

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS APLICADAS E EDUCAÇÃO DEPARTAMENTO
DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Elenilson Justino de Oliveira

Curvas de Bézier Cúbicas e suas Propriedades

Rio Tinto – PB
2024

Elenilson Justino de Oliveira

Curvas de Bézier Cúbicas e suas Propriedades

Trabalho Monográfico apresentado à
Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática como requisito parcial para obtenção
do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. José Laudelino de
Menezes Neto

Rio Tinto – PB
2024

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

048c Oliveira, Elenilson Justino de.
Curvas de Bézier Cúbicas e suas Propriedades /
Elenilson Justino de Oliveira. - Rio Tinto, 2024.
31 f. : il.

Orientação: José Laudelino de Menezes Neto.
TCC (Graduação) - UFPB/CCAE.

1. Curvas de Bézier. 2. Polinômios de Bernstein. 3.
Algoritmo de Casteljau. 4. Fecho convexo. I. Menezes
Neto, José Laudelino de. II. Título.

UFPB/CCAE

CDU 51

Elenilson Justino de Oliveira

Curvas de Bézier Cúbicas e suas Propriedades

Trabalho Monográfico apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. José Laudelino de Menezes Neto

Aprovado em: 07 / 05 / 2024

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 JOSE LAUDELINO DE MENEZES NETO
Data: 07/05/2024 18:01:40-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Laudelino de Menezes Neto (Orientador) – UFPB/DCX

Documento assinado digitalmente
 CARLOS ALBERTO GOMES DE ALMEIDA
Data: 07/05/2024 21:24:30-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Carlos Alberto Gomes de Almeida – UFPB/DCX

Documento assinado digitalmente
 JOSE ELIAS DOS SANTOS FILHO
Data: 07/05/2024 20:46:10-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Elias dos Santos Filho – UFPB/DCX

AGRADECIMENTOS

À Deus, por todas as vitórias na minha vida!

À minha mãe, que nunca mediu esforços para me incentivar e apoiar na minha jornada acadêmica.

Ao meu orientador, pelo estímulo e colaboração nessa trajetória;

Aos colegas de curso, pelas trocas de experiências, pelo convívio, pelas alegrias e incertezas, por todos esses momentos vividos juntos e compartilhados.

“Aquilo que o homem ignora não existe para ele.
Por isso o universo de cada um se resume no
tamanho do seu saber.”

Albert Einstein

RESUMO

Este trabalho investiga as características matemáticas das curvas de Bézier, começando com a discussão de curvas parametrizadas diferenciáveis e reparametrização de curvas. Em seguida, são abordados os polinômios de Bernstein, as principais características das curvas de Bézier, sua origem histórica e suas aplicações modernas. São apresentadas definições matemáticas, incluindo o algoritmo de Casteljau, juntamente com propriedades como a propriedade de extremidade, pontos de controle e forma da curva, propriedade do fecho convexo e invariância sob transformações afins. Demonstramos a propriedade do fecho convexo para o caso específico das curvas de Bézier cúbicas e mostramos através de alguns exemplos a invariância das curvas de Bézier sob transformações afins como translação, escalonamento linear, reflexão e rotação. O objetivo deste trabalho é explorar os elementos e propriedades matemáticas das curvas de Bézier.

Palavras-chave: Curvas de Bézier. Polinômios de Bernstein. Algoritmo de Casteljau. Fecho convexo.

ABSTRACT

This work investigates the mathematical characteristics of Bézier curves, we start with the discussion of parametrically differentiable curves and curve reparametrization. Next, Bernstein polynomials, the main characteristics of Bézier curves, their historical origins, and modern applications are addressed. Mathematical definitions are presented, including Casteljau's algorithm, along with properties such as the endpoint interpolation property, control points and curve shape, convex hull property, and invariance under affine transformations. We demonstrate the convex hull property for the specific case of cubic Bézier curves and provide some examples showing the invariance of Bézier curves under affine transformations like translation, linear scaling, reflection, and rotation. The objective of this work is to explore the mathematical elements and properties of Bézier curves.

Keywords: Bézier curves. Bernstein polynomials. De Casteljau's algorithm. Convex hull.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
2	CURVAS DIFERENCIÁVEIS.....	3
2.1	Curva Parametrizada Diferenciável.....	3
2.2	Reparametrização de Curvas.....	4
3	CURVAS DE BÉZIER	7
3.1	Polinômios de Bernstein	7
3.2	Curvas de Bézier.....	9
3.3	Definição Matemática.....	9
3.4	Algoritmo de Casteljau.....	11
3.5	Propriedades das Curvas de Bézier.....	12
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	22
	REFERÊNCIAS.....	23

1 INTRODUÇÃO

A Matemática, enquanto ciência, desempenha um papel crucial em diversas áreas do conhecimento, enriquecendo a compreensão, modelagem e resolução de uma ampla variedade de problemas. Além disso, contribui significativamente para o desenvolvimento de inovações e soluções práticas de situações do mundo real. Uma área particular onde a Matemática se entrelaça de maneira fascinante é a Computação Gráfica, dedicada à criação, manipulação e representação de elementos visuais por meio de algoritmos e técnicas computacionais.

A utilização de conceitos matemáticos, especialmente aqueles relacionados à Álgebra e Geometria, é essencial nos processos de representação, manipulação e transformação de objetos, imagens e animações. Um exemplo notável desses conceitos é encontrado ao estudarmos as Curvas de Bézier. Essas curvas paramétricas, definidas por polinômios, permitem expressar a posição de um ponto ao longo da curva em termos de coordenadas ponderadas e coeficientes binomiais, além da criação de formas suaves e precisas, permitindo o controle intuitivo por meio de pontos de influência conhecidos como pontos de controle.

No campo da Computação Gráfica, as Curvas de Bézier são amplamente reconhecidas e empregadas na concepção de designs intrincados e autênticos. Sua versatilidade é notável pela habilidade de representação de uma grande variedade de curvas independente de sua forma ou tamanho, o que as torna uma ferramenta indispensável para designers, artistas e desenvolvedores visuais. A manipulação dos pontos de controle não apenas molda a curva, mas também permite ajustes minuciosos, garantindo uma flexibilidade excepcional na expressão visual. Este estudo busca explorar a conexão entre os princípios matemáticos subjacentes às Curvas de Bézier.

É possível notar a relação entre a Matemática e a Computação, evidenciada pela ampla utilização das Curvas de Bézier em programas de desenho e edição de imagens, tais como Corel Draw, Photoshop, Paintbrush, Gimp, Inkscape, Adobe After, entre outros. Nessas plataformas, as curvas são usadas de forma implícita na criação de ilustrações, contornos, formação de fontes, ajustes de imagens e definição de trajetórias para movimentos suaves e controlados.

O estudo das Curvas de Bézier, além de seu papel prático, é essencial para o desenvolvimento do conhecimento em Geometria Diferencial. Este ramo da Matemática concentra-se na análise das propriedades geométricas das curvas no plano e no espaço, utilizando ferramentas do Cálculo Diferencial. Neste trabalho, buscaremos explorar os elementos característicos e propriedades intrínsecas das Curvas de Bézier.

O aprofundamento no estudo dessas curvas não apenas amplia a compreensão teórica,

mas também proporciona uma base sólida para a aplicação prática desses conhecimentos em áreas diversas, como design gráfico, animação e engenharia de imagem. Ao desvendar a relação entre a estrutura matemática das Curvas de Bézier e suas aplicações, este estudo pode contribuir para a formação de profissionais que poderão influenciar positivamente diversas áreas, desde pesquisas em Matemática até a resolução de desafios complexos nas ciências aplicadas.

Nos próximos capítulos, abordaremos conceitos fundamentais relacionados às Curvas de Bézier, fornecendo uma base para a compreensão do tema. Exploraremos elementos relacionados as propriedades das curvas parametrizadas diferenciáveis usando como base teórica Tenenblat (2008) e Do Carmo (2006) destacando a importância da suavidade e continuidade nessas representações matemáticas. Além disso, discutiremos os Polinômios de Bernstein, fundamentais para a construção das Curvas de Bézier, e examinaremos a influência dos pontos de controle na manipulação e design dessas curvas baseados nas definições e propriedades apresentados por Farin (2002). Também será apresentado o contexto histórico, oferecendo uma visão sobre o desenvolvimento e a evolução desse conceito ao longo do tempo.

2- CURVAS DIFERENCIÁVEIS

2.1- Curva Parametrizada Diferenciável

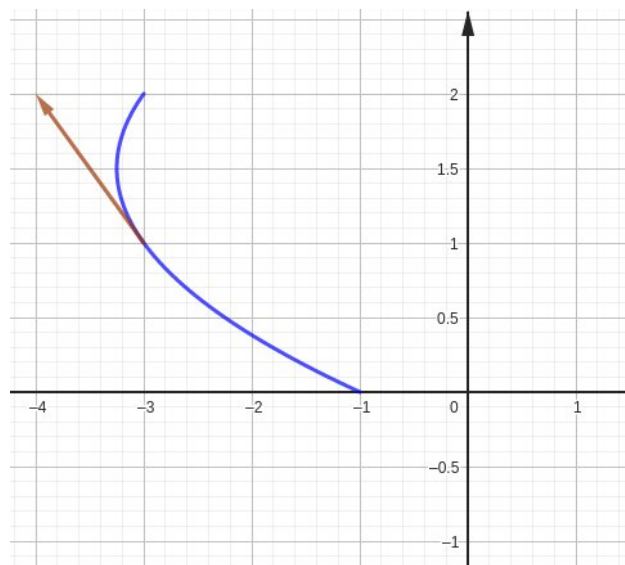
Uma Curva Parametrizada Diferenciável no plano é uma representação suave de uma trajetória no $\mathbb{R}^2$. Matematicamente, trata-se de uma aplicação $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida em um intervalo aberto dos reais $I =]a, b[$ e representada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ onde $x(t), y(t)$ são funções contínuas de classe C^∞ conhecidas como funções coordenadas, t é o parâmetro e a imagem $\alpha(I)$ é a trajetória descrita pela curva α quando o parâmetro varia ao longo do domínio, também conhecida como traço de α .

Uma curva α é de classe C^∞ se todas as suas funções coordenadas possuírem derivadas de todas as ordens. Esta condição implica na suavidade da curva.

O vetor tangente definido como $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$, onde $x'(t), y'(t)$ são as derivadas das funções coordenadas de α , descreve a direção da curva no ponto $t \in I$. Uma curva parametrizada é regular se $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$. Isso implica que a curva não possui pontos de "dobras" ou "paradas bruscas", garantindo a trajetória suave e contínua ao longo do intervalo parametrizado I .

Vamos usar como exemplo a curva $\alpha(t) = (t^2 - 3t - 1, t)$, onde t pertence ao intervalo $]0, 2[$, cujo vetor tangente é $\alpha'(t) = (2t - 3, 1)$, o qual é diferente de zero. Desta forma, podemos observar que α é uma curva regular para todos os valores de t no intervalo $]0, 2[$. Seja por exemplo, $t = 1$, obtemos o vetor tangente $\alpha'(1) = (-1, 1)$.

Figura 01: $\alpha(t) = (t^2 - 3t - 1, t)$ no intervalo $]0, 2[$ e vetor tangente à curva para $t=1$

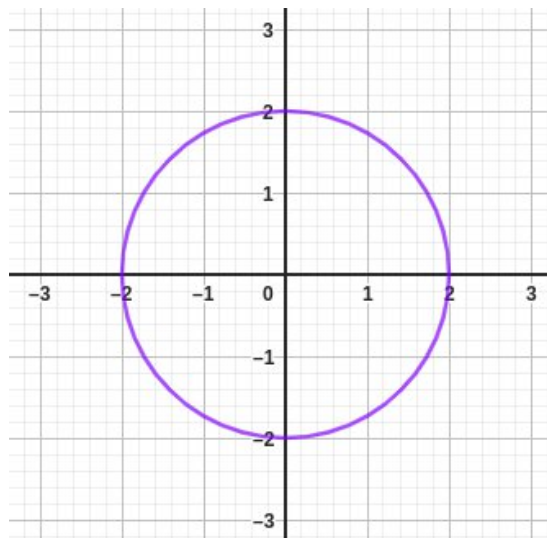


2.2- Reparametrização de curvas

A reparametrização de curvas é um processo que envolve a modificação da forma como uma curva é percorrida ao longo do tempo. Isso é feito através da escolha de uma nova função de parâmetro, que preserva a representação e diferenciabilidade da curva original. Esse processo é útil em várias aplicações, como por exemplo, na otimização e simplificação de cálculos.

Duas curvas de parâmetros diferentes podem ter o mesmo traço. Vamos usar o exemplo das curvas $\gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$ e $\delta(s) = \left(2\cos\left(\frac{s}{2}\right), 2\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right)$, $s \in \mathbb{R}$ que possuem a mesma trajetória porém os parâmetros são diferentes, sendo $\delta(s)$ uma reparametrização de $\gamma(t)$. Nota-se que ambos os conjuntos de parâmetros geram uma circunferência centrada na origem e de raio 2. $\delta(s)$

Figura 02: Traço das curvas $\gamma(t)$ e $\delta(s)$



Fonte: Autor, 2024

Proposição 1: Sejam I e J intervalos abertos dos reais, a aplicação $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e uma função $h: J \rightarrow I$ uma função diferenciável cuja imagem de $h(J)$ é o conjunto I e a derivada $h'(s) \neq 0$ para todo $s \in J$. Então a aplicação composta $\beta = \alpha \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular que possui o mesmo traço de α .

Demonstração: Para provarmos essa propriedade, basta considerarmos o fato de que as aplicações α e h são diferenciáveis de classe C^∞ então temos que a composição $\alpha \circ h$ também é de classe C^∞ com $\alpha \circ h'(s) = \alpha(h'(s)) \neq 0$ e $h'(s) \neq 0$ para todo $s \in J$. Além disso o traço $\alpha \circ h = (\alpha \circ h)(J) = \alpha(h(J))$. Como $h(J) = I$ temos que $(\alpha \circ h)(J) = \alpha(I)$ que é o traço de α . **C.Q.D.**

A curva $\alpha \circ h$ é uma reparametrização de α por h e a função $h(s)$ é uma mudança de parâmetro. Como consequência dessa proposição, dada uma curva parametrizada diferenciável regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, podemos obter várias curvas regulares com o mesmo traço de α .

O comprimento de arco representa a distância total percorrida ao longo da curva. Calculado através da integral da norma do vetor tangente à curva em relação ao parâmetro. Em outros termos, dada uma curva diferenciável $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ com o parâmetro t , calculamos o comprimento de arco dessa curva num intervalo $I =]t_0, t_1[$ pela fórmula:

$$S = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$$

Definição: Dizemos que uma curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se

$$\int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = t - t_0$$

Proposição 2: Uma curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

Demonstração: Se $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$ então $\int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^t 1 dt = t - t_0$ para quaisquer $t_0, t \in I$ com $t_0 \leq t$.

Reciprocamente, seja $t_0 \in I$ fixo e consideremos a função $S: I \rightarrow \mathbb{R}$ comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então; $S(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = t - t_0$ se $t \geq t_0$ e $S(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = -\int_t^{t_0} \|\alpha'(\xi)\| d\xi = -(t_0 - t)$ se $t \leq t_0$, ou seja, $S(t) = t - t_0$. Logo, $S'(t) = \|\alpha'(t)\| = 1$. **C.Q.D.**

A reparametrização pelo comprimento de arco é um processo que envolve ajustar a parametrização original para que o novo parâmetro seja o comprimento de arco ao longo da curva. Dada uma curva regular $\alpha(t)$ é necessário calcular a função comprimento de arco $S(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$ e posteriormente obter a inversa dessa função S^{-1} que chamaremos de $h(s)$, por fim, obter uma curva $\beta = \alpha(h(s))$. Vamos analisar um exemplo.

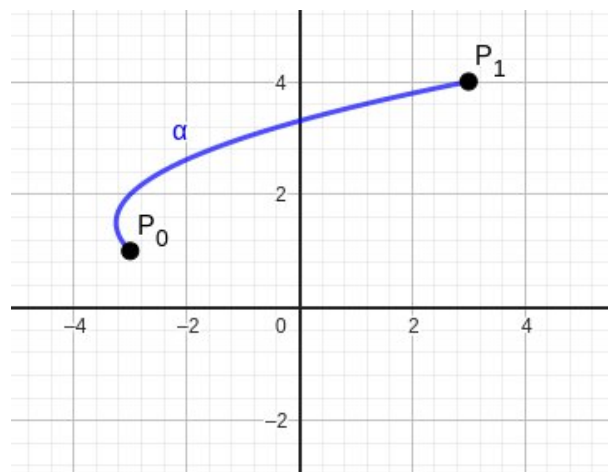
Obteremos uma reparametrização da curva $\alpha(t) = (at + c, bt + d)$, $t \in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$. Sabendo que $\alpha'(t) = (a, b)$, $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e a função comprimento de arco a partir de $t_0 = 0$ é $S(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t$. Obtendo a função inversa de S , temos $S^{-1} = h(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Agora, fazendo $\beta = \alpha(h(s))$ temos a curva

$\beta(s) = \left(a \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + d \right)$ que é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

Dada uma curva contida num intervalo fechado $[a, b]$, com $\alpha(a) = P_0$ e $\alpha(b) = P_1$, é sempre viável realizar uma reparametrização de modo a obter $\alpha(0) = P_0$ e $\alpha(1) = P_1$. Esse ajuste pode ser alcançado por meio da introdução de uma função $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definida como $f(t) = (b - a)t + a$. Ao aplicar a composição $\alpha(f(t))$ conseguimos uma nova parametrização da curva com $\alpha(f(0)) = P_0$ e $\alpha(f(1)) = P_1$.

Tomemos como exemplo a curva $\alpha: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^2 - 3t - 1, t)$ e a função $f: [0, 1] \rightarrow [1, 4]$ com $f(t) = (4 - 1)t + 1 = 3t + 1$. Temos $\alpha(1) = P_0 = (-3, 1)$ e $\alpha(4) = P_1 = (3, 4)$. Como $f(0) = 1$ e $f(1) = 4$, temos que $\alpha(f(0)) = \alpha(1) = P_0$ e $\alpha(f(1)) = \alpha(4) = P_1$.

Figura 03: Curva $\alpha(t) = (t^2 - 3t - 1, t)$. Os pontos P_0 e P_1 obtidos pela reparametrização, são os pontos inicial e final da curva respectivamente.



Fonte: Autor, 2024

Esse procedimento proporciona uma forma conveniente de ajustar a parametrização da curva assegurando sempre que dada uma curva $\alpha(t)$, temos $\alpha(0) = P_0$ e $\alpha(1) = P_1$. A função $f(t)$ desempenha o papel de mapear o intervalo unitário $[0, 1]$ para o intervalo original $[a, b]$. Essa técnica não apenas simplifica as manipulações matemáticas, mas também oferece uma perspectiva mais intuitiva para entender e trabalhar com as curvas em questão.

3- CURVAS DE BÉZIER

3.1- Polinômios de Bernstein

Os Polinômios de Bernstein, foram introduzidos pelo matemático russo Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968), destacam-se como uma classe significativa na teoria dos polinômios pois, desempenham um papel crucial na aproximação de funções contínuas em intervalos fechados, representando-as como combinações convexas de polinômios fundamentais, oferecendo uma abordagem única para a análise e representação de curvas suaves, o que tornam-os valiosos em diversas áreas da Matemática Aplicada, desde interpolação até Design Assistido por Computador (CAD).

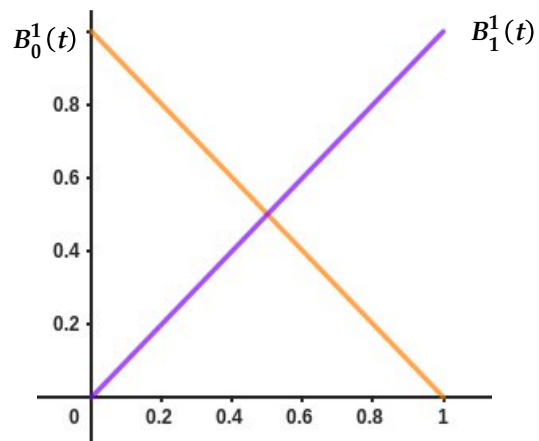
Os Polinômios de Bernstein são definidos como $B_i^n(t) = \binom{n}{i} \cdot (1-t)^{n-i} \cdot t^i$ com $t \in [0,1]$ e i um índice que varia de 0 a n . O número de polinômios de grau n é igual a $n + 1$. Por exemplo, os polinômios de grau 1, 2 e 3 são:

Polinômios de Bernstein de Grau 1

$$B_0^1(t) = \binom{1}{0} \cdot (1-t)^1 \cdot t^0 = 1-t$$

$$B_1^1(t) = \binom{1}{1} \cdot (1-t)^{1-1} \cdot t^1 = t$$

Figura 04



Fonte: Autor, 2024

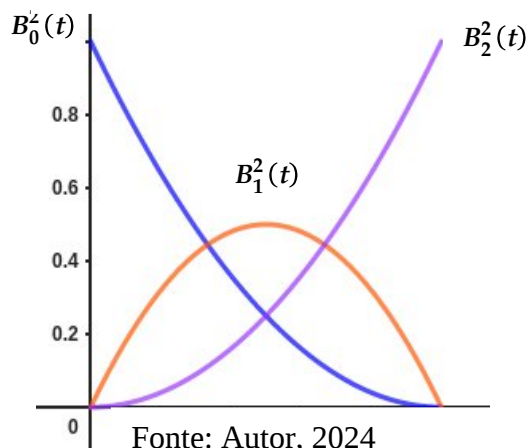
Polinômios de Bernstein de Grau 2

$$B_0^2(t) = \binom{2}{0} \cdot (1-t)^2 \cdot t^0 = (1-t)^2$$

$$B_1^2(t) = \binom{2}{1} \cdot (1-t)^{2-1} \cdot t^1 = 2(1-t)t$$

$$B_2^2(t) = \binom{2}{2} \cdot (1-t)^0 \cdot t^2 = t^2$$

Figura 05



Fonte: Autor, 2024

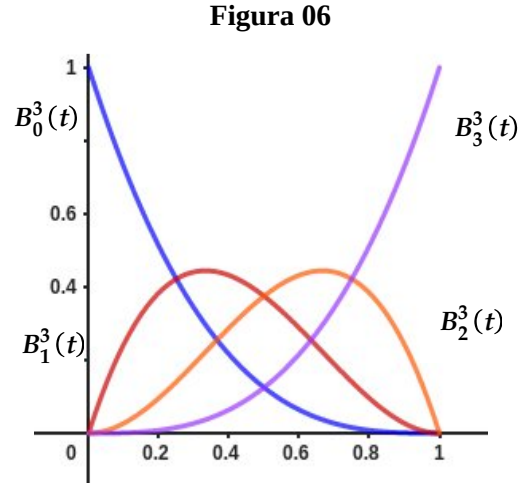
Polinômios de Bernstein de Grau 3

$$B_0^3(t) = \binom{3}{0} \cdot (1-t)^3 \cdot t^0 = (1-t)^3$$

$$B_1^3(t) = \binom{3}{1} \cdot (1-t)^{3-1} \cdot t^1 = 3(1-t)^2t$$

$$B_2^3(t) = \binom{3}{2} \cdot (1-t)^{3-2} \cdot t^2 = 3(1-t)t^2$$

$$B_3^3(t) = \binom{3}{3} \cdot (1-t)^0 \cdot t^3 = t^3$$



Fonte: Autor, 2024

A seguir, apresentaremos algumas das propriedades notáveis destes polinômios que destacam sua importância em diversos contextos incluindo a representação de curvas suaves.

3.1.1- Partição da unidade

A soma de todas as partições dos polinômios de Bernstein de grau n é sempre igual a 1.

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot (1-t)^{n-i} \cdot t^i = 1$$

Por exemplo, calculando a soma dos polinômios de grau 1, 2 e 3 respectivamente, temos:

$$B_0^1(t) + B_1^1(t) = 1-t + t = 1$$

$$B_0^2(t) + B_1^2(t) + B_2^2(t) = (1-t)^2 + 2(1-t)t + t^2 = 1-2t + 2t^2 + 2t-2t^2 = 1$$

$$B_0^3(t) + B_1^3(t) + B_2^3(t) + B_3^3(t) = (1-t)^3 + 3(1-t)^2t + 3(1-t)t^2 + t^3 = 1$$

3.1.2- Simetria

Essa propriedade diz respeito à simetria desses polinômios em relação ao ponto médio da curva, que é $t = \frac{1}{2}$. Em termos formais, pode ser expressa da seguinte maneira:

$$B_i^n(t) \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$$

$$B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$$

Para exemplificarmos, vamos verificar essa propriedade para o polinômio $B_1^3(t)$.

$$B_{3-1}^3(1-t) = B_2^3(1-t) = \binom{3}{2} \cdot (1-t)^{3-2} \cdot t^1 = 3(1-t)t^2$$

Considerando $t = \frac{1}{2}$ temos;

$$B_1^3\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

$$B_{3-1}^3\left(1 - \frac{1}{2}\right) = B_2^3\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

3.1.3- Positividade no intervalo]0,1[

Os polinômios de Bernstein são sempre positivos no intervalo]0,1[. Sabemos que $B_i^n(t) = \binom{n}{i} \cdot (1-t)^{n-i} \cdot t^i$. Como o coeficiente binomial $\binom{n}{i}$ é não-negativo e $(1-t)^{n-i} > 0, \forall t \in]0,1[$, então $B_i^n(t) > 0$. Assim, $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) > 0$.

3.2- Curvas de Bézier

No contexto histórico, as curvas de Bézier ganharam destaque em meados do século 20, quando o engenheiro francês Pierre Bézier (1910-1999), aplicou-as na modelagem de formas aerodinâmicas de carros para a Renault. Essa contribuição foi particularmente valiosa na criação de superfícies suaves e fluidas em designs automotivos, proporcionando uma maneira eficaz de controlar e ajustar as curvas sem a necessidade de cálculos matemáticos mais complexos.

Ao longo do tempo, essas curvas foram adotadas em diversos campos, como design gráfico, animação, tipografia e modelagem 3D. Dentre as suas principais características está a capacidade de serem definidas por pontos de controle, o que oferece uma flexibilidade significativa para a criação de formas precisas. Atualmente, são amplamente incorporadas em softwares de design gráfico e são fundamentais na geração de elementos gráficos realistas em diversos meios visuais.

3.3- Definição Matemática

Matematicamente, uma curva de Bézier de grau n é uma curva paramétrica definida por uma combinação linear de pontos de controle $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$, onde n é o grau da curva. A equação geral é expressa por:

$$\beta(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot (1-t)^{n-i} \cdot t^i \cdot P_i; t \in [0, 1]$$

Aqui, $\binom{n}{i} \cdot (1-t)^{n-i} \cdot t^i$ é o Polinômio de Bernstein denotado por $B_i^n(t)$ e $P_i = (x_i, y_i)$ representa o ponto de controle. As funções coordenadas de $\beta(t) = (x(t), y(t))$ são então dadas por:

$$x(t) = \sum_{i=0}^n x_i \cdot B_i^n(t)$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot B_i^n(t)$$

Neste capítulo e no decorrer do texto, analisaremos exemplos e propriedades de curvas de Bézier cúbicas, que são definidas por quatro pontos de controle que chamaremos P_0, P_1, P_2 e P_3 .

$$\beta(t) = B_0^3(t)P_0 + B_1^3(t)P_1 + B_2^3(t)P_2 + B_3^3(t)P_3$$

$$\beta(t) = (1-t)^3P_0 + 3(1-t)^2tP_1 + 3(1-t)t^2P_2 + t^3P_3$$

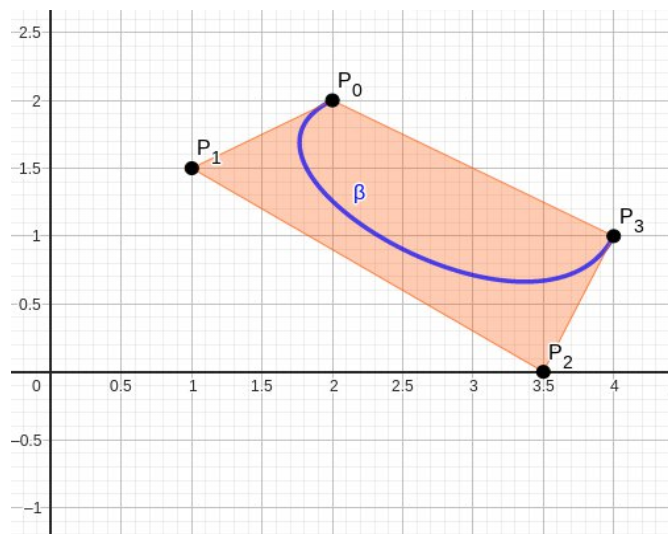
$$\beta(t) = (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)P_0 + (3t^3 - 6t^2 + 3t)P_1 + (-3t^3 + 3t^2)P_2 + t^3P_3$$

Agora, vamos determinar as coordenadas de uma curva $\beta(t)$ definida pelos pontos de controle, $P_0 = (2, 2)$, $P_1 = (1, \frac{3}{2})$, $P_2 = (\frac{7}{2}, 0)$ e $P_3 = (4, 1)$. Usando a expressão acima, temos:

$$\beta(t) = (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)(2, 2) + (3t^3 - 6t^2 + 3t)\left(1, \frac{3}{2}\right) + (-3t^3 + 3t^2)\left(\frac{7}{2}, 0\right) + t^3(4, 1)$$

$$\beta(t) = \left(\frac{-11t^3 + 21t^2 - 6t + 4}{2}, \frac{7t^3 - 6t - 3t + 4}{2}\right)$$

Figura07: Gráfico da curva $\beta(t)$



O conjunto formado pelos pontos que definem a trajetória e a forma de uma Curva de Bézier é chamado de Polígono de Controle.

3.4- Algoritmo de Casteljau

Desenvolvido por Paul de Casteljau (1930-2022) em 1959, o Algoritmo de Casteljau é uma técnica usada para calcular pontos em Curvas de Bézier, ela permite interpolar as curvas através do controle dos pontos. O algoritmo divide a sequência de pontos de controle da curva de Bézier em segmentos menores até que o ponto desejado sobre a curva seja alcançado. Esse procedimento é realizado seguindo uma sequência de passos.

Inicialmente é dada uma curva de Bézier definida por uma sequência de pontos de controle e um parâmetro t que varia de 0 a 1. Para calcular um ponto na curva, realiza-se uma série de interpolações lineares entre os pontos de controle. Primeiro, são calculados pontos intermediários entre cada par de pontos consecutivos, utilizando a fórmula de interpolação linear $Q_i = (1 - t).P_i + t.P_{i+1}$. Em seguida, repete-se esse processo utilizando os pontos intermediários obtidos até que reste apenas um único ponto, sendo este o ponto na Curva de Bézier para o parâmetro t fornecido.

A definição matemática da curva de Bézier dada por polinômios de Bernstein e a definição via Algoritmo de Casteljau são equivalentes.

A fim de exemplificar como funciona esse algoritmo, vamos encontrar um ponto S da curva $\beta(t) = (-3t^3 + 6t^2 + 3t + 1, -4t^3 - 3t^2 + 9t + 1)$ para $t = 0,3$. Sabendo que os pontos de controle de $\beta(t)$ são $P_0 = (1, 1)$, $P_1 = (2, 4)$, $P_2 = (5, 6)$ e $P_3 = (7, 3)$, usaremos a fórmula de interpolação linear para obter pontos intermediários entre os pares de pontos. Ou seja Q_0 entre P_0 e P_1 , Q_1 entre P_1 e P_2 e Q_2 entre P_2 e P_3 .

$$Q_0 = (1 - t).P_0 + t.P_1 = (1 - 0,3)(1, 1) + 0,3(2, 4) = (1,3; 1,9)$$

$$Q_1 = (1 - t).P_1 + t.P_2 = (1 - 0,3)(2, 4) + 0,3(5, 6) = (2,9; 4,6)$$

$$Q_2 = (1 - t).P_2 + t.P_3 = (1 - 0,3)(5, 6) + 0,3(7, 3) = (5,6; 5,1)$$

Repetimos o processo usando os pontos intermediários obtidos para calcular R_0 entre Q_0 e Q_1 e R_1 entre Q_1 e Q_2 .

$$R_0 = (1 - t).Q_0 + t.Q_1 = (1 - 0,3)(1,3; 1,9) + 0,3(2,9; 4,6) = (1,78; 2,71)$$

$$R_1 = (1 - t).Q_1 + t.Q_2 = (1 - 0,3)(2,9; 4,6) + 0,3(5,6; 5,1) = (3,71; 4,75)$$

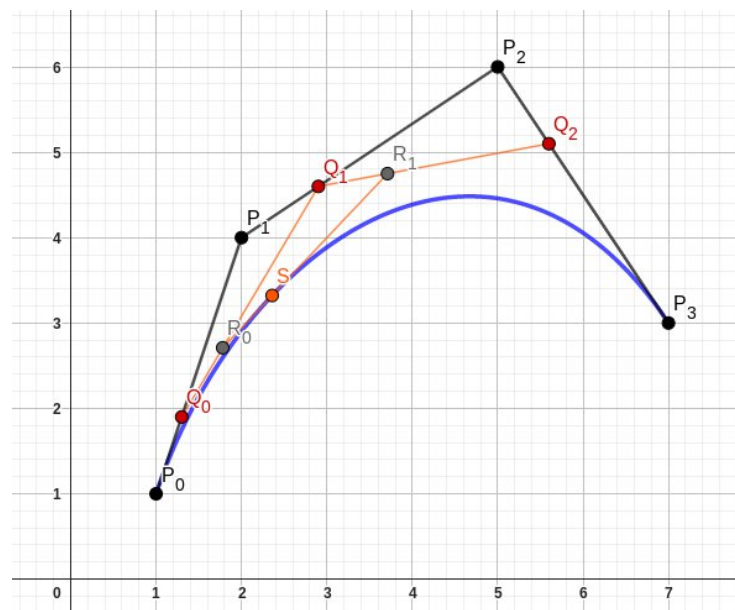
Agora, fazemos a interpolação linear entre os pontos R_0 e R_1 que resultará no ponto S da curva para $t = 0,3$.

$$S = (1 - t).R_0 + t.R_1 = (1 - 0,3)(1,78; 2,71) + 0,3(3,71; 4,75) = (2,359; 3,322)$$

É importante destacarmos que ao calcular $\beta(t)$, com $t = 0,3$ obteremos as coordenadas ponto S que encontramos usando o Algoritmo de Casteljau.

O gráfico a seguir representa a curva $\beta(t)$, os pontos de controle, os pontos intermediários calculados a partir das interpolações e o ponto S da curva para o parâmetro $t = 0,3$.

Figura 08: Os pontos intermediários pertencem a região delimitada pelos pontos de controle e o ponto S pertence a curva $\beta(t)$



Fonte: Autor, 2024

3.5-Propriedades das Curvas de Bézier

Abordaremos aqui algumas das propriedades fundamentais das curvas de Bézier, sendo estas a propriedade de extremidade, que diz respeito ao comportamento das curvas nos pontos inicial e final; os pontos de controle e sua influência na forma e trajetória da curva; a propriedade do fecho convexo, e a invariância à transformações afins, destacando a capacidade das curvas de Bézier de manter suas características sob certas transformações geométricas. Tais propriedades são essenciais na compreensão e utilização destas curvas em aplicações gráficas.

3.5.1- Propriedade de extremidade

Essa propriedade estabelece que, os pontos extremos de uma Curva de Bézier $\beta(t)$ são dados pelos pontos de controle P_0 e P_n quando t assume os valores de 0 e 1, respectivamente. Assim, no caso de curvas cúbicas por exemplo, temos: $\beta(0) = P_0$ e $\beta(1) = P_3$.

Podemos verificar a validade dessa propriedade usando a curva, $\beta(t) = (\frac{-11t^3+21t^2-6t+4}{2}, \frac{7t^3-6t-3t+4}{2})$ apresentada como exemplo na seção 3.3, onde $\beta(0) = (2, 2) = P_0$ e $\beta(1) = (4, 1) = P_3$

3.5.2- Pontos de Controle e forma da curva

A posição dos pontos de controle determinam a forma da curva. Os extremos P_0 e P_3 são os pontos inicial e final da curva, enquanto P_1 e P_2 influenciam a direção e a curvatura. Alterações nesses pontos afetam diretamente a trajetória da curva resultante.

Consideremos como exemplo, uma Curva de Bézier cúbica $\gamma(t)$ com $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (3, 3)$ e $P_3 = (4, 1)$.

$$\gamma(t) = (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)P_0 + (3t^3 - 6t^2 + 3t)P_1 + (-3t^3 + 3t^2)P_2 + t^3P_3$$

$$\gamma(t) = (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)(0, 0) + (3t^3 - 6t^2 + 3t)(1, 2) + (-3t^3 + 3t^2)(3, 3) + t^3(4, 1)$$

$$\gamma(t) = (-2t^3 + 3t^2 + 3t, -2t^3 - 3t^2 + 6t)$$

Alterando o ponto $P_2 = (3, 3)$ para um ponto $P_{2a} = (5, 3)$ obtemos a curva $\gamma_a(t) = (-8t^3 + 9t^2 + 3t, -2t^3 - 3t^2 + 6t)$.

Figura 09: Gráfico da Curva $\gamma(t)$

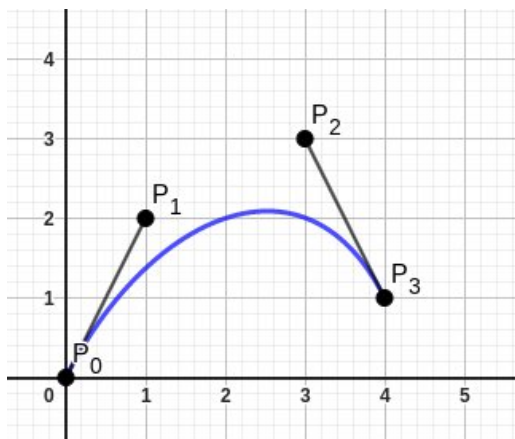
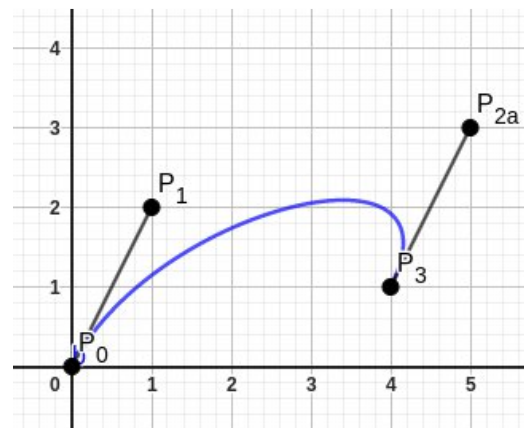


Figura 10: Gráfico da Curva $\gamma_a(t)$ após a alteração do ponto de controle $P_2 = (3, 3)$ para $P_{2a} = (5, 3)$



3.5.3- Propriedade do Fecho convexo

O Fecho Convexo de um conjunto de pontos é o menor polígono convexo que inclui todos os pontos originais. Um conjunto de pontos é considerado convexo quando qualquer segmento de linha que une dois pontos do conjunto também está inteiramente contido nele. Dessa forma, o fecho convexo é a menor região que contém todos os pontos, formando um polígono. Pode ser também compreendido como a "envoltória" que delimita o conjunto de pontos, assegurando que todos eles dentro ou na fronteira dessa envoltória estejam contidos no conjunto original.

De acordo com a propriedade do fecho convexo, seja uma curva de Bézier $\beta(t)$ definida por $n + 1$ pontos de controle $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$, dizemos que ela está totalmente contida no fecho convexo desses pontos. Em outras palavras, a curva permanece dentro da região convexa delimitada pelos seus pontos de controle. Provaremos um caso particular desta propriedade, mostraremos que todo ponto de uma curva de Bézier cúbica $\beta(t)$, está contido dentro do fecho convexo de seus pontos de controle P_0, P_1, P_2 e P_3 .

De fato, seja F o fecho convexo de P_0, P_1, P_2 e P_3 e $\beta(t)$ a curva gerada por esses pontos. Dado um ponto S pertencente a $\beta(t)$, temos que existe um t_0 no intervalo $[0, 1]$ com $\beta(t_0) = S$. Usando o algoritmo de Casteljau e t_0 , geramos os pontos Q_0, Q_1 e Q_2 , por definição eles pertencem a F bem como os segmentos $\overline{Q_0Q_1}$ e $\overline{Q_1Q_2}$. Mais uma vez, pela construção do algoritmo de Casteljau, os pontos R_0 e R_1 , obtidos através dos segmentos $\overline{Q_0Q_1}$ e $\overline{Q_1Q_2}$, respectivamente, também estão em F e consequentemente o segmento $\overline{R_0R_1}$. Portanto, como $S = \beta(t_0)$ pertence ao segmento $\overline{R_0R_1}$, temos que $S = \beta(t_0)$ pertence a F .

3.5.4- Invariância a Transformações afins

Transformação Afim é uma classe de Transformações $T: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $D = \{x \in \mathbb{R}^2; x = \sum \alpha_j \cdot a_j \text{ com } a_j \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \sum \alpha_j = 1; \alpha_j \in \mathbb{R}\}$ que preservam linhas retas e paralelismo. Ela é representada matematicamente por $T(x) = Ax + \vec{v}$ onde A é uma matriz 2×2 que descreve a parte linear da transformação, e v é um vetor no $\mathbb{R}^2$ que descreve o deslocamento em relação à origem. Estas transformações incluem, translações, escalonamentos, rotações e reflexões.

Todo ponto x pertencente a uma curva de Bézier, pertence por definição de curva de Bézier através dos polinômios de Bernstein, ao conjunto D .

A propriedade estabelece que as curvas de Bézier mantêm suas características estruturais inalteradas sob transformações afins, ou seja, ao aplicá-las, a forma e as propriedades

fundamentais da curva permanecem consistentes.

Para exemplificar essa propriedade, aplicaremos algumas transformações afins a algumas curvas de Bézier cúbicas e veremos que as curvas resultantes permanecerão geometricamente similares às suas respectivas curvas originais.

3.5.4.1- Transformação afim de Translação

A translação é uma transformação que desloca uma curva em uma direção específica, sem alterar sua forma ou orientação. Ela é representada por $T(x) = Ax + \vec{v} = x + \vec{v}$ onde A é a matriz identidade $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{v}$ é um vetor de translação no $\mathbb{R}^2$.

Considerando uma curva de Bézier cúbica definida pelos pontos P_0, P_1, P_2 e P_3 . Se quisermos transladar essa curva por um vetor $\vec{v} = (a, b)$, podemos calcular os novos pontos de controle usando a fórmula de translação:

$$P'_0 = P_0 + \vec{v}$$

$$P'_1 = P_1 + \vec{v}$$

$$P'_2 = P_2 + \vec{v}$$

$$P'_3 = P_3 + \vec{v}$$

A curva $\beta(t)$ com $t \in [0, 1]$ definida pelos pontos $P_0 = (1, 1)$, $P_1 = (2, 4)$, $P_2 = (4, 2)$ e $P_3 = (5, 5)$ é expressa por $\beta(t) = (-2t^3 + 3t^2 + 3t + 1, 10t^3 - 15t^2 + 9t + 1)$.

Ao adicionarmos um vetor de translação $\vec{v} = (3, 3)$ a cada ponto de controle, geramos novos pontos, os quais são expressos como:

$$P'_0 = P_0 + \vec{v} = (1, 1) + (3, 3) = (4, 4)$$

$$P'_1 = P_1 + \vec{v} = (2, 4) + (3, 3) = (5, 7)$$

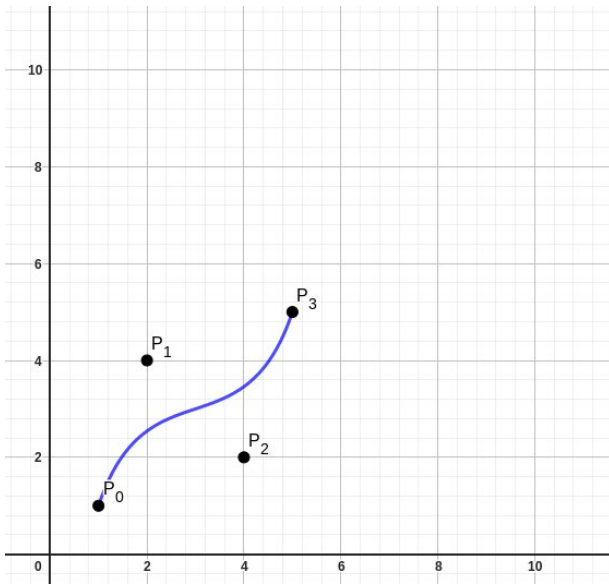
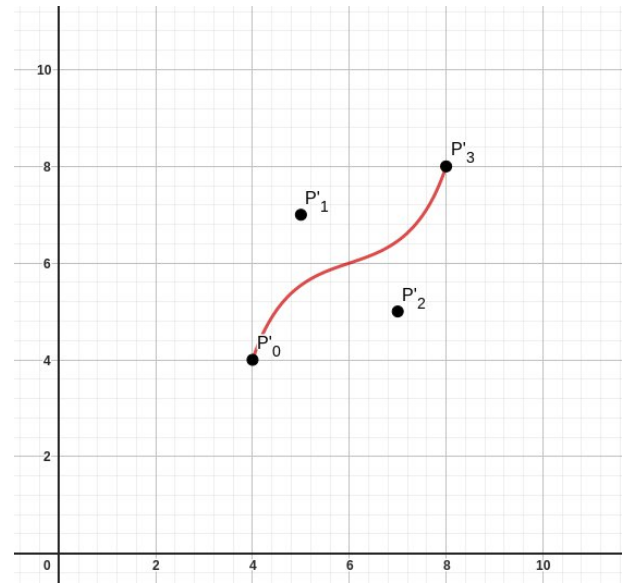
$$P'_2 = P_2 + \vec{v} = (4, 2) + (3, 3) = (7, 5)$$

$$P'_3 = P_3 + \vec{v} = (5, 5) + (3, 3) = (8, 8)$$

Esses pontos de controle ajustados representam a translação da curva original. Substituindo-os na equação da curva de Bézier cúbica, obteremos a expressão para a curva transladada $\gamma(t)$.

$$\gamma(t) = (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)(4, 4) + (3t^3 - 6t^2 + 3t)(5, 7) + (-3t^3 + 3t^2)(7, 5) + t^3(8, 8)$$

$$\gamma(t) = (-2t^3 + 3t^2 + 3t + 4, 10t^3 - 15t^2 + 9t + 4)$$

Figura 11: Curva original $\beta(t)$ **Figura 12:** Curva Transladada $\gamma(t)$ 

Fonte: Autor, 2024

3.5.4.2- Transformação afim de Escalonamento

Escalonamento linear é uma transformação $T(x) = Ax + \vec{v}$ com $A = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = 0$,

que amplia ou reduz as dimensões de um objeto de maneira uniforme em todas as direções. É caracterizada pelos fatores de escala s_x e s_y que indicam a proporção de aumento ou redução ao longo dos eixos x e y respectivamente. Para aplicar o escalonamento linear a uma curva de Bézier cúbica, multiplicamos as coordenadas de cada ponto de controle P_0, P_1, P_2, P_3 , pelos fatores de escala s_x e s_y obtendo assim novos pontos.

$$P'_0 = (s_x \cdot x_0, s_y \cdot y_0)$$

$$P'_1 = (s_x \cdot x_1, s_y \cdot y_1)$$

$$P'_2 = (s_x \cdot x_2, s_y \cdot y_2)$$

$$P'_3 = (s_x \cdot x_3, s_y \cdot y_3)$$

Consideremos a curva $\gamma(t) = (-t^3 + 3t^2 + 3t + 1, -5t^3 + 6t + 1)$ gerada pelos pontos $P_0 = (1, 1)$, $P_1 = (2, 3)$, $P_2 = (4, 5)$ e $P_3 = (6, 2)$. Aplicaremos o escalonamento linear para ampliar esta curva usando os fatores de escala $s_x = 2$ e $s_y = 3$, obtendo assim os pontos:

$$P'_0 = (2.1, 3.1) = (2, 3)$$

$$P'_1 = (2.2, 3.3) = (4, 9)$$

$$P'_2 = (2.4, 3.5) = (8, 15)$$

$$P'_3 = (2.6, 3.2) = (12, 6)$$

Esses novos pontos de controle geram a curva $\delta(t) = (-2t^3 + 6t^2 + 6t + 2, -15t^3 + 18t + 3)$ que corresponde a ampliação da curva $\gamma(t)$ como representado nos gráficos abaixo.

Figura 13: Curva $\gamma(t)$

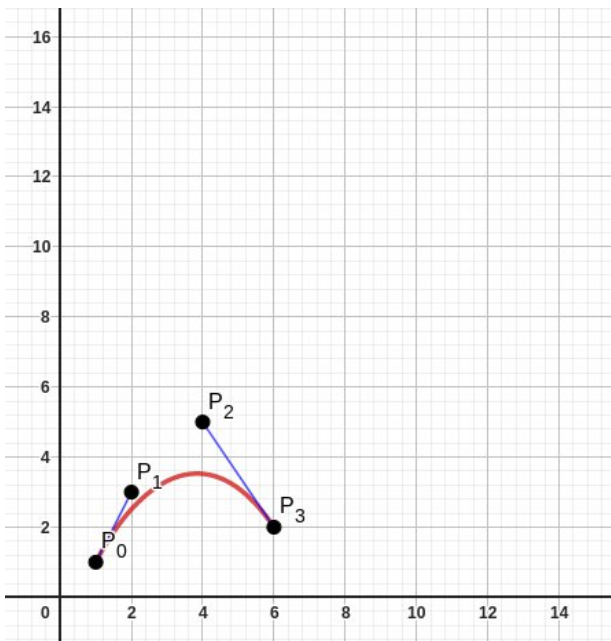
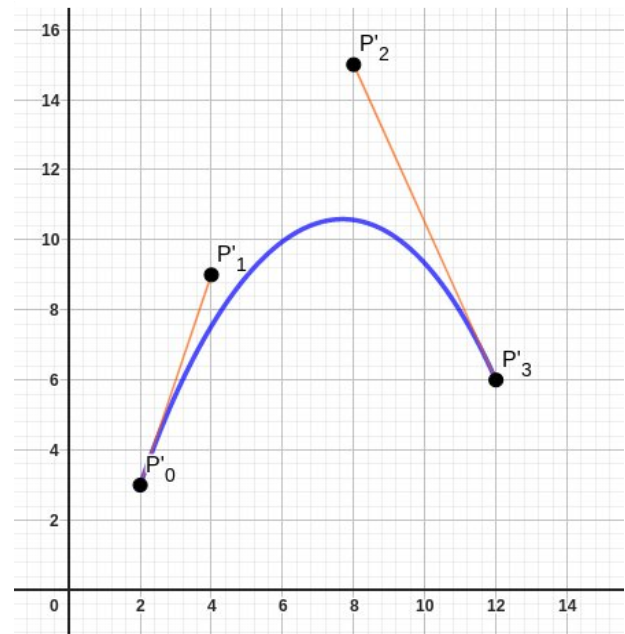


Figura 14: Curva $\delta(t)$ obtida através do escalonamento linear com os fatores de escala



Fonte: Autor, 2024

3.5.4.3- Transformação afim de Reflexão

Uma reflexão é uma operação geométrica que espelha um objeto em relação a um eixo, plano ou ponto. No contexto das curvas de Bézier, uma reflexão pode ser realizada em relação a um eixo ou a um ponto específico.

Para aplicar uma reflexão em uma curva de Bézier em relação ao eixo x , usa-se a matriz de reflexão $M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e a transformação $T_{ref}(x) = M_x \cdot x$,

Em relação ao eixo y , usa-se a matriz $M_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e a transformação $T_{ref}(x) = M_y \cdot x$.

Dada a curva $\gamma(t) = (-2t^3 + 3t^2 + 3t, -2t^3 - 3t^2 + 6t)$ cujos pontos de controle são $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (3, 3)$ e $P_3 = (4, 1)$, vamos aplicar uma reflexão em relação ao eixo x .

$$T_{ref}(P_0) = M_x \cdot P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{ref}(P_1) = M_x \cdot P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$T_{ref}(P_2) = M_x \cdot P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$T_{ref}(P_3) = M_x \cdot P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Os pontos de controle da curva rotacionada são $T_{ref}(P_0) = (0, 0)$, $T_{ref}(P_1) = (1, -2)$, $T_{ref}(P_2) = (3, -3)$ e $T_{ref}(P_3) = (4, -1)$ que geram a curva $\delta(t) = (-2t^3 + 3t^2 + 3t, 2t^3 + 3t^2 - 6t)$.

Figura 15: Curva original $\gamma(t)$

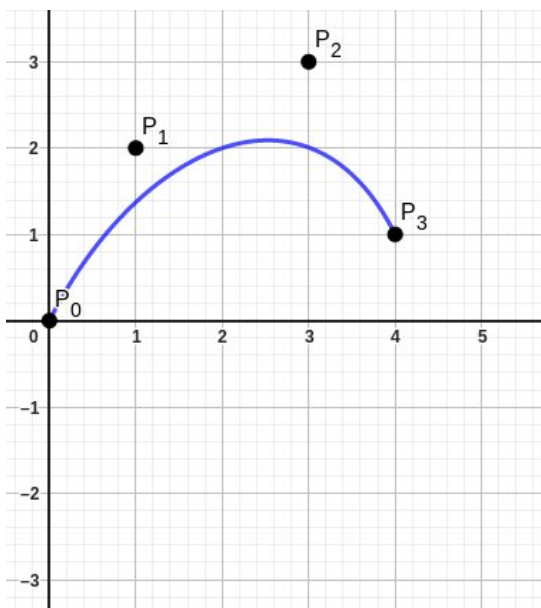
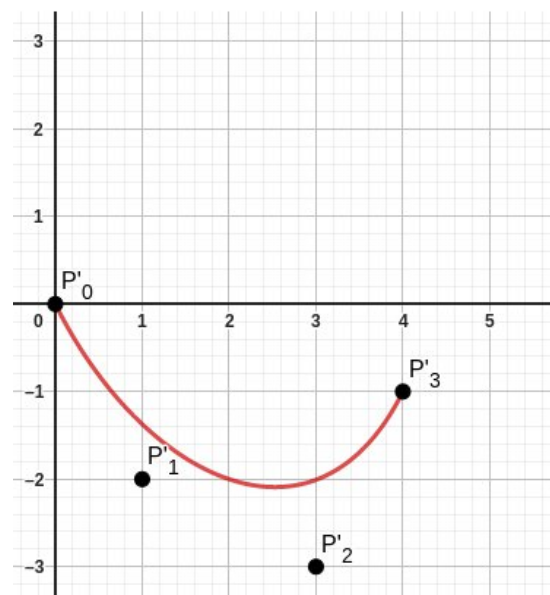


Figura 16: Curva $\delta(t)$ resultante da reflexão em relação ao eixo x .



Faremos agora uma reflexão da mesma curva no eixo y .

$$T_{ref}(P_0) = M_y \cdot P_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{ref}(P_1) = M_y \cdot P_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T_{ref}(P_2) = M_y \cdot P_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T_{ref}(P_3) = M_y \cdot P_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, obtemos os pontos $T_{ref}(P_0) = (0, 0)$, $T_{ref}(P_1) = (-1, 2)$, $T_{ref}(P_2) = (-3, 3)$ e $T_{ref}(P_3) = (-4, 1)$ que geram a curva $\lambda(t) = (2t^3 - 3t^2 - 3t, -2t^3 - 3t^2 + 6t)$.

Figura 17: Curva $\gamma(t)$

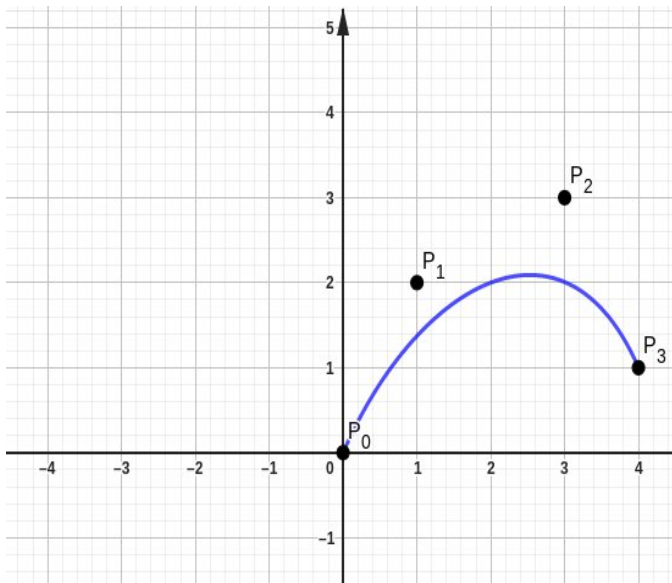
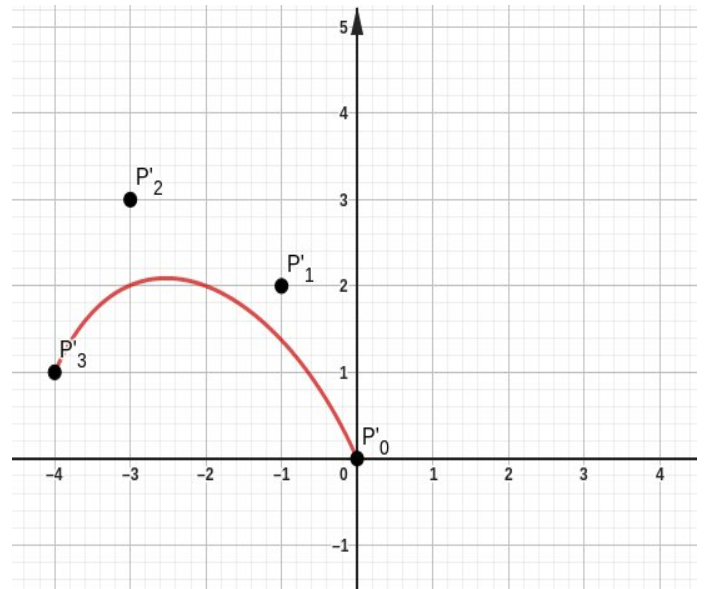


Figura 18: Curva $\lambda(t)$ obtida pela reflexão



Fonte: Autor, 2024

3.5.4.4- Transformação afim de rotação

A rotação é uma transformação que gira um objeto em torno de um ponto fixo, conhecido como ponto de rotação. No contexto das curvas de Bézier no plano, a rotação é uma transformação afim que pode ser aplicada aos pontos de controle da curva para alterar sua orientação no espaço. Pode ser definida utilizando uma matriz de rotação. A matriz de rotação de θ graus no sentido anti-horário é dada por:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Para aplicar esta transformação a uma curva de Bézier gerada pelos pontos de controle P_0, P_1, P_2, P_3 , podemos usar a seguinte fórmula:

$$T_{rot}(P_i) = R.P_i = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

Faremos um exemplo de rotação no sentido anti-horário de 90° da curva $\beta(t) = (-2t^3 + 3t^2 + 3t, -6t^2 + 6t)$ cujos pontos de controle são $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (3, 2)$ e $P_3 = (4, 0)$. A matriz de rotação de 90° é:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, aplicando a transformação $T_{rot}(P_i) = R.P_i$, temos:

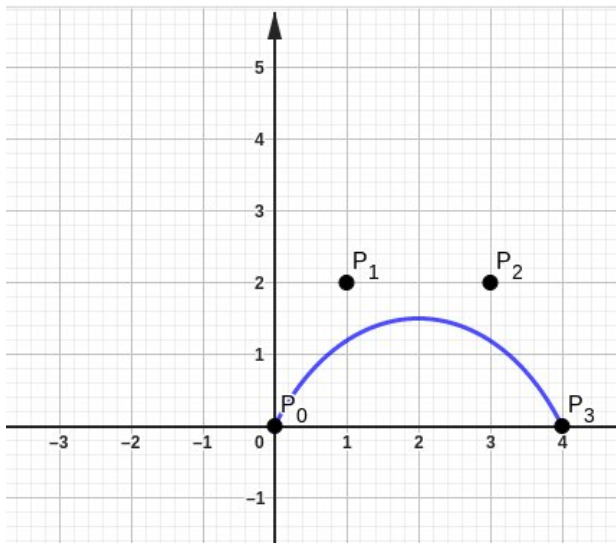
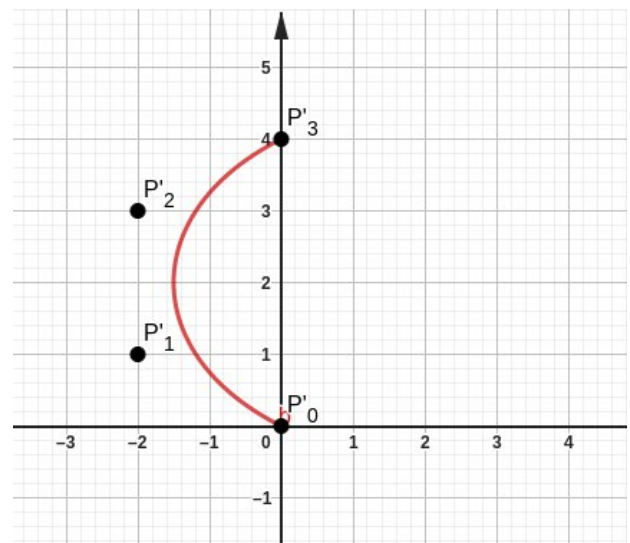
$$T_{rot}(P_0) = R.P_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{rot}(P_1) = R.P_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{rot}(P_2) = R.P_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T_{rot}(P_3) = R.P_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Os pontos obtidos $T_{rot}(P_0) = (0, 0)$, $T_{rot}(P_1) = (-2, 1)$, $T_{rot}(P_2) = (-2, 3)$ e $T_{rot}(P_3) = (0, 4)$, geram a curva $\beta_{rot}(t) = (6t^2 - 6t, -2t^3 + 3t^2 + 3t)$.

Figura 19: Curva $\beta(t)$ **Figura 20:** Curva rotacionada $\beta_{rot}(t)$ 

Fonte: Autor, 2024

4- CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, exploramos as curvas de Bézier e suas propriedades matemáticas. Iniciamos nosso estudo compreendendo alguns conceitos relacionados às curvas diferenciáveis. A partir das definições de curvas parametrizadas diferenciáveis, e reparametrização de curvas pudemos estabelecer os fundamentos para a análise de algumas características importantes das curvas de Bézier e suas propriedades sob uma perspectiva matemática sólida.

Dentro do contexto das curvas de Bézier, destacamos a importância dos Polinômios de Bernstein, que servem como base para a construção destas curvas e permitem uma representação eficiente. Abordamos também as suas principais características, desde sua origem e evolução histórica até suas aplicações contemporâneas em diversas áreas, como computação gráfica, design e modelagem geométrica.

Exploramos o Algoritmo de Casteljau, uma ferramenta importante para o estudo e manipulação das curvas de Bézier, demonstrando sua utilidade na construção e localização de pontos através da interpolação linear.

Entre as propriedades das curvas de Bézier apresentadas, destaca-se especialmente a propriedade do fecho convexo. Esta propriedade foi demonstrada de forma particular para o caso das curvas cúbicas, possibilitando a compreensão de suas aplicações em uma variedade de contextos. Em relação às transformações afins, foi evidenciada a notável propriedade de invariância das curvas de Bézier. Demonstrou-se através de alguns exemplos como essas curvas preservam suas características fundamentais mesmo após serem submetidas a transformações como translação, escalonamento linear e reflexão. Tal invariância ressalta a robustez e versatilidade das curvas de Bézier como ferramentas matemáticas de grande poder e utilidade.

Por fim, nosso objetivo foi explorar de forma abrangente e detalhada os elementos e propriedades matemáticas das curvas de Bézier. Esperamos que este estudo contribua para uma compreensão mais profunda e ampla dessas curvas e inspire novas aplicações e pesquisas nos campos da Geometria e Matemática Aplicada.

REFERÊNCIAS

CAMPOS, F. F. **Algoritmos Numéricos**. 2ªed. Rio de Janeiro. LTC (2007).

DO CARMO, Manfredo. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**, 2ª edição, Textos Universitários, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

FARIN, Gerald E. **Curves and surfaces for CAGD: a practical guide**. 5ª edition, Arizona, Morgan Kaufman Publishers (2002).

VAINSENCER, I. **Introdução às curvas algébricas planas**. Rio de Janeiro - Brasil: IMPA, 2009. (Coleção Matemática Universitária).

VELHO, L., GOMES, J. **Fundamentos da Computação gráfica**. 1ª edição , Rio de Janeiro, SBM (2008).

TENENBLAT, Ketí. **Introdução à Geometria Diferencial**. Editora Blucher, 2ª edição.