UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARIA LAURIANE RODRIGUES BARBOSA

UM ESTUDO SOBRE O ENSINO DE MATRIZES NO NÍVEL MÉDIO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

João Pessoa - PB

2024

MARIA LAURIANE RODRIGUES BARBOSA

UM ESTUDO SOBRE O ENSINO DE MATRIZES NO NÍVEL MÉDIO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo

João Pessoa - PB

MAIO - 2024

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

B238e Barbosa, Maria Lauriane Rodrigues.
Um estudo sobre o ensino de matrizes no nível médio da educação básica / Maria Lauriane Rodrigues Barbosa. - João Pessoa, 2024.
48 p. : il.

Orientação: Rogéria Gaudencio do Rêgo.
TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Matemática no ensino médio. 2. Ensino de matrizes. 3. Estratégias de ensino de matemática. 4. Matemática. I. Rêgo, Rogéria Gaudencio do. II. Título.

UFPB/CCEN CDU 51(043.2)

Elaborado por Josélia Maria Oliveira da Silva - CRB-15/113

MARIA LAURIANE RODRIGUES BARBOSA

UM ESTUDO SOBRE O ENSINO DE MATRIZES DO NÍVEL MÉDIO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

João Pessoa, 09 / 05 / 2024

Banca Examinadora:

Rogéria Gaudencio do Rêgo

Profª. Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo – Orientadora (UFPB/DM)

Prof. Me. João Batista Alves Parente – Avaliador (UFPB/DM)

Vinicius Martins Varella

Prof. Dr. Vinicius Martins Varella – Avaliador (UFPB/CE)

Dedico este trabalho à minha família, e especialmente aos meus pais e avós, cujo apoio foram pilares fundamentais ao longo desta jornada acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de expressar minha gratidão a Deus. Sua luz iluminou meu caminho, guiando-me através dos desafios e fortalecendo minha fé em cada passo dado.

Agradeço imensamente aos meus queridos pais, Maria do Socorro Rodrigues de Araújo e Luciano Pascoal Barbosa. Não há palavras suficientes para expressar minha gratidão pelo amor, apoio e esforços feitos pela minha educação. Vocês foram os meus maiores incentivadores, inspirando-me a alcançar meus sonhos e me apoiando em todas as decisões.

Minha gratidão à toda minha família. Às minhas amadas irmãs e irmãos, em especial à minha irmã Katiana Rodrigues e ao meu cunhado Luan Ferreira. Meu profundo agradecimento pelo carinho de sempre e por me acolherem tão bem em sua casa.

Ao meu noivo, Everton Silva, agradeço por toda motivação e palavras de apoio. Estou profundamente grata por compartilhar não apenas esta jornada acadêmica, mas também a jornada da vida ao seu lado.

Aos meus colegas de Curso, que compartilharam comigo momentos de aprendizado, desafios e conquistas, expresso minha sincera gratidão. Suas trocas de experiências, colaboração, amizade e encorajamento foram enriquecedoras e contribuíram significativamente para o meu crescimento acadêmico e pessoal. Que este trabalho seja uma pequena forma de honrar todos aqueles que, de alguma maneira, contribuíram para o meu sucesso. Que possamos continuar caminhando juntos, compartilhando momentos de alegria e superação.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão à minha orientadora, Rogéria Gaudencio, por sua disponibilidade e por compartilhar seus conhecimentos, fornecer feedback construtivo e contribuir em meu crescimento acadêmico e profissional.

Agradeço aos membros da banca, por aceitarem fazer parte deste momento tão significativo. Estou verdadeiramente honrada por ter contado com o apoio e a atenção de vocês.

Também deixo aqui meus sinceros obrigada a cada professor responsável pela minha formação. Este TCC é o resultado de um esforço árduo, mas também de uma jornada repleta de aprendizado e crescimento pessoal.

RESUMO

O presente trabalho tem como temática o ensino do conteúdo Matrizes no Ensino Médio, e sua escolha ocorreu devido à sua relevância para a compreensão de conceitos fundamentais em Matemática e sua aplicabilidade em diversas áreas. Nosso objetivo central foi analisar as estratégias de ensino para o conteúdo de Matrizes no Ensino Médio, de uma professora de Matemática da escola pública na qual realizamos nosso Estágio Docente Supervisionado IV, onde buscamos identificar os desafios de compreensão do conteúdo enfrentados pelos alunos. Para o estudo, fizemos algumas menções de artigos relacionados ao ensino de Matrizes, bem como uma análise do conteúdo de matrizes nos currículos brasileiro, em especifico a Base Nacional Comum Curricular BNCC, além de indicação de recurso digital como auxiliador em Resolução de Problemas. Embora não tivéssemos a intenção de discutir sobre a aprendizagem do conteúdo, também levantamos as dificuldades dos estudantes na resolução de cinco questões envolvendo matrizes de uma avaliação aplicada pela professora, nessa coleta de dados tentamos fazer um levantamento de quantitativo de acertos, e buscamos identificar as possíveis estratégias de resolução, de cada questão analisada. Os resultados revelaram altos índices de erros nas respostas das questões da avaliação, indicando dificuldades dos alunos no conteúdo. Os erros cometidos apontam para a necessidade de revisão das estratégias de ensino observadas e de proposição de atividades que estimulem a aplicação prática de elementos estudados em Matrizes, visando melhorar a compreensão e o desempenho dos estudantes

Palavras-chave: Matemática no Ensino Médio. Ensino de Matrizes. Estratégias de ensino de Matemática.

ABSTRACT

The present work has as its theme the teaching of Matrices content in High School, and its choice was due to its relevance for understanding fundamental concepts in Mathematics and its applicability in different areas. Our central objective was to analyze the teaching strategies for the content of Matrices in High School, of a Mathematics teacher from the public school in which we carried out our Supervised Teaching Internship IV, where we sought to identify the challenges faced by students in understanding the content. For the study, we made some mentions of articles related to the teaching of Matrices, as well as an analysis of the content of matrices in Brazilian curricula, specifically the National Common Curricular Base BNCC, in addition to indicating a digital resource as an aid in Problem Solving. Although we did not intend to discuss learning the content, we also raised students' difficulties in resolving five questions involving matrices of an assessment applied by the teacher. In this data collection we tried to survey the number of correct answers, and we sought to identify the possible resolution strategies for each issue analyzed. The results revealed high rates of errors in answering the assessment questions, indicating students' difficulties in the content. The mistakes made point to the need to review the teaching strategies observed and propose activities that encourage the practical application of elements studied in Matrices, aiming to improve students' understanding and performance.

Keywords: Mathematics in High School. Teaching Matrices. Mathematics teaching strategies.

LISTA DE FIGURAS

Figura 01. Exemplo de sistema explorado por estudantes do Ensino Médio. 24

Figura 02. Representação gráfica do sistema da Figura 01. 24

Figura 03. Tabela de codificação.. 26

Figura 04. Tabela de codificação do desafio 27

Figura 05. Segundo desafio 28

Tabela 06. Número de acerto e erros nas questões 6 a 10 da avaliação. 30

Figura 07. Resposta correta da Questão 6, produzida por um aluno da turma. 31

Figura 08. Resposta errada da Questão 6, produzida por um aluno da turma. 32

Figura 09. Resposta quase toda certa para a Questão 7, produzida por um aluno da turma. ... 33

Figura 10. Resposta errada para a Questão 7, produzida por outro aluno da turma. 34

Figura 11. Resposta certa para a Questão 8, produzida por um aluno da turma. 35

Figura 12. Resposta errada para a Questão 8, produzida por outro aluno da turma. 35

Figura 13. Enunciado da Questão 9. 36

Figura 14. Resposta certa para a Questão 9, produzida por um aluno da turma. 37

Figura 15. Resposta certa para "a" e errada "b" Questão 9, produzida por um aluno da turma. 37

Figura 16. Resposta certa para a Questão 10, produzida por outro aluno da turma.................38

Figura 17. Resposta errada para a Questão 10, produzida por um aluno da turma. 39

SUMÁRIO

1. INTRODUZINDO O TEMA DA PESQUISA 09

1.1 UMA BREVE APRESENTAÇÃO DO TEMA E OBJETIVOS DA PESQUISA 09

1.2 METODOLOGIA DA PESQUISA 10

1.3 ESTRUTURA DO PRESENTE TEXTO 12

2. BREVE RECORTE HISTÓRICO E CONCEITUAL DE MATRIZES 13

2.1 O SURGIMENTO DAS MATRIZES 13

2.2 DEFINIÇÕES BÁSICAS ASSOCIADAS A MATRIZES 14

2.3 ALGUMAS MATRIZES ESPECIAIS 15

2.4 OPERAÇÕES COM MATRIZES 16

2.4.1 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES 16

2.4.2 MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO (ESCALAR) POR UMA MATRIZ E MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES 17

2.5 SOBRE O ENSINO DE MATRIZES 19

2.6 O CONTEÚDO DE MATRIZES EM DOCUMENTOS DEFINIDORES DO CURRÍCULO BRASILEIRO 21

3. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS 26

CONSIDERAÇÕES FINAIS 41

REFERÊNCIAS 43

ANEXOS 45

1. INTRODUZINDO O TEMA DA PESQUISA

1.1 UMA BREVE APRESENTAÇÃO DO TEMA E OBJETIVOS DA PESQUISA

A educação escolar é um dos pilares fundamentais para o desenvolvimento e progresso de indivíduos, sociedades e nações. Sua qualidade pode influenciar positiva ou negativamente vários aspectos da vida humana e, consequentemente, a estrutura de um país. No âmbito da educação escolar, em nosso trabalho destacamos particularmente a importância da Matemática, disciplina fundamental que desempenha um papel essencial na formação dos estudantes, em razão de seu uso no cotidiano pessoal e profissional e em outras áreas de conhecimento.

Mesmo sendo fundamental, o ensino de Matemática na Educação Básica apresenta algumas adversidades. Vários aspectos podem dificultar a aprendizagem do aluno, por exemplo, a complexidade do conteúdo, a falta de interesse do discente, entre outros aspectos. Domenico et al (2020) destacam, nesse contexto, a ausência ou poucas oportunidades de formação continuada para os professores em Matemática; o pouco tempo que pode ser dedicado à realização e atividades usando metodologias diferenciadas, como as novas tecnologias; e falta de hábito de estudo por parte dos alunos. Esses e outros motivos são empecilhos que influenciam diretamente nos resultados do processo educativo.

Nosso foco de estudo no presente trabalho é o ensino de Matrizes, estruturas matemáticas que auxiliam a manipulação de dados, facilitam a resolução de sistemas de equações, possibilitam a realização de transformações geométricas, dentre outras aplicações. “As matrizes são bastante utilizadas no campo da tecnologia, em especial, no desenvolvimento de animações por meio de computação gráfica e no trabalho com programação. Além disso, a resolução de televisores e monitores, bem como a de câmeras digitais, é um dos exemplos de aplicação envolvendo cálculos matriciais” (Bonjorno, et al., 2020, p.12).

Esse trabalho justifica-se pela importância de estudar Matrizes no Ensino Médio, pois seu conhecimento oferece uma base para compreender aplicações de conceitos fundamentais em Matemática em outras áreas. Sendo assim, neste trabalho tivemos como objetivo central analisar as estratégias de ensino para o conteúdo de Matrizes no Ensino Médio, identificando os desafios de compreensão do conteúdo enfrentados pelos alunos. Como objetivos específicos, delimitamos o que segue:

- Levantar informações sobre a participação dos estudantes nas aulas sobre o conteúdo de Matrizes e as dificuldades de compreensão do conteúdo indicadas por eles em sala de aula;
- Analisar os resultados da avaliação aplicada pela docente, sobre o tema, levantando estratégias de resolução, acertos e erros dos alunos incluindo métodos de cálculo, raciocínio e aplicação dos conceitos aprendidos.

Para o levantamento de dados do estudo, em relação ao conteúdo, buscamos identificar se o professor de Matemática utiliza explicações envolvendo o cotidiano; quais materiais e recursos didáticos utiliza; e quais as dificuldades apresentadas pelos estudantes ao longo das aulas envolvendo o conteúdo destacado.

1.2 METODOLOGIA DA PESQUISA

O presente estudo é de natureza qualitativa, ou seja, na qual os aspectos quantitativos não foram tratados estatisticamente, do tipo Estudo de Campo (Severino, 2013). Severino (2013, p.107) afirma que

> "[N]a pesquisa de campo, o objeto/fonte é abordado em seu meio ambiente próprio. A coleta dos dados é feita nas condições naturais em que os fenômenos ocorrem, sendo assim diretamente observados, sem intervenção e manuseio por parte do pesquisador. Abrange desde os levantamentos (*surveys*), que são mais descritivos, até estudos mais analíticos".

A pesquisa foi realizada em uma escola estadual da cidade de Pedras de Fogo, no interior da Paraíba, representativa de instituições de Ensino Médio da região. O principal participante da pesquisa foi a professora de Matemática da Escola, que leciona no Ensino Médio, cujas estratégias de ensino para o ensino do conteúdo de Matrizes foram consideradas na pesquisa.

Também participaram os alunos do 2º ano desse nível de escolaridade matriculados na escola. Esse ano foi escolhido devido à sua posição no ciclo de Ensino Médio, no qual o tópico de Matrizes é geralmente abordado. A turma era composta por 22 alunos.

A coleta de dados foi baseada em cinco questões de uma avaliação aplicada na turma pela docente (Anexo 2), parcialmente relacionada ao conteúdo de Matriz, pois na composição da prova haviam outras questões envolvendo outras temáticas. Porém nosso objeto de estudo é o conteúdo de Matrizes, com isso só observamos as questões relacionadas ao tema. Na análise das respostas das questões observamos o quantitativo de acertos e erros, as estratégias de resolução adotadas pelos estudantes e as indicações das causas de erros.

1.3 ESTRUTURA DO PRESENTE TEXTO

Nosso texto está estruturado em três Capítulos, sendo que no primeiro contam, além da apresentação do tema e dos Objetivos Geral e Específicos da pesquisa, a Metodologia que adotamos.

O segundo Capítulo é formado por um breve recorte histórico sobre o tema, além da apresentação de alguns elementos formais relacionados ao conteúdo de Matrizes, assim como trazemos uma discussão sobre o ensino de Matrizes.

O terceiro Capítulo está estruturado com as análises da estrutura de ensino da professora da turma e a apresentação e discussão dos resultados da avaliação aplicada pela professora.

Encerramos o texto com nossas Considerações Finais, na qual sintetizamos nossos resultados principais, bem como apresentamos nossas expectativas de futuros trabalhos que pretendemos realizar, enquanto docente que ensina Matemática na Educação Básica.

2. BREVE RECORTE HISTÓRICO E CONCEITUAL DE MATRIZES

2.1 O SURGIMENTO DAS MATRIZES

Formalmente, o termo "matriz" foi usado pela primeira vez por James Joseph Sylvester, em 1850, e o intuito era se referir a uma matriz retangular de números. Outro nome que merece destaque é o de Arthur Cayley, que em 1857 deu várias contribuições para a álgebra de matrizes, apresentando as matrizes do tipo m x n, entre outros tipos de matrizes importantes (Kleiner, 2007, tradução nossa).

Outros estudiosos também contribuíram para a teoria de matrizes. Sylvester apresentou a definição pioneira da expressão matriz da seguinte maneira: “Local onde algo se gera ou cria, "...um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma MATRIZ a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um número e escolher a vontade p linhas e p colunas..." (Philosophical Magazine, 1850, pag 363-370 – Fonte: http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa3b.html).

Para se tornar o conceito que conhecemos atualmente as matrizes passaram por uma evolução ao longo do tempo e seu uso possibilita representar e resolver uma variedade de problemas matemáticos e aplicações. A evolução do conceito de matriz está ligada à teoria dos determinantes e à resolução de sistemas de equações lineares.

Podemos encontrar algumas características de sua origem em registros utilizados por estudiosos chineses do passado. Os chineses utilizavam técnicas para aproximar raizes de equações polinomiais de qualquer grau e resolver sistemas de equações lineares usando matrizes retangulares de números, antes mesmo de tais métodos serem conhecidos na Europa (Kleiner, 2007, tradução nossa).

O campo da Álgebra passou por diversas evoluções. Segundo Kleiner (2007, tradução nossa), em meados do século XIX, os algebristas da escola inglesa revelaram primeiro, a noção abstrata de lei da composição, e ampliaram a área da Álgebra, entre estes campos estão incluídas as matrizes. Ao longo desta jornada, as matrizes ganharam novas compreensões e significados em diversos campos de interesse matemático.

Outras obras no século XIX levaram a cálculos mais formais, determinando a definição de matrizes e produzindo a álgebra de matrizes. Um estudo similar foi o desenvolvimento da teoria das matrizes feito pelas formas quadráticas, de Carl Friedrich Gauss entre 1801 a 1900. Possuindo semelhança entre autovalores, diagonalização e a classificação de matrizes via formas canônicas. Gauss compreendeu um estudo profundo da teoria aritmética das formas quadráticas binárias (Katz, 2009, tradução nossa).

Segundo Kleiner (2007, p. 82, tradução nossa) “as transformações lineares foram representadas como matrizes retangulares de matrizes numéricas, embora Gauss não usasse a terminologia matricial. Ele também definiu implicitamente o produto para alguns casos de matrizes

Também devemos ressaltar a importância de Arthur Cayley para a teoria de matrizes. Ele fez diversas contribuições para diversas áreas da álgebra. Em 1858, Cayley instituiu a representação de uma única letra para matrizes e mostrou não apenas como multiplicá-las, mas também como somar e subtrair, passo significativo na evolução da álgebra matricial. (Katz, 2009, tradução nossa).

Embora o trabalho de Cayley tenha sido essencial, eles foram pouco notados inicialmente. Um fator que pode ter contribuído para isso pode ser o fato de ele não associar as matrizes à matemática e suas aplicações. Hoje, as matrizes são uma parte fundamental da álgebra linear e têm uma ampla gama de aplicações em Matemática, Engenharia e outras áreas (Kleiner, 2007, tradução nossa).

2.2 DEFINIÇÕES BÁSICAS ASSOCIADAS A MATRIZES

Dados dois números m e n naturais e não nulos, chamamos de matriz m por n (m x n), toda tabela retangular **A** formada por números reais distribuídos em “m” linhas e “n” colunas. Em outras palavras, em Matemática, as tabelas são representadas por matrizes nas quais os dados (também chamados elementos ou termos) são dispostos em filas horizontais (linhas) e filas verticais (colunas). Geralmente as matrizes são representadas por uma letra maiúscula seguida de um sub-índice formado por dois números: o primeiro indica o número de linhas e o segundo o número de colunas da matriz. Esses números indicam a “ordem” da matriz.

Os elementos de uma matriz, que geralmente são números, ficam entre parênteses ou entre colchetes, como podemos observar nos exemplos apresentados em seguida: a Matriz A é uma Matriz 3 x 1; a Matriz B é 2 x 3; a Matriz C é 1 x 5:

Matriz A_{3x1}: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ Matriz B_{2x3}: $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ Matriz C_{1x5}: $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

As linhas de uma matriz são numeradas de cima para baixo e as colunas, da esquerda para a direita. A matriz D apresentada em seguida, por exemplo, tem três linhas e quatro colunas. Dizemos, então, que ela é uma matriz do tipo ou da ordem 3 x 4 (lê-se: três por quatro), e os números que a constituem são os seus elementos:

$$\text{Matriz } D_{3x4}: \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Indicamos os elementos de uma matriz, usando a mesma letra adotada para denominar a matriz, porém, minúscula, seguidos de dois índices que representam, respectivamente, a linha e a coluna em que cada elemento está posicionado. Utilizando o exemplo anterior, temos: o elemento que está na 1ª linha e na 1ª coluna é 1, ou seja, o elemento $d_{1,1} = 1$(lê-se “d um um” é igual a 1); o elemento que está na 2ª linha e na 4ª coluna é 6, ou seja, o elemento $d_{2,4} = 6$ (lê-se “d dois quatro” é igual a seis); e assim por diante.

2.3 ALGUMAS MATRIZES ESPECIAIS

Existem algumas matrizes que têm algumas particularidades. Essas matrizes recebem o nome de matrizes especiais. Aqui destacamos algumas dessas matrizes especiais:

(i) **Matriz Nula**: é uma matriz em que todos os seus elementos são iguais a 0 (Exemplo: Matriz A, apresentada após destaques);

(ii) **Matriz linha**: é uma matriz que possui apenas uma linha (e qualquer número de colunas igual ou maior que um (Exemplo: Matriz B, apresentada após destaques);

(iii) **Matriz coluna**: é uma matriz que possui uma única coluna (e qualquer números de linhas igual ou maior que um (Exemplo: Matriz C, apresentada após destaques);

(iv) **Matriz Quadrada:** matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas (Exemplo: Matriz D, apresentada após destaques). Exemplos:

$$\text{Matriz } A_{2x3}: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Matriz } B_{1x3}: \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz } C_{3x1}: \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Matriz } D_{2x2}: \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Alguns tipos especiais de matrizes são quadradas e para defini-las precisamos antes definir o que denominamos de “diagonal principal” de uma matriz quadrada. A diagonal principal de uma matriz quadrada é formada pelos elementos cujos índices são iguais, ou seja, o número da linha onde se encontram é o mesmo número da coluna, portanto, os elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada A são: $a_{1,1}$; $a_{2,2}$; $a_{3,3}$; e assim por diante.

Com base na definição de diagonal principal, destacamos as seguintes matrizes especiais:

(v) **Matriz diagonal:** é aquela que tem diagonal principal não nula e cujos elementos não pertencentes à diagonal principal são iguais a zero (Exemplo: Matriz E, apresentada após destaques);

(vi) **Matriz identidade:** é uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal principal são iguais a um. A matriz identidade de cada ordem é denominada pela letra I, cujo(s) sub-índice(s) indica sua ordem (Exemplo: Matriz I, apresentada após destaques). Exemplos:

$$E_{2x2}: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad I_{3x3}: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Algumas das matrizes especiais aqui apresentadas são fundamentais para a apresentação de algumas definições em álgebra matricial e particularmente úteis em aplicações matemáticas desse conteúdo.

2.4 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Neste item vamos tratar brevemente das operações que podemos realizar com matrizes, definindo antes a igualdade de matrizes. Dizemos que duas matrizes A e B, de mesma ordem, são iguais, se cada elemento de A for igual ao elemento correspondente de B. Por exemplo, vamos considerar as matrizes A e B apresentadas em seguida.

$$\text{Matriz } A_{2x3}: \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad \text{Matriz } B_{2x3}: \begin{bmatrix} 4 & x & 5 \\ 2 & 7 & y \end{bmatrix}$$

Se afirmarmos que as matrizes A e B, que são de mesma ordem, são iguais, necessariamente devemos ter que $x = -2$ e $y = 8$. Com base na definição de igualdade de matrizes de mesma ordem, podemos apresentar brevemente algumas operações que podemos realizar com matrizes.

2.4.1 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

A adição de matrizes é definida da seguinte maneira: dadas duas matrizes de mesma ordem, A e B, denominamos a soma das matrizes A com B, ou seja, A + B, pela matriz C, cujos elementos são obtidos somando-se elementos correspondentes das matrizes A e B. A mesma definição aplica-se ao caso da subtração. Exemplos: Considere as matrizes A e B apresentadas em seguida: Matriz A_{2x3}: $\begin{bmatrix} 9 & -2 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ e Matriz B_{2x3}: $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 6 & 9 & 4 \end{bmatrix}$. As matrizes C e D, correspondentes à adição e à subtração das matrizes A e B, respectivamente são:

A + B = C, com C_{2x3}: $\begin{bmatrix} 10 & -5 & 5 \\ 8 & 16 & 12 \end{bmatrix}$; e A – B = D, com D_{2x3}: $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

A operação de adição de matrizes satisfaz às seguintes propriedades:

1) Propriedade comutativa: A + B = B + A;

2) Propriedade associativa: (A + B) + C = A + (B + C);

3) Propriedade do elemento neutro: A + 0 = 0 + A = A;

4) Propriedade do elemento oposto: A + (-A) = (-A) + A = 0.

A subtração de matrizes em geral não é comutativa, mas satisfaz a associatividade.

2.4.2 MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO (ESCALAR) POR UMA MATRIZ E MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

A multiplicação de um número real k qualquer por uma matriz A de ordem m x n resulta em uma matriz B da mesma ordem de A, ou seja, de ordem m x n, cujos elementos são iguais a k multiplicado por cada elemento correspondente da matriz A. Como exemplo vamos considerar a matriz A: A_{2x3}: $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 8 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ e o número k = -2. A matriz B = -2. A será dada por: B_{2x3}: $\begin{bmatrix} -14 & -4 & 6 \\ -16 & 2 & -10 \end{bmatrix}$. Como podemos observar pelo exemplo, os elementos da matriz B são obtidos pelo produto de -2 pelos elementos correspondentes da matriz A.

O produto de matrizes por um número satisfaz as propriedades apresentadas em seguida, para a matriz A de ordem m x n, f e g constantes quaisquer:

1) (f + g) A = f A + f B;

2) f (A + B) = f A + f B;

3) f (g A) = (f . g) A;

4) 1 A = A.

A multiplicação de duas matrizes A e B só é possível quando o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B. Por sua vez, a matriz resultante C tem a quantidade de linhas de A e a quantidade das colunas de B. Assim, se a matriz A é de ordem m x n, a matriz B é de ordem p x q, o produto A x B só será possível se n = p, a matriz resultante será de ordem m x q.

A multiplicação de duas matrizes A e B é definida do seguinte modo: Sejam A_{mxn} e B_{pxq} duas matrizes de ordem (m x n) e (n x q), respectivamente. Os elementos da matriz produto de A por B, representada por A x B, A . B, ou AB, é a matriz C_{mxq}, cujos elementos correspondem à soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de A pelos elementos correspondentes (na mesma ordem, ou seja, termo a termo) da j-ésima coluna de B: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$.

No exemplo apresentado em seguida, temos o resultado da multiplicação das matrizes A_{3x2} e B_{2x2}, cujo resultado é a matriz C_{3x2}.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 2+2\times 3 & 1\times 1+2\times 4 \\ 0\times 2+4\times 3 & 0\times 1+4\times 4 \\ 1\times 2+8\times 3 & 1\times 1+8\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6 & 1+8 \\ 0+12 & 0+16 \\ 2+24 & 1+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 12 & 16 \\ 26 & 33 \end{bmatrix}$$

Sejam as matrizes A, B e C, de maneira que as somas e os produtos possam ser definidos, valem as seguintes propriedades:

1) Propriedade associativa da multiplicação: A x (B x C) = (A x B) x C;

2) Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição: (B + C) x A = B x A + C x A (à esquerda); e A x (B + C) = A x B + A x C (à direita).

Vale destacar que a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, pode ser que não tenhamos AB = BA. Em alguns casos, o produto AB é possível e o produto BA, não, a depender das ordens das duas matrizes. Mas, se ocorrer AB = BA, dizemos que as matrizes A e B são comutativas. Ao contrário do que ocorre com os números reais, na multiplicação de matrizes não vale a lei do cancelamento do produto. Em razão das especificidades das propriedades da multiplicação de matrizes, não definimos o quociente de duas matrizes.

Finalizamos nossos destaques em relação ao conteúdo de matrizes, apresentando a definição de matriz inversa: dada uma matriz A quadrada de ordem n, se existe uma matriz B, quadrada de ordem n, tal que A ·· B = B ·· A = I, dizemos que a matriz B é a matriz inversa de A. Denominamos a matriz inversa de A pôr A^{-1}. Em outras palavras, o produto de duas matrizes resulta numa matriz identidade de mesma ordem (mesmo número de linhas e colunas), quando existe a matriz inversa de A, representada por A^{-1}, tal que A x A^{-1} = I.

Neste caso, dizemos que a matriz A é invertível, além disso, se a matriz quadrada A é invertível, então a sua inversa é única. Quando uma matriz quadrada não possui inversa, dizemos que ela é não invertível. No item seguinte vamos tratar acerca do ensino do conteúdo de Matrizes, particularmente no Ensino Médio da Educação Básica, destacando as ideias de autores que discutem o tema.

2.5 SOBRE O ENSINO DE MATRIZES

A análise do ensino de matrizes no Ensino Médio oferece a oportunidade de serem identificados elementos que podem constituir dificuldade de aprendizagem para os estudantes, auxiliando a definição de estratégias que possibilitem a melhoria do ensino desse conteúdo. Compreender as definições básicas e a aplicação de matrizes em contextos diversificados são elementos de grande importância para o progresso do raciocínio matemático dos alunos, fornecendo a base para a resolução de diversos problemas.

Uma estratégia que possui potencialidade para promover o aprendizado dos estudantes é a contextualização. Para (Maioli, 2012, p.31), “[A] contextualização é um princípio pedagógico potencialmente rico para melhorar a aprendizagem de matemática dos alunos, mas precisa ser compreendida em seus propósitos e usos pelos diferentes atores do processo de ensino e aprendizagem”.

Contextualizar um conteúdo matemático não acontece com o uso de uma receita ou uma regra estabelecida. Depende de vários aspectos, e um deles é a relação do professor com o conteúdo: precisa conhecê-lo bem e ter um repertório de aplicações possíveis para o conteúdo, de modo a selecionar ou criar as mais adequadas ao trabalho com seus estudantes.

> A ideia de contextualização aparece nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio de forma ligada ao conceito de transposição didática, esclarecendo que é na dinâmica de contextualização/descontextualização que o aluno constrói conhecimento com significado. Observa que a contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas (Maioli, 2012, p.134).

No contexto do ensino de Matrizes, a contextualização pode ser aplicada de diferentes maneiras e em diversos momentos do processo. É crucial auxiliar o estudante a construir seu conhecimento, motivando-o a compreender a relevância e o uso dos cálculos matriciais, desse modo, o conteúdo de Matrizes se torna mais próximo de sua realidade (Bezerra et al., 2020). Em nosso entendimento, a contextualização pode promover uma compreensão mais profunda do conteúdo matemático e uma maior motivação por parte dos estudantes para aprendê-lo, visto que os alunos vão poder relacionar o conteúdo a uma aplicação prática.

O artigo "Ensino de matrizes: mapeamento de pesquisas acadêmicas que apresentam contextualização no Ensino Médio", de Bezerra et al (2020) teve por objetivo analisar de que maneira os estudos levantados propõem a contextualização do tema das Matrizes para promover sua aprendizagem. Segundo Bezerra et al. (2020, p.360), "[...] aprender Matemática de forma contextualizada possibilita o desenvolvimento da autonomia e da criatividade, sem dizer que uma pequena parcela dos livros didáticos trabalha este conceito de forma contextualizada".

Outra estratégia didática importante no ensino de conteúdos matemáticos é a resolução de problemas.

> A resolução de problemas é uma metodologia que oportuniza aos estudantes a possibilidade de fazer Matemática, isto é, ao buscarem uma solução para o problema proposto, eles são levados a exercitar as suas habilidades intelectuais, criatividade, intuição, imaginação, iniciativa, autonomia, experimentação, capacidade de fazer analogias, interpretação dos resultados, etc. Desse modo, a resolução de problemas estreita a distância entre uma Matemática mais intuitiva, mais experimental e uma Matemática formal (Gomes, et al., 2017, p.111).

Ao ensinar Matrizes é importante priorizar uma abordagem que evidencie a compreensão dos conceitos essenciais e não apenas a aplicação de estratégias mecânicas. O assunto de matrizes algumas vezes pode ser temido pelos alunos, uma vez que seu ensino seja focado na mecanização de procedimentos. A apresentação de aplicações do conteúdo em problemas com contextos diversificados pode ajudar os alunos a relacionarem conceitos abstratos relativos às matrizes com situações práticas, de modo que tais conceitos tenham significado para eles.

Ao adotar essas estratégias, tanto a contextualização como a resolução de problemas, os docentes podem enriquecer o ensino de matrizes e ajudar os alunos a compreenderem o conteúdo e sua aplicação. Conforme Borges et al. (2021), existe diferença entre solucionar exercícios e solucionar problemas. No primeiro caso o estudante está encontrando respostas de modo quase mecânico, enquanto ao resolver um problema ele precisa pensar de maneira mais complexa. Para os autores citados, o foco principal da teoria de Resolução de Problemas é que o aluno participe na sua própria aprendizagem, sendo protagonista no processo.

Com a resolução de problemas, os alunos aprendem habilidades essenciais, como identificar informações importantes, formular estratégias, testar hipóteses, avaliar resultados, entre outros. Essas habilidades são valiosas não apenas em Matemática, mas em outras áreas de conhecimento (Borges et al., 2021).

Sobre a temática da resolução de problemas em relação ao tema de nosso estudo, analisamos o artigo "A metodologia de resolução de problemas aplicada ao ensino de matrizes no Ensino Médio" (Borges et al., 2021). Este artigo apresenta um estudo comparativo com cinco turmas de estudantes, explorando a resolução de problemas vinculados ao cotidiano dos alunos, com a diferença que em três turmas os problemas foram propostos antes da apresentação do conteúdo, enquanto nas outras duas turmas os mesmos problemas foram apresentados ao final da exposição do conteúdo, na perspectiva de aplicação.

Os autores destacam que, no primeiro caso o direcionamento foi o de ensino "através" da resolução de problemas, enquanto no segundo caso era o de ensino "para" a resolução de problemas. Destacam que, em termos de desempenho na determinação das respostas às duas turmas apresentaram resultados semelhantes, mas que a participação dos alunos foi maior quando os problemas foram tomados como ponto de partida para o trabalho com o conteúdo.

Borges et al (2021) destacam que é fundamental ter em mente que o objetivo principal do trabalho do professor seja a compreensão do conteúdo pelo aluno, sendo importante considerar a realidade dos alunos no processo de seleção dos tipos de questões a abordar, observando sempre o progresso dos estudantes.

2.6 O CONTEÚDO DE MATRIZES EM DOCUMENTOS DEFINIDORES DO CURRÍCULO BRASILEIRO

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) (Brasil, 2002), havia uma referência direta ao conteúdo que é tema de nosso trabalho, quando o texto tratava do Uso de Tecnologia nesse nível de escolaridade:

> As planilhas eletrônicas são programas de computador que servem para manipular tabelas cujas células podem ser relacionadas por expressões matemáticas. Para operar com uma planilha, em um nível básico, é preciso conhecimento matemático similar àquele necessário ao uso de calculadora, mas com maiores exigências quanto à notação de trabalho, já que as operações e as funções são definidas sobre as células de uma tabela em que se faz uso de notação para matrizes (Brasil, 2002, p.87).

Quando o documento trata da resolução de sistemas de equações, orienta que, para sistemas 2 X 3 ou 3 X 3 a solução seja determinada por meio de operações elementares, o escalonamento, discutindo-se os casos de solução única, infinitas ou sem solução.

> Quanto à resolução de sistemas de equação 3 X 3, a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto, de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. Dessa forma, fica também dispensado o estudo de determinantes (Brasil, 2002, p.87).

No Documento Orientador para o Ensino Médio, de 2002, o conteúdo de matrizes é pouco citado, fazendo-se apenas as referências que destacamos. Observamos em seguida qual o caso, quando analisamos um documento orientador curricular mais atual, no caso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), que define os direitos mínimos de aprendizagem dos estudantes da Educação Infantil e Ensinos Fundamental e Médio.
Ao tratar do objetivo desse documento, em seu texto lemos:

> A BNCC por si só não alterará o quadro de desigualdade ainda presente na Educação Básica do Brasil, mas é essencial para que a mudança tenha início porque, além dos currículos, influenciará a formação inicial e continuada dos educadores, a produção de materiais didáticos, as matrizes de avaliações e os exames nacionais que serão revistos à luz do texto homologado da Base. (Brasil, 2018, p.05)

Os Objetos de Conhecimento e Habilidades específicos de Matemática a serem desenvolvidos pelos estudantes do Ensino Fundamental estão organizados em torno de Componentes Curriculares (Números; Álgebra; Grandezas e Medidas; Geometria; e Probabilidade e estatística). No conjunto de Habilidades para esse nível de escolaridade, localizamos a de código EF08MA08, para o 8º Ano, que faz referência direta aos sistemas de equações de 1º grau: “Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso” (Brasil, 2018, p.315).

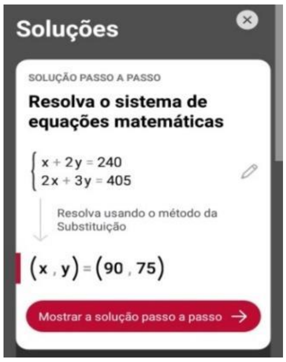
No Ensino Médio a indicação de Objetos de aprendizagem e Habilidades é feita na forma de cinco Competências específicas. Quando buscamos a temática de Matrizes no Ensino Médio, nesse documento, não encontramos nenhuma Habilidade explicitamente direcionada para o conteúdo de matrizes, mas, conforme Neto (2022), existem conteúdos matemáticos específicos que envolvem matrizes, e esses conteúdos são essenciais para os alunos que almejam seguir na área. Neste sentido, destacamos uma Habilidade da BNCC (Brasil, 2018), da área de Matemática e suas Tecnologias, para o Ensino Médio, que pode ser vinculada ao estudo de matrizes, a Habilidade de código EM13MAT301.

A Habilidade destacada está relacionada à Competência Específica 3 de Matemática "Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente" (Brasil, 2018, p. 535). E tem a seguinte forma: "Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais" (Brasil, 2018, p. 536).

Como no Ensino Fundamental os alunos estudariam as equações de 1º grau com duas incógnitas (Habilidade EF08MA08), no Ensino Médio esse estudo poderia ser ampliado, considerando-se ainda equações de 1º grau, com mais de duas incógnitas. Na resolução e elaboração de problemas que envolvem equações de 1° grau, o professor pode explorar técnicas de resolução diversificadas, incluindo o uso de recursos digitais como aplicativos e planilhas eletrônicas.

Como exemplo podemos citar o uso do aplicativo para celulares "Photomath", que pode ser usado na resolução de equações lineares, tendo-se como foco a organização desses sistemas, a partir de situações do cotidiano. Silva (2020), realizou um estudo em seu Trabalho de Conclusão de Curso, com o título "Análise do uso de um aplicativo no ensino de sistemas de equações lineares", em que explorou o aplicativo citado, com estudantes do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de João Pessoa. Em seu texto Silva apresenta exemplos de sistemas que foram trabalhados com os estudantes, como o ilustrado na Figura 01.

Figura 01. Exemplo de sistema explorado por estudantes do Ensino Médio.



Fonte: Silva (2020), p.31.

O autor informa que o aplicativo apresenta, além da solução, o seu passo-a-passo, através de três técnicas diferentes: o método da substituição; o método da eliminação; e o método de Gauss-Jordan. Além disso, o aplicativo também apresenta uma representação gráfica do sistema, indicando que a solução é única e correspondente à interseção das retas apresentadas na Figura 2, o que satisfaz indicações da Habilidade EM13MAT301, relativas ao uso de técnicas geométricas de resolução.

Figura 02. Representação gráfica do sistema da Figura 01.

Fonte: Silva (2020), p.32.

A explicação de cada passo da determinação da solução, possibilita que o estudante compreenda como funciona cada método e, também, possa avaliar se uma solução encontrada manualmente, por meio de métodos algébricos ou gráficos, estava correta e, em caso negativo, onde pode estar localizado o erro. Como afirma Silva (2020, p.37), “[...] o Photomath é um aplicativo didático e que possibilita que o estudante resgate, inclusive, o trabalho com operações algébricas e aritméticas básicas, ou propriedades e relações de sinais em operações, possibilitando que superem dúvidas que tenham acumulado em relação a esses elementos”.

3. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados apresentados em nosso texto se baseiam na análise de uma avaliação aplicada pela professora de Matemática de uma turma do 2° Ano do Ensino Médio na qual realizamos o Estágio Docente Supervisionado IV, que corresponde a um componente do Curso de Licenciatura em Matemática voltado para a prática docente. A turma era formada por 22 estudantes da modalidade regular.

Para introduzir o conteúdo de matrizes a professora da turma apresentou uma contextualização do conteúdo, informando que as matrizes têm várias aplicações na Criptografia, seja para representar operações de transformação, realizar operações de cifragem e decifragem, entre outros. A professora expôs as informações em slides dinâmicos e detalhados, explicando como funcionava a Criptografia.

A Criptografia é um processo que possibilita a decodificação de uma mensagem codificada, conhecendo-se a tabela de codificação. Pereira et al (2016), explicam como funciona a ligação entre matrizes e a Criptografia, para a qual precisamos do conceito de matriz inversa, ou seja, consideram duas matrizes de ordem 2 x 2 A e B, sendo B a matriz inversa de A:

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Em seguida define-se uma tabela de codificação, como a apresentada na Figura 03.

Figura 03. Tabela de codificação

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
U	V	W	X	Y	Z	.	!	#	?
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Fonte: Adaptada de Pereira et al (2016, p.6)

Como exemplo, os autores propõem codificar a seguinte frase: “MEU FUTURO DEPENDE DE MIM”, de acordo com a codificação da tabela dada. Neste caso, a frase seria codificada pela sequência de números da matriz M apresentada em seguida, considerando-se a tabela dada. Na codificação inserimos o símbolo “jogo da velha”, com código 29, para separar as palavras e evitar problemas de compreensão na decodificação. O resultado é representado na matriz M_{2x13}:

$$M_{2x13} = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 21 & 29 & 6 & 21 & 20 & 21 & 18 & 15 & 29 & 4 & 5 \\ 16 & 5 & 14 & 4 & 5 & 29 & 4 & 5 & 29 & 13 & 9 & 13 & 30 \end{bmatrix}$$

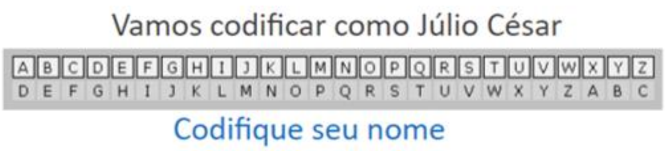
Para codificar a mensagem multiplicamos a matriz A_{2x2} pela matriz M_{2x13}, obtendo como resultado a matriz N_{2x13}, dada por:

$$N_{2x13} = \begin{bmatrix} 55 & 20 & 77 & 91 & 23 & 92 & 64 & 68 & 83 & 58 & 96 & 25 & 45 \\ 42 & 15 & 56 & 62 & 17 & 71 & 44 & 47 & 65 & 43 & 67 & 21 & 40 \end{bmatrix}$$

Para decodificar a mensagem, a pessoa que a recebesse iria multiplicar a matriz B, que é inversa de A, pela matriz N, obtendo como resultado a matriz M original, pois B_{2x2} x N_{2x13} = B_{2x2} x A_{2x2} x M_{2x13} = I_{2x2} x M_{2x13} = M_{2x13}. Usando a tabela de codificação e a matriz M, a leitura da mensagem pode ser feita. O contexto da Criptografia é interessante e pode ser motivador para estudantes jovens, em razão de seu uso na informática, como a codificação de mensagens em redes sociais, como o WhatsApp, para garantir a privacidade do conteúdo dos usuários.

Depois de explicar os elementos básicos da Criptografia a docente propôs alguns desafios de mensagens criptografadas para os alunos decodificarem, ainda sem o uso de Matrizes, apenas para que eles entendessem o processo de codificação e decodificação usando a tabela de referência usada para isso. Os alunos foram bastante participativos e a maioria da turma conseguiu decodificar as mensagens. Nas Figuras 04 e 05 trazemos exemplos de desafios propostos pela professora, apresentando de forma particular, utilizando slides.

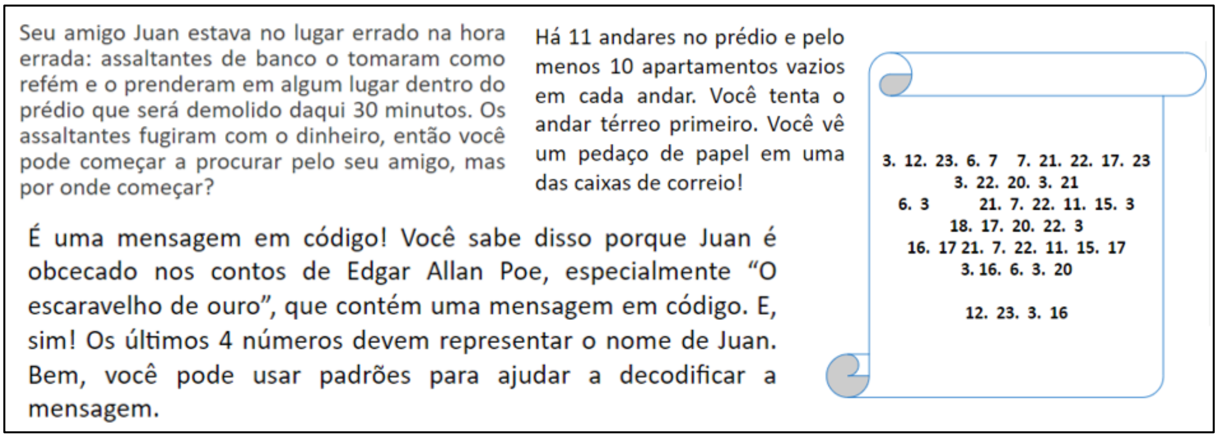
Figura 04. Tabela de codificação do desafio



Fonte: Recorte de parte do desafio aplicada pela professora da turma.

Na Figura 04 temos a tabela de codificação apresentada pela professora aos alunos, na qual as letras do alfabeto são substituídas por outras letras do alfabeto na codificação, ou seja, ao escrever a mensagem utilizamos a letra D em substituição à letra A, toda vez que ela estiver presente na mensagem. Na atividade proposta os estudantes deveriam codificar seu nome, usando a equivalência entre letras indicada na tabela da Figura 04.

Figura 05. Desafio proposto pela professora


Seu amigo Juan estava no lugar errado na hora errada: assaltantes de banco o tomaram como refém e o prenderam em algum lugar dentro do prédio que será demolido daqui 30 minutos. Os assaltantes fugiram com o dinheiro, então você pode começar a procurar pelo seu amigo, mas por onde começar?

Há 11 andares no prédio e pelo menos 10 apartamentos vazios em cada andar. Você tenta o andar térreo primeiro. Você vê um pedaço de papel em uma das caixas de correio!

É uma mensagem em código! Você sabe disso porque Juan é obcecado nos contos de Edgar Allan Poe, especialmente "O escaravelho de ouro", que contém uma mensagem em código. E, sim! Os últimos 4 números devem representar o nome de Juan. Bem, você pode usar padrões para ajudar a decodificar a mensagem.

Fonte: Recorte de parte do desafio aplicada pela professora da turma.

O desafio que os estudantes deveriam resolver era o seguinte: "Ele deve ter um padrão para esses números. Você consegue descobrir o padrão e resgatar Juan antes que seja tarde?". Neste caso os estudantes tinham a dica de que a última parte da mensagem deveria corresponder ao nome de Juan, logo, a letra J corresponde a 12; a letra U corresponde a 23; a letra A corresponde a 3 e a letra N corresponde a 16.

Substituindo os números das letras do nome de Juan na primeira palavra da mensagem temos: A J U (6) (7), concluindo que 6 é o código da letra D e 7 o da letra E. Com os códigos iniciais e esses novos códigos, vamos fazendo as substituições das letras com códigos já conhecidos, deduzindo as letras que correspondem aos códigos que faltam. No final da decodificação, a mensagem seria: AJUDE ESTOU ATRAS DA SETIMA PORTA NO SÉTIMO ANDAR JUAN. Se o resgate de Juan dependia da capacidade de decodificação de seu amigo, precisaríamos torcer para que ele conseguisse fazer isso, e rápido.

Após essa introdução informal, posteriormente a professora apresentou explicações sobre as Matrizes, destacando os tipos existentes e as operações. Ela explicou cada tópico de modo detalhado e entregou um material impresso para cada aluno com o conteúdo apresentado, para facilitar o acompanhamento das explicações e sua compreensão, posteriormente. Após a explicação do conteúdo, a professora propôs os exercícios do livro didático (Anexo 1).

Em outro momento, a professora propôs questões do livro didático para os alunos resolverem de forma individual (Anexo 1). Observando as aulas da professora constatamos seu esforço para desenvolver um ensino que ajude seus alunos a compreenderem o conteúdo que ela trabalha. A professora procura transformar ideias complexas em ideias simples e acessíveis aos alunos, buscando tornar o processo de aprendizagem mais eficiente. Ela procura utilizar diversas estratégias metodológicas, como a resolução de problemas e a contextualização e diferentes recursos para o ensino, disponibilizando exemplos adicionais aos apresentados no livro didático. Além disso, procura enfatizar o uso do conteúdo na prática, para reforçar a compreensão e promover o aumento da motivação dos alunos.

A avaliação aplicada ao final do trabalho com o conteúdo em sala de aula, pela professora, e que analisamos em nosso Trabalho de Conclusão de Curso foi composta por dez questões, porém, em nosso texto vamos considerar apenas as questões 6 a 10, que estavam relacionadas ao conteúdo da temática que selecionamos para nossa pesquisa, no caso, Matrizes.

A Tabela 6 contém o quantitativo de acertos e erros totais de cada questão, destacando que apenas doze alunos concordaram em ter suas provas analisadas, uma vez que, ao apresentarmos nosso interesse de investigação deixamos claro que só trabalhamos com quem estivesse disposto a colaborar conosco, sem obrigatoriedade de participação, informando ainda que nem a escola, nem a professora, nem os estudantes seriam identificados no texto.

Na contagem de acertos e erros consideramos os valores inteiros para aqueles alunos que acertaram a questão completa. Por outro lado, os valores decimais na quantidade de acertos e erros, indica que o aluno deixou a questão incompleta, ou errou a metade da questão, ou acertou a metade da questão.

Figura 06. Número de acerto e erros nas questões 6 a 10 da avaliação.

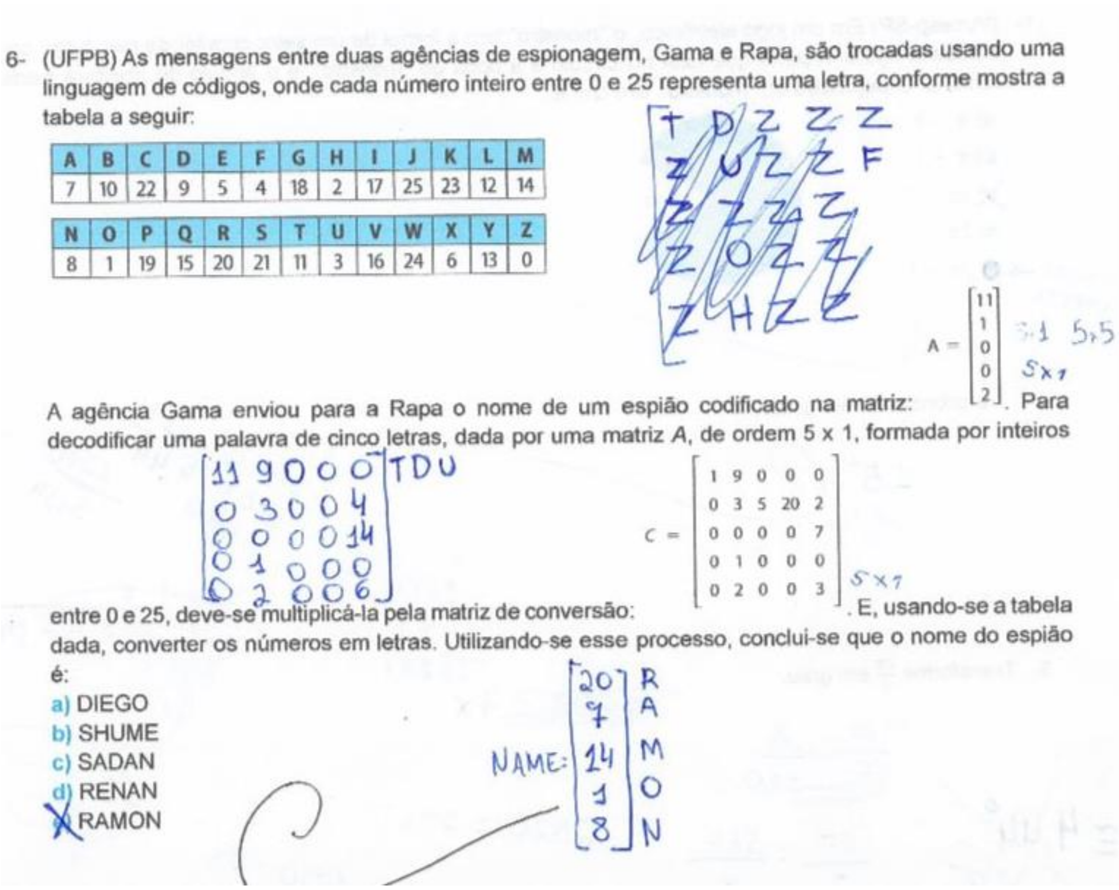
QUANTIDADES DE ACERTOS/ERROS		
6º Questão	Acertos	5
	Erros	5
	Em branco	2
7º Questão	Acertos	2,5
	Erros	9,5
	Em branco	0
8º Questão	Acertos	9,5
	Erros	2,5
	Em branco	0
9º (a) Questão	Acertos	6,5
	Erros	4,5
	Em branco	1
9º (b) Questão	Acertos	3
	Erros	7
	Em branco	2
10º Questão	Acertos	3,5
	Erros	7,5
	Em branco	1

Fonte: Autoria própria.

Como podemos observar pelos valores da Tabela, a questão com maior número de acertos foi a questão oito, enquanto a que teve maior número de respostas erradas foi a sete. O número de questões em branco foi de apenas um, nos casos dos itens 1 e 10 e dois nos casos dos itens 6 e 9. Em seguida iremos discutir os resultados das questões item a item.

A Questão 6 é a primeira questão da avaliação que contém o tema Matrizes. Observamos que é uma questão retirada do antigo processo seletivo de ingresso na Universidade Federal da Paraíba - UFPB. Essa questão requer capacidade de interpretação para o aluno conseguir encontrar a resposta. Dos dez alunos que responderam à questão metade acertou e metade errou. Dos cinco acertos, apenas um aluno registrou a multiplicação da matriz, o que fez corretamente, determinando a resposta. Na Figura 7, apresentamos a solução de um aluno.

Figura 07. Resposta correta da Questão 6, produzida por um aluno da turma.



6- (UFPB) As mensagens entre duas agências de espionagem, Gama e Rapa, são trocadas usando uma linguagem de códigos, onde cada número inteiro entre 0 e 25 representa uma letra, conforme mostra a tabela a seguir:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
7	10	22	9	5	4	18	2	17	25	23	12	14

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
8	1	19	15	20	21	11	3	16	24	6	13	0

A agência Gama enviou para a Rapa o nome de um espião codificado na matriz: $A = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para decodificar uma palavra de cinco letras, dada por uma matriz A, de ordem 5 x 1, formada por inteiros entre 0 e 25, deve-se multiplicá-la pela matriz de conversão: $C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. E, usando-se a tabela dada, converter os números em letras. Utilizando-se esse processo, conclui-se que o nome do espião é:

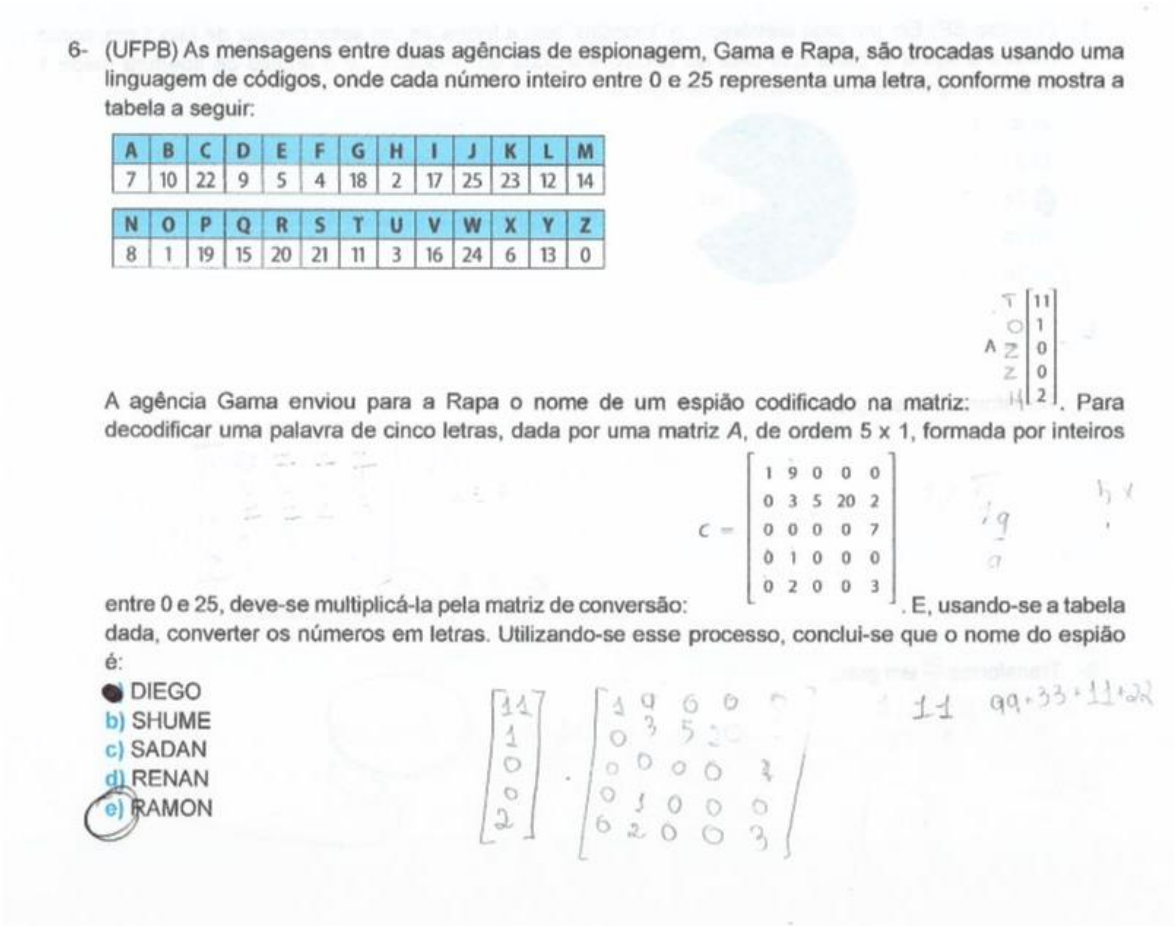
a) DIEGO
b) SHUME
c) SADAN
d) RENAN
e) RAMON

Fonte. Reprodução de item da prova de um aluno.

Na imagem podemos observar qual estratégia o aluno utilizou para solucionar a questão. Percebemos que o aluno fez a multiplicação das matrizes corretamente, apesar de não ter realizado adições intermediárias, mas conseguiu chegar ao resultado correto, mostrando ter compreensão do processo realizado. No entanto, é importante ressaltar a importância de entender os procedimentos por trás das operações feitas por eles, para garantir um entendimento adequado do conteúdo. Os outros quatro alunos que marcaram o item correto, apenas assinalaram a alternativa, sem exibir cálculos. Cabe ao professor incentivar os estudantes a fazerem o máximo de registros que puderem, evidenciando a forma como pensaram para responderem uma questão. Isso ajudará o professor a identificar possíveis dificuldades e, portanto, facilitar a orientação que os leve a não cometerem mais os mesmos erros.

Dos alunos que erraram a questão, apenas um tentou realizar os cálculos, os demais apenas marcaram a alternativa errada, sem justificar sua escolha. Apesar de o enunciado da questão ser um pouco mais elaborado, os alunos já tinham visto uma questão semelhante, quando a professora apresentou a aplicação de Criptografia em Matrizes, no início do trabalho com o conteúdo. Dos alunos que erraram a questão, apenas um tentou realizar os cálculos, exibidos na Figura 8.

Figura 08. Resposta errada da Questão 6, produzida por um aluno da turma.



6- (UFPB) As mensagens entre duas agências de espionagem, Gama e Rapa, são trocadas usando uma linguagem de códigos, onde cada número inteiro entre 0 e 25 representa uma letra, conforme mostra a tabela a seguir:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
7	10	22	9	5	4	18	2	17	25	23	12	14

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
8	1	19	15	20	21	11	3	16	24	6	13	0

A agência Gama enviou para a Rapa o nome de um espião codificado na matriz: $\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para decodificar uma palavra de cinco letras, dada por uma matriz A, de ordem 5 x 1, formada por inteiros entre 0 e 25, deve-se multiplicá-la pela matriz de conversão: $C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. E, usando-se a tabela dada, converter os números em letras. Utilizando-se esse processo, conclui-se que o nome do espião é:

a) DIEGO
b) SHUME
c) SADAN
d) RENAN
e) RAMON

11 99+33+11+22

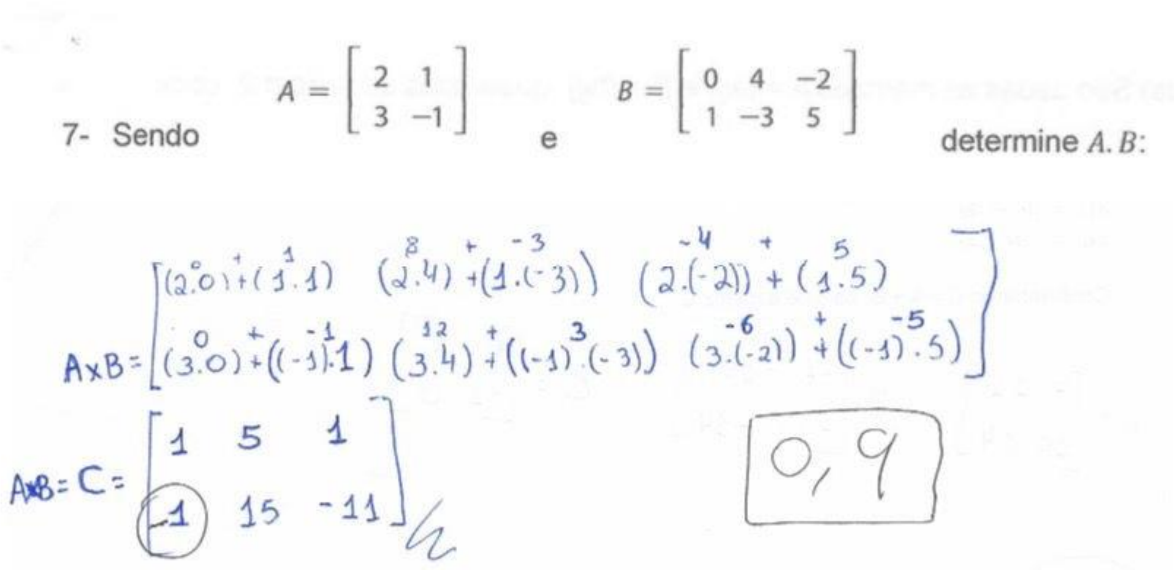
Fonte: Reprodução de parte da avaliação de um aluno da turma.

Pelos registros, percebemos que o aluno reescreveu as matrizes, porém, não realizou os cálculos corretos para chegar à solução. O aluno tentou realizar um cálculo que não reconhecemos a procedência e arriscou uma alternativa qualquer. A questão apresentada envolve a multiplicação de uma matriz por um vetor. No nosso entendimento, quando o aluno apenas reescreve as matrizes sem realizar os cálculos, pode indicar que ele está tendo dificuldades na compreensão ou na execução do procedimento necessário para resolver o problema.

A questão 7 envolvia a determinação do produto de duas matrizes A e B, a primeira de ordem 2x2 e a segunda, de ordem 2 x 3. Ela envolve conceitos básicos de álgebra linear, que é a multiplicação de matrizes. É uma questão de nível introdutório, direta e sem contextualização, ou seja, envolve apenas a realização de cálculo direto, diferente da questão anterior.

Apesar de o enunciado da questão ser claro e apresentar as matrizes A e B, solicitando apenas seu produto, a questão teve um alto índice de erro. Nenhum aluno conseguiu acertar a questão toda. Apenas um aluno acertou parte da matriz produto e outros dois chegaram perto da resposta esperada. Os demais alunos tentaram fazer os cálculos, mas não chegaram ao resultado correto. Na Figura 9 temos a resposta de um aluno da turma para a questão.

Figura 09. Resposta errada para a Questão 7, produzida por um aluno da turma.

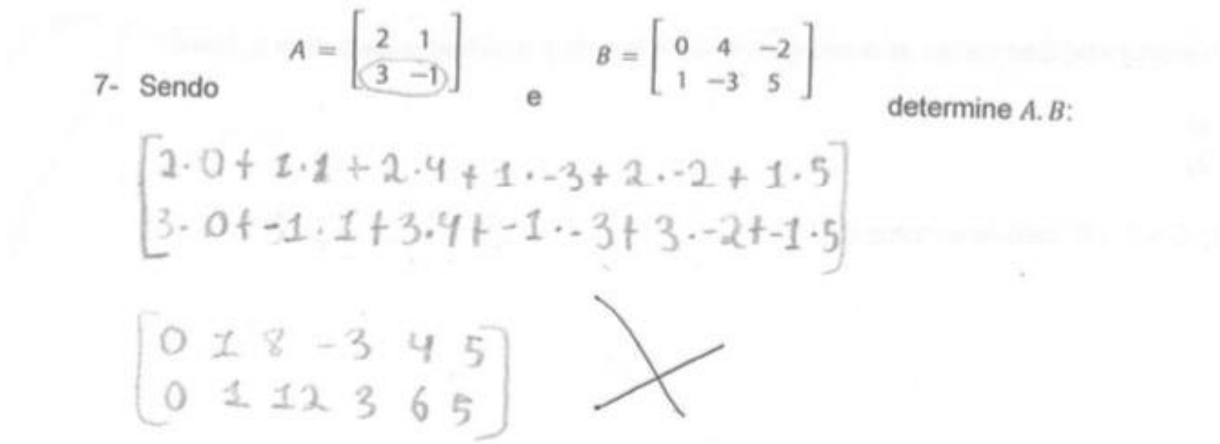


Fonte: Reprodução de parte de uma avaliação de um aluno da turma.

Pelos registros presentes na figura podemos observar que o aluno organizou os cálculos iniciais corretamente, errando apenas o resultado da operação (3x0) + (-1x1), que deveria ser -1 e o aluno indicou que era igual a 1 (resultado que está circulado, na imagem). Podem existir várias possíveis explicações para esse tipo de erro. Um deles pode ser confusão com as regras de sinais, mas como o aluno acerta operações semelhantes, provavelmente seu erro decorreu de falta de atenção.

Ao corrigir uma avaliação o professor precisa estar atento não apenas à resposta registrada pelo aluno, mas observar o raciocínio no conjunto, de modo a poder identificar as estratégias usada e possíveis fontes de erro, o que possibilitará a orientação adequada para que erros semelhantes não sejam cometidos. Na Figura 10 temos o registro de uma solução elaborada por um aluno da turma, para a questão 7.

Figura 10. Resposta errada para a Questão 7, produzida por outro aluno da turma.



Fonte: Reprodução de parte de uma avaliação de um aluno da turma.

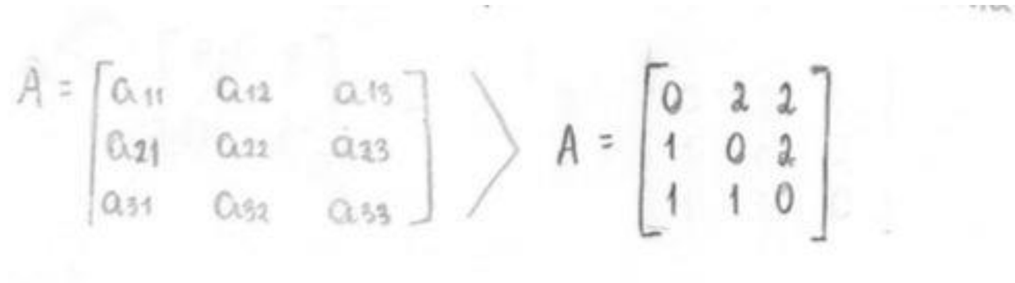
Percebemos, com base nos registros da imagem, que o aluno aplicou a regra das multiplicações das matrizes de maneira errada. A matriz A é de ordem 2 x 2; a matriz B é de ordem 2 x 3 e o produto é possível, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, mas a matriz produto seria de ordem 2x3. No procedimento do aluno, a matriz seria de ordem 2 x 1, sendo o termo da primeira linha dado pela soma dos produtos da primeira linha de A por cada uma das colunas de B, (2.0) + (1.1) + 2.4) + (1.-3) + (2.-2) + 1 x 5), repetindo o procedimento para o segundo termo.

O aluno não entendeu efetivamente como é realizado o produto de matrizes, usando um procedimento errado e que não foi concluído por ele. Como podemos ver por seu último registro, apesar de ter tratado como a adição de vários produtos, os resultados desses produtos não foram somados no final.

A questão 8 enfatizava a relação dos elementos de uma matriz e sua representação posicional. É uma questão direta, sem contexto, que pede a especificação dos elementos da matriz **A,** com base nas relações entre os índices i e j. Seu enunciado é o que segue: “”Dê a matriz A = $(a_{ij})_{3x3}$, em que a_{ij} = 2, se i < j; 1, se i > j; e 0, se i = j.

A questão foi respondida de forma correta pela maioria dos alunos, como pudemos observar pelos dados da Tabela 6. Dos alunos que acertaram a questão, apenas um aluno errou um item da matriz. Na Figura 11 temos o registro da matriz obtida por um aluno da turma.

Figura 11. Resposta certa para a Questão 8, produzida por um aluno da turma.

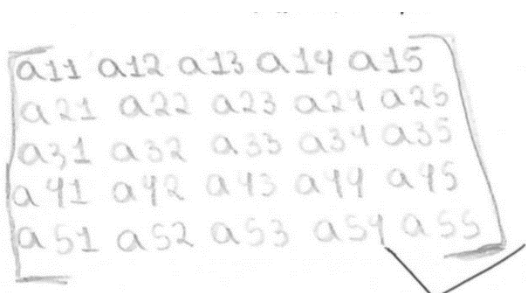


Fonte: Reprodução de parte de uma avaliação de um aluno da turma.

Percebemos pelos registros presentes na figura que o aluno identificou corretamente os índices dos elementos da matriz, e aplicou corretamente as condições fornecidas sobre os valores de i e j na definição dos elementos da matriz, mostrando habilidades de raciocínio lógico, na comparação dos valores, e compreensão das relações entre os índices i e j e sua posição na matriz.

Dentre os alunos que erraram a solução, todos os elementos da matriz obtida estavam errados, mas, como dito anteriormente, tivemos poucas respostas erradas para a questão. Na Figura 12 apresentamos uma solução errada obtida por um aluno da turma.

Figura 12. Resposta errada para a Questão 8, produzida por outro aluno da turma.



Fonte: Reprodução de parte de uma avaliação de um aluno da turma.

Como podemos observar com base no registro, o aluno, além de se equivocar em relação à quantidade de elementos da matriz, não atendeu às condições de comparação entre os índices dos elementos, para determinar o valor de cada um. No enunciado é informado que a matriz seria de ordem 3 x 3, portanto, teria nove elementos, mas a matriz que o aluno registrou seria de ordem 5 x 5 e teria, assim, 25 elementos.

Como o aluno não foi além da construção de uma matriz de dimensões erradas, que podem ter ocorrido pela falta de atenção, problemas de leitura, ou outros motivos, destacamos que pelo menos o aluno mostrou uma tentativa de responder à questão. É necessário entender qual a causa, ou causas, de seu erro, promovendo revisão do conteúdo e prática adicionais, para melhorar sua compreensão e desempenho em questões semelhantes.

Na Figura 13 apresentamos o enunciado da questão 9, identificada como questão de algum processo avaliativo da Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ), contextualizada em uma situação ligada à saúde.

Figura 13. Enunciado da Questão 9.

9- **(UERJ)** A temperatura corporal de um paciente foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia, durante cinco dias. Cada elemento a_{ij} da matriz abaixo corresponde à temperatura observada no instante *i* do dia *j*.

$$\begin{bmatrix} 35,6 & 36,4 & 38,6 & 38,0 & 36,0 \\ 36,1 & 37,0 & 37,2 & 40,5 & 40,4 \\ 35,5 & 35,7 & 36,1 & 37,0 & 39,2 \end{bmatrix}$$

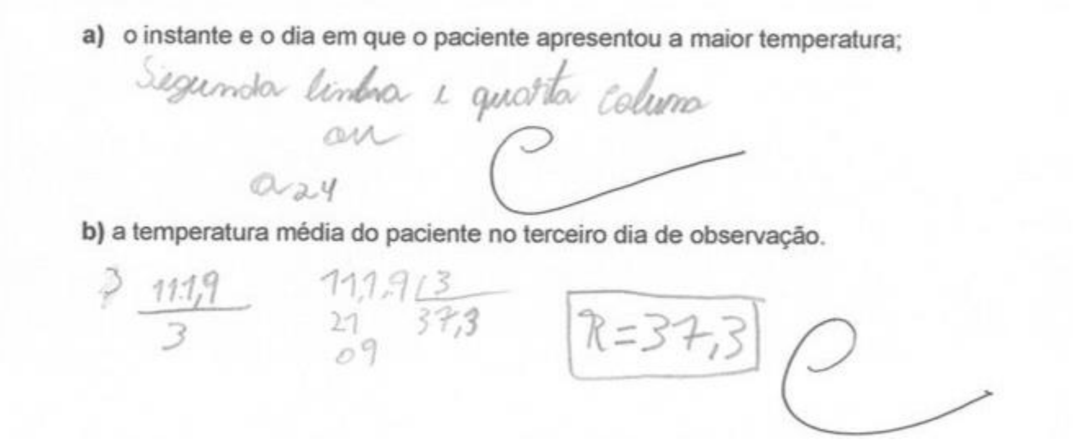
Determine: **a)** o instante e o dia em que o paciente apresentou a maior temperatura;

b) a temperatura média do paciente no terceiro dia de observação.

Fonte: Recorte de parte da Avaliação aplicada pela professora da turma.

O enunciado da questão é claro, fornecendo informações sobre a temperatura de um paciente, que foram organizadas na forma de uma matriz. No item a solicitava-se a localização de um elemento específico da matriz e no item b a média aritmética dos termos de uma coluna específica (a terceira). Para determinar a solução da questão, é necessário familiaridade com matrizes e entendimentos básicos sobre média aritmética. No item “a” da questão tivemos uma quantidade maior de acertos do que de erros. Já no item b, a quantidade de erros foi maior. Na figura 14 temos o registro da resposta de um aluno que acertou os dois itens.

Figura 14. Resposta certa para a Questão 9, produzida por um aluno da turma.



a) o instante e o dia em que o paciente apresentou a maior temperatura;

Segunda linha e quarta coluna
ou
a_{24}

b) a temperatura média do paciente no terceiro dia de observação.

$\frac{111,9}{3}$

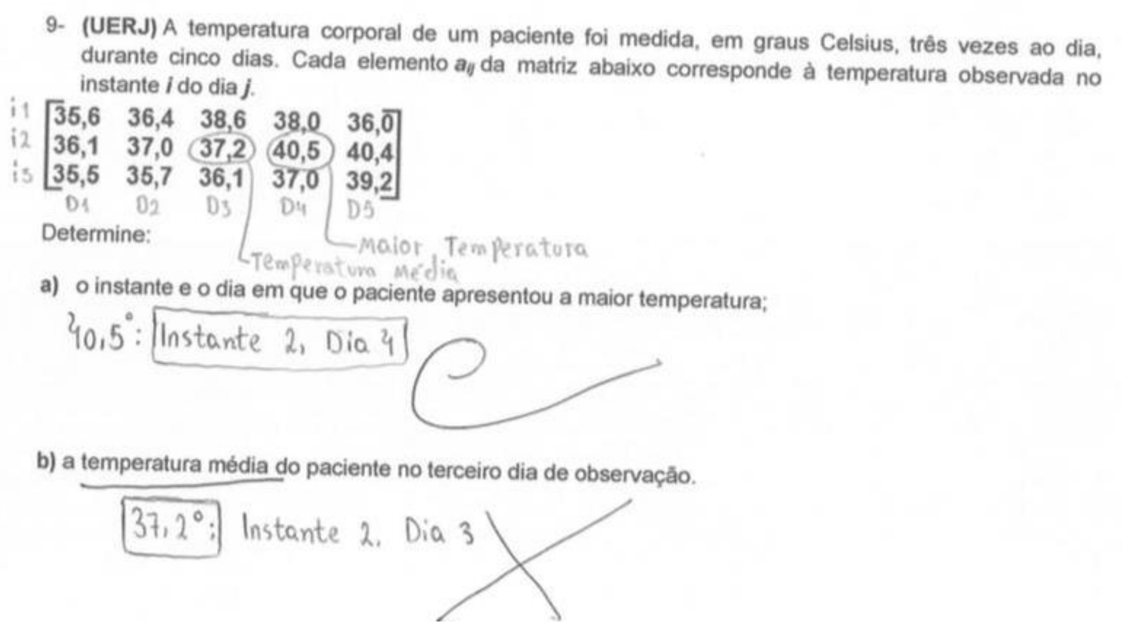
$$\begin{array}{r|l} 111,9 & 3 \\ \hline 21 & 37,3 \\ 09 & \end{array}$$

$\boxed{R=37,3}$

Fonte: Reprodução de parte de uma avaliação de um aluno da turma.

No item b, entendemos que o aluno fez o cálculo de adição dos três elementos da terceira coluna corretamente, embora ele não tenha explicitado os valores considerados como sendo as temperaturas do terceiro dia, mas chegou ao resultado certo. Na Figura 15 temos o registro de uma resposta errada, produzida por um aluno da turma. No registro o aluno circula os valores que entende serem as respostas dos dois itens.

Figura 15. Resposta certa para a Questão 9, produzida por um aluno da turma.



9- **(UERJ)** A temperatura corporal de um paciente foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia, durante cinco dias. Cada elemento a_{ij} da matriz abaixo corresponde à temperatura observada no instante *i* do dia *j*.

$$\begin{array}{c|ccccc|} i1 & 35,6 & 36,4 & 38,6 & 38,0 & 36,0 \\ i2 & 36,1 & 37,0 & 37,2 & 40,5 & 40,4 \\ i3 & 35,5 & 35,7 & 36,1 & 37,0 & 39,2 \\ & D1 & D2 & D3 & D4 & D5 \end{array}$$

Determine:

Maior Temperatura
Temperatura média

a) o instante e o dia em que o paciente apresentou a maior temperatura;

40,5°: $\boxed{\text{Instante 2, Dia 4}}$

b) a temperatura média do paciente no terceiro dia de observação.

$\boxed{37,2°:}$ Instante 2, Dia 3

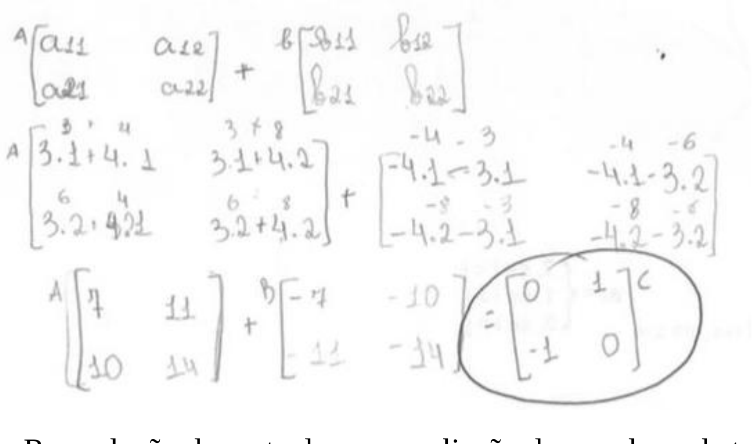
Fonte: Reprodução de parte de uma avaliação de um aluno da turma.

Podemos perceber que o aluno conseguiu identificar corretamente a maior temperatura na matriz, mostrando uma habilidade adequada para interpretar os dados fornecidos e determinar o valor máximo, porém, no item seguinte o aluno faz uma interpretação inadequada do que significa calcular a temperatura média, ao sugerir que a resposta seria o valor do meio do terceiro dia. Isso pode ter ocorrido por alguns fatores, um deles é que o aluno tenha feito uma interpretação incorreta da pergunta ou tenha confundido a média com outra medida de tendência central, como a mediana, que seria entendido por ele como o valor do meio de uma lista de números, o que de fato a mediana da terceira coluna seria 37.

A décima questão era identificada como sendo adaptada de uma questão proposta em algum sistema de avaliação da Universidade de São Paulo (USP), que nós classificaríamos como sendo de dificuldade média e que requer atenção aos detalhes. Seu enunciado é: "10 – PUC – SP – Adaptada) São dadas as matrizes A = (a_{ij}) e B = (b_{ij}), quadradas de ordem 2, com: $a_{ij} = 3i + 4j$ e $b_{ij} = -4i – 3j$. Considerando C = A + B, calcule a matriz C". Embora seja parecido com o enunciado da Questão 8, aqui o aluno precisaria primeiro identificar os elementos das matrizes A e B, operando com os dados dos índices de cada elemento e, depois, fazer a adição das duas matrizes.

O enunciado da questão é claro, fornecendo todas as informações necessárias para determinar a resposta, exigindo que o aluno aplique o que estudou sobre notação e operações de matrizes. A questão teve um percentual de erro bem alto e poucos alunos conseguiram determinar a solução. Na Figura 16 apresentamos o registro da solução de um aluno da turma.

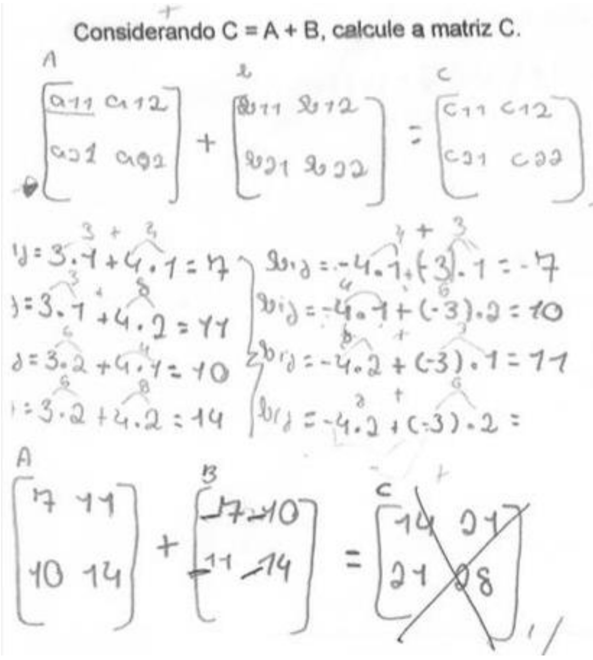
Figura 16. Resposta certa para a Questão 10, produzida por um aluno da turma.



Fonte: Reprodução de parte de uma avaliação de um aluno da turma.

Pelos registros podemos perceber que o estudante entendeu claramente o que foi solicitado na questão e conseguiu identificar corretamente os elementos das matrizes A e B, usando as expressões fornecidas para fazer os cálculos necessários para encontrar os elementos de cada matriz, substituindo os valores de i e j nas expressões dadas. Depois realizou corretamente a adição das matrizes A e B, obtendo a matriz C. Na Figura 17 temos o registro da resolução de um aluno, que não conseguiu chegar à resposta correta da questão.

Figura 17. Resposta errada para a Questão 10, produzida por um aluno da turma.



Fonte: Reprodução de parte de uma avaliação de um aluno da turma.

Pelos registros, podemos ver que o aluno conseguiu identificar corretamente os índices dos elementos que comporiam as matrizes A e B, mas cometeu alguns erros de cálculo, principalmente no uso das relações de sinais. Ou seja, mesmo que o aluno tenha demonstrado habilidade ao multiplicar corretamente os índices das matrizes A e B, erros podem ter ocorrido durante os cálculos básicos ou na interpretação dos resultados, resultando em uma resposta incorreta para a matriz C.

De modo geral, considerando os resultados das questões que analisamos, os alunos cometeram erros diversificados: problemas relativos à compreensão de definições relacionadas às matrizes ou de notação de seus elementos; falta de compreensão acerca dos procedimentos relativos a operações com matrizes; e problemas relativos a conteúdos matemáticos anteriormente, como operações básicas envolvendo números inteiros e conceitos relacionados a medidas de tendência central.

Após constatar altos índices de erros na prova, a professora corrigiu a prova no quadro, explicando cada questão de maneira mais detalhada. Além disso, ela ofereceu uma oportunidade de recuperação. Não tivemos acesso à recuperação, no entanto, a professora relatou que houve uma melhora considerável nas notas. Como vimos pelos resultados indicados no texto, a prova apresentou alto índice de erros, entendemos que a turma teve dificuldade no entendimento do assunto. Neste sentido, ao dar oportunidade de repor a nota, a professora demonstrou uma postura positiva e construtiva, que pode ajudar os alunos a compreenderem melhor o conteúdo, corrigirem seus erros e progredirem para os próximos conteúdos

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando as análises realizadas ao longo deste estudo sobre o ensino de matrizes no nível Médio da Educação Básica, ressaltamos a importância de um olhar com atenção sobre as estratégias pedagógicas empregadas, bem como os desafios enfrentados pelos alunos na compreensão desse conteúdo para sua formação matemática, considerando as possibilidades de aplicação em diferentes contextos.

Inicialmente, destacamos o papel da professora em questão, como mediadora do processo de ensino e aprendizagem, a qual demonstrou esforço para tornar o conteúdo acessível para os alunos, utilizando diversas estratégias metodológicas, como contextualizações, exemplos e questões propostas. A tentativa de conectar o conteúdo matemático com situações do cotidiano é importante, pois pode motivar os estudantes para o estudo do conteúdo em questão.

Entretanto, apesar dos esforços da professora, identificamos algumas dificuldades dos estudantes no entendimento do conteúdo explorado em sala de aula, evidenciadas na análise das respostas na avaliação aplicada pela professora. A alta taxa de erros nas questões ressaltou a necessidade de uma abordagem mais aprofundada e cuidadosa no ensino desse conteúdo. Os resultados podem indicar que os alunos podem estar focados em memorizar procedimentos sem compreender completamente os fundamentos por trás das operações, ou outro meio de resposta.

A análise das respostas dos alunos que acertaram as questões também revela a necessidade de uma atenção mais direcionada ao processo de aprendizagem. Embora tenham alcançado o resultado correto, a ausência de justificativas ou cálculos intermediários pode indicar uma compreensão superficial do conteúdo. É fundamental que os alunos entendam não apenas como resolver um problema, mas também por qual motivo estão seguindo determinados passos.

Diante dessas considerações, torna-se claro que há espaço para melhorias nas estratégias de ensino e aprendizagem relacionadas às Matrizes no nível Médio, na prática pedagógica da docente que participou de nosso estudo. É importante que ela revise suas abordagens metodológicas, buscando enfatizar não apenas a aplicação prática dos conceitos, mas também o desenvolvimento do pensamento crítico e da compreensão conceitual.

Além disso, atividades complementares que estimulem a prática e a revisão sistemática dos conteúdos podem ser incorporadas, proporcionando aos alunos a oportunidade de consolidar seu conhecimento de forma mais eficaz. A análise contínua dos resultados e a adaptação das estratégias de ensino de acordo com as necessidades dos alunos são essenciais para garantir um progresso significativo em sua aprendizagem.

O presente estudo constituiu uma experiência significativa para nossa formação acadêmica, oportunizando-nos a aprender mais sobre o tema e a fazer reflexões sobre a prática docente que, embora em nosso texto estivesse focada em um tema, serviu para pensarmos de forma abrangente sobre a responsabilidade da docência e do compromisso que precisamos assumir com o desenvolvimento de nossos estudantes.

Como interesse de novos estudos, pensamos realizar reflexões futuras sobre nossa própria sala de aula, quer sejam referentes ao mesmo tema ou a outros conteúdos matemáticos dos Ensinos Fundamental e/ou Médio, acerca dos quais os estudantes apresentem dificuldades, evidenciadas em estudos já realizados por investigadores da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Darlan; CÉSAR, Augusto; FERREIRA, Cláudia. Ensino de matemática através da resolução de problemas: análise da disciplina RPM implantada pela SEEDUC-RJ. Educ. **Matem. Pesq.**, São Paulo, v.19, n.1, 105-120, 2017.

BORGES, Frederico. Tópicos de Álgebra Linear e Aplicações em Problemas de Economia e de Engenharia. 2013. 35 p. (Mestrado em Matemática do ensino Básico) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

BORGES, Thiago et al. A metodologia de resolução de problemas aplicada ao ensino de matrizes no Ensino Médio. **REnCiMa,** São Paulo, v. 12, n. 4, p. 1-25, jul./set. 2021

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DOMINGOS, Joalyton. **Análise do uso de um aplicativo no ensino de Sistemas de equações lineares.** 2020. 55 p. (Licenciando em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2020.

ELIAS, Eduardo et al. Criptografia de Dados Utilizando Matrizes. **UNIFENAS**, p. 01-09, 2015.

JOAQUIM, Antônio. **Metodologia do Trabalho Científico.** 1 ed. São Paulo: Cortez, 2013.

KATZ, Victor. **A history of mathematics.** 3ed- USA: Pearson Education, Inc, 2009.

KLEINER, Israel. **A History of Abstract Algebra.** Toronto-Canadá: Birkhauser Boston, 2007.

KRAIESKI, Protasio. **Abordagem De Matrizes No Ensino Médio:** Uma Avaliação Crítica Através Dos Livros Didáticos, Com Sugestões De Aplicações. 1999. 83 p. (Monografia)- Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999.

MAIOLI, Marcia. **A contextualização na matemática do Ensino Médio**. 2012. 211 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2012.

MORAES, Roque. **Análise de Conteúdo.** Revista Educação, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

NELSON, Robinson. **Uma breve história do desenvolvimento das teorias dos determinantes e das matrizes.** 2007. 42 p. (Licenciando em Matemática) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

PIRES, Gregório. **Matrizes: Da História Às Aplicações.** 2018. 38 p. (Licenciando em Matemática) - Universidade Estadual Da Paraíba, Campina Grande, 2018.

RAMOS, Margarida. **Determinantes e Suas Propriedades.** 2014. 50 p. (Licenciando em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, 2014.

ROBERTO, José; RUY, José; ROBERTO, Paulo**. Matemática: sistemas, matemática financeira e grandezas**: ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1ed. São Paulo: FTD, 2020.

SANTOS, Reginaldo. Matrizes, Vetores e Geometria Analítica. **Imprensa Universitária da UFMG**, Belo Horizonte, 13- 721, março, 2010.

VALBER, José. **Aplicações De Matrizes no Ensino Médio.** 2014. 50 p. (Licenciando em Matemática)- Universidade Estadual Da Paraíba, Campina Grande, 2014.

VASCONCELLOS, Victor. **Uma Análise Sobre o Ensino de Matrizes no Ensino Básico.** 2022. 42p.(Licenciando em Matemática)- Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2022.

WATANABE, Tatiane. **Resolução de Problemas no Ensino de Matrizes.** 2012. 70 p. (Licenciando em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, São Paulo, 2012.

ANEXOS – Questões propostas em sala de aula, retiradas da página em destaque do livro didático adotado na escola.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. (Unimontes-MG) Ao associarmos as letras do alfabeto aos números, segundo a correspondência

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

podemos afirmar que a palavra UNIMONTES pode ser codificada pela matriz 3×3 dada por alternativa **b**

a) $\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 15 & 14 \\ 19 & 5 & 20 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 16 & 14 \\ 20 & 5 & 19 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 15 & 14 \\ 20 & 5 & 19 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 21 & 14 & 9 \\ 13 & 16 & 14 \\ 19 & 5 & 20 \end{bmatrix}$

2. Obtenha a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, sabendo que $a_{ij} = 3i - j^2$. Ver as **Orientações para o professor**.

3. Dizemos que uma matriz quadrada é um quadrado mágico se as somas dos elementos de cada linha, de cada coluna, das diagonais, principal e secundária, são todas iguais. Qual(is) das matrizes a seguir corresponde(m) a um quadrado mágico? *A* e *B*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Determine cada matriz definida a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

a) $A = (a_{ij})_{1 \times 3}$, tal que $a_{ij} = 2i - j$

b) $B = (b_{ij})_{4 \times 2}$, tal que $b_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i \leq j \\ i - j, \text{ se } i > j \end{cases}$

c) $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$, tal que $c_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, \text{ se } i \neq j \\ 0, \text{ se } i = j \end{cases}$

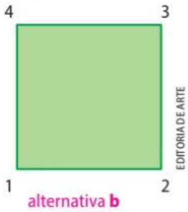
5. (UEPA) A tabela abaixo, regularmente disposta em linhas (atleta) e colunas (dia), representa os registros dos tempos de treinamento dos atletas **A, B** e **C** em 3 dias. Sendo *i* a ordem das linhas e *j* a ordem das colunas e $a_{ij} = 30i + 10j$ o elemento genérico desta tabela, com *i* e *j* dados em minutos, o tempo de treinamento gasto pelo atleta **B** no terceiro dia foi de:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1^{\text{o}}\text{ dia} & 2^{\text{o}}\text{ dia} & 3^{\text{o}}\text{ dia} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

a) 1 hora e 30 minutos. alternativa **a**
b) 1 hora e 50 minutos.
c) 2 horas.
d) 2 horas e 10 minutos.
e) 2 horas e 30 minutos.

6. Determine a soma dos elementos da diagonal principal com os elementos da diagonal secundária da matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem 4, em que $a_{ij} = i - j$. zero

7. (Unimep-SP) É dado um quadrado de lado medindo 1 unidade, numerado conforme a figura.
A matriz 4×4, tal que a_{ij} é a distância entre os vértices de números *i* e *j*, é:



alternativa **b**

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

e) nenhuma das alternativas anteriores.

Prova de matemática – III Bimestre – 2ª Regular

1- (Vunesp-SP) Em um jogo eletrônico, o "monstro" tem a forma de um setor circular de raio 1 cm, como mostra a figura. A parte que falta no círculo é a boca do "monstro", e o ângulo de abertura mede 1 radiano. O perímetro do "monstro", em cm, é:

a) $\pi - 1$
b) $\pi + 1$
c) $2\pi - 1$
d) 2π
e) $2\pi + 1$

2- Transforme 90' em graus.

3- Transforme $\frac{2\pi}{7}$ em grau.

4- Qual é o comprimento de um arco que tem um ângulo central de 120° e é formado por um raio de 6 m?

5- Qual é o comprimento do arco com raio de 3 m e medida de 1,5 radianos?

6- (UFPB) As mensagens entre duas agências de espionagem, Gama e Rapa, são trocadas usando uma linguagem de códigos, onde cada número inteiro entre 0 e 25 representa uma letra, conforme mostra a tabela a seguir:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
7	10	22	9	5	4	18	2	17	25	23	12	14

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
8	1	19	15	20	21	11	3	16	24	6	13	0

A agência Gama enviou para a Rapa o nome de um espião codificado na matriz: $A = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Para decodificar uma palavra de cinco letras, dada por uma matriz *A*, de ordem 5 x 1, formada por inteiros entre 0 e 25, deve-se multiplicá-la pela matriz de conversão: $C = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. E, usando-se a tabela dada, converter os números em letras. Utilizando-se esse processo, conclui-se que o nome do espião é:

a) DIEGO
b) SHUME
c) SADAN
d) RENAN
e) RAMON

7- Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ determine $A.B$:

8- Dê a matriz **A = (a_{ij})** $_{3\times3}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} 2, \text{ se } i < j \\ 1, \text{ se } i > j \\ 0, \text{ se } i = j \end{cases}$

9- **(UERJ)** A temperatura corporal de um paciente foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia, durante cinco dias. Cada elemento a_{ij} da matriz abaixo corresponde à temperatura observada no instante ***i*** do dia ***j***.

$$\begin{bmatrix} 35{,}6 & 36{,}4 & 38{,}6 & 38{,}0 & 36{,}0 \\ 36{,}1 & 37{,}0 & 37{,}2 & 40{,}5 & 40{,}4 \\ 35{,}5 & 35{,}7 & 36{,}1 & 37{,}0 & 39{,}2 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) o instante e o dia em que o paciente apresentou a maior temperatura;

10- (PUC–SP–Adaptada) São dadas as matrizes A = (aij) e B = (bij), quadradas de ordem 2, com:

$$aij = 3i + 4j$$
$$bij = -4i - 3j$$

Considerando C = A + B, calcule a matriz C.