

Rennan Gomes de Albuquerque

# **O momento magnético anômalo do múon e os modelos de dois dubletos de Higgs**

João Pessoa, PB - Brasil

Maio de 2024

Rennan Gomes de Albuquerque

# **O momento magnético anômalo do múon e os modelos de dois dubletos de Higgs**

Trabalho de conclusão de curso apresentado  
como componente curricular obrigatório para  
obtenção do título de Bacharel em Física pela  
Universidade Federal de Paraíba.

Universidade Federal da Paraíba

Departamento de Física

Programa de Graduação em Física

Orientador: Paulo Sérgio Rodrigues da Silva

João Pessoa, PB - Brasil

Maio de 2024

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

A345m Albuquerque, Rennan Gomes de.

O momento magnético anômalo do múon e os modelos de dois dubletos de Higgs / Rennan Gomes de Albuquerque. - João Pessoa, 2024.

83 p. : il.

Orientação: Paulo Sérgio Rodrigues da Silva.

TCC (Curso de Bacharelado em Física) - UFPB/CCEN.

1. Momento magnético anômalo. 2. Correções radiativas. 3. Física além do modelo padrão eletrofraco. 4. Modelo de dois dubletos escalares. 5. Física. I. Rodrigues da Silva, Paulo Sérgio. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 53(043.2)



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Coordenação dos Cursos de Graduação em Física

Ata da Sessão Pública da Defesa do Trabalho de  
Conclusão de Curso de Bacharelado em Física, do  
discente **Rennan Gomes de Albuquerque**.

Aos 03 dias do mês de Maio do ano de 2024, às 10h, na sala 202, realizou-se a Sessão Pública da Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso de Bacharelado em Física, do discente **Rennan Gomes de Albuquerque**, sendo a Banca Examinadora constituída pelos docentes **Prof. Dr. Paulo Sérgio Rodrigues da Silva (UFPB)**, orientador e presidente da banca, **Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota (UFPB)** e **Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos (UFPB)**. Dando início aos trabalhos, o professor orientador e presidente da banca examinadora comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, concedeu a palavra ao discente para que fizesse a explanação de seu Trabalho de Conclusão de Curso, intitulado “*Momento Magnético Anômalo do múon e os modelos de dois dubletos de Higgs*”. Concluída a exposição, o discente foi arguido pelos membros presentes da Banca Examinadora. Após as arguições, a Banca, de comum acordo, declarou que o Trabalho apresentado foi aprovado com nota 10,0. E para constar, encerrada a sessão, lavrou-se esta ata que será assinada pelos presentes.

João Pessoa, 03 de Maio de 2024.

Prof. Dr. Paulo Sérgio Rodrigues da Silva  
UFPB – Orientador

Prof. Dr. Herondy Francisco Santana Mota (UFPB)

Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza Ramos (UFPB)



# Agradecimentos

Algumas coisas são inseparáveis, como textos escritos por mim e analogias com física, ou quarks presos em hádrons através da interação forte. Eu sei, logo adiante eu terei mais de 50 páginas para falar de física. Mas este é o único espaço em que eu posso brincar com esses conceitos para conseguir, da minha forma, homenagear vocês. É óbvio que não é possível colocar tudo que eu quero dizer aqui. Eu sou limitado, por exemplo, pelas normas ABNT e outras formalidades. Mesmo assim, darei o meu melhor.

Início pela minha família. Agradeço à minha mãe Anne Kalinne, que me criou durante esses 22 anos com todo o carinho e amor com o qual é possível criar um ser humano. Mas não só eu. Ela também cuidou das minhas duas irmãs Raissa e Isabelle, que têm sido minhas companheiras há 20 e 16 anos, respectivamente. É um eufemismo dizer que eu não seria nada sem vocês. Ao meu pai Rodrigo, que apesar de morar distante se faz sempre presente. A Rafa, que nunca deixou de ser tão prestativa e divertida quanto meu pai. E à sua filha Annalice, atualmente a segunda criatura mais linda do universo, da qual eu espero retirar um sorriso com essa frase quando ela aprender a ler. Seu irmão lhe ama. À minha avó materna Genira: nunca troque seu "sushica" pelo "sushi" de ninguém. À minha avó paterna Iracy, que sempre faz questão de iniciar as mensagens por texto com "oi, meu cientista lindo". E a meu avô Renato, o mestre da sinuca que faz a melhor papinha de abacate. Também agradeço a todos os meus tios, tias, primos e primas, que marcaram minha infância.

A Sophie, a criatura mais linda do universo, que nunca vai conseguir ler isso porque ela é um maltês. Eu não ligo. A sua chegada fez todos aqui de casa desenvolverem automaticamente uma linguagem nova e alienígena que é quase impossível de não usar quando você está presente. É a você que eu teria dedicado os "erros" "gramaticais" se eles não fossem proibidos pela ABNT. Peço perdão pelo sacrilégio, mas espero que entenda.

A Lukas, que conhece tanto a física quanto ele conhece sua história. Ele pode parecer sério à primeira vista, mas logo se revela uma das pessoas mais divertidas e confiáveis que eu já conheci. Obrigado por me incentivar. A João Marcos, nosso da Vinci moderno. O homem consegue ser ao mesmo tempo físico, matemático, ciclista, corredor, "crossfiteiro", poeta e admirador de... livros. Qualquer atividade que ele se propõe a fazer é certa de tê-lo como um dos melhores. A amizade não é uma exceção. Você já é praticamente família, e até o porteiro do prédio sabe. É um privilégio te ter como amigo. A Claudio, que me ensinou que nenhuma distância é grande o bastante que não possa ser varrida de bicicleta. Hoje o Pedal da Física consiste apenas de eu, João Marcos e João, mas você será sempre nosso D'Artagnan. A João, que eu conheci através do pedal e hoje não vivo sem.

Você é um dos melhores anfitriões que eu conheço (agradeço por todas as xícaras de café). Eu, você e João Marcos formamos o melhor trio (desculpa, Renato e Miguel). Obrigado por todos os filmes com direito a participações especiais de Leilane, Carol e Igor.

A Rafa, cujo amor ao seu trabalho é tão grande que lhe faz se emocionar com resultados elegantes. Ver o quão longe você já foi é certamente uma das minhas maiores inspirações, e eu fico grato por poder ver sua evolução de perto. Voe como um neutrino: com (quase) nada lhe interrompendo (para você, o "quase" é mudo). A Fernanda, minha eterna companheira de filmes, séries e passeios de ônibus. Agradeço por poder sempre contar com você. Saiba que é recíproco. No entanto, devo alertar que a Haste Flexível não poderia deixar de ser incluída aqui. Perdão. Também agradeço a Inês, que é sempre essencial nas saídas, e a Luís, pela sua curiosidade encantadora. A todos do Clube de Quântica, fundado por Lukas, agradeço pelas palestras sempre incríveis e discussões edificantes.

Ao meu orientador, Paulo Sérgio, agradeço por todo o apoio durante esses 3 anos. Seus comentários nas minhas apresentações e nas de Ellen e Rafa moldaram quem eu sou hoje. Agradeço também ao grupo como um todo, ao CNPQ pelo apoio financeiro durante o programa de PIBIC e a Isaac, pela colaboração. A todos os professores que fizeram parte do meu desenvolvimento acadêmico, com destaque a Jorge Gabriel, que sempre faz questão em suas aulas de discutir a filosofia por trás de cada conceito físico. Também vale mencionar Carlos Romero, Bertúlio, Fábio Dahia, Thierry, Charlie e Herondy, que me encantaram com suas aulas. Aos meus contemporâneos, agradeço pela companhia. Dou destaque a Carlos, que suportou listas imensas e dias inundados de provas sempre ao meu lado. Foi um prazer crescer com você no curso. A Erick, meu fera, agradeço por me consolar em momentos difíceis.

Aos Amiguxuxus, que são tantos e têm tanta história que eu não seria capaz de terminar o TCC a tempo se eu tentasse falar de todos. Darei foco aos que foram mais importantes no Ensino Médio para a minha escolha de curso. Agradeço a Henrique e Gabriel, que me acolheram desde o quarto ano do fundamental. A Adal e Elisa, que de certa forma me ensinaram a falar. A Gabi e Yasmim, por confiarem em mim para ensinar física, mesmo não sendo as maiores fãs do assunto. E a Arthur, que não me permitia escrever equações no seu caderno, mas eu escrevia mesmo assim. À organização Amiguxuxus e Agregados (ou Matoxuxus), obrigado por me aceitarem como seu "Dene". E pelos baleados.

Para concluir, esse TCC trata de como uma propriedade de uma partícula é influenciada por todas as outras que existem e que interagem, direta ou indiretamente, com a primeira. Da mesma forma, cada pessoa carrega em si um pouquinho de todas as outras que ela conhece. Assim como os infinitos que vão mostrar as caras posteriormente, o Rennan isolado só existe na imaginação. E eu ousou dizer, mesmo sem ter como provar, que ele não seria nem um pouco interessante.

A todos vocês: obrigado por me fazerem eu.

*"É o melhor momento possível para estar vivo, quando  
quase tudo que você achou que sabia está errado"*  
*(Tom Stoppard, Arcadia, 1993)*

# Resumo

Neste trabalho, fazemos um apanhado da evolução no entendimento do momento de dipolo magnético leptônico. Iniciamos mostrando que a análise clássica da razão entre esta quantidade e o spin da partícula é equivocada e deve ser corrigida por um fator adimensional  $g$ . Depois comentamos sobre como experimentos na mecânica quântica de Schrödinger impõem  $g = 2$ , enquanto a teoria posterior de Dirac para o elétron relativístico prevê esse resultado a partir de primeiros princípios. Em seguida, elaboramos como a Teoria Quântica de Campos introduz flutuações no vácuo que foram necessárias pela primeira vez para explicar o desvio de Lamb no átomo de hidrogênio. Esses mesmos efeitos corrigem o fator  $g$ , motivando falar da anomalia  $(g - 2)/2$ . Tal quantidade depende não só da Eletrodinâmica Quântica (QED), como também das interações eletrofracas e fortes que definem o Modelo Padrão (SM) e são exploradas em sequência. Entretanto, essa teoria apresenta diversos problemas, sendo um deles a discordância entre a predição do valor da anomalia muônica e sua observação experimental. Exploramos, portanto, uma extensão simples do setor eletrofraco chamada de modelo de dois dubletos de Higgs (2HDM) para resolver a anomalia. É mostrado no fim para a versão específica de lépton (tipo X) que existe uma região do espaço de parâmetros capaz de eliminar a discrepância.

**Palavras-chave:** Momento magnético anômalo; Correções radiativas; Física além do modelo padrão eletrofraco; Modelo de dois dubletos escalares.

# Abstract

In this work, we overview the evolution in the understanding of the magnetic dipole moment for leptons. We begin by showing that the classical analysis of the ratio between this quantity and the particle's spin is mistaken and must be corrected by a dimensionless  $g$  factor. We then comment on how experiments in Schrödinger's quantum mechanics impose  $g = 2$ , while Dirac's later theory for the relativistic electron predicts this result from first principles. Subsequently, we elaborate on how Quantum Field Theory introduces vacuum fluctuations that were first necessary to explain the Lamb shift in the hydrogen atom. These same effects correct the  $g$  factor, motivating us to talk about the  $(g - 2)/2$  anomaly. This quantity depends not only on Quantum Electrodynamics (QED), but also on the electroweak and strong interactions that define the Standard Model (SM) and are explored in sequence. However, this theory presents several problems, one of which is the disagreement between the prediction for the value of the muonic anomaly and its experimental observation. So we explore a simple extension of the electroweak sector called the two Higgs doublet model (2HDM) to resolve the anomaly. It is shown at the end for the lepton-specific version (type X) that there is a region of the parameter space capable of eliminating the discrepancy.

**Keywords:** Anomalous magnetic moment; Radiative corrections; Physics beyond the electroweak standard model; Two scalar doublet model.

# Lista de ilustrações

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Detecção do Higgs $H$ com uma massa de 125 GeV. Retirado de ATLAS.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 13 |
| Figura 2 – Espectro das partículas elementares no Modelo Padrão. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 13 |
| Figura 3 – Precessão do spin. Veja as animações: (GOMES, 2024). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 15 |
| Figura 4 – Decaimento em pósitrons (representados em verde). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 15 |
| Figura 5 – Espectro no modelo com dois dubletos de Higgs. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 16 |
| Figura 6 – Representação heurística do elétron. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 19 |
| Figura 7 – Ilustração do experimento de Stern-Gerlach. O encontro entre as duas bandas no aparato em verde é devido ao efeito de borda. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 20 |
| Figura 8 – Esquema clássico (aproximado) do átomo de hidrogênio no referencial do elétron, que funciona como um pequeno dipolo magnético. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                               | 21 |
| Figura 9 – Relações de dispersão entre energia e momento. A curva em vermelho corresponde à relação relativística e a expansão 2.18 é representada em azul, sendo mantida até segunda ordem à esquerda e até quarta ordem à direita. Note que a região em verde, em que o erro percentual é menor que 0.1% (valor escolhido arbitrariamente), alarga quando se inclui o termo 2.19. . . . .                                     | 23 |
| Figura 10 – Ilustração da estrutura fina para os estados com $n = 2$ no espectro de energia do átomo de hidrogênio. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 24 |
| Figura 11 – Quadri-momento "na casca". O eixo vertical representa a energia e o plano corresponde ao tri-momento. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 25 |
| Figura 12 – Interpretação do mar de Dirac. Cada ponto representa um autoestado de momento que pode ser ocupado por dois elétrons de spin $m_s = \pm 1/2$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                              | 28 |
| Figura 13 – Descoberta do pósitron, que se curva no sentido oposto ao elétron num campo magnético conhecido. (ANDERSON, 1933) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 29 |
| Figura 14 – Campo vetorial. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 31 |
| Figura 15 – Campo espinorial. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 32 |
| Figura 16 – Uma transformação contínua pode ser entendida como uma composição de infinitas transformações infinitesimais. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 33 |
| Figura 17 – Motivação para o nome "helicidade" baseada na imagem heurística do spin (desqualificada como uma possível explicação fundamental na subseção 2.1.1). As partículas se movem para cima na figura e o vetor em verde representa o spin. Um ponto na superfície da partícula de helicidade $-1/2$ segue um trajeto de hélice de mão esquerda, enquanto o de helicidade $+1/2$ segue uma hélice de mão direita. . . . . | 36 |
| Figura 18 – Operadores escada. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 37 |
| Figura 19 – Termo de massa fermiônico. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 37 |

|                                                                                                                                                                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 20 – Auto-energia fermiônica. . . . .                                                                                                                                                                                              | 38 |
| Figura 21 – Ilustração do efeito Lamb. . . . .                                                                                                                                                                                            | 39 |
| Figura 22 – Integral no momento. . . . .                                                                                                                                                                                                  | 39 |
| Figura 23 – Divergência clássica na massa, conforme o raio vai a zero. . . . .                                                                                                                                                            | 41 |
| Figura 24 – Comportamento linear (em vermelho) vs logarítmico (em verde). . . . .                                                                                                                                                         | 42 |
| Figura 25 – Densidade de probabilidade do estado 2s do átomo de hidrogênio ( $n = 2, l = 0$ ). A função de onda possui uma dependência puramente radial. . . . .                                                                          | 43 |
| Figura 26 – Densidade de probabilidade do estado 2p do átomo de hidrogênio ( $n = 2, l = 1$ ). Veja que ela pode ser expressa como um produto entre uma dependência puramente radial e outra puramente angular. . . . .                   | 43 |
| Figura 27 – O comportamento que pareceu linear na figura 24 se revela logarítmico a altas energias. Portanto, o desvio de Lamb é formalmente finito. . . . .                                                                              | 44 |
| Figura 28 – Renormalização dos propagadores. . . . .                                                                                                                                                                                      | 45 |
| Figura 29 – Renormalização das linhas externas. . . . .                                                                                                                                                                                   | 45 |
| Figura 30 – Renormalização do vértice. . . . .                                                                                                                                                                                            | 46 |
| Figura 31 – Polarização do vácuo. . . . .                                                                                                                                                                                                 | 46 |
| Figura 32 – Vértice efetivo da teoria de Fermi para o decaimento beta. . . . .                                                                                                                                                            | 50 |
| Figura 33 – Violação de paridade no decaimento beta. . . . .                                                                                                                                                                              | 51 |
| Figura 34 – Violação de paridade no decaimento do múon positivo. . . . .                                                                                                                                                                  | 51 |
| Figura 35 – Divergências na teoria de quatro férmions. . . . .                                                                                                                                                                            | 52 |
| Figura 36 – Decaimentos mediados por W. . . . .                                                                                                                                                                                           | 52 |
| Figura 37 – U(1) global. . . . .                                                                                                                                                                                                          | 53 |
| Figura 38 – U(1) local. . . . .                                                                                                                                                                                                           | 53 |
| Figura 39 – U(1) local com ampliação num dos pontos. . . . .                                                                                                                                                                              | 54 |
| Figura 40 – Reação puramente leptônica no experimento de Gargamelle. Um elétron é ejetado por troca de bóson $Z$ com um anti-neutrino do múon e inicia em seguida um chuveiro de pares elétron-pósitron. (HASERT et al., 1973a) . . . . . | 56 |
| Figura 41 – Reação hadrônica no experimento de Gargamelle. O núcleon $N$ produz 3 hádrons no estado final, denotados por $X$ . (HASERT et al., 1973b) . . . . .                                                                           | 56 |
| Figura 42 – Auto-interações eletrofracas. . . . .                                                                                                                                                                                         | 57 |
| Figura 43 – Tipos de quebra de simetria. Veja também (SPONTANEOUS..., 2012). . . . .                                                                                                                                                      | 58 |
| Figura 44 – Potencial de "chapéu mexicano" visto de frente (à esquerda) e de cima (à direita). A malha quadriculada representa uma simplificação do espaço vetorial em que se encontra o escalar $\Phi$ . . . . .                         | 59 |
| Figura 45 – A quebra de simetria do grupo SU(2) preserva o terceiro gerador, já que é possível escolher o vácuo ao longo da direção 3. . . . .                                                                                            | 59 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 46 – A quebra de simetria do grupo $SU(2) \otimes U(1)$ não preserva o terceiro gerador do $SU(2)$ , mas sim a combinação entre ele e o gerador do $U(1)$ .<br>Uma rotação com respeito à direção 3 altera a fase do vácuo. . . . .                                                                                   | 60 |
| Figura 47 – Mecanismo de Goldstone. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 61 |
| Figura 48 – Mecanismo de geração de massa do lépton carregado. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                       | 63 |
| Figura 49 – Auto-interações entre glúons. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                            | 68 |
| Figura 50 – Medição da constante de estrutura fina por interferometria atômica à esquerda (CADORET et al., 2009) e da anomalia eletrônica à direita (FAN et al., 2023). As duas quantidades são conectadas através da teoria: dada uma, é possível encontrar a outra usando a QED. . . . .                                   | 70 |
| Figura 51 – Discrepâncias no momento magnético eletrônico. (FAN et al., 2023) . . .                                                                                                                                                                                                                                          | 71 |
| Figura 52 – Discrepâncias na constante de estrutura fina. (FAN et al., 2023) . . . .                                                                                                                                                                                                                                         | 71 |
| Figura 53 – Contribuições de ordem $\alpha^2$ para $a_e$ . (NYFFELER, 2016) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                        | 71 |
| Figura 54 – Contribuições de ordem $\alpha^3$ para $a_e$ . (NYFFELER, 2016) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                        | 72 |
| Figura 55 – O $(g - 2)$ do múon. (COTROZZI; SORBARA, 2022) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                         | 72 |
| Figura 56 – Diagramas relevantes no 2HDM tipo X. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                     | 73 |
| Figura 57 – Restrições sobre o espaço $(m_A, t_\beta)$ com $m_H = 300$ GeV usando o $(g - 2)$ do múon. As regiões em verde correspondem, da mais escura para a mais clara, às permitidas a $1\sigma$ , $2\sigma$ e $3\sigma$ de confiança. . . . .                                                                           | 74 |
| Figura 58 – $\Delta a_\mu$ em função de $m_A$ com $t_\beta = 48.216$ e $m_H = 300$ GeV. . . . .                                                                                                                                                                                                                              | 75 |
| Figura 59 – Vínculos sobre o 2HDM dados por (KIM, 2022). A região em marrom é a permitida pelo $(g - 2)$ a $2\sigma$ de confiança. As curvas coloridas em vermelho e azul impõem limites superiores para $t_\beta$ baseados em testes de universalidade leptônica (decaimento do $\tau$ e do $Z$ em par de léptons). . . . . | 75 |



# Sumário

|            |                                                                                |           |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>   | <b>INTRODUÇÃO</b>                                                              | <b>13</b> |
| <b>2</b>   | <b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>                                                   | <b>18</b> |
| <b>2.1</b> | <b>O nascimento do fator-<math>g</math></b>                                    | <b>18</b> |
| 2.1.1      | A natureza contra-intuitiva do spin                                            | 19        |
| 2.1.2      | Experimentos que apontaram $g = 2$                                             | 20        |
| <b>2.2</b> | <b>A mecânica quântica relativística</b>                                       | <b>22</b> |
| 2.2.1      | A teoria da relatividade no átomo de hidrogênio                                | 22        |
| 2.2.2      | A equação de Klein-Gordon                                                      | 24        |
| 2.2.3      | A equação de Dirac                                                             | 26        |
| <b>2.3</b> | <b>Teoria de Campos</b>                                                        | <b>30</b> |
| 2.3.1      | Teorema de Noether                                                             | 30        |
| 2.3.2      | Representações do grupo de Lorentz                                             | 31        |
| 2.3.3      | Quiralidade vs. helicidade                                                     | 34        |
| 2.3.4      | Teoria de Campos Quântica                                                      | 36        |
| <b>2.4</b> | <b>Correções radiativas na QED</b>                                             | <b>38</b> |
| 2.4.1      | O desvio de Lamb e a renormalização da massa                                   | 38        |
| 2.4.2      | A renormalização da carga elétrica                                             | 44        |
| 2.4.3      | O momento magnético revisitado                                                 | 48        |
| <b>2.5</b> | <b>O Modelo Padrão Eletrofraco</b>                                             | <b>50</b> |
| 2.5.1      | As teorias de gauge                                                            | 52        |
| 2.5.2      | Quebra espontânea de simetria                                                  | 58        |
| <b>2.6</b> | <b>Modelos de dois dubletos de Higgs</b>                                       | <b>64</b> |
| <b>2.7</b> | <b>Interações fortes</b>                                                       | <b>68</b> |
| <b>3</b>   | <b>RESULTADOS</b>                                                              | <b>70</b> |
| <b>3.1</b> | <b>Anomalia eletrônica</b>                                                     | <b>70</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Anomalia muônica</b>                                                        | <b>72</b> |
| <b>3.3</b> | <b>Outros vínculos e modelos</b>                                               | <b>75</b> |
| <b>3.4</b> | <b>Perspectivas futuras</b>                                                    | <b>76</b> |
| <b>4</b>   | <b>CONCLUSÃO</b>                                                               | <b>77</b> |
| <b>5</b>   | <b>APÊNDICE: UM POUCO MAIS SOBRE O FORMALISMO DOS<br/>DIAGRAMAS DE FEYNMAN</b> | <b>78</b> |

REFERÊNCIAS . . . . . 80

# 1 Introdução

O Modelo Padrão das Interações Eletrofracas e Fortes (SM) é a teoria mais robusta em Física de Altas Energias, sendo capaz de explicar uma imensidão de fenômenos e realizando previsões que foram confirmadas diversas vezes por experimento. Uma das mais celebradas é a de que deve existir um escalar (spin 0) para conferir massa a todas as partículas elementares, chamado de bóson de Higgs e detectado em 2012 pelo LHC.

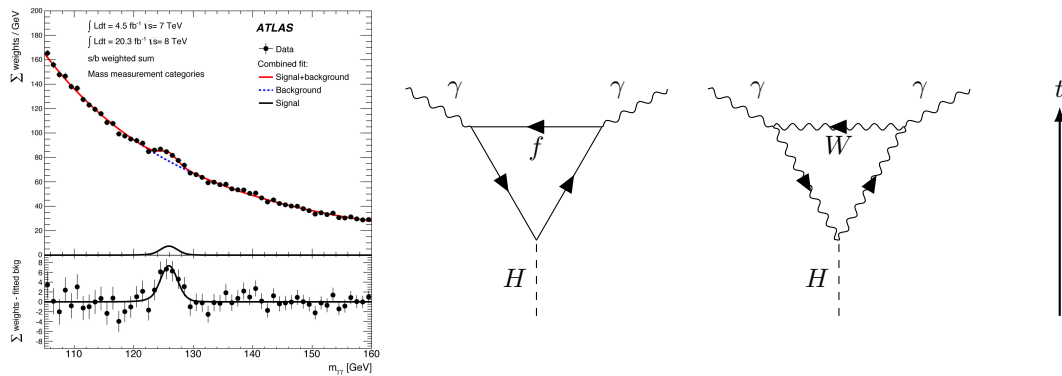


Figura 1 – Detecção do Higgs  $H$  com uma massa de 125 GeV. Retirado de [ATLAS](#).

Apesar de o escalar não interagir diretamente (a nível de árvore) com o fóton  $\gamma$  de massa nula, o decaimento  $H \rightarrow \gamma\gamma$  pode ocorrer a nível de loop, criando o pequeno pico na energia de 125 GeV (veja o apêndice/seção 5). Tanto os férmions carregados  $f$  quanto o bóson vetorial  $W$  contribuem para o decaimento indireto.

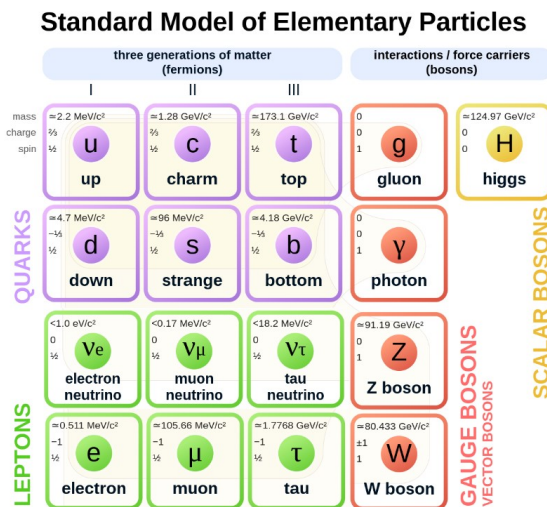


Figura 2 – Espectro das partículas elementares no Modelo Padrão.

Os campos de matéria aparecem em 3 famílias (ou gerações) progressivamente mais pesadas  $u^i$  (quarks tipo up),  $d^i$  (quarks tipo down),  $l^i$  (léptons carregados) e  $\nu^i$  (neutrinos)

com  $i = 1, 2, 3$ . A maior contribuição para o decaimento do Higgs vem do quark top ( $u^3$ ), que é o mais pesado. Os férmions estão listados na figura 2 em conjunto aos campos bosônicos.

Embora o Modelo Padrão seja bem-sucedido, existem problemas: alguns exemplos são a massa do neutrino, a assimetria entre matéria e antimatéria, o problema da hierarquia, quebra de CP no setor forte e a explicação da matéria escura (MELO, 2020). O que será relevante para esse trabalho é a discrepância existente entre a predição teórica para a anomalia muônica e seu valor obtido experimentalmente: (COTROZZI; SORBARA, 2022)

$$a_\mu^{\text{EXP}} - a_\mu^{\text{SM}} = (2.51 \pm 0.59) \cdot 10^{-9} . \quad (1.1)$$

A ordem  $10^{-9}$  é uma constatação sobre a **precisão** do experimento: apesar de a discrepância parecer pequena, ela tem uma significância de  $\left(\frac{2.51}{0.59}\right) \sigma \approx 4.2\sigma$ , muito próxima de  $5\sigma$  que indicaria inequivocamente física nova ( $\sigma$  é o desvio-padrão).

E para entender esse experimento, é necessário compreender primeiro do que trata essa quantidade. A anomalia leptônica  $a_l \equiv (g_l - 2)/2$  corresponde à variação percentual do fator giromagnético  $g_l$  em relação a 2, que controla a relação entre o momento de dipolo magnético intrínseco à partícula e seu spin. Apesar do nome, essa diferença já é esperada pela teoria, resultando do conhecimento que mesmo no vácuo, um lépton interagindo com um campo magnético sente a influência das outras partículas através das flutuações quânticas que dão origem aos loops. No caso da figura 1, eles permitem o decaimento do Higgs em fótons. Quanto ao momento de dipolo magnético, eles variam o fator  $g$  em relação ao valor de 2 que ele teria se a partícula existisse isolada. Todos os léptons sentem esse efeito, mas as contribuições de novas partículas são mais intensas para o múon ( $l^2$ ) do que para o elétron ( $l^1$ ) devido à massa 200 vezes maior da segunda geração.

A anomalia é medida através do estudo da precessão do spin do lépton na presença de um campo magnético  $\mathbf{B}$ . A partícula de carga  $q$  e massa  $m_l$  oscila com frequência (angular) cíclotron  $\omega_c$  enquanto seu spin precessiona com frequência  $\omega_s$ . A diferença (chamada de frequência anômala) é proporcional à anomalia:<sup>1</sup> (COTROZZI; SORBARA, 2022; KESHAVARZI; KHAW; YOSHIOKA, 2022)

$$\omega_a \equiv \omega_s - \omega_c = -a_l \left( \frac{q}{m_l} \right) \mathbf{B} . \quad (1.2)$$

Esse efeito está ilustrado na figura 3: para  $g = 2$  (caso à esquerda), o spin (denotado pelo vetor azul e vermelho) acompanha a revolução cíclotron, de modo que ele é sempre

<sup>1</sup> Há correções a essa relação associadas ao campo elétrico de quadrupolo presente no aparato e o fato de o movimento não ser totalmente ortogonal ao campo magnético. O experimento é realizado de modo a minimizar essas modificações, mas elas ainda contribuem em parte para a incerteza experimental.

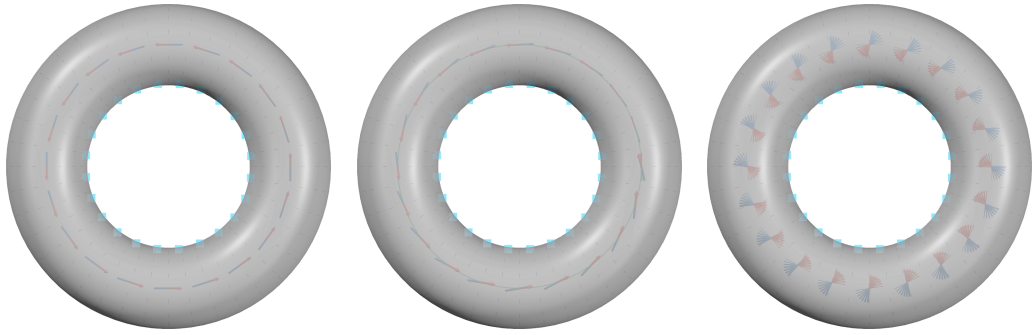


Figura 3 – Precessão do spin. Veja as animações: (GOMES, 2024).

paralelo ao movimento quando visto de cima. Mas na realidade  $g > 2$ , o que implica que após uma volta o spin tem uma direção levemente diferente da inicial (veja a figura ao meio). A ilustração à direita captura a precessão do spin ao longo de 7 voltas ao redor do toroide (a espessura progressivamente maior do vetor indica a passagem de tempo). A frequência anômala quantifica a precessão observada num dado ponto do toroide.

Para o caso do múon, são inseridos múons positivos num toroide e o decaimento  $\mu^+ \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \nu_e + e^+$  permite determinar a anomalia através da direção de emissão dos pósitrons. A razão é que estes são emitidos preferencialmente na direção de spin (veja a seção 2.5), o que está ilustrado na figura 4. O número de pósitrons detectado em cada calorímetro (que são as caixas em azul espalhadas ao longo da face interna do toroide) oscila com a frequência anômala.

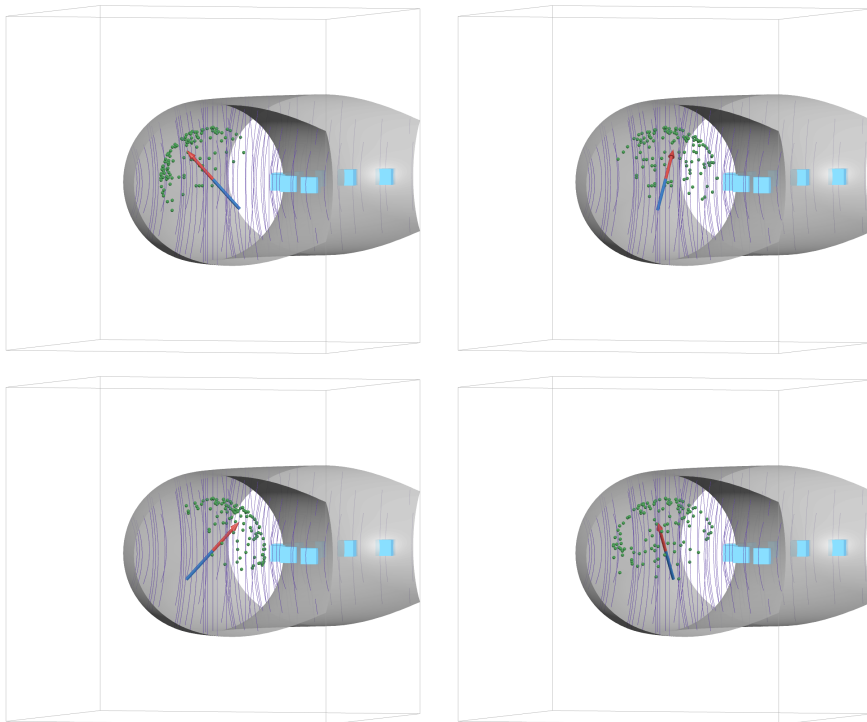


Figura 4 – Decaimento em pósitrons (representados em verde).

O estudo do  $(g - 2)$  do múon é então uma maneira de sondar a teoria através de um experimento a baixas energias, o que é interessante já que não há notícia de física nova no LHC, que opera atualmente até a escala de TeV. É claro que efeitos discrepantes com o Modelo Padrão podem aparecer nos colisores a mais altas energias, mas por enquanto o foco é em baixas energias (existe na verdade o problema da massa do  $W$ , tratado por exemplo por KIM, mas ele é relativamente recente). Um dos modelos de extensão possíveis para explicar a diferença é o modelo de dois dubletos de Higgs (2HDM). Enquanto no SM, existe apenas um escalar advindo de um dubleto, no 2HDM há 5 escalares ilustrados na figura 5. Note que apenas o setor escalar é modificado.

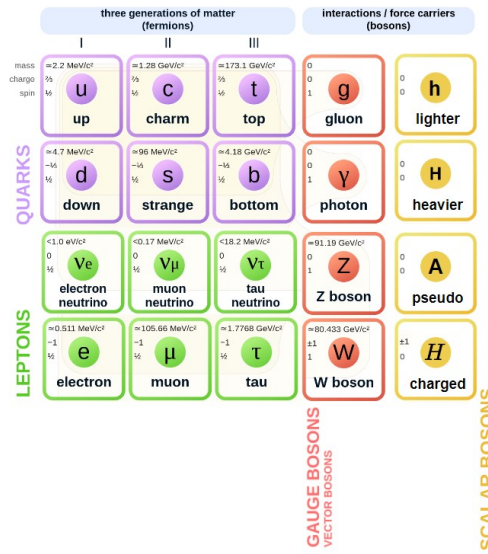


Figura 5 – Espectro no modelo com dois dubletos de Higgs.

No seguinte trabalho, será mostrada a evolução no entendimento do fator giro-magnético  $g$ , desde a predição equivocada  $g = 1$  da mecânica clássica, passando pela imposição que  $g$  fosse 2 por experimentos em mecânica quântica não relativística, até a predição por primeiros princípios de  $g = 2$  pela mecânica quântica relativística de Dirac. Em seguida, o desenvolvimento da Teoria Quântica de Campos produz  $g > 2$ , motivando a introdução da anomalia  $(g - 2)/2$ . A predição dessa quantidade depende não só da Eletrodinâmica Quântica (ou QED), como também do Modelo Padrão (SM) como um todo. Em especial, será abordado um pouco do Modelo Padrão Eletrofraco para então estendê-lo através do 2HDM. É claro que as interações fortes também contribuem para a anomalia, mas elas não serão modificadas e portanto não requerem tanta atenção. Mesmo assim, é importante comentar que existem discrepâncias no cálculo do setor forte/hadrônico, exploradas brevemente na seção 3.2. Para concluir, o modelo de dois dubletos de Higgs tipo X será usado para resolver a disparidade entre teoria e experimento observada na anomalia do múon (equação 1.1), bem como prever uma possível evolução na razão entre massa do elétron e massa do próton ( $\mu = m_e/m_p$ ). Essa variação permite estabelecer vínculos cosmológicos sobre o modelo, com destaque ao valor de  $\tan \beta = v_2/v_1$ .

É importante esclarecer algumas convenções que foram tomadas. Será utilizado o sistema de unidades naturais ( $\hbar = c = \epsilon_0 = 1$ ), de modo que a constante de estrutura fina por exemplo pode ser expressa na forma:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \equiv \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} . \quad (1.3)$$

A constante  $e = |e|$  é a carga elétrica elementar.

Durante o texto, também serão usadas as matrizes de Pauli  $\sigma^j$ :

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (1.4)$$

Vale destacar as relações de comutação -  $[A, B] \equiv AB - BA$  - e anti-comutação -  $\{A, B\} \equiv AB + BA$  - dessas matrizes:

$$\left[ \frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right] = i\epsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2} ; \quad \{ \sigma^i, \sigma^j \} = 2\delta^{ij} \cdot 1_{2 \times 2} , \quad (1.5)$$

sendo  $\epsilon^{ijk}$  as constantes de Levi-Civita e  $\delta^{ij}$ , a delta de Kronecker.

Foi adotada a convenção de soma de Einstein: índices repetidos indicam uma soma sobre esse índice. A métrica tem assinatura  $(+, -, -, -)$ . E tri-vetores são distinguidos de quadri-vetores usando negrito: por exemplo, o quadri-momento é  $p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) = (E, \mathbf{p})$  e  $p^2 = p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2$ . No geral,  $a \cdot b = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

## 2 Fundamentação Teórica

### 2.1 O nascimento do fator- $g$

O momento de dipolo magnético  $\boldsymbol{\mu}_S$  inerente a uma partícula elementar carregada se origina do seu momento angular intrínseco  $\mathbf{S}$  (denominado de spin). Apesar de ambas essas quantidades manifestarem propriedades quânticas (como a discretização observada no experimento de Stern-Gerlach:  $S_z = \pm 1/2$ ), uma análise clássica parece ser capaz (a princípio) de quantificar a relação entre elas. Mas será mostrado aqui que esse não é o caso: o spin possui uma natureza totalmente quântica que requer, dentre outras modificações, a introdução de um fator corretivo  $g$  na razão  $\mu_S/S$ .

Um anel de corrente  $I$  com vetor área  $\mathbf{a}$  é caracterizado por  $\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{a}$ , então uma única carga  $-e$  oscilando com período  $T$  numa circunferência de raio  $r$  produz um ímã de intensidade:<sup>1</sup>

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{T} \pi r^2 \hat{\mathbf{n}} . \quad (2.1)$$

Já que a carga é negativa, o versor  $\hat{\mathbf{n}}$  tem sentido oposto ao momento angular orbital  $\mathbf{L}$  (veja a figura 6 à esquerda), com magnitude dada por  $mvr$  ( $v$  é a velocidade da partícula e  $m$  é a sua massa). Com isso:

$$\boldsymbol{\mu}_L = -\frac{e}{2} \frac{2\pi r}{T} \frac{r}{mvr} \mathbf{L} = -\frac{e}{2m} \mathbf{L} . \quad (2.2)$$

Veja que a relação entre  $\boldsymbol{\mu}_L$  e  $\mathbf{L}$  não possui dependência alguma no tamanho do anel: ela contém apenas propriedades da partícula carregada. Aparentemente, mesmo que a órbita fosse "quase pontual", a razão  $\mu_L/L$  seria a mesma. Esse fato pareceu insinuar que a equação 2.2 deve valer também para o momento de dipolo magnético de spin:

$$\boldsymbol{\mu}_S = -\frac{e}{2m} \mathbf{S} . \quad (2.3)$$

Apesar de esse argumento parecer razoável, a natureza do spin é bem mais complicada que a do momento angular orbital. A explicação completa dessa quantidade exige

<sup>1</sup> A magnetostática, que garante os resultados expostos aqui, supõe correntes estacionárias (GRIFFITHS, 2017). Esse não é o caso da carga pontual em órbita, já que cada ponto da circunferência encontra "picos" instantâneos de corrente separados pelo período  $T$ , com  $I = 0$  em todos os outros instantes. Logo,  $I = I(t)$ . Isso pode ser contornado distribuindo uniformemente a carga sobre o anel ou supondo  $T \rightarrow 0$ . Tomar esse limite não altera o resultado final 2.2, já que ele independe de  $T$ .



uma análise além da teoria clássica que será apresentada aqui e mostra que a equação 2.3 deve ser corrigida por um fator adimensional  $g$ :

$$\boldsymbol{\mu}_S = -g \frac{e}{2m} \mathbf{S} . \quad (2.4)$$

A análise ingênua que foi feita agora previu  $g = 1$ . A mecânica quântica não relativística exigiu  $g = 2$  para obter conciliação com experimento, o que depois foi confirmado por primeiros princípios pela mecânica quântica relativística. A transição para a Teoria Quântica de Campos mostrou que  $g$  é levemente diferente de 2, o que motivou passar a falar de  $(g - 2)/2$ . Essa é a chamada *anomalia* que se tornará o foco deste TCC.

### 2.1.1 A natureza contra-intuitiva do spin

A forma clássica de explicar a transição de 2.2 para 2.3 seria a seguinte: imagina-se a carga como uma esfera composta por anéis de corrente como na figura 6 à direita. Cada anel obedece à relação 2.2, então a esfera como um todo obedece à mesma equação se a carga e a massa forem uniformemente distribuídas. Ela pode ser até infinitesimal, já que não se faz referência ao tamanho do objeto. Nesse limite, identifica-se o momento angular como o spin e se obtém a equação 2.3.

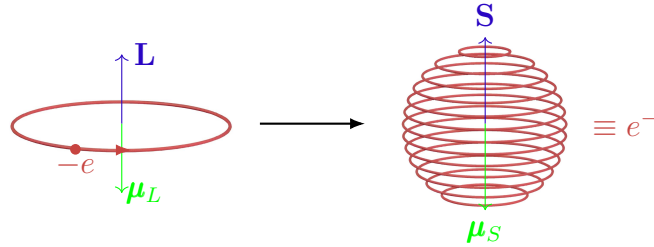


Figura 6 – Representação heurística do elétron.

Entretanto, é necessário salientar que esse não é um modelo realístico para uma partícula elementar como o elétron. Para obter um valor de momento angular de  $1/2$  para uma esfera de raio  $r$  com distribuição uniforme de massa  $m$ , seria preciso que:

$$L = I\omega = \left(\frac{2}{5}mr^2\right) \frac{v}{r} = \frac{1}{2} \quad \therefore v = \frac{5}{4mr} . \quad (2.5)$$

Note que  $v$  é a velocidade no equador. É possível estabelecer um limite superior para o raio do elétron igualando sua energia de repouso à energia potencial que ele possui por estar inserido no seu próprio campo eletrostático: (GRIFFITHS, problema 4.25)

$$m = \frac{e^2}{4\pi r_{\max}} = \frac{\alpha}{r_{\max}} \quad \therefore mr \leq \alpha . \quad (2.6)$$

Substituindo em 2.5:

$$v \geq \frac{5}{4\alpha} = \frac{5}{4} \cdot 137 \equiv (171.25)c . \quad (2.7)$$

Isso torna óbvio que o spin não pode ser modelado como uma rotação em torno do próprio eixo. Essa observação é ainda mais forte quando se percebe que as partículas elementares são entendidas hoje como pontuais, o que força essa quantidade a ser reconhecida como um momento angular intrínseco. Ou seja,  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{S}$  obedecem à mesma álgebra e produzem efeitos análogos (como o momento de dipolo magnético), mas a representação do spin como uma pequena esfera girando não é física e deve ser interpretada de forma heurística caso seja usada (ver também [SEBENS, 2019](#)).

### 2.1.2 Experimentos que apontaram $g = 2$

A forma de medir o fator giromagnético de spin de uma partícula ( $\mu_S/S$ ) é fazendo ela interagir com um campo magnético. O primeiro experimento que efetuou isso e ao mesmo tempo mostrou a quantização do spin foi o de Stern-Gerlach em 1922:

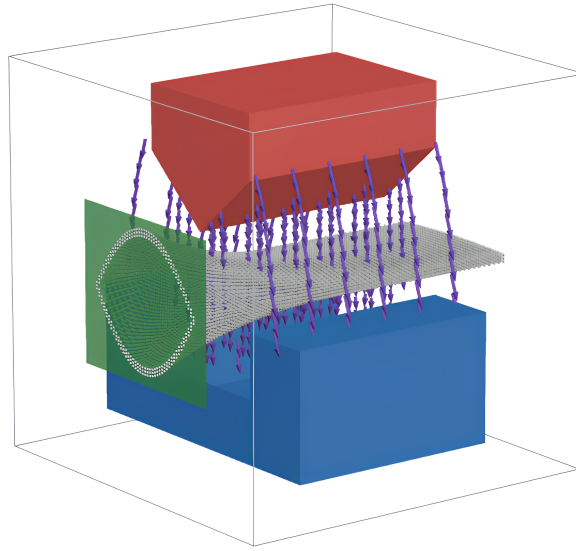


Figura 7 – Ilustração do experimento de Stern-Gerlach. O encontro entre as duas bandas no aparato em verde é devido ao efeito de borda.

Eram enviados átomos de prata numa região de campo magnético não homogêneo, o que produzia sobre o feixe uma força:

$$F_z = \nabla(\boldsymbol{\mu}_S \cdot \mathbf{B})_z = \mu_{Sz} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{e}{2m} \frac{\partial B_z}{\partial z} g S_z . \quad (2.8)$$

O experimento indicou  $g S_z = \pm 1$  ([EISBERG; RESNICK, 1985](#)), correspondendo às duas manchas observadas no aparato. Já que duas componentes adjacentes de momento angular devem ser separadas por 1, obtém-se  $S_z = \pm 1/2$  e então  $g = 2$ .

Um outro indicativo desse valor para o fator giromagnético foi o efeito Zeeman, nome dado à separação entre níveis de energia do átomo de hidrogênio na presença de um campo magnético externo  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ :

$$\Delta H_Z = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}} = -(\boldsymbol{\mu}_L + \boldsymbol{\mu}_S) \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}} = \frac{e}{2m}(\mathbf{L} + g\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}} . \quad (2.9)$$

A observação desse efeito para as ondas  $s$  ( $l = 0$ ) confirmou que  $g = 2$ . Um fenômeno análogo a esse é o acoplamento spin-órbita, que não envolve campos externos. No referencial do elétron no átomo de hidrogênio, é o próton que "orbita". Esse movimento da carga positiva gera um campo magnético  $\mathbf{B}$  que acopla ao momento de dipolo magnético  $\boldsymbol{\mu}_S$  do elétron. Pela lei de Biot-Savart, sendo  $\mathbf{L}$  o momento angular orbital do elétron:

$$\mathbf{B} \approx \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{I}{4\pi r^2} (2\pi r) \frac{\mathbf{L}}{L} = \frac{e}{2mvr^2T} \mathbf{L} = \frac{e}{4\pi m r^3} \mathbf{L} . \quad (2.10)$$

O mesmo argumento da nota de rodapé 1 vale aqui. Os vetores  $\mathbf{B}$ ,  $d\mathbf{l}$  e  $\hat{\mathbf{r}}$  (com  $r = |\hat{\mathbf{r}}|$ ) estão representados em laranja, verde e preto na figura 8, respectivamente. Usando esse resultado:

$$\Delta H_{SO} = -\boldsymbol{\mu}_S \cdot \mathbf{B} \approx g_{SO} \frac{e^2}{8\pi} \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{L})}{m^2 r^3} . \quad (2.11)$$

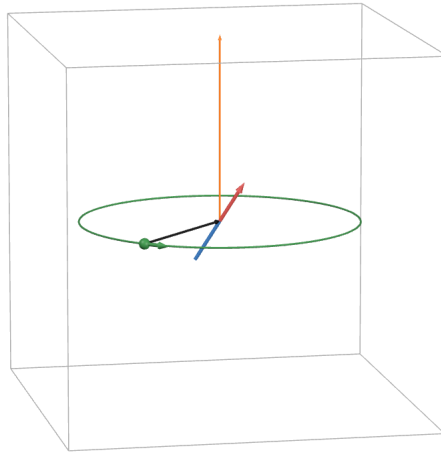


Figura 8 – Esquema clássico (aproximado) do átomo de hidrogênio no referencial do elétron, que funciona como um pequeno dipolo magnético.

Veja que o fator- $g$  foi trocado por  $g_{SO}$ , obtido por observação como 1. Isso não contradiz os resultados dos outros experimentos devido ao fenômeno da precessão de Thomas: a aceleração centrípeta do elétron o torna uma série de referenciais inerciais distintos, o que é percebido pela transformação de coordenadas como uma precessão de

seus eixos. No fator giromagnético, isso corresponde à substituição  $g \rightarrow g_{SO} = g - 1$ . (HAAR; CURTIS, 1987)

## 2.2 A mecânica quântica relativística

### 2.2.1 A teoria da relatividade no átomo de hidrogênio

Um dos grandes triunfos da mecânica quântica é a equação de Schrödinger, que permite determinar a evolução temporal da função de onda  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  dada sua configuração inicial  $\Psi(\mathbf{x}, 0)$  e o potencial  $V(\mathbf{x}, t)$  ao qual a partícula está submetida:

$$H\Psi(\mathbf{x}, t) \equiv -\frac{1}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{x}, t) + V(\mathbf{x}, t)\Psi(\mathbf{x}, t) = i\frac{\partial\Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} . \quad (2.12)$$

Uma das consequências dessa EDP (equação diferencial parcial) é uma lei de conservação local expressa através de uma equação de continuidade (veja o fim da subseção 2.3.1): (SAKURAI, 2017)

$$\frac{\partial}{\partial t} (|\Psi|^2) + \nabla \cdot \left[ \frac{1}{m} \text{Im}(\Psi^* \nabla \Psi) \right] = 0 . \quad (2.13)$$

A carga conservada foi identificada por Max Born como a probabilidade de encontrar a partícula numa região, sendo  $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$  a densidade de probabilidade. É assim que a teoria de Schrödinger se conecta com experimento, já que a função de onda "crua"  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  não carrega significado físico.

Para um potencial estático  $V(\mathbf{x})$ , é possível mostrar que a solução separável  $\Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi(\mathbf{x})e^{-iEt}$  satisfaz 2.12 se a parte espacial  $\Psi(\mathbf{x})$  obedecer à equação de autovalores:

$$H\Psi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}) = E\Psi(\mathbf{x}) . \quad (2.14)$$

Sendo o potencial de Coulomb do átomo de hidrogênio ( $V = -\alpha r^{-1}$ ), os autovalores permitidos para a energia são:

$$E_n = \left( -\frac{1}{2m_e a^2} \right) \frac{1}{n^2} = \frac{(-13.6 \text{ eV})}{n^2} \equiv \frac{-\text{Ry}}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3...) . \quad (2.15)$$

O comprimento  $a = (m_e \alpha)^{-1}$  é chamada de raio de Bohr. O espectro de energia é degenerado, significando que a energia  $E_n$  é compartilhada por autoestados  $\Psi_{nlm}$ , onde  $l$  e  $m$  quantizam o momento angular orbital:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 |lm\rangle &= l(l+1) |lm\rangle \quad (l = 0, 1, 2 \dots n-1) ; \\ L_z |lm\rangle &= m_l |lm\rangle \quad (m_l = -l, -l+1 \dots l) . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Entretanto, a equação 2.14 é baseada na expressão clássica para a hamiltoniana do elétron:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V . \quad (2.17)$$

Sendo que a hamiltoniana de uma partícula livre é na verdade  $H = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  quando se leva em conta a teoria da relatividade. Expandindo para  $|\mathbf{p}| \ll m$ :

$$H = m \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right)^{1/2} = m \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^4} + \dots \right) . \quad (2.18)$$

A energia de repouso  $m$  é constante e pode ser ignorada, o que permite escrever a correção relativística numa primeira aproximação como:

$$\Delta H_r = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m^3} + O[(\mathbf{p}/m)^6] . \quad (2.19)$$

Isso modifica a relação entre energia e momento da curva azul na figura 9 à esquerda para a curva azul à direita. Note que ela aproxima de forma mais eficiente a relação relativística mostrada em vermelho.

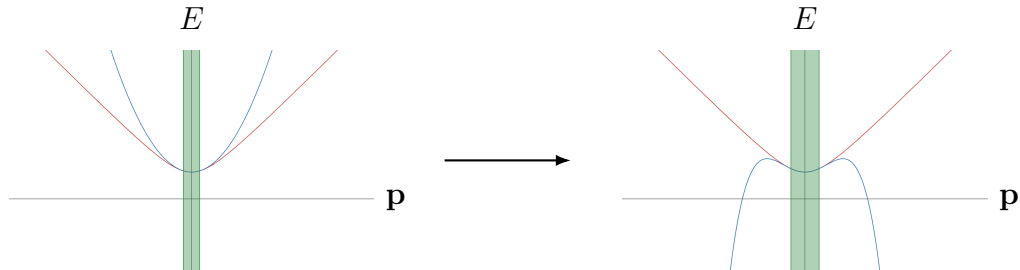


Figura 9 – Relações de dispersão entre energia e momento. A curva em vermelho corresponde à relação relativística e a expansão 2.18 é representada em azul, sendo mantida até segunda ordem à esquerda e até quarta ordem à direita. Note que a região em verde, em que o erro percentual é menor que 0.1% (valor escolhido arbitrariamente), alarga quando se inclui o termo 2.19.

É possível usar teoria perturbativa de primeira ordem para calcular a contribuição mais importante dessa correção para o espectro de energia:

$$\Delta E^1 = \langle nl | \Delta H | nl \rangle . \quad (2.20)$$

Usando as equações 2.19 e 2.17, isso resulta em:

$$\Delta E_R^1 = -\frac{1}{8m^3} \langle nl | \mathbf{p}^4 | nl \rangle = -\frac{1}{8m^3} (2m)^2 \langle nl | (H - V)^2 | nl \rangle . \quad (2.21)$$



figura 11. Isso resulta numa equação diferencial de segunda ordem que trata espaço e tempo de forma simétrica, diferente da equação de Schrödinger:

$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0 . \quad (2.24)$$

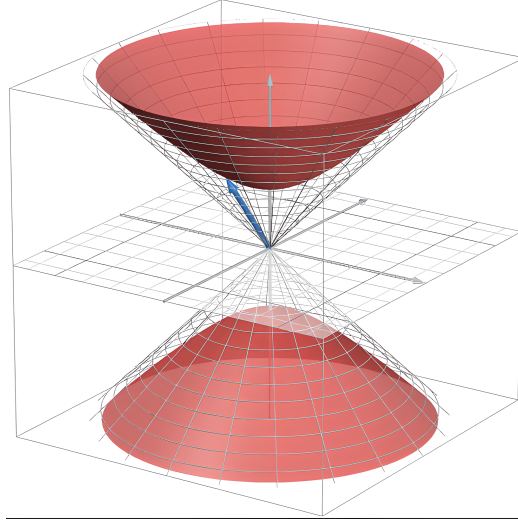


Figura 11 – Quadri-momento "na casca". O eixo vertical representa a energia e o plano corresponde ao tri-momento.

A equação de Klein-Gordon, como ela é chamada, está associada à seguinte equação de continuidade: (SAKURAI, 2017)

$$\partial_\mu j^\mu = 0 , \quad j^\mu = \frac{i}{2m} (\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi) \equiv \frac{i}{2m} [\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \phi] . \quad (2.25)$$

Numa tentativa de interpretar a carga conservada como a probabilidade, como é feito no caso de Schrödinger, identifica-se a densidade de probabilidade como:

$$\rho = \frac{1}{m} \text{Im} \left( \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) . \quad (2.26)$$

A derivada temporal implica que essa função não é positiva definida, o que entra em conflito com a interpretação probabilística. O tratamento moderno reconhece que é possível interpretar  $\rho$  como uma densidade de carga, o que implica na existência de partículas idênticas às que estão sendo tratadas mas com a carga oposta: essas são as anti-partículas. Considerando que as soluções linearmente independentes de 2.24 são ondas planas do tipo  $e^{\pm i p \cdot x}$  com  $p^2 = m^2$ , o fato de que uma delas é o complexo conjugado da outra indica que o campo de Klein-Gordon possui dois graus de liberdade reais, associados à existência da partícula e da anti-partícula. Em analogia com a equação de Schrödinger:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}(e^{-ip\cdot x}) &= +E_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x} ; \\ i\frac{\partial}{\partial t}(e^{+ip\cdot x}) &= -E_{\mathbf{p}}e^{+ip\cdot x} . \end{aligned} \quad (2.27)$$

Veja que a solução de cima pode ser entendida como um autoestado de energia  $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ , enquanto a de baixo possui energia  $-E_{\mathbf{p}}$ . A existência de soluções com energias negativas pode ser remediada com a introdução de um campo eletromagnético  $A^\mu$  através de um acoplamento mínimo  $p^\mu \rightarrow \tilde{p}^\mu = p^\mu + eA^\mu$ . Já que o momento aparece ao quadrado na relação de dispersão, fazer  $p \rightarrow -p$  equivale a fazer  $e \rightarrow -e$ : ou seja, as soluções de "energia negativa" podem ser entendidas na verdade como soluções de energia positiva mas com carga oposta, corroborando para a interpretação de anti-partículas.

Apesar dessa interpretação atual, a não-positividade de 2.26 foi entendida na época como um fracasso da equação de Klein-Gordon e motivou a procura por uma equação de onda relativística de primeira ordem, já que isso eliminaria o gradiente presente na corrente da equação de continuidade. De toda forma, mesmo que se use o tratamento moderno, os 2 graus de liberdade do campo complexo  $\phi$  associados aos dois possíveis valores de carga ( $\pm e$ ) não são suficientes para descrever o elétron com spin. Hoje se entende que a equação 2.24 descreve partículas de spin 0, como será elaborado adiante.

### 2.2.3 A equação de Dirac

Paul Dirac conseguiu encontrar uma equação de onda relativística para o elétron que fosse de primeira ordem, eliminando o problema que a equação 2.26 possui. Para isso, ele precisou fatorar a relação  $p^2 - m^2 = 0$  em algo com formato:

$$p^2 - m^2 = (\not{p} + m)(\not{p} - m) = \not{p}^2 - m^2 = 0 . \quad (2.28)$$

O objeto  $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$  é uma combinação linear entre as componentes do quadri-momento, com os coeficientes  $\gamma^\mu$  possuindo uma natureza *a priori* desconhecida. Já que  $p^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$  e  $\not{p}^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu$ , o mais simples seria fazer  $\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu}$ . Entretanto, isso não funciona quando se reconhece que a métrica é diagonal. Mesmo que  $\gamma^\mu$  fossem matrizes, uma análise do determinante torna óbvio que seria impossível satisfazer  $(\gamma^0)^2 = 1$  e  $(\gamma^i)^2 = -1$ . O que é feito então é simetrizar a quantidade  $\not{p}^2$ :

$$\not{p}^2 = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu p_\nu p_\mu) = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} p_\mu p_\nu . \quad (2.29)$$

É necessário assim que  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \cdot 1$ . Essa ideia é promissora para o spin: se os coeficientes  $\gamma^\mu$  forem a identidade e as 3 matrizes de Pauli  $\sigma^i$ , a função de onda será forçada a ter dois graus de liberdade associados às componentes de spin  $\pm \frac{1}{2}$ . Entretanto, a



relação  $\{\sigma^i, 1\} = 2\sigma^i$  deixa claro que o espaço de matrizes  $2 \times 2$  não é grande o suficiente. Dirac percebeu que os objetos que ele procurava deveriam ter na verdade ordem  $4 \times 4$ , sendo construídos aninhando as matrizes de Pauli nesse espaço maior:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \sigma^\mu = (1, +\boldsymbol{\sigma}) ; \\ \bar{\sigma}^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma}) . \end{cases} \quad (2.30)$$

Essa é a representação das matrizes de Dirac na chamada base quiral, que recebe esse nome por um motivo que se tornará claro adiante. Escolhendo  $\not{p} - m = 0$  em 2.28 (será mostrado que isso produz os mesmos resultados que  $\not{p} + m = 0$ ) e fazendo  $p^\mu \rightarrow i\partial^\mu$ , obtém-se a equação de Dirac:

$$(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0 . \quad (2.31)$$

O objeto  $\psi(x)$  possui 4 componentes complexas e é chamado de espinor. Note que 2.31 admite soluções de onda plana do tipo  $u(p)e^{-ip \cdot x}$  e  $v(p)e^{+ip \cdot x}$  desde que se tenha:

$$(\not{p} - m)u(p) = (\not{p} + m)v(p) = 0 . \quad (2.32)$$

Isso demonstra que mesmo escolhendo  $\not{p} - m = 0$  em 2.28 (onde  $p$  é o operador  $p^\mu \rightarrow i\partial^\mu$ ), ambas as possibilidades aparecem através de 2.32 (onde  $p$  passa a ser o autovalor de momento do estado de onda plana). A equação 2.27 também é útil aqui desde que sejam feitas as associações  $e^{-ip \cdot x} \rightarrow u(p)e^{-ip \cdot x}$  e  $e^{+ip \cdot x} \rightarrow v(p)e^{+ip \cdot x}$ . Entretanto, o argumento utilizado no caso de Klein-Gordon para eliminar as energias negativas não funciona mais, dado que o momento aparece agora em primeira ordem. O que Dirac fez foi supor que todos os estados de autovalor  $-E_{\mathbf{p}}$  já estariam ocupados, impedindo que um elétron perdesse energia indefinidamente devido ao princípio de exclusão de Pauli<sup>2</sup>. Esse "mar" de férmions resolvia outro problema: a existência de 2 graus de liberdade adicionais no espinor. Se dois fótons colidissem num determinado ponto, com uma energia igual (ou superior) a  $2m$ , seria possível excitar um elétron de autovalor  $-E$  para uma energia positiva  $E$  igual (ou superior) a  $m$ . O que restaria no mar seria um "buraco" que, por estar imerso em energia e carga negativa, teria o mesmo comportamento que um elétron de energia e carga positiva imerso no vácuo: Dirac identificou esse corpúsculo como a anti-partícula do elétron (que recebe o nome de pósitron). Essa predição, ilustrada na figura 12, foi confirmada experimentalmente por Carl Anderson em 1932 (figura 13).

Note que mesmo prevendo a existência de anti-partículas, a equação 2.31 produzia a densidade de probabilidade positiva que Dirac procurava: (SAKURAI, 2017)

<sup>2</sup> Se esse princípio não fosse invocado, a introdução de interações eletromagnéticas faria o elétron emitir fótons *ad infinitum*. É assim que ele desceria indefinidamente no espectro de energias.

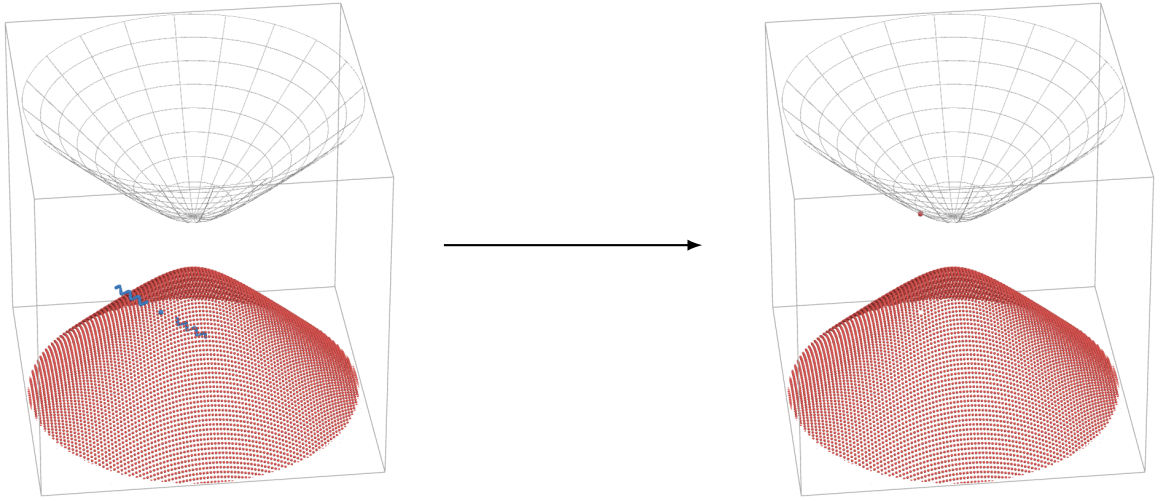


Figura 12 – Interpretação do mar de Dirac. Cada ponto representa um autoestado de momento que pode ser ocupado por dois elétrons de spin  $m_s = \pm 1/2$ .

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi \equiv \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (j^0 = \psi^\dagger \psi > 0). \quad (2.33)$$

A predição do pósitron não foi o único triunfo dessa teoria. A presença das matrizes de Pauli na equação indicava que finalmente o spin estaria sendo introduzido naturalmente. É aqui que se obtém  $g = 2$  pela primeira vez a partir de primeiros princípios. Fazendo o acoplamento mínimo  $\tilde{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{p} + e\mathbf{A}$  (não é necessário introduzir o potencial escalar por enquanto, já que o campo magnético  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  já é o bastante para estudar o momento magnético), obtém-se para o espinor  $u(p)$ :

$$(\not{\tilde{\mathbf{p}}} - m)u(p) = \begin{pmatrix} -m & E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}} \\ E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.34)$$

Ou ainda:

$$\begin{cases} mu_1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}} u_2 = Eu_2; \\ mu_2 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}} u_1 = Eu_1. \end{cases} \quad (2.35)$$

Multiplicando a equação de baixo por  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}}$  à esquerda e substituindo na de cima com a aproximação  $K(u_2 - u_1) = O(\mathbf{p}^3)$  para  $|\mathbf{p}| \ll m$  (sendo  $K$  a energia cinética), encontra-se:

$$\begin{aligned} mu_1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}} u_2 &= Eu_2 \approx Ku_1 + mu_2 = Ku_1 + Eu_1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}} u_1 \\ \therefore mu_1 + \left(1 + \frac{K}{m}\right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}} u_1 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}}}{m} u_1 &\approx 2Ku_1 + mu_1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}} u_1. \end{aligned} \quad (2.36)$$

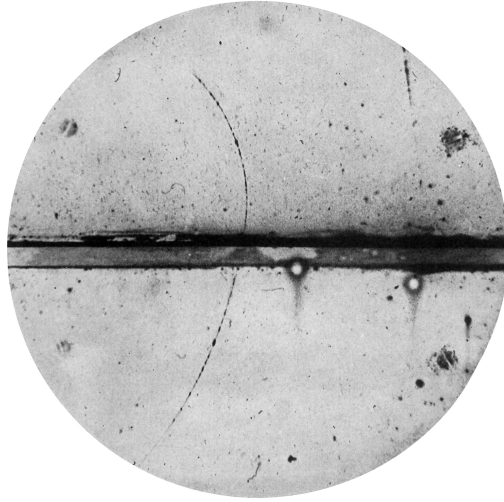


Figura 13 – Descoberta do pósitron, que se curva no sentido oposto ao elétron num campo magnético conhecido. (ANDERSON, 1933)

Desprezando novamente termos de ordem  $O(\mathbf{p}^3)$  e utilizando as relações de comutação e anti-comutação das matrizes de Pauli, torna-se possível escrever:

$$\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{p}})}{2m} u_1 = \left[ \frac{\tilde{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}}{2m} \cdot (\tilde{\mathbf{p}} \times \tilde{\mathbf{p}}) \right] u_1 \approx K u_1 . \quad (2.37)$$

Sendo que:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}} \times \tilde{\mathbf{p}} u_1 &= (i\nabla - e\mathbf{A}) \times (i\nabla u_1 - e\mathbf{A}u_1) \\ &= -ie[\nabla \times (\mathbf{A}u_1) + \mathbf{A} \times \nabla u_1] \\ &= -ie(\nabla \times \mathbf{A})u_1 = -ie\mathbf{B}u_1 . \end{aligned} \quad (2.38)$$

Então:

$$\left( \frac{\tilde{\mathbf{p}}^2}{2m} - \boldsymbol{\mu}_S \cdot \mathbf{B} \right) u_1 \approx K u_1 . \quad (2.39)$$

O momento magnético  $\boldsymbol{\mu}_S$  é dado pela equação 2.4 com a identificação  $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}/2$  e  $g = 2$ . A estrutura fina também pode ser derivada de forma exata através da teoria de Dirac (desde que seja feito o acoplamento mínimo completo  $\tilde{p}^\mu = p^\mu + eA^\mu$ ), resultando em: (BETHE; SALPETER, 1957)

$$E_{nj} = m \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{\alpha}{n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} - 1 \right\} . \quad (2.40)$$

Expandindo em ordem  $\alpha^4$ , encontra-se: (GRIFFITHS, 2005)

$$E_{nj} \approx -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + 1/2} - \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (2.41)$$

Isso é o que se obtém somando  $E_n$  da eq. 2.15 e  $\Delta E_{\text{fs}}^1$  dado na eq. 2.23.

Mesmo sendo interpretado inicialmente como uma função de onda relativística, o objeto  $\psi(x)$  da equação 2.31 pode ser visto também como um campo clássico assim como o campo eletromagnético. Essa visão permite, por exemplo, resgatar parcialmente a ideia do elétron girando através de um estudo do fluxo de massa e carga nesse campo. Nesse paradigma, a carga rotaciona com o dobro da velocidade da massa, o que resulta em  $g = 2$  (SEBENS, 2019). Nas próximas seções, será mostrado que a reinterpretação de  $\psi(x)$  como um campo, acompanhada de uma quantização desse objeto, introduz fenômenos que não apareciam na teoria de Dirac. Um deles é a anomalia magnética.

## 2.3 Teoria de Campos

Apesar do sucesso da teoria de Dirac, ainda existiam questões que ela não conseguia resolver. Uma delas era o problema da causalidade: a amplitude para a propagação de uma partícula é não-nula mesmo fora do cone de luz, quando se usa a interpretação de funções de onda (PESKIN; SCHROEDER, 2007). As observações também contribuíram para abandonar esse modelo, com destaque ao desvio de Lamb que será discutido na seção 2.4.1. A solução foi levar a predição de anti-partículas de Dirac à sua conclusão lógica: a de que a teoria fundamental deve ser uma de multi-partículas. A ideia da função de onda, que existe para descrever uma única partícula, é trocada pela ideia do campo, que corresponde a uma propriedade do espaço-tempo que **permite** a excitação de partículas. Nessa seção, serão abordadas algumas técnicas importantes associadas à teoria de campos.

"Até agora, todos achavam que a equação de Dirac se referia diretamente a partículas físicas. Agora, na teoria de campos, reconhecemos que as equações se referem a um subnível. Experimentalmente estamos preocupados com partículas, mas as velhas equações descrevem campos." (Julian Schwinger, tradução livre)

### 2.3.1 Teorema de Noether

Dada uma lagrangiana  $\mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)$ , as equações de movimento para os campos são obtidas extremizando a ação sobre uma região  $\Omega$  do espaço-tempo, com  $\delta\phi_a = 0$  sobre  $\partial\Omega$ :

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L} d^4x \quad \therefore \delta S = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0. \quad (2.42)$$

As equações de movimento obtidas são chamadas de equações de Euler-Lagrange. Uma consequência delas é a relação entre simetrias e leis de conservação. Uma simetria contínua dos campos é definida como uma transformação do tipo  $\Delta\phi_a = X_a(\phi)\epsilon$  que muda a lagrangiana por um termo de divergência  $\Delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu(\phi)\epsilon$ . Isso não altera as equações de movimento, já que a ação varia por um termo que é constante sob extremização,  $\delta(\Delta S) = 0$ . O teorema de Noether garante que existe uma corrente conservada  $j^\mu$ : (MAGGIORE, 2005)

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} X_a(\phi) - F^\mu(\phi), \quad \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.43)$$

Isso produz uma lei de conservação local, que indica que a variação da carga num volume  $V$  só pode acontecer por meio do fluxo através das paredes desse volume ( $\partial V$ ):

$$\frac{d}{dt} \int_V j^0 d^3x = - \oint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a}. \quad (2.44)$$

Tomando  $V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{j}|_{\partial V} \rightarrow 0$  e se recupera a lei de conservação global.

### 2.3.2 Representações do grupo de Lorentz

Enquanto todos os campos se transformam trivialmente sob translações ( $\phi'_a(x) = \phi_a(x + \epsilon)$ ), de modo que o tensor energia-momento tem sempre o mesmo formato (a menos de um fator aditivo de divergência nula), o mesmo não pode ser dito sobre as transformações de Lorentz (PESKIN; SCHROEDER, 2007). Para uma transformação  $x' = \Lambda x$ , a forma mais simples pela qual um campo pode se transformar (conhecida como representação trivial) é  $\phi'(x') = \phi(x)$  ou  $\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$ . Esse campo é chamado de campo escalar. Há também a representação vetorial,  $A'(x) = \Lambda \cdot A(\Lambda^{-1}x)$ : conforme a posição no espaço-tempo se transforma (através, por exemplo, de uma rotação espacial), o vetor  $A^\mu$  segue a mesma transformação. Em especial, uma rotação de  $2\pi$  do ponto implica numa rotação de  $2\pi$  do campo. Isso está ilustrado na figura 14.

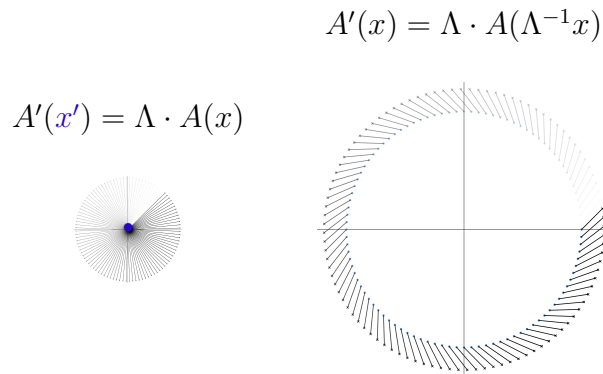


Figura 14 – Campo vetorial.

Mas há também uma terceira "representação" do grupo de Lorentz que recebe as aspas porque uma rotação de  $2\pi$  do ponto implica na verdade numa rotação por  $\pi$  do campo (veja a figura 15). Esse é o campo espinorial, que se transforma através de uma multifunção  $S(\Lambda)$  da transformação de Lorentz  $\Lambda$ . Isso resulta na lei  $\psi'(x) = S(\Lambda) \cdot \psi(\Lambda^{-1}x)$ . A razão pela qual  $S(\Lambda)$  é uma multifunção é que  $S(\Lambda = 1) = \pm 1$ .

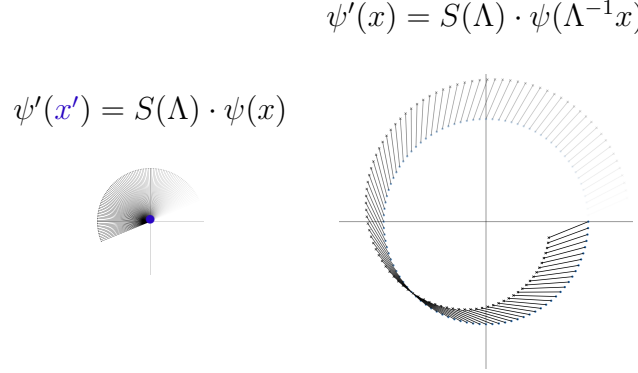


Figura 15 – Campo espinorial.

O que conecta essas representações é o comportamento da forma infinitesimal das transformações. Toda simetria contínua pode ser expressa como uma composição de infinitas transformações infinitesimalmente conectadas à identidade (ou seja, do tipo  $1 + i\alpha^k \mathcal{G}^k$  com  $|\alpha^k| \ll 1$ ). A rotação pelo ângulo  $\theta$  de um vetor  $\mathbf{v}$  em torno de um eixo  $\hat{\mathbf{n}}$ , por exemplo, pode ser escrita como:

$$\mathbf{v}' = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1_{3 \times 3} + i \frac{\theta}{N} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}_{3 \times 3} \right)^N \mathbf{v}, \quad (\mathbf{T}^k)_{ij} = -i\epsilon^{ijk}. \quad (2.45)$$

Isso se baseia no fato de que a rotação por  $\alpha$  infinitesimal pode ser dada por  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \alpha(\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{n}})$  se o sentido da rotação for horário quando  $\hat{\mathbf{n}}$  "sai" da página. A figura abaixo ilustra as etapas da transformação 2.45 com  $\theta = \pi$  para valores crescentes de  $N$  ( $\mathbf{v}$  é o vetor em verde,  $\hat{\mathbf{n}}$  em vermelho e os vetores em roxo correspondem a fazer o expoente em 2.45 variar de 1 a  $N$ ). Veja que a composição de transformações conectadas à identidade se aproxima da rotação por  $\pi$  com respeito a  $\hat{\mathbf{n}}$  conforme  $N \rightarrow \infty$ .

A equação 2.45 pode ser expressa de forma mais sucinta como:

$$\mathbf{v}' = \exp(i\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}) \mathbf{v}. \quad (2.46)$$

No geral, uma transformação contínua é expressa através de  $\exp(i\alpha^k \mathcal{G}^k)$ . (HAYWOOD, 2010) Os operadores  $\mathcal{G}^k$ , que conectam a forma infinitesimal da transformação à sua forma finita e contínua, são chamados de **geradores**. Com esse conceito, é possível conectar as representações vetorial e espinorial: ambas são produzidas a partir de geradores que obedecem à mesma álgebra. Para a representação vetorial:

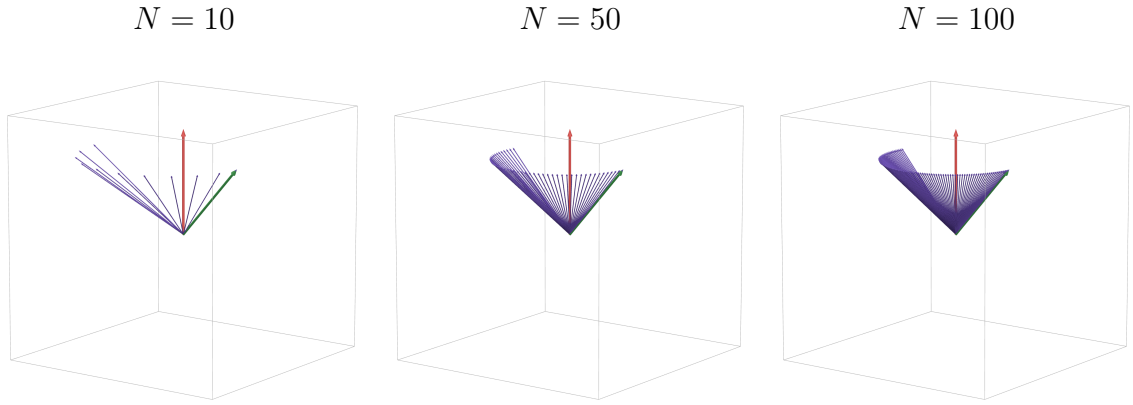


Figura 16 – Uma transformação contínua pode ser entendida como uma composição de infinitas transformações infinitesimais.

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \exp \left( -\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} \mathcal{I}^{\rho\sigma} \right)_{\nu}^{\mu} . \quad (2.47)$$

Sendo:

$$(\mathcal{I}^{\rho\sigma})_{\mu\nu} \equiv i(\delta_{\mu}^{\rho} \delta_{\nu}^{\sigma} - \delta_{\nu}^{\rho} \delta_{\mu}^{\sigma}) . \quad (2.48)$$

As componentes  $\omega^{ij}$  parametrizam as rotações e  $\omega^{0i}$ , os boosts. Para a representação espinorial, tem-se:

$$S(\Lambda)_B^A = \exp \left( -\frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma} \right)_B^A . \quad (2.49)$$

Sendo:

$$S^{\mu\nu} \equiv \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] . \quad (2.50)$$

Apesar de pertencerem a espaços diferentes, tanto  $\mathcal{I}^{\rho\sigma}$  quanto  $S^{\rho\sigma}$  formam representações para os geradores  $M^{\rho\sigma}$  do grupo de Lorentz, pois ambos obedecem à álgebra: (MÜLLER-KIRSTEN; WIEDEMANN, 2010)

$$[M^{\rho\sigma}, M^{\tau\nu}] = i(\eta^{\rho\nu} M^{\sigma\tau} + \eta^{\sigma\tau} M^{\rho\nu} - \eta^{\rho\tau} M^{\sigma\nu} - \eta^{\sigma\nu} M^{\rho\tau}) . \quad (2.51)$$

O teorema de Noether relaciona a simetria de rotação espacial ao momento angular. A transformação do campo devido à **mudança do ponto** produz o momento angular **orbital**, enquanto sua transformação **intrínseca** produz o momento angular de **spin**. O campo escalar tem spin 0, o vetorial tem spin 1 e o espinorial tem spin 1/2.

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= \phi(\Lambda^{-1}x) ; \\
A'(x) &= \Lambda \cdot A(\Lambda^{-1}x) ; \\
\psi'(x) &= S(\Lambda) \cdot \psi(\Lambda^{-1}x) .
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Os geradores formalizam essa identificação:  $S^{ij}$  corresponde aos operadores de spin na representação de spin 1/2 e  $\mathcal{I}^{ij}$ , na de spin 1.

Independente da representação do campo, a lagrangiana deve se transformar como uma função escalar. Unindo isso ao vínculo de que as equações de Euler-Lagrange devem produzir equações de Klein-Gordon para cada componente **isolada** do campo (que corresponde à relação  $p^2 - m^2 = 0$  escrita no espaço das posições), é possível determinar a lagrangiana livre para cada uma das representações: (PESKIN; SCHROEDER, 2007)

$$\mathcal{L}_{\text{Klein-Gordon}} = \frac{1}{2} \left[ (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2 \right] . \tag{2.53}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu . \tag{2.54}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi , \quad \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 . \tag{2.55}$$

### 2.3.3 Quiralidade vs. helicidade

Definindo  $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ , é possível mostrar que os operadores  $P_{L/R} \equiv \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$  se comportam como projetores:  $P_{L/R}^2 = P_{L/R}$  e  $P_{R/L}P_{L/R} = 0$ . Além disso,  $P_{R/L}S(\Lambda)P_{L/R} = 0$ , significando que o rótulo de um espinor  $\psi$  através desses projetores ( $\psi_{L/R} \equiv P_{L/R}\psi$ ) é invariante por Lorentz. Ele não é, porém, conservado (PESKIN; SCHROEDER, 2007). A relação de anti-comutação  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$  e a hermiticidade de  $\gamma^5$  implicam que com  $\bar{\psi}_{L/R} \equiv (\psi_{L/R})^\dagger \gamma^0$ :

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R ; \\
\bar{\psi}\psi &= \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L .
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Essas quantidades são, respectivamente, o vetor e o escalar que compõem a lagrangiana de Dirac 2.55. Veja que o escalar aparece acompanhado da massa e introduz uma mistura entre os rótulos L e R. Ou seja, para uma partícula de spin 1/2 com massa, o rótulo L/R não é conservado.

Na base definida por 2.30,  $\gamma^5 = \text{diag}(-1, 1)$ , de modo que para  $\psi^T = (\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4)$ , tem-se  $\psi_L^T = (\psi_1 \ \psi_2 \ 0 \ 0)$  e  $\psi_R^T = (0 \ 0 \ \psi_3 \ \psi_4)$ . A afirmação de que o rótulo L/R é invariante de Lorentz (ou, em outras palavras, que  $\psi_L$  e  $\psi_R$  formam representações irredutíveis do



espaço espinorial) é evidente nessa base, já que  $S(\Lambda)$  aparece diagonal. Para a rotação da equação 2.45 ( $\omega_{ij} = -\omega_j^i = -i\theta\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}_{ij} = -\theta\epsilon_{ijk}\hat{\mathbf{n}}^k$ ), tem-se:

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \exp\left(i\frac{\theta}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\theta}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Para um boost  $\omega_{0i} = \chi_i$ :

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(+\frac{1}{2}\boldsymbol{\chi} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

A observação de que  $L \leftrightarrow R$  mantém o parâmetro de rotação fixo mas inverte o sinal do parâmetro de boost sugere que esse rótulo possui relação com a transformação de paridade ( $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}, t \rightarrow t$ ), dado que apenas o boost relaciona uma coordenada espacial com uma temporal. A rotação relaciona duas coordenadas espaciais que se transformam igualmente sob paridade, então ela é incapaz de sentir o efeito dessa transformação. Por esse motivo, denota-se  $\psi_L$  como espinor de mão esquerda e  $\psi_R$  como espinor de mão direita, com o rótulo L/R sendo chamado de quiralidade (daí o nome da base 2.30). O espinor se transforma como  $\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \gamma^0\psi(-\mathbf{x}, t)$  sob paridade, já que a matriz  $\gamma^0$  tem as propriedades esperadas dessa transformação: ela é sua própria inversa e efetua uma troca de quiralidade,  $P_{L/R}\gamma^0 = \gamma^0 P_{R/L}$ .

A quiralidade não deve ser confundida com a helicidade, que corresponde a uma projeção do spin na direção de momento linear. A segunda é conservada e não é invariante de Lorentz, já que é possível inverter o sentido do momento linear através de um boost mantendo o spin no mesmo sentido. Há, entretanto, um cenário em que as duas se tornam equivalentes: o caso de massa nula. Nessa situação, a quiralidade passa a ser conservada assim como a helicidade, já que o termo de massa que acopla o espinor de mão esquerda com o de mão direita desaparece. Além disso, a helicidade passa a ser invariante de Lorentz assim como a quiralidade, já que uma partícula de massa nula se propaga à velocidade da luz e torna impossível que se inverta seu momento através de um boost. De fato, escrevendo o operador helicidade como  $h \equiv \epsilon_{ijk}\hat{\mathbf{p}}^i S^{jk}$ , encontra-se: (PESKIN; SCHROEDER, 2007)

$$h\psi_{L/R} = \mp \frac{1}{2}\psi_{L/R} \quad (m = 0). \quad (2.59)$$

Isso explica por que a escolha de  $\frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$  como projetor de mão esquerda/direita, e não o contrário: no limite de massa nula, a quiralidade do espinor corresponde a que tipo de "hélice" seu spin faz enquanto ele se move (veja a figura 17).

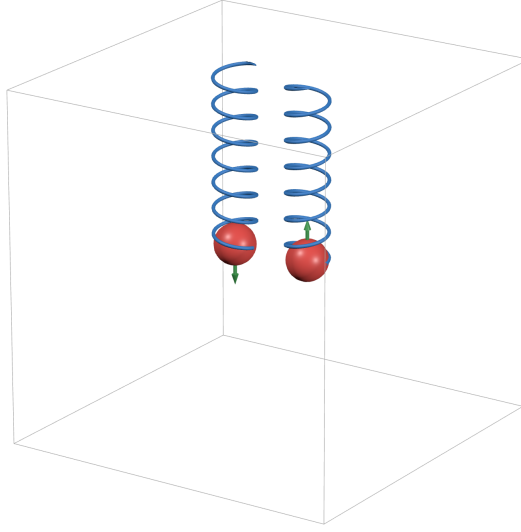


Figura 17 – Motivação para o nome "helicidade" baseada na imagem heurística do spin (desqualificada como uma possível explicação fundamental na subseção 2.1.1). As partículas se movem para cima na figura e o vetor em verde representa o spin. Um ponto na superfície da partícula de helicidade  $-1/2$  segue um trajeto de hélice de mão esquerda, enquanto o de helicidade  $+1/2$  segue uma hélice de mão direita.

Apesar do nome "helicidade", note que o spin é entendido agora como a carga associada (através do teorema de Noether) a como o campo se transforma através da simetria de Lorentz. Isso completa a demolição da ideia de uma esfera girante.

### 2.3.4 Teoria de Campos Quântica

A lagrangiana 2.55 produz como equação de movimento a mesma equação que foi derivada por Dirac, 2.31. Entretanto, há uma diferença crucial na interpretação: o espinor  $\psi(x)$  deixa de ser uma função de onda e passa a ser um campo. Até agora esse campo foi tratado de forma puramente clássica. O que resta ser feito é quantizá-lo, ou seja, convertê-lo em operador sobre um espaço de Hilbert: essa é chamada de segunda quantização (já que a primeira corresponde a transformar apenas os observáveis em operadores e tratar de funções de onda). O espinor livre, por exemplo, passa a ser expandido na forma:

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2E_{\mathbf{p}})^{\frac{1}{2}}} \left[ \textcolor{red}{a}_s(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + \textcolor{red}{b}_s^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) e^{+ip \cdot x} \right] . \quad (2.60)$$

É adotada a normalização de PESKIN; SCHROEDER. O índice  $s$  indica o spin ( $s = \pm 1/2$ ). Os elementos em vermelho são operadores escada no espaço de Hilbert, sendo  $a$  ( $b$ ) operadores de aniquilação de partícula (anti-partícula) e  $a^\dagger$  ( $b^\dagger$ ) operadores de

criação de partícula (anti-partícula)<sup>3</sup>. Essa expansão é feita em analogia com o formalismo algébrico do oscilador harmônico quântico. Em preto, tem-se uma transformada de Fourier de soluções de onda plana da equação de Dirac. A ideia de as soluções das equações de movimento serem campos quantizados e não funções de onda resolve, por exemplo, o problema da causalidade. Além disso, ela prova a conexão entre spin e estatística: campos de spin semi-inteiro devem ser quantizados a partir de relações de anti-comutação, resultando em  $\{a_s^\dagger(\mathbf{p}), a_r^\dagger(\mathbf{q})\} = 0 \rightarrow a_s^\dagger(\mathbf{p})a_r^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle = -a_r^\dagger(\mathbf{q})a_s^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ . Já campos de spin inteiro devem ser quantizados a partir de relações de comutação, resultando em  $[a_s^\dagger(\mathbf{p}), a_r^\dagger(\mathbf{q})] = 0 \rightarrow a_s^\dagger(\mathbf{p})a_r^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle = +a_r^\dagger(\mathbf{q})a_s^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ . Um estado de multi-partículas simétrico (anti-simétrico) sob permutação entre seus elementos indica uma estatística bosônica (fermiônica), implicando que campos de spin inteiro geram bósons enquanto campos de spin semi-inteiro geram férmions. (PESKIN; SCHROEDER, 2007)

Mas o maior sucesso da Teoria Quântica de Campos está na sua capacidade de fazer previsões sobre processos físicos. Quando se introduzem interações, torna-se impossível resolver as equações de movimento analiticamente. O que se faz então é calcular as quantidades relevantes para processos físicos (como a seção de choque) através de teoria perturbativa, que faz uso das expressões obtidas na teoria livre para computar quantidades referentes à teoria com interações. Os termos na expansão perturbativa podem ser ilustrados através dos chamados **diagramas de Feynman**, com cada elemento do grafo correspondendo a uma expressão analítica. O campo 2.60, por exemplo, está associado aos processos ilustrados na figura 18.

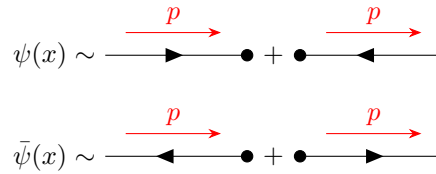


Figura 18 – Operadores escada.

Convencionou-se que quando o fluxo fermiônico é paralelo ao sentido do momento, trata-se de um férmion: caso contrário, é um anti-férmion. Uma consequência é que o termo de massa fermiônico pode ser expresso pelo diagrama da figura 19.



Figura 19 – Termo de massa fermiônico.

<sup>3</sup> Veja que aqui a anti-partícula aparece como um outro tipo de excitação do campo, e não como o buraco indicativo da ausência de partícula que Dirac usou em sua abordagem (figura 12).

Formalmente, os diagramas de Feynman correspondem ao elemento de matriz invariante  $i\mathcal{M}(i \rightarrow f)$  presente no cálculo da amplitude associada ao processo em que  $|i\rangle$  no passado assintótico ( $|i; t = -\infty\rangle$ ) se torna  $|f\rangle$  no futuro assintótico ( $|f; t = +\infty\rangle$ ):

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle f; \tau | i; -\tau \rangle \equiv \langle f | S | i \rangle = \delta_{if} + i\mathcal{M}(i \rightarrow f) \cdot (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) . \quad (2.61)$$

A parte trivial da matriz  $S$ ,  $S = 1$ , corresponde à delta na última expressão e descreve os processos em que nenhuma interação ocorre, logo o estado final deve ser idêntico ao inicial. Os diagramas de Feynman estão associados à parte não trivial de  $S$  e correspondem à expressão analítica: (PESKIN; SCHROEDER, 2007)

$$i\mathcal{M}(i \rightarrow f) \cdot (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) = \langle f_0 | T \exp \left( i \int d^4x \mathcal{L}_{int0} \right) | i_0 \rangle . \quad (2.62)$$

O operador  $T$  é o chamado operador de ordenamento temporal. Todas as quantidades no lado direito são calculadas de acordo com a teoria livre, daí o subscrito 0 e a abordagem perturbativa. A exponencial é expandida em série em função de um parâmetro adimensional extraído da lagrangiana. Geralmente a menor ordem já aproxima de forma excelente a amplitude observada, com os termos de ordens superiores funcionando como correções. Isso, é claro, supõe que o parâmetro adimensional é menor que 1 e portanto suas potências se tornam cada vez menores. Esse é o caso, por exemplo, da carga elétrica  $e$  (ou a constante de estrutura fina  $\alpha$ ) associada à QED.

## 2.4 Correções radiativas na QED

### 2.4.1 O desvio de Lamb e a renormalização da massa

Em 1947, medições feitas por Lamb e Retherford mostraram um desvio na ordem de micro-ondas entre os estados  $2s_{1/2}$  e  $2p_{1/2}$  do átomo de hidrogênio (LAMB; RETHERFORD, 1947): foi encontrado que  $E(2s_{1/2}) - E(2p_{1/2}) \sim 1000$  MHz. Isso impulsionou o desenvolvimento da Eletrodinâmica Quântica (QED), que era a única teoria capaz de explicar essa pequena diferença entre estados que - na abordagem de Dirac - deveriam ser degenerados. Nesse novo paradigma, o termo de interação na lagrangiana  $\mathcal{L}_{QED} \supset e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$  permite que o elétron no átomo de hidrogênio emita e reabsorva fótons *ad infinitum* (de acordo com 2.62), o que altera seus níveis de energia e é chamado portanto de auto-energia fermiônica.

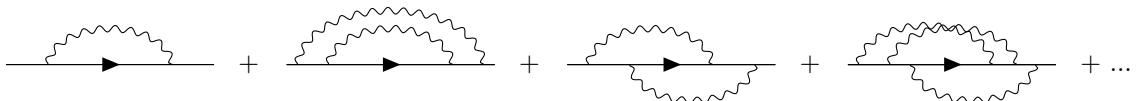


Figura 20 – Auto-energia fermiônica.

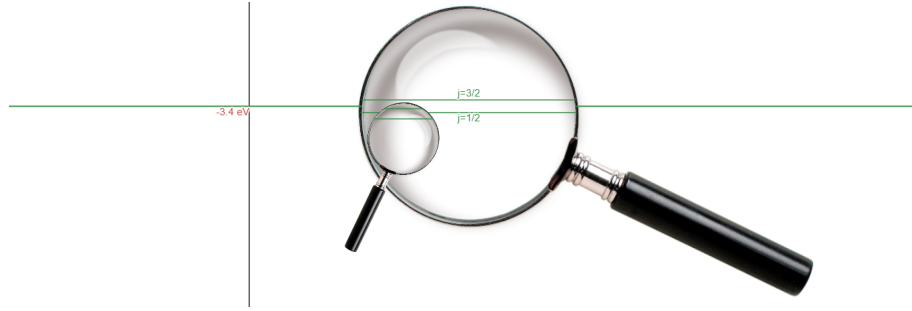


Figura 21 – Ilustração do efeito Lamb.

O efeito dessas partículas virtuais (ou propagadores), que recebem esse nome por não poderem ser observadas diretamente, era em princípio divergente. A conservação de momento não restringe os momenta individuais dos propagadores em loop (apenas a soma entre eles), então é necessário integrar sobre todos os possíveis valores como ilustrado na figura 22.

$$\text{Diagram with momentum } p \text{ and } p \text{ connected by a wavy line} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Diagram with momentum } p \text{ and } p-k \text{ connected by a wavy line with momentum } k \text{ in the loop}$$

Figura 22 – Integral no momento.

É essa integral que produz os infinitos indesejados.

Hans Bethe percebeu que para um elétron livre, a auto-energia corresponde simplesmente a uma redefinição da massa do férmion (na verdade, o primeiro a propor essa ideia foi Kramer, mas Bethe fez o cálculo explicitamente; veja MITRA). Se o férmion existisse isolado, ele teria uma massa imaginada  $m_0$ . Entretanto, as interações com fótons virtuais da QED transformam  $m_0$  numa nova massa  $m$ . Apenas esse novo valor pode ser observado, já que medições exigem (por definição) que haja interações. Então para calcular o desvio nos níveis de energia do átomo de hidrogênio, é necessário subtrair o valor da auto-energia do elétron livre, pois essa parte já está incorporada no fato de que se usa a massa física do elétron e não sua massa imaginada. O que resta é um resultado finito que concorda com as medições feitas por Lamb e Retherford. O infinito presente na redefinição da massa acaba não sendo importante no fim das contas, já que ele relaciona uma quantidade física ( $m$ ) a um parâmetro não físico ( $m_0$ ).

Mesmo dependendo da filosofia da Teoria Quântica de Campos, o cálculo original de Bethe tratou o elétron de forma não relativística, usando seu estado predito pela equação de Schrödinger, e quantizou apenas o fóton  $\mathbf{A}$  (BETHE, 1947). Usou-se teoria perturbativa independente do tempo de segunda ordem (já que o fóton é emitido e reabsorvido) com a hamiltoniana de interação correspondendo a  $H_I = (e/m)\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$  (obtida inserindo o acoplamento mínimo na energia cinética do elétron): (GRIFFITHS, 2005; MANDL; SHAW,

1993)

$$\delta E(nl) = - \sum_{|\mathbf{k}|} \sum_{\lambda} \sum_{r=1,2} \frac{|\langle \lambda, n_r(\mathbf{k}) = 1 | H_I | nl \rangle|^2}{E_{\lambda} + |\mathbf{k}| - E_n} . \quad (2.63)$$

Entendendo que o fóton tem momento  $k$  contínuo e introduzindo o fator de normalização relativístico  $(2k)^{-1}$  na integral em  $k$  (que é um resquício da expansão do campo do fóton em operadores escadas feita de forma análoga a 2.60), a expressão acima se torna:

$$\delta E(nl) = - \left( \frac{e}{m} \right)^2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \sum_{\lambda} \sum_{r=1,2} \frac{|\langle \lambda | \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{p} | nl \rangle|^2}{E_{\lambda} + |\mathbf{k}| - E_n} . \quad (2.64)$$

O fóton aqui é transversal ( $\hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ ), significando que para um ângulo  $\theta_k$  entre seu momento e o do elétron:

$$\sum_{r=1,2} |\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}|^2 + |\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{p}|^2 = |\mathbf{p}|^2 \quad \therefore \sum_{r=1,2} |\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}|^2 = |\mathbf{p}|^2 (1 - \cos^2 \theta_k) . \quad (2.65)$$

Fazendo  $d^3 \mathbf{k} = k^2 dk \cdot 2\pi \cdot d(\cos \theta_k)$ , obtém-se:

$$\delta E(nl) = - \frac{1}{6\pi^2} \left( \frac{e}{m} \right)^2 \int_0^{\infty} |\mathbf{k}| dk \sum_{\lambda} \frac{|\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2}{E_{\lambda} + |\mathbf{k}| - E_n} . \quad (2.66)$$

Veja que aparece uma divergência linear no momento, correspondendo à redefinição da massa. O mesmo acontecia no eletromagnetismo clássico se a massa fosse interpretada como a energia carregada pelo elétron por ele estar inserido no seu próprio campo eletrostático, como foi feito na equação 2.6. Lá o problema era resolvido estipulando que o elétron tem um raio não nulo e portanto um corte é feito na integral para a energia. Se esse corte for a zero, o campo elétrico vai a infinito e a divergência reaparece (veja a figura 23). Aqui a mesma ideia de cortar a integral numa escala de energia suficientemente alta (ou uma escala de comprimento suficientemente pequena) será implementada, chamada de regularização. Mas a outra etapa é a renormalização, que corresponde a subtrair a auto-energia da partícula livre.

Considerando que os níveis de energia da partícula livre são contínuos e estão associados a autoestados de momento, deve ser feito:

$$\sum_{\lambda} \rightarrow \int \frac{d^3 \boldsymbol{\lambda}}{(2\pi)^3 V} , \quad |\lambda\rangle \rightarrow \frac{1}{V^{1/2}} |\boldsymbol{\lambda}\rangle , \quad (2.67)$$

sendo  $V$  o volume espacial que se relaciona à delta de Dirac no zero:

$$V = \int d^3 x e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{q}=0} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{q}) \Big|_{\mathbf{q}=0} . \quad (2.68)$$

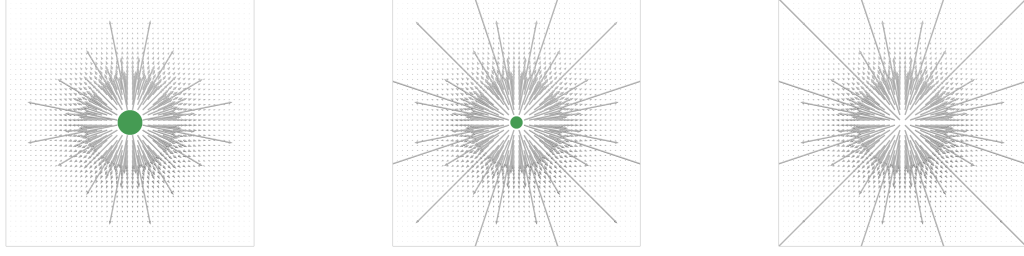


Figura 23 – Divergência clássica na massa, conforme o raio vai a zero.

Usando  $|\langle \lambda | \mathbf{p} | \lambda' \rangle|^2 = \lambda^2 (2\pi)^3 \delta^3(\lambda - \lambda') (2\pi)^3 \delta^3(0)$  e a equação acima, tem-se:

$$\delta E_f(\lambda') = -\frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \lambda'^2 \int_0^\infty dk . \quad (2.69)$$

Já que o estado  $|nl\rangle$  tem uma distribuição de momento, obtém-se:

$$\delta E_f(nl) = -\frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \langle nl | \mathbf{p}^2 | nl \rangle \int_0^\infty dk . \quad (2.70)$$

O verdadeiro desvio na energia é dado então por:

$$\begin{aligned} \Delta E(nl) &= \delta E(nl) - \delta E_f(nl) \\ &= -\frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \left( \int_0^\infty |\mathbf{k}| dk \sum_\lambda \frac{|\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2}{E_\lambda + |\mathbf{k}| - E_n} - \sum_\lambda \langle nl | \mathbf{p} | \lambda \rangle \langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle \int_0^\infty dk \right) \\ &= \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_\lambda |\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2 \int_0^\infty dk \frac{E_\lambda - E_n}{E_\lambda - E_n + |\mathbf{k}|} . \end{aligned} \quad (2.71)$$

Essa integral é formalmente divergente. Entretanto, Bethe percebeu que ela produz uma função que é insensitiva a variações no argumento quando  $k \rightarrow \infty$ : o logaritmo (a comparação entre o comportamento linear e logarítmico está ilustrada na figura 24). Então o que ele fez foi efetuar um "corte" na integral num valor  $K$  suficientemente grande. Pelo mesmo motivo da insensitividade do logaritmo, ele pode ser retirado da soma sobre os estados  $\lambda$  com o fator  $|E_\lambda - E_n|$  trocado por uma média  $\langle E - E_n \rangle$  (quando encontrado no argumento do logaritmo). Isso produz:

$$\begin{aligned} \Delta E(nl) &= \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_\lambda |\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2 (E_\lambda - E_n) \ln \frac{K}{|E_\lambda - E_n|} \\ &= \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \ln \frac{K}{\langle E - E_n \rangle} \sum_\lambda |\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2 (E_\lambda - E_n) . \end{aligned} \quad (2.72)$$

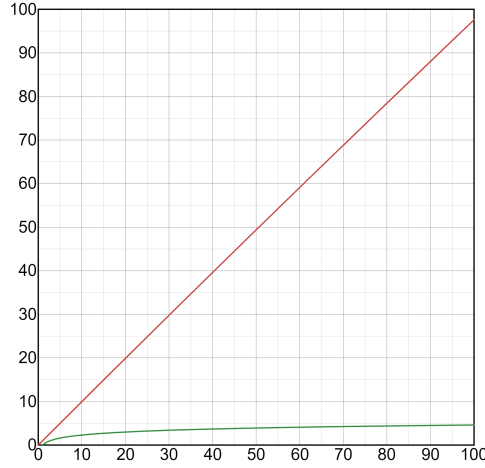


Figura 24 – Comportamento linear (em vermelho) vs logarítmico (em verde).

A única parte que falta ser analisada é a soma em  $\lambda$ . Devido à hermiticidade do operador momento:

$$\sum_{\lambda} |\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2 (E_{\lambda} - E_n) = \sum_{\lambda} \mathbf{p}_{\lambda n} \mathbf{p}_{n\lambda} (E_{\lambda} - E_n) . \quad (2.73)$$

A expressão acima pode ser reescrita em termos do comutador  $[\mathbf{p}, [H, \mathbf{p}]]_{nn}$ , onde a hamiltoniana poderá ser trocada pelo potencial já que a parte cinética comuta com  $\mathbf{p}$ .

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}, [H, \mathbf{p}]]_{nn} &= 2 \langle nl | \mathbf{p} H \mathbf{p} | nl \rangle - \langle nl | \mathbf{p}^2 H | nl \rangle - \langle nl | H \mathbf{p}^2 | nl \rangle \\ &= 2 \sum_{\lambda} \langle nl | \mathbf{p} | \lambda \rangle \langle \lambda | H \mathbf{p} | nl \rangle - 2 E_n \sum_{\lambda} \langle nl | \mathbf{p} | \lambda \rangle \langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle \\ &= 2 \sum_{\lambda} (E_{\lambda} - E_n) \mathbf{p}_{n\lambda} \mathbf{p}_{\lambda n} . \end{aligned} \quad (2.74)$$

Por outro lado, devido à associação  $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla$ :

$$[\nabla, [f(\mathbf{x}), \nabla]]g(\mathbf{x}) = \nabla \cdot (f \nabla g) - \nabla^2(fg) - f \nabla^2 g + \nabla \cdot (f \nabla g) = (-\nabla^2 f)g . \quad (2.75)$$

A quantidade de interesse é então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\mathbf{p}, [H, \mathbf{p}]]_{nn} &= \frac{1}{2} \left[ -i\nabla, \left[ -\frac{e^2}{4\pi r}, -i\nabla \right] \right]_{nn} = \frac{e^2}{8\pi} [\nabla, [r^{-1}, \nabla]]_{nn} \\ &= \frac{e^2}{8\pi} \langle nl | 4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x}) | nl \rangle = \frac{e^2}{2} |\Psi_{nl}(0)|^2 . \end{aligned} \quad (2.76)$$

A simetria esférica do potencial de Coulomb implica que a função de onda pode ser separada num produto entre uma parte radial e uma angular:  $\Psi_{nlm}(\mathbf{x}) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$ .



As ondas s ( $l = 0$ ) não possuem dependência angular e a densidade de probabilidade é não nula no núcleo: ela está ilustrada para o estado 2s através da opacidade na figura 25. Mas ondas p ( $l = 1$ ) possuem uma dependência angular, então a função de onda só pode ser contínua no zero se  $R_{nl}(0)$  for nulo (veja a figura 26). Portanto,  $|\Psi_{nl}(0)|^2 \sim \delta_{l0}$  e a separação entre os níveis 2s e 2p é explicada.

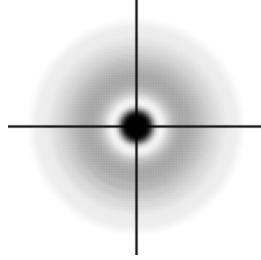


Figura 25 – Densidade de probabilidade do estado 2s do átomo de hidrogênio ( $n = 2, l = 0$ ). A função de onda possui uma dependência puramente radial.

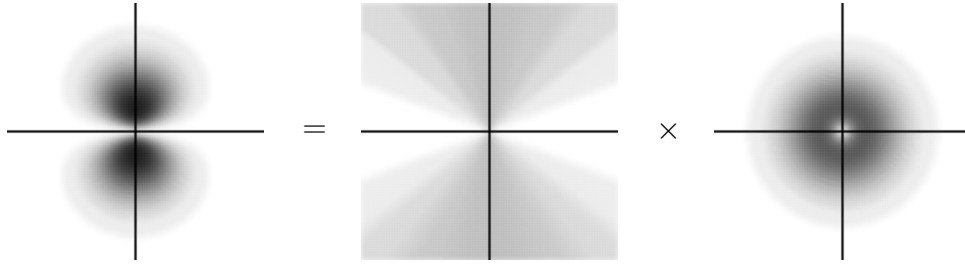


Figura 26 – Densidade de probabilidade do estado 2p do átomo de hidrogênio ( $n = 2, l = 1$ ). Veja que ela pode ser expressa como um produto entre uma dependência puramente radial e outra puramente angular.

Note que através de um simples cálculo não relativístico ( $|\mathbf{k}| \ll m$ ), Bethe foi capaz de explicar o efeito Lamb. De fato, substituindo  $K = m$  para o corte,  $\langle E - E_n \rangle = 17.8 \text{ Ry}$  e  $|\Psi_{nl}(0)|^2 = (\pi a^3 n^3)^{-1} \delta_{l0}$ , o resultado 2.72 chega bem próximo ao valor medido em 1953 de  $1057.8 \pm 0.1 \text{ MHz}$ : (MANDL; SHAW, 1993)

$$\Delta E = 1040 \text{ MHz} . \quad (2.77)$$

A pequena discrepância é eliminada no tratamento relativístico completo com inclusão de outros efeitos do vácuo, como o efeito de produção de pares virtuais fermiônicos (BARANGER; BETHE; FEYNMAN, 1953). Na verdade, o efeito Lamb para o elétron pode receber a maior parte da contribuição da auto-energia, mas para o múon, que tem uma massa maior, a contribuição principal é da produção de pares, chamada de polarização do vácuo (veja a próxima seção).

Uma reclamação que pode ser feita é que o desvio de Lamb, apesar de variar lentamente com o corte, ainda diverge no tratamento de Bethe. Isso é contornado numa análise relativística, que mostra que o que pareceu uma divergência linear na massa é na

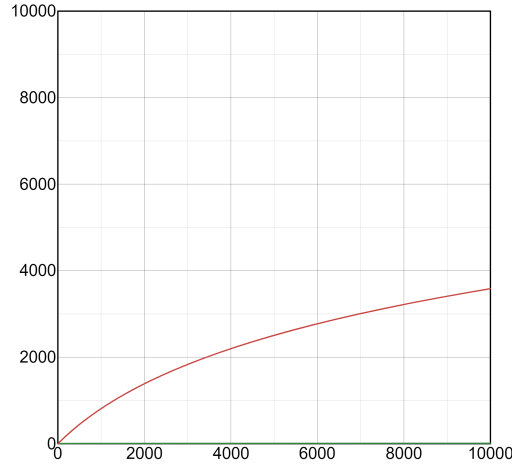


Figura 27 – O comportamento que pareceu linear na figura 24 se revela logarítmico a altas energias. Portanto, o desvio de Lamb é formalmente finito.

verdade logarítmica (veja a figura 27). Um corte na escala de energia  $\Lambda$  resulta na seguinte redefinição da massa: (MANDL; SHAW, 1993)

$$\delta m = m - m_0 = \frac{3\alpha}{2\pi} m \ln \left( \frac{\Lambda}{m} \right) . \quad (2.78)$$

Logo, a divergência no efeito Lamb é apenas aparente a baixas energias. Nasce aqui a ideia de que uma vez subtraído o infinito através da regularização e posterior renormalização, o que sobra é finito e pode ser medido. Esse efeito observável é chamado de **correção radiativa**. A anomalia magnética resultará desse mesmo conceito (seção 2.4.3).

O comportamento apresentado na equação 2.78 pode ser entendido de forma simples recordando que a massa de um férmion corresponde ao processo de troca de quiralidade. Logo, se a partícula tem massa nula ou próxima de zero, sua quiralidade é conservada e se encontra associada a uma simetria (chamada de simetria quiral). A regularização da teoria deve manter as simetrias presentes originalmente, então  $\delta m$  deve ir a zero conforme  $m$  vá a zero. A forma de satisfazer isso é através de 2.78. A constante  $\alpha$  é esperada da expansão perturbativa. Portanto, o cálculo de 2.78 se resume a demonstrar o fator  $3 \cdot (2\pi)^{-1}$ .

### 2.4.2 A renormalização da carga elétrica

A renormalização da massa absorve a quantidade divergente  $\delta m$  na redefinição da massa  $m_0$  presente na lagrangiana numa massa física  $m$ :

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \therefore \mathcal{L}_{\text{int}} = e_0 \bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu , \quad (2.79)$$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ie_0 A_\mu .$$

Porém, isso não elimina todos os infinitos da teoria. Ainda existem divergências associadas a cada termo da lagrangiana: o fóton, o férmion e a interação (ou vértice). Usando as regras de Feynman, os propagadores são modificados da seguinte maneira (que está ilustrada na figura 28): (MANDL; SHAW, 1993)

$$\begin{aligned} \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} (ie^2 \Sigma(p)) \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} + \dots &= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \cdot Z_2 - e^2 \frac{iZ_2}{\not{p} - m + i\epsilon} \Sigma_c(p) ; \\ \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} + \left( \frac{-ig_{\mu\alpha}}{q^2 + i\epsilon} \right) (ie^2 \Pi^{\alpha\beta}(q)) \left( \frac{-ig_{\beta\nu}}{q^2 + i\epsilon} \right) + \dots &= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \cdot Z_3 + e^2 \frac{iZ_3 g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \Pi_c(q) . \end{aligned} \quad (2.80)$$

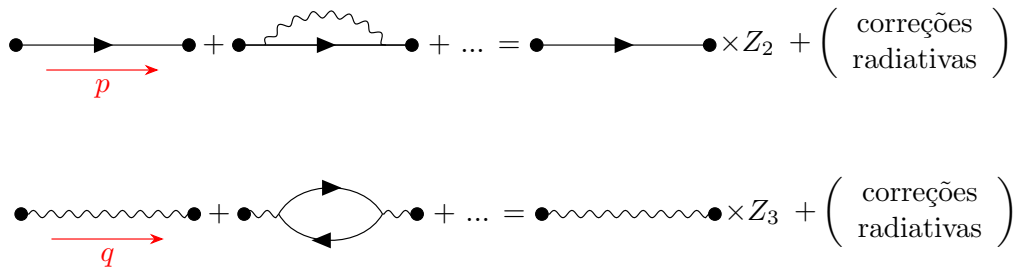


Figura 28 – Renormalização dos propagadores.

As quantidades divergentes são  $Z_2$  e  $Z_3$ . O subscrito c indica as correções radiativas. A modificação das linhas externas (ou seja, os elementos do diagrama que "vão a infinito" e podem ser observados) é dada por (veja a figura 29):

$$\begin{aligned} u(p) + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} (ie^2 \Sigma(p)) u(p) + \dots &= u(p) \cdot Z_2^{1/2} ; \\ \epsilon^\mu(q) + \frac{-ig^{\mu\alpha}}{q^2 + i\epsilon} (ie^2 \Pi_{\alpha\beta}(q)) \epsilon^\beta(q) + \dots &= \epsilon^\mu(q) \cdot Z_3^{1/2} . \end{aligned} \quad (2.81)$$

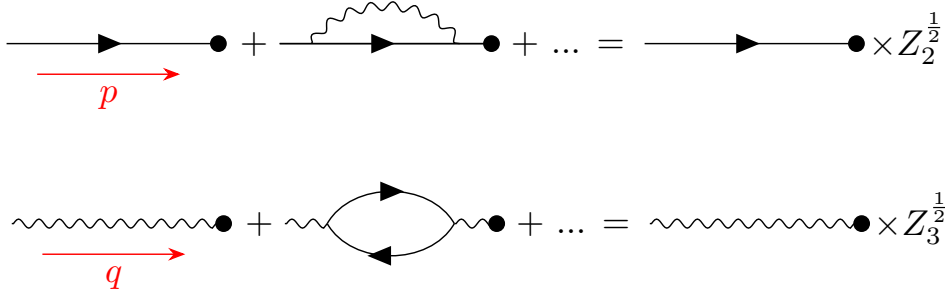


Figura 29 – Renormalização das linhas externas.

A comparação entre a renormalização dos propagadores e das linhas externas permite extrair a seguinte conclusão:

A renormalização pode ser efetuada nos vértices, correspondendo a uma modificação da carga elétrica de  $e_0$  para  $e$ .

A última quantidade divergente ( $Z_1$ ) aparece na redefinição do vértice (figura 30):

$$ie_0\gamma^\mu + e^2(ie_0\Lambda^\mu) + \dots = ie_0\gamma^\mu \cdot Z_1^{-1} + e^2(ie_0\Lambda_c^\mu)Z_1^{-1} . \quad (2.82)$$

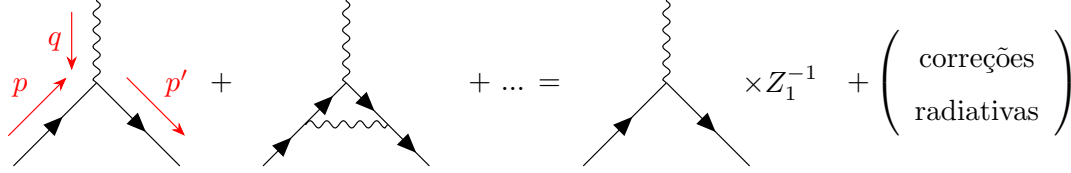


Figura 30 – Renormalização do vértice.

Note que o cenário de partícula livre é recuperado quando o fóton externo no vértice modificado tem momento que tende a zero. Nesse limite, o loop se assemelha à auto-energia fermiônica. O fato de a renormalização depender da situação de partícula livre, como foi sugerido por Bethe, resulta na segunda conclusão:

A renormalização da auto-energia fermiônica se relaciona à do vértice modificado. Um pouco de manipulação mostra que  $Z_1 = Z_2$ .

As duas conclusões obtidas permitem inferir que as 3 quantidades divergentes  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$  podem ser todas absorvidas na renormalização da carga elétrica. Já que há 2 férmions e 1 fóton para cada 1 vértice, obtém-se:

$$e_0 \rightarrow e = e_0 \left( Z_3^{1/2} \right)^1 \left( Z_1^{-1} \right)^1 \left( Z_2^{1/2} \right)^2 = e_0 Z_3^{1/2} . \quad (2.83)$$

A interpretação desse resultado é que os pares férmion-anti-férmion, que geram a quantidade divergente  $Z_3$ , produzem uma polarização do vácuo que blindar a carga elétrica. Esse efeito de blindagem está ilustrado abaixo.

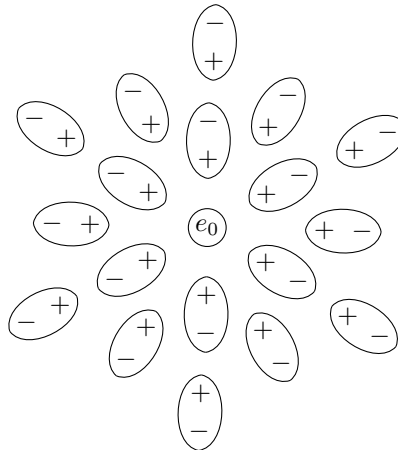


Figura 31 – Polarização do vácuo.

Para redefinir a carga elétrica, porém, é necessário introduzir um novo tipo de regularização. Para o caso da renormalização da massa, bastava fazer um "corte" na integral da auto-energia:

$$ie^2\Sigma(p) = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{p} - \not{k} + m)}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} . \quad (2.84)$$

Esse corte é efetuado formalmente substituindo o propagador do fóton por um que possua uma pequena massa  $\lambda \rightarrow 0$  (pois há também uma divergência do tipo infravermelho, ou seja, de baixas energias, sempre que aparece um fóton virtual no loop) subtraído do propagador para uma escala de massa  $\Lambda \rightarrow \infty$  responsável por regularizar a divergência do tipo ultravioleta (de altas energias):

$$\frac{1}{k^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon} = \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} f(k^2, \Lambda^2) ; \quad (2.85)$$

$$f(k^2, \Lambda^2, \lambda^2) = \frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2} .$$

Note que o fator de regularização  $f$  vai a 1 para  $\Lambda \rightarrow \infty$ , recuperando a QED original. Para  $\Lambda$  grande, mas finito, ele alivia a divergência presente na integral e permite concluir que:

$$\delta m = \frac{1}{2m} \bar{u}(p)(ie^2\Sigma(p))u(p) = \frac{3\alpha}{2\pi} m \ln \left( \frac{\Lambda}{m} \right) . \quad (2.86)$$

Esse é precisamente o resultado mencionado em 2.78. O sucesso desse método de regularização para o caso do efeito Lamb, por exemplo, pode fazer parecer que ele também deve funcionar para a renormalização da carga elétrica, associada à polarização do vácuo:

$$ie^2\Pi^{\mu\nu}(q) = e^2(-1)\text{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} i\gamma^\mu \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} i\gamma^\nu \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} . \quad (2.87)$$

A modificação da integral seria agora pelo fator  $f(p^2, \Lambda^2, 0)^2$ : é feito  $\lambda = 0$  porque não aparece um propagador fotônico na polarização do vácuo e o fator é elevado ao quadrado porque a divergência agora é em princípio quadrática em vez de linear. Entretanto, isso resulta numa massa  $M$  para o fóton que depende do corte  $\Lambda$ : (PESKIN; SCHROEDER, 2007)

$$ie^2\Pi^{\mu\nu} \propto e^2\Lambda^2 g^{\mu\nu} \quad \therefore M \propto e\Lambda . \quad (2.88)$$

Sendo que a massa do fóton é protegida como zero pela simetria de gauge da carga elétrica (que será discutida adiante). Isso motiva a introdução de um novo método de

regularização que mantenha a simetria de gauge: essa é a regularização dimensional, onde o número de dimensões é modificado no lugar do intervalo permitido de energias. Em vez de trabalhar em 4 dimensões espaço-temporais, as integrais são feitas em  $D = 4 - \eta$  dimensões com  $\eta \rightarrow 0$  no final. Isso produz: (PESKIN; SCHROEDER, 2007; MANDL; SHAW, 1993)

$$ie^2\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \cdot ie^2\Pi(q^2) \quad (2.89)$$

$$\therefore \frac{e^2 - e_0^2}{e_0^2} = \Pi(0) \approx -\frac{2\alpha}{3\pi\eta}.$$

A identidade de Ward ( $q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0$ ), uma condição necessária para a conservação de carga elétrica, agora é respeitada. Note que a carga imaginada é infinitamente maior que a carga física. Mas essa renormalização não é observada. Na verdade, o que se observa são as correções radiativas associadas à quantidade:

$$e^2 \hat{\Pi}(q^2) = e^2(\Pi(q^2) - \Pi(0)) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left( \frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right). \quad (2.90)$$

Esse efeito finito é observado, por exemplo, no potencial de Uehling a baixas energias (que contribui levemente para o desvio de Lamb do elétron e tem uma importância bem maior no desvio de Lamb do múon WALCHER):

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \left( 1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} + \dots \right). \quad (2.91)$$

E também na ideia de que a carga elétrica muda de forma efetiva com a escala de energia:

$$\alpha_{\text{eff}}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left( -\frac{q^2}{e^{5/3} m^2} \right)}. \quad (2.92)$$

A ideia de uma constante de acoplamento que varia com a escala de energia (ou, equivalentemente, com a distância) será importante quando for discutida a contribuição da QCD para o  $g - 2$ .

### 2.4.3 O momento magnético revisitado

A modificação no vértice corresponde à substituição (leia a figura 30 com o tempo da esquerda para a direita):

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \rightarrow \bar{u}(p') \Gamma^\mu(p, p') u(p) = \bar{u}(p') (\gamma^\mu + e^2 \Lambda^\mu(p, p')) u(p). \quad (2.93)$$

É possível conhecer mais sobre  $\Gamma^\mu$  mesmo antes de resolver a integral, bastando usar a identidade de Ward ( $q_\mu \Gamma^\mu = 0$  com  $q = p' - p$ ) e a identidade de Gordon: (PESKIN;

SCHROEDER, 2007)

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left( \frac{(p' + p)^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \right) u(p) . \quad (2.94)$$

Escrevendo (sem perda de generalidade)  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu \cdot A(q^2) + (p' + p)^\mu \cdot B(q^2) + (p' - p)^\mu \cdot C(q^2)$ , a primeira identidade implica que  $C = 0$  - já que  $\bar{u}(p')(\not{p}' - \not{p})u(p) = (\bar{u}(p')m)u(p) - \bar{u}(p')(mu(p)) = 0$  e  $q_\mu(p + p')^\mu = m^2 - m^2 = 0$  - e a segunda identidade implica que o termo de coeficiente  $B(p + p')^\mu$  pode ser escrito em termos de  $\gamma^\mu$  e  $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ . Ou seja:

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2) . \quad (2.95)$$

As funções  $F_1$  e  $F_2$  são chamadas de fatores de forma. Em menor ordem,  $F_1 = 1$  e  $F_2 = 0$ . A corrente fermiônica na interação com um potencial vetor se torna então:

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \approx \sqrt{m} \begin{pmatrix} (1 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2m) \xi \\ (1 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2m) \xi \end{pmatrix} \quad (2.96)$$

$$\therefore \bar{u}(p')\gamma^i u(p) = 2m\xi^\dagger \left( \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \sigma^i + \sigma^i \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \xi \sim 2m\xi'^\dagger \left( \frac{-i}{2m} \epsilon^{ijk} q^j \sigma^k \right) \xi + \dots \quad (2.97)$$

Os objetos  $\xi$  são espinores de duas componentes que indicam o spin da partícula. Essa expressão produz a seguinte amplitude:

$$i\mathcal{M} = -i(2m) \cdot e\xi'^\dagger \left( \frac{\sigma^k}{2m} \right) \xi B^k(\mathbf{q}) , \quad B^k(\mathbf{q}) = i\epsilon^{ijk} q^j A^k(\mathbf{q}) . \quad (2.98)$$

Aplicando a aproximação de Born (para  $|\mathbf{q}| \approx 0$ ; veja PESKIN; SCHROEDER) com a omissão do primeiro fator  $2m$  na expressão acima (que é resquício da normalização relativística), torna-se possível identificar o potencial como  $V(\mathbf{x}) = -\langle \boldsymbol{\mu} \rangle \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})$  com:

$$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = -\frac{e}{m} \xi'^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \xi . \quad (2.99)$$

Assim como no caso de Dirac, isso corresponde à relação 2.4 com a identificação  $g = 2$ . Diferente de Dirac, no entanto, o cálculo do fator giromagnético na QED não acaba aqui. Conforme se progride na expansão perturbativa em  $\alpha$ , a variação no fator de forma  $F_1$  ( $F_1 - 1$ ) passa a contribuir para a renormalização do vértice  $\gamma^\mu$  e é absorvida na redefinição da carga elétrica ( $e_0 \rightarrow e$ ). A correção radiativa vem do fator de forma  $F_2$ , que produz a seguinte corrente fermiônica:

$$\bar{u}(p') \left( \frac{i}{2m} \sigma^{ij} q_j \right) F_2(q^2 \approx 0) u(p) = 2m\xi'^\dagger \left( \frac{-i}{2m} \epsilon^{ijk} q^j \sigma^k \right) \xi \cdot F_2(0) . \quad (2.100)$$

Veja que isso é o mesmo que no caso de menor ordem, mas multiplicado por  $F_2$ , significando que a variação no fator  $g$  será  $2F_2(0)$ :

$$g = 2 + 2F_2(0) = 2 + \mathcal{O}(\alpha) . \quad (2.101)$$

O fator de forma  $F_2(0)$  pode ser interpretado então como a variação percentual de  $g$  em relação a 2, chamada de anomalia magnética:

$$a_l \equiv \frac{g_l - 2}{2} = F_2(0) = \mathcal{O}(\alpha) . \quad (2.102)$$

Em ordem  $\alpha$ , é obtido  $F_2(0) = \alpha(2\pi)^{-1}$  (MANDL; SHAW, 1993).

Já é esperada uma diferença entre a anomalia para os diferentes léptons (elétron e múon, por exemplo) mesmo na QED, já que um pode influenciar o outro a partir de 2 loops (é possível inserir a polarização produzida por um dos férmions no loop do outro). Enquanto  $a_e$  depende da razão  $m_e/m_\mu \sim 1/200$ ,  $a_\mu$  tem a mesma dependência mas na razão  $m_\mu/m_e \sim 200$ . Então as duas quantidades já seriam diferentes somente pelo fato de as massas serem distintas. Mas uma diferença bem mais importante, e a que motiva a estudar  $a_\mu$  mais do que  $a_e$ , é que o múon ter uma massa maior implica que ele é mais sensível a outras interações fora da QED. Uma delas é a interação eletrofraca.

## 2.5 O Modelo Padrão Eletrofraco

Em 1930, Pauli propôs a existência do neutrino - um férmion neutro que a princípio tinha massa nula - para explicar por que o elétron era emitido com um espectro disperso de energias no decaimento beta (ENZ, 1981). Se a reação fosse  $n \rightarrow p + e^-$ , a partícula beta seria emitida com energia cinética centrada ao redor de  $m_n - m_p - m_e$  (considerando que o recuo do núcleon é pequeno). A observação de um intervalo energético bem mais amplo sugeriu que o elétron compartilhava parte da energia com uma partícula "invisível", que seria o neutrino. A alternativa era abrir mão da conservação de energia, uma ideia que não era muito confortável. Logo após a ideia de Pauli, Fermi estipulou um vértice com 4 férmions para descrever o decaimento beta:

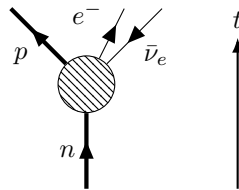


Figura 32 – Vértice efetivo da teoria de Fermi para o decaimento beta.

Posteriormente, o experimento de Wu com átomos de cobalto mostrou que a interação proposta por Fermi - que passou a ser chamada de interação fraca - viola



paridade (WU et al., 1957; GRIFFITHS, 2008). Para entender isso, é necessário retornar à seção 2.3.3: a transformação de paridade inverte a quiralidade dos férmions. Um férmion com alta energia se comporta como se tivesse massa nula, de modo que a quiralidade se aproxima da helicidade. O que se observou no experimento de Wu foi que os elétrons eram emitidos preferencialmente no sentido do spin nuclear (que considera todo o núcleo, não só o nêutron que decai). Este aumenta em 1 unidade após o decaimento, implicando - por conservação de momento linear e angular - que o elétron emitido tem helicidade  $-1/2$  e o anti-neutrino,  $+1/2$  (veja a figura 33). Isso implica que os férmions que interagem fracamente devem ser de mão esquerda e os anti-férmions, de mão direita. O mesmo se observa, por exemplo, no decaimento do múon positivo:  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$  (figura 34). Como consequência, os pósitrons mais energéticos (que são emitidos no sentido oposto a ambos os neutrinos) têm momento alinhado preferencialmente com o spin do múon. É analisando a direção de emissão de pósitrons que se permite concluir a direção do spin do múon e consequentemente determinar seu fator  $g$ . (COTROZZI; SORBARA, 2022)

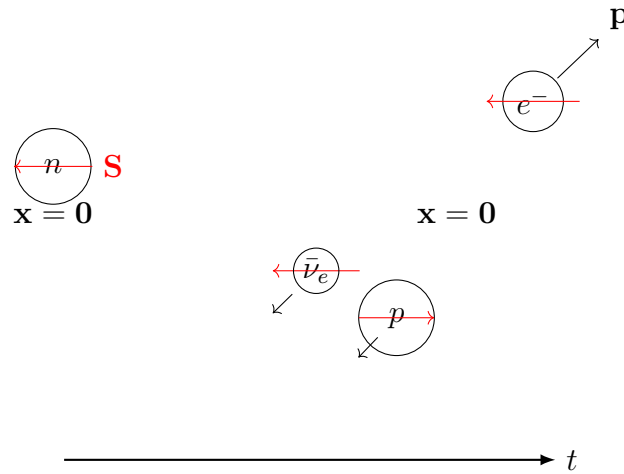


Figura 33 – Violação de paridade no decaimento beta.

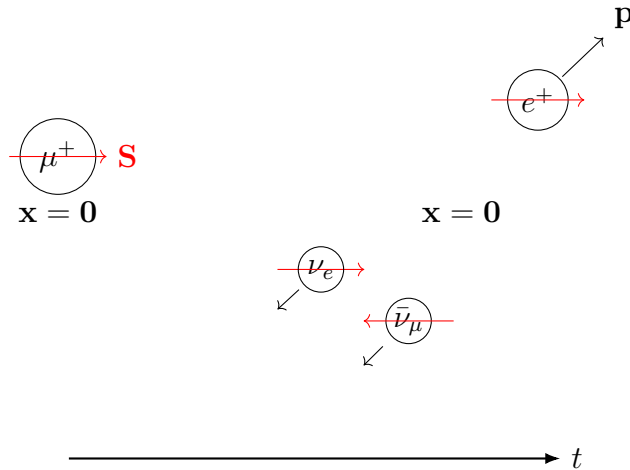


Figura 34 – Violação de paridade no decaimento do múon positivo.

Mas a ideia de Fermi possui um problema: a análise dimensional mostra que o acoplamento deve ter dimensão  $G_F \sim M^{-2}$ , sendo  $M$  uma escala de massa fixa. Isso implica que para realizar uma expansão perturbativa nessa teoria, é necessário multiplicar cada vértice por  $\Lambda^2$ , sendo  $\Lambda$  a escala de massa variável associada ao processo estudado. Ou seja, a expansão deve ser feita em  $G_F \cdot \Lambda^2$ . Como consequência, a teoria não é renormalizável: cada loop inclui um fator de  $\Lambda^2$  a mais e aparece um número infinito de quantidades divergentes que não podem ser absorvidas em redefinições dos parâmetros da teoria.

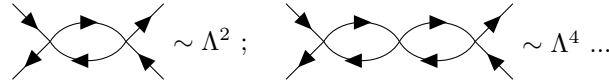


Figura 35 – Divergências na teoria de quatro férmions.

A solução foi incluir um bóson de gauge carregado  $W^\pm$  que funciona como o mediador dessa teoria (QUIGG, 2013). É por isso que 32 é entendido como um vértice efetivo: ele funciona a baixas energias, mas o modelo fundamental (que se manifesta mais claramente a altas energias) é o ilustrado na figura 36.

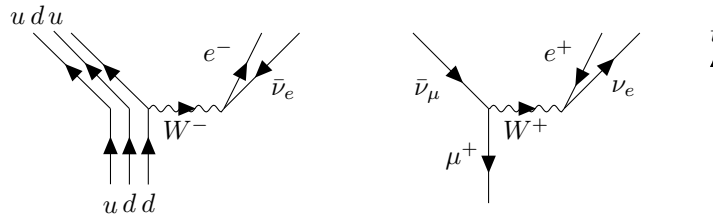


Figura 36 – Decaimentos mediados por W.

Veja que além de revelar o  $W$ , o cenário de altas energias evidencia que os núcleons são partículas compostas de quarks: férmions elementares que interagem fortemente e possuem carga fracionária. Mas a carga elétrica fracionada não é um problema, já que os quarks sempre existem em estados ligados (chamados de hádrons) cuja carga é algum múltiplo inteiro de  $e$ . O próton e nêutron são só dois exemplos de hádrons.

A baixas energias, o propagador do  $W \sim (k^2 - M_W^2)^{-1}$  se aproxima de  $M_W^{-2}$ . A interação associada a um acoplamento adimensional  $g_W$  dá lugar então à interação de Fermi de acoplamento  $G_F \sim g_W^2/M_W^2$ . Ou seja, é a massa do  $W$  que confere o nome de interação **fraca**. Na próxima seção, serão mostradas as consequências de supor esse bóson mediador carregado e massivo.

### 2.5.1 As teorias de gauge

Foi discutido na seção 2.3.2 que os campos podem se transformar sob a simetria de Lorentz, o que está associado (através do teorema de Noether) ao spin. Há também a simetria de translação espaço-temporal, relacionada ao quadri-momento. Mas aqui nascerá a ideia de uma simetria que não tem relação alguma com transformação de coordenadas:

a simetria interna. É ela que permite descrever interações e suas respectivas cargas. Para perceber isso, considere um campo escalar complexo ou o espinorial (que já é complexo por natureza). Esses serão chamados de campos de matéria. A lagrangiana do segundo já foi escrita na seção 2.3.2. Quanto ao primeiro, basta tomar dois escalares reais  $\phi_1$  e  $\phi_2$  e sintetizar a soma de suas lagrangianas através da introdução de  $\phi \equiv (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ :

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 \equiv \sum_{i=1,2} \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi_i)^2 - m^2 \phi_i^2] . \quad (2.103)$$

A razão para torná-lo complexo é que agora ele pode ser transformado através de uma simetria  $U(1)$ , que altera sua fase sem modificar sua magnitude ( $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$ ). A lagrangiana do campo de matéria livre é invariante sob a simetria  $U(1)$  global, caracterizada por um parâmetro que independe da posição espaço-temporal,  $\alpha = \text{cte.}$ . Usando a mesma representação de opacidade como norma adotada para os orbitais atômicos, com a adição de cor para representar a fase, um exemplo dessa simetria seria a figura 37.

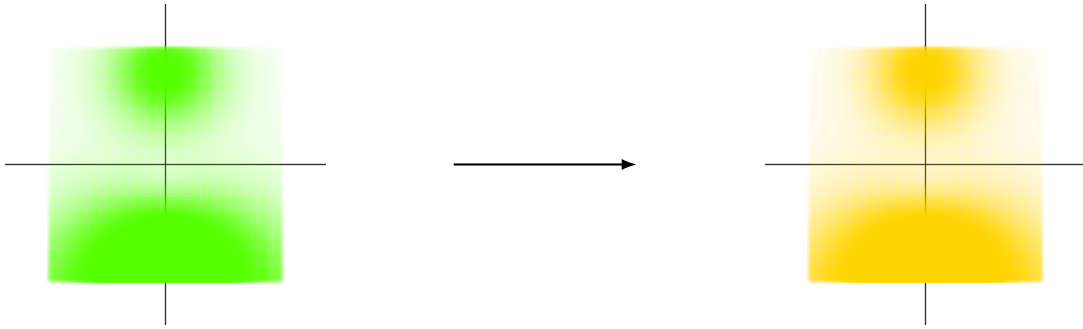


Figura 37 –  $U(1)$  global.

Utilizando o teorema de Noether, é obtida a corrente 2.25 para o escalar e 2.33 para o espinor. Sendo que ela é interpretada não mais como a corrente de probabilidade, e sim como a corrente associada à interação descrita (por exemplo, a eletromagnética). Mas a invariância não está presente para a simetria  $U(1)$  local, onde o parâmetro depende da posição no espaço-tempo,  $\alpha = \alpha(x)$ : veja a figura 38.

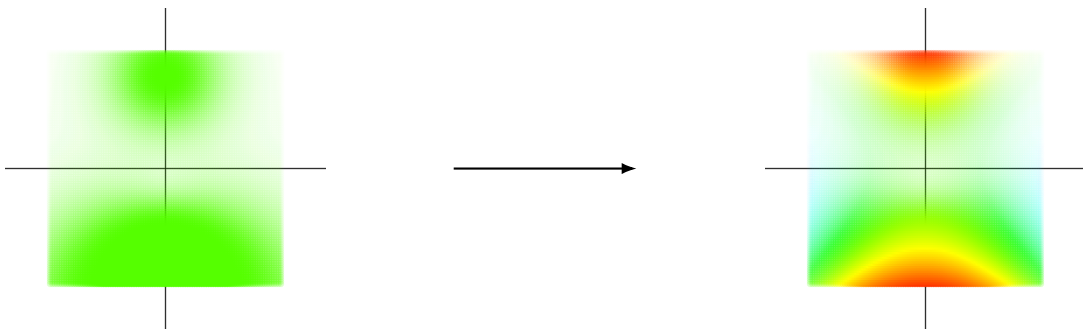


Figura 38 –  $U(1)$  local.

Sendo que isso contradiz a ideia da teoria de campos como uma teoria local. Localmente, a simetria  $U(1)$  com  $\alpha = \alpha(x)$  se assemelha a uma simetria  $U(1)$  com  $\alpha = \text{cte.}$ , o que está ilustrado na figura 39.

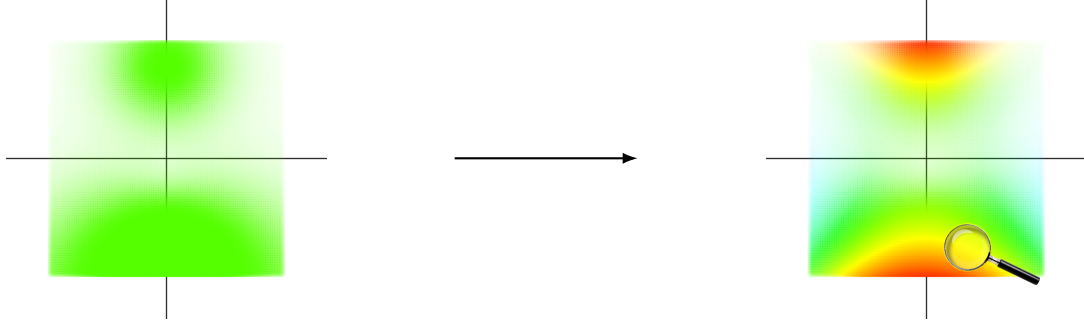


Figura 39 –  $U(1)$  local com ampliação num dos pontos.

Para conciliar essas ideias, a lagrangiana livre é modificada para se obter uma invariância local. Essa modificação corresponde a trocar a derivada ordinária por uma derivada covariante: (QUIGG, 2013)

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig\mathcal{G}^k V_\mu^k . \quad (2.104)$$

Os vetores  $V_\mu^k$  são campos de gauge associados aos geradores  $\mathcal{G}^k$  e se transformam sob a representação adjunta do grupo de simetria utilizado: (HAYWOOD, 2010)

$$V_\mu^k(x) \longrightarrow V_\mu'^k(x) = V_\mu^k(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^k(x) - l^{kmn}\alpha^m V_\mu^n ; \quad (2.105)$$

$$[\mathcal{G}^m, \mathcal{G}^n] = il^{kmn}\mathcal{G}^k .$$

Independente da representação, os geradores sempre obedecem à mesma álgebra de comutação, sendo  $l^{kmn}$  as constantes de estrutura. A constante  $g$  indica a intensidade do acoplamento. O caso ilustrado foi o da simetria  $U(1)$ , que possui um gerador e portanto um campo de gauge: o exemplo mais comum é  $U(1)$  de carga elétrica associada ao fóton (veja 2.79). A transformação dos bósons de gauge faz a derivada covariante se transformar da mesma maneira que o campo de matéria sobre o qual ela atua:

$$(\mathcal{D}_\mu \Phi)' = \exp(i\alpha^k \mathcal{G}^k)(\mathcal{D}_\mu \Phi) . \quad (2.106)$$

Isso garante invariância da lagrangiana. Conclui-se que a exigência de simetria gera, através da forma global do grupo e do teorema de Noether, a carga associada ao grupo; e através da forma local, o aparecimento de interações.

O grupo  $U(1)$  é abeliano, significando que seus elementos comutam. Já o grupo proposto para descrever o bóson  $W^\pm$  foi não abeliano: o  $SU(2)$  que possui 3 geradores. Dois deles são não diagonais e são compatíveis com a troca de sabor induzida pelo  $W$  (veja a equação 2.112). Entretanto, a natureza diagonal do terceiro implica que deve existir também um bóson de gauge neutro  $W^3 \equiv W^0$  que não esteja associado a troca de sabor. Inicialmente, foi proposto que esse fosse o fóton. O aparecimento de massa para o  $W$  implica que os geradores associados a esse vetor devem ser quebrados, pois a simetria 2.105 proíbe o aparecimento de bilineares nos bósons de gauge. Entretanto, o mesmo não acontece com o fóton, que tem massa nula. Ou seja, a quebra de simetria deve produzir  $SU(2) \rightarrow U(1)_{\text{QED}}$  (veja a seção 2.5.2). (XIN, 2007)

Sendo que já foi comentado que as interações fracas violam paridade: o grupo  $SU(2)$  é na verdade  $SU(2)_L$ , indicando que apenas os férmions de mão esquerda se transformam não trivialmente. A QED, por outro lado, é vetorial e não quirar: é impossível distinguir férmions de mão esquerda e de mão direita através do eletromagnetismo. Isso implica que o  $W^0$  associado ao gerador do  $U(1)_L$  que sobrevive à quebra não pode ser o fóton.

Para dar sentido ao  $W^0$  e incluir o fóton, Glashow introduziu um novo gerador intitulado de hipercarga, associado ao grupo abeliano  $U(1)_Y$  (CHENG; LI, 1988). A hipercarga, assim como a carga do grupo  $SU(2)$  (chamada de isospin), é quirar. Isso permite resolver o problema do caráter vetorial do fóton que era a princípio inconciliável com o caráter quirar das interações fracas. Antes seria necessário ter:

$$Q = T^3, \quad (2.107)$$

sendo  $T^3$  a componente neutra do isospin e  $Q$  a carga elétrica - ou seja, o fóton da carga elétrica estaria sendo identificado como o  $W^0$  do isospin  $T^3$ . Mas agora será possível obter:

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}. \quad (2.108)$$

A equação 2.107 não é verossímil porque o lado esquerdo é vetorial e o lado direito é quirar. Entretanto, em 2.108 (chamada de relação de Gell-Mann-Nishijima), o lado direito soma duas cargas quirais. Os valores da hipercarga para as diferentes quiralidades podem ser ajustados de forma artificial para fazer a soma ser vetorial, assim como o lado esquerdo. Ou seja, o grupo  $G_{\text{EW}} \equiv SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  produz o  $W^\pm$ , um fóton que vem de uma combinação entre o bóson  $W^0$  e o da hipercarga  $B$  e uma outra combinação entre estes, ortogonal ao fóton, que é identificada como o bóson  $Z$ . Enquanto o fóton é vetorial, o  $Z$  viola paridade mas de forma mais leve que o  $W$ : ambas as quiralidades interagem via  $Z$ , mas em intensidades distintas. A quebra agora é  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{QED}}$ , implicando que apenas o fóton não tem massa. A existência do bóson  $Z$  introduz correntes fracas neutras que são experienciadas por neutrinos. A possibilidade de interações com neutrinos do tipo múon que não produz múons (diferente das correntes carregadas mediadas por  $W$ )

foi observada pela primeira vez em 1973 no experimento de Gargamelle (ROUSSET, 1994). Houve observação tanto no setor leptônico (figura 40) quanto no setor hadrônico (figura 41). Esse foi um dos primeiros triunfos da unificação entre eletromagnetismo e interações fracas conhecida como teoria eletrofraca.

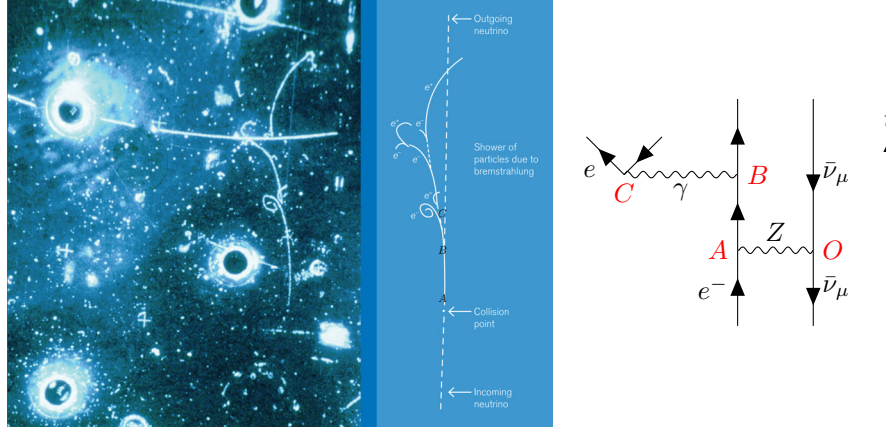


Figura 40 – Reação puramente leptônica no experimento de Gargamelle. Um elétron é ejetado por troca de bóson  $Z$  com um anti-neutrino do múon e inicia em seguida um chuva de pares elétron-pósitron. (HASERT et al., 1973a)

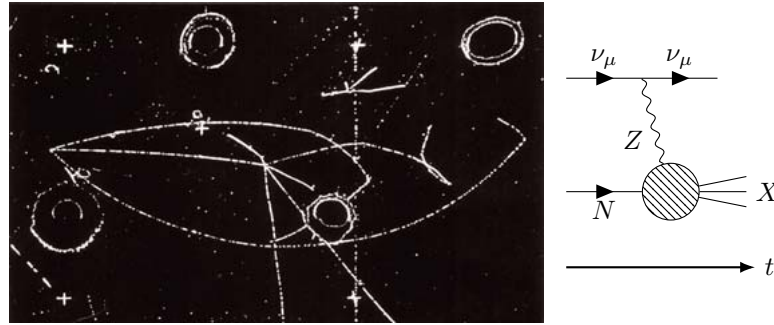


Figura 41 – Reação hadrônica no experimento de Gargamelle. O núcleon  $N$  produz 3 hádrons no estado final, denotados por  $X$ . (HASERT et al., 1973b)

A lagrangiana que descreve as interações eletrofracas é dada pela introdução da derivada covariante, como já foi discutido:

$$\mathcal{L}_{\text{fermions}} = \bar{\psi}_L i \gamma^\mu \left( \partial_\mu + i g_W \frac{\sigma^j}{2} W_\mu^j + i g'_W \frac{Y}{2} B_\mu \right) \psi_L + \bar{\psi}_R i \gamma^\mu \left( \partial_\mu + i g'_W \frac{Y}{2} B_\mu \right) \psi_R; \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} \psi_L : \quad L^i &= \begin{pmatrix} \nu^i \\ l^i \end{pmatrix}_L, & Q^i &= \begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}_L; \\ \psi_R : \quad l_R^i, & & u_R^i, d_R^i. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Como será mostrado na próxima seção,  $W^3$  e  $B$  se misturam para gerar o fóton e o  $Z$ . As combinações entre  $W_1$  e  $W_2$  produzem:

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) . \quad (2.111)$$

Note que existe uma analogia com as combinações entre as componentes x e y do momento angular usadas para produzir os operadores escada. De fato, isso resulta em:

$$\begin{aligned} w_\mu &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma^1 W_\mu^1 + \sigma^2 W_\mu^2) = \frac{(\sigma^1 + i\sigma^2)}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2) + \frac{(\sigma^1 - i\sigma^2)}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2) \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma^+} W_\mu^+ + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma^-} W_\mu^- \\ \therefore \quad \bar{Q}\gamma^\mu w_\mu Q &= (\bar{u}_L \quad \bar{d}_L)\gamma^\mu w_\mu \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = \bar{u}_L\gamma^\mu d_L W_\mu^+ + \bar{d}_L\gamma^\mu u_L W_\mu^- . \end{aligned} \quad (2.112)$$

O mesmo funciona para os léptons. Veja que não foi incluído um neutrino de mão direita, pois todos são observados com helicidade  $-1/2$ . Isso sugere que eles tenham massa nula. Mesmo assim, o fenômeno de mistura de neutrinos indica que eles devem possuir uma pequena massa. Esse é um dos problemas em aberto na Física de Altas Energias.

Além de exigir o aparecimento de interações férmion-bóson de gauge através da derivada covariante, a simetria de gauge também introduz auto-interações entre os bósons vetoriais associados a grupos não-abelianos (que depende das constantes de estrutura características de um grupo dessa natureza): ([QUIGG, 2013](#))

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^j W_j^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \quad ;$$

$$W_{\mu\nu}^j = \partial_\mu W_\nu^j - \partial_\nu W_\mu^j + g_W \epsilon^{jkl} W_\mu^k W_\nu^l \quad ; \quad (2.113)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad .$$

Além do termo cinético introduzido na lagrangiana livre do bóson vetorial ([2.54](#)), há também tri-interações e quadri-interações expressas em termos de  $W^\pm$  e  $W^0 \equiv W^3$  através dos seguintes vértices:

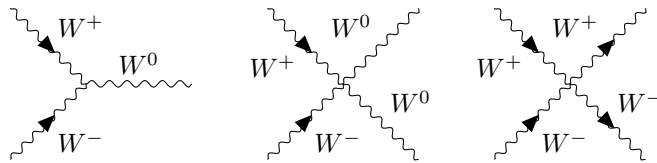


Figura 42 – Auto-interações eletrofracas.

É possível expressar em termos do fóton e Z usando que  $W^0$  é uma combinação linear entre eles (veja a equação [2.120](#) da próxima seção).

### 2.5.2 Quebra espontânea de simetria

A lagrangiana foi construída até então sobre a simetria de gauge, produzindo os termos de interação entre férmion e bóson vetorial em 2.109 e as auto-interações dos campos de gauge em 2.113. Ela também exige, entretanto, que os campos vetoriais tenham massa nula, o que não é o caso do  $W^\pm$  e do  $Z^0$  já que eles são mediadores de interações de curto alcance. É exigido então um mecanismo de quebra de simetria. Será mostrado que além de conferir massa aos campos de gauge, a quebra também atribui massa aos férmions: por ser uma simetria de gauge, o grupo eletrofraco proíbe o aparecimento de massa para os bósons vetoriais; mas por ser uma simetria quiral, ele também proíbe a massa fermiônica.



Figura 43 – Tipos de quebra de simetria. Veja também (SPONTANEOUS..., 2012).

A figura 43 ilustra os tipos de quebra de simetria possíveis para um potencial de um campo escalar. É escolhido o campo de spin 0 para não quebrar a simetria de Lorentz, já que todos os outros campos se transformam por Lorentz como foi discutido na seção 2.3.2. A ideia é analisar tanto o potencial quanto seu mínimo, ou seja, o estado de vácuo. Na primeira coluna, a simetria é mantida. Na segunda, ela é quebrada explicitamente através da introdução de um termo no potencial que força uma direção privilegiada no espaço de simetria interna. Na terceira coluna, ela é quebrada espontaneamente: o potencial possui a simetria, mas o estado não. Abaixo de cada caso, está presente uma analogia com uma haste flexível, com o termo que quebra a simetria sendo trocado por uma força. Essa força pode introduzir a direção privilegiada, caso tenha uma componente radial cilíndrica, o que quebra explicitamente a simetria. Ou ela pode ser vertical e manter a simetria da hamiltoniana/lagrangiana, mas forçar o sistema a perder essa simetria, correspondendo à quebra espontânea. Já que a simetria de gauge dita a estrutura das interações, será adotado o método de quebra espontânea. As figuras representam uma quebra de simetria  $U(1)$ , onde o escalar complexo adota um valor esperado no vácuo (vev) na circunferência



ilustrada em preto na figura 44. Mas essa é uma simplificação do caso real, já que a simetria que será quebrada é não abeliana.

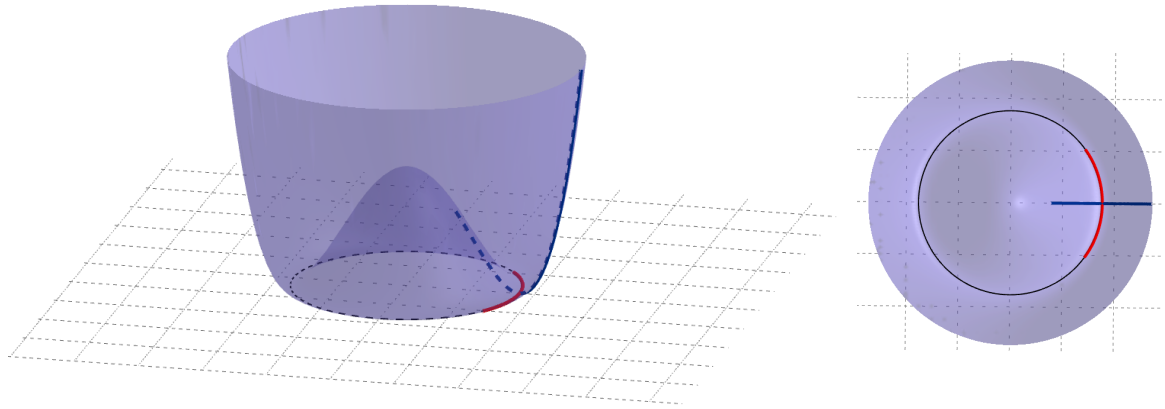


Figura 44 – Potencial de "chapéu mexicano" visto de frente (à esquerda) e de cima (à direita). A malha quadriculada representa uma simplificação do espaço vetorial em que se encontra o escalar  $\Phi$ .

Se o modelo correto fosse o da simetria  $SU(2)$ , o vácuo estaria inserido numa esfera como na figura 45 (os eixos 1, 2 e 3 não são eixos espaciais, e sim associados à simetria interna de isospin). Pode ser convencionado que ele esteja ao longo da direção 3. Isso implica que ele quebraria os geradores 1 e 2, correspondendo à geração de massa para os bósons não diagonais  $W^\pm$ , e preservaria o gerador 3, associado ao fóton de massa nula. Isso produziria 2.107.

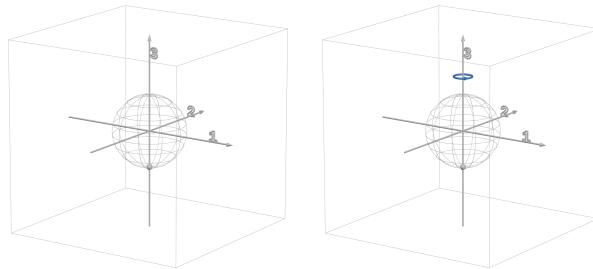


Figura 45 – A quebra de simetria do grupo  $SU(2)$  preserva o terceiro gerador, já que é possível escolher o vácuo ao longo da direção 3.

Entretanto, esse não é o modelo correto, como já foi discutido. A existência de um outro gerador abeliano - a hipercarga - implica que o vácuo necessariamente possui uma fase (representada através da cor). A rotação pelo eixo 3 altera essa fase (figura 46), impedindo que  $T^3$  seja identificado como a carga elétrica. Na verdade, o gerador preservado passa a ser uma combinação entre o isospin e a hipercarga, já que esta corresponde também a uma rotação de fase (pense na figura 38). Isso produz a relação correta 2.108.

Para efetuar isso, o escalar introduzido é dubleto por isospin e tem hipercarga +1, então a relação 2.108 implica que sua componente de isospin  $T^3 = -1/2$  é eletricamente

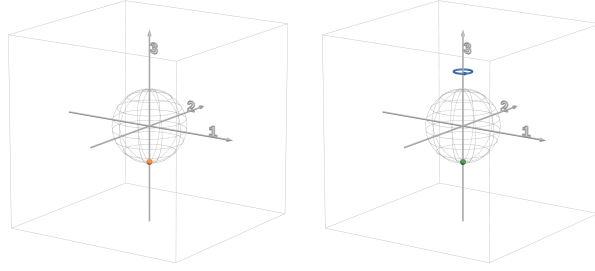


Figura 46 – A quebra de simetria do grupo  $SU(2) \otimes U(1)$  não preserva o terceiro gerador do  $SU(2)$ , mas sim a combinação entre ele e o gerador do  $U(1)$ . Uma rotação com respeito à direção 3 altera a fase do vácuo.

neutra e deve receber o vev para que a simetria de carga elétrica seja mantida. (QUIGG, 2013) A relação  $Q \langle \Phi \rangle_0 = 0$  implica que o vácuo é invariante sob carga elétrica:  $\langle \Phi \rangle'_0 = \exp(i\alpha Q) \langle \Phi \rangle_0 = \langle \Phi \rangle_0$ . O termo de quebra na lagrangiana é construído inserindo a derivada covariante em 2.103 e modificando o potencial para incorporar a quebra espontânea:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{scalar}} &= (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi) : \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig_W \frac{\sigma^j}{2} W_\mu^j + ig'_W \frac{Y}{2} B_\mu \quad ; \\ V(\Phi^\dagger \Phi) = \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + |\lambda| (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad . \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Para  $\mu^2 > 0$ , o potencial é o da primeira coluna em 43. A transição de fase para  $\mu^2 < 0$  produz a quebra espontânea da terceira coluna. O escalar adquire o vev:

$$\begin{aligned} \langle \Phi^\dagger \Phi \rangle_0 &= -\frac{\mu^2}{2|\lambda|} \equiv \frac{v^2}{2} \\ \therefore \langle \Phi \rangle_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{|\lambda|}}. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Veja que 2.114 contém termos com formato  $\phi^2 V^\mu V_\mu$ , cujo vev se torna o termo bilinear de massa para o bóson vetorial (proporcional a  $V^\mu V_\mu$ ). Para que esses bilineares se manifestem, é necessário expandir o escalar ao redor do vácuo:

$$\Phi = \underbrace{\exp\left(i \frac{\zeta^j}{v} T^j\right)}_{\text{oscilações angulares}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ (v + H)/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\text{oscilações radiais}}. \quad (2.116)$$

Se o conjunto de vácuos degenerados realmente fosse uma circunferência como sugere a figura 44, as oscilações angulares seriam a curva em vermelho que se mantém no

mínimo de potencial<sup>4</sup> e as oscilações radiais seriam a curva em azul que modifica  $V(\Phi^\dagger\Phi)$ . Os campos  $\zeta^j$  de massa nula são chamados de bósons de Goldstone e  $H$  de massa  $\sqrt{-2\mu^2}$  é identificado como o Higgs.

Entretanto, esse espectro apresenta bilineares na lagrangiana com formato  $V^\mu(\partial_\mu\zeta)$ , que indicam uma mistura entre os bósons de Goldstone e os vetoriais. Isso sugere que se faça a seguinte transformação de gauge local (onde foi usada a equação 2.105 com a identificação  $\alpha^j = -\frac{\zeta^j}{v}$ ):

$$\begin{cases} \Phi' = \exp\left(-i\frac{\zeta^j}{v}T^j\right)\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ (v+H)/\sqrt{2} \end{pmatrix} & ; \\ W_\mu'^j(x) = W_\mu^j(x) + \frac{1}{g_W v}\partial_\mu\zeta^j(x) + \frac{1}{v}\epsilon^{jkl}\zeta^k W_\mu^l & . \end{cases} \quad (2.117)$$

Os campos de Goldstone desaparecem do espectro de escalares e se tornam as componentes **longitudinais** dos bósons vetoriais respectivos através do termo de gradiente (figura 47). Esse mecanismo de absorção dos bósons de Goldstone pelos de gauge é chamado de mecanismo de Goldstone e define o **gauge unitário**.

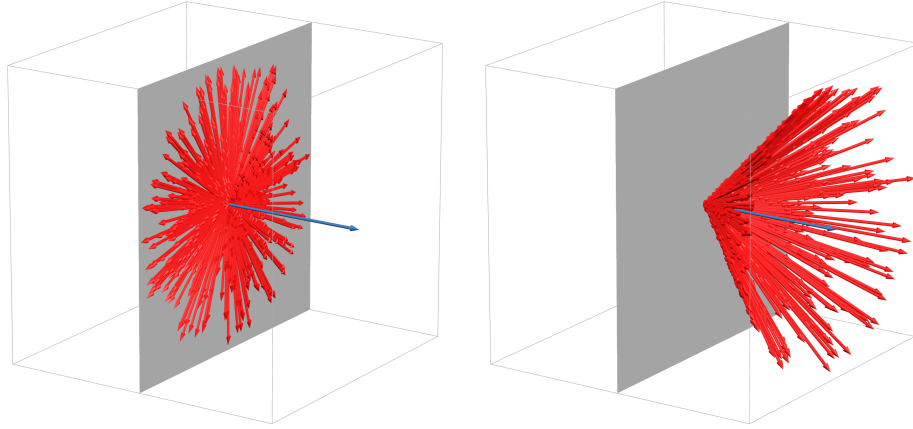


Figura 47 – Mecanismo de Goldstone.

No gauge unitário, os bilineares dos bósons de gauge são dados por:

$$(\mathcal{D}_\mu\Phi)^\dagger(\mathcal{D}^\mu\Phi) \supset \frac{1}{4}g_W^2v^2W_\mu^-W^{+\mu} + \frac{1}{8}v^2\left[g_W^2W_\mu^3W^{3\mu} + g_W'^2B_\mu B^\mu - 2g_Wg_W'W_\mu^3B^\mu\right]. \quad (2.118)$$

É necessária uma mudança de base que diagonalize a matriz de massas quadráticas

<sup>4</sup> Já que elas correspondem a transformações unitárias que não mudam  $\Phi^\dagger\Phi$ .

$\mathcal{M}^2$ :

$$\frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} B_\mu & W_\mu^3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} g_W'^2 & -g_W g_W' \\ -g_W g_W' & g_W^2 \end{pmatrix}}_{(\mathcal{M}^2)_{\text{n\~ao-diagonal}}} \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{3\mu} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu & Z_\mu \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_Z^2 \end{pmatrix}}_{(\mathcal{M}^2)_{\text{diagonal}}} \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix}, \quad (2.119)$$

ditada pela seguinte equação:

$$\begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{3\mu} \end{pmatrix}, \quad \theta_W = \tan^{-1} \left( \frac{g_W'}{g_W} \right). \quad (2.120)$$

O vetor  $A^\mu$  é identificado como o fóton de massa nula, com Z e W possuindo massas: (QUIGG, 2013)

$$m_{W^\pm} = \frac{1}{2} g_W v, \quad m_Z = \frac{1}{2} \frac{g_W v}{\cos \theta_W} > m_{W^\pm}. \quad (2.121)$$

Expandindo 2.109 em termos desses campos, a carga elétrica elementar é identificada como  $e = |e| = g_W \sin \theta_W = g_W' \cos \theta_W$ , mostrando que os acoplamentos são de mesma ordem.

Quanto aos férmions, é possível escrever termos de interação do tipo Yukawa ( $\bar{\psi}\psi\phi$ ) que não violam a simetria eletrofraca:

$$\mathcal{L}_{\text{yukawa}} = -y_{ij}^e (\bar{L}^i \Phi) l_R^j - y_{ij}^d (\bar{Q}^i \Phi) d_R^j - y_{ij}^u (\bar{Q}^i \tilde{\Phi}) u_R^j + \text{h.c.}, \quad (2.122)$$

sendo  $\tilde{\Phi} \equiv i\sigma^2 \Phi^*$  um campo que se transforma como dubleto por isospin<sup>5</sup> mas com hipercarga  $-1$  e h.c. = hermitiano conjugado. É fácil provar que todos esses termos são singletos sob  $G_{EW}$  usando a seguinte tabela de cargas:

| Férmion | $Q$  | $Y_L$ | $Y_R$      |
|---------|------|-------|------------|
| $\nu^i$ | 0    | -1    | $\nexists$ |
| $l^i$   | -1   | -1    | -2         |
| $u^i$   | 2/3  | 1/3   | 4/3        |
| $d^i$   | -1/3 | 1/3   | -2/3       |

Tabela 1 – Valores de hipercarga para os férmions de mão esquerda ( $Y_L$ ) e os de mão direita ( $Y_R$ ). Usando a relação 2.108,  $Y$  fica em função da carga elétrica  $Q$ , dada aqui em unidades da carga elementar  $e$ .

No gauge unitário:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ (v + H)/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} (v + H)/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.123)$$

<sup>5</sup> Isso é fácil de provar usando  $\sigma^2 \sigma^{i*} = -\sigma^i \sigma^2$  e a relação  $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij} \mathbb{I}$ .

então:

$$\mathcal{L}_{\text{yukawa}} = -\frac{v+H}{\sqrt{2}}(\bar{l}_L^i y_{ij}^l l_R^j + \bar{d}_L^i y_{ij}^d d_R^j + \bar{u}_L^i y_{ij}^u u_R^j + \text{h.c.}) . \quad (2.124)$$

A figura 48 ilustra esse mecanismo de geração de massa fermiônica tomando como exemplo o lépton. Para  $\mu^2 > 0$ , ele pode mudar sua quiralidade através da troca de isospin e hipercarga com o escalar (em lilás), como está descrito em 2.122. Todas as cargas são conservadas. Já para  $\mu^2 < 0$ , o vev adquirido pelo escalar permite que o férmion troque isospin e hipercarga com o vácuo. Considerando que apenas os desvios com respeito à configuração de mínima energia são observados (o campo físico é  $H$ , não  $\Phi$ ), conclui-se que as cargas da simetria eletrofraca foram violadas e que o lépton pode alterar espontaneamente sua quiralidade, implicando que ele desenvolveu massa (eq. 2.124).

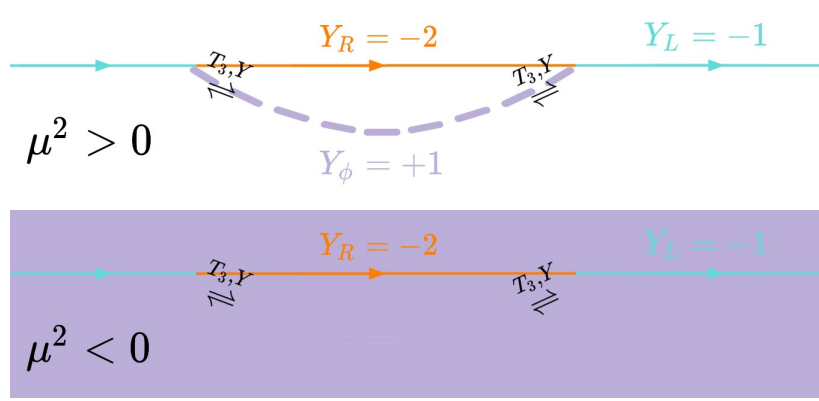


Figura 48 – Mecanismo de geração de massa do lépton carregado.

Comparando 2.124 com o termo  $-m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_L\psi_R + \text{h.c.})$ , as matrizes de massa são identificadas como:

$$M_{ij}^f = \frac{v}{\sqrt{2}}y_{ij}^f, \quad f = l, d, u. \quad (2.125)$$

Entretanto, é necessário ainda diagonalizá-las efetuando transformações unitárias no espaço das famílias, pois o que se observa são os autoestados de massa  $\psi'$ :

$$\begin{cases} \psi'_L = V_L \psi_L \\ \psi'_R = V_R \psi_R \end{cases} \quad \therefore \quad \bar{\psi}_L M \psi_R = \bar{\psi}'_L M_{\text{diagonal}} \psi'_R = \bar{\psi}'_L V_L M V_R^\dagger \psi'_R \quad (2.126)$$

$$\therefore \quad M_{\text{diagonal}}^f = V_L^f M^f V_R^{f\dagger}.$$

A  $i$ -ésima componente diagonal dessa matriz corresponde à massa do férmion  $f^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). O processo de diagonalização descrito é o responsável pelo fenômeno da

**mistura entre quarks**, que se manifesta na corrente carregada das interações fracas entre esses férmions:

$$\bar{u}_L \gamma^\mu d_L = \bar{u}'_L V_L^u \gamma^\mu V_L^{d\dagger} d'_L \equiv \bar{u}'_L \gamma^\mu V^{\text{CKM}} d'_L, \quad V^{\text{CKM}} \equiv V_L^u V_L^{d\dagger}. \quad (2.127)$$

O que se esperava da equação 2.112 era que os quarks tipo up e tipo down de uma interação por corrente carregada seriam sempre da mesma família. Mas o que a equação 2.127 indica é que pode haver sim mistura entre famílias. Isso se deve à chamada matriz de **Cabibbo–Kobayashi–Maskawa** ( $V^{\text{CKM}}$ ), dada em valor absoluto abaixo: (QUIGG, 2013)

$$V^{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}, \quad |V^{\text{CKM}}| = \begin{pmatrix} 0.9743 & 0.2253 & 0.0035 \\ 0.2252 & 0.9734 & 0.0410 \\ 0.0086 & 0.0403 & 0.9992 \end{pmatrix}. \quad (2.128)$$

O elemento  $|V_{u^i d^j}|^2$  indica a probabilidade de o quark  $u^i$  interagir com o quark  $d^j$ . Note que ela é sempre máxima na diagonal, indicando que os processos mais prováveis ainda são  $u \leftrightarrow d$ ,  $c \leftrightarrow s$ ,  $t \leftrightarrow b$ .

Apesar do sucesso da teoria eletrofraca, algumas discrepâncias com experimento como o  $g - 2$  motivam a extensão desse setor do Modelo Padrão. Na próxima seção, será mostrada a mais simples: os modelos de dois dubletos de Higgs.

## 2.6 Modelos de dois dubletos de Higgs

O modelo de extensão que será estudado agora considera o que acontece se no lugar de um dubleto escalar, existirem dois dubletos de hipercarga +1: (BRANCO et al., 2012; MELO, 2020)

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \phi_i^+ \\ \phi_i^0 \end{pmatrix}, \quad \langle \Phi_i \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_i/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (2.129)$$

tendo sido usada a relação de Gell-Mann-Nishijima para entender que a primeira componente do dubleto tem carga elétrica +1 e a segunda é eletricamente neutra. Isso modifica apenas o setor escalar. Quanto às interações de Yukawa:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{\text{yukawa}}^{\text{2HDM}} = & y_{ij}^{1l} (\bar{L}^i \Phi_1) l_R^j + y_{ij}^{1d} (\bar{Q}^i \Phi_1) d_R^j + y_{ij}^{1u} (\bar{Q}^i \tilde{\Phi}_1) u_R^j \\ & + y_{ij}^{2l} (\bar{L}^i \Phi_2) l_R^j + y_{ij}^{2d} (\bar{Q}^i \Phi_2) d_R^j + y_{ij}^{2u} (\bar{Q}^i \tilde{\Phi}_2) u_R^j + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.130)$$

$$\therefore M_{ij}^f = \frac{v_1}{\sqrt{2}} y_{ij}^{1f} + \frac{v_2}{\sqrt{2}} y_{ij}^{2f}.$$

Aqui aparece um problema que não estava presente no Modelo Padrão. As componentes não-diagonais das matrizes  $y$  estão associadas a processos de **troca de sabor por interação neutra (FCNI)**: em contraste às correntes carregadas que levam um férmion de uma linha a um de outra (figura 2), uma FCNI faz a conversão entre férmions que estão na mesma linha. Por exemplo,  $y_{12}^d$  e  $y_{21}^d$  descrevem reações mediadas por escalares neutros em que  $d \leftrightarrow s$ . Entretanto, esse tipo de fenômeno não é observado, indicando que as matrizes  $y$  devem ser feitas diagonais (PASCHOS, 1977; GLASHOW; WEINBERG, 1977). No Modelo Padrão, isso é garantido pela diagonalização das matrizes de massa, já que há uma proporcionalidade entre elas. Sendo que no 2HDM, diagonalizar as matrizes de massa não implica que o mesmo acontece com  $y^1$  e  $y^2$ , pois a proporcionalidade não está mais presente. Para resolver isso, é imposta a **simetria discreta**  $Z_2$ :

$$\begin{cases} \Phi_1 \rightarrow -\Phi_1 & ; \\ \Phi_2 \rightarrow \Phi_2 & . \end{cases} \quad (2.131)$$

O que isso faz é garantir que a massa de cada férmion se origine de apenas uma fonte (ou  $\Phi_1$  ou  $\Phi_2$ ), resgatando a proporcionalidade entre as matrizes de massa e as de interação ( $y$ ) e eliminando a possibilidade de FCNI. Exige-se que todos os férmions sejam pares sob  $Z_2$ , exceto por  $d_R$  e  $l_R$  cujas transformações dependem do tipo de 2HDM. Em especial, isso implica que as massas dos quarks tipo up são originadas do dubleto  $\Phi_2$ , já que  $(\bar{Q}\tilde{\Phi}_i)u_R$  só é par sob  $Z_2$  para  $i = 2$ . No geral, cada dubleto confere massa aos férmions que compartilham da sua paridade. Há quatro tipos de 2HDM, definidos pelo tratamento dado a  $d_R$  e  $l_R$ :

| Tipo | Paridade de $d_R$ | Paridade de $l_R$ | $\Phi_i$ acoplado a $d_R$ | $\Phi_i$ acoplado a $l_R$ |
|------|-------------------|-------------------|---------------------------|---------------------------|
| I    | +                 | +                 | $\Phi_2$                  | $\Phi_2$                  |
| II   | −                 | −                 | $\Phi_1$                  | $\Phi_1$                  |
| X    | +                 | −                 | $\Phi_2$                  | $\Phi_1$                  |
| Y    | −                 | +                 | $\Phi_1$                  | $\Phi_2$                  |

Tabela 2 – Tipos de 2HDM.

O setor escalar é modificado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{scalar}}^{2\text{HDM}} &= (\mathcal{D}_\mu \Phi_1)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \Phi_1) + (\mathcal{D}_\mu \Phi_2)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \Phi_2) - V(\Phi_1, \Phi_2) ; \\ V(\Phi_1, \Phi_2) &= m_1^2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 + m_2^2 \Phi_2^\dagger \Phi_2 - m_{12}^2 (\Phi_1^\dagger \Phi_2 + \Phi_2^\dagger \Phi_1) + \frac{\lambda_1}{2} (\Phi_1^\dagger \Phi_1)^2 \\ &+ \frac{\lambda_2}{2} (\Phi_2^\dagger \Phi_2)^2 + \lambda_3 (\Phi_1^\dagger \Phi_1) (\Phi_2^\dagger \Phi_2) + \lambda_4 (\Phi_1^\dagger \Phi_2) (\Phi_2^\dagger \Phi_1) \\ &+ \frac{\lambda_5}{2} [(\Phi_1^\dagger \Phi_2)^2 + (\Phi_2^\dagger \Phi_1)^2] . \end{aligned} \quad (2.132)$$

Todos os termos que violam  $Z_2$  são descartados do potencial, exceto o que possui coeficiente  $m_{12}^2$ . A importância dessa quebra explícita da simetria discreta é que ela resolve o problema cosmológico da **parede de domínio**, que não será discutido aqui (ZELDOVICH; KOBZAREV; OKUN, 1974). É analisando 2.132 que se encontram os escalares físicos e suas massas. Parametrizando os dubletos na forma:

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \phi_i^+ \\ (v_i + \rho_i + i\eta_i)/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (2.133)$$

é visto que os autoestados de massa são dados por misturas entre os campos em 2.133. A matriz de rotação será denotada como:

$$R_\theta \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.134)$$

Os escalares físicos são dados então por:

$$\begin{pmatrix} h \\ H \end{pmatrix} = R_\alpha \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} G \\ A \end{pmatrix} = R_\beta \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = R_\beta \begin{pmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_2^\pm \end{pmatrix}; \quad (2.135)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{-2m_{12}^2 v_1 v_2 + 2\lambda_{345} v_1^2 v_2^2}{m_{12}^2 (v_2^2 - v_1^2) + \lambda_1 v_1^3 v_2 - \lambda_2 v_1 v_2^3}, \quad \tan \beta = \frac{v_2}{v_1},$$

sendo  $\lambda_{345} = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5$ . Os campos  $G$  e  $G^\pm$  são os 3 bósons de Goldstone oriundos da quebra e desaparecem do espectro após serem absorvidos pelos bósons de gauge  $Z$  e  $W^\pm$ . Restam 5 campos de spin 0: 2 neutros ( $h$  e  $H$ ), um pseudoescalar ( $A$ ) e 2 carregados ( $H^\pm$ ), cujas massas são: (BRANCO et al., 2012)

$$\left\{ \begin{array}{ll} m_h^2 &= \frac{1}{2}(\Delta^\rho - \delta^\rho) & ; \\ m_H^2 &= \frac{1}{2}(\Delta^\rho + \delta^\rho) & ; \\ m_A^2 &= \left[ \frac{m_{12}^2}{v_1 v_2} - \lambda_5 \right] (v_1^2 + v_2^2) & ; \\ m_{H^\pm}^2 &= \left[ \frac{m_{12}^2}{v_1 v_2} - \frac{1}{2}(\lambda_4 + \lambda_5) \right] (v_1^2 + v_2^2) & , \end{array} \right. \quad (2.136)$$



$$\begin{aligned} \text{com: } \Delta\rho &= \frac{m_{12}^2(v_1^2 + v_2^2)}{v_1 v_2} + \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 & ; \\ \delta\rho &= \left[ \left( \frac{m_{12}^2(v_1^2 - v_2^2)}{v_1 v_2} - \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 \right)^2 + 4(m_{12}^2 - \lambda_{345} v_1 v_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Os bilineares dos bósons de gauge têm o mesmo formato que no Modelo Padrão se for feita a identificação:

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = v \approx 246 \text{ GeV} . \quad (2.137)$$

De fato, uma das principais razões para estender o SM através do 2HDM é que ele mantém o parâmetro  $\rho = 1$  a nível de árvore, definido como:

$$\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta_W} . \quad (2.138)$$

O tipo de 2HDM que será utilizado é o específico de lépton ou tipo X, que acopla  $l_R$  a  $\Phi_1$  e  $u_R$ ,  $d_R$  a  $\Phi_2$ . Esse é um modelo conveniente para analisar a razão entre a massa do elétron e a do próton,  $\mu = m_e/m_p$  (veja a seção 3.2). Expressa na base física, a lagrangiana de Yukawa é:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{\text{yukawa}}^{\text{2HDM-X}} &= \sum_{f=u,d,l} m_f \bar{f} f + \sum_{f=u,d,l} \frac{m_f}{v} (\xi_h^f \bar{f} f h + \xi_H^f \bar{f} f H - i \xi_A^f \bar{f} \gamma_5 f A) \\ &+ \left[ \frac{\sqrt{2} V_{ud}}{v} \bar{u} (m_u \xi_A^u P_L + m_d \xi_A^d P_R) d H^+ + \frac{\sqrt{2} m_l \xi_A^l}{v} \bar{\nu}_L l_R H^+ + \text{h.c.} \right] ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_h^u &= \xi_h^d = s_\alpha / s_\beta , \quad \xi_H^u = \xi_H^d = c_\alpha / s_\beta , \quad \xi_A^u = -\xi_A^d = (t_\beta)^{-1} , \\ \xi_h^l &= c_\alpha / c_\beta , \quad \xi_H^l = -s_\alpha / c_\beta , \quad \xi_A^l = t_\beta . \end{aligned} \quad (2.139)$$

Foi definido  $c_\theta \equiv \cos \theta$ ,  $s_\theta \equiv \sin \theta$  e  $t_\theta \equiv \tan \theta$  para simplificar.

Também é interessante notar que existe uma combinação linear entre os escalares neutros que se comporta como o Higgs do Modelo Padrão:

$$H^{\text{SM}} \sim h \cos(\beta - \alpha) + H \sin(\beta - \alpha) . \quad (2.140)$$

A observação de  $H^{\text{SM}}$  como um auto-estado de massa  $m_h = 125 \text{ GeV}$  insinua que ele está alinhado ou com  $h$  ou  $H$ . Será adotado aqui que o escalar mais leve é o que se comporta como o do Modelo Padrão: ou seja,  $\alpha \approx \beta$ . Veja que isso retorna os acoplamentos de Yukawa com  $h$  a 1, como era em 2.124.

## 2.7 Interações fortes

O grupo de simetria do Modelo Padrão que não foi mencionado ainda é o grupo de cor,  $SU(3)_c$ . A interação associada, chamada de interação forte, tem como bóson mediador o glúon  $G_\mu^a$  com  $a = 1 \dots 8$  e é responsável por manter os quarks em estados ligados. O nome dado a esse setor é QCD (Cromodinâmica Quântica). Cada quark é um tripleto por cor:

$$q = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{q} \\ \textcolor{green}{q} \\ \textcolor{blue}{q} \end{pmatrix} . \quad (2.141)$$

As interações fortes obedecem ao chamado confinamento de cor, que significa que os estados ligados devem ser singletos (QUIGG, 2013). A lagrangiana é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} &= -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \bar{q} i \gamma^\mu \left( i g_s \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a \right) q , \\ G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c . \end{aligned} \quad (2.142)$$

Na representação de tripleto, os geradores podem ser escolhidos como as matrizes de Gell-Mann  $\lambda^a$ . Os léptons são singletos, então os geradores são zero na sua representação. Fisicamente, isso significa que apenas quarks possuem carga de cor e trocam glúons.

O primeiro termo na lagrangiana descreve o propagador do glúon e suas auto-interações ilustradas na figura 49. As constantes  $f^{abc}$  são as constantes de estrutura do grupo  $SU(3)_c$ .

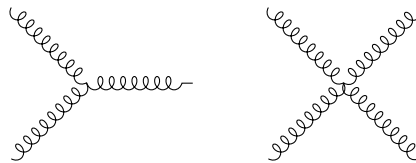


Figura 49 – Auto-interações entre glúons.

Apesar de ter sido mostrado que as partículas elementares adquirem suas massas através do mecanismo de Higgs, a matéria bariônica deve apenas uma pequena parte de seu conteúdo a esse processo. A maior contribuição vem na verdade da energia armazenada nas interações fortes nos hádrons: a massa do próton, por exemplo, depende principalmente da escala de energia  $\Lambda_{\text{QCD}}$ . Somente uma pequena fração vem da massa dos quarks (LINCOLN, 2017).

Outro fato importante é que a QCD enfrenta o problema de seu acoplamento efetivo nas escalas de energia consideradas (resultante das correções radiativas) ser muito grande para efetuar cálculos perturbativos (QUIGG, 2013). É necessário, por exemplo,

utilizar métodos computacionais (como QCD na rede; veja ([BORSANYI et al., 2021](#))), fenomenológicos (como as relações de dispersão; veja ([DAVIER et al., 2020](#))) ou retorno às soluções das equações de movimento clássicas (como a hipótese de instantons; veja [SCHÄFER; SHURYAK](#)).

## 3 Resultados

### 3.1 Anomalia eletrônica

Foi mostrado que eliminando os infinitos através da redefinição dos parâmetros da teoria, a modificação do vértice através de loops introduz a anomalia magnética, dada de forma completa por:

$$a_l = a_l^{\text{QED}} + a_l^{\text{fraca}} + a_l^{\text{forte}} . \quad (3.1)$$

Para o elétron, sua massa pequena comparada às outras implica que a maior contribuição vem da QED. Sendo que apesar de eliminar os infinitos da teoria, a renormalização introduz a incapacidade de prever o valor dos parâmetros físicos que absorvem as quantidades divergentes. Assim como na mecânica dos fluidos, parâmetros como a viscosidade e a velocidade do som devem ser medidos para que então a teoria seja capaz de fazer previsões, na QED o mesmo acontece com a constante de estrutura fina. Para obter os parâmetros de fluidos a partir de primeiros princípios, é necessário conhecer a teoria em escalas de distância bem menores; da mesma forma, a carga elétrica só pode ser prevista por uma teoria mais fundamental que se manifeste a escalas de energia maiores (ou comprimentos menores): a divergência ultravioleta é meramente um indicativo de que a QED não é essa teoria fundamental. Isso implica que é necessário medir ou a constante de estrutura fina ou a anomalia eletrônica, usando a teoria para conectar uma dessas quantidades à outra.

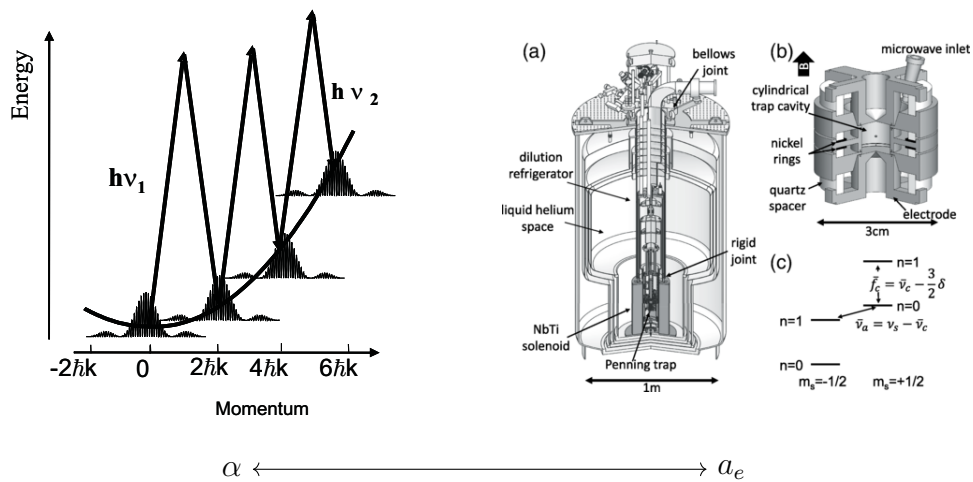


Figura 50 – Medição da constante de estrutura fina por interferometria atômica à esquerda (CADORET et al., 2009) e da anomalia eletrônica à direita (FAN et al., 2023). As duas quantidades são conectadas através da teoria: dada uma, é possível encontrar a outra usando a QED.

A figura 50 apresenta as duas possibilidades. A medição mais precisa atualmente para a constante de estrutura fina é através de interferometria atômica, que incide átomos pesados com dois lasers de cada lado e mede a velocidade de recuo através da translação na distribuição de momenta. Os elementos usados são cério e rubídio. Já a medição da anomalia eletrônica consiste em manter um elétron numa região de campo magnético com um pequeno gradiente e medir as frequências de spin ( $\nu_s$ ) e cíclotron ( $\bar{\nu}_c$ ) através de transições entre seus níveis de energia. Esses diferentes métodos encontram atualmente discrepâncias que podem ser expressas ou através do momento magnético:

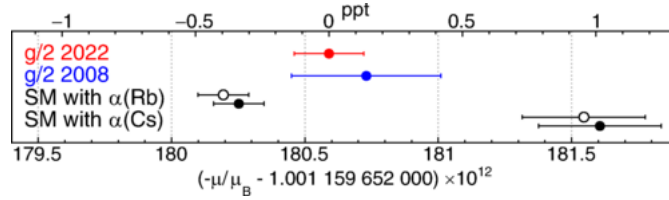


Figura 51 – Discrepâncias no momento magnético eletrônico. (FAN et al., 2023)

Ou, equivalentemente, através da constante de estrutura fina:

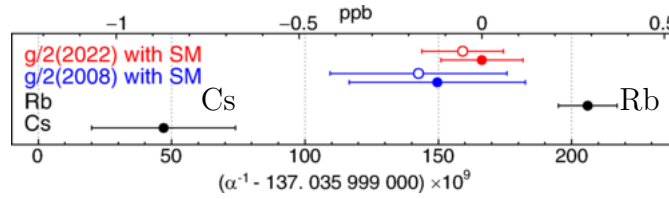


Figura 52 – Discrepâncias na constante de estrutura fina. (FAN et al., 2023)

A relação entre a anomalia e a constante  $\alpha$  é escrita usualmente na forma:

$$a_l^{\text{QED}} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^n + a_l^{\text{outros léptons}}. \quad (3.2)$$

Foi comentado anteriormente que  $C_2 = 1/2$ , com o cálculo se tornando rapidamente mais difícil devido à imensa quantidade de diagramas em ordens superiores. As imagens abaixo apresentam os diagramas relevantes para ordem  $\alpha^2$  e  $\alpha^3$  como exemplo.

Mass-independent 2-loop Feynman diagrams in  $a_e$

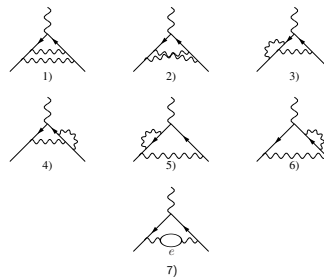
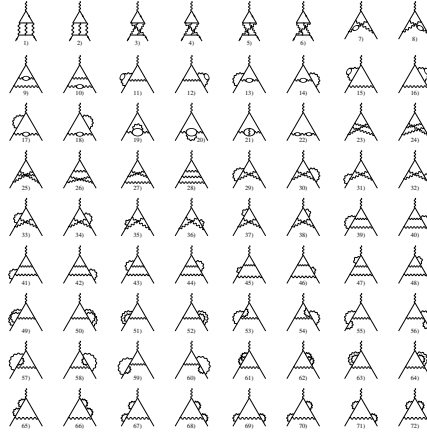


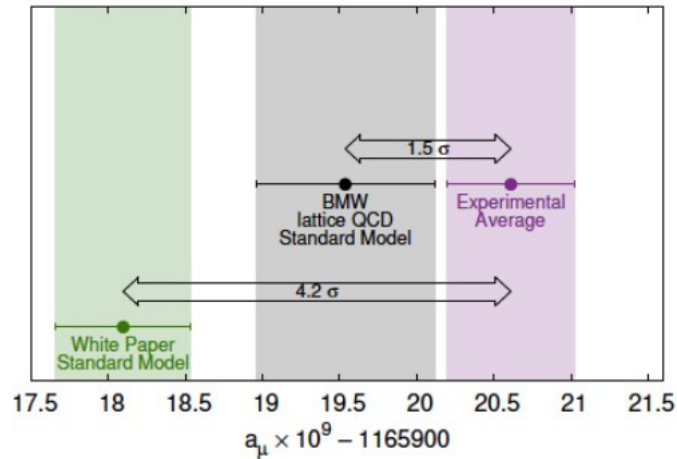
Figura 53 – Contribuições de ordem  $\alpha^2$  para  $a_e$ . (NYFFELER, 2016)

Claramente, o cálculo de todos os diagramas exige métodos computacionais.

Mass-independent 3-loop Feynman diagrams in  $a_e$ Figura 54 – Contribuições de ordem  $\alpha^3$  para  $a_e$ . (NYFFELER, 2016)

## 3.2 Anomalia muônica

O momento magnético do múon em princípio também depende da discrepância advinda dos diferentes valores para a constante de estrutura fina. Entretanto, essa variação é sobreposta pela incerteza característica das interações fortes e processos envolvendo hádrons. A figura 55 apresenta o valor medido em roxo, a predição através de fenomenologia e relações de dispersão em verde e através da QCD na rede em preto. O método em verde consiste em relacionar os loops a seções de choque hadrônicas que são medidas em laboratório. Ele produz um desvio de  $4.2\sigma$  em relação ao valor experimental, e é a esse método que se referem quando se fala do problema do  $(g - 2)$  do múon. Porém, é necessário salientar que mesmo optando aqui pelo valor em verde como representativo da predição teórica, existem críticas que favorecem a predição em preto indicando, por exemplo, incertezas nas seções de choque hadrônicas.

Figura 55 – O  $(g - 2)$  do múon. (COTROZZI; SORBARA, 2022)

É possível utilizar o modelo de dois dubletos de Higgs tipo X (específico de lépton) para eliminar a discrepância de  $4.2\sigma$ . Os diagramas mais relevantes são os de escalares neutros ( $\phi = h, H, A$ ) a nível de um loop (figura 56 à esquerda) e do tipo Barr-Zee (figura 56 à direita). O escalar mais leve  $h$  é alinhado com o Higgs do modelo padrão, então ele não contribui para a discrepância. O diagrama envolvendo  $H^\pm$  é desprezível aqui.

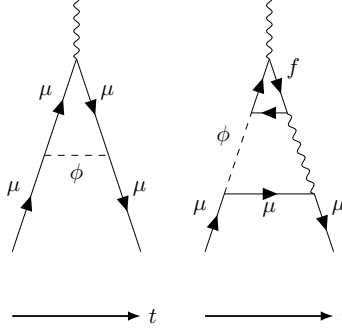


Figura 56 – Diagramas relevantes no 2HDM tipo X.

A nível de um loop,  $H$  contribui positivamente e  $A$ , negativamente:

$$\Delta a_\mu^{1\text{ loop}} = \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{m_\mu}{v} \right)^2 \left\{ (\xi_H^l)^2 \left[ 2I_1 \left( \frac{m_\mu^2}{m_H^2} \right) - I_2 \left( \frac{m_\mu^2}{m_H^2} \right) \right] - (\xi_A^l)^2 I_2 \left( \frac{m_\mu^2}{m_A^2} \right) \right\}; \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} I_1(x) &= 1 + \frac{1-2x}{2x\sqrt{1-4x}} \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-4x}}{1-\sqrt{1-4x}} \right) + \frac{1}{2x} \ln x \\ &\approx x \left( -\frac{3}{2} - \ln x \right) + x^2 \left( -\frac{16}{3} - 4 \ln x \right) + \mathcal{O}(x^3) \quad (x \ll 1); \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} I_2(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1-3x}{2x^2\sqrt{1-4x}} \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-4x}}{1-\sqrt{1-4x}} \right) + \frac{1-2x}{2x^2} \ln x \\ &\approx x \left( -\frac{11}{6} - \ln x \right) + x^2 \left( -\frac{89}{12} - 5 \ln x \right) + \mathcal{O}(x^3) \quad (x \ll 1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Quanto aos diagramas Barr-Zee, os sinais invertem (na expressão abaixo,  $N_c^f$  e  $Q_f$  são, respectivamente, o número de cores e a carga do férmion  $f$  no loop):

$$\Delta a_\mu^{\text{Barr-Zee}} = -\frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{m_\mu}{v} \right)^2 \sum_f N_c^f Q_f^2 \left\{ \xi_H^l \xi_H^f f \left( \frac{m_f^2}{m_H^2} \right) - \xi_A^l \xi_A^f g \left( \frac{m_f^2}{m_A^2} \right) \right\}; \quad (3.6)$$

$$f(z) = \frac{z}{2} \int_0^1 dx \frac{1-2x(1-x)}{x(1-x)-z} \ln \left( \frac{x(1-x)}{z} \right); \quad (3.7)$$

$$g(z) = \frac{z}{2} \int_0^1 dx \frac{1}{x(1-x)-z} \ln \left( \frac{x(1-x)}{z} \right). \quad (3.8)$$

A figura 57 apresenta as regiões do espaço de parâmetros  $(m_A, t_\beta)$  que resolvem a discrepância:  $\Delta a_\mu \equiv \Delta a_\mu^{1\text{ loop}} + \Delta a_\mu^{\text{Barr-Zee}} = a_\mu^{\text{EXP}} - a_\mu^{\text{SM}} = (25.1 \pm 5.9) \cdot 10^{-10}$ . Foi fixado

$m_H = 300$  GeV. É considerado  $2m_A < m_h$  (o que possibilita, por exemplo, vínculos através do decaimento  $h \rightarrow AA$ ). Note que esse é um diagrama de fase:  $m_A$  e  $\tan\beta$  não estão correlacionados, a única dependência é de  $\Delta a_\mu$  em ambas essas quantidades. Os contornos vistos na figura 57 são as curvas de nível de  $\Delta a_\mu$  para os valores que limitam 1, 2 e  $3\sigma$ .

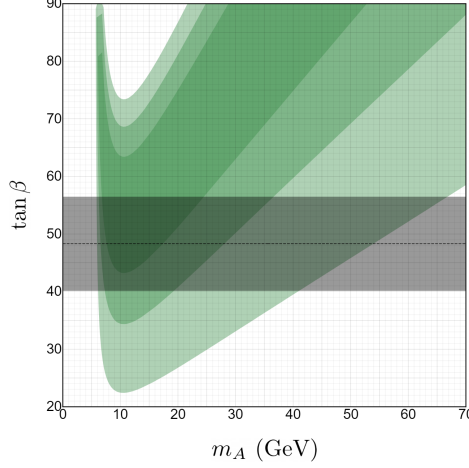


Figura 57 – Restrições sobre o espaço  $(m_A, t_\beta)$  com  $m_H = 300$  GeV usando o  $(g - 2)$  do múon. As regiões em verde correspondem, da mais escura para a mais clara, às permitidas a  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  e  $3\sigma$  de confiança.

A faixa em preto apresenta a faixa de valores para  $t_\beta$  obtido por vínculos cosmológicos a  $1\sigma$  de confiança:  $\cot\beta = 0.0207 \pm 0.0035$ . Imagina-se que a razão  $\mu \equiv m_e/m_p$  pode variar com o tempo (ou o redshift  $z$ ) através de uma variação no vev do escalar que dá massa ao elétron. Em (CALMET, 2017), isso é feito para um dubleto. Fizemos para o 2HDM tipo X, mas o artigo ainda está em fase de redação (MENDONÇA et al.). Já que o modelo adotado é específico de lépton, isso não afeta a massa do próton (de toda forma, esta vem principalmente da escala de energia da QCD, então isso apenas formaliza o que em outro caso seria uma aproximação razoável). Fica possível escrever:

$$\mu(z) \equiv \frac{m_e(z)}{m_p(\Lambda_{\text{QCD}})} = \frac{y_e v_2}{\sqrt{2} m_p(\Lambda_{\text{QCD}})} \cot\beta(z) . \quad (3.9)$$

Isso permite estabelecer valores permitidos para  $\cot\beta$ . Fixando o valor central  $t_\beta = 48.216$ , correspondente à linha preta tracejada na figura 57, é possível analisar a variação de  $\Delta a_\mu$  com  $m_A$  apenas (figura 58). O comportamento crítico ao redor de  $m_A \approx 10.6$  GeV, observado também na figura 57, tem relação com a concorrência entre a contribuição a nível de 1 loop (que é negativa) e a nível de Barr-Zee (que é positiva).

Observe que há uma mudança das regiões de confiança na passagem da figura 57 para a 58. Isso é porque adotamos uma distribuição estatística do tipo  $\chi^2$  com:

$$\chi^2 = \left( \frac{10^{10} \Delta a_\mu - 25.1}{5.9} \right)^2 . \quad (3.10)$$



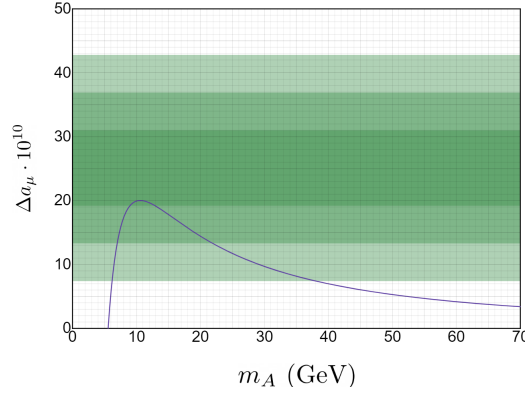


Figura 58 –  $\Delta a_\mu$  em função de  $m_A$  com  $t_\beta = 48.216$  e  $m_H = 300$  GeV.

Na fig. 57, há dois parâmetros livres, significando que as regiões de 1, 2 e 3  $\sigma$  de confiança correspondem aos limites superiores de 2.30, 6.18 e 11.83 para  $\chi^2$  (respectivamente). Já na fig. 58, há apenas um parâmetro livre, então os limites superiores para  $\chi^2$  voltam a ser 1, 4 e 9. Veja (WORKMAN et al., cap. 40) para uma descrição mais detalhada.

### 3.3 Outros vínculos e modelos

Também é possível resolver o problema da anomalia magnética usando outros vínculos e/ou outros modelos de dois dubletos escalares. Em (KIM, 2022), é usado o 2HDM tipo X e o problema do  $(g-2)$  do múon é considerado em conjunto com a anomalia da massa do  $W$ , que atualmente também manifesta uma discrepância entre teoria e experimento. Foi possível notar uma leve discrepância entre as regiões de  $2\sigma$  de confiança das figuras 57 e 59, que se deve ao fato de KIM usar apenas o lépton  $\tau$  no loop do tipo Barr-Zee enquanto nossa abordagem usa todos os férmions. Os léptons contribuem de forma mais intensa no loop Barr-Zee por possuírem acoplamento proporcional a  $\tan \beta$ , enquanto para quarks ele é proporcional a  $\cot \beta$  (veja a eq. 2.139 com  $\alpha = \beta$  já que  $h \sim H^{\text{SM}}$ ).

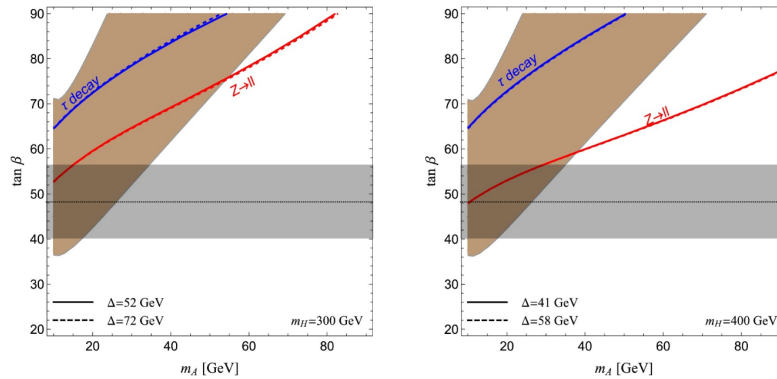


Figura 59 – Vínculos sobre o 2HDM dados por (KIM, 2022). A região em marrom é a permitida pelo  $(g-2)$  a  $2\sigma$  de confiança. As curvas coloridas em vermelho e azul impõem limites superiores para  $t_\beta$  baseados em testes de universalidade leptônica (decaimento do  $\tau$  e do  $Z$  em par de léptons).

As curvas coloridas aparecem em cheio e em tracejado na figura 59 para representar os limites inferior e superior para  $\Delta \equiv m_{H^\pm} - m_H$ , respectivamente, encontrados analisando a anomalia da massa do W. A região em preto foi sobreposta aos vínculos de KIM e representa  $\cot \beta = 0.0207 \pm 0.0035$  obtida pela análise da evolução de  $\mu(z)$ .

Em (BOTELLA et al., 2022), o setor de Yukawa leptônico é substituído por acoplamentos gerais com conservação de sabor que eliminam a necessidade de uma proporcionalidade com as massas. Isso permite resolver tanto a anomalia muônica quanto a eletrônica (para ambas as possibilidades  $\alpha(\text{Rb})$  e  $\alpha(\text{Cs})$  neste caso), bem como o problema da massa do W.

Sendo que o problema do  $(g-2)$  não é o único a baixas energias. Em (GHOSH; KO, 2023), é considerado um modelo de extensão no setor escalar que troca a simetria discreta  $Z_2$  por uma contínua  $U(1)_H$ , introduzindo também um escalar singlete sob o grupo eletrofraco em adição aos dois dubletos. O novo gerador produz um bóson de gauge neutro  $Z'$  que pode explicar a anomalia do Berílio, associada à aparente observação de uma partícula leve de massa  $m_{Z'} = 17$  MeV no decaimento  $\text{Be}^* \rightarrow \text{Be} + X \rightarrow \text{Be} + e^- e^+$ . Tanto o vetor  $Z'$  quanto o escalar leve  $h$  também produzido nesse modelo contribuem para solucionar o  $(g-2)$  do múon. Esse artigo também busca resolver discrepâncias em medições de neutrinos através das partículas  $Z'$  e  $h$ , introduzindo em conjunto um mecanismo de geração de massa para os léptons neutros.

Além de limitar o espaço de parâmetros do modelo através da exigência de que ele resolva a discrepância analisada, esses trabalhos consideram também vínculos sobre decaimentos, espalhamentos, testes de universalidade leptônica e quaisquer outros fenômenos que possam ser afetados pelas novas partículas e interações introduzidas.

### 3.4 Perspectivas futuras

Além de estender o setor escalar através de modelos de dois dubletos, ou até dois dubletos e um singlete com a simetria  $Z_2$  trocada por um grupo abeliano  $U(1)_H$ , é possível pensar também em extensões ao grupo de simetria eletrofraco. Em vez de utilizar o grupo  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , podemos pensar na extensão  $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ , que gera o chamado modelo 331. Leia, por exemplo, (SILVA, 2015). Note que as interações fortes regidas pelo grupo  $SU(3)_C$  não são afetadas.

Esperamos resolver no modelo 331 tanto a anomalia do múon quanto a do elétron (como foi feito por BOTELLA et al.), bem como tratar de mecanismos seesaw invertidos para gerar a massa dos neutrinos ativos (de mão esquerda) e abordar a matéria escura através dos neutrinos ultra-leves estéreis (de mão direita) gerados nesse mecanismo. Tome (DIAS et al., 2012) como uma possível referência.

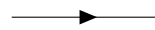
## 4 Conclusão

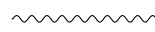
Concluimos que o 2HDM é capaz de resolver a discrepância do  $(g - 2)$  do múon, bem como (em outros modelos) o problema análogo para o elétron e outras anomalias experimentais como a da massa do W e o estudo do Berílio. Essa extensão do Modelo Padrão também tem consequências cosmológicas que podem ser medidas e usadas para vincular os parâmetros do modelo. Obtém-se o valor central de  $t_\beta = 48.216$  para a razão entre os valores esperados dos dubletos (a partir do estudo da evolução da razão  $\mu$ ) e  $m_A \gtrsim 10$  GeV,  $m_H \gtrsim 300$  GeV para resolver a discrepância em  $a_\mu$ . A variação de  $m_H$  nesse intervalo não afeta significativamente  $\Delta a_\mu$ , por isso foi tomado  $m_H = 300$  GeV. O escalar carregado é mais pesado que  $H$  mas deve ter uma massa próxima devido a vínculos de unitariedade, perturbatividade e estabilidade do vácuo, bem como a exigência de que se resolva o problema da massa do W (KIM, 2022). O mais leve ( $h$ ) é identificado como o bóson de spin 0 que foi observado no LHC com a massa de 125 GeV. Limitando o espaço de parâmetros dessa forma, cabe aos colisores sondarem as regiões obtidas. Note, no entanto, que os vínculos obtidos de colisões hadrônicas são atenuados pelo acoplamento pequeno entre quarks e escalares do modelo tipo X para  $\tan \beta > 10$  (lembre que esse acoplamento é proporcional a  $\cot \beta$ ). Daí o foco nas anomalias a baixas energias. É também por isso que no loop Barr-Zee, a maior contribuição vem do lépton  $\tau$ , seguido pelo múon. Os quarks top e bottom pouco importam para o cálculo, e os férmions mais leves são ainda mais insignificantes.

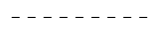
Em suma, o  $(g - 2)$  do múon é uma porta para física nova. A precisão está sendo melhorada cada vez mais, com a disparidade atualmente em  $4.2\sigma$  mas com perspectivas de aumentar (VENANZONI, 2023). É esperado também que uma vez resolvido o problema dos valores discrepantes para a constante de estrutura fina ( $\alpha(\text{Rb})$  vs  $\alpha(\text{Cs})$  vs  $\alpha(g_e)$ ), uma maior precisão na medida da anomalia eletrônica permitirá usar o  $(g - 2)$  do elétron como outra forma de sondar modelos de extensão. É claro que isso já é feito em alguns trabalhos, como em (BOTELLA et al., 2022), mas o problema dominante ainda é o da anomalia muônica. Na verdade, até este apresenta atualmente a discrepância no setor hadrônico, que poderia reduzir a disparidade para  $1.5\sigma$ , mas ainda está sendo estudada (figura 55). Perceba que o elétron só sente o problema da estrutura fina (figuras 51 e 52), pois sua pequena massa torna a contribuição hadrônica ínfima, de modo que variações no cálculo do setor forte não afetam  $a_e$  de forma significativa. Para o múon, que é 200 vezes mais pesado, acontece o contrário: os desvios-padrões nos cálculos hadrônicos se tornam bem mais relevantes e acabam sobrepondo as discrepâncias na estrutura fina.

## 5 Apêndice: Um pouco mais sobre o formalismo dos diagramas de Feynman

Para facilitar a leitura dos diagramas de Feynman, foi feito aqui um resumo desse formalismo. Todo diagrama consiste de **linhas externas** - que são as partículas observadas no experimento -, **vértices** - pontos do espaço-tempo onde ocorrem as interações - e **propagadores** (ou **partículas virtuais**), que conectam os vértices e não são observados diretamente. Na figura 40, por exemplo,  $O$ ,  $A$ ,  $B$  e  $C$  são vértices, enquanto o bóson  $Z$  que conecta  $O$  e  $A$ , o férmion que conecta  $A$  e  $B$  e o fóton que conecta  $B$  e  $C$  são propagadores. Todos os outros segmentos "vão a infinito" (ou até o detector) e são as linhas externas. O estilo da linha externa/propagador indica a representação do campo por Lorentz (veja a seção 2.3.2):

 = férmion

 = bóson vetorial

 = bóson escalar

Note que apenas o férmion aparece com uma seta nessa ilustração, mas esse não é sempre o caso. A seta indica fluxo de carga (interna): nas figuras 40 e 41, os bósons vetoriais são neutros, daí a ausência de fluxo. Já na figura 36, o  $W^\pm$  é carregado e por isso recebe uma seta. Atente-se ao fato de que o fluxo de carga não acompanha necessariamente o fluxo temporal: a relação entre os dois define se a excitação do campo tratado é de partícula (operadores  $a$  e  $a^\dagger$ ) ou de anti-partícula (operadores  $b$  e  $b^\dagger$ ). Veja novamente a figura 36: o campo  $e$  é um elétron  $e^-$  quando acompanha o fluxo temporal no diagrama da esquerda (decaimento beta), mas um pósitron  $e^+$  quando seu fluxo contraria a seta do tempo no diagrama da direita (decaimento do múon positivo, ou anti-múon, que é identificado assim seguindo a mesma ideia). É por isso que na figura 40, o vértice  $C$  representa o início do chuveiro de pares elétron-pósitron.

Quando a seta do tempo não aparece explicitamente, ela pode ser identificada através do sentido do momento representado por um vetor separado do campo, como na figura 30. A figura 18 que ilustra as expressões analíticas  $\psi \sim a + b^\dagger$  e  $\bar{\psi} \sim b + a^\dagger$  foi feita seguindo essa ideia. Em caso de ausência de seta do tempo e seta de momento, entenda que o tempo flui no mesmo sentido da carga (um exemplo é a figura 20).

## Propagadores

As partículas virtuais não possuem momento "na casca", ou seja, não obedecem à relação  $p^2 = m^2$  ilustrada na figura 11. O fator analítico no cálculo da amplitude associado a essa parte do diagrama coloca  $p^2 = m^2$  como uma ressonância:

$$\begin{aligned}
 \text{---}\blacktriangleright\text{---} &= \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 \text{massa nula} \quad \text{~~~~~} &= \frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \\
 \text{massivo} \quad \text{~~~~~} &= \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / p^2)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 \text{-----} &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}
 \end{aligned}$$

É por essa razão que aparece o pico em 125 GeV na figura 1: o Higgs aparece como um propagador num dos diagramas que produz par de fótons.

## Nível de árvore vs. nível de loop

Os diagramas a nível de árvore são os que não requerem integração sobre o momento das partículas virtuais: eles são definidos de maneira inequívoca através da conservação de momento em cada vértice (conhecendo, é claro, os momenta externos). Por exemplo, na figura 36, o  $W^\pm$  carrega a diferença de momento entre nêutron e próton (à esquerda) ou entre anti-neutrino muônico e múon positivo (à direita).

Sendo que em alguns diagramas, a conservação de momento não define os momenta de cada propagador individualmente (apenas a soma entre eles). Esses são os diagramas a nível de loop, que produzem infinitos através das integrações no momento (como a da figura 22) e exigem a redefinição dos parâmetros da teoria. Executada a renormalização, o resultado se torna finito e é chamado de **correção radiativa**. Isso é porque o nível de árvore permanece a contribuição principal (quando ele existe), correspondendo à menor ordem na expansão perturbativa. As ordens superiores se tornam progressivamente mais desprezíveis devido a potências maiores do acoplamento inferior a 1.

Quando se trata do momento magnético, o nível de árvore produz  $g = 2$  (primeiro diagrama na figura 30) enquanto as ordens superiores (nível de loop) resultam na anomalia  $a \equiv (g - 2)/2$ .

# Referências

ANDERSON, C. D. The positive electron. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 43, p. 491–494, Mar 1933. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.43.491>>. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 29.

ATLAS. <<https://atlas.cern/higgs-boson-landmark-discovery>>. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 13.

BARANGER, M.; BETHE, H. A.; FEYNMAN, R. P. Relativistic correction to the lamb shift. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 92, p. 482–501, Oct 1953. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.92.482>>. Citado na página 43.

BETHE, H. A. The electromagnetic shift of energy levels. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 72, p. 339–341, Aug 1947. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.72.339>>. Citado na página 39.

BETHE, H. A.; SALPETER, E. E. *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms*. [S.l.: s.n.], 1957. Citado na página 29.

BORSANYI, S. et al. Leading hadronic contribution to the muon magnetic moment from lattice qcd. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 593, n. 7857, p. 51–55, abr. 2021. ISSN 1476-4687. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41586-021-03418-1>>. Citado na página 69.

BOTELLA, F. J. et al. Muon and electron  $g - 2$  anomalies in a flavor conserving 2hdm with an oblique view on the cdf  $m_w$  value. *The European Physical Journal C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 82, n. 10, out. 2022. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10893-x>>. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 77.

BRANCO, G. et al. Theory and phenomenology of two-higgs-doublet models. *Physics Reports*, v. 516, n. 1, p. 1–102, 2012. ISSN 0370-1573. Theory and phenomenology of two-Higgs-doublet models. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157312000695>>. Citado 2 vezes nas páginas 64 e 66.

CADORET, M. et al. Determination of the fine structure constant with atom interferometry and bloch oscillations. 01 2009. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 70.

CALMET, X. Cosmological evolution of the higgs boson's vacuum expectation value. *The European Physical Journal C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 77, n. 11, nov. 2017. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5324-5>>. Citado na página 74.

CHENG, T.-P.; LI, L.-F. *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 1988. Citado na página 55.

COTROZZI, L.; SORBARA, M. Measurement of the anomalous spin precession frequency  $\omega_a$  in the Muon  $g - 2$  experiment at Fermilab. In: *Proceedings of 41st International Conference on High Energy physics — PoS(ICHEP2022)*. [S.l.: s.n.], 2022. v. 414, p. 749. Citado 4 vezes nas páginas 10, 14, 51 e 72.

- DAVIER, M. et al. A new evaluation of the hadronic vacuum polarisation contributions to the muon anomalous magnetic moment and to  $\alpha(m_Z^2)$ . *The European Physical Journal C*, Springer Science and Business Media LLC, v. 80, n. 3, mar. 2020. ISSN 1434-6052. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-7792-2>>. Citado na página 69.
- DIAS, A. G. et al. Simple realization of the inverse seesaw mechanism. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 86, n. 3, ago. 2012. ISSN 1550-2368. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.86.035007>>. Citado na página 76.
- EISBERG, R.; RESNICK, R. *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 1985. Citado na página 20.
- ENZ, C. P. 50 years ago pauli invented the neutrino. *Helvetica Physica Acta*, Vol. 54, 1981. Citado na página 50.
- FAN, X. et al. Measurement of the electron magnetic moment. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 130, p. 071801, Feb 2023. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.130.071801>>. Citado 3 vezes nas páginas 10, 70 e 71.
- GHOSH, S.; KO, P. *Explaining ATOMKI,  $(g - 2)_\mu$ , and MiniBooNE anomalies with light mediators in  $U(1)_H$  extended model*. 2023. Citado na página 76.
- GLASHOW, S. L.; WEINBERG, S. Natural conservation laws for neutral currents. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 15, p. 1958–1965, Apr 1977. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.1958>>. Citado na página 65.
- GOMES, R. 2024. Disponível em: <[https://docs.google.com/presentation/d/1GgDTnaxJIyvwhaPQAjkz2\\_qp\\_BKP4eDHgtrchD4kyE4/edit?usp=sharing](https://docs.google.com/presentation/d/1GgDTnaxJIyvwhaPQAjkz2_qp_BKP4eDHgtrchD4kyE4/edit?usp=sharing)>. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 15.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 19, 24, 29, 39 e 40.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Elementary Particles 2nd Edition*. [S.l.]: Wiley VCH, 2008. Citado na página 51.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2017. Citado na página 18.
- HAAR, R. R.; CURTIS, L. J. The thomas precession gives  $g_e - 1$ , not  $g_e/2$ . *American Journal of Physics*, v. 55, p. 1044–1045, 1987. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:122582692>>. Citado na página 22.
- HASERT, F. et al. Search for elastic muon-neutrino electron scattering. *Physics Letters B*, v. 46, n. 1, p. 121–124, 1973. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269373904942>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 56.
- HASERT, F. et al. Observation of neutrino-like interactions without muon or electron in the gargamelle neutrino experiment. *Physics Letters B*, v. 46, n. 1, p. 138–140, 1973. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269373904991>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 56.



HAYWOOD, S. *Symmetries and Conservation Laws in Particle Physics: An Introduction to Group Theory for Particle Physicists*. London, UK: Imperial College Press, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 54.

KESHAVARZI, A.; KHAW, K. S.; YOSHIOKA, T. Muon  $g-2$ : A review. *Nuclear Physics B*, Elsevier BV, v. 975, p. 115675, fev. 2022. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2022.115675>>. Citado na página 14.

KIM, J. Compatibility of muon  $g-2$ , w mass anomaly in type-x 2hdm. *Physics Letters B*, v. 832, p. 137220, 2022. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269322003549>>. Citado 5 vezes nas páginas 10, 16, 75, 76 e 77.

LAMB, W. E.; RETHERFORD, R. C. Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 72, p. 241–243, Aug 1947. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.72.241>>. Citado na página 38.

LINCOLN, D. How Things Get Heavy: The Nature of Mass. *Phys. Teacher*, v. 55, n. 7, p. 401–405, 2017. Citado na página 68.

MAGGIORE, M. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxonia, UK: Oxford University Press, 2005. Citado na página 31.

MANDL, F.; SHAW, G. *Quantum Field Theory*. Hoboken, New Jersey: Wiley–Blackwell, 1993. Citado 7 vezes nas páginas 39, 40, 43, 44, 45, 48 e 50.

MELO, T. Neutrino masses in two higgs doublet models. Universidade Federal da Paraíba, Feb 2020. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/19693>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 64.

MENDONÇA, I. E. T. R. et al. The electron-to-proton mass ratio variation and constraints in the lepton-specific 2hdm. Unpublished. Citado na página 74.

MITRA, A. Hans bethe, quantum mechanics, and the lamb shift. *Resonance*, 2005. Citado na página 39.

MÜLLER-KIRSTEN, H. J. W.; WIEDEMANN, A. *Introduction to Supersymmetry*. [S.l.]: World Scientific, 2010. Citado na página 33.

NYFFELER, A. *Theoretical status of the muon  $g-2$* . 2016. Indico Johannes Gutenberg-Universität Mainz. Disponível em: <[https://indico.him.uni-mainz.de/event/1/contributions/20/attachments/28/29/g-2\\_Theory\\_MU\\_Mainz\\_Nyffeler.pdf](https://indico.him.uni-mainz.de/event/1/contributions/20/attachments/28/29/g-2_Theory_MU_Mainz_Nyffeler.pdf)>. Citado 3 vezes nas páginas 10, 71 e 72.

PASCHOS, E. A. Diagonal neutral currents. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 15, p. 1966–1972, Apr 1977. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.1966>>. Citado na página 65.

PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Boca Raton, Florida, USA: CRC Press, 2007. Citado 10 vezes nas páginas 30, 31, 34, 35, 36, 37, 38, 47, 48 e 49.



- QUIGG, C. *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions: Second Edition*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2013. Citado 7 vezes nas páginas 52, 54, 57, 60, 62, 64 e 68.
- ROUSSET, A. The discovery of weak neutral currents. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, v. 36, p. 339–362, 1994. ISSN 0920-5632. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0920563294907854>>. Citado na página 56.
- SAKURAI, J. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 22, 25 e 27.
- SCHÄFER, T.; SHURYAK, E. V. Instantons in qcd. *Reviews of Modern Physics*, American Physical Society (APS), v. 70, n. 2, p. 323–425, abr. 1998. ISSN 1539-0756. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.70.323>>. Citado na página 69.
- SEBENS, C. T. How electrons spin. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, v. 68, p. 40–50, 2019. ISSN 1355-2198. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S135521981830087X>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 30.
- SILVA, P. S. R. da. *A Brief Review on WIMPs in 331 Electroweak Gauge Models*. 2015. Citado na página 76.
- SPONTANEOUS symmetry breaking in the Higgs mechanism August 2012. In: . [s.n.], 2012. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:14867706>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 58.
- VENANZONI, G. *New results from the Muon g-2 Experiment*. 2023. Citado na página 77.
- WALCHER, T. The lamb shift in muonic hydrogen and the electric rms radius of the proton. *physics.atom-ph*, 2023. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2304.07035>>. Citado na página 48.
- WORKMAN, R. L. et al. Review of Particle Physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, v. 2022, n. 8, p. 083C01, 08 2022. ISSN 2050-3911. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/ptep/ptac097>>. Citado na página 75.
- WU, C. S. et al. Experimental test of parity conservation in beta decay. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 105, p. 1413–1415, Feb 1957. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.105.1413>>. Citado na página 51.
- XIN, X. Glashow-weinberg-salam model: An example of electroweak symmetry breaking. In: . [s.n.], 2007. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:11996012>>. Citado na página 55.
- ZELDOVICH, Y. B.; KOBZAREV, I. Y.; OKUN, L. B. Cosmological Consequences of the Spontaneous Breakdown of Discrete Symmetry. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, v. 67, p. 3–11, 1974. Citado na página 66.