



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

Uma introdução ao Grupo Fundamental e aplicações

Assuério André Cavalcante

João Pessoa
2024

Assuério André Cavalcante

Uma introdução ao Grupo Fundamental e aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação de Curso de bacharelado em Ma-
temática da Universidade Federal da Paraíba
como requisito para obtenção do título de ba-
charel em Matemática.

Orientador: Otoniel Nogueira da Silva

João Pessoa
2024

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

C376i Cavalcante, Assuério Andre.

Uma introdução ao Grupo Fundamental e aplicações /
Assuério Andre Cavalcante. - João Pessoa, 2024.

53 p. : il.

Orientação: Otoniel Nogueira Silva.

TCC (Curso de Bacharelado em Matemática) -
UFPB/ccen.

1. Grupo fundamental. 2. Espaços de recobrimento. 3.
Teorema de separação de Jordan. 4. Teorema do ponto
fixo de Brouwer. 5. Invariância do domínio. I. Silva,
Otoniel Nogueira. II. Título.

UFPB/CCEN

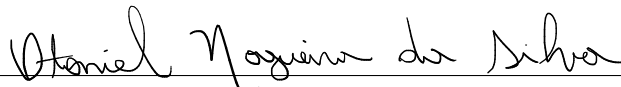
CDU 51(043.2)

Assuério André Cavalcante

Uma introdução ao Grupo Fundamental e aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de bacharel em Matemática. Orientador: Otoniel Nogueira da Silva. Aprovado em: 25/04/2024.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Otoniel Nogueira da Silva
Orientador – UFPB Campus I



Prof. Dr. Miriam Pereira da Silva
Avaliador – UFPB Campus I



Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta
Avaliador – UFPB Campus I

Dedico este trabalho a minha mãe por todo o apoio oferecido.

Agradecimentos

Agradeço a toda minha família por todo o apoio e motivação. Em especial, minha mãe e eterna professora, Maria Aparecida, e minha namorada, Dayanne Barbosa.

Agradeço ao meu professor, e orientador, Otoniel Nogueira, pelos aprendizados, pelas oportunidades, paciência e apoio durante todo esse trajeto na UFPB, e agradeço aos professores Miriam Pereira da Silva e Napoleón Caro Tuesta por aceitarem examinar este trabalho.

Agradeço também a todos os meus amigos que fizeram parte desta jornada, em especial meus companheiros do 402. Por fim, agradeço ao meu professor do ensino médio, Lijecson Santos, que despertou-me para matemática.

Resumo

Este trabalho apresenta algumas das noções básicas da topologia algébrica, dando enfoque a noção e resultados básicos relacionados ao Grupo Fundamental. Iniciamos com as definições básicas de caminhos e laços. Depois, introduzimos a definição de Grupo fundamental, recobrimento e levantamento de caminhos, provando algumas de suas propriedades fundamentais.

Posteriormente, lidamos com o problema da classificação topológica sob a ótica das técnicas acessíveis ao aluno de graduação, ou início de mestrado. Discutimos a dificuldade para classificar certas superfícies que aparecem comumente durante uma graduação em matemática usando das ideias que são vistas num curso de topologia geral ou topologia dos espaços métricos. Em seguida, mostramos que tendo em mãos alguns resultados básicos sobre o Grupo Fundamental, é possível distinguir algumas de tais superfícies.

Por fim, apresentamos várias aplicações do Grupo Fundamental na Álgebra e na Topologia, provando, principalmente, os seguintes resultados clássicos: Teorema Fundamental da Álgebra, Teorema do ponto fixo de Brouwer, Teorema de Separação de Jordan e a Invariância do domínio.

Palavras chave: Grupo Fundamental, Espaços de Recobrimento, Teorema de Separação de Jordan, Teorema do ponto fixo de Brouwer, Invariância do domínio.

Abstract

This work presents some of the basic notions of algebraic topology, focusing on the concept and basic results related to the Fundamental Group. We begin with the basic definitions of paths and loops. Then, we introduce the definition of the Fundamental Group, covering, and lifting of paths, proving some of its fundamental properties.

Subsequently, we deal with the problem of topological classification from the perspective of techniques accessible to undergraduate students or beginning graduate students. We discuss the difficulty of classifying certain surfaces that commonly arise during a mathematics undergraduate degree using ideas typically encountered in a course on general topology or topology of metric spaces. Then, we demonstrate that with some basic results about the Fundamental Group, it is possible to distinguish some of these surfaces.

Finally, we present several applications of the Fundamental Group in Algebra and Topology, primarily proving the following classical results: Fundamental Theorem of Algebra, Brouwer's Fixed Point Theorem, Jordan Curve Theorem, and the Invariance of Domain.

Keywords: Fundamental Group, Covering Spaces, Jordan Curve Theorem, Brouwer's Fixed Point Theorem, Invariance of Domain.

Sumário

Introdução	9
1 O Grupo Fundamental e os Espaços de Recobrimento	11
1.1 Caminhos e homotopias	12
1.2 O Grupo Fundamental	15
1.3 Espaços de Recobrimento	24
1.4 O Grupo Fundamental de \mathbb{S}^1 e Algumas Consequências	29
2 Um pouco de Classificação Topológica	32
2.1 O Problema da Classificação Topológica	32
2.2 O grupo fundamental de mais algumas superfícies	33
3 Algumas Aplicações Interessantes	36
3.1 Teorema Fundamental da Álgebra	36
3.2 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer	38
3.3 Teorema de Separação de Jordan	42
3.4 Teorema da Invariância do Domínio	48
Referências Bibliográficas	52

Introdução

Através das propriedades topológicas apresentadas nos cursos de topologia geral e topologia dos espaços métricos, como compacidade e conexidade, bem como o invariante do número de componentes conexas, é possível verificar se alguns espaços, ou mesmo superfícies, podem ser homeomorfos. Além disso, podemos ainda estabelecer propriedades interessantes para funções contínuas definidas em domínios que gozam de alguma dessas propriedades.

Pensando, por exemplo, em uma função real contínua, se esta está definida em um domínio conexo, podemos garantir uma propriedade do valor intermediário; se definida em um compacto, temos que os valores de máximo e mínimo são atingidos. Ou seja, conhecer as propriedades topológicas intrínsecas ao domínio em questão é essencial para determinarmos a existência de certas propriedades para as funções contínuas definidas em tais domínios. É disto que se ocupa a topologia: estudar os espaços topológicos e os seus morfismos - as funções contínuas.

O matemático Henri Poincaré percebeu que estudar as propriedades intrínsecas aos domínios em questão era crucial para o entendimento de certos tipos de problemas. Vejamos brevemente o que se sucedeu do estudo da Mecânica Celeste feito por Poincaré, em que nos baseamos fundamentalmente em [4].

Como as leis físicas que regiam os problemas estudados por Poincaré eram, em partes, modeladas via EDO's, Poincaré realizou ao longo de diversos anos e diversas publicações um profundo estudo de tais equações que revolucionou a maneira como se lidava com EDO's até aquela época, inclusive dando origem a novos ramos da matemática como a teoria de sistemas dinâmicos.

Uma das coisas percebidas por Poincaré ao longo desse estudo foi o que depois ele cunhou de *Análise Situs*, conhecida hoje em dia como Topologia. Foi no estudo das equações diferenciais lineares de segunda ordem da forma $a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)y = 0$, em que as soluções procuradas eram essencialmente funções *multivaloradas* sobre uma superfície de Riemann compacta, que ele iniciou a *Análise Situs*, na qual começa definindo dois invariantes: os números de Betti e o Grupo fundamental.

Um dos primeiros problemas que ele busca resolver é o seguinte:

Problema: Os números de Betti seriam suficientes para determinar se duas variedades são homeomórficas?

Para resolvê-lo, Poincaré exhibe exemplos de superfícies de dimensão 3 que não são homeomórficas, mas que possuem os mesmos números de Betti. O que ele observa, é que, no caso de tais exemplos, os grupos fundamentais associados não são isomorfos.

Isto é, a necessidade de compreender a estrutura intrínseca aos domínios com os quais se está lidando surge naturalmente no estudo da matemática e outras ciências, e esta questão se intrelaça, também naturalmente, com o problema de classificar espaços topológicos, pois este problema está associado a revelar as propriedades indissociáveis a cada espaço topológico. Ora, uma das maneiras de fazê-lo é através da descoberta e estudo de invariantes como o grupo fundamental.

Tendo em vista a importância histórica e matemática em si desta categoria de problemas, a motivação para a realização desta monografia surge da necessidade de ao menos enxergar quais seriam os próximos passos no estudo de invariantes topológicos a partir das bases que são

comumente estabelecidas nos cursos básicos de topologia, vistos no decorrer do bacharelado em matemática. Vale ressaltar que tal estudo foi feito essencialmente seguindo a referência [1].

No Capítulo 1 deste trabalho definiremos os elementos básicos deste tema, como caminhos e laços, bem como o Grupo Fundamental e os Espaços de Recobrimento. Além disso, apresentaremos alguns dos resultados que serão essenciais para as aplicações que serão feitas no decorrer do texto.

No capítulo 2, discutiremos novamente acerca do problema de classificação, partindo de alguns invariantes que são estudados em um curso de topologia dos espaços métricos e apresentamos a prova de um teorema de classificação, que possivelmente não poderia ser obtido via os resultados vistos nos cursos de topologia dos espaços métricos e topologia geral.

Por fim, no capítulo 3, vemos uma série de aplicações da teoria apresentada nos capítulos anteriores, como Teorema Fundamental da Álgebra, Teorema do ponto fixo de Brouwer, Teorema de Separação de Jordan e a Invariância do domínio.

1 O Grupo Fundamental e os Espaços de Recobrimento

Neste capítulo apresentaremos brevemente algumas noções sobre homotopia, ideia fundamental da Topologia Algébrica, e sobre espaços de recobrimento, bem como os resultados que nos serão mais relevantes para as aplicações que trataremos posteriormente nestas notas.

Um dos problemas fundamentais da Topologia, é o problema de decidir se dois espaços topológicos são ou não homeomorfos. Por exemplo: \mathbb{S}^2 pode ser deformada continuamente no toro \mathbb{T}^2 ? Quais técnicas podemos utilizar para garantir que tal deformação contínua pode, ou não, ser feita? Uma das ideias mais básicas é a ideia de grupo fundamental. Tal ideia está sujeita a certos conceitos essenciais como o conceito de homotopia de caminhos, que introduziremos neste capítulo.

Para que tenhamos pelo menos um vislumbre do tipo de problema que seremos capazes de resolver, considere a esfera \mathbb{S}^2 e um laço, que pode ser, e.g., uma circunferência. Não é difícil de imaginar que qualquer curva fechada em \mathbb{S}^2 , como um laço, pode ser deformada até que se tenha um único ponto, como na Figura 1.

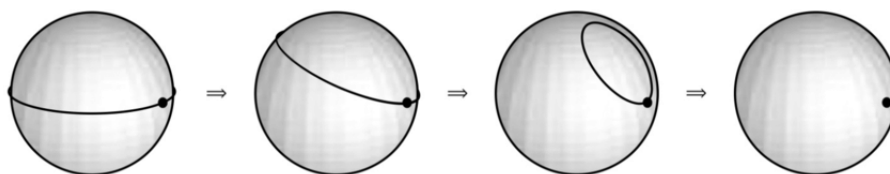


Figura 1: \mathbb{S}^2 é simplesmente conexa.

Fonte: S., Elay. Infinitesimal Idealization, Easy Road Nominalism, and Fractional Quantum Statistics.

Quando um espaço topológico satisfaz tal propriedade, dizemos que este espaço é simplesmente conexo. Note que \mathbb{T}^2 não goza desta propriedade, pois se considerarmos um laço na “sintura” do toro, ou qualquer um dos laços c_1, c_2, c_3 na Figura 2, jamais poderemos deformá-lo em um ponto.

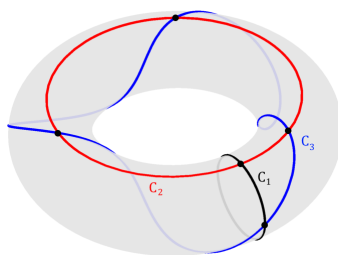


Figura 2: “Três caminhos em \mathbb{T}^2 não homotópicos a uma ct”

Fonte: <https://math.stackexchange.com/questions/2657135/three-closed-curves-on-torus>

Por isto, tendo em vista que a propriedade de ser simplesmente conexo é topológica, \mathbb{S}^2 e \mathbb{T}^2 não poderão ser homeomorfos. Na verdade, todos estes fatos serão corolários de alguns resultados básicos sobre o grupo fundamental, o qual introduziremos adiante.

1.1 Caminhos e homotopias

Nesta seção introduziremos os conceitos básicos que irão culminar no grupo fundamental de um espaço topológico. Os laços, que já aparecem na introdução deste capítulo, figuram de maneira importante na construção do grupo fundamental, como poderá ser visto adiante. Através deles conseguiremos definir de maneira adequada uma operação entre caminhos deste tipo que, por sua vez, induzirá um grupo associado ao espaço topológico em questão.

Ao longo de todo o texto denotaremos por I o intervalo unitário $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Definição 1.1. *Seja X um espaço topológico. Uma função contínua $f : I \rightarrow X$ é chamada de **caminho** em X , e $f(0)$ e $f(1)$ serão ditos **ponto inicial** e **ponto final** de f , respectivamente. Se $f(0) = f(1) = x_0 \in X$, então diremos que f é um **laço** com ponto base x_0 .*

Exemplo 1.2. *a) Seja $X = \mathbb{R}^2$ e fixe $v_0, w_0 \in X$. A função $f : I \rightarrow X$ dada por $f(t) = v_0 + tw_0$ é um caminho cujo traço é um segmento de reta.*

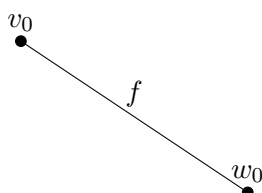


Figura 3: “Segmento de reta f de v_0 para w_0 .”

Fonte: Elaborado pelo autor.

b) Considere, novamente, $X = \mathbb{R}^2$, e $g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $g(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. O traço dessa curva é a circunferência de raio 1 centrada na origem, que denotamos por \mathbb{S}^1 (veja a Figura 4). Note que g é um laço, pois $g(0) = (1, 0) = g(1)$.

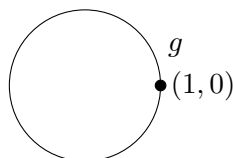


Figura 4: “Círculo unitário com o ponto $(1, 0)$ distinguido.”

Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 1.3. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$ funções contínuas. Diremos que f e g são **homotópicas** se existe uma função contínua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que para todo $x \in X$, $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$. A função F é chamada de **homotopia** entre f e g . Quando f e g forem homotópicas denotaremos simplesmente por $f \simeq g$.*

Intuitivamente, uma homotopia é uma deformação contínua de uma função noutra, ou seja, para cada $t \in I$, a função $F|_{X \times \{t\}}$ é uma função contínua na variável $x \in X$. Ademais podemos pensar que tal deformação ocorre durante o intervalo de tempo correspondente ao intervalo I , i.e., no instante inicial $t = 0$ temos a função f e, no instante final $t = 1$, a função g , o que

significa que nos instantes intermediários, $0 < t < 1$, temos “deformações intermediárias” (veja Figura 5).

Definição 1.4. *Sejam f e g caminhos que compartilham o mesmo ponto inicial x_0 e ponto final x_1 . Se existe uma homotopia F entre f e g tal que $F(0, t) = x_0$ e $F(1, t) = x_1$, para qualquer que seja $t \in I$, então dizemos que f e g são **caminhos homotópicos**. Neste caso, denotamos $f \simeq_p g$ (Veja a Figura 5).*

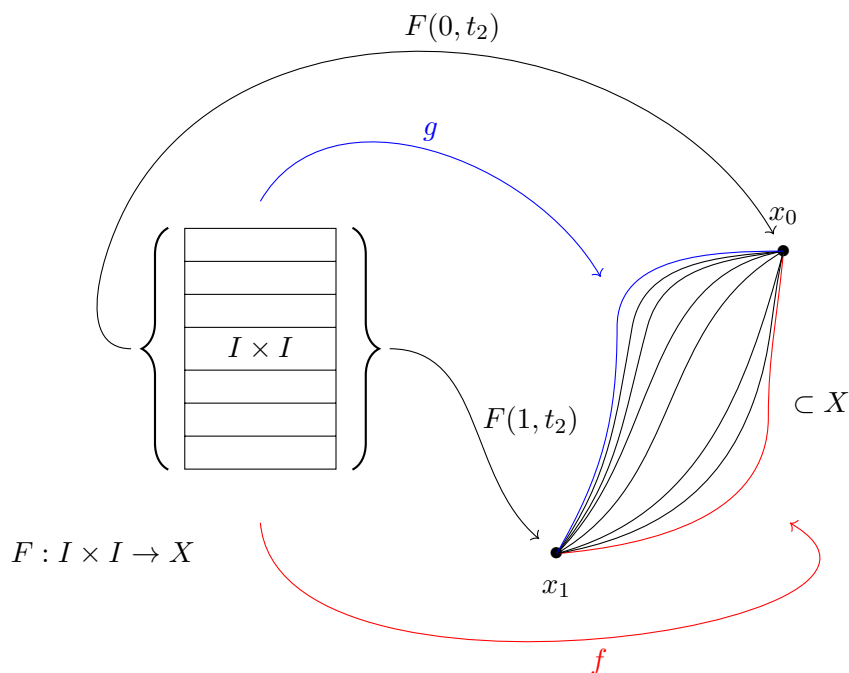


Figura 5: “Homotopia entre f e g .”

Fonte: Elaborado a partir do exemplo disponível em: <https://texample.net/tikz/examples/homotopy/>.

Exemplo 1.5. *O caminho g , do Exemplo 1.2(b), é homotópico ao caminho $h : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por*

$$h(s, t) = \begin{cases} (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (4t - 3, 0) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

cujo traço é um semi-círculo superior, via a homotopia

$$H(s, t) = \begin{cases} (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (1 - s)(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) + s(4t - 3, 0) & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

A homotopia de caminhos F é, portanto, uma deformação contínua do caminho f no caminho g que mantém as suas extremidades fixas. Mais precisamente, as funções f_t obtidas

pela homotopia de caminhos F são caminhos de x_0 a x_1 . Ou seja, fixado $t \in I$, seja $f_t : I \rightarrow X$ uma função tal que $f_t(x) = F(x, t)$, logo f_t é um caminho de x_0 a x_1 .

O próximo resultado tem um papel importante na demonstração de que \simeq é uma relação de equivalência. Com ele, temos a condição suficiente para que possamos “colar” funções contínuas produzindo uma nova função contínua.

Lema 1.6. (Lema de colagem) Sejam $X = A \cup B$, em que A e B são fechados em X , $f : A \rightarrow Y$ e $g : B \rightarrow Y$ funções contínuas. Se $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, então a função $h : X \rightarrow Y$ dada por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração. Veja [1, Tm. 18.3]. □

Proposição 1.7. As relações \simeq e \simeq_p são relações de equivalência.

Demonstração. Precisamos mostrar que \simeq e \simeq_p são reflexivas, simétricas e transitivas. Sejam X e Y espaços topológicos e f, g e h funções contínuas de X em Y .

Reflexividade: Defina $F : X \times I \rightarrow Y$ pondo, para cada $t \in I$, $F(x, t) = f(x)$, $x \in X$. Ora, note que F é contínua pois $F = f \circ \pi$, em que $\pi : X \times I \rightarrow X$ é a projeção sobre X ; evidentemente, $F(x, 0) = f(x) = F(x, 1)$. Logo, $f \simeq f$.

Simetria: Suponha $f \simeq g$. Então, existe uma homotopia F de f em g . Defina $G : X \times I \rightarrow Y$ como $G(x, t) = F(x, 1 - t)$ e note que G é contínua pois é composição de duas funções contínuas. Mais precisamente, $G = F \circ \alpha$, em que $\alpha : X \times I \rightarrow X \times I$ com $\alpha(x, t) = (x, 1 - t)$. Além disso, note que

$$G(x, 0) = F(x, 1) = g(x) \quad \text{e} \quad G(x, 1) = F(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in X.$$

Donde, segue que $g \simeq f$ e, portanto, a simetria da relação.

Transitividade: Suponha $f \simeq g$ e $g \simeq h$. Então, existem uma homotopia F entre f e g , e uma homotopia G entre g e h . Agora, defina a função $H : X \times I \rightarrow Y$ dada por

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

que é contínua pelo Lema 1.6. De fato, considere as funções contínuas $\alpha : I \times [0, \frac{1}{2}] \rightarrow I \times I$ a função definida por $\alpha(s, t) = (s, 2t)$ e seja $\beta : I \times [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow I \times I$ dada por $\beta(s, t) = (s, 2t - 1)$. Assim, $F(x, 2t) = (F \circ \alpha)(x, t)$ é contínua e $G(x, 2t - 1) = (G \circ \beta)(x, t)$ também o é. Para aplicarmos o Lema 1.6, resta observar que $H = F \circ \alpha$ sobre $X \times [0, \frac{1}{2}]$ e $H = G \circ \beta$ sobre $X \times [\frac{1}{2}, 1]$, logo como $X \times I = (X \times [0, \frac{1}{2}]) \cup (X \times [\frac{1}{2}, 1])$, temos satisfeitas as hipóteses do

Lema 1.6, donde segue a continuidade de H e, portanto, temos que H é uma homotopia entre f e h , i.e., $f \simeq h$.

Em particular, segue que $f \simeq_p g$. □

Definição 1.8. *Seja f um caminho. Denotaremos por $[f]$ a classe de equivalência de todos os caminhos homotópicos à f .*

Quando o espaço topológico no qual se está lidando possui também uma estrutura vetorial, como é o caso de \mathbb{R}^n , um dos tipos mais naturais de homotopia é a *homotopia linear*.

Proposição 1.9. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$ contínuas, em que Y é um subconjunto convexo de \mathbb{R}^n . Então, existe uma homotopia entre f e g , $F : X \times I \rightarrow Y$, chamada **homotopia linear**, em que $F(x, t) = (1 - t)f(x) + t \cdot g(x)$. Se f e g são caminhos que compartilham os mesmos pontos inicial e final, então F é uma homotopia de caminhos.*

Demonstração. Como Y é convexo, $F(x, t) \in Y$ para todo $t \in I$. Além disso, para todo $x \in X$, temos $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$. Por fim, note que F é a soma de funções contínuas, logo também o é. Se f e g são caminhos de x_0 à x_1 , então para todo $t \in I$, $F(0, t) = (1 - t) \cdot x_0 + t \cdot x_0 = x_0$; analogamente, para qualquer que seja o $t \in I$, $F(1, t) = x_1$. Portanto, F é uma homotopia de caminhos. □

A homotopia linear é um tipo bastante simples e conveniente de homotopia. Com ela também podemos definir homotopias entre funções que não necessariamente possuem suas imagens contidas em um conjunto convexo, como no exemplo seguinte.

Exemplo 1.10. *Seja \mathbb{S}^n a esfera unidimensional. Dadas duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$, se $f(x) = -g(x)$ para todo $x \in X$ então $f \simeq g$, via a homotopia $H : X \times I \rightarrow \mathbb{S}^2$, definida como*

$$H(x, t) = \frac{(1 - t)f(x) + tg(x)}{\|(1 - t)f(x) + tg(x)\|}.$$

1.2 O Grupo Fundamental

Por trás do que será feito a partir desta seção, há uma ideia bastante interessante: o estudo, num certo aspecto, dos espaços topológicos, pode ser feito através da Teoria de Grupos, ou mais abrangentemente ainda, através da Álgebra Abstrata. De fato, é disso que se ocupa a Topologia Algébrica: usar técnicas e ideias algébricas para compreender objetos topológicos.

Apesar do grupo fundamental ser um dos exemplos mais simples de como essa “ponte” entre a Álgebra Abstrata e a Topologia surge, a gênese do grupo fundamental é menos linear do que se possa imaginar. No desenvolvimento da *Análise Situs* de Henri Poincaré, o grupo fundamental surge seguindo as seguintes etapas, segundo [4]:

- Construção de grupos atuando no disco (1881).
- Entendimento de que qualquer superfície compacta pode ser construída por este processo (1882).

- Construção do revestimento universal de qualquer superfície, não necessariamente compacta, em termos de caminhos (1883).
- Definição do grupo fundamental como o grupo de permutações da “função multiforme mais geral” (1892).
- Definição do grupo fundamental em termos de laços e apresentação do grupo a partir de um poliedro fundamental (1895).

Ou seja, a ideia de recobrimento e levantamento, que discutiremos na próxima seção, precede historicamente a ideia de grupo fundamental. É interessante observar que o problema de classificação não foi a única força motriz que impulsionou o surgimento da Análise Situs. O estudo das funções multiformes e das Equações Diferenciais Ordinárias também desempenhou um papel essencial, como pode ser visto em [5].

Nesta seção, introduziremos o uso de conceitos algébricos para entender os laços. Primeiramente, definiremos uma operação entre laços, com a qual teremos uma estrutura de grupo. Posteriormente, seremos capazes de traduzir o nosso problema fundamental de classificação de superfícies em termos de um problema de Teoria de Grupos, através do grupo fundamental.

Definição 1.11. *Sejam $f : I \rightarrow X$ um caminho de x_0 para x_1 e $g : I \rightarrow X$ um caminho de x_1 à x_2 . Definamos a operação \star como:*

$$f \star g = \begin{cases} f(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

que nos dá um caminho, contínuo, de x_0 à x_2 , pelo Lema 1.6.

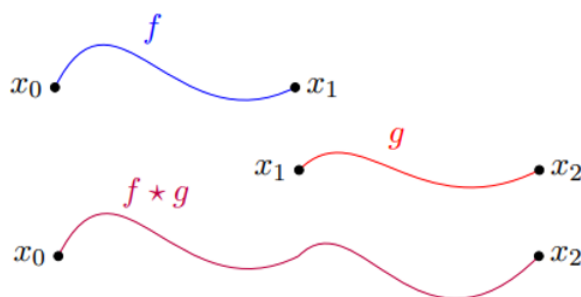


Figura 6: “Curvas f , g e $f \star g$.”
Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 1.12. *Sejam $f : I \rightarrow X$ um caminho de x_0 à x_1 e $g : I \rightarrow X$ um caminho de x_1 à x_2 . Definamos a operação \star , para classes de equivalência de caminhos, como: $[f] \star [g] = [f \star g]$.*

Claro, precisamos antes mostrar que nossa definição é boa, ou seja, que não está comprometida com os representantes das classes.

Proposição 1.13. *A operação \star entre classes de homotopia está bem definida.*

Demonstração. Considere $f' \in [f]$ e $g' \in [g]$. Uma vez que $[f'] = [f]$ e $[g'] = [g]$, devemos mostrar que $[f'] \star [g'] = [f] \star [g]$. Com efeito, como f e f' são caminhos homotópicos, existe uma homotopia F entre f e f' ; outrossim, existe uma homotopia G entre g e g' . Daí, definamos a função $H : I \times I \rightarrow X$, pondo:

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Afirmamos que H é uma homotopia entre $f \star g = f' \star g'$, isto é, $[f \star g] = [f' \star g']$. Segue, do Lema 1.6, que H é contínua. E, ainda, para todo $t \in I$, temos que $H(0, t) = F(0, t) = x_0$ e $H(1, t) = G(1, t) = x_2$. Para todo $s \in I$ temos que $H(s, 0) = (f \star g)(s)$ e $H(s, 1) = (f' \star g')(s)$. A função H é portanto uma homotopia entre $f \star g$ e $f' \star g'$, ou seja, $[f \star g] = [f' \star g']$. Daí,

$$[f] \star [g] \stackrel{(1.12)}{=} [f \star g] = [f' \star g'] \stackrel{(1.12)}{=} [f'] \star [g'].$$

Portanto, \star está bem definida. □

Proposição 1.14. *Sejam $f : I \rightarrow X$ um caminho de x_0 à x_1 , $g : I \rightarrow X$ um caminho de x_1 à x_2 e $h : I \rightarrow X$ de x_2 à x_3 . Considere $\bar{f} : I \rightarrow X$ uma função contínua tal que $\bar{f} = f(1 - s)$. A operação \star entre classes de homotopias tem as seguintes propriedades:*

1. **Existência do “elemento identidade”:** $[e_{x_0}] \star [f] = [f]$ e $[f] \star [e_{x_1}] = [f]$, em que $e_{x_i} : I \rightarrow X$, é definido por $e_{x_i}(t) = x_i, \forall t \in I, i = 0, 1$.
2. **Existência do inverso:** $[f] \star [\bar{f}] = [e_{x_0}]$ e $[\bar{f}] \star [f] = [e_{x_1}]$
3. **Associatividade:** $([f] \star [g]) \star h = [f] \star ([g] \star [h])$

Demonstração. Verifiquemos cada propriedade separadamente.

1. **Existência do** Provemos que $(e_{x_0} \star f) \simeq_p f$. Sejam $e_0 : I \rightarrow I$ o caminho constante igual a 0 e $i : I \rightarrow I$ o caminho identidade. Então, $f = f \circ i$ e $e_{x_0} \star f = f \circ (e_0 \star i)$; enquanto que i e $e_0 \star i$ são caminhos em I de 0 à 1. Uma vez que I é convexo, a existe uma homotopia linear F entre i e $e_0 \star i$, e $f \circ F$ é uma homotopia entre $f \circ i$ e $f \circ (e_0 \star i)$. Logo, $f \simeq_p e_{x_0} \star f$, e assim $[f] = [e_{x_0}] \star [f]$.

Analogamente, segue que $[f] \star [e_{x_1}] = [f]$.

2. **Existência do inverso:** Mostremos que $(f \star \bar{f}) \simeq_p e_{x_0}$.

Ora, note que $f \star \bar{f} = (f \circ i) \star (f \circ \bar{i}) = f \circ (i \star \bar{i})$; note também que $e_{x_0} = f \circ e_0$. Além disso, $i \star \bar{i}$ e e_0 são laços em I com base em 0. Assim, $f \circ F$ é um homotopia entre $f \circ (i \star \bar{i})$ e $f \circ e_0$. Portanto, obtemos $[f] \star [\bar{f}] = [e_{x_0}]$. De modo semelhante se estabelece $[\bar{f}] \star [f] = [e_{x_1}]$.

3. **Associatividade:** Verifiquemos agora que $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$.

Note que

$$(f \star g) \star h = \begin{cases} f(4s) & s \in [0, \frac{1}{4}] \\ g(4s) & s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ h(2s) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad f \star (g \star h) = \begin{cases} f(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(4s) & s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ h(4s) & s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Seja $\alpha : I \rightarrow I$ o mapa:

$$\alpha(s) = \begin{cases} \frac{s}{2} & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ s - \frac{1}{4} & s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ 2s - 1 & s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Então, $((f \star g) \star h) \circ \alpha = f \star (g \star h) = (f \star (f \star (g \star h))) \circ i$. Uma vez que α e i são ambos caminhos de 0 à 1 no conjunto convexo I , logo α e i são homotópicos. Seja F uma homotopia de α e i . Então, $((f \star g) \star h) \circ F$ é uma homotopia entre $((f \star g) \star h) \circ \alpha = f \star (g \star h)$ e $((f \star g) \star h) \circ i = (f \star g) \star h$. Daí, $f \star (g \star h) \simeq_p (f \star g) \star h$.

Portanto, $([f] \star [g]) \star h = [f] \star ([g] \star [h])$. \square

Vamos recordar brevemente a definição de grupo.

Definição 1.15. Um **grupo** é um par (G, \cdot) , em que G é um conjunto não vazio e \cdot é uma função binária $\cdot : G \times G \rightarrow G$ em que $\cdot(a, b) = a \cdot b$, com as seguintes propriedades:

1. **Associatividade:** Se $a, b, c \in G$, então $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
2. **Existência do um elemento identidade:** Existe $e \in G$ de tal forma que se $a \in G$ então $a \cdot e = e \cdot a = a$
3. **Existência dos inversos:** Para cada $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ de modo que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Exemplo 1.16. a) O conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} com a operação de soma forma um grupo aditivo $(\mathbb{Z}, +)$.

b) Dado um número inteiro n , $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, em que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é o conjunto das classes de restos módulo n , é um grupo aditivo finito.

Definição 1.17. Seja X um espaço topológico. Denotaremos por $\pi_1(X, x_0)$ o conjunto de todas as classes de equivalência $[f]$ de laços em X com base em x_0 .

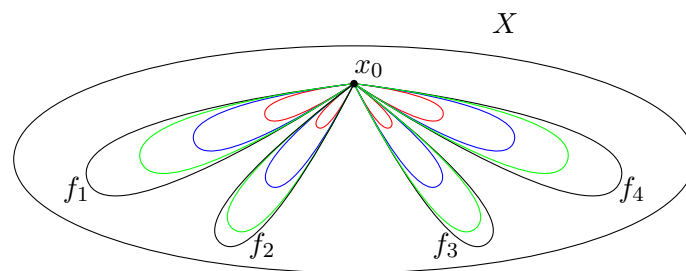


Figura 7: “Laços no espaço X ”.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Proposição 1.18. O par $(\pi_1(X, x_0), \star)$ é um grupo, chamado de **grupo fundamental**.

Demonstração. Para mostrarmos que $(\pi_1(X, x_0), \star)$ é um grupo é necessário conferir se as propriedades na Definição 1.15 são satisfeitas, contudo isto já está essencialmente feito na Proposição 1.14. \square

Definição 1.19. *Sejam X um espaço topológico e p um caminho em X de x_0 à x_1 . O caminho \hat{p} induz uma função $\hat{p} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$, definida por*

$$\hat{p}([f]) = [\bar{p}] \star [f] \star [p].$$

A função \hat{p} está bem definida porque \star está bem definida e é associativa. Além disso, veja que $\hat{p}([f])$ é uma classe de laços com base em x_1 .

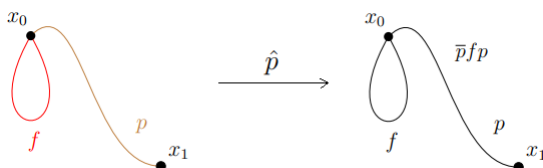


Figura 8: “Função \hat{p} ”.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 1.20. *Sejam (G, \cdot) e (G', \circ) grupos. Considere $f : G \rightarrow G'$ uma função tal que se $a, b \in G$, então $f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$. Diremos que f é um **homomorfismo**. Se f for um homeomorfismo bijetor, chamaremos-no de **isomorfismo**. Quando existir um isomorfismo entre G e G' diremos que tais grupos são isomorfos. Usaremos a notação $G \approx G'$ para indicar que dois grupos são isomorfos.*

Proposição 1.21. *A função $\hat{p} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ definida na Definição 1.19 é um isomorfismo.*

Demonstração. Mostremos primeiramente que \hat{p} é um homomorfismo. Para isto considere $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$. Daí,

$$\begin{aligned} \hat{p}([f] \star [g]) &= [\bar{p}] \star [f] \star [g] \star [p] \\ &= [\bar{p}] \star [f] \star ([e_{x_0}] \star [g]) \star [p] \\ &= [\bar{p}] \star [f] \star ([p] \star [\bar{p}]) \star [g] \star [p] \\ &= ([\bar{p}] \star [f] \star [p]) \star ([\bar{p}] \star [g] \star [p]) \\ &= \hat{p}([f]) \star \hat{p}([g]) \end{aligned}$$

De posse do fato de que \hat{p} é um homomorfismo, resta-nos provar que também é uma bijeção. Com efeito, seja $[f'] \in \pi_1(X, x_1)$. Ora, $[p] \star [f'] \star [\bar{p}]$ é a classe de homotopia de um laço em X com base em x_0 . Assim,

$$\hat{p}([p] \star [f'] \star [\bar{p}]) = [\bar{p}] \star ([p] \star [f'] \star [\bar{p}]) \star [p] = [e_{x_1}] \star [f'] \star [e_{x_1}] = [f']$$

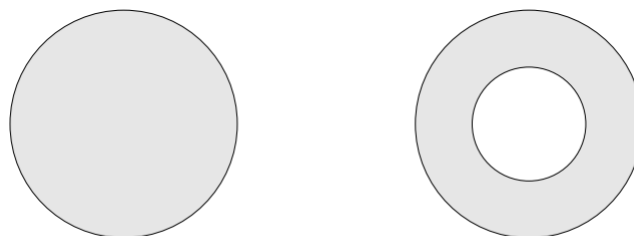
Portanto, \hat{p} é sobrejetiva. Agora, seja $\hat{p}([f]) = \hat{p}([g])$. Então $[\bar{p}] \star [f] \star [p] = [\bar{p}] \star [g] \star [p]$. Logo, $[p] \star ([\bar{p}] \star [f] \star [p]) \star [p] = [p] \star ([\bar{p}] \star [g] \star [p]) \star [p]$; donde $[f] = [g]$. Assim, \hat{p} é injetora. Deste modo, \hat{p} é um isomorfismo. \square

Corolário 1.22. Se X é um espaço topológico e existe um caminho entre $x_0 \in X$ e $x_1 \in X$, então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos.

Demonstração. Tome p um caminho de x_0 à x_1 . Então, \hat{p} , pela Proposição 1.21, é um isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$. \square

Ou seja, em particular, se estivermos lidando com um espaço topológico conexo por caminhos, a menos de um isomorfismo, o grupo fundamental não depende do ponto base considerado. Essencialmente, ao longo da teoria do grupo fundamental consideraremos apenas espaços conexos por caminhos.

Definição 1.23. Um espaço X é **simplesmente conexo** se X é conexo por caminhos e para algum $x_0 \in X$, $\pi_1(X, x_0)$ contém um único elemento, $[e_{x_0}]$; isto é, seu grupo fundamental é **trivial**.



a) Conjunto simplesmente conexo b) Conjunto não simplesmente conexo

Figura 9: “Um conjunto simplesmente conexo e outro não simplesmente conexo.”
Fonte: Elaborado pelo autor.

A grosso modo, um espaço simplesmente conexo é um espaço conexo por caminhos que não possui “buracos”. Note que na Figura 9 ambos os espaços são conexos por caminhos.

Observação 1.24. Note que, do Corolário 1.22, para todo $x \in X$, tem-se: $\pi_1(X, x) \approx \pi_1(X, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$.

Exemplo 1.25. O conjunto $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, com a topologia induzida de \mathbb{R}^2 , não é simplesmente conexo. Mais adiante apresentaremos uma justificativa para este fato.

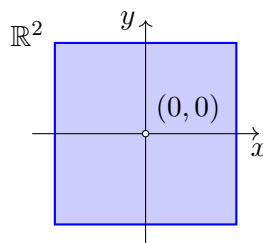


Figura 10: “Plano furado.”
Fonte: Elaborado pelo autor.

Lema 1.26. *Seja X um espaço simplesmente conexo. Então, quaisquer dois caminhos em X com os mesmos ponto inicial e final são homotópicos.*

Demonstração. Sejam f e g caminhos em X de x_0 à x_1 . Então, $[f] \star [\bar{g}]$ é uma classe de laços com base em x_0 . Logo, $[f] \star [\bar{g}] \in \pi_1(X, x_0)$. Uma vez que $\pi_1(X, x_0)$ é o grupo trivial, segue que $[f] \star [\bar{g}] = [e_{x_0}]$. Assim, $[f] \star [\bar{g}] \star [g] = [e_{x_0}] \star [g]$. Donde, $[f] \star [e_{x_1}] = [g]$. Portanto $[f] = [g]$, ou seja, $f \simeq_p g$. \square

Definição 1.27. *Fixado $x_0 \in X$ considere uma função contínua $h : X \rightarrow Y$ tal que $h(x_0) = y_0$. Convenientemente, denotemos-na como $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Tal mapa induz um homomorfismo $h_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, dado por:*

$$h_*([f]) = [h \circ f].$$

A função h_* leva laços em X , com base em x_0 , em laços em Y com base em y_0 . Mostremos que h_* está bem definida. Seja $g \in [f]$. Então, existe uma homotopia de caminhos F entre g e f . Note que $h \circ F$ é uma homotopia entre $h \circ g$ e $h \circ f$. Logo, $[h \circ g] = [h \circ f]$, isto é, $h_*(g) = h_*(f)$. Verifiquemos pois que h_* é um homomorfismo. Para isto considere $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ e note que:

$$h_*([f] \star [g]) = h_*([f \star g]) = [h \circ (f \star g)] = [(h \circ f) \star (h \circ g)] = [h \circ f] \star [h \circ g] = h_*([f]) \star h_*([g]).$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{h_*} & \pi_1(Y, y_0) \end{array}$$

Denotemos por π_1 a função que associa cada mapa contínuo $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ à função h_* na Definição 1.27.

Definição 1.28. *Uma categoria \mathcal{C} consiste de uma coleção de objetos, um conjunto $\mathcal{C}(A, B)$ de morfismos (também chamados mapas) entre dois quaisquer objetos $A, B \in \mathcal{C}$, uma identidade $id_A \in \mathcal{C}(A, A)$ (usualmente abreviada como id) para cada objeto $A \in \mathcal{C}$, e uma lei de composição*

$$\circ : \mathcal{C}(B, C) \rightarrow \times \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$$

para cada tripla de objetos A, B, C . A composição deve ser associativa e os morfismos identidade devem se comportar como seus nomes determinam:

$$h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g, \quad id \circ f = f, \quad e \quad f \circ id = f,$$

sempre que as composições específicas estiverem definidas.

Exemplo 1.29. *Listaremos aqui algumas categorias importantes.*

Categoria	Objetos	Morfismos
Poset	Conj. parc. ord.	Funções Monótonas
Ring	Anéis	Hom. de anéis
CRing	Anéis comutativos	Hom. de anéis comutativos
Grp	Grupos	Hom. de grupos
Vect_K	Esp. vet. sobre K	Transf. lineares
FVect_K	Esp. vet. de dim. finita sobre K	Transf. lineares
Top	Esp. topológicos	Funções contínuas

Dado um espaço topológico X e fixado um ponto $x_0 \in X$, chamaremos de espaço topológico pontuado o par (X, x_0) , em que o ponto distinguido x_0 será dito ponto base do espaço topológico pontuado (X, x_0) . Seja \mathbf{Top}_* a categoria dos espaços topológicos pontuados¹, cujas flechas são os mapas contínuos que preservam os pontos-base, e seja \mathbf{Grp} a categoria dos grupos com os homomorfismos como flechas.

Definição 1.30. Dadas duas categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} , um **functor** de \mathcal{C} até \mathcal{D} , escrito $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, consiste

- A cada objeto $A \in \mathcal{C}$ se associa um objeto $F(A) \in \mathcal{D}$;
- A cada morfismo $f : A \rightarrow B$, se associa um morfismo $F_{A,B}(f) = F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$,

satisfazendo

- $F(1_A) = 1_{F(A)}$, para cada objeto $A \in \mathcal{C}$;
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ para cada dupla de morfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$.

No próximo resultado veremos um exemplo importantíssimo de functor. Além disso, é um resultado de caráter essencial para entendermos a essência da teoria que estamos apresentando.

Teorema 1.1. A função $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ definida na Definição 1.27 é um functor.

Demonstração. Sejam $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$ espaços topológicos pontuados $g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0), h : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ mapas contínuos.

Mostremos inicialmente que $\pi_1(h \circ g) = \pi_1(h) \circ \pi_1(g)$. Mostraremos tal igualdade verificando que estas funções coincidem ponto a ponto. Assim, seja $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Daí,

¹Curiosidade: Existe um “functor esquecido” $\mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}$ que esquece o ponto base. Este functor possui um adjunto esquerdo que atribui a cada espaço topológico a união disjunta de um espaço X e de um conjunto $\{*\}$ cujo único elemento é considerado o ponto base.

$$\begin{aligned}
\pi_1(h \circ g)([f]) &= (h \circ g)_*([f]) \\
&= [(h \circ g) \circ f] \\
&= [h \circ (g \circ f)] \\
&= h_*([g \circ f]) \\
&= h_*(g_*([f])) \\
&= (h_* \circ g_*)([f]) \\
&= (\pi_1(h) \circ \pi_1(g))([f])
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\pi_1(1_{(X,x_0)})([f]) &= 1_{(X,x_0)*}([f]) \\
&= [1_{(X,x_0)} \circ f] \\
&= [f] \\
&= 1_{\pi_1(X,x_0)}([f]).
\end{aligned}$$

Portanto, π_1 é um funtor. □

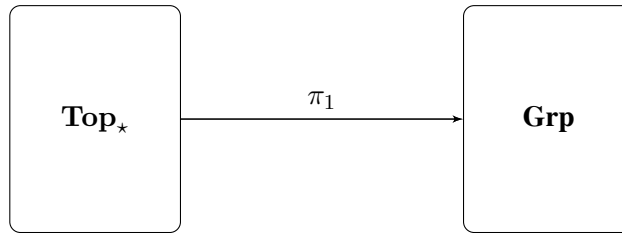


Figura 11: “O funtor π_1 entre as categorias **Top_{*}** e **Grp**”.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Ou seja, temos uma função que conecta dois “mundos” distintos, ou mais precisamente: duas categorias distintas, que são **Top_{*}** e **Grp**.

Corolário 1.31. *Se $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ é um homeomorfismo, então h_* é um isomorfismo.*

Demonstração. Como h é um homeomorfismo, $h^{-1} : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ é uma função contínua. Daí,

$$\begin{aligned}
h_* \circ (h^{-1})_* &= (h \circ h^{-1})_* = (id_Y)_* = id_{\pi_1(Y,y_0)} \\
(h^{-1})_* \circ h_* &= (h^{-1} \circ h)_* = (id_X)_* = id_{\pi_1(X,x_0)}
\end{aligned}$$

Portanto, h_* e $(h^{-1})_*$ são inversos, e h_* é um isomorfismo. □

Ou seja, o grupo fundamental nos servirá para determinarmos quando dois espaços topológicos **não** são homeomorfos. Para isto, podemos, pelo Corolário 1.31, verificar se o grupo fundamental dos espaços em questão são isomorfos; se não o forem, então tais espaços não serão homeomorfos. No capítulo 2 do presente trabalho discutiremos isto em mais detalhes.

Antes de encerrarmos esta seção, vejamos o seguinte resultado interessante que nos será útil mais adiante.

Proposição 1.32. *A aplicação inclusão $i : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ induz um isomorfismo entre grupos fundamentais.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, fixemos $x_0 = (1, 0)$ como ponto base e considere o mapa $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1$, com $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. É claro que r é contínua e portanto induz um homomorfismo de $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x_0)$ para $\pi(\mathbb{S}^1, x_0)$. Como $r \circ i = id_{\mathbb{S}^1}$, segue do Teorema 1.1 que $r_* \circ i_*(f) = [f]$. Por outro lado,

$$i \circ r \circ g(x) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|}.$$

Daí considere a homotopia $F : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por

$$F(x, t) = (1 - t)g(x) + t \cdot \frac{g(x)}{\|x\|}$$

é uma homotopia de caminhos entre $g(x)$ e $\frac{g(x)}{\|x\|}$. Portanto, $i_* \circ r_*([g]) = [g]$, donde segue que i_* é um isomorfismo. □

1.3 Espaços de Recobrimento

Espaços de recobrimento e elevações de caminhos são bastante úteis para compreender o grupo fundamental de um espaço topológico X . Nesta seção, abordaremos de maneira introdutória essas ideias, que serão úteis, por exemplo, para calcular o grupo fundamental do círculo na próxima seção.

Como mencionado na seção anterior, a ideia de recobrimento historicamente surgiu antes da ideia de grupo fundamental. Veja o que Klein diz a Poincaré em uma carta escrita em 14 de maio de 1882, segundo [5]:

“O Sr. Schwarz comunicou-me uma pergunta completamente diferente, embora também baseada em considerações de continuidade, durante a visita que lhe fiz recentemente (11 de abril) em Göttingen. Sem ter recebido autorização explícita dele, ainda acho que devo escrever-lhe sobre este assunto. Schwarz imagina uma superfície de Riemann recortada de forma adequada, depois coberta um número infinito de vezes e as diferentes sobreposições ligadas nas seções de tal forma que resulta numa superfície total que corresponde a todos os polígonos colocados um após o outro, ao lado dos outros no plano. Esta superfície total, até onde se pode dar tal nome a uma superfície infinitamente estendida (que é precisamente o que precisa ser

esclarecido), é no caso de uma função η do segundo tipo (um caso em que Schwarz decidiu ‘limitada’ primeiro) simplesmente conectada e com um contorno simples, e portanto agora é apenas uma questão de ver se podemos aplicar, da maneira usual, também uma superfície tão simplesmente conectada e com um contorno simples no interior de um círculo. Esta viagem de pensamento de Schwarz é, de qualquer forma, muito bonita”.

Isto é, na origem desta ideia jaz o objetivo de partir de uma superfície e *desdobrá-la* de uma forma ou de outra para construir uma superfície simplesmente conectada *acima* da superfície inicial.

Tendo em mente estas ideias, vejamos como os recobrimentos são comumente apresentados nos dias de hoje.

Definição 1.33. *Seja $p : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Considere $U \subset Y$ um aberto em Y . Diremos que $U \subset Y$ é uniformemente coberto por p se $p^{-1}(U)$ é a união de uma coleção abertos disjuntos V_α tais que para todo α , a função $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U$ é um homeomorfismo.*

Exemplo 1.34. *Seja $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{S}^1$ a restrição $f|_{[0, +\infty)}$ da função no Exemplo 1.2(b). Agora, considere U um arco pequeno em \mathbb{S}^1 , sem as extremidades, contendo o ponto $(1, 0)$. Então, para algum $\epsilon > 0$ pequeno, $h^{-1}(U)$ é da forma $[0, \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \cup (2 - \epsilon, 2 + \epsilon) \cdots$ e assim U não é completamente coberto por h , pois a componente $[0, \epsilon)$ não é mapeada homeomorficamente em U .*

Definição 1.35. *Seja $p : X \rightarrow Y$ contínua e sobrejetora. Dir-se-á que p é um **mapa de recobrimento** se para $y \in Y$, se puder achar uma vizinhança aberta U tal que $y \in U$ e U é uniformemente coberta por p (ver Figura 12). o espaço X é chamado **espaço de recobrimento** de Y .*

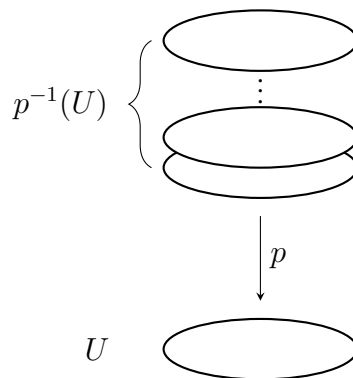


Figura 12: “Ilustração da ideia de mapa de recobrimento”.

Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Covering_space_diagram.jpg

Exemplo 1.36. Como veremos na Proposição 1.40, o mapa no Exemplo 1.2(b) é um mapa de recobrimento.

Definição 1.37. Considere uma aplicação $p : X \rightarrow Y$. Seja $f : A \rightarrow Y$ uma função contínua. Um **levantamento** de f é uma função $\tilde{f} : A \rightarrow X$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Teorema 1.2. Sejam $p : X \rightarrow Y$ um mapa de recobrimento, com $p(x_0) = y_0$, e $f : I \rightarrow Y$ um caminho tal que $f(0) = y_0$. Então, existe exatamente um levantamento $\tilde{f} : I \rightarrow X$ tal que $\tilde{f}(0) = x_0$.

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \exists! \tilde{f} & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Demonstração. A ideia da construção de \tilde{f} é particionar o intervalo I e defini-la, recorrentemente, em cada subintervalo, de modo que o caminho \tilde{f} será a justaposição de pedaços de f homeomorficamente copiados em X , via a inversa de restrições adequadas do mapa p .

Construção da partição: Como p é um mapa de recobrimento, então podemos cobrir Y com uma coleção $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de abertos que são uniformemente cobertos por p . Como f é contínua, $f^{-1}(U_\alpha)$ é um aberto, para todo $\alpha \in A$; tal coleção de pré-imagens cobre I . Esta cobertura aberta pode ser refinada para uma cobertura formada por intervalos abertos. Daí, uma vez que I é compacto, desta cobertura podemos extrair uma subcobertura finita, a qual também pode ser refinada para uma cobertura finita de intervalos fechados, cada qual sendo subconjunto da pré-imagem de algum U_α . Logo, a imagem de cada um destes intervalos fechados é um subconjunto de algum conjunto uniformemente coberto $U_\alpha \subset Y$.

Construção de \tilde{f} : Seja $f([0, s_1]) \subset U_0$. Nós sabemos que $p^{-1}(f(0))$ está espalhado ao longo de conjuntos $V_\beta \subset X$ que cobrem, uniformemente, U_0 . Ora, uma vez que $x_0 \in p^{-1}(f(0))$ e os conjuntos V_β são disjuntos, um único de tais conjuntos, que denotaremos por V_0 , contém x_0 . Ponhamos, então, $\tilde{f}(0) = x_0$. Agora, seja $\tilde{f} = (p|_{V_0})^{-1} \circ f$ sobre $[0, s_1]$. Esta função é contínua, pois é a composição de funções contínuas e está bem definida pois $p|_{V_0}$ é um homeomorfismo sobre U_0 .

Considere $\tilde{f}([s_1, s_2])$, em que $\tilde{f}([s_1, s_2]) \subset U_1$, e U_1 é uma vizinhança completamente coberta, digamos, por uma família de conjuntos disjuntos W_β . Uma vez que $\tilde{f}(s_1)$ já está definida, $\tilde{f}(s_1)$ está contido em um conjunto W_β , que denotaremos por W_0 . Então, analogamente, seja $\tilde{f} = (p|_{W_0})^{-1} \circ f$, em $[s_1, s_2]$. Daí, \tilde{f} está bem definida sobre $[0, s_2]$, e é contínua pelo Lema 1.6.

Ora, podemos repetir este argumento em cada intervalo $[s_i, s_{i+1}]$, desta família finita de intervalos fechados que cobrem I . Procedendo recursivamente, temos a construção de \tilde{f} concluída e é claro que $p \circ \tilde{f} = f$.

Unicidade de \tilde{f} : Seja \bar{f} um outro levantamento de f e, fixado arbitrariamente $t \in I$, considere uma vizinhança V_t , como na construção acima, que contenha $f(t)$. Por definição de levantamento, temos:

$$\begin{aligned} ((p|_{V_t})^{-1} \circ \bar{f})(t) &= f(t) \\ &= ((p|_{V_t})^{-1} \circ \tilde{f})(t) \\ &= (p|_{V_t})^{-1}(\tilde{f}(t)) \\ &= (p|_{V_t})^{-1}(\tilde{f}(t)) \end{aligned}$$

Como $(p|_{V_t})^{-1}$ é um homeomorfismo sobre a imagem, obtemos $\bar{f}(t) = \tilde{f}(t)$ e, como $t \in I$ foi fixado arbitrariamente, concluímos que $\bar{f} = \tilde{f}$. \square

Teorema 1.3. *Sejam $p : X \rightarrow Y$ um mapa de recobrimento, com $p(x_0) = y_0$, e $F : I \times I \rightarrow Y$ contínua tal que $F(0, 0) = y_0$. Então, existe exatamente um levantamento $\tilde{F} : I \times I \rightarrow X$ tal que $\tilde{F}(0, 0) = x_0$. Se F é uma homotopia de caminhos, então \tilde{F} é uma homotopia de caminhos.*

Demonstração. Esta prova é similar a prova anterior, então faremos apenas um esboço. Podemos construir um cobertura finita de fechados $\{[s_i, s_{i+1}] \times [t_k, t_{k+1}]\}_{i \in [n], k \in [m]}$ de $I \times I$ tal que para todo i, k existe uma vizinhança completamente coberta $U_\alpha \subset Y$ tal que $F([s_i, s_{i+1}] \times [t_k, t_{k+1}]) \subset U_\alpha$. Esta construção é similar a construção feita na prova do Teorema 1.2.

Seja $F([0, s_1] \times [0, t_1]) \subset U_0$. Cada ponto de $p^{-1}(F(0, 0))$ está contido em um conjunto V_α , diferente, numa coleção de abertos $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ que cobre, completamente, U_0 . Ora, $\tilde{F}(0, 0) = x_0 \in p^{-1}(F(0, 0))$, então $\tilde{F}(0, 0)$ está contido em algum dos conjuntos V_α , que denotaremos por V_0 . Uma vez que $\tilde{F}(0, 0)$ é uma função contínua, a imagem de um conjunto conexo tem que ser um conexo, logo $F([0, s_1] \times [0, t_1])$ está contido inteiramente em V_0 . Assim, $\tilde{F}(s, t) = (p|_{V_0})^{-1}(F(s, t))$ para todo $(s, t) \in [0, s_1] \times [0, t_1]$.

Agora, considere $([s_1, s_2] \times [t_1, t_2])$, que se trata da próxima seção retangular de $I \times I$. Então, existe uma vizinhança completamente coberta U_1 de tal forma que $F([s_1, s_2] \times [0, t_1]) \subset U_1$. Cada ponto de $p^{-1}(F(s_1, t_1))$ está contido em um conjunto aberto W_β , de uma coleção de conjuntos disjuntos que cobrem completamente U_1 . Logo, $\tilde{F}(s_1, t_1)$ está contido em exatamente um destes conjuntos W_β , o qual denotaremos por W_0 . Sendo assim, $\tilde{F}(s, t) = (p|_{W_0})^{-1}(F(s, t))$ para todo $(s, t) \in [s_1, s_2] \times [0, t_1]$.

Podemos continuar definindo \tilde{F} desta forma até que esteja completamente definida em $[0, 1] \times [0, t_1] \subset I \times I$, até que tenhamos \tilde{F} definida em todo o conjunto $I \times I$.

A partir daqui, assumamos que F é uma homotopia de caminhos. Assim, $\tilde{F}(s, 0)$ e $\tilde{F}(s, 1)$ são caminhos; ponha $\tilde{F}(0, 0) = x_0 \in V_0$ e note que $\tilde{F}(0, t)$, com $s = 0$, é contínua. Pois bem, $\tilde{F}(\{0\} \times [0, 1]) \in p^{-1}(F(\{0\} \times [0, 1])) = p^{-1}(y_0)$ e, uma vez que p é um mapa de recobrimento, o conjunto $p^{-1}(y_0)$ é discreto, assim como \tilde{F} está mapeando o conjunto $\{0\} \times [0, 1]$ continuamente sobre $p^{-1}(y_0)$, segue que \tilde{F} é um mapa constante. Portanto, $\tilde{F}(\{0\} \times [0, 1]) = \{x_0\}$. Por um argumento análogo, se chega a mesma conclusão para $\tilde{F}(\{1\} \times [0, 1])$. Deste modo, \tilde{F} é uma homotopia de caminhos. \square

Corolário 1.38. *Seja $p : X \rightarrow Y$ um mapa de recobrimento, com $p(x_0) = y_0$. Considere f e g caminhos homotópicos, em Y , de x_0 a y_0 , e sejam \tilde{f} e \tilde{g} seus respectivos levantamentos, começando em x_0 . Então, \tilde{f} e \tilde{g} são caminhos homotópicos.*

Demonstração. Por hipótese, existe uma homotopia de caminhos F de f para g , a qual possui um levantamento \tilde{F} , com $F(0, 0) = x_0$, de tal forma que \tilde{F} é uma homotopia de caminhos. Uma vez que a restrição $\tilde{F}|_{[0,1] \times \{0\}}$ é um levantamento de $F|_{[0,1] \times \{0\}}$, em que $\tilde{F}|_{[0,1] \times \{0\}}(0, 0) = x_0$, $F|_{[0,1] \times \{0\}}$ é intercambiável com f . Como $F|_{[0,1] \times \{0\}}$ e f têm um único levantamento em x_0 , estão, respectivamente, $\tilde{F}|_{[0,1] \times \{0\}}$ e \tilde{f} . Portanto, $\tilde{F}|_{[0,1] \times \{0\}} = \tilde{f}(s)$.

O mesmo argumento é válido para $\tilde{F}|_{[0,1] \times \{1\}}$ e \tilde{g} , logo \tilde{F} é uma homotopia de caminhos de \tilde{f} para \tilde{g} . Portanto, $\tilde{f} \simeq_p \tilde{g}$. \square

Proposição 1.39. *Sejam $p : X \rightarrow Y$ um aplicação de recobrimento e $p(x_0) = y_0$. Se X é conexo por caminhos, então temos a correspondência de levantamento*

$$\phi : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow p^{-1}(y_0)$$

é sobrejetiva. Se X é simplesmente conexo, esta correspondência é uma bijeção.

Demonstração. Se X é conexo por caminhos, dado $x_1 \in p^{-1}(y_0)$, existe um caminho \tilde{f} em X de x_0 para x_1 . Então, $f = p \circ \tilde{f}$ é um laço em Y em y_0 , e $\phi([f]) = x_1$, por definição.

Suponha X simplesmente conexo. Seja $[f]$ e $[g]$ dois elementos de $\pi_1(Y, y_0)$ tais que $\phi([f]) = \phi([g])$. Sejam \tilde{f} e \tilde{g} levantamentos de f e g , respectivamente, caminhos em X com ponto base x_0 ; então $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Uma vez que X é simplesmente conexo, existe uma homotopia de caminhos \tilde{F} em X entre \tilde{f} e \tilde{g} . Então $p \circ \tilde{F}$ é uma homotopia de caminhos em Y entre f e g . \square

Proposição 1.40. *O mapa $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, dado por $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$, é um mapa de recobrimento.*

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{S}^1$. Se $y \neq (1, 0)$, então $y \in \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}$, que é uma vizinhança aberta de \mathbb{S}^1 , completamente coberta, e $p^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$.

A pré-imagem das vizinhanças abertas $\mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}$ é a união de abertos disjuntos $(n, n+1)$, para cada qual tem-se que $p|_{(n, n+1)} : (n, n+1) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}$ é um homeomorfismo (ver Figura 13). Com efeito, pelas propriedades das funções seno e cosseno, sabemos que $p|_{(n, n+1)}$ é uma bijeção contínua, assim poder-se falar da função $(p|_{(n, n+1)})^{-1}$. Seja $(a, b) \subset (n, n+1)$ e note que $((p|_{(n, n+1)})^{-1})^{-1}((a, b)) = (p|_{(n, n+1)})(a, b) = U$, em que U é um aberto de $\mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}$. Assim, $(p|_{(n, n+1)})^{-1}$ é uma função contínua, donde segue a afirmação.

Se $y = (1, 0)$, podemos escolher $\mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\}$ como uma vizinhança completamente coberta contendo y e daí encontraremos que $p|_{(n+\frac{1}{2}, n+\frac{3}{2})}$ é o homeomorfismo correspondente, portanto p é um mapa de recobrimento. \square

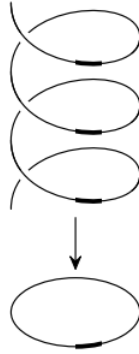


Figura 13: “Recobrimento de \mathbb{S}^1 ”.

Fonte: <https://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/topoman/e-ch7.pdf>.

É interessante observar que p é, na verdade, o protótipo de um mapa de recobrimento.

Definição 1.41. *O Plano projetivo \mathbb{P}^2 é o espaço quociente obtido de \mathbb{S}^2 , ao identificar os pontos x e $-x$ em \mathbb{S}^2 .*

O próximo resultado, o qual não provaremos neste texto, nos fornece mais um exemplo de espaço de recobrimento:

Teorema 1.4. *O plano projetivo \mathbb{P}^2 é um espaço topológico compacto e a projeção canônica $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ é um mapa de recobrimento.*

Demonstração. Veja [1, Tm. 60.3]. □

1.4 O Grupo Fundamental de \mathbb{S}^1 e Algumas Consequências

A circunferência desempenha um papel especial nesta teoria. Primeiro, a vemos como o primeiro exemplo laço e mais adiante, veremos que a circunferência é o protótipo do que será definido como curva de Jordan. Mas, os fatos interessantes acerca desta curva não se resumem a estes.

Veremos nesta seção que $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \approx \mathbb{Z}$ e, com este simples fato, seremos capazes de calcular o grupo fundamental de certas superfícies bem conhecidas e de provar alguns resultados interessantes.

Teorema 1.5. *O grupo fundamental de \mathbb{S}^1 , independentemente do ponto base, é isomorfo ao grupo aditivo $(\mathbb{Z}, +)$ dos números inteiros. Em outras palavras, existe uma bijeção $F : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ tal que $F([f] \star [g]) = F([f]) + F([g])$, para quaisquer $[f], [g] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$.*

Demonstração. Considere o mapa de recobrimento (Proposição 1.40) $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ definido por $p(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$, e seja $b_0 = (1, 0) \in \mathbb{S}^1$. Agora, tome $[f] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$, i.e., f é um laço com base em b_0 . Uma vez que $p(0) = b_0$, existe um único levantamento \tilde{f} de tal forma que $f = p \circ \tilde{f}$ e $\tilde{f}(0) = 0$; como f tem ponto final b_0 , segue que $\tilde{f}(1) = n$, para algum inteiro n .

Sabemos, do Corolário 1.38, que se g é um caminho homotópico a g , então \tilde{f} é homotópico a \tilde{f} . Logo, \tilde{f} e \tilde{g} são caminhos com o mesmo ponto final, que é $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1) = n$, em que

$n \in \mathbb{Z}$. Desta forma, todos os laços $[f]$ são levantados para um único caminho começando em 0 e terminando em algum inteiro n , assim temos bem definida a função $\psi : \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ em que $\psi([f])$ é definida como o ponto final do levantamento de f que começa em 0.

Agora, vejamos que ψ é sobrejetora. Para isto, sejam $n \in \mathbb{Z}$, e $\tilde{f}_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ um caminho de 0 à n ; ponha $f_n = p \circ \tilde{f}_n$. Ora, temos que $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ é um laço com ponto base b_0 , logo $[f_n] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$, e $\psi([f_n]) = \tilde{f}_n(1) = n$.

Verifiquemos que ψ também é injetora. Suponha que $\psi([f]) = \psi([g]) = n$; em que f é levantada para um caminho \tilde{f} de 0 a n ; e g para um caminho \tilde{g} , também de 0 a n . Logo, existe uma homotopia linear F entre \tilde{f} e \tilde{g} , assim $p \circ F$ é uma homotopia entre f e g . Portanto, $[f] = [g]$.

Daí, definamos $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$, em que $\phi(n) = [f_n]$ é a inversa de ψ e, ainda, ϕ é um homomorfismo pois $\phi(n + m) = [f_{n+m}] = [f_n] \star [f_m] = \phi(n) \star \phi(m)$.

A função ψ é bijetiva e sua inversa ϕ é um homomorfismo, então ψ é um isomorfismo entre $\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$ e \mathbb{Z} , em outras palavras, o grupo fundamental de \mathbb{S}^1 é grupo aditivo dos inteiros. \square

Proposição 1.42. (Grupo fundamental do produto). *Seja $X \times Y$ munido da topologia produto, em que X e Y são espaços topológicos. Então, $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ é isomorfo à $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$.*

Demonstração. Veja [1, Tm. 60.1]. \square

Aplicação 1.43. (Grupo fundamental do cilindro \mathcal{C}). *O grupo fundamental do cilindro $\mathcal{C} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (Figura 14) é isomorfo ao grupo $(\mathbb{Z}, +)$.*

Demonstração. De fato, fixado $(x, y) \in \mathcal{C}$, temos:

$$\pi_1(\mathcal{C}, (x, y)) = \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (x, y)) \stackrel{(1.42)}{=} \pi_1(\mathbb{S}^1, x) \times \pi_1(\mathbb{R}, y) \stackrel{(1.5)}{\approx} \mathbb{Z} \times \{[e_y]\} \approx \mathbb{Z}.$$

\square

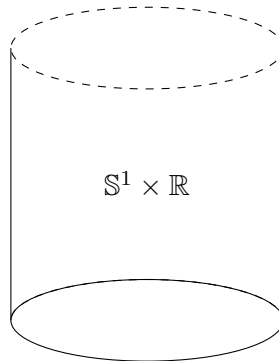


Figura 14: “Cilindro de base circular.”.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Aplicação 1.44. (*Grupo fundamental do Toro*). O grupo fundamental do toro² $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (Figura 15) é isomorfo à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Demonstração. Com efeito, fixe $(v, w) \in \mathbb{T}^2$ e note que:

$$\pi_1(\mathbb{T}^2, (v, w)) = \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (v, w)) \stackrel{(1.42)}{=} \pi_1(\mathbb{S}^1, v) \times \pi_1(\mathbb{S}^1, w) \stackrel{(1.5)}{\approx} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

□

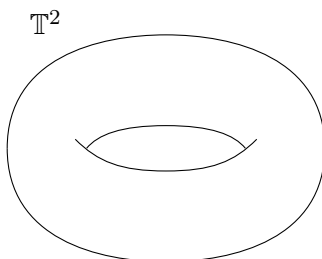


Figura 15: “Toro \mathbb{T}^2 ”.
Fonte: Elaborado pelo autor.

Com o Teorema 1.5 podemos ainda dar uma prova para o fato enunciado no Exemplo 1.25. De fato, $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é homeomorfo ao cilindro \mathcal{C} , via a função $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dada por $\phi(x, z) = e^x \cdot z$. Logo, pelo Corolário 1.31 e o Teorema 1.5, temos que $\pi_1(X, (x, y)) \approx \pi_1(\mathcal{C}, (\bar{x}, \bar{y})) = \mathbb{Z}$ e, assim, X não é simplesmente conexo.

²O toro \mathbb{T}^2 pode aparecer de outras formas. Por exemplo, como a rotação do caminho $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $\alpha(t) = (a + r \cdot \cos 2\pi t, 0, a + r \cdot \sin 2\pi t)$ em torno do eixo Oz , em que a e r são reais positivos, com $a > r$. Mas tais espaços são homeomorfos.

2 Um pouco de Classificação Topológica

Como foi comentado brevemente na introdução deste trabalho, o problema da classificação está no centro da Topologia. Na verdade, compreender quando um determinado espaço, com uma determinada estrutura, pode ser deformado continuamente num outro espaço, está não só no centro do estudo atual da Topologia quanto está em sua gênese. Faremos uma breve exposição histórica do tema, começando pelas superfícies de dimensão 2, baseando-nos em [4].

2.1 O Problema da Classificação Topológica

Ao longo desta discussão entenderemos superfícies e variedades como sinônimos.

As variedades de dimensão 2 surgem naturalmente no estudo de diversos ramos da matemática, bem como em outras ciências. O caso das superfícies de dimensão 2 é bastante interessante, pois é uma classe já bem entendida e inteiramente classificada, pelo menos para o caso das superfícies compactas sem bordo. Um dos primeiros matemáticos a investigar o problema da classificação foi Möbius, que classificou as superfícies imersas suavemente no espaço euclidiano de dimensão 3, neste caso, as superfícies orientáveis. Na direção de compreender as superfícies não-orientáveis, os primeiros resultados foram provados por von Dyck em 1888, embora se tenha detectado erros em sua prova.

Uma das motivações do trabalho de Poincaré é justamente generalizar certas noções já conhecidas para superfícies de dimensão 2, como a característica de Euler, para variedades de dimensões superiores.

No decorrer do desenvolvimento dos resultados que buscam essa tal classificação, um dos mais célebres lida com a classificação das superfícies compactas, conexas e sem bordo, como garante o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *(Teorema de Classificação das Superfícies). Toda superfície compacta sem bordo orientável é homeomorfa a uma esfera ou a uma soma conexa de toros. Toda superfície não orientável é homeomorfa a uma soma conexa de planos projetivos.*

Na *Análise Situs*, Poincaré constrói dois novos tipos de invariantes topológicos de variedades: o **grupo fundamental** e seus **grupos de homologia**. Assim, agora que sabemos descrever todas as superfícies, podemos tentar calcular tais invariantes topológicos e extrair novas informações.

Neste sentido, os trabalhos de Poincaré na referida *Análise Situs*, rendeu-nos não só a concepção das ideias comentadas no parágrafo anterior, abrindo caminho para toda uma área de pesquisa após ele, como também ditou novos caminhos para além da *Análise situs*. Como exemplo disto temos a famosíssima conjectura de Poincaré, também um problema de classificação, cuja a prova de Grigori Perelman confere à *Análise Geométrica* uma digna coroação depois dos trabalhos de Steve Smale, provando-a para o caso $n \geq 5$, usando o truque de Whitney; de Michael Friedman para o caso $n = 4$; e de Thurston e Hamilton, culminando através do programa de Hamilton na prova da conjectura de Geometrização de Thurston.

Nesta seção, mostraremos como o grupo fundamental, que surge no rico contexto da *Análise Situs*, pode nos responder algumas questões simples nesse mundo das classificações. Antes disto, vejamos algumas propriedades topológicas que, por exemplo, um aluno de um curso de bacharelado em matemática dispõe para decidir se duas variedades são homeomorfas.

Compacidade. Com a compacidade temos uma ferramenta bastante modesta para este fim, mas que em certas situações pode nos ajudar a verificar se certos espaços podem ser homeomorfos. Por exemplo, \mathbb{S}^1 não pode ser homeomorfo a reta \mathbb{R} , pois \mathbb{R} não é compacto enquanto que \mathbb{S}^1 o é. Ou, ainda, podemos inferir imediatamente que \mathbb{S}^2 não é homeomorfo ao cilindro $\mathcal{C} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, pois \mathcal{C} não é compacto. Contudo, se considerarmos o cilindro $\mathcal{C} = \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ a compacidade já não se torna tão eficaz.

Como um outro exemplo de que a compacidade não é muito útil para esse propósito, com ela também não podemos decidir se \mathbb{S}^2 é homeomorfa ao toro \mathbb{T}^2 , pois sendo ambas as superfícies compactas, precisamos de alguma outra propriedade para distingui-las.

Conexidade e o número de componentes conexas. O número de componentes conexas de um espaço topológico, que corresponde ao número de Betti b_0 , é um interessante e bastante intuitivo invariante, em virtude de que é esperado que o número de “pedaços” de um espaço topológico seja invariante por homeomorfismos. Vejamos um exemplo clássico que evidencia quando esta ideia pode ser usada.

Sejam $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$, com a topologia induzida de \mathbb{R}^2 , e $Y = \mathbb{R}$, com sua topologia usual. Tais espaços não podem ser homeomorfos uma vez que, ao retirarmos um ponto de cada espaço, teremos, no caso de X , um espaço com quatro componentes conexas; e no caso de Y , duas.

Mas não demora muito para que este invariante demonstre suas limitações. Se novamente quisermos verificar se \mathbb{S}^2 é homeomorfa a \mathbb{T}^2 , esbarraremos em um problema. Pensando na ideia do parágrafo anterior e supondo que pudesse existir um homeomorfismo entre \mathbb{S}^2 e \mathbb{T}^2 , podemos tentar retirar uma circunferência da “sintura” de \mathbb{T}^2 e uma circunferência de \mathbb{S}^2 . Contudo, precisamos garantir que ao “retirar” um círculo C de \mathbb{T}^2 , corresponderá a retirar um círculo em \mathbb{S}^2 , ou algo parecido via o homeomorfismo. De fato, se evocarmos o Teorema da Separação de Jordan, podemos garantir que o círculo retirado do toro \mathbb{T}^2 irá corresponder a uma curva fechada sem auto-interseções em \mathbb{S}^2 e assim, esta curva separará \mathbb{S}^2 , enquanto que $\mathbb{T}^2 \setminus C$ permanece conexo. Logo, poder-se-á aplicar o invariante do número de componentes conexas. Mas, se por outro lado, considerarmos o \mathbb{T}^2 e \mathcal{C} e supormos que existe um homeomorfismo entre tais superfícies, não conseguimos replicar o argumento do parágrafo anterior, mesmo que seja óbvio que \mathbb{T}^2 e \mathcal{C} não sejam homeomorfos, pois intuitivamente se estaria rasgando o toro para o obter o cilindro.

Portanto, num primeiro momento, este invariante é insuficiente mesmo para inferir acerca da natureza de superfícies simples.

Com as ideias apresentadas ao longo destas notas, conseguiremos verificar sem muita dificuldade que \mathbb{S}^2 , \mathbb{T}^2 , \mathcal{C} e o plano projetivo \mathbb{P}^2 , constituem um conjunto de superfícies que são topologicamente distintas.

2.2 O grupo fundamental de mais algumas superfícies

Seguindo essencialmente [6], mostraremos que \mathbb{S}^n é simplesmente conexa para $n > 1$, ou seja, calcularemos seu grupo fundamental e mostraremos que seu grupo fundamental é trivial. Para isto, apresentaremos alguns resultados auxiliares.

Lema 2.1. *Seja $f; I \rightarrow \mathbb{S}^n$ um caminho tal que $f(I) \neq \mathbb{S}^n$. Então $f \simeq e_{x_0}$ se $f(0) = f(1) = x_0$ e $f \simeq g$, em que $g : I \rightarrow \mathbb{S}^n$ é um caminho injetivo, se for $f(0) \neq f(1)$.*

Demonstração. Existe $p \in \mathbb{S}^n \setminus f(I)$. Seja $P : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção estereográfica. Então, como \mathbb{R}^n é simplesmente conexo, $P \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é homotópico a uma constante ou a um segmento de reta (parametrizado injetivamente), conforme f seja fechado ou não. O mesmo se dá com $f = P^{-1} \circ (P \circ f)$. \square

Observação 2.2. *A hipótese $f(I) \neq \mathbb{S}^n$ precisa ser posta porque uma existem curvas contínuas como as curvas de Peano, que podem, surpreendentemente, preencher um quadrado de \mathbb{R}^2 .*

Lema 2.3. *Seja $n > 1$. Se o caminho $f : I \rightarrow \mathbb{S}^n$ é injetivo, sua imagem é um subconjunto fechado com interior vazio em \mathbb{S}^n .*

Demonstração. Como I é compacto, $f(I)$ é compacto e portanto fechado em \mathbb{S}^n . Além disso, sendo injetivo, f é um homeomorfismo de I sobre sua imagem $f(I)$, a qual, se tivesse interior não vazio, conteria uma bola aberta B , de centro $x = f(s)$. Devemos ter $B = f(J)$ em que J é um intervalo aberto contendo s . O caminho f seria um homeomorfismo de J sobre B , um absurdo, pois $J \setminus \{s\}$ é desconexo enquanto $B \setminus \{x\}$, uma vez que $n > 1$. \square

Lema 2.4. *Todo caminho $f : I \rightarrow \mathbb{S}^n$ é homotópico a um caminho $g : I \rightarrow \mathbb{S}^n$ qual que $g(I) \neq \mathbb{S}^n$.*

Demonstração. Em virtude da continuidade uniforme de f podemos obter pontos $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ de tal forma que, pondo $I_i = [s_{i-1}, s_i]$, tenhamos $f(I_i) \neq \mathbb{S}^n$ para todo $i = 1, \dots, k$. Como $f \simeq f_1 f_2 \dots f_k$, em que cada $f_i : I \rightarrow \mathbb{S}^n$ é uma reparametrização de $f|_{I_i}$, com $f_i(I) = f(I_i)$. Pelos Lema 2.1 e Lema 2.3, segue que $f_i \simeq g_i$, em que a imagem $g_i(I)$ é um fechado com interior vazio em \mathbb{S}^n . Pondo $g = g_1 g_2 \dots g_k$, vemos que

$$f \simeq f_1 f_2 \dots f_k \simeq g_1 g_2 \dots g_k = g$$

e a imagem

$$g(I) = g_1(I) \cup \dots \cup g_k(I)$$

é uma reunião finita fechados com interior vazio em \mathbb{S}^n . Disto segue que $g(I)$ tem interior vazio. Em particular, $g(I) \neq \mathbb{S}^n$. \square

Agora, podemos proceder com o cálculo do grupo fundamental de \mathbb{S}^n para $n > 1$.

Teorema 2.2. *Se $n > 1$, a esfera \mathbb{S}^n é simplesmente conexa.*

Demonstração. Pelo Lema 2.4, todo caminho fechado em \mathbb{S}^n é homotópico a um caminho fechado cuja imagem não é toda \mathbb{S}^n . Este último, pelo Lema 2.1, é homotópico a uma contante. \square

Com o Teorema 2.2 estabelecido, podemos retornar ao espaço projetivo \mathbb{P}^2 e calcular seu grupo fundamental.

Teorema 2.3. *Seja P^2 o plano projetivo. Então, $\pi_1(P^2, y) \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Demonstração. A projeção $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow P^2$ é um mapa de recobrimento, pelo Teorema 1.4. Uma vez que S^2 é simplesmente conexa, podemos aplicar a Proposição 1.39, que nos fornecerá uma correspondência bijetiva entre $\pi_1(P^2, y)$ e o conjunto $p^{-1}(y)$. Em virtude de que o conjunto $p^{-1}(y)$ tem apenas dois elementos, segue que $\pi_1(P^2, y)$ é um grupo de ordem 2. Ora, a menos de isomorfismo, o único grupo de ordem 2 é $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Portanto, $\pi_1(P^2, y) \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

Deste modo, temos em mãos a Tabela 1 que reúne o grupo fundamental das superfícies citadas na introdução da presente seção. Com isto, vale salientar que o fato enunciado no Corolário 2.5, estabelece uma classificação que outrora, apenas com as ferramentas ofertadas pelos cursos básicos de topologia geral e topologia dos espaços métricos, não era possível de obtê-la:

Tabela 1

Superfície	$\pi_1(\cdot, \cdot)$
\mathbb{S}^2	$\{e\}$
\mathbb{T}^2	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
\mathbb{P}^2	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
\mathcal{C}	\mathbb{Z}

Corolário 2.5. *As superfícies \mathbb{S}^2 , \mathbb{T}^2 , \mathbb{P}^2 e \mathcal{C} são topologicamente distintas.*

3 Algumas Aplicações Interessantes

Neste capítulo, iremos explorar o poder da teoria desenvolvida no primeiro capítulo do presente texto. Veremos a demonstração de alguns fatos clássicos da Matemática, em especial, da Álgebra e da Topologia, fazendo uso dos resultados que envolvem o grupo fundamental e os recobrimentos.

O leitor irá notar que o Grupo fundamental é uma ferramenta eficaz para estudar os teoremas apresentados neste capítulo, pois dado um espaço topológico conexo X , o grupo $\pi(X, x)$ é um invariante e, deste modo, carrega informações de X que são indissociáveis. Por exemplo: ao estudar o comportamento de uma função contínua que atua sobre D^2 , esta função induz um homomorfismo de grupos. Daí, o fato de que conhecemos $\pi_1(D^2, \cdot)$ nos permite levar as informações obtidas no mundo dos grupos para entender a função f que atua sobre D^2 . Na verdade, é isto o que nos diz o Teorema 1.1.

Repare que esta ideia está no âmago dos argumentos que serão apresentados ao longo deste capítulo.

3.1 Teorema Fundamental da Álgebra

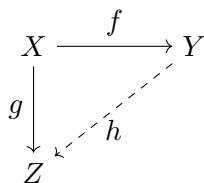
A primeira prova rigorosa do Teorema Fundamental da álgebra foi publicada em 1806 por Jean-Robert Argand; inclusive, esta foi a primeira vez que o teorema fundamental da álgebra foi enunciado para polinômios com coeficientes complexos.

Desde então, diversas provas diferentes do Teorema Fundamental da Álgebra já foram publicadas. Algumas dessas provas usam, por exemplo, fatos de Análise. Na prova que trataremos nesta seção, faremos uso apenas dos argumentos algébrico-topológicos apresentados ao longo destas notas.

Antes de enunciarmos e provarmos o famosíssimo Teorema Fundamental da Álgebra, precisamos de dois resultados auxiliares.

O primeiro lema nos diz que com as hipóteses adequadas, todo mapa que, num certo sentido, preserva as fibras de uma aplicação contínua, induz uma aplicação que atua entre os espaços de chegada.

Lema 3.1. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua, fechada, e sobrejetora. Considere $g : X \rightarrow Z$ uma função tal que em cada subconjunto $A \subset X$ em que $f(A)$ tem um único ponto, g é constante. Então, g induz uma função $h : Y \rightarrow Z$ tal que $h \circ f = g$. Se g for contínua, então h também o é.*



Demonstração. Definamos h para cada $y \in Y$. Como f é sobrejetora, para cada $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Logo, para cada $y \in Y$, ponha $h(y) = h(f(x)) = g(x)$. Uma vez que a função g é constante para todo $x \in f^{-1}(y)$, segue que $h(y) = h(f(x)) = g(x)$ está bem definida.

Suponha g contínua. Seja U um subconjunto fechado de Z . Então, $f^{-1}(h^{-1}(U)) = g^{-1}(U)$ é fechado, assim $f\left(f^{-1}(h^{-1}(U))\right) = h^{-1}(U)$ é fechado. Portanto, h é contínua. \square

Lema 3.2. *Seja $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ uma função contínua. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. h é homotópica a uma constante;
2. h pode ser estendida para uma função contínua que mapeia B^2 , bola fechada unitária em \mathbb{R}^2 , em X ;
3. h_* é o homeomorfismo trivial.

Demonstração. Mostraremos que (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1).

(1) \Rightarrow (2) : Assumamos que h é homotópica a uma constante. Seja F uma homotopia entre h e e_x . Então existe um mapa $q : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow B^2$ tal que $q(s, t) = (1 - t)s$. Este mapa é contínuo, sobrejetor e fechado. De fato, a continuidade da função q segue da definição, pois trata-se do produto de funções contínuas. A sua sobrejetividade segue do fato de que dado $u \in B^2 \setminus \{0\}$, tem-se que $u/\|u\| = v \in \mathbb{S}^1$ e assim $q(v, 0) = u$. A propriedade de q ser fechada segue da compacidade de $\mathbb{S}^1 \times I$, pois qualquer subconjunto fechado de $\mathbb{S}^1 \times I$ será compacto e, portanto, sua imagem será um compacto em B^2 , em particular fechado. Além disso, a função q é constante apenas nos conjuntos unitários e no conjunto $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$. Sendo F contante em tais conjuntos, pelo Lema 3.1, F induz uma função contínua $k : B^2 \rightarrow X$ em que $k \circ q = F$. A função k é uma extensão de h para o domínio B^2 .

(2) \Rightarrow (3) : Assuma que h pode ser estendida continuamente a uma função k com domínio B^2 . Seja $j : \mathbb{S}^1 \rightarrow B^2$ o mapa inclusão. Então, $h = k \circ j$ e, assim, $h_* = (k \circ j)_* = k_* \circ j_*$. O grupo fundamental de B^2 é trivial, pois trata-se de um espaço simplesmente conexo. Logo, j_* é o homeomorfismo trivial. Portanto, h_* é o homeomorfismo trivial.

(3) \Rightarrow (1) : Suponha h_* o homeomorfismo trivial. Seja $p : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ o laço definido por $p(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$. Seja $h(p(0)) = x_0$. Então, $[h \circ p] = [e_{x_0}]$, ou seja, $h \circ p$ é um caminho homotópico a e_{x_0} . Assim, existe uma homotopia de caminhos $F : I \times I \rightarrow X$ entre $h \circ p$ e e_{x_0} . Agora, note que o mapa $Q : I \times I \rightarrow \mathbb{S}^1 \times I$, em que $Q(s, t) = (p(s), t)$, é contínuo, sobrejetor e fechado. Daí, a homotopia F induz um mapa contínuo $H : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow X$ tal que $F = H \circ Q$. Tal mapa é uma homotopia de caminhos entre h e o mapa constante e_{x_0} . \square

Teorema 3.1. *(Teorema Fundamental da Álgebra). Todo polinômio de coeficientes complexos de uma variável, e não constante, possui pelo menos uma raiz complexa.*

Demonstração. Seja $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ um polinômio complexo não constante. Como

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0|}{|z|^n} = 0,$$

existe $c \in \mathbb{C}$ suficientemente grande de tal forma que $|\frac{a_{n-1}}{a_n c} + \dots + \frac{a_0}{a_n c^n}| < 1$. Agora, considere o polinômio $h(z) = z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n c} z^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n c^n}$ e note que $f(z) = c^n a_n h(\frac{z}{c})$. Portanto, se $h(\frac{z}{c})$ tem uma raiz complexa, então $f(z)$ também o tem, assim é suficiente provar que $h(z)$ possui raiz complexa. Para simplificar a notação, escrevamos $h(z) = z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_0$.

Suponhamos por contradição que $h(z)$ não possui raízes complexas. Assim, a imagem de h está contida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; como $h(z)$ é um polinômio, $h|_{\mathbb{S}^1}$ e $h|_{B^2}$ são mapas contínuos sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, logo, pelo Lema 3.2, $h|_{\mathbb{S}^1}$ é homotópica a uma constante.

Agora, considere a função $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, em que $g(z) = z^n$ e a função $k : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ a função dada por $k(z) = z^n$. Se $j : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é o mapa inclusão, então $g = j \circ k$. Logo, $g_* = j_* \circ k_*$. Seja $p : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^1$ o mapa de recobrimento dado por $p(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$. Ora, a classe de homotopia $[p]$ corresponde ao número inteiro 1 em $(\mathbb{Z}, +)$, via o isomorfismo construído no Teorema 1.5. Como 1 é o gerador do grupo aditivo $(\mathbb{Z}, +)$, segue que $[p]$ é o gerador do grupo fundamental de \mathbb{S}^1 . Uma vez que $k \circ p$ é um laço que viaja n vezes mais rápido que $[p]$. Em outras palavras, $k \circ p = p \star p \cdots \star p$, n vezes. Mostrando que $\pi_1(\mathbb{S}^1, b_0)$ é isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$, nós temos que k_* é injetiva.

Existe uma função $l : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $l(z) = \frac{z}{\|z\|}$. Então, $l \circ j$ é o mapa identidade de \mathbb{S}^1 . Logo, $(l \circ j)_* = l_* \circ j_*$ é o homomorfismo identidade.

Portanto j_* é injetivo. Como k_* e j_* são injetivos, segue que g_* é injetivo. Sendo o domínio de g_* não trivial, temos que g_* é não trivial. Logo, g não é homotópica a zero.

Contudo, nós podemos construir uma homotopia $F : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ entre g e h . Seja $F(z, t) = z^n + t \cdot (\alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_0)$. Para todo $(z, t) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$, temos, pela desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} |F(z, t)| &\geq |z^n| - |t(\alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_0)| \\ &\geq |z^n| - t(|\alpha_{n-1}z^{n-1}| + \cdots + |\alpha_0|) \end{aligned}$$

Note que para todo $z \in \mathbb{S}^1$ e todo $k \in \mathbb{Z}$, nós temos $|z^k| = 1$. Daí,

$$\begin{aligned} |z^n| - |t(\alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_0)| &= 1 - |t(\alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_0)| \\ &> 1 - t \cdot 1 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Deste modo, para qualquer que seja $(z, t) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$, $F(z, t) \neq 0$. Assim, g e $h|_{\mathbb{S}^1}$ são homotópicas.

Ora, se $h|_{\mathbb{S}^1}$ é homotópica a zero, então g também o é, o que é uma contradição. Logo, o que assumimos é falso e, assim, $h(z)$ possui pelo menos uma raiz complexa. Portanto, $f(z)$ possui uma raiz complexa. \square

3.2 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Seja E um espaço vetorial. Um ponto fixo de uma aplicação $F : E \rightarrow E$ é um ponto $x_0 \in E$ tal que $F(x_0) = x_0$. Mas, qual seria a importância de tais pontos? Uma das principais utilidades de teoremas do tipo ponto fixo diz respeito a determinar a existência de soluções para uma equação da forma $F(x) = y$, pois

$$F(x) = y \iff F(x) - y + x - x = 0 \iff \underbrace{F(x) - y + x}_{=g(x)} = x,$$

ou seja, o problema de determinar a existência de uma solução para a equação $F(x) = y$, equivale a mostrar a existência de um ponto fixo para a função $g : E \rightarrow E$, dada por $g(x) = F(x) - y + x$.

Agora, vejamos alguns teoremas célebres que podem ser provados usando teoremas do tipo ponto fixo.

Teorema de Picard. Sejam $U \subset \mathbb{R} \times E$ um aberto, em que E é um espaço de Banach, $(x_0, t_0) \in U$. Procura-se uma aplicação diferenciável $\varphi : J \rightarrow E$, definida num intervalo J contendo t_0 em seu interior, de tal forma que $\varphi(t_0) = x_0$ e, para todo $t \in J$, $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, em que $f : U \rightarrow E$ é contínua e satisfaz $|f(t, x) - f(t, y)| \leq c \cdot |x - y|, \forall x, y \in E$. Isto é, temos uma EDO e desejamos provar que existe uma solução φ . Resolver tal problema se resume a mostrar a existência de ponto fixo para o seguinte operador:

$$F : C(J, B) \rightarrow C(J, B), \quad [F(\varphi)](t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

em que B é uma bola adequada. Na prova deste Teorema essencial para o estudo de EDO's, o resultado adequado é o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Cada qual pode ser encontrado em [12].

Teorema da Função Inversa. É um célebre resultado da Análise Matemática, visto geralmente nos cursos de Análise no \mathbb{R}^n . Ele estabelece que se a derivada de uma aplicação C^1 , é um isomorfismo da classe das espaços vetoriais, então a função em si é, localmente, um isomorfismo da classe das variedades diferenciáveis. Para prová-lo é usado o Teorema do Ponto Fixo de Banach, como pode ser visto em [11, Tm. 5.2.3]. O ponto delicado da prova é verificar a sobrejetividade do mapa em questão numa certa vizinhança, ou seja, justamente o problema de mostrar a existência de solução para uma equação da forma $F(x) = y$.

Teorema do Equilíbrio de Nash. O Teorema do Equilíbrio de Nash nos afirma que todo jogo com um número finito de jogadores e perfis de ação possui pelo menos um equilíbrio de Nash. Este resultado, juntamente com seus desdobramentos teóricos, renderam a John Nash o prêmio Nobel de economia de 1994. O impacto do Equilíbrio de Nash na Teoria dos Jogos, Economia, dinâmica dos governos, biologia, etc., pode ser acompanhado até os dias de hoje.

Em sua prova original, em 1950 (veja em [13]), Nash utilizou o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani. Posteriormente, no artigo [14] publicado em 1951, ele elaborou uma nova prova utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Nesta seção apresentaremos uma prova para o Teorema do Ponto fixo de Brouwer em sua versão unidimensional, usando de noções básicas da topologia da reta, e em seguida a prova do caso bidimensional como corolário do Teorema 1.5.

Teorema 3.2. *Se $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ é contínua, então existe $x_0 \in [-1, 1]$ de modo que $f(x_0) = x_0$.*

Geometricamente, o Teorema 3.2 nos diz que o gráfico de qualquer função contínua f de $[-1, 1]$ sobre $[-1, 1]$, intersectará o gráfico da função identidade em pelo menos um ponto, como mostra a Figura 16, em que o gráfico da função identidade aparece em vermelho.

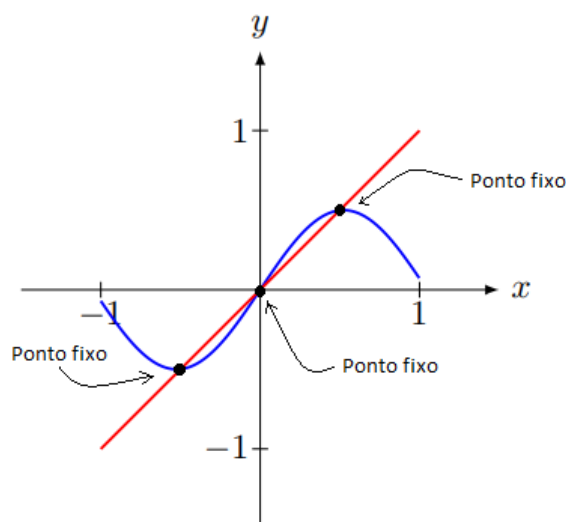


Figura 16: “Ponto fixo de Brouwer em dimensão 1”.
 Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração do Teorema 3.2. Note que se $f(-1) = -1$ ou $f(1) = 1$, então não há o que fazer. Sendo assim, suponhamos $f(-1) \neq -1$ e $f(1) \neq 1$. Agora, repare que mostrar que existe $x \in (-1, 1)$ de tal forma que $f(x) = x$, equivale a mostrar que existe $x_0 \in (-1, 1)$ de modo que $f(x_0) - x_0 = 0$. Desta forma, defina a função auxiliar $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = f(x) - x$, que é contínua pois f o é. Daí, note que

$$-2 < g(1) < 0 < g(-1) < 2,$$

logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x_0 \in (-1, 1)$ tal que $g(x_0) = 0$, ou seja, $f(x_0) = x_0$. \square

Na verdade, o Teorema 3.2 possui a seguinte versão mais geral:

Teorema 3.3. (*Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.*) Seja \overline{B}^n a bola fechada unitária de \mathbb{R}^n centrada na origem. Se $f : \overline{B}^n \rightarrow \overline{B}^n$ é contínua, então existe $x_0 \in \overline{B}^n$ de modo que $f(x_0) = x_0$.

Vale observar que o Teorema 3.2 é equivalente ao Teorema do Valor intermediário, i.e., assumindo a validade do Teorema 3.2, podemos verificar que a propriedade do valor intermediário é verdadeira. Assim, se quisermos, e.g., estabelecê-lo para $n = 2$, ou seja, para uma função contínua $f : D^2 \rightarrow D^2$, em que $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ é o disco unitário centrado na origem, encontraremos dificuldades para replicar a estratégia usada na prova acima. De fato, a prova mais simples conhecida para o Teorema 3.3, que não faz uso das ideias aqui apresentadas, é uma adaptação feita por C. A. Rogers em [9] da prova de J. Milnor ([7]).

O leitor poderá observar que usando do simples fato de que $\pi_1(\mathbb{S}^1, p_0) \approx \mathbb{Z}$, podemos verificar que o Teorema 3.3 é válido para $n = 2$.

Definição 3.3. *Seja X um espaço topológico e $A \subset X$ um subespaço topológico. Uma função contínua $f : X \rightarrow A$ tal que $f|_A = id_A$ é dita uma **retração**. Quando existe uma retração do espaço X no subespaço A , dizemos que A é um retrato por deformação do espaço X .*

O lema a seguir é de caráter essencial para prova. Mesmo nos casos mais gerais do Teorema de Brouwer, como na prova do Teorema 3.3, se segue um caminho análogo, como pode ser visto em [9].

Lema 3.4. *Não existe uma retração de \mathbb{S}^1 em D^2 .*

Demonstração. Suponhamos por contradição que exista uma retração r de \mathbb{S}^1 em D^2 . Seja i a inclusão de \mathbb{S}^1 em D^2 e note que $r \circ i = id_{\mathbb{S}^1}$, isto é, r é uma sobrejeção.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{id} & D^2 & \xrightarrow{r} & \mathbb{S}^1 \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & id_{\mathbb{S}^1} \end{array}$$

Como D^2 é um conjunto convexo, segue que $\pi(D^2, x) = (\{0\}, +)$. Daí, segue que $r_* : \pi_1(D^2, x_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, p_0)$ é o homeomorfismo identicamente nulo. Logo, uma vez que π_1 é um funtor e r é uma sobrejeção, segue que r_* é uma sobrejeção de $(\{0\}, +)$ sobre $(\mathbb{Z}, +)$, o que é um absurdo.

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_1(id_{\mathbb{S}^1})=id_{\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0)} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) & \longrightarrow & \pi(D^2, y_0) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ (\mathbb{Z}, +) & & (\{0\}, +) & & (\mathbb{Z}, +) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & id_{\mathbb{Z}} & & \end{array}$$

□

Teorema 3.4. *Toda função contínua do disco D^2 sobre D^2 possui pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração. Seja $f : D^2 \rightarrow D^2$ contínua. Suponha por absurdo que f não possui ponto fixo, ou seja, $f(x) \neq x$, para todo $x \in D^2$. Agora, defina a função $r : D^2 \rightarrow D^2$ da seguinte maneira: para cada $x \in D^2$, seja $r(x)$ a interseção com \mathbb{S}^1 da semi-reta que começa em $f(x)$ e passa por x (veja a Figura 17). Uma vez que $f(x) \neq x$ temos de fato uma única semi-reta começando em $f(x)$ e passando por x que intersecta \mathbb{S}^1 em um único ponto $r(x) \in \mathbb{S}^1$, o que mostra que r está bem definida para todo $x \in D^2$. Mostremos agora que r é contínua. Com efeito, note que r associa a cada $x \in D^2$ um único ponto da forma $x + t \cdot (x - f(x))$, em que t é unicamente determinado como a raiz positiva do polinômio

$$\|x - f(x)\| \cdot t^2 + 2 \cdot \langle x, x - f(x) \rangle \cdot t + \|x\|^2 = 1. \quad (1)$$

Logo, temos definida implicitamente uma função que associa a cada $x \in D^2$ um único $t(x) \in (0, 1)$ tal que a Equação (1) é satisfeita. Assim, da expressão em radicais da fórmula resolvente

de uma equação do segundo grau e do fato de que f é contínua, segue que $t(x)$ define uma função contínua. Portanto, r é contínua.

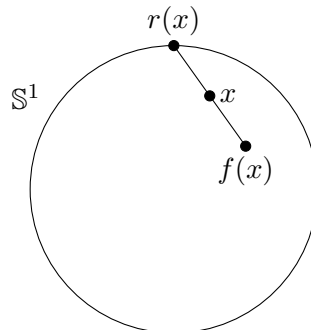


Figura 17: “O mapa r ”.
Fonte: Elaborada pelo autor.

Além disso, note que se $x \in \mathbb{S}^1$ então $r(x) = x$, i.e., $r|_{\mathbb{S}^1} = id_{\mathbb{S}^1}$. Então, r é uma retração de \mathbb{S}^1 em D^2 , o que é uma contradição com o Lema 3.4. Portanto, f possui pelo menos um ponto fixo. \square

O domínio em questão é crucial para que o teorema valha. As propriedades essenciais de D^2 são a sua convexidade e a compacidade. Com efeito, tirando a convexidade, note que $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, dada por $A(x) = -x$ não possui pontos fixos. Além disso, se $g : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$, com $g(x) = \frac{x^2+1}{2}$, note que g também não possui pontos fixos, apesar de $[0, 1)$ ser convexo. De fato, em [8] podemos encontrar uma versão ainda mais geral que, inclusive, tem o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer como um caso particular:

Teorema 3.5. (Teorema do Ponto Fixo de Schauder, [8, Tm. 3.1, pág. 167]). *Seja E um espaço vetorial normado, $K \subset E$ compacto convexo. Então qualquer função aplicação contínua $T : K \rightarrow K$ tem um ponto fixo.*

3.3 Teorema de Separação de Jordan

O Teorema da Curva de Jordan é um dos teoremas mais intuitivos e simples para se explicar e ilustrar. Basicamente, ele nos diz que dada uma curva fechada e simples (sem auto-interseções) no plano \mathbb{R}^2 , tal curva divide o plano em dois pedaços: a parte de “dentro” da curva e a parte de “fora”. Veja por exemplo na Figura 18, em que temos uma circunferência C . Contudo, mesmo em casos mais simples, como quando a curva em questão é suave, a demonstração deste fato é completamente não trivial. Em [10], por exemplo, é feita a demonstração do Teorema de Jordan quando a curva é de classe C^2 .

Isto ocorre porque mesmo no caso em que a curva é suave, podem aparecer comportamentos bem mais complicados do que podemos imaginar. Veja por exemplo a Figura 19.

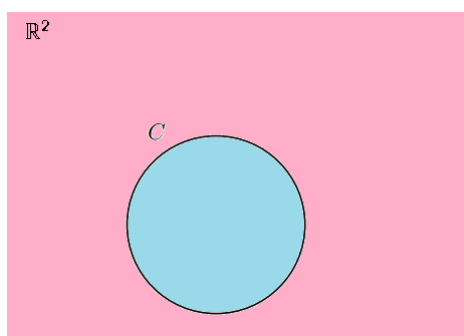


Figura 18: “Divisão do plano determinada pela curva C ”.
 Fonte: Elaborada pelo autor.



Figura 19: “ P está do lado de ‘dentro’ ou de ‘fora’ da curva”.
 Fonte: [10, Fig.4.1].

Ora, no caso em que a curva dada é suave se tem que a demonstração é não trivial. Deste modo, se apenas contínua, tem-se em mãos um problema ainda mais delicado, uma vez que podem aparecer curvas contínuas completamente exóticas. Veja por exemplo a Figura 21 e recorde também da Observação 2.2.

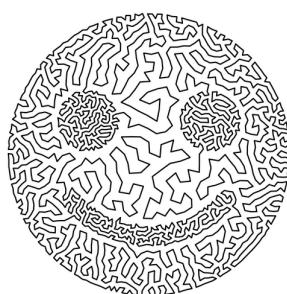


Figura 20: “Uma curva contínua exótica e feliz”.
 Fonte: <https://www2.oberlin.edu/math/faculty/bosch/making-tspart-page.html>

Com os resultados já estabelecidos, seremos capazes de provar, usando de poucas técnicas, o Teorema de Separação de Jordan, que é uma versão mais fraca do Teorema da Curva de Jordan.

Definição 3.5. Uma curva fechada simples é um espaço que é homeomorfo ao círculo unitário \mathbb{S}^1 .

Ou seja, por definição, um laço que não possui auto-interseção é uma curva fechada simples.

Proposição 3.6. Seja X um espaço topológico. A seguinte relação é uma relação de equivalência:

$$x \sim y \iff x \text{ e } y \text{ estão no mesmo subconjunto conexo de } X. \quad (2)$$

Definição 3.7. Se X é um espaço conexo e $A \subset X$, diremos que A separa X se $X \setminus A$ não é conexo; se $X \setminus A$ tem n componentes conexas, dizemos que A separa X em n componentes.

Definição 3.8. Considere a relação de equivalência entre elementos de X que estão no mesmo subconjunto conexo de X . As componentes conexas de X são as classes de equivalência sobre a relação de equivalência definida em (2).

Indo em direção à prova do principal resultado desta seção, provemos o seguinte resultado auxiliar:

Lema 3.9. Sejam $a, b \in \mathbb{S}^2$, A um conjunto compacto e $f : A \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$ um mapa contínuo. Se a e b estão na mesma componente em $\mathbb{S}^2 \setminus f(A)$, então f é homotópica a zero.

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que $a = (0, 0, 1)$. Então, via projeção estereográfica P , $\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}$ é homeomorfo a \mathbb{R}^2 . Além disso, considere o mapa $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x) = x - P(b)$. Como T é uma translação de \mathbb{R}^2 , segue que é um homeomorfismo. Logo, o mapa $T \circ P$ é um homeomorfismo de $\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}$ para \mathbb{R}^2 tal que leva b para a origem. Denotemos $\phi = T \circ P$ e seja $g = \phi \circ f$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \phi = T \circ P & & \\
 & & & & \curvearrowright & & \\
 A & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\} & \xrightarrow{i} & \mathbb{S}^2 \setminus \{a\} & \xrightarrow{P} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^2 \\
 & & & & \curvearrowleft & & & & \\
 & & & & \phi = T \circ P & & \\
 & & & & \curvearrowright & & \\
 & & & & g = \phi \circ f & &
 \end{array}$$

Uma vez que A é compacto e g é contínua, $g(A)$ é compacto e portanto $\mathbb{R}^2 \setminus g(A)$ é aberto. Como \mathbb{R}^2 é localmente conexo por caminhos, $\mathbb{R}^2 \setminus g(A)$ também o é. Logo, por [1, Tm. 25.5], as componentes conexas e componentes conexas por caminhos de $\mathbb{R}^2 \setminus g(A)$ são as mesmas.

Como $g(A)$ é compacto, podemos encontrar uma bola B grande o suficiente de modo que $g(A) \subset B$. Tome um ponto p fora da bola B . Então, $\phi^{-1}(p)$ estará em uma vizinhança de a , uma vez que a corresponde ao “ponto no infinito”. Além disto, segue que $\phi^{-1}(p)$ estará fora de $f(A)$, na mesma componente que a . Assim, p e a origem $0 = \phi(b)$ estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus g(A)$.

Agora, seja α um caminho de 0 a p na componente conexa por caminhos em que 0 e p estão. Defina $k : A \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ pela equação $k(x) = g(x) - p$. Mostremos que g é homotópica a k . Considere o seguinte mapa $G : A \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tal que

$$G(x, t) = g(x) - \alpha(t).$$

Note que $G(x, t) \neq 0$, para quaisquer que sejam x e t , pois α não intersecta $g(A)$. Além disso, note que G é contínua, $G(x, 0) = g(x)$ e $G(x, 1) = k$, logo é uma homotopia entre g e k .

Mostraremos ainda que k é homotópica a zero. Considere o mapa $K : A \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dado por

$$K(x, t) = (1 - t)g(x) - p.$$

Uma vez que $(1 - t)g(x) \in B$ para todo $x \in A$ e $p \notin B$, segue que $K(x, t) \neq 0$. É claro que K é contínua, $K(x, 0) = k(x)$ e $K(x, 1) = p$. Desta forma k é homotópica a zero e assim g também o é.

Por fim, seja H homotopia entre g e o mapa constante, então $\phi^{-1} \circ H$ é uma homotopia entre f e o mapa constante e isto nos mostra que f é homotópica a zero.

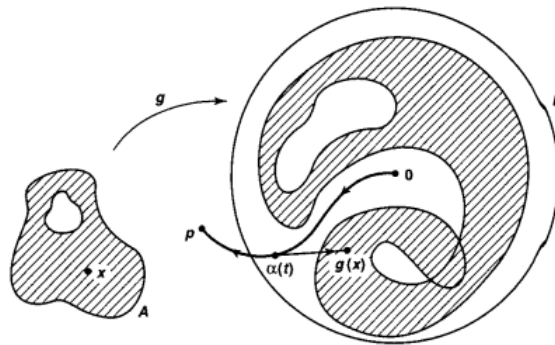


Figura 21:
Fonte: [1, Fig. 61.2].

□

O próximo lema trata-se de um caso particular do Teorema de Seifert-van Kampen, o qual para mais detalhes o leitor pode consultar [1].

Lema 3.10. *Sejam X um espaço topológico e U, V abertos em X tais que $U \cup V = X$ e $U \cap V$ é não vazio e conexo por caminhos. Considere $x_0 \in U \cap V$, e as inclusões i e j de U e V em X , respectivamente. Então, $\pi_1(X, x_0)$ é gerado pelo conjunto $i_*(\pi_1(U, x_0)) \cup j_*(\pi_1(V, x_0))$.*

Demonstração. Veja [1, Tm. 59.1]. Seja $f : [0, 1] \rightarrow X$ um laço em X com ponto base x_0 . Como U e V são abertos e f é contínua segue que $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ são abertos em $[0, 1]$. Uma vez que todo aberto de \mathbb{R} pode se escrever com a união enumerável de intervalos abertos disjuntos, segue que:

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} (a_i, b_i) \quad \text{e} \quad f^{-1}(V) = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} (c_j, d_j).$$

Da compacidade de $[0, 1] \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, podemos extrair uma quantidade finita de intervalos (a_i, b_i) e (c_j, d_j) que ainda cobre $[0, 1]$. Sendo $f(0) = f(1) = x_0 \in U \cap V$, a cobertura pode ser da forma:

$$\{[0, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, 1], [0, d_1), (c_2, d_2), \dots, (c_m, 1]\},$$

em que $b_1 < a_2 < b_2 < \dots < b_{n-1} < a_n$ e $d_1 < c_2 < d_2 < \dots < d_{m-1} < c_m$.

Daí, retiraremos desta cobertura os intervalos cuja imagem seja parte do laço f que está inteiramente contida em U , mas não em V , ou vice versa. Assim, teremos:

$$0 = a_1 < c_1 < b_1 < a_2 < d_1 < c_2 < b_2 < a_3 < d_2 < \dots < a_k < d_{k-1} < b_k = 1.$$

(Ou em algum outro caso se tenha algo da forma $\dots < c_k < b_k < d_k = 1$.)

Note que $(c_1, b_1) \cup (a_2, d_1) \cup \dots \cup (a_k, d_{k-1}) = f^{-1}(U \cap V)$. Agora, considere $\alpha_1 \in (c_1, b_1)$, $\alpha_2 \in (a_2, d_1)$, e assim sucessivamente até $\alpha_{2k-2} \in (a_k, d_{k-1})$. Então, para cada $1 \leq i \leq 2k-2$, $f(\alpha_i) \in U \cap V$ e

$$[0, \alpha_1] \subset f^{-1}(U), \quad [\alpha_1, \alpha_2] \subset f^{-1}(V), \dots, [\alpha_{2k-2}, 1] \subset f^{-1}(U).$$

Em virtude de que $U \cap V$ é conexo por caminhos, para cada α_i , existe um caminho g_i em $U \cap V$ conectando α_i a x_0 .

$$\begin{aligned} [f|_{[0, \alpha_1]} \star \gamma_1] &\in \pi_1(U, x_0) \\ [\overline{\gamma_1} \star f|_{[\alpha_1, \alpha_2]} \star \gamma_2] &\in \pi_1(V, x_0) \\ [\overline{\gamma_2} \star f|_{[\alpha_2, \alpha_3]} \star \gamma_3] &\in \pi_1(U, x_0) \\ &\vdots \\ [\overline{\gamma_{2k-2}} \star f|_{[\alpha_{2k-2}, 1]}] &\in \pi_1(U, x_0). \end{aligned}$$

Mas, note que, para cada i , $g_i \star \overline{g_i}$ é um caminho homotópico a zero pela homotopia de caminhos $\Gamma_i : I \times I \rightarrow U \cap V$ definida por:

$$\Gamma_i(x, t) = \begin{cases} g_i((1-t)x) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ \overline{g_i} & \text{se } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Logo,

$$[f|_{[0, \alpha_1]} \star \gamma_1] \star [\overline{\gamma_1} \star f|_{[\alpha_1, \alpha_2]} \star \gamma_2] \star [\overline{\gamma_2} \star f|_{[\alpha_2, \alpha_3]} \star \gamma_3] \star \dots = [f]$$

Portanto, f é homotópico ao produto dos laços com base em x_0 que estão em U ou em V , ou seja, $\pi_1(X, x_0)$ é gerado pelo conjunto $i_\star(\pi_1(U, x_0)) \cup j_\star(\pi_1(V, x_0))$. □

Agora vamos ao enunciado e prova do Teorema de Separação de Jordan.

Teorema 3.6. (Teorema de Separação de Jordan). Se C é uma curva simples fechada em \mathbb{S}^2 , então C separa \mathbb{S}^2 .

Demonstração. Assuma que possa ocorrer o contrário, i.e., suponha que exista uma curva fechada simples C em \mathbb{S}^2 tal que $\mathbb{S}^2 \setminus C$ seja conexo. Como $\mathbb{S}^2 \setminus C$ é aberto em \mathbb{S}^2 , logo ser conexo e conexo por caminhos são equivalentes. Suponhamos que $\mathbb{S}^2 \setminus C$ é conexo por caminhos.

Considere $a, b \in C$, e A_1 e A_2 dois arcos de C entre a e b (incluindo os extremos). Sejam $U = \mathbb{S}^2 \setminus A_1$ e $V = \mathbb{S}^2 \setminus A_2$, então

$$U \cup V = \mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\} \quad \text{e} \quad U \cap V = \mathbb{S}^2 \setminus C.$$

Afirmamos que $U \cap V = \mathbb{S}^2 \setminus C$ é não vazio. De fato, caso contrário, \mathbb{S}^2 seria homeomorfo a \mathbb{S}^1 pela definição de curva simples fechada, o que implicaria num isomorfismo entre os grupos fundamentais de \mathbb{S}^1 e \mathbb{S}^2 , o que seria uma contradição, pois $\pi_1(\mathbb{S}^1, x) \approx (\mathbb{Z}, +)$ (Teorema 1.5), enquanto que $\pi_1(\mathbb{S}^2, x) \approx \{[e_x]\}$ (Teorema 2.2).

Seja $x_0 \in U \cap V$ e considere a inclusão $i : U \rightarrow U \cup V$. Tal mapa induz um homomorfismo de $\pi_i(U, x_0)$ para $\pi_1(U \cup V, x_0)$.

Tome $f : [0, 1] \rightarrow U$ um laço em U com base em x_0 . Além disso, seja $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ o mapa dado por $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$. Note que p é contínuo e é uma bijeção exceto pelos pontos 0 e 1. Daí, considere o mapa $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow U$ induzido por p

$$h(x) = \begin{cases} f(0) & \text{se } x = (1, 0) \\ f(p^{-1}(x)) & \text{se } x \neq (1, 0). \end{cases}$$

Deste modo, temos $f = h \circ p$. Considere o mapa $i \circ h : \mathbb{S}^1 \rightarrow U \cup V$. A imagem de \mathbb{S}^1 por $i \circ h$ é $f([0, 1])$, o que não intersecta a componente contendo A_1 . Mas, $a, b \in A_1$, i.e., a e b estão na mesma componente conexa, logo pelo Lema 3.9, $i \circ h$ é homotópica a 0. Ora, $i \circ h$ é um mapa entre \mathbb{S}^1 e $U \cup V$, logo pelo Lema 3.2, $(i \circ h)_*$ é o homomorfismo trivial. Portanto,

$$i_*([f]) = [i \circ f] = [(i \circ h) \circ p] = (i \circ h)_*([p]) = [e].$$

Portanto, i_* é o homomorfismo trivial. De modo análogo, a inclusão $j : V \rightarrow U \cup V$ também induz o homomorfismo trivial. Assim, aplicando o Lema 3.10, obtemos que $U \cup V = \mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$ é simplesmente conexo. Contudo, $\mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$ é homeomorfo ao plano furado $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e assim, pelo Corolário 1.31 e a Proposição 1.32, o grupo fundamental de $\mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$ é não trivial, o que é uma contradição. Portanto, C separa \mathbb{S}^2 . \square

Teorema 3.7. Sejam A_1 e A_2 subconjuntos conexos e fechados de \mathbb{S}^2 cuja interseção consiste precisamente em dois pontos a e b . Então, o conjunto $C = A_1 \cup A_2$ separa \mathbb{S}^2 .

Demonstração. Note que C não pode ser igual a \mathbb{S}^2 , pois $\mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$ é conexa e $C \setminus \{a, b\}$ não é um espaço conexo, uma vez que $A_1 \setminus \{a, b\} \cup A_2 \setminus \{a, b\} = C \setminus \{a, b\}$ é uma cisão.

O resto da prova é uma cópia da prova do Teorema 3.6. \square

Aplicação 3.11. O subespaço C de \mathbb{S}^2 homeomorfo subconjunto A de \mathbb{R}^2 formado pela união do seno topológico e dos segmentos $\overline{(0, -1)(0, -2)}$, $\overline{(0, -2)(1, -2)}$ e $\overline{(1, -2)(1, \sin 1)}$ (Figura 22), separa \mathbb{S}^2 . De fato, basta notar que

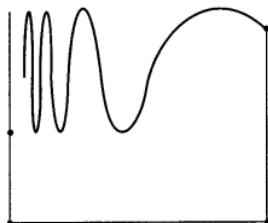


Figura 22:
Fonte: [1, Fig. 61.4].

Demonstração. Seja A_1 a curva do seno topológico e A_2 a união dos segmentos $\overline{(0, -1)(0, -2)}$, $\overline{(0, -2)(1, -2)}$ e $\overline{(1, -2)(1, \sin 1)}$. O conjunto A_1 é conexo por [1, Ex. 24.7] e A_2 é conexo por ser a justaposição de segmentos que, por sua vez, são imagens contínuas de intervalos de \mathbb{R} . Tais conjuntos também são fechados. Além disso, temos:

$$A_1 \cap A_2 = \{(0, -1), (1, \sin 1)\}.$$

Portanto, as condições do Teorema 3.7 são satisfeitas, donde segue o resultado. □

3.4 Teorema da Invariância do Domínio

Nesta seção iremos apresentar uma demonstração do Teorema da Invariância do Domínio em sua versão unidimensional e bidimensional. Em sua versão mais geral, este resultado nos diz que dado um aberto U de \mathbb{R}^n e uma aplicação contínua injetiva $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, o conjunto $f(U)$ também é um aberto. A prova desta versão necessita de um pouco mais de teoria, pois é necessário entrar nos domínios da homologia.

Cabe ressaltar que tal resultado é de caráter fundamental para a topologia, pois, por exemplo, com ele podemos garantir a boa definição da dimensão de uma variedade topológica, que é essencial para o estudo da topologia das variedades.

Para provarmos a versão unidimensional, não é necessário nenhuma das ideias apresentadas ao longo destas notas. Usando apenas das noções básicas da topologia da reta, podemos apresentar uma prova deste fato.

Teorema 3.8. (Invariância do Domínio em \mathbb{R}). *Seja U um subconjunto aberto de \mathbb{R} . Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é injetiva e contínua, então a imagem $f(U)$ é um aberto de \mathbb{R} e $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ é também é contínua e, portanto, f é um homeomorfismo sobre a imagem.*

Demonstração. Como sabemos, dado um aberto U de \mathbb{R} , podemos escrevê-lo como uma união enumerável disjunta de intervalos abertos. Assim, escrevamos como $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ tal união. Logo, se mostrarmos que o teorema é verdadeiro em qualquer um destes abertos, o mesmo valerá para U .

Então, suponha sem perda de generalidade que U é um intervalo aberto de \mathbb{R} . Ora, sendo f contínua e U um intervalo, segue que $f(U)$ também é um intervalo de \mathbb{R} . Ponhamos $f(U) = J$. Como sabemos, J é da forma (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$ ou $[a, b]$, em que $a, b \in \mathbb{R}$.

Mostremos que J é aberto. Suponhamos, por contradição, que J seja da forma $[a, b)$ e consideremos a pré-imagem $f^{-1}(a) = \alpha$. Uma vez que $\alpha \in U$ e U é um aberto, existe uma vizinhança V de α em U . Agora, sejam $x, y \in V$ tais que $x < \alpha < y$. Desde que α é um ponto no extremo esquerdo do intervalo J e f é injetora, segue que $f(x) > a$ e $f(y) > a$. Donde, suponhamos $f(y) > f(x)$, i.e., $a < f(x) < f(y)$. Daí, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $z \in (\alpha, y)$ de tal forma que $f(z) = f(x)$. O que é uma contradição com a injetividade de f .

Consequentemente, J é um intervalo aberto à esquerda. Analogamente, se pode mostrar que também é aberto à direita. Portanto, $J = f(U)$ é um aberto, donde segue o resultado. \square

Infelizmente a prova acima não pode ser generalizada imediatamente para $n = 2$, pois não temos uma ordem natural em \mathbb{R}^2 . Para que possamos provar a versão bidimensional do Teorema de Invariância do Domínio precisaremos das ideias aprenadas ao longo destas notas.

Lema 3.12. (Lema de Extensão). *Sejam X um espaço topológico tal que $X \times [0, 1]$ é normal, A um fechado de X e $f : A \rightarrow Y$ um mapa contínuo em que $Y \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto de \mathbb{R}^2 . Se f é homotópica a 0, então f pode ser estendida para uma função contínua $F : X \rightarrow Y$ que também é homotópica a 0.*

Demonstração. Suponha que f é homotópica a $y_0 \in Y$ e seja $F : A \times [0, 1] \rightarrow Y$ a homotopia entre f e y_0 , i.e., $F(a, 0) = f(a)$ e $F(a, 1) = y_0$, para todo $a \in A$. Sendo $F(x, 1) = y_0$, para todo $x \in X$, então F é um mapa contínuo definido no fechado $(A \times [0, 1]) \cup (X \times \{1\})$ de $X \times [0, 1]$. Agora pelo Teorema de Extensão de Tietze, nós podemos estender F para um mapa contínuo $G : X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Contudo, o que deixamos é um mapa contínuo g de X em Y . Vamos contruí-lo a partir do mapa G .

Considere $U = G^{-1}(Y)$ e note que U é um aberto que contém o subespaço $(A \times [0, 1]) \cup (X \times \{1\})$. Para cada $a \in A$, tome uma vizinhança retangular de (a, t) contida em U , para cada $t \in [0, 1]$. Sendo $\{a\} \times [0, 1]$ um compacto, desta coleção podemos extrair uma subcoleção finita cobrindo $\{a\} \times [0, 1]$. Projetando esta subcoleção de abertos em X e tomando as interseções destas projeções, obtemos um aberto W_a de tal forma que $W_a \times [0, 1]$ contido em U . Agora, ponha

$$W = \bigcup_{a \in A} W_a$$

e veja que W é um aberto em $A \times [0, 1] \subset W \times [0, 1] \subset U$. Como X é homeomorfo ao subespaço $X \times \{0\}$ de $X \times [0, 1]$, que é normal por hipótese, pelo Lema de Urysohn, existe uma função contínua $\phi : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\phi(x) = 0$, para qualquer que seja o $x \in X \setminus W$ e $\phi(y) = 1$, para todo $y \in A$.

Daí, definamos $g : X \rightarrow Y$ como $g(x) = G(x, \phi(x))$. Logo, g é uma extensão de f em Y e o mapa $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ dado por

$$H(x, t) = G(x, (1 - t) \cdot \phi(x) + t)$$

é uma homotopia entre g e o mapa constante. □

Lema 3.13. (Lema de Borsuk). *Sejam $a, b \in \mathbb{S}^2$, A um compacto e $f : A \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$ um aplicação injetora contínua. Se f é homotópica a 0, então a e b estão na mesma componente de $\mathbb{S}^2 \setminus f(A)$.*

Demonstração. Como A é um compacto e f é contínua, $f(A)$ é um compacto em $\mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$. Uma vez que $f(A)$ é um subespaço de \mathbb{S}^2 , então f é uma bijeção contínua de A em $f(A)$. Toda função contínua injetora definida num compacto é um homeomorfismo sobre a imagem, logo A é homeomorfo a $f(A)$.

Seja $F : A \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$ é uma homotopia entre f e a constante c . Daí, seja $G : f(A) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$ dado por $G(x, t) = F(f^{-1}(x), t)$ é uma homotopia entre a aplicação de inclusão $i : f(A) \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{a, b\}$ e a aplicação constante.

Recordemo-nos que o homeomorfismo ϕ usado na prova do Lema 3.9 que mapeia $\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}$ no plano \mathbb{R}^2 . Usando este homeomorfismo, podemos reduzir a este Lema ao seguinte:

Se A é um subespaço compacto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e o mapa inclusão $i : A \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é homotópico a zero, então 0 está em uma componente ilimitada de $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Provemos por contradição. Seja D uma componente conexa em que $0 \in D$ e D é limitada. Considere E a união das outras componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus A$, e note que $\mathbb{R}^2 \setminus A = D \cup E$, em que D e E são disjuntos.

Uma vez que a aplicação inclusão $i : A \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é homotópica a 0, pelo Lema 3.12, i pode ser estendida para uma aplicação contínua $j : A \cup D \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ que também é homotópica a 0. Veja que $j|_A = i$ é ainda a aplicação inclusão que mapeia todo elemento de A no próprio A . Agora, podemos estender este mapa para $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, pondo $k(x) = x$, para todo $x \in A \cup E$. Sendo $k|_{A \cup E}$ a aplicação identidade, $k|_{A \cup D} = j$ que também é contínua, com D e E disjuntos, segue que k é contínua.

Daí, seja B a bola fechada centrada em 0 com raio R grande o suficiente para que contenha $A \cup D$. Note que $k|_B : B \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é uma aplicação contínua na fronteira de B , que denotaremos por ∂B , e que $k|_{\partial B}$ é a identidade porque D é aberto mas B é fechado. Definamos $g : D^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ por:

$$g(x) = \frac{k(Mx)}{\|k(Mx)\|}.$$

Portanto, g é uma retração de D^2 sobre \mathbb{S}^1 , o que contradiz o Lema 3.4. □

Vale a pena observar que o Lema 3.13 são permance válido se retirarmos a hipótese de injetividade da f .

Exemplo 3.14. *Considere a \mathbb{S}^2 e sejam $a = (0, 0, 1)$, $b = (0, 0, -1)$ e $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^2$, dada por $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$. A aplicação f é homotópica a 0 via a homotopia $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^2$, definida por $H(t, u) = (\cos(u2\pi t), \sin(u2\pi t), 0)$. Por outro lado, note que $f([0, 1])$ é o equador no plano xy , logo separa os pontos a e b em componentes conexas distintas. Isto ocorre porque f não é injetora, em virtude de que $f(0) = f(1)$.*

Com estes resultados auxiliares em mãos, temos condições de provar o Teorema da Invariância do Domínio em \mathbb{R}^2 .

Teorema 3.9. (*Invariância do Domínio*). *Seja U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma injeção contínua. Então $f(U)$ é aberto e $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ é contínuo, isto é, f é um homeomorfismo entre U e $f(U)$.*

Demonstração. Em vez de provar o teorema diretamente, primeiro queremos mudar para a versão \mathbb{S}^2 e mostrar a seguinte afirmação:

Se U é um subconjunto aberto de \mathbb{S}^2 e $f : U \rightarrow \mathbb{S}^2$ é contínuo e injetivo, então $f(U)$ é aberto em \mathbb{S}^2 e f é um homeomorfismo entre U e $f(U)$.

Primeiro queremos olhar para uma bola fechada arbitrária $B \subset U$. Afirmamos que $f(B)$ não separa \mathbb{S}^2 .

Como B é fechado e U é aberto, então $B \subsetneq U$ e como f é injetivo, $f(B) \subsetneq f(U)$. Portanto, podemos encontrar dois pontos $a, b \in \mathbb{S}^2 \setminus f(B)$. Seja c o centro da bola B , então o mapa $F : B \times [0, 1] \rightarrow f(B)$ dado pela equação

$$F(x, t) = f((1-t)(x-c) + c)$$

é uma homotopia entre $f|_B$ e o mapa constante, ou seja, $f|_B$ é homotópica a 0. Agora, pelo Lema de Borsuk (Lema 3.13), deduzimos que a e b estão na mesma componente de $\mathbb{S}^2 \setminus f(B)$. Isso é verdade para todo $a, b \in \mathbb{S}^2 \setminus f(B)$, portanto $f(B)$ não se separa.

Agora vamos considerar o interior B° de uma bola fechada $B \subset U$. Afirmamos que $f(B^\circ)$ é aberta em \mathbb{S}^2 .

O espaço $C = f(\partial B)$ é uma curva fechada simples em \mathbb{S}^2 , portanto, pelo Teorema da Separação de Jordan (Teorema 3.6), ele separa \mathbb{S}^2 . Observe que B° é conexo e a imagem contínua de um conjunto conexo é conexo, portanto $f(B^\circ)$ também é conexo e deve estar em uma componente conexa de $\mathbb{S}^2 \setminus C$. Seja V a componente de $\mathbb{S}^2 \setminus C$ que contém $f(B^\circ)$ e seja W a união das outras componentes. Como $\mathbb{S}^2 \setminus C$ é localmente conexo, V e W são subconjuntos disjuntos abertos de \mathbb{S}^2 . Agora queremos mostrar $V = f(B^\circ)$.

Suponha que não e seja a um ponto em $V \setminus f(B^\circ)$. Escolha um ponto b em W . Observe que B não separa \mathbb{S}^2 , portanto a e b estão no conjunto conexo $\mathbb{S}^2 \setminus f(B)$. Mas $\mathbb{S}^2 \setminus f(B)$ é um subconjunto de $\mathbb{S}^2 \setminus C$, portanto a e b estão na mesma componente conexa, contradizendo a escolha de a e b . Portanto, $V = f(B^\circ)$.

Agora mostramos que f mapeia vizinhanças abertas para vizinhanças abertas e, portanto, é um mapeamento aberto e como é injetivo, seu inverso existe e, portanto, f é um homeomorfismo entre U e $f(U)$.

Agora segue a afirmação original. Sabemos que \mathbb{R}^2 é homeomórfico a $\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}$ para um ponto arbitrário a de \mathbb{S}^2 . Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{a\}$ tal homeomorfismo. Para um conjunto aberto U em \mathbb{R}^2 , é homeomórfico a um conjunto aberto $g(U)$ em \mathbb{S}^2 . Agora considere o mapa

$$g \circ f \circ g^{-1} : g(U) \rightarrow g(f(U)) \subset \mathbb{S}^2.$$

É contínuo e injetivo e, portanto, pelo que provamos acima, é um mapa aberto. Portanto $g(f(U))$ é aberto. Mas como g é um homeomorfismo, concluímos que $f(U)$ é aberto em \mathbb{R}^2 e f é um homeomorfismo entre U e $f(U)$. \square

Referências Bibliográficas

- [1] Munkres, J. R., *Topology*, Prentice Hall, 2000.
- [2] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.
- [3] May, J. P., *A Concise Course in Algebraic Topology*, University of Chicago Press, 1999.
- [4] de Saint-Gervais, H. P., *Analysis Situs: Topologie algébrique des variétés*. **Disponível em:** <https://analysis-situs.math.cnrs.fr/#> .
- [5] de Saint-Gervais, H. P., *La genèse du groupe fondamental chez Poincaré*. **Disponível em:** <https://analysis-situs.math.cnrs.fr/La-genese-du-groupe-fondamental-chez-Poincare.html>.
- [6] Lima, E. L., *grupo fundamental e espaços de recobrimento*, Impa, 2018.
- [7] Milnor, J., *Analytic proofs of the “hairy ball theorem” and the Brouwer fixed point theorem*, American Mathematical Monthly, vol. 85, pags. 521-524.
- [8] Honig, C. S., *Aplicações da Topologia à Análise*, Livraria da Física, São Paulo, 2011.
- [9] Rogers, C. A., *A less strange version fo Milnor’s proof of Brouwer’s fixed point theorem*, American Mathematical Monthly, vol. 87 (1980), pags. 525-527.
- [10] Alencar, H.; Santos, W.; Neto, G. S., *Geometria Diferencial das Curvas no \mathbb{R}^2* . 1 ed, 2020, Rio de Janeiro, SBM.
- [11] Hamilton, R. S., *The Inverse Function Theorem of Nash and Moser*. Bulletin of American Mathematical Society, Volume 7, Number 1, July 1982.
- [12] Lima, E. L., *Espaços Métricos*. 5.ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2017.
- [13] Nash, J. F., *Equilibrium points in n-person games*. Proceedings of the national academy of sciences, 36(1), 48-49, 1950.
- [14] Nash, J. F., *Non-cooperative games*. Annals of Mathematics. Second Series 54, p. 286, 1951.