UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Razão áurea: um recorte de sua história e a relação com o pentágono regular

Jeferson de Souza Sales

João Pessoa

2024

Jeferson de Souza Sales

Razão áurea: um recorte de sua história e a relação com o pentágono regular

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Universidade Federal da Paraíba

Orientador: Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra

João Pessoa

2024

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S163r Sales, Jeferson de Souza.
Razão áurea : um recorte de sua história e a relação com o pentágono regular / Jeferson de Souza Sales. - João Pessoa, 2024.
45 p. : il.

Orientação: Flank David Morais Bezerra.
TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Razão áurea. 2. Pentágono regular. 3. Decágono regular. 4. Matemática. I. Bezerra, Flank David Morais. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 51(043.2)

Elaborado por Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB-15/113

Jeferson de Souza Sales

Razão áurea: um recorte de sua história e a relação com o pentágono regular.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Drº Flank David Morais Bezerra - UFPB

Aprovado(a) em: 10/05/2024.

BANCA EXAMINADORA

Flank David Morais Bezerra

Prof. Drº Flank David Morais Bezerra - UFPB
(Orientador)

Carlos Bocker Neto

Prof. Drº Carlos Bocker Neto - UFPB
(Examinador)

Miriam da Silva Pereira

Profª Drª Miriam da Silva Pereira - UFPB
(Examinadora)

Aos meus pais, Cicera e José, meus maiores apoiadores.
A minha querida esposa Eduarda, a qual foi meu alicerce.

Agradecimentos

A Deus, pela dádiva da vida, por seu amor incondicional e por me manter de pé todos dias.

Aos meus pais, Cicera e José, pelo amor e dedicação. Sem vocês isso não seria possível e serei grato por toda minha vida.

A minha esposa Eduarda, pelo amor, companheirismo e incentivo. Sem você nada seria possível.

Ao professor Flank Bezerra, meu orientador, pelo seu ensinamento, paciência e toda dedicação. Principalmente, por não desistido de mim.

A professora Miriam da Silva e o professor Carlos Bocker, por aceitarem serem os examinadores do meu trabalho.

A todos os meus amigos que fiz durante o curso de Matemática, por seu apoio. Em especial: Samara Mota, Lucas Cavalcante e Eliel Fonseca.

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos um recorte da história da razão áurea; em seguida, comentamos sobre algumas construções antigas como a grande pirâmide Quéops localizada no Egito e o templo de Partenon na Grécia. Além disso, apresentamos algumas relações envolvendo o pentágono regular e a razão áurea, bem como relações envolvendo o decágono regular e a razão áurea.

Palavras-chave: Razão áurea. Pentágono Regular. Decágono Regular.

Abstract

In this paper, we present a glimpse into the history of the golden ratio; we then discuss some ancient constructions such as the Great Pyramid of Cheops located in Egypt and the Parthenon temple in Greece. In addition, we present some relationships involving the regular pentagon and the golden ratio, as well as relationships involving the regular decagon and the golden ratio.

Key-words: Golden Ratio. Regular Pentagon. Regular Decagon.

Lista de figuras

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho, o público alvo são estudantes do ensino básico. Pretendemos dar a nossa contribuição para o ensino da matemática nas escolas, através de propostas de atividades e recursos visuais. Os alunos exploraram a razão áurea e suas propriedades matemáticas, ou seja, desenvolvendo habilidades importantíssimas para sua formação.

Ao longo da história, a matemática tem nos apresentados constantes curiosas, as quais são difundidas no ensino básico e também no ensino superior. Isto é, as abordagens são das mais diversas possíveis, pois essas constantes possuem várias aplicações. Neste trabalho, a constante matemática que irá ser abordada é a **razão áurea** também conhecida como "proporção áurea" ou "seção áurea", é também uma constante matemática irracional denotada pela letra grega ϕ (lê-se: fi). Primeiramente, a razão áurea que é também conhecida pela letra grega ϕ é a proporção

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{1}$$

e se colocarmos no software Wolfram Alpha [1] vai nos fornecer uma sequência de números,

$$\phi \approx 1.6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227\ldots \tag{2}$$

Diante disto, a história da razão áurea remonta a civilizações antigas como os próprios gregos em sua descoberta, há também uma relação com os egípcios em suas dimensões internas de uma de suas pirâmides que é a pirâmide de Quéops. Há uma relação bastante curiosa da razão áurea que é relaciona-lá com a música, a natureza e figuras geométricas. Mas, enfatizamos neste trabalho a relação de polígonos regulares e a razão áurea.

Consequentemente, um dos polígonos é o pentágono regular que será abordado no decorrer do trabalho, também suas propriedades matemáticas. Ou seja, a razão áurea é encontrada ao fazer algumas manipulações algébricas com suas medidas, especificamente, fazer como o nome sugere uma proporção. Além disso, outra figura geométrica que aparece a razão áurea é o decágono regular.

No Capítulo 2, abordaremos pessoas importantes que contribuíram de maneira significativa para aquilo que conhecemos como razão áurea, também irá ser abordado algumas construções humanas que aparecem a razão áurea. Em seguida, o Capítulo 3 irá abordar a relação do pentágono regular e a razão áurea. Por fim, o Capítulo 4 abordará uma proposta didática para o ensino básico, explorando a relação do decágono regular e a

[1] Wolfram Alpha é um software bastante utilizado por ser um motor de busca que de maneira sistemática fornece todo conhecimento computável para qualquer um.

razão áurea, além disso, fazer uso do software GeoGebra de maneira dinâmica e com isso facilitando o estudo de suas propriedades.

2 Divina proporção à razão áurea

Neste capítulo, iremos explorar um pouco da história da razão áurea, e sua principal referência será (POSAMENTIER; LEHMANN, 2011). Assim como em qualquer novo conceito, devemos começar primeiro definindo os elementos preliminares. Para definir a razão áurea, primeiro devemos entender que a proporção de dois números ou magnitudes é meramente a relação obtida dividindo essas duas quantidades. Por exemplo, quando temos uma proporção 1 : 3 (lê-se: um para três), ou $\frac{1}{3}$, podemos concluir que um número é um terço do outro. As proporções são frequentemente usadas para fazer comparações entre quantidades. Uma proporção se destaca entre as demais, e essa pode ser concebida como a proporção entre os comprimentos de duas partes de um segmento de reta; a saber, considere um segmento de reta de comprimento ℓ, e um segmento de reta de comprimento menor igual a s, daremos destaque à proporção

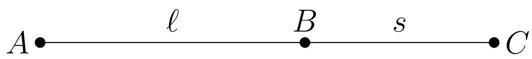
$$\frac{\ell}{s} = \frac{\ell + s}{\ell}. \tag{3}$$

Geometricamente, isso pode ser visto na Figura 1. A proporção

$$\frac{\ell}{s}$$

é chamado de **proporção áurea** ou **seção áurea**. Vamos começar buscando encontrar seu valor numérico, o que nos levará à sua primeira característica única.

Figura 1 – Segmento de reta formado por ℓ e s



Fonte: Elaborado pelo autor

Para determinar o valor numérico da razão áurea $\frac{\ell}{s}$, iremos modificar esta equação (3); a saber

$$\frac{\ell}{s} = \frac{\ell + s}{\ell} \iff \frac{\ell}{s} = \frac{\ell}{\ell} + \frac{s}{\ell} \iff \frac{\ell}{s} = 1 + \frac{s}{\ell} \iff \frac{\ell}{s} = 1 + \frac{1}{\frac{\ell}{s}} \iff \frac{\ell^2}{s^2} = \frac{\ell}{s} + 1,$$

ou seja

$$\frac{\ell}{s} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

já que $\frac{\ell}{s}$ é entendido aqui ser um número não negativo.

Os termos 'proporção áurea' e 'secção áurea' foram introduzidos pela primeira vez durante o século XIX. Segundo (POSAMENTIER; LEHMANN, 2011, p. 9), o frade franciscano [2] e matemático Fra Luca Pacioli (1445-1517) tenha sido o primeiro a usar o termo “De Divina Proportione” (A Divina Proporção) como título de um livro em 1509.

Figura 2 – Capa do livro “Divina Proportione” de Fra Luca Pacioli

Fonte: https://www.amazon.com.br

As obras do matemático italiano Luca Pacioli possuía muito prestígio com seus contemporâneos, tais como Leonardo Da Vinci, Leon Battista Alberti, Pierro della Francesca, Jacopo de Barbari. Além disso, o próprio Leonardo Da Vinci fez ilustrações para o livro de Pacioli (BERTATO, 2010, p. 87).

Enquanto o matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) foi o primeiro a usar o termo “sectio divina” (seção divina). Segundo (LIVIO, 2006, p. 176), Johannes Kepler foi mais lembrado como astrônomo do que como matemático, pois foi responsável pelas três leis do movimento planetário que levam o seu nome isso no livro “Harmonices Mundi” sua obra de maior destaque.

Além disso, o matemático alemão Martin Ohm (1792-1872) é creditado por ter usado o termo “Goldener Schnitt” (seção áurea). Segundo (LIVIO, 2006, p. 17), vai escrever em seu livro na segunda edição de 1835, Die Reine Elementar-Mathematik (A matemática elementar pura).

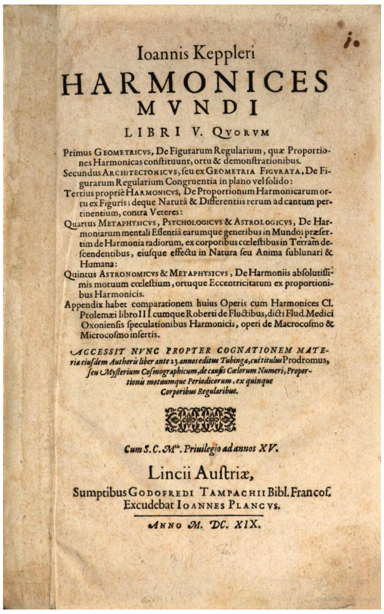
> Ohm escreve em uma nota de rodapé: “Essa divisão de uma linha arbitrária em duas partes também costuma ser chamada de seção áurea”. A linguagem de Ohm claramente nos deixa com a impressão de que não foi ele quem inventou a expressão, mas que, em vez disso, usou um nome comumente aceito. Porém, o fato de que ele não a utilizou na

[2] Frade, do latim frater, que significa irmão, é como vem chamado um católico consagrado a Deus; pertencente a uma ordem mendicante e que reside em uma comunidade (fraternidade) conventual. A ordem religiosa franciscana foi fundada em 1209 por Francisco de Assis.

Figura 3 – Luca Pacioli demonstrando um dos teoremas de Euclides (Jacopo de Barbari)

Fonte: https://www.wikipedia.org

Figura 4 – Capa do livro “Harmonices Mundi” de Johannes Kepler



Ioannis Keppleri

HARMONICES
MVNDI

LIBRI V. QVORVM

Primus GEOMETRICVS, De Figurarum Regularium, quæ Proportiones Harmonicas constituunt, ortu & demonstrationibus.
Secundus ARCHITECTONICVS, seu ex GEOMETRIA FIGVRATA, De Figurarum Regularium Congruentia in plano vel solido:
Tertius propriè HARMONICVS, De Proportionum Harmonicarum ortu ex Figuris; deque Naturâ & Differentiis rerum ad cantum pertinentium, contra Veteres:
Quartus METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS & ASTROLOGICVS, De Harmoniarum mentali Essentiâ earumque generibus in Mundo; præsertim de Harmonia radiorum, ex corporibus cœlestibus in Terram descendentibus, eiusque effectu in Natura seu Anima sublunari & Humana:
Quintus ASTRONOMICVS & METAPHYSICVS, De Harmoniis absolutissimis motuum cœlestium, ortuque Eccentricitatum ex proportionibus Harmonicis.
Appendix habet comparationem huius Operis cum Harmonices Cl. Ptolemæi libro III. cumque Roberti de Fluctibus, dicti Flud. Medici Oxoniensis speculationibus Harmonicis, operi de Macrocosmo & Microcosmo insertis.

ACCESSIT NVNC PROPTER COGNATIONEM MATERIÆ eiusdem Authoris liber ante 23. annos editus Tubingæ, cui titulus Prodromus, *seu Mysterium Cosmographicum, de causis Cælorum Numeri, Proportionis motuumque Periodicorum, ex quinque Corporibus Regularibus.*

Cum S. C. Mtis. Priuilegio ad annos XV.

Lincii Austriæ,
Sumptibus GODOFREDI TAMPACHII Bibl. Francof.
Excudebat IOANNES PLANCVS.

ANNO M. DC. XIX.

Fonte: https://books.google.com.br

> primeira edição do livro (publicada em 1826) pelo menos sugere que o nome “Razão Áurea” (ou, em alemão, “Goldene Schnitt”) só ganhou popularidade por volta de 1830. (LIVIO, 2006, p. 17)

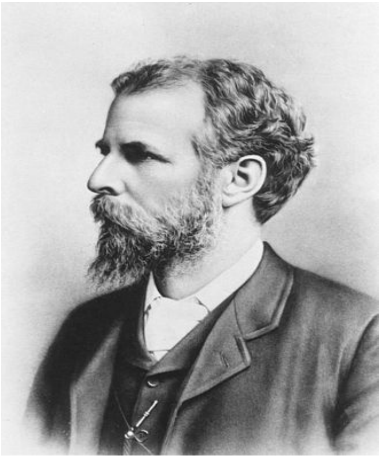
Martin Ohm é irmão do famoso físico Georg Simon Ohm, autor da lei de Ohm no eletromagnetismo.

Figura 5 – Martim Ohm

Fonte: https://commons.wikimedia.org

Em inglês, esse termo, "golden section", foi usado por James Sully em 1875. Segundo

Figura 6 – James Sully



Fonte: https://www.wikipedia.org

(LIVIO, 2006, p. 17), pode ter feito sua estreia em um artigo sobre estética de James Sully, publicado na nona edição da Enciclopédia Britânica, 1875. Você pode estar se perguntando o que faz com que essa proporção seja tão curiosa a ponto de atrair a atenção de vários que foram importantes para sociedade e merecer o título de "áurea". Essa designação, que ela merecidamente ostenta, será esclarecida ao longo deste trabalho.

2.1 A razão áurea na história

Uma das construções grandiosas da história humana foi construída pelos egípcios, as pirâmides de Gizé e uma dessas pirâmides é possível relacionar com a razão áurea. O complexo de pirâmide de Gizé, também conhecido como Necrópoles de Gizé, é constituída de três pirâmides que são Quéops, Quéfren e Miquerinos, a pirâmide de Quéops é a maior do conjunto de pirâmides e por isso é chamada de a “Grande Pirâmide de Gizé”. Além disso, há pirâmides menores em volta que eram destinadas as rainhas, sacerdotes e funcionários do governo. Um dos exemplos mais antigos que o ser humano identificou é essa curiosa relação com a razão áurea e que irá ser abordado em breve.

Figura 7 – Pirâmides de Gizé.

Fonte: https://www.wikipedia.org

Essa enorme estrutura foi construída por volta de 2560 a.C., é a mais antiga e a maior das três pirâmides da Necrópole de Gizé, perto do atual Cairo, Egito. O que ainda não se sabe até hoje é se o arquiteto desse complexo estrutural, Hemiunu (2570 a.C.), fez essa escolha de forma intencional ou é uma simples coincidência. Hemiunu era um “vizir”[3] e teria sido o arquiteto responsável pela construção da Grande Pirâmide de Gizé, também conhecida como a pirâmide de Quéops.

Quéops (ca. 2589-2566 a.C.) foi faraó do Egito Antigo e é conhecido por sua enorme construção que é a “Grande Pirâmide de Gizé”, que leva o seu nome a pirâmide de Quéops, (SHAW, 2003, p. 88). Segundo (LIVIO, 2006, p. 67), a pirâmide de Quéops representa um testemunho de sucesso, então era de suma importância a construção desse monumento para perpetuar o quão prospero foi seu reinado após a unificação do Alto Egito e Baixo Egito, isso feito anteriormente pelo primeiro faraó Menés (ou Narmer).

Arqueólogos estudaram esta curiosa pirâmide de dentro e de fora por muitos anos. No entanto, vamos nos concentrar em suas dimensões externas para nossos propósitos. Durante a época, o cúbito, também conhecido como côvado, era uma unidade de medida comum. Ele era baseado no comprimento do antebraço, desde a ponta do dedo médio até o cotovelo. Variava dependendo da cultura, mas geralmente era entre 45 e 52 centímetros.

[3] Vizir: em persa significa ministro e conselheiro, um dos membros mais importantes da corte do Antigo Egito e o responsável por todas as obras reais.

Figura 8 – Estátua de Hemiunu

Fonte: https://www.wikipedia.org

Figura 9 – A estátua de Quéops no Museu do Cairo

Fonte: https://www.wikipedia.org

Era um método prático de medir coisas até a padronização das unidades de medida. Irá ser utilizado apenas a palavra "côvado" ao se referir a essa medida ficando de fácil compreensão para o leitor. O diagrama da pirâmide (10) mostra que ela tem um altura de 280 côvados, um diâmetro de base de 220 côvados e uma altura de inclinação de 356 côvados.

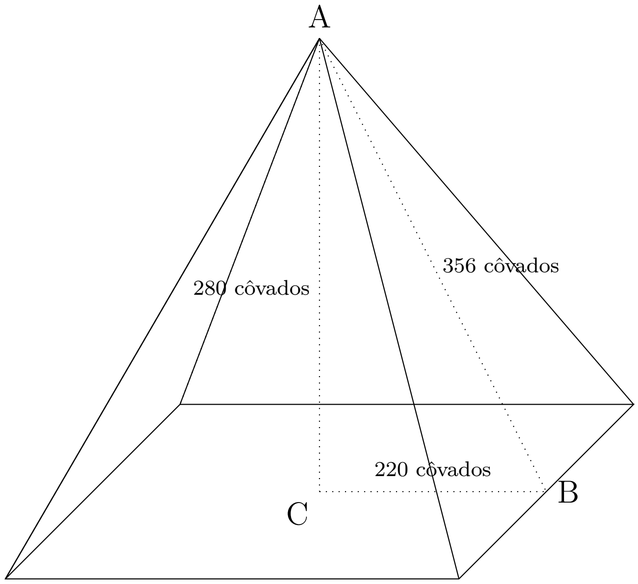
A proporção entre altura inclinada e a metade do comprimento da base é

$$\frac{AB}{BC} = \frac{h_A}{\frac{a}{2}} = \frac{356}{220} \approx 1,61818$$

que é quase equivalente à razão áurea de 1,61803.

Além do mais, como se isso não fosse curioso de que a pirâmide é possível relacionar com a razão áurea, considere a proporção da altura da pirâmide para metade de seu

Figura 10 – Dimensões externas da Pirâmide de Gizé



Fonte: Elaborado pelo autor

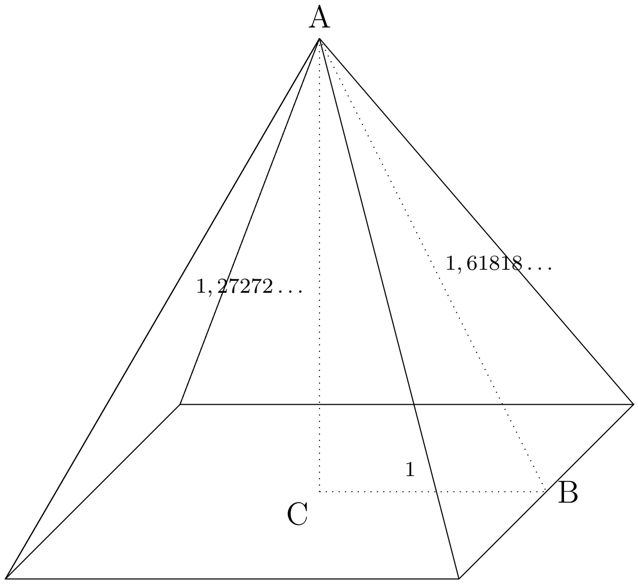
comprimento de base.

$$\frac{280}{220} = \frac{14}{11} = 1,27272\ldots$$

que fica bem próximo da raiz de ϕ, ou aproximadamente $1,2720196\ldots$

Se fôssemos dividir cada uma das dimensões do triângulo $\triangle ABC$ da Figura 10 por 220, obteria um triângulo com as dimensões mostradas na Figura 11:

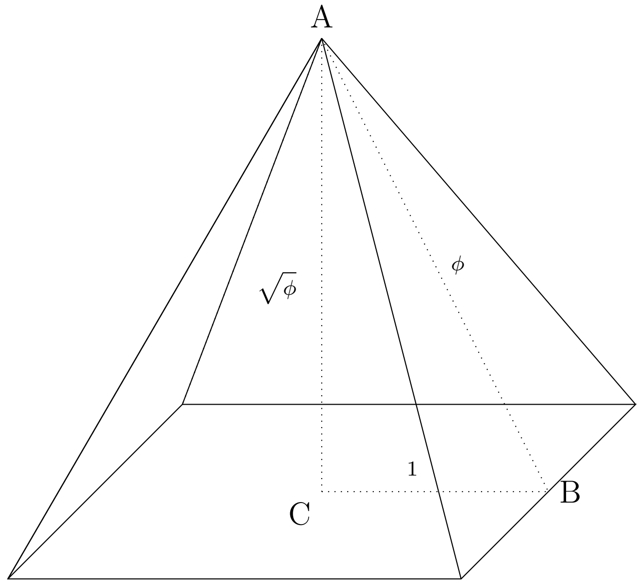
Figura 11 – Dimensões externas da Pirâmide de Gizé ao dividir por 220



Fonte: Elaborado pelo autor

Estes valores aproximam-se da razão áurea de várias formas, como podemos ver na Figura 12, onde temos as dimensões de um triângulo semelhante.

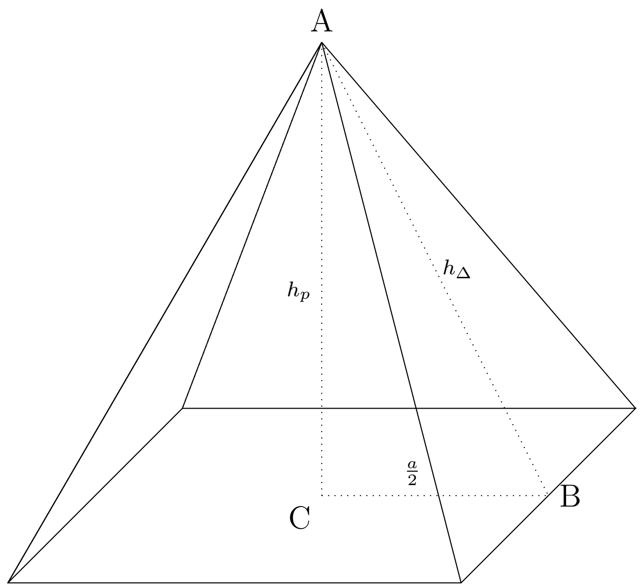
Figura 12 – Novas dimensões externas da Pirâmide de Gizé



Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com o historiador grego Heródoto (ca. 484-424 aC.), a pirâmide de Quéops, localizada em Gizé, foi construída de tal maneira que o quadrado da altura da pirâmide é igual à área de de um dos lados laterais. Ao analisarmos essa curiosa relação, obtemos resultados bastante surpreendentes. Segundo Lívio (2006, p. 72), essa afirmação é importante porque implica que a razão entre a altura de uma face triangular e a metade do lado da base é igual à razão áurea.

Figura 13 – Novas dimensões externas da Pirâmide de Gizé



Fonte: Elaborado pelo autor

Examinando a Figura 13 acima é fácil perceber que pode ser utilizado o teorema de Pitágoras no triângulo ΔABC, o que nos leva às conclusões seguintes:

$$h_{\Delta}^2 = \frac{a^2}{4} + h_p^2$$

Observe também que o triângulo $\triangle ABC$, a base que é $CB = \dfrac{a}{2}$ e a altura é h_{Δ}. Logo, a área de um dos triângulos laterais é $A = \frac{a}{2} \cdot h_{\Delta}$. Provaremos que se o quadrado da altura da pirâmide (h_p^2), é igual a área de sua face triangular ($\frac{a}{2} \cdot h_{\Delta}$), então a razão ($\dfrac{h_{\Delta}}{\frac{a}{2}}$) é igual à razão áurea.

Agora vamos utilizar a relação que Heródoto atribuiu à pirâmide de Gizé, obtemos:

$$h_p^2 = h_{\Delta}^2 - \frac{a^2}{4} = A = \frac{a}{2} \cdot h_{\Delta}$$

.

Dividirmos ambos os lados da equação $\frac{a}{2} \cdot h_{\Delta} = h_{\Delta}^2 - \frac{a^2}{4}$ por $\frac{a}{2} \cdot h_{\Delta}$, obtemos

$$1 = \frac{h_{\Delta}}{\frac{a}{2}} - \frac{\frac{a}{2}}{h_{\Delta}}$$

.

Definimos a variável x como a razão entre a altura do triângulo (h_{Δ}) e a metade de sua base ($\frac{a}{2}$), ou seja, $x = \frac{h_{\Delta}}{\frac{a}{2}}$. Em seguida, obtendo o recíproco, $\frac{\frac{a}{2}}{h_{\Delta}} = \frac{1}{x}$ e substituindo na equação acima, obtemos uma equação simplificada:

$$1 = x - \frac{1}{x}$$

que ao multiplicarmos tudo por x, obtemos

$$x = x^2 - 1$$

isto é,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

utilizando o teorema de Pitágoras, temos

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (1)} \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ou seja,

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

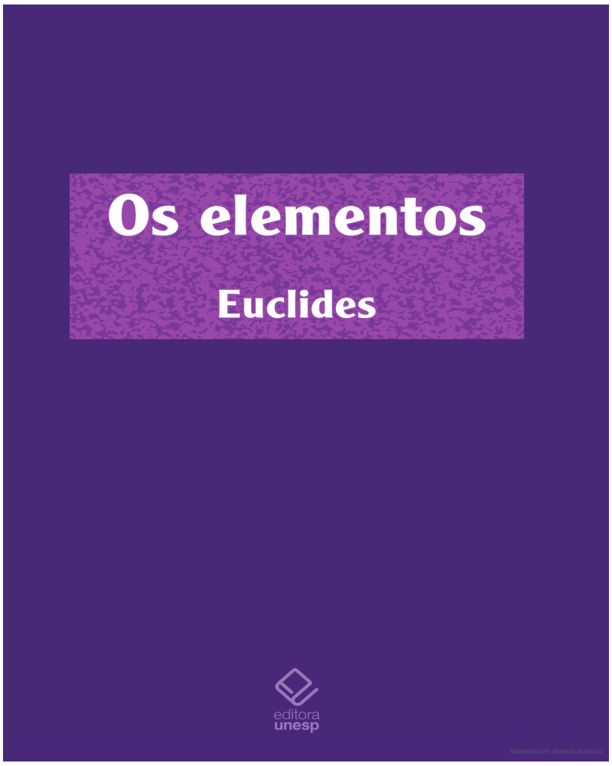
e a solução desta equação quadrática resulta em duas raízes: $x_1 = \phi$ e $x_2 = -\frac{1}{\phi}$. A primeira raiz ϕ, representa a proporção áurea, um número irracional com propriedades matemáticas únicas. A segunda raiz, $x_2 = -\dfrac{1}{\phi}$, é negativa, o que significa que a altura do triângulo seria negativa, o que não é possível geometricamente. Portanto, apenas a primeira raiz, $x_1 = \phi$, é relevante para este estudo.

Observe que a razão entre a altura do triângulo lateral (h_Δ) e metade de sua base ($\frac{a}{2}$) é $1,61813471$.

É curioso existir a possibilidade de relacionar a razão áurea com uma das civilizações mais antigas do mundo. A principal pergunta a ser feita é: a arquitetura da pirâmide e a relação com a razão áurea foi feito intencionalmente? (LIVIO, 2006, p. 74) afirma que "a conclusão de tudo isso é que o texto de Heródoto dificilmente pode ser considerado como algo que documente a presença da razão áurea na Grande Pirâmide". Segundo (LIVIO, 2006, p. 78), a descoberta da razão áurea e suas propriedades pelos antigos egípcios é improvável, mas que isso foi deixado para os matemáticos gregos. Há ainda muito a ser dito sobre a razão áurea neste trabalho, mas podemos aqui destacar algumas descobertas importantes que foram resultados de medições e pistas históricas.

Na história da razão áurea, a próxima aparição significativa seria a dos pitagóricos, que entre outras aplicações a usaram em suas investigações musicais. A primeira referência direta registrada a razão áurea é encontrada nos "Elementos" de Euclides, que foi um compilado de tudo o que se sabia sobre matemática na época de sua escrita por volta de 300 a.C.

Figura 14 – Capa do livro "Os Elementos" de Euclides



Essa obra consiste em treze livros, nos quais há duas referências à razão áurea: no livro 2, proposição 11, ele constrói um segmento de reta, que é cortada de forma que um retângulo seja formado pelo segmento inteiro e uma de suas partes (segmento), que é igual ao quadrado sobre o segmento restante. Isso pode ser demonstrado visualmente, como mostrado na Figura 2-4. Lá, começamos com o segmento de linha ACB, onde o ponto C corta o segmento de forma que CB seja usado para formar o retângulo $ABHF$, onde $CB = HB$, e o quadrado $ACGD$ tem a mesma área que o retângulo $ABHF$. Essa igualdade de áreas pode ser expressa como $AC^2 = AB \cdot CB$, que pode então ser convertida para $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$, e que, em seguida, é mencionada em uma segunda citação nos "Elementos".

Figura 15 – Partenon

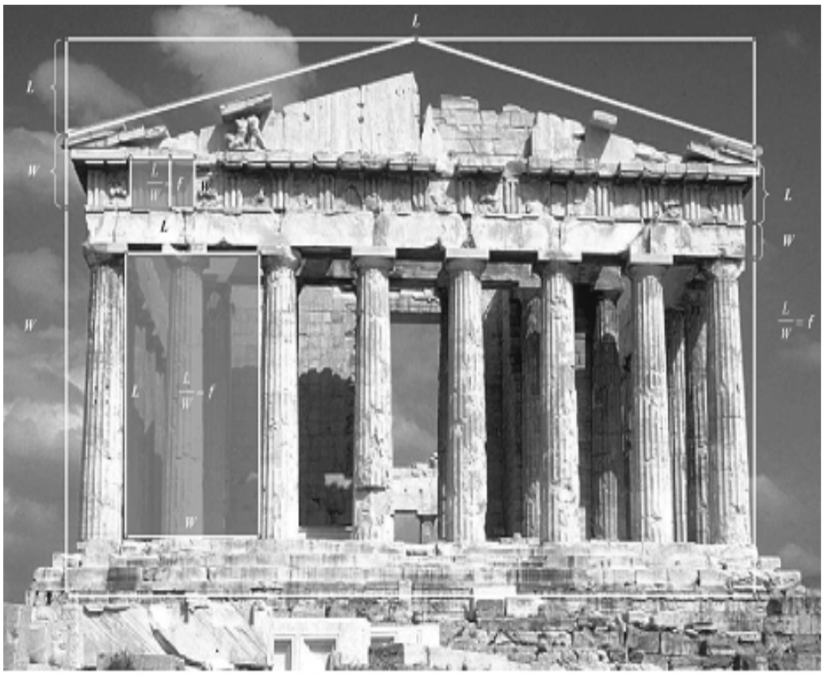
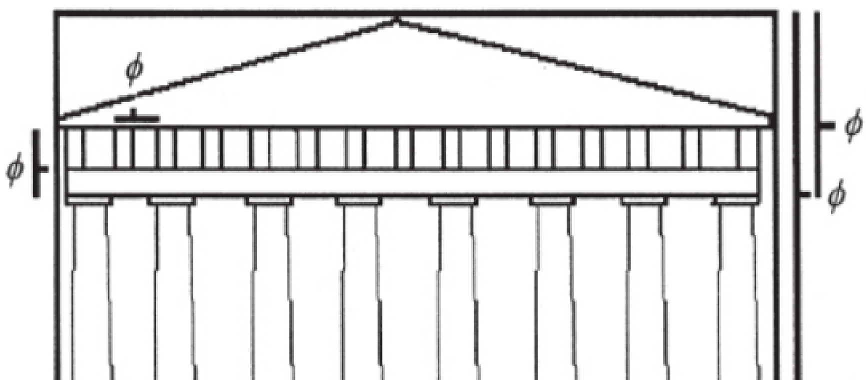


Figura 16 – Partenon



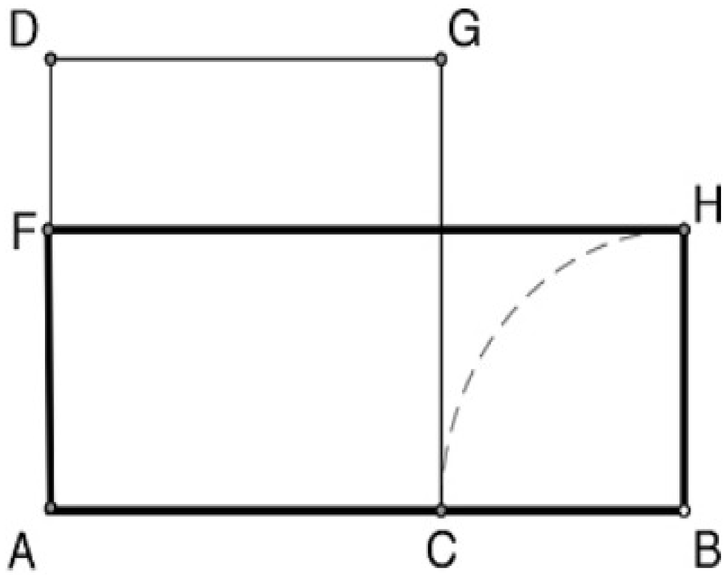
Euclides se refere a um segmento de reta da que é cortada ou seccionada em uma razão média e extrema, ou seja, para o segmento de reta AB, contendo o ponto C, assim obtemos

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Isso é precisamente a nossa definição de razão áurea como mostra a Figura 1.

Conforme examinamos a história da razão áurea, encontramos sua próxima exibição proeminente nas obras do grande escultor grego Fídias (ca. 490-ca. 430 a.C). Seu projeto para a construção do Partenon em Atenas, Grécia (Figura 16), bem como as esculturas que ele fez para adornar essa estrutura, como a famosa estátua de Zeus, dizem ser reflexo dessa bela proporção. De fato, a letra grega é usada por muitos matemáticos hoje para representar a razão áurea, uma vez que é a primeira letra do nome de Fídias quando escrito em grego como ϕ.

Figura 17 – Livro 2, Proposição 11



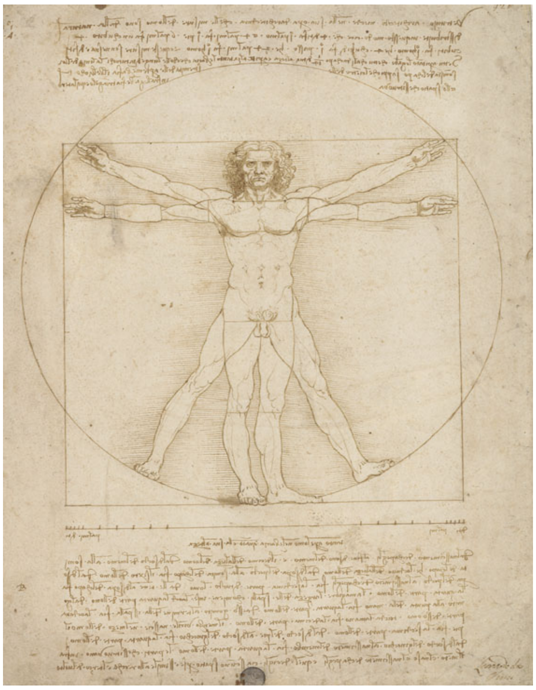
Como você pode ver na Figura 16, o Partenon em Atenas, Grécia, se encaixa perfeitamente em um retângulo áureo, ou seja, um retângulo no qual o quociente dos lados é a razão áurea. Além disso, na Figura 15, você notará várias outras razões áureas. No entanto, mesmo hoje, ninguém pode afirmar com certeza se Fídias tinha a razão áurea em mente quando projetou a estrutura.

E um pouco mais:

À medida que continuamos a traçar a história da razão áurea, encontramos a próxima aparição significativa citado anteriormente neste trabalho que é um livro de três volumes intitulado "De Divina Proportione" (A Divina Proporção) Figura 3, escrito em 1509 pelo franciscano e matemático Fra Luca Pacioli. O livro contém desenhos do pintor italiano, escultor, arquiteto, e também matemático Leonardo da Vinci (1452-1519) dos cinco sólidos platônicos. Da Vinci também desenhou o "Homem Vitruviano" Figura 18, por volta de 1487. Esta é uma representação do corpo humano, que claramente exibe uma aproximação da razão áurea.

Da Vinci forneceu notas com base no trabalho de Marco Vitrúvio Polião (ca. 84-ca. 27 a.C.), um antigo escritor, arquiteto e engenheiro romano. O desenho , que está sob a

Figura 18 – "Homem Vitruviano" de Leonardo Da Vinci



Fonte: https://www.gallerieaccademia.it

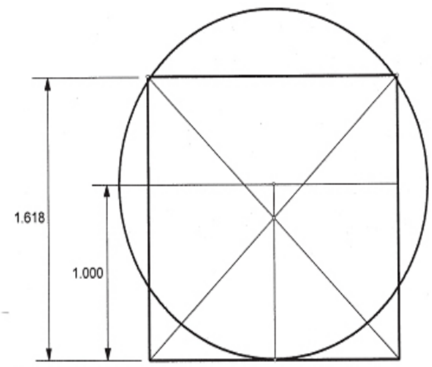
posso das Gallerie dell'Accademia em Veneza, Itália, é frequentemente considerado como uma das primeiras inovações na representação pictórica de um corpo humano com as proporções perfeitas. Aparentemente, Da Vinci derivou essas proporções geométricas do tratado de Vitrúvio, "De Architectura", livro 3.

O desenho mostra uma figura masculina em duas posições sobrepostas, com os braços e pernas afastados, inscrita em um círculo e um quadrado, que são tangentes em apenas um ponto. A razão áurea é exibida no fato de que a distância do umbigo até o topo da cabeça, dividida pela distância das solas dos pés do homem até o umbigo (que parece estar no centro do círculo, conforme mostrado na Figura 18), que é cerca de 0,656, se aproxima da proporção áurea (que sabemos ser 0,618...).

Se os vértices superiores do quadrado estivessem um pouco mais próximos do círculo, a proporção áurea teria sido alcançada. Isso pode ser visto na Figura 19, onde o raio do círculo é selecionado como 1 e o lado do quadrado é 1,618, aproximadamente igual a ϕ, a razão áurea.

A extensão do uso consciente da razão áurea por arquitetos e artistas em suas obras

Figura 19 – “Homem Vitruviano” de Leonardo Da Vinci



Fonte: Livro: The Glorious Golden Ratio

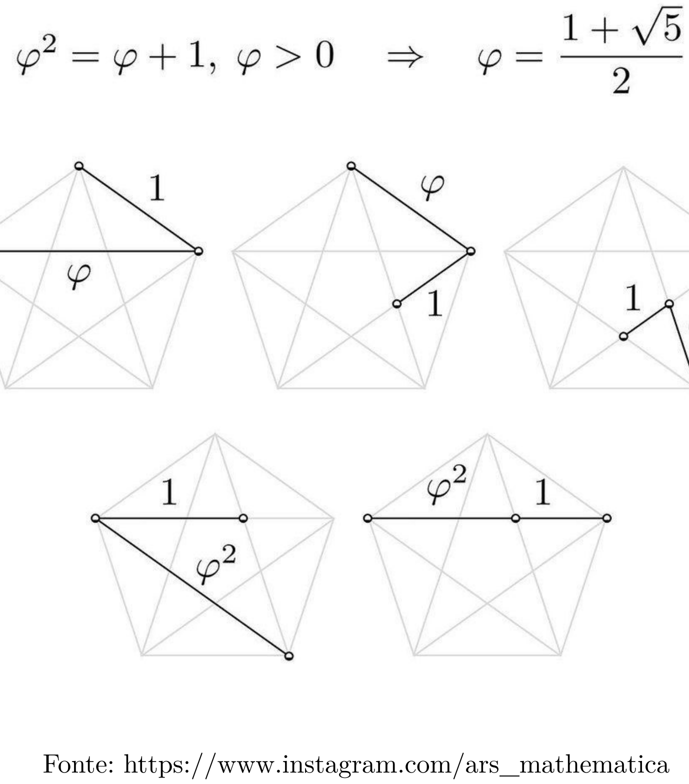
ainda é objeto de investigação e debate, pois não existem documentos que estabeleçam claramente o seu uso. Nosso desejo de encontrar exemplos da razão áurea pode também influenciar muitas dessas observações. No entanto, existem inúmeros exemplos em que a proporção áurea aparece na arte e na arquitetura. Muitos desses exemplos podem ser encontrados na Internet. Há também aqueles que são céticos quantos à autenticidade dessas.

Há também aqueles que questionam as observações, como Dan Pedoe, George Markowsky, Marguerite Neveux e Roger Herz-Fischer. Por outro lado, existem estruturas (por exemplo, de Le Corbusie), esculturas (como as de Étienne Béothy) ou pinturas e gráficos (por exemplo, de Jo Niemeyer) que documentam o uso da razão áurea em seu design, (POSAMENTIER; LEHMANN, 2011, p. 36).

3 Pentágono regular e a razão áurea: inspirado em uma postagem do Instagram

Este capítulo se propõe a examinar essa curiosa relação entre um pentágono regular e a razão áurea, inspirado em uma postagem do Instagram veja a Figura 20 e postagem aqui da conta **@arc_mathematica** com mais de 34.500 seguidores, no dia 02 de abril de 2024. O pentágono regular apresenta a razão áurea quando calculamos a razão entre um de seus lados e um dos segmentos que formam suas diagonais. Além disso, os problemas das Seções 3.4 e 3.5 foram adaptados, pois na Figura 20 o pentágono regular que possui diagonal ϕ^2 e um segmento igual 1 está incorreto, e também na Figura 20 o pentágono regular que possui diagonal $\phi^2 + 1$ também está incorreto, se assim fosse chegaríamos a conclusão em ambos de que $\phi^2 = \phi$ que é um absurdo.

Figura 20 – Foto do Instagram



Fonte: https://www.instagram.com/ars_mathematica

Primeiramente, vamos definir o que é um polígono regular.

Definição 1. *Um polígono é uma figura geométrica plana formada por segmentos de reta que se unem em pontos chamados vértices. Um polígono regular é um polígono que atende às seguintes características:*

- Todos os lados têm o mesmo comprimento.

- Todos os ângulos internos têm a mesma medida.

- Seus lados podem ser inscritos em uma circunferência.

É necessário apenas duas dessas propriedades de polígono regular para decorrer acerca do pentágono regular.

Vamos deixar claro que um pentágono regular é um polígono que possui cinco lados iguais e cinco ângulos internos iguais a 108°. Então, vamos relacionar o pentágono regular de lado ℓ e a razão áurea, assim fazendo algo mais geral. Além disso, a soma dos ângulos internos é dada pela expressão:

$$S = (n - 2) \cdot 180° \tag{4}$$

em que S é a soma dos ângulos internos e n é o número de lados do polígono. Ou seja, usando o pentágono regular, temos

$$S = (5 - 2) \cdot 180° = 540°$$

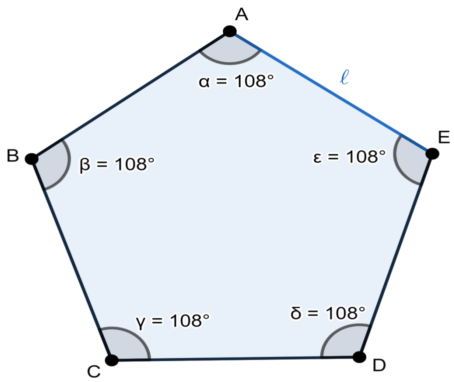
Logo, como os ângulos internos são iguais, basta dividir a soma pela quantidade de ângulos internos,

$$\frac{540°}{5} = 108°$$

ou seja, cada um dos cinco ângulos internos do pentágono regular mede 108°, conforme mostrado na Figura 21.

[t]

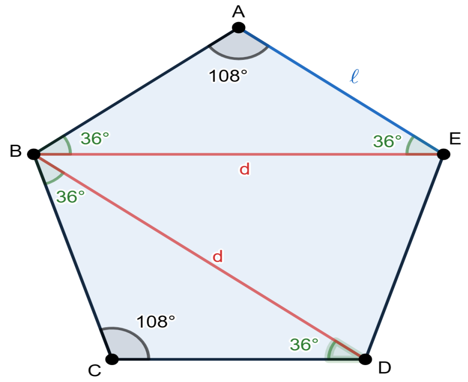
Figura 21 – Pentágono regular que cada ângulo interno mede 108°



Fonte: Elaborado pelo autor

Suponha que o pentágono regular $ABCDE$ de lado ℓ, então provaremos que a razão do lado ℓ e sua diagonal d é a razão áurea. Agora, vamos traçar duas diagonais BE e BD. Isto é, os triângulos formados são isósceles, pois $\triangle ABE$ e $\triangle BCD$ possuem lados iguais a ℓ e os ângulos formados por esses lados é 108°. Logo, a base dos triângulos devem

Figura 22 – Pentágono regular e as diagonais $BE = BD = d$



Fonte: Elaborado pelo autor

ser iguais e como isso temos $BE = BD = d$, e também usando a propriedade de que os ângulos internos formados por sua base de um triângulo isósceles são iguais, temos

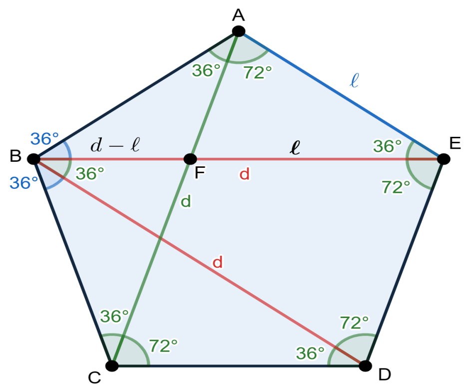
$$A\hat{B}E = A\hat{E}B = C\hat{B}D = C\hat{D}B = 36^\circ$$

Com isso, temos um novo triângulo formado que é $\triangle BDE$. O ângulo formado pelas diagonais que também são os lados do triângulo $\triangle BDE$ é de $D\hat{B}E = 36^\circ$, pois

$$C\hat{B}D + D\hat{B}E + E\hat{B}A = 108^\circ \implies 36^\circ + D\hat{B}E + 36^\circ = 108^\circ \implies D\hat{B}E = 36^\circ$$

Observe que o triângulo $\triangle BDE$ é isósceles de lados $BD = BE = d$ e base $DE = \ell$, ou seja, os ângulos formados por suas bases é $B\hat{D}E = B\hat{E}D = 72^\circ$, como mostra a Figura 23. Além disso, se traçarmos outra diagonal ligando os pontos A e C como mostra a Figura 23, as bases do triângulo $\triangle ABC$ possuem ângulos de $B\hat{C}A = B\hat{A}C = 36^\circ$ por ser também um triângulo isósceles de lado ℓ. Note que é formado outro triângulo menor $\triangle BCF$ de lados $BC = CF = \ell$ e base $BF = d - \ell$, pois o triângulo $\triangle AEF$ também é isósceles de lado ℓ.

Figura 23 – Pentágono regular e segmentos de retas formados por suas diagonais



Fonte: Elaborado pelo autor

Usando semelhança de triângulos nos seguintes triângulos $\triangle BDE$ e $\triangle BCF$, temos a razão

$$\frac{d-\ell}{\ell} = \frac{\ell}{d} \implies d^2 - \ell d = \ell^2 \implies d^2 - \ell d - \ell^2 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática, temos

$$d = \frac{\ell \pm \sqrt{\ell^2 + 4\ell^2}}{2} \implies d = \frac{\ell \pm \ell\sqrt{5}}{2} \implies d = \ell \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, considerando apenas o valor positivo por se tratar de comprimento, temos

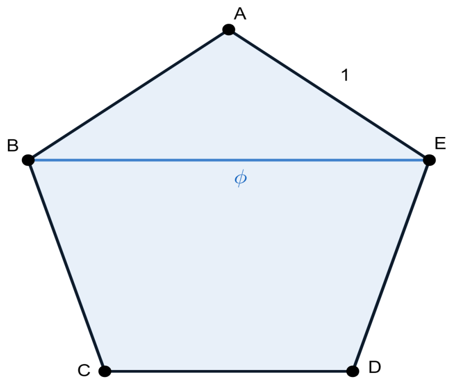
$$d = \ell \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{5}$$

3.1 Problema 1

Considere um pentágono regular $ABCDE$ de lado 1, então provaremos que a diagonal é ϕ, como mostra a Figura 24. Analogamente, usando as mesmas propriedades do início deste capítulo e a equação 5, obtemos

$$\phi = 1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \implies \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Figura 24 – Pentágono regular de lado 1 e diagonal ϕ



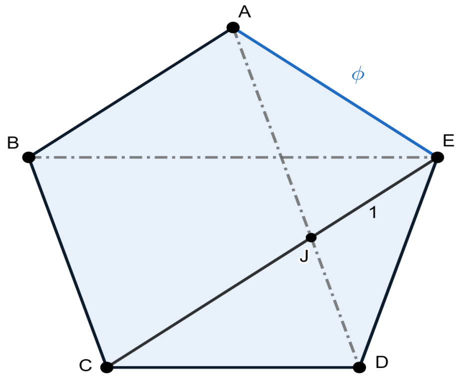
Fonte: Elaborado pelo autor

É importante ressaltar que é entendido aqui ser uma raiz não negativa por se referir ao comprimento da diagonal.

3.2 Problema 2

Considere um pentágono regular $ABCDE$ e um dos segmentos formados por suas diagonais $EJ = 1$, então provaremos que o lado $AE = \phi$, como mostra a Figura 25. Analogamente, usando as mesmas propriedades do início deste capítulo, temos

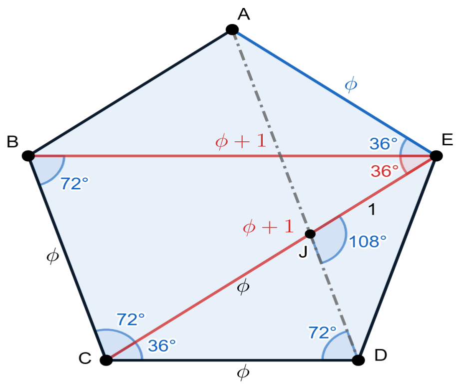
Figura 25 – Pentágono regular de lado ϕ e o segmento $EJ = 1$



Fonte: Elaborado pelo autor

O ângulo formado por $J\hat{A}E = 36°$ e $A\hat{E}C = 72°$, então o segmento formado por $A\hat{J}E = 72°$. Ou seja, o triângulo $\triangle AEJ$ é isósceles de lado iguais $AE = AJ$ e base 1. Observe que o ângulo $D\hat{J}E = 108°$, pois $A\hat{J}E + D\hat{J}E = 180°$ formando um ângulo raso. Do mesmo modo, o ângulo $C\hat{J}D = 72°$ e a base $DJ = 1$ do triângulo $\triangle CDJ$, e também no qual possui ângulo formado por seus lados de $D\hat{C}J = 36°$, assim como mostra a Figura 26.

Figura 26 – Pentágono regular de lado ϕ e diagonal $\phi + 1$



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que os triângulos $\triangle AEJ$ e $\triangle BCE$ são semelhantes, então temos a seguinte razão abaixo:

$$\frac{AE}{1} = \frac{BE}{BC} \implies AE = \frac{AE + 1}{AE} \implies AE^2 - AE - 1 = 0$$

resolvendo a equação quadrática e considerando apenas o valor positivo, temos

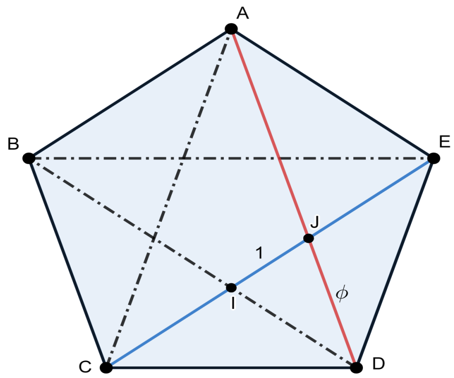
$$AE = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Portanto, $AE = \phi$, assim como queríamos mostrar.

3.3 Problema 3

Considere um pentágono regular e ao traçar todas as diagonais é obtido um pentagrama regular. De tal modo que, os 5 triângulos são isósceles e congruentes. Isto é, se a base do triângulo mede 1, então provaremos que o lado mede $DJ = \phi$, assim como mostra a Figura 27.

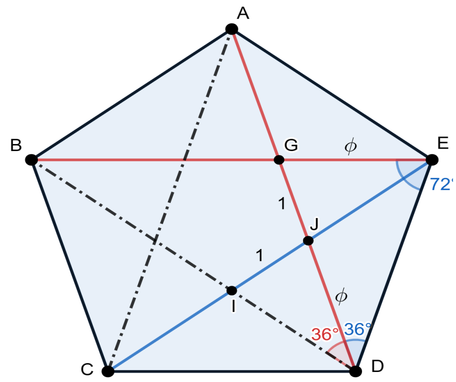
Figura 27 – Pentagrama regular formado por 5 triângulos isósceles de lado ϕ e base 1



Fonte: Elaborado pelo autor

É necessário enfatizar que o triângulo $\triangle DIJ$ é isósceles de lado $DJ = DI = \phi$ e base $IJ = 1$. Os ângulos que formam o triângulo isósceles $\triangle DIJ$ são $I\hat{D}J = 36°$ e $D\hat{I}J = D\hat{J}I = 72°$. Além disso, percebe que no pentagrama se forma um pentágono regular menor de lado 1, como mostrado na Figura 27. Vamos analisar o triângulo $\triangle DEG$ que também é isósceles de lados $DG = DE$ e de base EG, assim como mostra a Figura 28.

Figura 28 – Pentagrama regular formado por 5 triângulos isósceles de lado ϕ e base 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Isto é, o triângulo $\triangle DEG$ possui ângulo $G\hat{D}E = 36°$ e os ângulos da base $D\hat{E}G = D\hat{G}E = 72°$. Usando que os triângulos $\triangle DIJ$ e $\triangle DEG$ são semelhantes, então ao calcularmos a razão de um dos lados pela base de ambos os triângulos, obtemos

$$\frac{DJ}{1} = \frac{DG}{EG} \implies \frac{DJ}{1} = \frac{DJ+1}{DJ} \implies DJ^2 = DJ + 1 \implies DJ^2 - DJ - 1 = 0$$

resolvendo a equação quadrática e considerando apenas o resultado positivo, temos

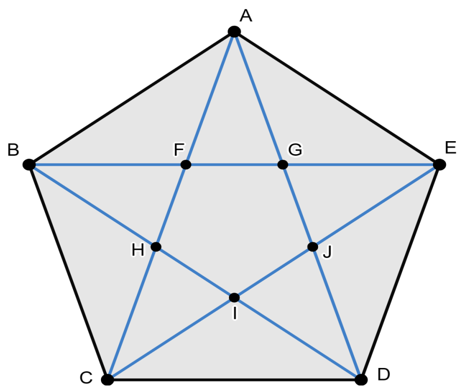
$$DJ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, $DJ = \phi$ assim como queríamos mostrar.

3.4 Problema 4

Considere um pentágono regular $ABCDE$ de diagonais AC, AD, BE, BD e CE, como mostra a Figura 29. Usando as propriedades do início deste capítulo e as que já foram provadas no decorrer dos problemas propostos, temos que as diagonais possui mesmo comprimento ou medida.

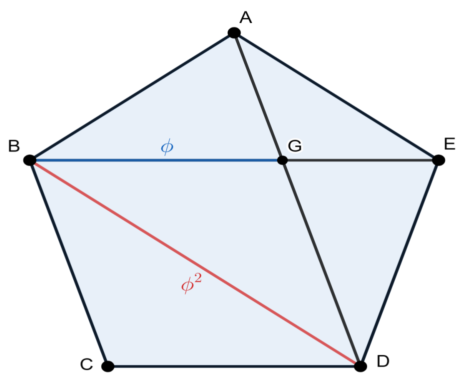
Figura 29 – Pentágono regular e suas diagonais



Fonte: Elaborado pelo autor

Suponha que o segmento $BG = \phi$, então provaremos que a diagonal $BD = \phi^2$, como mostra a Figura 30.

Figura 30 – Pentágono regular



Fonte: Elaborado pelo autor

Observe que, a diagonal BE forma um triângulo isósceles $\triangle ABE$, pois o ângulo $B\hat{A}E = 108°$ e os lados $AB = AE$ por serem os lados do pentágono regular. Sendo assim, os ângulos da base do triângulo isósceles $\triangle ABE$ são iguais, ou seja, $A\hat{B}E = A\hat{E}B$, usando o fato que esses ângulos são da base do triângulo isósceles. Além disso, vamos usar que a medida dos ângulos internos são iguais a 180°, isto é,

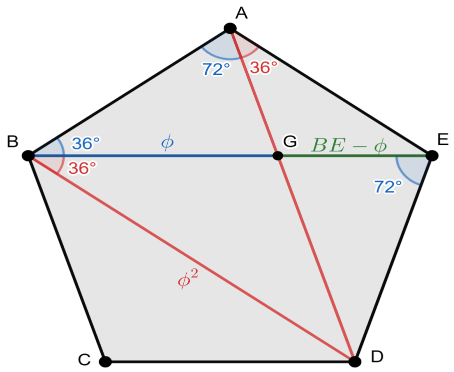
$$A\hat{B}E + B\hat{A}E + A\hat{E}B = 180^\circ \implies A\hat{B}E + 108^\circ + A\hat{E}B = 180^\circ \implies A\hat{B}E + A\hat{E}B = 72^\circ.$$

De fato, usando a propriedade de ser um triângulo isósceles, temos $A\hat{B}E = A\hat{E}B = 36^\circ$.

Se traçarmos mais uma diagonal AD também teremos mais um triângulo isósceles, assim como mostra na Figura 31; pois o triângulo $\triangle ADE$ possui lados iguais $AE = DE$ já que fazem parte do pentágono regular e ângulo $A\hat{E}D = 108^\circ$, ou seja, $E\hat{A}D = E\hat{D}A = 36^\circ$. Dessa forma, o ângulo formado $B\hat{A}D = 72^\circ$, pois

$$B\hat{A}D + D\hat{A}E = B\hat{A}E \implies B\hat{A}D + 36^\circ = 108^\circ \implies B\hat{A}D = 72^\circ$$

Figura 31 – Pentágono regular e os ângulos formados por suas diagonais



Fonte: Elaborado pelo autor

Com isso, temos que o triângulo $\triangle ABG$ possui ângulos $A\hat{B}G = 36^\circ$ e $B\hat{A}G = 72^\circ$. Usando que a soma dos ângulos internos de quaisquer triângulos são 180°, então $B\hat{G}A = 72^\circ$. Logo, o triângulo $\triangle ABG$ é isósceles de lados $AB = BG$ e base AG, ou seja, o pentágono regular possui lado igual ϕ. Note que, $BE = BG + GE = \phi + GE$ e também que $AG = GE = BE - \phi$. Usando que os triângulos $\triangle BDE$ e ABG são semelhantes pelo critério AA (Ângulo, Ângulo), então temos a seguinte relação:

$$\frac{BD}{DE} = \frac{BG}{AG} \implies \frac{BD}{\phi} = \frac{\phi}{BE - \phi}$$

multiplicando cruzado, temos

$$BD \cdot (BE - \phi) = \phi^2 \implies BD \cdot BE - BD \cdot \phi - \phi^2 = 0 \implies BD^2 - BD \cdot \phi - \phi^2 = 0$$

resolvendo a equação quadrática, obtemos

$$BD = \frac{\phi \pm \sqrt{\phi^2 + 4 \cdot \phi^2}}{2} \implies BD = \frac{\phi \pm \sqrt{5\phi^2}}{2} \implies BD = \frac{\phi \pm \phi\sqrt{5}}{2}$$

colocando ϕ em evidência e considerando apenas o valor não negativo, temos

$$BD = \phi \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \implies BD = \phi^2$$

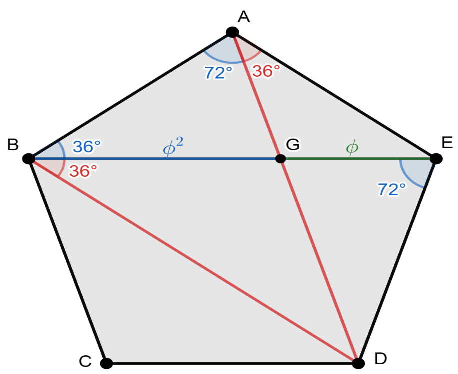
Portanto, a diagonal $BD = \phi^2$ e como todas as diagonais são iguais, então as diagonais também possui medida iguais a ϕ^2.

3.5 Problema 5

Considere um pentágono regular $ABCDE$ de diagonais AC, AD, BE, BD e CE, como já foi mostra na Figura 29. Usando as propriedades do início deste capítulo e as que já foram provadas no decorrer dos problemas propostos, temos que as diagonais possui mesmo comprimento ou medida.

Suponha que $EG = \phi$, então provaremos que $BG = \phi^2$. Vamos traçar uma diagonal AD, temos um triângulo isósceles $\triangle ADE$ de lados $AE = DE$ e ângulo $A\hat{E}D = 108°$. Sabemos que, por ser um triângulo isósceles, os ângulos da base são iguais $E\hat{A}D = E\hat{D}E = 36°$. Analogamente, os triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle BCD$ são também isósceles, de modo que, os ângulos $B\hat{A}E = B\hat{C}D = 108°$ e lados $AB = AE = BC = CD$ por serem lados do pentágono regular, como mostra a Figura 32.

Figura 32 – Pentágono regular e os triângulos formados por suas diagonais



Fonte: Elaborado pelo autor

É possível com essas informações dizer que a soma dos ângulos abaixo, temos

$$C\hat{B}D + D\hat{B}E + E\hat{B}A = 108° \implies 36° + D\hat{B}E + 36° = 108° \implies D\hat{B}E = 36°$$

Usando a propriedade que as diagonais do pentágono regular são iguais, e de fato são iguais, pois os triângulos $\triangle ABE$ e $\triangle BCD$ e ao usar congruência de triângulo ALA (Ângulo, Lado, Ângulo) temos que a base $BD = BE$. Ou seja, o triângulo agora formado por essas diagonais é $\triangle BDE$, no qual possui dois lados iguais e o formado que é $D\hat{B}E = 36°$, um triângulo isósceles de base DE e por ser isósceles os ângulos da base são $B\hat{D}E = B\hat{E}D = 72°$.

Pelo critério de semelhança de triângulos AA (Ângulo, Ângulo), temos que os triângulos isósceles $\triangle ABG$ e $\triangle BDE$ são semelhantes. Logo, temos a seguinte relação:

$$\frac{BG}{AG} = \frac{BD}{DE} \implies \frac{BG}{\phi} = \frac{BG+\phi}{BG} \implies BG^2 = BG \cdot \phi + \phi^2$$

e obtemos a equação quadrática abaixo,

$$BG^2 - BG \cdot \phi - \phi^2 = 0$$

resolvendo a equação quadrática, temos

$$\begin{aligned} BG &= \frac{\phi \pm \sqrt{\phi^2 + 4\phi^2}}{2} \\ BG &= \frac{\phi \pm \sqrt{5\phi^2}}{2} \\ BG &= \frac{\phi \pm \phi\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

considerando apenas o valor não negativo e colocando o ϕ que é um termo comum em evidência, temos

$$BG = \phi \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \implies BG = \phi^2$$

Portanto, $BG = \phi^2$ assim como queríamos mostrar.

3.6 Curiosidade

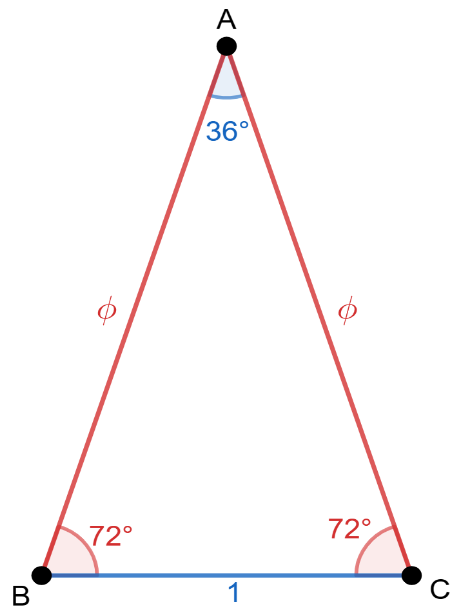
E se calcularmos $sin(18°)$, $cos(18°)$, $sin(36°)$ e $cos(36°)$? Essas expressões que parecem simples, escondem casos interessantes e que podemos relacionar com a razão áurea. Essa razão áurea que está presente em diversas áreas do conhecimento e também em vários aspectos da natureza, conseguimos relacionar com algumas identidades trigonométricas já citadas. Em particular, vamos resolver para o caso $sin(18°)$ e os outros resultados ficam a cargo do leitor, então temos:

Suponha que um triângulo isósceles $\triangle ABC$ em que seu ângulo formado $B\hat{A}C = 36°$, lados $AB = AC = \phi$ e sua base $BC = 1$, como mostra a Figura 33.

Observe que, o triângulo é isósceles e por isso os ângulos formados por suas bases devem serem congruentes. Isto é, $A\hat{B}C = A\hat{C}B = 72°$.

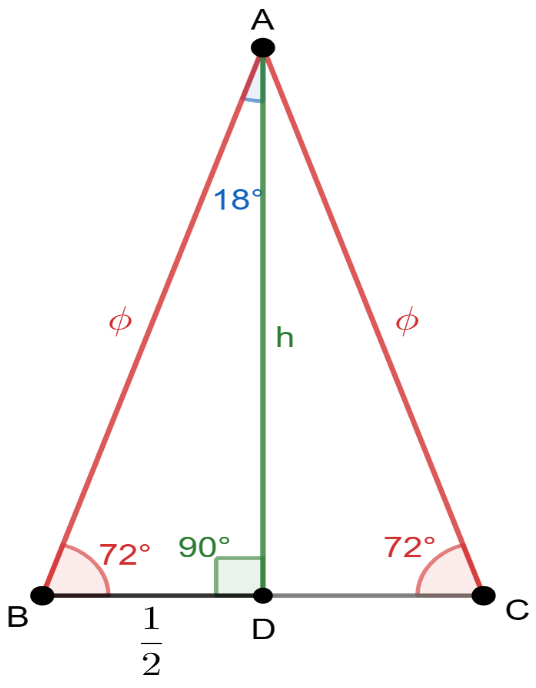
Se traçarmos a altura da base do ponto A até o ponto médio M do segmento BC, então temos um novo triângulo formado que é $\triangle ABM$, como mostra a Figura 34.

Figura 33 – Triângulo isósceles de lado ϕ e base 1



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 34 – Triângulo isósceles e altura h



Fonte: Elaborado pelo autor

Usando que a soma dos ângulos internos é 180°, então obtemos

$$
\begin{aligned}
A\hat{B}M + B\hat{M}A + B\hat{A}M &= 180^\circ \\
72^\circ + 90^\circ + B\hat{A}M &= 180^\circ \\
B\hat{A}M &= 180^\circ - 90^\circ - 72^\circ \\
B\hat{A}M &= 18^\circ.
\end{aligned}
$$

Como o ponto médio é M do segmento BC, então $BM = \dfrac{1}{2}$. Sendo assim, usando o seno para descobrir o lado AD e que o seno é cateto oposto sobre a hipotenusa, temos

$$\sin 18^\circ = \frac{BM}{AB} \implies \sin 18^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\phi} \implies \sin 18^\circ = \frac{1}{2\phi}$$

Portanto, $h = \dfrac{1}{2\phi}$.

4 Proposta Didática

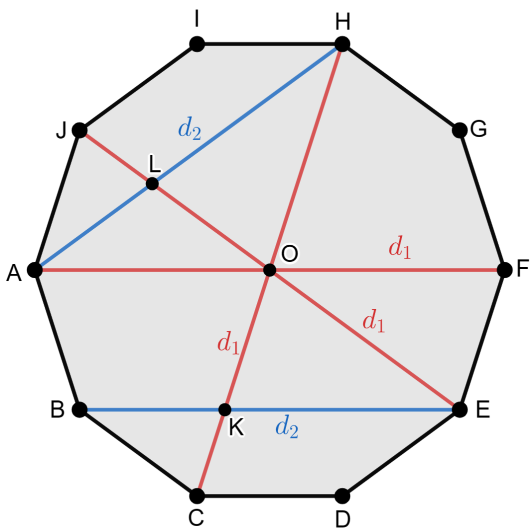
No âmbito escolar, aprender sobre a razão áurea pode ser uma experiência que o ajudará a entender não apenas os conceitos básicos da matemática, mas também suas aplicações práticas. Nesse contexto, a proposta didática para este capítulo visa explorar a relação do decágono regular e a razão áurea.

4.1 Atividade 1

Propomos ao leitor reproduzir o estudo realizado no capítulo anterior a outros polígonos regulares. Como sugestão de resolução, podemos destacar o decágono regular.

Seja $ABCDEFGHIJ$ um decágono regular de centro O cujas medidas do lado é ℓ e das diagonais d_1, d_2, onde d_1 é a diagonal mais longa e d_2 é a diagonal mais curta, como mostra a Figura 35.

Figura 35 – Decágono regular



Fonte: Elaborado pelo autor

Primeiramente, vamos aplicar a fórmula 4 que expressa a soma dos ângulos internos de um polígono regular, então obtemos o seguinte:

$$S = (10 - 2) \cdot 180^\circ \implies S = 1440^\circ$$

Com isso, cada ângulo interno é de 144°.

Sejam AF, CH e EJ as diagonais mais longas que passam pelo centro O; AH e BE as diagonais mais curtas. Consideremos os pontos K e L, resultado das intersecção das diagonais AH e BE com as diagonais EJ e CH, respectivamente. Note que, a diagonal

EJ corta o decágono regular pela metade por passar pelo centro, então o ângulo também é dividido pela metade. Isto é, os ângulos

$$E\hat{J}A = L\hat{J}A = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$$

Analogamente, $J\hat{A}F = C\hat{H}I = 72^\circ$. Observe que, a diagonal AH acaba formando um triângulo isósceles $\triangle AHO$ de lados $AO = HO$ e ângulo $A\hat{O}H = 108^2$, pois o polígono $AOHIJ$ usando a fórmula 4, temos

$$S = (5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

e como já sabemos as medidas dos ângulos

$$\begin{aligned} O\hat{A}J + A\hat{J}I + J\hat{I}H + I\hat{H}O + A\hat{O}H &= 540^\circ \\ 72^\circ + 144^\circ + 144^\circ + 72^\circ + A\hat{O}H &= 540^\circ \\ A\hat{O}H &= 108^\circ \end{aligned}$$

Sendo assim, os ângulos internos $O\hat{A}H = O\hat{H}A = 36^\circ$, como mostra a Figura 36. Note que, o polígono $EFHO$ é congruente ao polígono $AOHIJ$, analogamente, temos que $EOH = 108^\circ$ e como o a diagonal EJ corta o decágono regular pela metade ao passar pelo centro, então temos a seguinte relação:

$$E\hat{O}H + H\hat{O}J = 180^\circ \implies H\hat{O}J = 72^\circ$$

Logo, temos que $J\hat{O}A = 36^\circ$.

Observe que, o triângulo $\triangle ALO$ é isósceles, pois possui dois ângulos iguais os quais são $L\hat{A}O = L\hat{O}A = 36^\circ$, então os lados AL e LO são iguais e ângulo formado por esses lados é de $A\hat{L}O = 108^\circ$. Consequentemente, os ângulos $O\hat{A}B = A\hat{O}C = 72^\circ$, como mostra a Figura 36.

Além disso, o triângulo $\triangle AJL$ é isósceles, pois os ângulos $L\hat{A}J = 36^\circ$ e $A\hat{L}J = 72^\circ$, usando a propriedade que a soma dos ângulos internos é 180° temos que $A\hat{J}L = 72^\circ$. Logo, os lados $AJ = AL = OL = AB = \ell$ que é medida do lado do decágono regular.

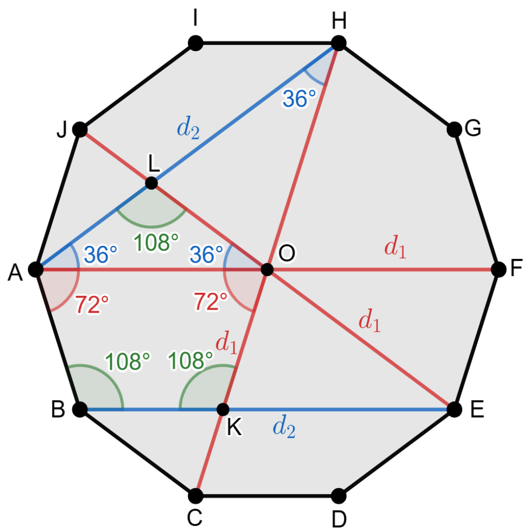
Agora, vamos analisar o triângulo $\triangle BCK$. Note que,

$$A\hat{B}E + K\hat{B}C = 144^\circ \implies 108^\circ + K\hat{B}C = 144^\circ \implies K\hat{B}C = 36^\circ$$

Além disso, como $H\hat{K}B + B\hat{K}C = 180^\circ$, então temos $B\hat{K}C = 72^\circ$. Pela propriedade de que a soma dos ângulos internos é 180°, então $B\hat{C}K = 72^\circ$ formando um triângulo isósceles com lados $BC = BK = \ell$.

De mesmo modo, vamos analisar o triângulo $\triangle EKO$. Observe o triângulo $\triangle HLO$ que possui ângulo $L\hat{H}O = 36^\circ$ e $H\hat{O}L = 72^\circ$, pela propriedade de que a soma dos ângulos

Figura 36 – Decágono regular e as medida de seus ângulos



Fonte: Elaborado pelo autor

internos de um triângulo é 180° temos que $H\hat{L}O = 72°$. Além disso, $HO = EO = \dfrac{d_1}{2}$ pois são a metade da diagonal maior que corta o decágono ao meio passando pelo centro O. Logo, os triângulos $\triangle EKO$ e $\triangle HLO$ são congruentes entre si, pelo critério de congruência ALA (ângulo, lado, ângulo) e também são isósceles, isto é,

$$HL = HO = EO = EK$$

pode se concluir que as bases também são iguais $LO = KO = \ell$.

Portanto, mostrando que polígono $ABKOL$ é um pentágono regular de lado ℓ e ângulos internos de 108°, algo que já foi demonstrado no Capítulo 3 deste trabalho a relação com a razão áurea.

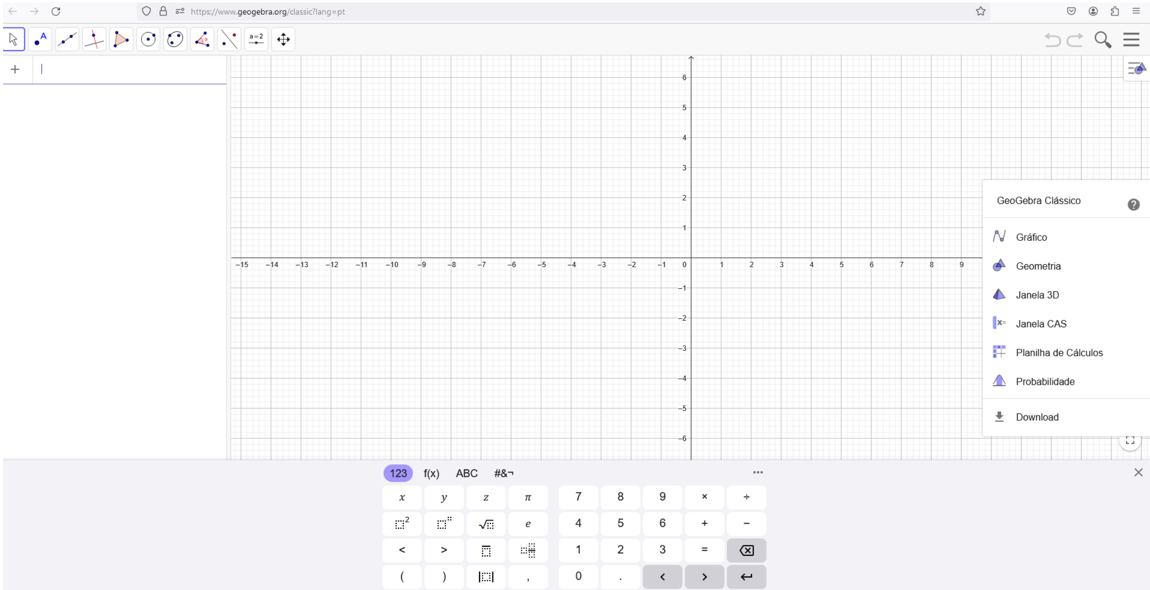
4.2 Atividade 2

O GeoGebra Classic é um software de matemática gratuito que foi criado por Markus Hohenwarter no ano de 2001, e consegue alcançar todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única ferramenta. O GeoGebra está em mais de 190 países, isso é consequência de sua gratuidade e qualidade, pois com pouco recurso é possível acessar de um aparelho celular, tablet e computadores.

Propomos ao leitor reproduzir tudo o que realizado até o momento neste trabalho usando o GeoGebra Classic, disponível aqui, veja a Figura 37.

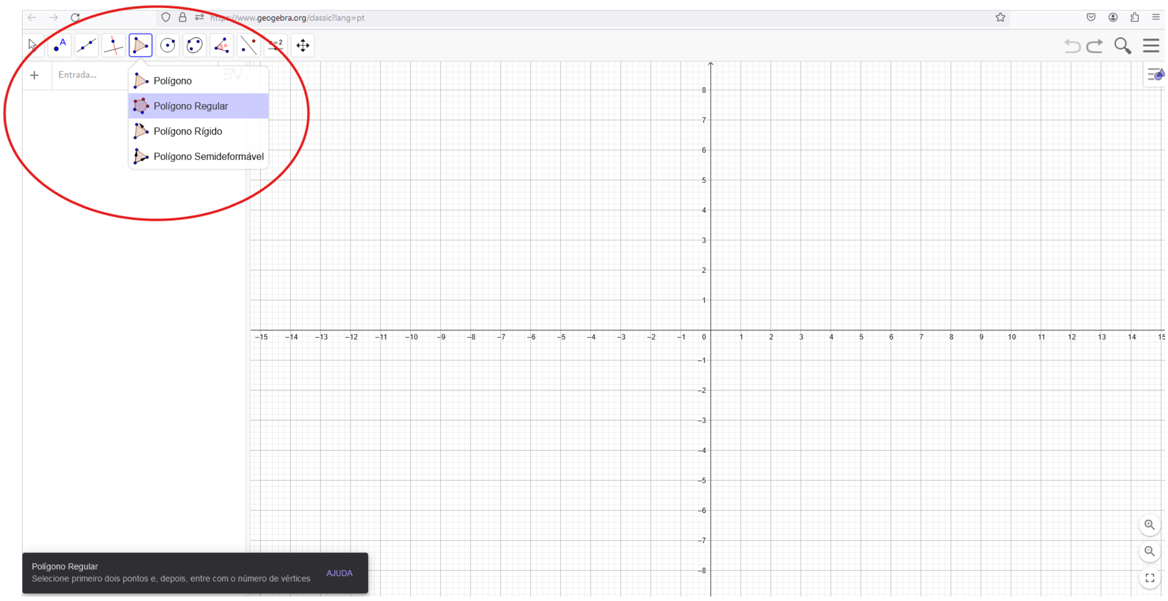
Uma vez acessado o GeoGebra Classic, o leitor deve usar o comando cuja finalidade é produzir polígonos regulares, veja a Figura 38.

Figura 37 – Tela inicial do GeoGebra Classic



Fonte: Elaborado pelo autor

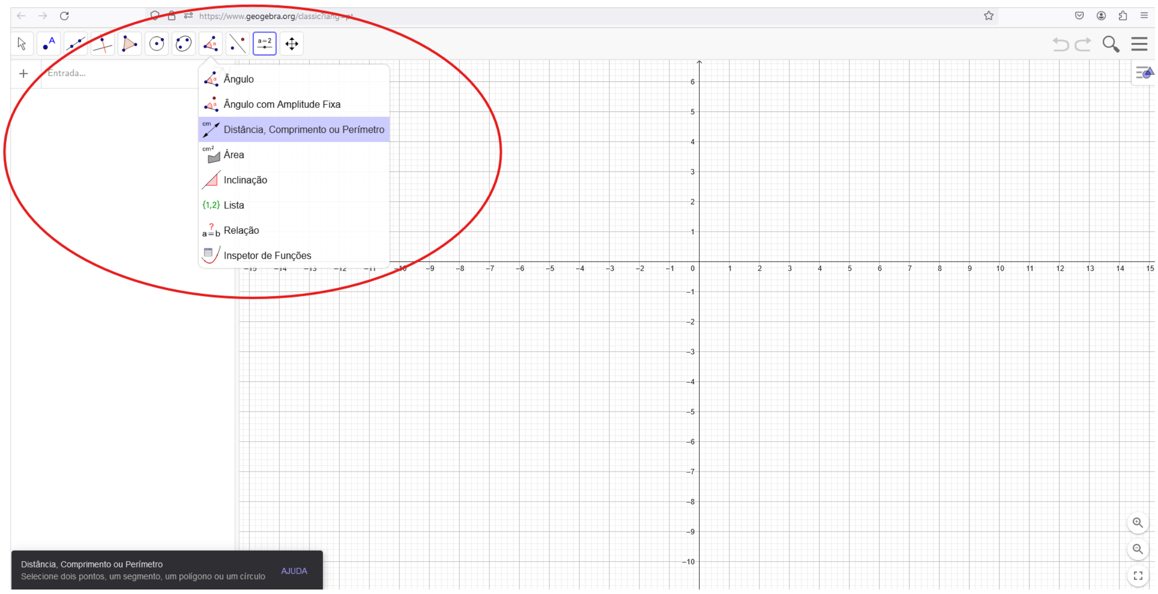
Figura 38 – Segunda tela do GeoGebra Classic



Fonte: Elaborado pelo autor

Por fim, é indispensável que o leitor faça uso o comando cuja finalidade é exibir o comprimento de segmentos de reta previamente construídos, veja a Figura 39.

Figura 39 – Terceira tela do GeoGebra Classic



Fonte: Elaborado pelo autor

Consequentemente, o uso de recursos computacionais no estudo do problema de geometria plana, em questão, pode trazer um incentivo maior ao estudante para a sua dedicação à Matemática.

Considerações Finais

Realizar este trabalho enriqueceu o nosso conhecimento matemático, visto que nos permitiu difundir um pouco mais sobre uma constante matemática tão curiosa que é letra grega ϕ ou como é também chamada de razão áurea, também permitiu nos aprofundar sobre o que é um pentágono regular e qual a relação é possível obter com a razão áurea.

A história da razão áurea nos faz alguns questionamentos, os quais são: por qual motivo consigo relacionar figuras geométricas, dimensões de construções feitas pela humanidade e achar nessa relação a razão áurea? Será que foi intencional? Já se concluiu por falta de provas concretas que essa intencionalidade não existiu e que a razão áurea foi deixada para os gregos.

Destacamos que é possível relacionar o pentágono regular com a razão áurea, e isso não apenas o lado desse pentágono e a sua diagonal, mas também colocando outros pentágonos regulares com dimensões diferentes. Trazer isso para o âmbito escolar e usar o software GeoGebra, consegue deixar a aula mais dinâmica. Além disso, ajuda o aluno a compreender o que está acontecendo, pois está sendo mostrado e o faz aperfeiçoar seu conhecimento na matemática.

A proposta didática é trazer outra figura geométrica, isto é, o decágono regular. Anteriormente, foi citado o uso do GeoGebra e aqui também não seria diferente. Apesar de que, o grau de dificuldade evolui, mas com alguns conhecimentos já adquiridos faz com que o aluno pense de maneira ativa. Buscando relacionar o decágono regular e a razão áurea, isso usando o aspecto de que ângulos internos são congruentes, e de maneira mais participativa a partir de tentar achar essa proporção. Sendo assim, proporcionando ao aluno tentar expandir isso para outros polígonos regulares.

Por fim, a ideia de trazer essa perspectiva de aproximar o aluno do rigor matemático e fazer uso de ferramentas como GeoGebra que é um software, isso na educação básica é imprescindíveis. Isto é, não apenas fazer uso de um software, mas de vários outros pelo fato que a nossa sociedade é tecnológica.

Referências

ATRACTOR, t. m. *Incomensurabilidade*. 2024. Acessado em: 02 de maio 2024. Disponível em: <https://www.atractor.pt/mat/incomensurabilidade/decagono4.html>.

BERTATO, F. M. *A "De Divina Proportione": de Luca Pacioli (tradução anotada e comentada).* [S.l.]: Fábio Bertato, 2010. 12

BICUDO, I. et al. *Os elementos*. [S.l.]: Unesp, 2009.

DELL'ACCADEMIA, G. *Studio Di Proporzioni Del Corpo Noto Come Uomo Vitruviano*. 2024. Acessado em: 02 de maio de 2024. Disponível em: <https://www.gallerieaccademia.it/studio-di-proporzioni-del-corpo-noto-come-uomo-vitruviano>.

KEPLER, J. *Harmonices mundi libri V*. [s.n.], 1619. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ZLlCAAAAcAAJ>.

LARCHER, P. H. et al. 2006 — heródoto. 2006.

LIVIO, M. Razão aurea: A história de fi, um número surpreendente. *Rio de Janeiro, Brasil: Record*, 2006. 12, 13, 14, 15, 20

PACIOLI, L. *Divina proportione*. [S.l.]: C. Graeser, 1896. v. 2.

POSAMENTIER, A. S.; LEHMANN, I. *The glorious golden ratio*. [S.l.]: Prometheus Books, 2011. 11, 24

SHAW, I. *The Oxford history of ancient Egypt*. [S.l.]: OUP Oxford, 2003. 15

WIKIPÉDIA, a. e. l. *Franciscanos*. 2024. Acessado em: 02 de maio 2024. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Franciscanos>.