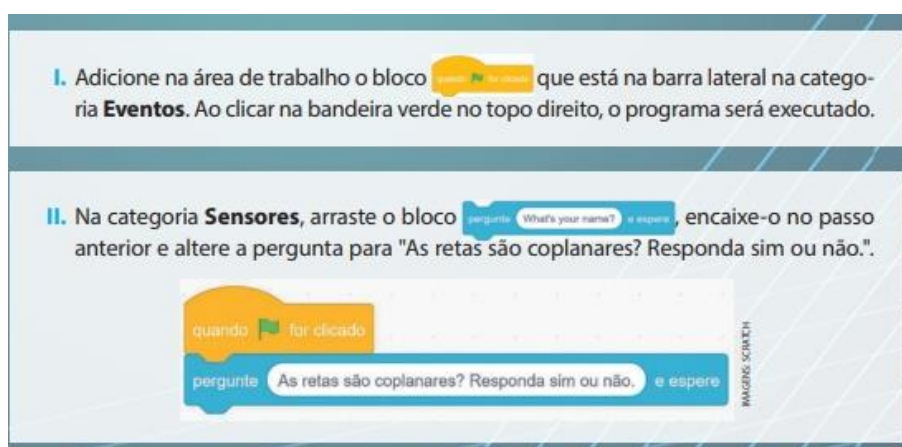
Figura 22: Programando a posição relativa de retas e planos com uso do software Scratch



Fonte: Bonjorno; Giovani Júnior; Sousa (2020, p. 70)

Na Figura 23 os autores apresentam os passos para construção do programa Scratch e as atividades propostas ressaltam a ideia da lógica da programação em um aplicativo simples.

Figura 23: Alguns passos para execução do programa Scratch



Fonte: Bonjorno; Giovani Júnior; Sousa (2020, p. 71)

No Capítulo dedicado ao estudo dos Poliedros, a página de abertura apresenta um texto que explora a cristalografia e questões de investigação para levantar conhecimentos

prévios sobre o conteúdo a ser abordado. Além disso os autores propõem uma pesquisa interdisciplinar com a disciplina de Química para aprofundar o estudo sobre cristais.

Em seguida, abordam as características dos sólidos geométricos e suas aplicações em diversas áreas do cotidiano, como nas artes plásticas, na engenharia, entre outras. Também apresentam as classificações em poliedros convexos e não convexos; a Relação de Euler; e a definição de poliedro regular. Neste último tópico, assim como no livro cuja análise já discutimos, apresentam os poliedros regulares euclidianos e suas planificações. Além disso, abordam o tópico Poliedro de Platão por meio da leitura de um texto.

Dando continuidade, os autores apresentam o estudo dos prismas, os conceitos de paralelepípedos, secção transversal e área da superfície de um prisma. Para este tópico sugerem novamente o uso do *software* Poly, para planificação dos prismas ou o uso de materiais manipuláveis para estimular sua visualização.

Na primeira seção “*História da matemática*” presente no capítulo, os autores apresentam um pequeno texto sobre a Academia de Platão, com discussões sobre diversos elementos matemáticos (Figura 24).

Figura 24: Seção História da Matemática sobre Academia de Platão

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A Academia de Platão

O filósofo grego Platão (428/427-348/347 a.C.) contribuiu, de forma contundente, para a estruturação da matemática da Grécia antiga por meio de sua escola em Atenas, a Academia.

A Academia de Platão

[...] Perto do ano de 377 a.C., Platão fundou em Atenas uma escola, a *Academia*, que durante um século dominaria a vida filosófica da cidade. A Academia era um espaço destinado ao estudo, pesquisa e ensino da filosofia e da ciência, e talvez tenha sido o primeiro exemplo de instituição de ensino e pesquisa de alto nível. [...] Platão herdou de Pitágoras a ideia de que a matemática estruturava o universo. Tinha, no entanto, uma concepção geométrica, contrastando com a concepção aritmética pitagórica.

[...]

No tempo de Platão, três célebres problemas receberam a atenção dos matemáticos [...]. Os três problemas são enunciados a seguir:

Duplicação do cubo. Encontrar o lado x de um cubo que tem como volume duas vezes o volume de um cubo de lado a . [...] O problema equivale, portanto, a encontrar o valor $\sqrt[3]{2}$ usando régua e compasso.

Trisseção do ângulo. Dado um ângulo θ , encontrar, usando a régua e o compasso, o ângulo $\theta/3$.

Quadratura do círculo. Encontrar o lado x de um quadrado que tenha a mesma área de um círculo de raio r [...], o que equivale a determinar o valor de π usando régua e compasso.

Esses problemas viriam a desafiar os matemáticos por mais de dois milênios, a ponto de a expressão “quadratura do círculo” ter se tornado sinônimo de problema impossível de ser resolvido. Demonstrações para a impossibilidade de resolver esses problemas seriam produzidas apenas no século XIX.

MOL, R. S. *Introdução à história da Matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. p. 37-38. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ead/wp-content/uploads/2016/08/introducao_a_historia_da_matematica.pdf. Acesso em: 30 jul. 2020.



■ Estátua de Platão presente na Academia de Atenas, Grécia. Fotografia de 2019.

Fonte: Bonjorno; Giovani Júnior; Sousa (2020, p. 85)

Tal seção não propõe investigações acerca dos tópicos históricos apresentados, para aprofundamento da compreensão desses temas, mas foca na reflexão acerca da relação entre Filosofia e Matemática.

Para a medida de volume, o Princípio de Cavalieri é apresentado para compreensão do cálculo do volume de um prisma qualquer. Essa generalização é aplicada aos demais sólidos geométricos sendo eles o cilindro, a pirâmide, o cone e a esfera. Ao final do capítulo há mais uma seção de “*Explorando a tecnologia*”. Dessa vez, é indicado o uso do GeoGebra para a construção de um sólido geométrico, para determinar seu volume e área lateral, como pode ser observado na (Figura 25).

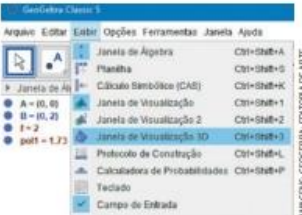
Figura 25: Construção de sólidos geométricos utilizando o software GeoGebra

EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Construção de modelos de sólidos geométricos

Vamos utilizar o **GeoGebra** para construir um modelo de sólido geométrico e, em seguida, observar sua planificação. Para isso, acompanhe os passos a seguir.

- I. Utilizando a ferramenta **Polígono regular**, , marque os pontos $A(0,0)$ e $B(0,2)$ no plano cartesiano e, em seguida, digite "3" na caixa de diálogo que será aberta para informar o número de lados. Na **Janela de visualização**, será criado um triângulo equilátero de lado de medida 2 unidades. Automaticamente, o **GeoGebra** vai nomear esse polígono como **pol1**.
- II. No menu **Exibir**, clique na opção **Janela de visualização 3D**. Ao lado da **Janela de visualização** aparecerá uma outra janela, mostrando um sistema cartesiano tridimensional que está interligado com o sistema cartesiano da **Janela de visualização**. O plano cinza na **Janela de visualização 3D** representa o plano da **Janela de visualização** em que construímos o triângulo equilátero.
- III. Ao clicar na **Janela de visualização 3D**, uma nova barra de ferramentas substituirá a anterior, com instrumentos para a construção de elementos no campo tridimensional, como planos e sólidos geométricos. Veja a imagem a seguir.



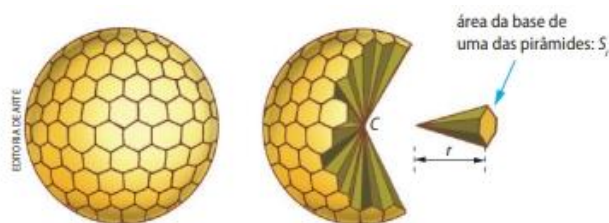
Ver as Orientações para o professor.

Fonte: Bonjorno; Giovani Júnior; Sousa (2020, p. 104)

No capítulo dedicado aos Corpos Redondos, a introdução traz imagens de formas tridimensionais arredondadas com o objetivo de reconhecer as construções que remetem à esfera, cone e cilindro, exemplificando essa relação com trabalhos de Oscar Niemeyer. Em seguida, apresentam as características dos corpos redondos, as definições de secção transversal e meridional, a medida da área da superfície e do volume desses sólidos.

Ao tratar da área da superfície esférica, a expressão é apresentada a partir de um processo de decomposição da esfera em pirâmides, cujas alturas equivalem à medida do raio da esfera, conforme indicado na (Figura 26).

Figura 26: Decomposição da esfera em pirâmides



Fonte: Bonjorno; Júnior; Sousa (2020, p. 134)

Notamos outra seção de “*História da Matemática*”, dessa vez abordando os estudos de Arquimedes sobre a esfera e o cilindro (Figura 27).

Figura 27: Os estudos de Arquimedes sobre a esfera e o cilindro

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Arquimedes

A contribuição de Arquimedes para o desenvolvimento da Matemática foi tão importante que a **Medalha Fields** traz, em seu anverso, a efígie de Arquimedes, com seu nome escrito em grego e a seguinte inscrição: TRANSIRE SVVM PECTVS MVNDOQVE POTIRE (Superar as próprias limitações e dominar o universo).

Essa medalha foi proposta pelo professor John Charles Fields (1863-1932) e começou a ser concedida em 1936 aos matemáticos que desenvolvam pesquisas de destaque.

Leia a seguir um texto sobre os estudos de Arquimedes sobre a esfera e o cilindro.

Arquimedes, a esfera e o cilindro

[...] Plutarco, um escritor grego do 1º século d.C., é autor de um livro chamado “As Vidas dos Homens Ilustres” [...]. Em particular, conta Plutarco que de todas as descobertas que Arquimedes fez, a que o geômetra mais apreciava era a relação de áreas e volumes de um cilindro e da esfera nele contida [...]. Mais precisamente, consideremos uma esfera de raio R , inscrita num cilindro circular reto, de altura $2R$ e cuja base tem raio R (Fig. 1).

$$\frac{V_E}{V_C} = \frac{A_E}{A_C} = \frac{2}{3}$$

Figura 1. “... entre o muito que inventou parece-me que o que mais apreciava era a demonstração da proporção que há entre o cilindro e a esfera nele contida, pelo que pediu a seus parentes que, quando morresse, mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera com uma inscrição da proporção pela qual o que contém excede o conteúdo” (Plutarco). Cícero quando servia na Sicília como questor, encontrou uma lápide com uma esfera inscrita num cilindro, pelo que julgou haver descoberto o túmulo de Arquimedes. Cuidou então de restaurá-lo, já que ele se encontrava totalmente abandonado.

Fonte: Bonjorno; Júnior; Sousa (2020, p. 137)

Nas seções “Conexões”, apresentam textos com as temáticas da água e das artes como interdisciplinaridade com os conteúdos abordados. A investigação é proposta através de questões e pesquisas acerca do consumo da água e a relação da arte brasileira com elementos geométricos, em especial a artistas que fazem uso desses elementos, como Amílcar de Castro, Lygia Clark, Rubem Valentim, Franz Weissmann, entre outros.

No último tópico, relativo às “*Projeções cartográficas*”, são apresentadas as projeções cilíndrica, canônica e plana (também conhecida como azimutal). Em seguida,

são indicadas as classificações dadas às projeções quanto à superfície e propriedades, sendo elas: equivalente; conforme; e equidistante. Não há indicação do uso de tecnologias para esse tópico. Para finalizar, há uma última seção de “*Explorando a tecnologia*”, com o mesmo propósito da seção do capítulo de Geometria de posição, com sugestão de uso do software Scratch para determinar as medidas da altura, raio da base, área e volume de cilindros.

Observamos que nas introduções dos capítulos dos livros das duas coleções analisadas os autores apresentam textos e imagens de formas ou situações presentes no cotidiano, para aproximar o objeto estudado do interesse dos estudantes. Por sua vez, apenas no livro de Bonjorno, Giovani Júnior e Sousa (2020) há perguntas sobre os conteúdos trabalhados, na forma de autoavaliação da aprendizagem nos finais dos capítulos.

De acordo com Rêgo, Farias e Azeredo (2016, p. 106) esse método alternativo de avaliação é “caracterizado como uma reflexão acerca do desempenho do aluno e contribui significativamente para o desenvolvimento de sua autonomia”, pois possibilita que os estudantes identifiquem onde erraram, sem dependerem tanto dessa indicação pelo professor. Para isso, as respostas apresentadas nos livros didáticos deveriam ser detalhadas e não apenas apontar a resposta correta.

Dessa forma, podemos concluir que os livros didáticos apresentam uma linguagem acessível tanto para o professor quanto para o estudante, além de características interdisciplinares e a articulação da Geometria com o cotidiano dos estudantes. Notamos também que abordam temáticas que são relevantes para formação do estudante como a diversidade cultural, trabalho e saúde, exercitando a reflexão e o pensamento crítico.

Porém, apenas o livro da segunda coleção analisada propõe o desenvolvimento do pensamento computacional a partir do uso de aplicativos gratuitos como o GeoGebra e o Scratch. Desse modo, percebemos que a indicação do uso das tecnologias digitais permite que o ensino da Geometria Espacial não fique restrito a mera aplicação de fórmulas ou demonstrações de teoremas, uma vez que se apresenta como um recurso para construção do pensamento geométrico e possibilita a relação entre a cultura juvenil e a cultura digital.

3.3 ATIVIDADES PROPOSTAS

No que se refere às atividades propostas no livro de Dante e Viana (2020), considerando as atividades presentes nas seções “Atividades” e “Atividades respondidas”, não há indicação de uso de tecnologias digitais (softwares, planilhas, sites).

À vista disso, identificamos prevalência de atividades que usam a metodologia de Resolução/Elaboração de Problemas, isso ocorre porque essa é a orientação dada na BNCC (Brasil, 2018), para o desenvolvimento de muitas Habilidades de Matemática, tanto para o Ensino Fundamental quanto o Médio. Segundo Rêgo, Farias e Azeredo (2016), um problema matemático é uma situação que o estudante deseja resolver, mas cuja solução não é conduzida por um caminho rápido e direto.

Em relação aos níveis de Van Hiele, a maioria das atividades estimula a visualização e análise dos sólidos geométricos, mas o livro didático de Dante e Viana (2020) não tem como foco demonstrações formais, mas verificações empíricas. Em algumas dessas atividades, o contexto remete a objetos do cotidiano dos estudantes (Figura 28).

Figura 28: Questão 12 do capítulo Poliedros do livro de Dante e Viana (2020)

12. Uma bola de futebol pode ser representada por um poliedro formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas com lados congruentes entre si. Sabe-se que, para costurar essas faces lado a lado, formando a superfície da bola, usam-se 20 cm de linha em cada aresta do poliedro.

Qual é a medida de comprimento total, em metros, de linha que será utilizada para costurar toda a bola?



Fonte: Dante; Viana (2020, p. 80)

No que tange às atividades propostas no livro de Bonjorno, Giovani Júnior e Sousa (2020), considerando as seções “Atividades”, “Atividades respondidas” e “Atividades Complementares”, apenas seis exercícios indicam o uso da calculadora para auxiliar nos cálculos necessários para a resolução da questão, como indicado na (Figura 29).

Figura 29: Questão 18 do Livro 2 indicando o uso da calculadora

18. É possível construir caixas-d'água cilíndricas usando duas chapas de aço retangulares para revestimento lateral e duas chapas de aço quadradas para as bases. As chapas retangulares são encurvadas e soldadas e as chapas quadradas são cortadas em círculos inscritos e soldadas. Essas chapas são vendidas por 200 reais o metro quadrado. Elabore um problema no qual seja necessário determinar o preço aproximado do gasto com chapas de aço para construir uma caixa-d'água de volume acima de 20 mil litros a partir da altura da caixa-d'água. Utilize a calculadora para auxiliá-lo nos cálculos.

Fonte: Bonjorno; Giovani Júnior; Sousa (2020, p. 118)

A metodologia mais explorada na coleção desses autores é a resolução de problemas, mas também há indicação da realização de atividades em grupo. As orientações específicas sugerem que ao longo dos capítulos sejam utilizados softwares de geometria, como o Poly e o GeoGebra, de modo a contribuir para o desenvolvimento da visão espacial dos estudantes.

Ao longo das análises, podemos identificar que as habilidades mais exploradas pelos dois livros analisados são (EM13MAT309) e (EM13MAT504), em questões cujo foco é a resolução de cálculos matemáticos diretos. Apenas a coleção de Bonjorno, Giovani Júnior e Sousa (2020) trazem atividades em que são exploradas demonstrações formais. Além disso, são poucos os problemas propostos que possibilitam a investigação matemática, o foco na leitura e interpretação de textos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa teve como objetivo geral analisar se há indicação do uso de tecnologias digitais na abordagem de Geometria Espacial em livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio. Assim, com base nos resultados encontrados no desenvolvimento da pesquisa, pode-se indicar que o objetivo proposto foi alcançado.

Em relação aos principais resultados, verificamos que os dois livros destinados ao Ensino Médio indicam o uso de novas tecnologias na abordagem de Geometria Espacial, porém, esta indicação se fez mais presente em uma das coleções analisadas. Já o uso da calculadora limita-se a poucas atividades propostas em um dos livros.

Constatamos que atividades que podemos vincular aos níveis de Van Hiele estão presentes ao longo da abordagem do conteúdo de Geometria Espacial, sendo o nível 0 da *Visualização* e nível 1 da *Análise* o mais presente nas atividades analisadas, uma vez que estas transpõem mais de um nível de pensamento. Constatou-se que apenas um dos livros alcança o nível 3, da *Dedução*, explorando as noções de demonstração, hipótese e tese, possibilitando ao aluno do Ensino Médio a construção de um sistema axiomático da Geometria, usando raciocínio lógico dedutivo.

No que tange às atividades propostas, concluímos que a maioria delas explora a resolução de problemas. No Livro Matemática em Contextos, as atividades propostas são mais conectadas à realidade atual das tecnologias, enquanto na outra coleção analisada as atividades, em sua maioria, envolvem o contexto do cálculo matemático direto, com indicação do uso de softwares no Manual do Professor.

Por sua vez, os livros das duas coleções apresentam algumas questões para serem resolvidas em grupos ou pares, estimulando a aprendizagem coletiva. De modo geral, apenas o livro Prisma apresenta uma autoavaliação pelos estudantes, propondo questões dessa natureza ao final de cada tópico, relativas aos conteúdos abordados. Na análise dos livros didáticos selecionados, buscamos observar as habilidades descritas pela BNCC referentes ao conteúdo de Geometria para o Ensino Médio, limitando nossa pesquisa aos Capítulos de Geometria Espacial, concluindo a prevalência de exploração de apenas duas delas.

Entendemos que os achados dessa pesquisa são úteis, pois possibilitaram a reflexão acerca de nossa futura prática pedagógica, visto que o livro didático tem papel relevante para o ensino, quando associado a metodologias diversificadas de ensino. Compreendemos também que o uso das tecnologias além de incentivado deve ser bem

planejado, sendo indispensável ao professor pesquisar sobre os recursos necessários para proporcionar aos estudantes um ensino de qualidade. Tais recursos contribuem para mudanças nas aulas de Matemática, quase sempre baseadas apenas no uso da lousa convencional. Ademais, vale destacar que a indicação do uso de tecnologias digitais nos livros didáticos não garante que isso ocorrerá em sala de aula. Em alguns casos, as condições de algumas escolas dificultam esse uso, uma vez que nem todos os estudantes têm acesso a estrutura adequada para isso.

Quanto às limitações de nosso estudo, por ter se tratado de uma revisão bibliográfica, a pesquisa foi realizada apenas em duas coleções de livros didáticos, limitando os resultados de nossa análise à indicação do uso de tecnologias digitais pelos autores, na abordagem do conteúdo de Geometria Espacial.

Em relação a futuras investigações, é nosso interesse ampliarmos a análise do uso de tecnologias digitais em livros didáticos, em relação a outros conteúdos matemáticos para o Ensino Médio, e sua aplicação efetiva em sala de aula. Por fim, vale destacar que a realização desta pesquisa contribuiu de forma significativa para nossa formação, ampliando nossa compreensão acerca dos livros didáticos e como estes oferecem potencialidades para o ensino e aprendizagem de Matemática, mas, ao mesmo tempo, têm limitações que precisam ser consideradas e superadas.

REFERÊNCIAS

ALMOULOU, S. A. et al. **A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos**. Revista Brasileira de Educação, Rio de Janeiro, n.27, p.94-108, set./dez. 2004.

AZEREDO, M.A.; FARIAS, S.A.D.; RÊGO, R.G. **Matemática no Ensino Fundamental: considerações teóricas e metodológicas** / João Pessoa: Editora Universitária da UFPB, 2016.

BARCELOS, AMARAL-SCHIO, R. Livro Didático de Ensino Médio, Geometria e a Presença das Tecnologias. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 16, n. 2, p. 127–137, 2018. DOI: 10.22456/1679-1916.89217. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/89217> Acesso em: 26 fev. 2024.

BONJORNO, J.R.; GIOVANNI JÚNIOR, J.R.; SOUSA, P.R.C. **Prisma matemática: geometria: ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias**. 1. ed. – São Paulo: Editora FTD, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional da Educação. Câmara Nacional de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica / Ministério da Educação**. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/media/seb/pdf/d_c_n_educacao_basica_nova.pdf/view

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL. PCN+ Ensino Médio - **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciência da Natureza, Matemática e Tecnologia. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2**. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília: MEC, 2018.

DANTE, L.R.; VIANA, F. **Matemática em contextos: geometria plana e geometria espacial**. 1. ed. – São Paulo: Ática, 2020.

FERNER, D. L. *et al.* **Geometria espacial: análise de uma coleção de livros didáticos do ensino médio**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo, SBEM, 2016. p. 1-11. Disponível em: https://sites.unipampa.edu.br/pibid2014/files/2014/08/xiiinem_002.pdf. Acesso em: 12 mar 2024.

GOUVÊA, F. A. T. **Aprendendo e ensinando Geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de Matemática do Ensino Fundamental**. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1998, p.43.

PARAÍBA (Estado). Secretaria de Estado da Educação e da Ciência e Tecnologia. Conselho Estadual de Educação da Paraíba. Conselho Nacional de Secretários de Educação. **Proposta Curricular do Ensino Médio**. Paraíba: SEECT/CONSED/UNDIME, 2020.

QUEIROZ, J. C.S.; BORGES, G. D. A geometria plana nos livros didáticos de matemática do Ensino Médio. **CIS - Conjecturas Inter Studies**, [S. l.], v. 22, n. 12, p. 886–902, 2022. DOI: 10.53660/CONJ-1632-2E53. Disponível em: <https://conjecturas.org/index.php/edicoes/article/view/1632>. Acesso em: 26 fev. 2024.

VAN DE WALLE, J.A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores em sala de aula** / John A. Van de Walle; tradução Paulo Henrique Colonese. – 6. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre: Artmed, 2009.