



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Graduação em Matemática

**A Multiplicidade de Interseção de curvas planas
singulares**

Dayanne Barbosa de Melo

João Pessoa
2024

Dayanne Barbosa de Melo

A Multiplicidade de Interseção de curvas planas singulares

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Coordenação de Curso de Licenciatura em
Matemática da Universidade Federal da Paraíba
como requisito para obtenção do título de licenciada em Matemática.

Orientador: Otoniel Nogueira da Silva

João Pessoa
2024

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M528m Melo, Dayanne Barbosa de.

A multiplicidade de interseção de curvas planas singulares / Dayanne Barbosa de Melo. - João Pessoa, 2024.

52 p. : il.

Orientação: Otoniel Nogueira da Silva.

TCC (Curso de Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN.

1. Singularidades. 2. Multiplicidade de interseção. 3. curvas planas. 4. Blow-up. I. Silva, Otoniel Nogueira da. II. Título.

UFPB/CCEN

CDU 51(043.2)

Dayanne Barbosa de Melo

A Multiplicidade de Interseção de Curvas Planas Singulares

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de licenciada em Matemática. Orientador: Otoniel Nogueira da Silva Aprovado em: 25/04/2024.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente



OTONIEL NOGUEIRA DA SILVA
Data: 23/05/2024 19:08:49-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Otoniel Nogueira da Silva
Orientador – UFPB Campus I

Documento assinado digitalmente



MIRIAM DA SILVA PEREIRA
Data: 24/05/2024 16:44:40-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Miriam da Silva Pereira
Avaliadora – UFPB Campus I

Documento assinado digitalmente



RICARDO BURITY CROCCIA MACEDO
Data: 27/05/2024 12:02:24-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Ricardo Burity Croccia Macedo
Avaliador – UFPB Campus I

“Lembre-se de toda tristeza e
frustração, e deixe-as ir.”

(Linkin Park, “Iridescent”, 2010)

Agradecimentos

Primeiramente, aos professores que contribuíram para o meu crescimento acadêmico, meu sincero reconhecimento. Em especial, dedico minha gratidão ao meu orientador, Prof. Otoniel Nogueira, por seu apoio constante, dedicação, motivação e paciência. Sua orientação foi essencial para o meu desenvolvimento ao longo desses quase dois anos de estudo.

Aos professores da banca examinadora, Miriam Pereira e Ricardo Burity, por dedicarem seu tempo e aceitarem examinar este trabalho.

Aos meus amigos, expresse minha profunda gratidão por cada momento compartilhado. Juntos, vivemos inúmeras experiências, repletas de risadas, solidariedade e apoio mútuo. Um agradecimento especial à Vitória Carolainy, cuja parceria e suporte foram fundamentais em diversos momentos.

Ao meu namorado, Assuério Cavalcante, dedico um agradecimento especial por seu amor, cuidado e apoio inestimável. Sua presença ao meu lado tem sido um verdadeiro porto seguro, e sou profundamente grata por tê-lo em minha vida.

À minha família, pelo apoio que me ofereceu, dentro de suas possibilidades. Em particular, à minha irmã Rayanne Barbosa, expresse minha admiração e gratidão por ser uma fonte de inspiração, mesmo sem estar ciente disso. Suas próprias batalhas e sua determinação em superá-las me fortaleceram diante das adversidades que enfrentei.

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo apresentar a noção de multiplicidade de interseção entre duas curvas planas singulares. Para isso, trabalhamos com o anel das séries de potências formais. Apresentamos o Teorema de Preparação de Weierstrass e algumas de suas consequências úteis para o desenvolvimento do trabalho. A partir deste resultado, podemos associar as séries de potências formais à pseudopolinômios, o que nos auxilia nos estudos destas séries. Além disso, introduzimos a parametrização de Puiseux que é uma ferramenta útil ao tratarmos da multiplicidade de interseção.

Ao falarmos sobre a multiplicidade de interseção entre duas curvas, abordamos sua definição, propriedades e alguns exemplos. Também enunciamos resultados que mostram diferentes formas de obter esta multiplicidade. Posteriormente, tratamos sobre resolução de singularidades apresentando o método do Blow-up. Definimos o Blow-up e expomos exemplos onde podemos visualizar o processo de resolução de singularidades de curvas.

Por fim, enunciamos e provamos a Fórmula de Noether, que relaciona a multiplicidade de interseção de curvas com a multiplicidade de interseção de seus Blow-ups.

Palavras-chave: Singularidades. Multiplicidade de interseção. Curvas planas. Blow-up.

Abstract

This work's main objective is to present the notion of multiplicity of intersection between two singular plane curves. For that, we consider the ring of formal power series. We present the Weierstrass Preparation Theorem and some of its useful consequences for the development of the work. From this result, we can associate formal power series with pseudopolynomials, which helps us in studies with these series. Furthermore, we introduce the Puiseux parameterization, which is a useful tool when dealing with intersection multiplicity.

When talking about the multiplicity of intersection between two curves, we cover its definition, properties and some examples. We also present results that show different ways of obtaining this multiplicity. Subsequently, we discuss the resolution of singularities by Blow-up. We define Blow-up and present examples where we can visualize the resolution of singularities process.

Finally, we enunciate and prove Noether's Formula, which relates the multiplicity of intersections of curves with the multiplicity of intersections of their Blow-ups.

Keywords: Singularities. Intersection multiplicity. Plane curves. Blow-up.

Sumário

Introdução	9
1 Preliminares	12
1.1 Anéis de Séries de Potências Formais	12
1.2 O Teorema de Preparação de Weierstrass	15
1.3 Curvas algébricas planas	18
1.4 Parametrização de Puiseux	19
2 Multiplicidade de Interseção de curvas planas	22
2.1 O anel local de uma curva plana	23
2.2 Um pouco de Álgebra Linear	25
2.3 A Multiplicidade de Interseção	26
3 Resolução de Singularidades de curvas planas	38
3.1 Blow-up	38
3.2 A Fórmula de Noether	46
Referências Bibliográficas	51

Introdução

O objetivo deste trabalho é introduzir o estudo local das singularidades de curvas planas do ponto de vista algébrico. O tema singularidades de curvas motiva há mais de um século inúmeros trabalhos de pesquisa e ainda é um campo fértil de investigação.

Para motivar a estrutura na qual nos colocaremos, suponhamos que um polinômio não constante $f(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ seja dado e consideremos a curva plana algébrica complexa

$$C = C_f = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; f(x, y) = 0\}.$$

O estudo local da curva C na vizinhança de um ponto $P = (a, b) \in C$ depende se a curva é regular ou singular em P .

No caso em que C é regular em P , isto é, quando as derivadas parciais f_X e f_Y não são simultaneamente zero em P , digamos $f_Y(P) \neq 0$, então o Teorema da Função Implícita nos diz que em uma vizinhança de P , podemos explicitar Y na relação $f(X, Y) = 0$, como uma série de potências em X convergente na vizinhança de $a \in \mathbb{C}$. Ou seja, numa vizinhança de P , a curva C é o gráfico de uma função analítica de uma variável.

Quando C é singular em P , isto é, quando $f(P) = f_X(P) = f_Y(P) = 0$. Newton, em 1676, propôs uma solução para o problema de expandir Y como uma série de potências com expoentes fracionários em X . O ponto de vista de Newton era puramente formal sem qualquer preocupação com a convergência das séries e sem se preocupar com funções multivaloradas que aparecem neste contexto, fatos que somente mais tarde seriam esclarecidas por Riemann e Puiseux. A abordagem de Newton foi construtiva, fornecendo um algoritmo para determinar tal expansão usando o que hoje é chamado de polígono de Newton da curva em P .

Em 1850, M.V. Puiseux publicou um artigo, onde estuda do ponto de vista de funções de uma variável complexa as soluções da equação $f(X, Y) = 0$, onde f é uma função polinomial em duas variáveis complexas, na vizinhança de um ponto arbitrário. Puiseux consegue justificar do ponto de vista analítico a manipulação de Newton sobre expoentes fracionários.

Quando a curva é regular, seu comportamento numa pequena vizinhança de P é inteiramente conhecido. Ela é localmente isomorfa à curva dada por $Y = 0$. Quando o ponto P é singular, a situação é bem diferente. Considere os seguintes exemplos: $f = Y^2 - X^3$ e $g = Y^2 - X^2(X+1)$, onde $P = (0, 0)$.

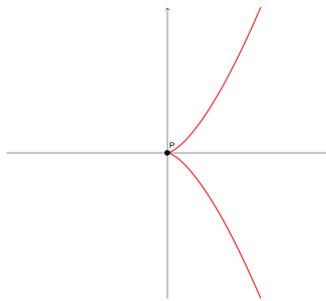


Figura 1: C_f

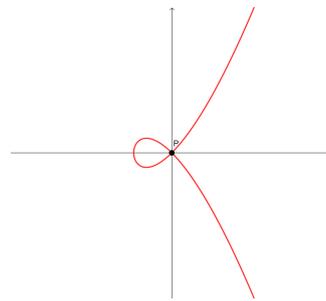


Figura 2: C_g

Como estudar uma curva em uma pequena vizinhança de um ponto singular? Em particular,

como poderíamos reconhecer algebricamente a redutibilidade local de uma curva singular, como por exemplo a curva acima C_g no ponto $P = (0, 0)$? O anel $\mathbb{C}[X, Y]$ não é adequado para isto, pois o polinômio g é irredutível nele. A ideia é ampliar o anel $\mathbb{C}[X, Y]$ de tal forma que a redutibilidade local de C_g em P apareça. Como primeira tentativa, podemos considerar o anel local

$$\mathbb{C}[X, Y]_{\mathfrak{M}} = \left\{ \frac{\varphi}{\psi}; \varphi, \psi \in \mathbb{C}[X, Y], \psi \notin \mathfrak{M} \right\},$$

onde $\mathfrak{M} = \langle X, Y \rangle$ é o ideal maximal de $\mathbb{C}[X, Y]$ correspondente ao ponto $P = (0, 0)$. Este é efetivamente um anel local, ou seja, um anel com um único ideal maximal, neste caso, $\langle X, Y \rangle \subset \mathbb{C}[X, Y]_{\mathfrak{M}}$, que em certo sentido contém informação localizada em $P = (0, 0)$ sobre todas as curvas que contêm P . Infelizmente, isso não é suficiente, pois g continua sendo irredutível neste anel.

Outra tentativa é completar o anel local $\mathbb{C}[X, Y]_{\mathfrak{M}}$ em relação à topologia associada ao seu ideal maximal, levando ao anel de séries de potências formais em duas variáveis $\mathbb{C}[[X, Y]]$, onde finalmente g se divide em dois fatores irredutíveis da seguinte forma:

$$g = (X + Y + \text{termos de grau} \geq 2)(X - Y + \text{termos de grau} \geq 2).$$

É neste anel que obtemos todas as informações algébricas infinitesimais sobre uma curva algébrica no ponto $P = (0, 0)$. Desta forma retomamos o ponto de vista de Newton.

De posse das considerações até agora expostas, este trabalho se concentrará no estudo da multiplicidade de interseção entre duas curvas planas singulares, além de abordar um método de resolução de singularidades. Para isso, será necessário o estudo de certos conceitos e resultados preliminares que servirão como preparo para lidar com os resultados principais. Dessa forma, o trabalho será dividido em três capítulos descritos a seguir.

Dedicaremos o Capítulo 1 ao estudo preliminar de conceitos essenciais. Iniciaremos apresentando o anel das séries de potências formais, caracterizaremos suas unidades, definiremos a forma inicial de um elemento deste anel e sua multiplicidade. Posteriormente, apresentaremos o Teorema de Preparação de Weierstrass e algumas de suas consequências. A partir deste resultado poderemos reduzir o estudo das séries de potências formais ao de pseudopolinômios, o que será de grande utilidade ao estudarmos a multiplicidade de interseção entre curvas dadas por séries de potências. Incluiremos também uma breve apresentação da parametrização de Puiseux.

No Capítulo 2, trataremos do nosso principal objeto de estudo, que é a multiplicidade de interseção entre curvas planas singulares. Este conceito nos permite medir o grau de contato entre duas curvas. Este grau de contato, do ponto de vista geométrico, pode ser visto como o número de interseções entre as curvas que surgem quando fazemos certas perturbações. Começaremos introduzindo o anel local de uma curva plana, explorando algumas de suas propriedades. Na sequência apresentaremos alguns resultados fundamentais de Álgebra Linear que serão úteis ao estudarmos a multiplicidade de interseção. Por fim, abordaremos a definição da multiplicidade de interseção entre duas curvas, suas principais propriedades e demonstraremos diferentes maneiras de obtê-la.

O capítulo 3 é dedicado à resolução de singularidades de curvas algébricas irredutíveis através de uma sequência de transformações quadráticas, que chamaremos do Blow-up. Desta forma, obtemos uma sequência finita de multiplicidades associadas a estas sucessivas transformações da

singularidade, denominada sequência de multiplicidades da singularidade. No final do capítulo enunciaremos e demonstraremos a Fórmula de Noether, mais um método para calcular a multiplicidade de interseção. Esta fórmula estabelecerá uma relação entre a multiplicidade de interseção de duas curvas com a multiplicidade das curvas obtidas após a aplicação do Blow-up.

1 Preliminares

Este capítulo tem por finalidade apresentar os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento do trabalho. Isso inclui a definição do anel das séries de potências formais, a multiplicidade de uma série, a definição de série regular, as propriedades do Anel das séries de potências formais, o Teorema da Preparação de Weierstrass, a definição de pseudopolinômio e, por fim, apresentaremos a Parametrização de Puiseux. Nossa abordagem se concentrará na exposição de conceitos, definições e resultados essenciais empregados neste trabalho. No entanto, os leitores mais interessados são encorajados a consultar a referência [1] para ter acesso a mais detalhes, bem como a outros resultados complementares.

1.1 Anéis de Séries de Potências Formais

Neste capítulo apresentamos os anéis de séries de potências formais e estudamos algumas de suas propriedades algébricas básicas.

Sejam K um corpo e X_1, \dots, X_r indeterminadas sobre K . Considere o conjunto $\mathcal{R} = \mathbb{K}[[X_1, \dots, X_r]]$ formado por todas as somas formais do tipo

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 + P_1 + P_2 + \dots,$$

onde P_i é polinômio homogêneo de grau i . Os elementos de \mathcal{R} são chamados de séries potências formais nas indeterminadas X_1, \dots, X_r , com coeficiente em \mathbb{K} .

Sejam $f, g \in \mathcal{R}$, definimos as seguintes operações:

$$\begin{aligned} f + g &= \sum_{i=0}^{\infty} (F_i + G_i), \\ fg &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j+k=i} (F_j G_k). \end{aligned}$$

Com estas operações \mathcal{R} é um anel comutativo com unidade. Tal anel é denominado **Anel das Séries de Potências Formais**.

O anel \mathcal{R} tem como subanel o corpo \mathbb{K} e o anel de polinômios $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_r]$.

Também podemos denotar os elementos de \mathcal{R} , mais explicitamente, da seguinte forma:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i_1 + \dots + i_r = i} a_{i_1} \dots a_{i_r} X_1^{i_1} \dots X_r^{i_r},$$

com $a_i \in \mathbb{K}$.

O anel das séries de potências formais possui unidades, isto é, elementos que são invertíveis. A seguinte proposição descreve condições necessárias e suficientes para que um elemento de \mathcal{R} seja invertível.

Proposição 1.1. Um elemento $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i X^i \in \mathcal{R}$ é invertível se, e somente se, $P_0 \neq 0$.

Demonstração. De fato, suponha que $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i X^i$ é invertível e seja $g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i X^i$ tal que $fg = 1$, isto é,

$$fg = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k+j=i} P_k Q_j = P_0 Q_0 + (P_0 Q_1 + P_1 Q_0) + \cdots = 1.$$

Neste caso, o sistema

$$\begin{cases} P_0 Q_0 = 1 \\ P_0 Q_1 + P_1 Q_0 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

tem solução dada por

$$\begin{cases} Q_0 = P_0^{-1} \\ Q_1 = P_0^{-1} (P_1 Q_0) \\ Q_2 = P_0^{-1} (P_2 Q_0 + P_1 Q_1) \\ \vdots \\ Q_n = P_0^{-1} (P_n Q_0 + P_{n-1} Q_1 + \cdots + P_1 Q_{n-1}) \\ \vdots \end{cases}$$

Reciprocamente, se $P_0 \neq 0$, então o sistema

$$\begin{cases} P_0 Q_0 = 1 \\ P_0 Q_1 + P_1 Q_0 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

tem solução. Assim, dada $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i X^i$, existe $g = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i X^i$ tal que $fg = 1$. Portanto, f é invertível. \square

Dois elementos $f, g \in \mathcal{R}$ serão chamados associados se existir uma unidade u tal que $f = ug$.

Exemplo 1.1. Dada $f = x + 2$, resolvendo o sistema construído na demonstração da Proposição 1.1 temos que

$$f^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^i}{2^{i+1}}.$$

A seguir, apresentaremos a definição para a multiplicidade de uma série de potência formal e, logo mais, algumas de suas propriedades.

Definição 1.1. Seja $f = P_n + P_{n+1} X + \cdots \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, com cada P_i sendo um polinômio homogêneo de grau i e $P_n \neq 0$. Chamamos P_n de forma inicial de f e o inteiro n de multiplicidade de f .

Denotaremos a multiplicidade de f por $\text{mult}(f)$ e, se $f = 0$, assumiremos que $\text{mult}(f) = \infty$.

Exemplo 1.2. Seja $f = \sum_{i=0}^{\infty} X^{i+2}Y^{3i}$. A forma inicial de f é X^2 e $\text{mult}(f) = 2$.

Proposição 1.2. Sejam $f, g \in \mathcal{R}$, temos que

1. $\text{mult}(fg) = \text{mult}(f) + \text{mult}(g)$;
2. $\text{mult}(f+g) \geq \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}$. A igualdade ocorre quando $\text{mult}(f) \neq \text{mult}(g)$.

Demonstração. Sejam $f = P_n + P_{n+1} + \dots$ e $g = Q_m + Q_{m+1} + \dots$ elementos de \mathcal{R} .

1. Então,

$$fg = (P_n + P_{n+1} + \dots)(Q_m + Q_{m+1} + \dots) = P_nQ_m + P_nQ_{m-1} + \dots + P_{n+1}Q_{m-1} + \dots$$

$$\text{Assim, } \text{mult}(fg) = \text{gr}(P_nQ_m) = nm = \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g).$$

2. Temos também que $f + g = P_n + P_{n+1} + \dots + Q_m + Q_{m+1} + \dots$

- Se $n < m$, então $\text{mult}(f + g) = n = \text{mult}(f)$.
- Se $n > m$, então $\text{mult}(f + g) = m = \text{mult}(g)$.
- Se $n = m$, então pode ocorrer $P_n + Q_m = 0$ e, neste caso, teremos $\text{mult}(f + g) \geq n = m = \text{mult}(f) = \text{mult}(g) = \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}$. De qualquer maneira, $\text{mult}(f + g) \geq \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}$.

□

Observação 1.1. O anel \mathcal{R} é um domínio de integridade. De fato, sejam $f, g \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Sendo $\text{mult}(f) < \infty$ e $\text{mult}(g) < \infty$, pelo item 1 da Proposição 1.2, teremos que $\text{mult}(fg) = \text{mult}(f) + \text{mult}(g) < \infty$. Portanto, $fg \neq 0$.

Denotemos por $\mathfrak{M}_{\mathcal{R}} = \langle X_1, \dots, X_r \rangle$ o ideal de \mathcal{R} gerado por X_1, \dots, X_r . De modo geral, denotaremos por $\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}^i$ a i -ésima potência de $\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}$. Note que $f = P_0 + P_1 + P_2 + \dots \in \mathcal{R}$ se $P_0 = 0$; $f \in \mathfrak{M}_{\mathcal{R}}^2$ se $P_0 = P_1 = 0$; $f \in \mathfrak{M}_{\mathcal{R}}^i$ se $P_0 = P_1 = \dots = P_{i-1} = 0$. Além disso, $\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}$ é o único ideal maximal de \mathcal{R} , o que mostraremos no próximo resultado.

Proposição 1.3. O ideal $\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}$ é o único ideal maximal de \mathcal{R} e é tal que

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{M}_{\mathcal{R}}^i = \{0\}.$$

Demonstração. Primeiro, mostremos que $\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}$ é ideal maximal. De fato, suponha que existe um ideal $I \subset \mathcal{R}$ de modo que

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{R}} \subseteq I \subset \mathcal{R}, \text{ com } I \neq \mathfrak{M}_{\mathcal{R}}.$$

Então existe $p \in I$ tal que $p \notin \mathfrak{M}_{\mathcal{R}}$, ou seja, $p = P_0 + P_1 + P_2 + \dots$, com $P_0 \neq 0$. Assim, p é invertível e temos que $I = \mathcal{R}$. Logo, $\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}$ é ideal maximal de \mathcal{R} .

Agora, para mostrar a unicidade suponha que exista outro ideal maximal de \mathcal{R} , digamos J . Suponha também que existe um elemento $q = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots \in J$ tal que $q \notin \mathfrak{M}_{\mathcal{R}}$, ou seja, $Q_0 \neq 0$. Assim, temos que q é invertível. Sendo J um ideal, segue que $1 \in J$, logo $J = \mathcal{R}$, o que contradiz o fato de J ser um ideal maximal.

Por fim, observe que se todo $P_i, i \in \mathbb{N}$, é um polinômio homogêneo de grau i , então

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} P_i \in \mathfrak{M}_{\mathcal{R}}^j \Leftrightarrow P_0 = P_1 = \dots = P_{j-1} = 0.$$

Ou seja, dada $f = \sum_{j \in \mathbb{N}} P_j \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{M}_{\mathcal{R}}^i$, segue que

$$f = P_0 + P_1 + \dots \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{M}_{\mathcal{R}}^i \Leftrightarrow P_0 = P_1 = \dots = 0.$$

□

1.2 O Teorema de Preparação de Weierstrass

Nesta seção continuaremos a focar nas propriedades algébricas dos anéis de séries de potências formais. O nosso principal objetivo será apresentar o Teorema da Preparação de Weierstrass e sua prova, bem como algumas de suas consequências. Veremos que dada uma série $f \in \mathfrak{M}_{\mathcal{R}}$, que satisfaz certas condições, é possível escrevê-la como um pseudopolinômio.

Sejam \mathcal{R} o anel $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_r]$ e $\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}$ seu ideal máximo. Denotaremos \mathcal{R}' o anel $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_{r-1}]$ e por $\mathfrak{M}_{\mathcal{R}'}$ seu ideal máximo.

Definição 1.2. Um pseudopolinômio em X_r é uma série de potências em \mathcal{R} da forma

$$f(X_1, \dots, X_r) = X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + \dots + A^n \in \mathcal{R}'[X_r]$$

tal que $n \geq 1$ e $\text{mult}(A_i) \geq i$, para $i = 1, \dots, n$.

Para dar continuidade com os resultados, é necessário introduzir o conceito de regularidade em relação a uma variável indeterminada.

Definição 1.3. Uma série $f \in \mathcal{R}$ é regular de ordem m com relação à indeterminada X_j , se $(0, \dots, X_j, \dots, 0)$ é divisível exatamente por X_j^m .

Resumidamente, dizemos que f é regular em X_j quando f é regular com respeito a X_j de ordem $n = \text{mult}(f)$. Neste caso,

$$\text{mult}(f) = \text{mult}(f(0, \dots, X_j, \dots, 0)).$$

Exemplo 1.3. Seja $f(X, Y) = X^4 + Y^5 - 3X^4Y + 7X^2Y^4$. Como $f(0, Y) = Y^5$, então f é regular em Y de ordem 5. Em contrapartida, $f(X, 0) = X^4$ e temos que $\text{mult}(f(X, 0)) = \text{mult}(f)$, ou seja, f é regular em X .

A seguir enunciaremos o Teorema da Divisão que é um importante resultado da teoria de singularidades e será útil na prova do Teorema de Preparação de Weierstrass.

Teorema 1.1. (Teorema da Divisão) *Seja $F \in \mathfrak{M}_R \subset \mathcal{R}$, regular de ordem m com respeito à X_r . Dado algum $G \in \mathcal{R}$, existem $Q \in \mathcal{R}$ e $R \in \mathcal{R}'[X_r]$, com $R = 0$ ou $\deg_{X_r}(R) < m$, unicamente determinados por F e G tais que*

$$G = FQ + R,$$

onde Q e R são quociente e resto, respectivamente.

Demonstração. Veja Teorema 2.3 em [1]. □

Teorema 1.2. (Teorema de Preparação de Weierstrass) *Dada $F \in \mathcal{R}$, regular em relação a X_r , de ordem m . Então existem $U \in \mathcal{R}$ invertível e $A_1, \dots, A_m \in \mathfrak{M}_{R'}$, unicamente determinados por F , tais que*

$$F \cdot U = X_r^m + A_1 X_r^{m-1} + A_2 X_r^{m-2} + \dots + A_m.$$

Além disso, se F é regular em X_r , isto é, $\text{mult}(F) = m$, então $\text{mult}(A_i) \geq i$, para $i = 1, \dots, m$.

Demonstração. De fato, como $X_r^m \mid F(0, \dots, X_r^m, \dots, 0)$ então $F \in \mathfrak{M}_R$ e, pelo Teorema da Divisão, existem $Q \in \mathcal{R}$ e $R \in \mathcal{R}'[X_r]$ tais que $X_r^m = FQ + R$, com $\text{gr}_{X_r}(R) < m$ ou $R = 0$.

Como $X_r^m \mid F(0, \dots, X_r^m, \dots, 0)$, então X_r^m divide $X_r^m - (FQ)(0, \dots, X_r^m, \dots, 0) = R(0, \dots, X_r^m, \dots, 0)$. Como $\text{gr}_{X_r}(R) < m$, segue que $R(0, \dots, X_r^m, \dots, 0) = 0$ e, implica que, $Q(0, \dots, X_r^m, \dots, 0) \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Logo, Q é invertível.

Assim, tomando $Q = U$ e considerando $R = -(A_1 X_r^{m-1} + A_2 X_r^{m-2} + \dots + A_m) \in \mathcal{R}'[X_r]$, teremos

$$F \cdot U = X_r^m + A_1 X_r^{m-1} + \dots + A_m.$$

Agora, por outro lado, temos $F(0, \dots, X_r^m, \dots, 0)U(0, \dots, X_r^m, \dots, 0) = X_r^m + a_1(0)X_r^{m-1} + \dots + a_m(0)$ e como $X_r^m \mid F(0, \dots, X_r^m, \dots, 0)$ então $A_i(0, \dots, X_r^m, \dots, 0) = 0$, para todo i , e assim $A_i \in \mathfrak{M}_{R'}$, para $i = 1, \dots, m$.

Se F é regular em X_r , então

$$m = \text{mult}(f) = \text{mult}(FU) = \text{mult}(X_r^m + A_1 X_r^{m-1} + \dots + A_m).$$

Para que, de fato, isto ocorra devemos ter $\text{mult}(A_i X_r^{m-i}) \geq m$ para $i = 1, \dots, m$. Portanto, $\text{mult}(A_i) \geq i$. □

Nos teoremas anteriores note que é importante que F seja regular de ordem m em alguma das indeterminadas. Porém, tal condição não é tão restritiva como pode parecer à primeira vista, pois nem sempre isso ocorre. Assumindo \mathbb{K} um corpo infinito, veremos que através de um automorfismo linear em \mathcal{R} , podemos transformar uma série não regular em uma série regular em uma das indeterminadas.

Lema 1.1. *Sejam \mathbb{K} um corpo infinito e \mathcal{F} uma família finita de polinômios homogêneos não nulos em $\mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_r]$. Então existe uma transformação linear $T : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_r] \rightarrow \mathbb{K}[Y_1, \dots, Y_r]$ tal que para todo $F \in \mathcal{F}$ de grau n existe $c_F \neq 0$ tal que*

$$f(T(X_1, \dots, X_r)) = c_F X_r^m + (\text{termos de menor grau de } X_r).$$

Demonstração. Veja Lema 2.6 em [1] □

Obtemos imediatamente o seguinte corolário:

Corolário 1.1. *Seja \mathbb{K} um corpo infinito. Dada uma família finita \mathcal{F} de elementos não nulos em \mathcal{R} , existe um automorfismo linear T de \mathcal{R} tal que todos os elementos de $T(\mathcal{F})$ são regulares na última indeterminada.*

Demonstração. Veja Corolário 2.7 em [1] □

A partir do corolário acima obtemos o seguinte Corolário do Teorema da Preparação de Weierstrass.

Corolário 1.2. *Seja $F \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ uma série de multiplicidade n . Então existe um \mathbb{K} -automorfismo T de \mathcal{R} , uma unidade U e $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}'$ tais que $\text{mult}(A_i) \geq i$, para $i = 1, \dots, n$, e*

$$T(F) \cdot U = X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + \dots + A_n.$$

Exemplo 1.4. *Note que o polinômio $f = X^2 Y^3 + 2XY^2 + XY^2$ não é regular com relação a X ou Y . Agora, considere o automorfismo*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}[[X, Y]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[X, Y]] \\ X &\longmapsto X + Y \\ Y &\longmapsto Y \end{aligned}$$

Teremos que $\phi(f) = Y^5 + 3Y^3 + 3XY^2 + 2XY^4 + X^2Y^3$ é regular em Y de ordem 3.

O estudo de um polinômio é muito mais simples que o estudo de uma série de potências. Dessa forma, o pseudopolinômio $X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + A_2 X_r^{n-2} + \dots + A_n$ associado a F , após uma mudança linear de coordenadas, é considerado uma preparação de F para seu estudo. Tal mudança será de grande utilidade em diversos resultados ao longo do próximo capítulo, onde trataremos sobre a multiplicidade de interseção de curvas dadas por séries de potências.

Finalizamos a apresentação de consequências do Teorema de Preparação de Weierstrass com o seguinte resultado:

Corolário 1.3. (Teorema da Função Implícita) *Seja F um elemento de \mathcal{R} tal que $F(0, \dots, 0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial X_r}(0, \dots, 0) \neq 0$. Então existe*

$$\varphi(X_1, \dots, X_{r-1}) \in \mathfrak{M}_{\mathcal{R}'},$$

tal que

$$F(X_1, \dots, X_{r-1}, \varphi(X_1, \dots, X_{r-1})) = 0$$

como um elemento de \mathcal{R}' .

Demonstração. A condição $\frac{\partial F}{\partial X_r}(0, \dots, 0) \neq 0$ é equivalente a dizer que F é regular em X_r e de multiplicidade 1. Então, pelo Teorema de Preparação de Weierstrass $U \in \mathcal{R}$ tal que

$$F \cdot U = X_r + A_1, \text{ com } A_1 \in \mathfrak{M}_{\mathcal{R}'}.$$

O resultado segue tomando $\varphi(X_1, \dots, X_{r-1}) = -A_1$, e notando que $U(0, \dots, 0) \neq 0$. □

O resultado acima será útil para o entendimento da Parametrização de Puiseux que será apresentada posteriormente.

1.3 Curvas algébricas planas

Reservaremos esta seção para apresentar brevemente nosso objeto de estudo, as curvas algébricas planas e alguns outros conceitos relevantes para o desenvolvimento do trabalho.

Como mencionamos na introdução, o estudo das singularidades de uma curva plana algébrica ou de uma curva analítica em \mathbb{C}^2 , dada localmente por uma equação $f(X, Y) = 0$, onde f é uma função polinomial ou analítica, pode ser realizado estudando as propriedades algébricas de $f(X, Y)$ como um elemento de $\mathbb{K}[[X, Y]]$. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 1.4. *Uma curva algébrica plana (f) é a classe de equivalência de um elemento não invertível $f \in K[[X, Y]] \setminus \{0\}$, módulo a relação dos associados. Isto significa que*

$$(f) = \{u \cdot f; u \text{ é uma unidade em } \mathbb{K}[[X, Y]]\}.$$

Pela definição apresentada acima, temos que

$$(f) = (g) \iff \exists \text{ uma unidade } u \in \mathbb{K}[[X, Y]] \text{ tal que } g = u \cdot f.$$

Como a multiplicidade de uma série de potências formal é invariante por produto por uma unidade, podemos definir a multiplicidade de uma curva plana algébrica (f) como sendo a multiplicidade de f . Diremos que a curva (f) é *regular*, se $\text{mult}(f) = 1$. Quando $\text{mult}(f) > 1$, diremos que a curva é *singular*.

Além disso, diremos que (f) é *irreduzível* se a série de potências formal f é irreduzível em $\mathbb{K}[[X, Y]]$. Uma curva plana algébrica irreduzível também será chamada de *ramo*.

Seja (f) uma curva algébrica plana e considere a decomposição f em fatores irreduzíveis em $\mathbb{K}[[X, Y]]$,

$$f = f_1 f_2 \cdots f_r.$$

As curvas (f_j) , para $j = 1, \dots, r$ são chamadas de ramos da (f) . A curva (f) é *reduzível*, se $(f_i) \neq (f_j)$ para $i \neq j$, isto é, quando f_i e f_j não são associados se $i \neq j$.

Agora, seja (f) uma curva algébrica plana de multiplicidade n . Então,

$$f = F_n + F_{n+1} + \cdots,$$

onde cada F_i é um polinômio homogêneo em $K[X, Y]$ de grau i e $F_n \neq 0$. Chamaremos a curva (F_n) de *cone tangente* de (f) .

Observe que todo polinômio homogêneo com duas indeterminadas e coeficientes num corpo algebricamente fechado pode se decompor em fatores lineares, então podemos escrever

$$F_n = \prod_{i=1}^s (a_i X + b_i Y)^{r_i},$$

onde $\sum_{i=1}^s r_i = n$, $a_i, b_j \in K$, para $i, j = 1, \dots, s$, e $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$, se $i \neq j$. O cone tangente de (f) consiste nas formas lineares $(a_i X + b_i Y)$, $i = 1, \dots, s$, cada uma tomada com multiplicidade r_i , chamadas de *retas tangentes* de (f) . Se (f) tem multiplicidade 1, ou seja, (f) is regular, então o cone tangente (F_1) consiste em uma reta tangente de multiplicidade 1.

Exemplo 1.5. Seja $f(X, Y) = 4Y^2 - X^3$. A forma inicial de f é $f_2 = 4Y^2 = (0X + 2Y)^2$. O cone tangente da curva (f) é $(4Y^2)$ com retas tangentes $(2Y)$ de multiplicidade 2.

Finalizamos esta seção apresentando o Lema Unitangente, resultado que será útil mais adiante.

Lema 1.2. (Lema Unitangente) Seja $f \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ com $f(0, 0) = 0$ irredutível com multiplicidade n . Então a forma inicial de f é

$$f_n = (aX + bY)^n,$$

onde $a, b \in \mathbb{K}$ não são simultaneamente nulos.

Demonstração. Veja Corolário 3.15 em [1]. □

Observação 1.2. O Lema Unitangente nos diz que se f é irredutível, então o cone tangente a (f) consiste na única reta $(aX + bY)$. Em [1] é possível ver a prova do Lema Unitangente na característica zero, Porém, o resultado também é verdadeiro para qualquer corpo \mathbb{K} algebricamente fechado.

1.4 Parametrização de Puiseux

Agora, vamos introduzir, brevemente, a noção de parametrização de ramos planos. Esta ferramenta será uma aliada no estudo das propriedades das curvas.

Seja $f = F_n + F_{n+1} + \dots \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ uma série de potências irredutível de multiplicidade n . Pelo Lema Unitangente, temos que $F_n = (aX + bY)^n$, para certos $a, b \in \mathbb{K}$. Então f é regular em Y (quando $b \neq 0$) ou f é regular em X (quando $a \neq 0$). Se f é regular em Y , podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$f = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \dots + a_n(X) + Y^{n+1}h(X, Y), \quad (1)$$

com $a_i(X) \in \mathbb{K}[[X]]$, $\text{mult}(a_i(X)) \geq i$, para $i = 1, \dots, n$, $a_0(0) \neq 0$ e $h(X, Y) \in \mathbb{K}[[X, Y]]$.

Lema 1.3. Seja $f \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ uma série de potências irredutível de multiplicidade n e regular em Y escrita da forma (1). Então

$$\text{mult}(a_i(X)) \geq i \frac{\text{mult}(a_n(X))}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Seja f é irredutível de multiplicidade n e regular em Y da forma (1), considere $P(X, Y)$ o pseudopolinômio associado a f , isto é, $uf = Y^n + A_1(x)Y^{n-1} + \dots + A_n(X) = P(X, Y)$, e seja $\alpha = \varphi\left(X^{\frac{1}{n}}\right) \in K\left[\left[X^{\frac{1}{n}}\right]\right]$, com $n = \min\left\{q \in \mathbb{N}; \alpha \in K\left[\left[X^{\frac{1}{q}}\right]\right]\right\}$.

Pelo Corolário 1.3, $P(X, \alpha) = P\left(X, \varphi\left(X^{\frac{1}{n}}\right)\right) = 0$. Fazendo $t = X^{\frac{1}{n}}$, então $\varphi(T) \in \mathbb{K}[[T]]$ e $f(T^n, \varphi(T)) = 0$

Nesta situação dizemos que a mudança de variável

$$\begin{cases} X = T^n \\ X = \varphi(T) = \sum_{i \geq m} b_i T^i, \text{ com } b_m \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \end{cases}$$

é uma *Parametrização de Puiseux* da curva (f) .

Qualquer outra raiz de f nos fornece outra parametrização de Puiseux $(t^n, \psi(t))$ de f , e mais, $\psi(t) = \varphi(\xi t)$, onde ξ é uma n -ésima raiz da unidade.

Observe também que o índice i e $n = \min = \left\{ q \in \mathbb{N}; \alpha \in \mathbb{K} \left[\left[X^{\frac{1}{q}} \right] \right] \right\}$ são relativamente primos para qualquer parametrização de Puiseux acima, pois não admitem fator comum para todo i tal que $b_i \neq 0$.

Por [I], Teorema 3.10, item 3], temos

$$\text{mult}_t(\varphi(t)) = n \cdot \text{mult}_X(\alpha) = \text{mult}_X(A_n(X)) = \text{mult}_X(a_n(X)) \geq n.$$

Em particular, se o cone tangente de (f) é (Y^n) , então

$$\text{mult}_T(\varphi(T)) = \text{mult}_X(a_n(X)) > n$$

Existem muitas outras possíveis parametrizações de (f) por meio de outras séries $\mathbb{K}[[T]]$. Seja $(\psi_1(T), \psi_2(T))$ um par de elementos não nulos de não pertencentes à unidade de $\mathbb{K}[[T]]$. Diremos que $(\psi_1(T), \psi_2(T))$ é uma parametrização de (f) de

$$f(\psi_1(T), \psi_2(T)) = 0,$$

como um elemento de $\mathbb{K}[[T]]$.

A parametrização $(\psi_1(T), \psi_2(T))$ de (f) será chamada de primitiva se existir um automorfismo ρ de $\mathbb{K}[[T]]$ tal que

$$(\rho(\psi_1(T)), \rho(\psi_2(T))) = (T^n, \varphi(T)),$$

onde $(T^n, \varphi(T))$ é uma parametrização de Puiseux de (f) .

Se f for regular em X , então teremos os mesmos resultados acima trocando os papéis de X e Y .

A relação entre a equação de uma curva e sua parametrização Puiseux é de alta complexidade como se pode ver nos exemplos a seguir.

Exemplo 1.6. *A curva dada por*

$$\begin{aligned} f = & Y^8 - 4X^3Y^6 - 8X^5Y^5 + (6X^6 - 26X^7)Y^4 + (-24X^9 + 16X^8)Y^3 + \\ & + (36X^{10} - 4X^9 - 20X^{11})Y^2 + (-8X^{11} + 16X^{12} - 8X^{13})Y + 21X^{14} + \\ & + X^{12} + 6X^{13} - X^{15} \end{aligned}$$

pode ser parametrizada por

$$\begin{cases} X = T^8 \\ Y = T^{12} + T^{14} - T^{15}. \end{cases}$$

Exemplo 1.7. A curva $(f) = (Y^3 - 9X^3Y - X^4)$ tem uma parametrização cujos termos até a potência 14 em T são:

$$\begin{cases} X = T^3 \\ Y = T^4 + 3T^5 - 9T^7 + 27T^8 - 324T^{10} + 1215T^{11} - 18711T^{13} + 75816T^{14} - \dots \end{cases}$$

2 Multiplicidade de Interseção de curvas planas

Ao estudar a multiplicidade de interseção, conhecemos métodos que nos possibilitam atribuir um valor ao grau de contato entre duas curvas planas. Por exemplo, veja as seguintes curvas:

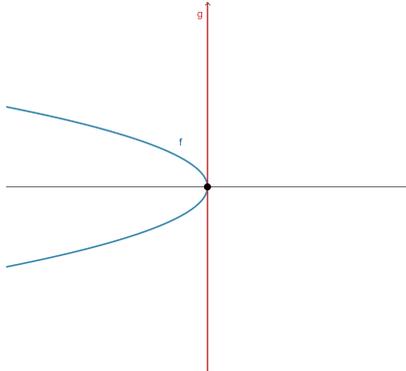


Figura 3: $f = V(-Y^2 - X)$, $g = V(X)$

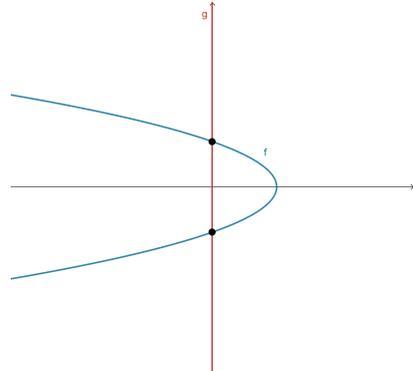


Figura 4: Perturbação em f

Note que a princípio visualizamos apenas um ponto de interseção entre as duas curvas. Ao realizar uma pequena perturbação, a quantidade de pontos de interseção entre as curvas aumentou, resultando em dois pontos.

Agora, observe o que ocorre com as curvas abaixo.

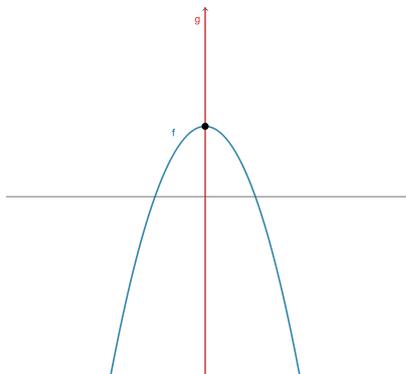


Figura 5: $f = V(X^2 + Y - 2)$, $g = V(X)$

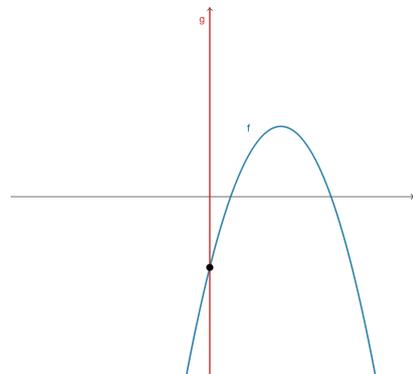


Figura 6: Perturbação em f

Assim como no caso anterior, observamos um ponto de interseção entre as duas curvas. Porém, após realizar uma perturbação note que continuamos tendo apenas um ponto de interseção.

Diante dessas situações, podemos nos questionar: Como medir este contato? É possível saber se dados dois casos diferentes, um grau de contato entre as curvas é maior que o outro?

De fato, os pontos de interseção a princípio visualizados em um gráfico contendo duas curvas não expressam o grau de contato entre elas. Dessa forma, do ponto de vista geométrico, a multiplicidade de interseção pode ser vista como o número de interseções entre as curvas que surgem quando fazemos certas perturbações.

Posteriormente, retornaremos a este tema, apresentando de forma detalhada os resultados que demonstram diferentes métodos para obter a multiplicidade de interseção entre duas curvas.

2.1 O anel local de uma curva plana

Dado um anel A e os elementos $z_1, \dots, z_n \in A$, vamos denotar por $\langle z_1, \dots, z_n \rangle$ o ideal de A gerado pelos elementos z_1, \dots, z_n .

Seja \mathbb{K} um corpo qualquer e seja f um elemento no ideal maximal $\mathfrak{M} = \langle X, Y \rangle$ de $\mathbb{K}[[X, Y]]$. Definimos o anel de coordenadas da curva (f) como sendo a \mathbb{K} -álgebra

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f \rangle}.$$

Se $h \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ e $B \subset \mathbb{K}[[X, Y]]$ é um ideal, dizemos que \bar{h} é a classe residual de h em \mathcal{O}_f e \bar{B} é o conjunto das classes residuais dos elementos de B .

O anel \mathcal{O}_f é um anel local com um único ideal maximal $\mathfrak{M}_f = \bar{\mathfrak{M}}$. Quando f é irredutível, \mathcal{O}_f é um domínio de integridade.

Nesse momento, é de nosso interesse enunciar apenas alguns resultados sobre o anel \mathcal{O}_f . As demonstrações completas estão disponíveis em [1].

Teorema 2.1. *Sejam (f) e (g) duas curvas algébricas planas. Então $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$ se, e somente se, $(f) \sim (g)$.*

Demonstração. Veja Teorema 4.1 em [1]. □

Este resultado nos diz que o anel \mathcal{O}_f é um importante invariante das classes de equivalência das curvas algébricas planas. Quando duas \mathbb{K} -álgebras locais \mathcal{O}_f e \mathcal{O}_g são isomorfas, escrevemos $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$.

Corolário 2.1. *Se $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$, então $\text{mult}(f) = \text{mult}(g)$.*

Demonstração. Veja Corolário 4.2 em [1]. □

Quando f em uma equação bem comportada com relação à indeterminada Y , a \mathbb{K} -álgebra \mathcal{O}_f também tem uma estrutura de um $\mathbb{K}[[X]]$ -módulo como mostra o seguinte resultado.

Proposição 2.1. *Seja $f \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ regular em Y de alguma ordem n . Então \mathcal{O}_f é um $\mathbb{K}[[X]]$ -módulo livre de classificação n gerado pela classe residual y^i de Y^i , $i = 0, \dots, n-1$, em \mathcal{O}_f . Em outras palavras,*

$$\mathcal{O}_f = \mathbb{K}[[X]] \oplus \mathbb{K}[[X]]y \oplus \dots \oplus \mathbb{K}[[X]]y^{n-1}.$$

Demonstração. Veja Proposição 4.3 em [1]. □

De posse da parametrização de Puiseux $(T^m, \varphi(T))$ de f , temos o seguinte seguinte homomorfismo injetor de \mathbb{K} -álgebras:

$$H_\varphi : \mathcal{O}_f \longrightarrow \mathbb{K}[[T]],$$

através do qual identificaremos \mathcal{O}_f com a subálgebra de $\mathbb{K}[[T]]$

$$A_\varphi := H_\varphi(\mathcal{O}_f) = \mathbb{K}[[T^n, \varphi(T)]].$$

Se $\psi(T) = \varphi(\zeta T)$, onde ζ é uma n -ésima raiz da unidade, obtemos que $A_\psi \simeq A_\varphi$ através do automorfismo

$$\begin{aligned} h_\zeta : \mathbb{K}[[T]] &\longrightarrow \mathbb{K}[[T]] \\ P(T) &\longmapsto P(\zeta T) \end{aligned}$$

Agora, definamos a *valoração* com respeito a f como sendo a seguinte função

$$\begin{aligned} v_f : \mathcal{O}_f &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \bar{g} &\longmapsto \text{mult}(H_\varphi(\bar{g})) \end{aligned}$$

pondo $v_f(0) = \infty$.

Acima definimos v_f lançando mão sobre a parametrização de Puiseux de f , porém isso pode ser feito tomando qualquer parametrização primitiva $(\psi_1(T), \psi_2(T))$ de (f) , uma vez que

$$v_f(g) = \text{mult}(g(T^n, \varphi(T))) = \text{mult}(\rho(g(T^n, \varphi(T)))) = \text{mult}(g(\psi_1(T), \psi_2(T))),$$

em que ρ é o automorfismo de $\mathbb{K}[[T]]$ tal que

$$(\rho(\psi_1(T)), \rho(\psi_2(T))) = (T^n, \varphi(T)).$$

Agora definamos o *resultante* entre duas curvas, que é mais uma ferramenta útil para alguns dos próximos resultados. O resultante de f e g desempenha um papel importante quando queremos determinar um critério para decidir quando f e g têm um fator comum não constante em $A[Y]$.

Definição 2.1. *Seja A um domínio de fatoração única e considere $f = a_0Y^m + a_1Y^{m-1} + \dots + a_m$ e $g = b_0Y^n + b_1Y^{n-1} + \dots + b_n \in A[Y]$. Então o resultante de f e g é um elemento de A definido por:*

$$R_Y(f, g) = \det M_{f,g} = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & b_0 & \cdots & \cdots & \cdots & b_n \end{pmatrix}_{m+n}$$

Observe que o produto dos elementos da diagonal principal de $M_{f,g}$ é $a_0^n b_n^m$, além disso, se considerarmos os coeficientes a_i 's e b_j 's como variáveis, o resultante $R_Y(f, g)$ é um polinômio bi-homogêneo de grau n com relação aos a_i 's, e de grau m com relação aos b_j 's. Para o acesso a mais informações e propriedades relacionadas ao resultante entre duas curvas, o leitor pode consultar a referência [1].

2.2 Um pouco de Álgebra Linear

Apresentaremos alguns resultados complementares da Álgebra Linear que serão essenciais para a compreensão da teoria apresentada no estudo de multiplicidade de interseção.

Sejam U, V, W espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{K} . Considere um diagrama da seguinte forma

$$W \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\phi} U,$$

onde φ e ϕ são homomorfismos de espaços vetoriais.

Definição 2.2. Diremos que $W \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\phi} U$ é uma sequência exata se

$$\text{Im}(\varphi) = \text{Ker}(\phi).$$

Se temos uma sequência exata da forma

$$0 \rightarrow V \xrightarrow{\varphi} U,$$

significa que φ é injetivo, enquanto uma sequência exata da forma

$$W \xrightarrow{\phi} V \rightarrow 0$$

indica que ϕ é sobrejetivo.

Agora, suponha que W seja um subespaço do espaço vetorial V . Então

$$\frac{V}{W} = \{\bar{v} = v + W; v \in V\}$$

é um espaço vetorial. Além disso, se $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, então temos

$$\dim_{\mathbb{K}} \frac{V}{W} = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} W. \quad (2)$$

Proposição 2.2. Suponha que tenhamos uma sequência exata de espaços vetoriais

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{\phi} V \xrightarrow{\varphi} U \longrightarrow 0.$$

Então V tem dimensão finita se, e somente se, U e W têm dimensão finita. Nesse caso,

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} U.$$

Demonstração. Por hipótese, sabemos que a sequência é exata, então temos que

$$\dim_{\mathbb{K}} W = \dim_{\mathbb{K}} \psi(W) = \dim_{\mathbb{K}} \ker(\varphi),$$

e pelo teorema do isomorfismo de espaços vetoriais, segue que

$$\frac{V}{\text{Ker}(\varphi)} \simeq U,$$

o que, à vista de (2), implica que

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(\varphi) + \dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} U.$$

□

Proposição 2.3. (Teorema do Isomorfismo de Noether). *Sejam V e W subespaços do espaço vetorial U . Então*

$$\frac{V}{V \cap W} \simeq \frac{V + W}{W}.$$

Teorema 2.2. *Sejam V um espaço vetorial e $L : V \rightarrow V$ um mapa linear injetivo. Seja W um subespaço de V tal que $L(W) \subset W$. Temos que*

1. $\frac{V}{W} \simeq \frac{L(V)}{L(W)}$;
2. Se $\frac{V}{W}$ e $\frac{V}{L(V)}$ têm dimensão finita, então $\dim_{\mathbb{K}} \frac{W}{L(W)} = \dim_{\mathbb{K}} \frac{V}{L(V)}$.

Estes dois últimos serão úteis posteriormente em situações específicas para auxiliar na compreensão de resultados relacionados à multiplicidade de interseção.

2.3 A Multiplicidade de Interseção

Retornaremos agora a tratar sobre a multiplicidade de interseção entre duas curvas. Como já foi dito anteriormente, calcular a multiplicidade de interseção nos auxilia a medir o grau de contato entre duas curvas. Com este objetivo, iremos apresentar a definição da multiplicidade de interseção e mostrar diferentes formas de obter esta multiplicidade.

Seja \mathbb{K} um corpo arbitrário e \mathfrak{M} o ideal maximal de $\mathbb{K}[[X, Y]]$.

Proposição 2.4. *Sejam $f, g \in \mathfrak{M}$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. f e g são relativamente primos;
2. A dimensão de $\frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle}$, como um \mathbb{K} -espaço vetorial, é finita.

Demonstração. Podemos assumir que f e g são pseudopolinômios, pelo Teorema de Weierstrass.

(1) \Rightarrow (2) Se $f, g \in \mathbb{K}[X, Y]$ são relativamente primos, o mesmo ocorre em $\mathbb{K}[[X]][Y]$. Por [1, Prop. 2.17] o resultante $R_Y(f, g) \neq 0$ e de [1, Ex. 1.4] $R_Y(f, g) = u \cdot X^r$, $u(0) \neq 0$. Mas pela [1, Prop. 2.20], temos

$$u \cdot X^r = R_Y(f, g) = qf + pg \in \langle f, g \rangle.$$

Por outro lado, note que $u(0) \cdot X^r = R_Y(f, g)(0) = 0$, ou seja, $X^r \in \langle f, g \rangle$, $r \geq 1$. Daí, do Teorema da Divisão, obtemos

$$\begin{aligned} h &= fq + a_0(X) + \cdots + a_{n-1}(X)Y^{n-1} \\ \Rightarrow \bar{h} &= \overline{fq + a_0(X) + \cdots + a_{n-1}(X)Y^{n-1}} \\ &= \sum a_{ij} \bar{X}^i \cdot \bar{Y}^j, 0 \leq i \leq r-1, 0 \leq j \leq n-1. \end{aligned}$$

Logo, $\{\bar{X}^i \cdot \bar{Y}^j\}$ é um conjunto finito de geradores de $\frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle}$. Portanto,

$$\dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle} < \infty.$$

(2) \Rightarrow (1) Façamos a contrapositiva. Sejam $h, f_1, g_1 \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ tais que $f = hf_1$ e $g = hg_1$, e note que o conjunto $\{\overline{1}, \overline{X}, \overline{X^2}, \dots\}$ é L.I. em $\frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle}$. De fato, caso contrário, existiria $m \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_{m+1} \neq 0$ tal que

$$\alpha_1 \overline{\alpha_2 \cdot X + \alpha_3 \cdot X^2 + \dots + \alpha_{k+1} \cdot X^k} = -\overline{\alpha_{m+1} \cdot X^m} \Rightarrow \overline{\beta_1 + \beta_2 X + \dots + X^k} = \overline{X^m}$$

ou seja, $p(X) = \beta_1 + \beta_2 X + \dots + X^k - X^m \in \langle h \rangle$, isto é, existe $h_1 \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ de modo que $p(X) = h_1 \cdot h$. Donde,

$$\dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle} \geq \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle h \rangle} = \infty.$$

□

Definição 2.3. Sejam $f, g \in \mathfrak{M}$. A multiplicidade de interseção é definida como sendo a dimensão da seguinte álgebra:

$$I(f, g) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle},$$

incluindo o caso em que esta dimensão é infinita.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos que ilustram o cálculo da multiplicidade de interseção usando a definição fornecida acima.

Exemplo 2.1. Considere as curvas $f = V(X)$ e $g = V(Y)$. A multiplicidade de interseção de f e g será

$$I(f, g) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle X, Y \rangle} = 1.$$

Como $X \in \langle X, Y \rangle$ e $Y \in \langle X, Y \rangle$, teremos $\overline{X} = \overline{0}$ e $\overline{Y} = \overline{0}$. Agora observe que um elemento $f \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$f = a_0 + a_1 X + a_2 Y + a_3 X^2 + a_4 Y^2 + a_5 XY + a_6 X^3 + a_7 Y^3 + a_8 XY^2 + a_9 X^2 Y + \dots$$

Logo,

$$\begin{aligned} \overline{f} &= \overline{a_0} + \overline{a_1 X} + \overline{a_2 Y} + \overline{a_3 X^2} + \overline{a_4 Y^2} + \overline{a_5 XY} + \overline{a_6 X^3} + \overline{a_7 Y^3} + \overline{a_8 XY^2} + \overline{a_9 X^2 Y} + \dots \\ &= \overline{a_0} + \underbrace{\overline{a_1 X} + \overline{a_2 Y} + \overline{a_3 X^2} + \overline{a_4 Y^2} + \overline{a_5 XY} + \overline{a_6 X^3} + \overline{a_7 Y^3} + \overline{a_8 XY^2} + \overline{a_9 X^2 Y} + \dots}_{=\overline{0}} \\ &= \overline{a_0}. \end{aligned}$$

Isto significa que precisamos apenas de uma constante $c \in \mathbb{K}$ para gerar $\frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle X, Y \rangle}$. Logo, sua dimensão é igual a 1.

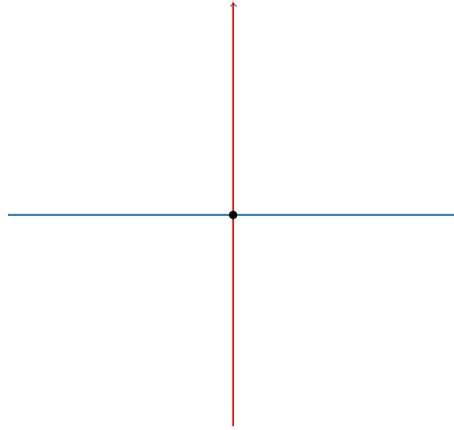


Figura 7: $f = V(X)$ e $g = V(Y)$

Exemplo 2.2. Considere as curvas $f = V(X)$ e $g = V(X^2 - Y^3)$.

$$I(f, g) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle X, X^2 - Y^3 \rangle} = 3.$$

Note que $\overline{X} = \overline{0}$ e $\overline{X^2 - Y^3} = \overline{0} \Rightarrow \overline{X^2} - \overline{Y^3} = \overline{0} \Rightarrow \overline{X^2} = \overline{Y^3} \Rightarrow \overline{X^2} = \overline{Y^3} \Rightarrow \overline{Y^3} = \overline{0}$, já que $\overline{X} = \overline{0}$. Daí, seja

$$f = a_0 + a_1X + a_2Y + a_3X^2 + a_4Y^2 + a_5XY + a_6X^3 + a_7Y^3 + a_8XY^2 + a_9X^2Y + \dots$$

Teremos que

$$\begin{aligned} \overline{f} &= \overline{a_0} + \overline{a_1X} + \overline{a_2Y} + \overline{a_3X^2} + \overline{a_4Y^2} + \overline{a_5XY} + \overline{a_6X^3} + \overline{a_7Y^3} + \overline{a_8XY^2} + \overline{a_9X^2Y} + \dots \\ &= \overline{a_0} + \underbrace{\overline{a_1X}}_{=\overline{0}} + \overline{a_2Y} + \underbrace{\overline{a_3X^2}}_{=\overline{0}} + \overline{a_4Y^2} + \underbrace{\overline{a_5XY} + \overline{a_6X^3} + \overline{a_7Y^3} + \overline{a_8XY^2} + \overline{a_9X^2Y}}_{=\overline{0}} + \dots \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_2Y} + \overline{a_4Y^2}. \end{aligned}$$

Neste caso, $\{\overline{c}, \overline{Y}, \overline{Y^2}\}$, com $c \in \mathbb{K}$, é suficiente para gerar $\frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle X, X^2 - Y^3 \rangle}$ e, portanto, sua dimensão é 3.

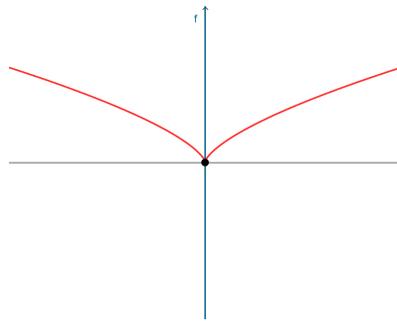


Figura 8: $f = V(X)$ e $g = V(X^2 - Y^3)$

Exemplo 2.3. Considerando as curvas $f = V(Y^2 - X^3)$ e $g = V(X^2 - Y^3)$, teremos

$$I(f, g) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle Y^2 - X^3, X^2 - Y^3 \rangle} = 4.$$

É possível verificar que esta dimensão é, de fato, 4 seguindo a mesma ideia desenvolvida nos exemplos anteriores.

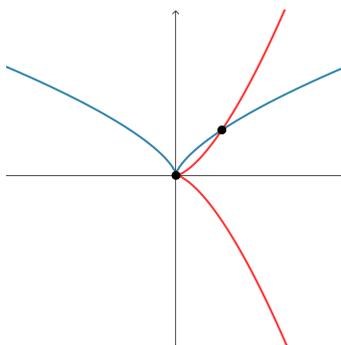


Figura 9: $f = V(Y^2 - X^3)$ e $g = V(X^2 - Y^3)$

Definição 2.4. Diremos que duas curvas (f) e (g) são transversais, se (f) e (g) são regulares e suas retas tangentes são distintas.

Observação 2.1. Ao definir quando duas curvas são transversais, algumas referências pedem que (f) e (g) sejam regulares, mas outras referências não pedem esta hipótese.

Para auxiliar no cálculo da dimensão da álgebra acima, podemos usar as propriedades que seguem no próximo resultado.

Teorema 2.3. Sejam $f, g, h \in \mathfrak{M}$, ϕ um automorfismo de $\mathbb{K}[[X, Y]]$ e u e v unidades em $\mathbb{K}[[X, Y]]$. A multiplicidade de interseção tem as seguintes propriedades:

1. $I(f, g) < \infty$ se, e somente se, f e g são relativamente primos em $\mathbb{K}[[X, Y]]$;
2. $I(f, g) = I(g, f)$;
3. $I(\phi(f), \phi(g)) = I(uf, vg) = I(f, g)$;
4. $I(f, gh) = I(f, g) + I(f, h)$;
5. $I(f, g) = 1$ se, e somente se, f e g são transversais;
6. $I(f, g - hf) = I(f, g)$.

Demonstração. Sejam $f, g, h \in \mathfrak{M}$, ϕ um automorfismo de $\mathbb{K}[[X, Y]]$ e u e v unidades em $\mathbb{K}[[X, Y]]$.

1. Como $I(g, f) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle}$, então a afirmação segue da Proposição 2.4.

2. $I(f, g) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{R}}{\langle f, g \rangle} = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{R}}{\langle g, f \rangle} = I(g, f)$.
3. $I(uf, vg) = I(f, g)$ é imediato. Agora, seja $\mathcal{J} = \langle f, g \rangle$ e $\mathcal{J}' = \langle \phi(f), \phi(g) \rangle$.
Seja

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{R} &\longrightarrow \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{J}'} \\ a &\longmapsto \overline{\phi(a)} \end{aligned}$$

um homomorfismo sobrejetor.

Observe que

$$\begin{aligned} \text{Ker } \psi &= \{a \in \mathcal{R} : \psi(a) = \overline{0}\} \\ &= \{a \in \mathcal{R} : \overline{\phi(a)} = \overline{0}\} \\ &= \{a \in \mathcal{R} : \phi(a) \in \mathcal{J}'\} \\ &= \{a \in \mathcal{R} : \phi(a) = \phi(\alpha f + \beta g)\} \\ &= \{a \in \mathcal{R} : a = \alpha f + \beta g, \text{ para algum } \alpha, \beta \in \mathcal{R}\} \\ &= \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema do Isomorfismo, temos

$$\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{J}} \simeq \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{J}'}$$

Assim,

$$\dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{R}}{\langle f, g \rangle} = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{R}}{\langle \phi(f), \phi(g) \rangle} \Leftrightarrow I(\phi(f), \phi(g)) = I(f, g).$$

4. Por definição, temos que

$$\begin{aligned} I(f, gh) &= \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{R}}{\langle f, gh \rangle} = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g'h' \rangle} \\ I(f, g) &= \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{R}}{\langle f, g \rangle} = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' \rangle} \\ I(f, h) &= \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{R}}{\langle f, h \rangle} = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle h' \rangle}, \end{aligned}$$

lembrando que $\mathcal{O}_f = \frac{\mathcal{R}}{\langle f \rangle}$.

Assim, é suficiente mostrar que a sequência

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_f}{\langle h' \rangle} \xrightarrow{\phi} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g'h' \rangle} \xrightarrow{\varphi} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' \rangle} \longrightarrow 0$$

é exata. Precisamos, então, mostrar que $\text{Ker } \varphi = \text{Im } \psi$.

Pela Propriedade Universal do quociente, existe uma única aplicação que satisfaz o seguinte

diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi_2} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow & \\ \frac{A}{a} & & \end{array} \quad \exists! \bar{\pi}_2 \text{ tal que } \pi_2(a) = (\bar{\pi}_2 \circ \pi)(a)$$

No nosso caso, teremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_f & \xrightarrow{\pi_2} & \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' \rangle} \\ \pi \downarrow & \nearrow & \\ \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' h' \rangle} & & \end{array} \quad \varphi = \bar{\pi}_2 \text{ tal que } \pi_2(x) = (\bar{\pi}_2 \circ \pi)(x)$$

Note que

$$\begin{aligned} \text{Ker } \varphi &= \left\{ \bar{x} \in \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' h' \rangle} : \varphi(\bar{x}) = \bar{\pi}_2(\bar{x}) = \bar{0} \right\} \\ &= \left\{ \bar{x} \in \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' h' \rangle} : \pi_2(x) = \bar{0} \right\} \\ &= \frac{\langle g' \rangle}{\langle g' h' \rangle}. \end{aligned}$$

Agora, seja $\psi(\bar{z}') = \overline{g' z'}$.

Afirmção 1: ψ é um homomorfismo.

Afirmção 2: ψ é injetor. De fato, suponha que $\psi(\bar{z}') = \bar{0}$.

$$\bar{0} = \psi(\bar{z}') = \overline{g' z'} \Rightarrow g' z' \in \langle g' h' \rangle$$

$$\exists \alpha' \in \mathcal{O}_f \text{ tal que } g' z' = \alpha' g' h' \Leftrightarrow g z - \alpha g h \in \langle f \rangle \Rightarrow \exists \beta \in \mathcal{R} \text{ tal que } g(z - \alpha) = \beta f.$$

A partir desta igualdade, temos dois casos:

- Se f e g não são relativamente primos, não temos o que fazer, pois pelo item 1 obteríamos $\infty = \infty$.
- Se f e g são relativamente primos, então $g(z - \alpha) = \beta f \Rightarrow f | (z - \alpha h) \Rightarrow z' - \alpha' h' = 0' \Rightarrow z' = \alpha' h' \Rightarrow \bar{z}' = 0$.

teremos então

$$\begin{aligned} \text{Im } \psi &= \left\{ \bar{y} \in \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' h' \rangle} : \psi(\bar{w}') = \bar{y} = \overline{g' w'} \right\} \\ &= \left\{ \bar{y} \in \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' h' \rangle} : \bar{y} = \overline{w' g'} \right\} \\ &= \frac{\langle g' \rangle}{\langle g' h' \rangle}. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que $\text{Ker } \varphi = \text{Im } \psi$ e, portanto, a sequência é exata.

5. Suponha que (f) e (g) são regulares com retas tangentes distintas. Com uma mudança de coordenadas podemos assumir que existem $f_1, g_1 \in \mathfrak{M}^2$ em que $f = X + f_1$ e $g = Y + g_1$. Podemos reescrever como $f = uX + Yf_2$ e $g = vY + Xg_2$, onde u e v são unidades. Vamos mostrar que $Y \in \langle f, g \rangle$ e $X \in \langle f, g \rangle$ e, assim, $\langle f, g \rangle = \langle X, Y \rangle$. Temos que:

$$\begin{aligned}
Y(v - u^{-1}g_2f_2) &= Yv - Yu^{-1}g_2f_2 \\
&= Yv - u^{-1}g_2(f - uX) \\
&= Yv - u^{-1}g_2f + u^{-1}uXg_2 \\
&= Yv - u^{-1}g_2f + Xg_2 \\
&= g - u^{-1}g_2f \in \langle f, g \rangle.
\end{aligned}$$

Além disso, $(v - u^{-1}g_2f_2)(0, 0) = v(0, 0) \neq 0$, ou seja, $(v - u^{-1}g_2f_2)$ é unidade e, portanto, $Y \in \langle f, g \rangle$. Analogamente temos que $X \in \langle f, g \rangle$ e, portanto,

$$I(f, g) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle} = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle X, Y \rangle} = 1.$$

Reciprocamente, vamos supor que (f) e (g) não são transversais e vamos mostrar que $I(f, g) \neq 1$.

Se (f) e (g) não são transversais, então $\text{mult}(f) \geq 2$, ou $\text{mult}(g) \geq 2$, ou possuem a mesma reta tangente. Após uma mudança de coordenadas, se necessário, temos $f = Yf_1 + f_2$ e $g = Yg_1 + g_2$ com f_2 e $g_2 \in \mathfrak{M}^2$ e $f_1, g_1 \in K[[X, Y]]$. Assim, $\langle f, g \rangle \subset \langle Y \rangle + \mathfrak{M}^2$ e, portanto,

$$I(f, g) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle} \geq \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle Y \rangle + \mathfrak{M}^2} = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X]]}{\langle X^2 \rangle} = 2.$$

6. Por definição, temos

$$\begin{aligned}
I(f, g - hf) &= \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g - hf \rangle}, \\
I(f, g) &= \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle}.
\end{aligned}$$

Precisamos mostrar que $\langle f, g - hf \rangle = \langle f, g \rangle$. Note que $g - hf \in \langle f, g \rangle$. Daí, temos que $\langle f, g - hf \rangle \subset \langle f, g \rangle$. Por outro lado, observe que $hf + (g - hf) \in \langle f, g - hf \rangle$, ou seja, $g \in \langle f, g - hf \rangle$. Logo, $\langle f, g - hf \rangle \supset \langle f, g \rangle$. Portanto, $\langle f, g - hf \rangle = \langle f, g \rangle$ e concluímos que $I(f, g - hf) = I(f, g)$. □

De posse das propriedades estabelecidas no teorema anterior, revisitemos agora os exemplos apresentados anteriormente.

Exemplo 2.4. Considere as curvas $f = V(X)$ e $g = V(Y)$. Pela Propriedade 5 do Teorema 2.5, podemos concluir que $I(f, g) = 1$.

Exemplo 2.5. Considere as curvas $f = V(X)$ e $g = V(X^2 - Y^3)$. Calculemos a multiplicidade de interseção entre elas. Pelas Propriedades 3 e 6 do Teorema 2.3, temos que

$$I(X, X^2 - Y^3) \stackrel{(6)}{=} I(X, -Y^3 + X^2X) = I(X, -Y^3) \stackrel{(3)}{=} I(X, Y^3) = 3.$$

Exemplo 2.6. Considere as curvas definidas por $F = V(Y^2 - X^3)$ e $G = V(X^2 - Y^3)$. Vamos calcular a multiplicidade de interseção entre elas.

$$\begin{aligned} I(Y^2 - X^3, X^2 - Y^3) &\stackrel{(6)}{=} I(Y^2 - X^3, X^2 - X^3Y - Y(Y^2 - X^3)) \\ &= I(Y^2 - X^3, X^2 - X^3Y) = I(Y^2 - X^3, X^2(1 - XY)) \\ &\stackrel{(4)}{=} I(Y^2 - X^3, X^2) + \underbrace{I(Y^2 - X^3, 1 - XY)}_{=0} \stackrel{(6)}{=} I(X^2, Y^2) = 4. \end{aligned}$$

Além de auxiliar no cálculo para encontrar a multiplicidade de interseção, tais propriedades ainda caracterizam completamente a aplicação I , como nos mostra o próximo resultado.

Teorema 2.4. Seja I' um mapa

$$\begin{aligned} I' : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} &\longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ (f, g) &\mapsto I'(f, g) \end{aligned}$$

satisfazendo as propriedades do Teorema 2.3, então $I' = I$.

Demonstração. Vamos assumir $f, g \in \mathfrak{M} \setminus \{0\}$ relativamente primos, pois caso não o fossem, pela Propriedade 1 do Teorema 2.3, teríamos $I'(f, g) = \infty = I(f, g)$. Agora, note que se $I'(f, g) = 1$, segue da Propriedade 5 do Teorema 2.3 que $I(f, g) = 1$, isto é, $I'(f, g) = I(f, g)$.

Suponha $I'(f, g) = r$. Se conseguirmos decompor $I'(f, g)$ em uma soma termos da forma

$$I'(f, g) = I'(f, g_1) + I'(f, g_2),$$

onde $I'(f, g_1) \leq r - 1$ e $I'(f, g_2) \leq r - 1$.

Sejam $f, g \in \mathfrak{M} \setminus \{0\}$ tais que $I'(f, g) = r$. Sabemos pelo Corolário 1.2 que existe um \mathbb{K} -automorfismo ϕ de $\mathbb{K}[[X, Y]]$, uma unidade $U \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ e $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}'$ tais que $\text{mult}(A_i) \geq i$, para $i = 1, \dots, n$, e

$$\phi(f) \cdot U = Y^n + A_1Y^{n-1} + \dots + A_n = p.$$

Analogamente, existem $V \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ unidade e $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{R}'$ tais que $\text{mult}(B_i) \geq i$, para $i = 1, \dots, m$ tais que

$$\phi(g) \cdot V = Y^m + A_1Y^{m-1} + \dots + B_m = q.$$

Sabemos, pela Propriedade 3 do Teorema 2.3, que I é invariante via automorfismos e produto por unidades. Assim, temos

$$I'(f, g) = I'(p, q).$$

A Propriedade 2 do Teorema 2.3 nos permite assumir que $n \leq m$. Agora, defina

$$q_1 = q - Y^{m-n}p = Xq_2,$$

com $q_2 \in \mathbb{K}[[X, Y]]$. Verifiquemos os seguintes casos:

- Se q_2 é unidade, note que

$$I'(p, q) \stackrel{(6)}{=} I'(p, q - Y^{m-n}p) = I'(p, Xq_2) \stackrel{(3)}{=} I'(p, X).$$

Agora, note que como $\text{mult}(A_i) \geq i$, podemos colocar X em evidência em A_i e escrever $A_i Y^{n-i} = Xh_i$, onde $h_i \in \mathfrak{M}$. Seja $p_1 = p - A_1 Y^{n-1}$ e definamos recursivamente $p_j = p_{j-1} - A_j Y^{n-j}$, com $j = 2, \dots, n$. Daí,

$$\begin{aligned} I'(X, p) &\stackrel{(6)}{=} I'(X, p - Xh_1) \stackrel{(6)}{=} I'(X, p_1) \stackrel{(6)}{=} \dots \stackrel{(6)}{=} I'(X, p_n) \\ &\stackrel{(6)}{=} I'(X, Y^n) = I'(X, Y \cdot Y^{n-1}) \stackrel{(4)}{=} I'(X, Y^{n-1}) + I'(X, Y) \\ &\stackrel{(4)}{=} \dots \stackrel{(4)}{=} nI'(X, Y) \stackrel{(5)}{=} n \cdot 1 = n = I(X, p). \end{aligned}$$

- Se q_2 não é unidade, então

$$r = I'(p, q) \stackrel{(6)}{=} I'(p, q_1) \stackrel{(4)}{=} I'(p, X) + I'(p, q_2).$$

Temos que $I'(p, X) \leq r - 1$ e $I'(p, q_2) \leq r - 1$, pois caso contrário, teríamos $I'(p, X) > r - 1$ ou $I'(p, q_2) > r - 1$. Uma vez que $I'(p, X) = n > 0$, apenas poderíamos ter $I'(p, X) > r - 1$, o que forçaria $I'(p, q_2) = 0$, o que não ocorre.

Logo, temos

$$r = I'(p, q) = I'(p, X) + I'(p, q_2) \stackrel{H.I.}{=} I(p, X) + I(p, q_2) = I'(p, q).$$

Portanto, $I'(f, g) = I(f, g)$. □

Utilizando a valoração e o resultante, ferramentas apresentadas preliminarmente, podemos enunciar e provar o próximo teorema que nos fornece outras duas maneiras de calcular a multiplicidade de interseção.

Teorema 2.5. *Sejam f e g pseudopolinômios em $\mathbb{K}[[X]][Y]$. Seja*

$$f = f_1 \cdots f_r$$

a decomposição de f em fatores irredutíveis, que podemos supor que sejam pseudopolinômios. Então

$$I(f, g) = \sum_{i=1}^r v_{f_i}(g) = \text{mult}(R_Y(f, g)).$$

Demonstração. Antes de iniciar a demonstração, façamos algumas observações. Sabemos que f e g são séries formais em $\mathbb{K}[[X, Y]]$, mas o Teorema de Preparação de Weierstrass nos permite transformá-las em pseudopolinômios em $\mathbb{K}[[X]][Y]$. Além disso, sendo f um pseudopolinômio, os fatores da decomposição $f = f_1 \cdots f_r$ também serão pseudopolinômios. Tal decomposição em fatores irredutíveis é possível, pois f pertence a um domínio de fatoração única. Vamos assumir f e g relativamente primos, pois se não o fossem teríamos

$$I(f, g) = \sum_{i=1}^r v_{f_i}(g) = \text{mult}(R_Y(f, g)) = \infty.$$

Note que se tivermos $(T^n, \varphi_{f_i}(T))$ parametrização de Puiseux, $f_i(T^n, \varphi_{f_i}(T)) = 0$, o que nos dá

$$\begin{aligned} g(T^n, \varphi_{f_i}(T)) &= f_i(T^n, \varphi_{f_i}(T))h(T^n, \varphi_{f_i}(T)) = 0 \\ \Rightarrow v_{f_i}(g) &= \text{mult}(g(T^n, \varphi_{f_i}(T))) = \text{mult}(0) = \infty \\ \Rightarrow R_Y(f, g) &= 0 \\ \Rightarrow \text{mult } R_Y(f, g) &= 0 = \infty. \end{aligned}$$

Suponha sem perda de generalidade que f é irredutível. Afirmamos que

$$I(f, g) = v_f(g) = \text{mult}(\mathcal{R}_Y(f, g)).$$

Podemos escrever

$$I(f_1 \cdots f_r, g) = \sum_{i=1}^r I(f_i, g)$$

e pela Propriedade 4 do Teorema 2.3, temos

$$I(f_1 \cdots f_r, g) = I(f_1, g) + I(f_2 \cdots f_r, g) = I(f_1, g) + I(f_2, g) + I(f_3 \cdots f_r, g) = \dots$$

Seguimos recursivamente até obtermos a soma

$$\sum_{i=1}^r I(f_i, g).$$

Logo, basta provar que $I(f_i, g) = V_{f_i}g$, sabendo que f_i é irredutível.

Considere o mapa \mathbb{K} -linear

$$\begin{aligned} L : K[[T]] &\longrightarrow K[[T]] \\ h(T) &\longmapsto h(T)g(T^n, \varphi(T)) \end{aligned} ,$$

onde $n = \text{gr}_Y(f)$ e $(T^n, \varphi(T))$ é uma parametrização de Piseux de f . Como f e g são relativamente primos, segue que $g(T^n, \varphi(T)) \neq 0$, e portanto L é injetivo.

Seja W um \mathbb{K} -subespaço vetorial $A_\varphi = K[[T^n, \varphi(T)]] (\simeq O_f)$ de $V = K[[T]]$. Temos que

$$\frac{O_f}{\langle g' \rangle} \simeq \frac{A_\varphi}{g(T^n, \varphi(T)) R_\varphi} = \frac{W}{L(W)}$$

Por outro lado,

$$\frac{V}{L(V)} = \frac{K[[T]]}{\langle g(T^n, \varphi(T)) \rangle}$$

Por [I], corolário 4.5], temos que

$$\dim_{\mathbb{K}} \frac{V}{W} < \infty$$

e como

$$\dim_{\mathbb{K}} \frac{V}{L(V)} = \text{mult}(g(T^n, \varphi(T))) < \infty,$$

Segue do Teorema 2.2 que

$$I(f, g) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{O_f}{\langle g' \rangle} = \dim_{\mathbb{K}} \frac{W}{L(W)} = \dim_{\mathbb{K}} \frac{V}{L(V)} = v_f(g).$$

Agora, seja ζ n -ésima raiz primitiva da unidade, segue de [I], Proposição 2.22] que

$$R_Y(f, g) = \prod_{i=1}^n g\left(X, \varphi\left(\zeta^i X^{\frac{1}{n}}\right)\right).$$

Assim

$$\text{mult}(R_Y(f, g)) = n \cdot \text{mult}\left(g\left(X, \varphi\left(X^{\frac{1}{n}}\right)\right)\right) = \text{mult}(g(T^n, \varphi(T)))$$

□

Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.7. Calculemos a multiplicidade de interseção entre $f = X^2 - Y^3$ e $g = X^3 - Y^4$ usando o resultado anterior:

$$I(f, g) = V_g(f) = \text{mult}(g(T^4, T^3)) = \text{mult}(T^8 - T^9) = 8,$$

onde (T^4, T^3) é uma parametrização de (g) .

Teorema 2.6. *Sejam $f, g \in \mathfrak{M}$. Temos que*

$$I(f, g) \geq \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g).$$

A igualdade vale se, e somente se, (f) e (g) não possuem tangentes comuns.

Demonstração. Sejam $f = f_1 \cdots f_r$ e $g = g_1 \cdots g_s$, as decomposições de f and g em fatores irredutíveis, respectivamente. Usando as propriedades 2 e 4 do Teorema 2.3, temos que

$$I(f, g) = \sum_{i,j} I(f_i, g_j). \quad (3)$$

Por outro lado, como $\text{mult}(h_1 h_2) = \text{mult}(h_1) + \text{mult}(h_2)$, temos que

$$\text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g) = \sum_{i,j} \text{mult}(f_i) \cdot \text{mult}(g_j). \quad (4)$$

Logo, de (3) e (4), segue que é suficiente provar o resultado para f e g irredutíveis.

Suponha que f e g estejam associadas a pseudopolinômios em $K[[X]][Y]$ e que (f) tenha Y como reta tangente.

Seja $(T^n, \varphi(T))$, onde $n = \text{mult}(f)$, uma parametrização de Piseux de (f) . Como Y é a reta tangente de (f) , $\text{mult}(\varphi(T)) > n$. Agora, suponha que

$$g(X, Y) = (aX + bY)^m + g_{m+1}(X, Y) + \cdots,$$

onde $g_{m+1}(X, Y) + \cdots \in \mathfrak{M}^{m+1}$. Então temos que

$$I(f, g) = \text{mult}((aT^n + b\varphi(T))^m + g_{m+1}(T^n, \varphi(T)) + \cdots) \geq nm,$$

onde a igualdade vale se, e somente se, $a \neq 0$, isto é, a reta tangente de (g) não é Y , ou equivalentemente, se as retas tangentes de (f) e g são distintas. \square

3 Resolução de Singularidades de curvas planas

Em diversas circunstâncias podemos nos deparar com singularidades notavelmente complexas, onde a presença de pontos singulares pode apresentar desafios consideráveis no estudo e análise de determinadas variedades. Diante desse cenário, naturalmente surgem os seguintes questionamentos: Será possível simplificar o problema? Existe uma maneira de eliminar esses pontos que estão causando dificuldades na análise? E a resposta para isto é sim!

Neste capítulo, abordaremos um método de resolução de singularidades de curvas planas irredutíveis. Faremos isto por meio de uma sequência de transformações quadráticas. No contexto analítico, esse processo consiste em transformar um germe de um ramo analítico em um germe não singular por meio de uma sequência finita de certas transformações quadráticas. Esta técnica foi introduzida por Max Noether, considerado pai da Geometria Algébrica, no século XIX. Para motivar nosso estudo, introduziremos o tema no contexto mais geométrico dos germes das curvas planas analíticas.

Além de nos auxiliar na simplificação de uma determinada curva singular, durante o processo de resolução de singularidades visualizamos um decréscimo na multiplicidade da curva, que chamaremos de sequência de multiplicidade. Isto nos permite extrair informações sobre a topologia dessa curva.

3.1 Blow-up

Como uma ferramenta eficaz para resolver singularidades, introduziremos o conceito de *Blow-up*. Ao aplicar o *Blow-up* a uma curva plana singular, essencialmente “explodimos” o ponto singular. A variedade resultante preserva as propriedades da curva original, porém a apresenta-se de maneira mais simplificada. Durante esse processo, ocorre uma mudança de coordenadas que proporciona uma descrição local mais suave da singularidade.

Utilizando essa aplicação podemos simplificar singularidades, tornando-as estruturas mais compreensíveis, e até mesmo resolvê-las por completo. Primeiramente, definiremos o *Blow-up* sobre \mathbb{C}^2 , pois se torna mais fácil visualizar a sequência de *Blow-ups*.

Definição 3.1. *Uma transformação quadrática ou blow-up centrado na origem de \mathbb{C}^2 é um mapa que em algum sistema de coordenadas de \mathbb{C}^2 é da forma:*

$$T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (X_1, Y_1) \longmapsto (X_1, X_1 Y_1)$$

A reta $E : X_1 = 0$ é chamada divisor excepcional do blow-up e é igual a $T^{-1}(0, 0)$.

Seja C_f um germe de uma curva analítica definido por um elemento $f \in \mathfrak{M} \subset \mathbb{C}[X, Y]$. Suponha que a expansão de f em polinômios homogêneos é dada por

$$f(X, Y) = F_n(X, Y) + F_{n+1}(X, Y) + \dots .$$

Então a equação de T^{-1} de C_f é dada por

$$\begin{aligned} f(T(X_1, Y_1)) &= F_n(X_1, X_1 Y_1) + F_{n+1}(X_1, X_1 Y_1) + \dots \\ &= X_1^n (F_n(1, Y_1) + X_1 F_{n+1}(1, Y_1) + \dots). \end{aligned}$$

Tal equação será chamada de *transformada total* de f e sua curva associada será a transformada total de C_f .

Denotaremos por $C_{f^{(1)}}$ a curva determinada por $f^{(1)}(X_1, Y_1) = 0$, onde

$$f^{(1)}(X_1, Y_1) = F_n(1, Y_1) + X_1 F_{n+1}(1, Y_1) + \dots + X_1^{j-n} F_j(1, Y_1) + \dots,$$

que será chamada de *transformada estrita* de C_f .

Veamos alguns exemplos:

Exemplo 3.1. Na curva C_f , onde $f = Y^2 - a^2 X^2 - X^3 = 0$, com $a \neq 0$, teremos a transformada total

$$T^{-1}(C_f) : X_1^2 Y_1^2 - a^2 X_1^2 - X_1^3 = X_1^2 \underbrace{(Y_1^2 - a^2 - X_1)}_{C_{f^{(1)}}} = 0$$

e a transformada estrita

$$C_{f^{(1)}} : Y_1^2 - a^2 - X_1 = 0$$

Após o blow-up, a curva que antes era singular, é transformada em uma curva suave. Além disso, é possível observar que seus dois ramos que passam pela origem são separados e passam a tocar o divisor excepcional em dois pontos.

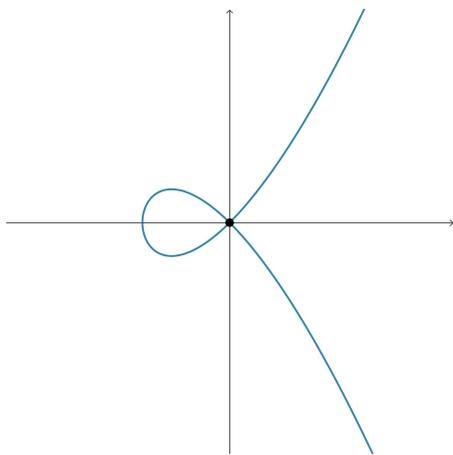


Figura 10: C_f

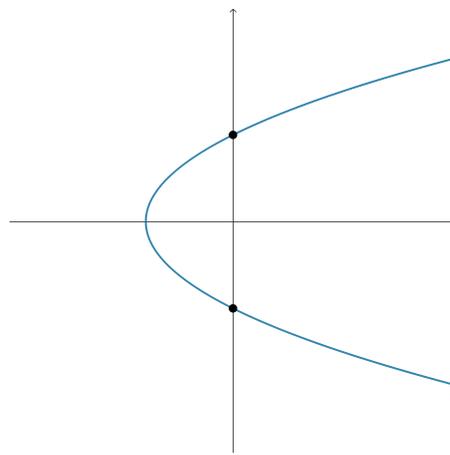


Figura 11: $C_{f^{(1)}}$

Exemplo 3.2. Considere a curva C_f , onde $f = Y^2 - X^3 = 0$. A transformada total de C_f será

$$T^{-1}(C_f) : X_1^2 Y_1^2 - X_1^3 = X_1^2 \underbrace{(Y_1^2 - X_1)}_{C_{f^{(1)}}} = 0$$

e sua transformada estrita será dada por

$$C_{f^{(1)}} : Y_1^2 - X_1 = 0.$$

Assim como no exemplo anterior, neste caso também conseguimos transformar uma curva singular em uma curva suave após o blow-up.

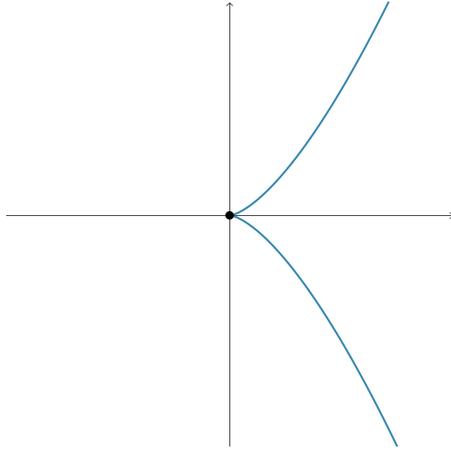


Figura 12: C_f

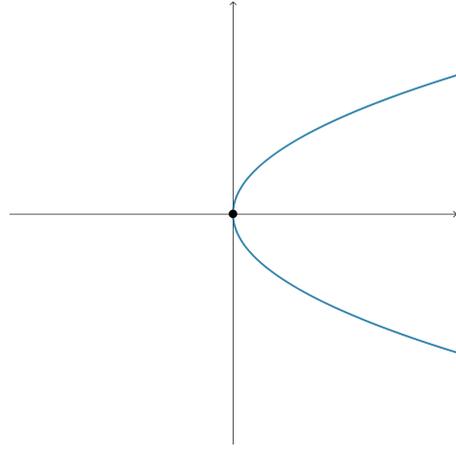


Figura 13: $C_{f^{(1)}}$

Observe que nos dois exemplos acima, aplicamos o *blow-up* apenas uma vez e logo obtemos uma curva suave. Agora observe o seguinte caso:

Exemplo 3.3. Seja C_f a curva onde $f = Y^2 - X^5 = 0$. Teremos a transformada total

$$\begin{aligned} T^{-1}(C_f) : (X_1 Y_1)^2 - X_1^5 &= X_1^2 Y_1^2 - X_1^5 \\ &= X_1^2 (Y_1^2 - X_1^3) = 0 \end{aligned}$$

e a transformada estrita dada por

$$C_{f^{(1)}} : Y^2 - X^3 = 0.$$

Note que, após o *blow-up*, ainda obtemos uma curva singular. Neste caso, devemos aplicar o *blow-up* novamente, agora partindo de $Y^2 - X^3 = 0$. Do exemplo anterior, segue que a transformada estrita será dada por $C_{f^{(2)}} = Y_1^2 - X_1 = 0$, obtendo, assim, uma curva suave.

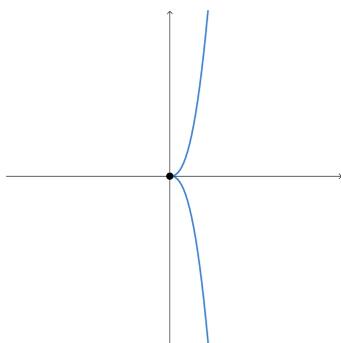


Figura 14: C_f

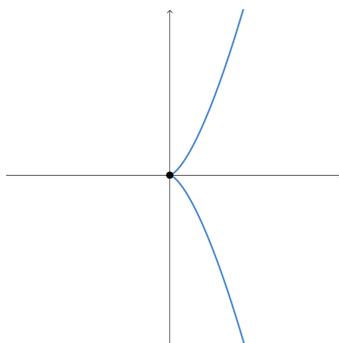


Figura 15: $C_{f(1)}$

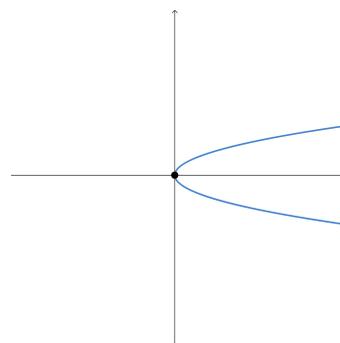


Figura 16: $C_{f(2)}$

A partir dos exemplos apresentados, podemos notar que após um número finito de aplicações do *blow-up*, conseguimos transformar curvas singulares em curvas suaves. De posse de algumas propriedades e resultados estudados, é possível verificar que isso sempre acontece. Este processo é chamado resolução de singularidades de uma curva e nos permite estudar uma singularidade transformando em singularidades mais simples.

Agora, vamos definir o *blow-up* para um corpo \mathbb{K} qualquer.

Definição 3.2. A transformação quadrática σ do anel $\mathbb{K}[[X, Y]]$ no anel $\mathbb{K}[[X_1, Y_1]]$ é o homomorfismo de \mathbb{K} -álgebras definido por

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{K}[[X, XY]] &\rightarrow \mathbb{K}[[X_1, Y_1]] \\ X &\mapsto X_1 \\ Y &\mapsto X_1 Y_1 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{K}[[X, Y]] &\rightarrow \mathbb{K}[[X_1, Y_1]] \\ X &\mapsto X_1 Y_1 \\ Y &\mapsto Y_1 \end{aligned} .$$

Seja $f(X, Y) = F_n(X, Y) + F_{n+1}(X, Y) + \dots \in \mathbb{K}[[X, Y]]$.

Teremos a transformada total

$$\begin{aligned} \sigma(f) := f(X_1, X_1 Y_1) &= F_n(X_1, X_1 Y_1) + F_{n+1}(X_1, X_1 Y_1) + \dots \\ &= X_1^n \underbrace{(F_n(1, Y_1) + X_1 F_{n+1}(1, Y_1) + \dots)}_{\sigma^*(f)} \in \mathbb{K}[[X_1, Y_1]]. \end{aligned}$$

e a transformada estrita de (f)

$$\sigma^*(f) := \frac{1}{X_1^n} \cdot \sigma(f),$$

onde, $n = \text{mult}(f)$.

A seguir, apresentaremos algumas propriedades básicas relacionadas à transformada estrita.

Proposição 3.1. *Sejam $f, g \in \mathbb{K}[[X, Y]]$.*

1. $\sigma^*(f)$ é invertível em $\mathbb{K}[[X, Y]]$ se, e somente se, f é regular em X , isto é, a forma inicial de f é da forma $f_n(X, Y) = (c \cdot X^n + \dots)$, onde $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
2. $\sigma^*(f \cdot g) = \sigma^*(f) \cdot \sigma^*(g)$;
3. $\text{mult}(\sigma^*(f)) \leq \text{mult}(f)$;
4. Se f é um polinômio de Weierstrass em $\mathbb{K}[[X]][Y]$ de grau n com cone tangente (Y^n) , então $\sigma^*(f)$ é um pseudopolinômio de grau n em Y .
5. Se f é irredutível, então $\sigma^*(f)$ é irredutível ou uma unidade.

Demonstração. Note que se escrevermos

$$f = F_n(X, Y) + F_{n+1}(X, Y) + \dots,$$

então teremos

$$\begin{aligned} \sigma(f) := f(X_1, X_1 Y_1) &= F_n(X_1, X_1 Y_1) + F_{n+1}(X_1, X_1 Y_1) + \dots \\ &= X_1^n \underbrace{(F_n(1, Y_1) + X_1 F_{n+1}(1, Y_1) + \dots)}_{\sigma^*(f)} \in \mathbb{K}[[X_1, Y_1]]. \end{aligned}$$

1. (\Leftarrow) Seja $f(X, Y) = F_n(X, Y) + F_{n+1}(X, Y) + \dots$.

Sabemos que f será regular em X se $F_n(X, Y) = cX^n + \dots$, com $c \in \mathbb{K}$ e $c \neq 0$.

Note que

$$\begin{aligned} \sigma(f) = F(X_1, X_1 Y_1) &= F_n(X_1, X_1 Y_1) + F_{n+1}(X_1, X_1 Y_1) + \dots \\ &= X_1^n (F_n(1, Y_1) + F_{n+1} X_1(1, Y_1) + F_{n+2} X_1^2(1, Y_1) + \dots) \end{aligned}$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} \sigma^*(f) &= F_n(1, Y_1) + X_1 F_{n+1}(1, Y_1) + X_1^2 F_{n+2}(1, Y_1) + \dots \\ &= c + \dots + X_1 F_{n+1}(1, Y_1) + \dots, \end{aligned}$$

onde $c \neq 0$, o que implica que $\sigma^*(f)$ é unidade, isto é, invertível.

(\Rightarrow) Como $\sigma^*(f)$ é unidade, temos que $\sigma^*(f)(0, 0) = F_n(1, 0) \neq 0$, ou seja, $F_n(1, 0) = c \neq 0$. Observe que se $F_n = c$, então $F_n(1, Y_1) = c + a_1 Y_1^n + \dots$.

Daí, temos que

$$\sigma(f) = X_1^n (F_n(1, Y_1) + X_1 F_{n+1}(1, Y_1) + \dots) = cX_1^n + \dots + X_1^{n+1} F_{n+1}(1, Y_1) + \dots.$$

Logo,

$$f(X, Y) = F_n(X, Y) + F_{n+1}(X, Y) + \dots,$$

com $F_n(X, Y) = cX^n + \dots$, o que nos diz que f é regular em X .

2. Usaremos a definição de $\sigma^*(f)$ e o fato de σ ser homomorfismo. Sejam

$$\sigma^*(f) = \frac{1}{X_1^n} \sigma(f) \text{ e } \sigma^*(g) = \frac{1}{X_1^m} \sigma(g).$$

Note que

$$\sigma^*(f) \cdot \sigma^*(g) = \frac{1}{X_1^n} \sigma(f) \cdot \frac{1}{X_1^m} \sigma(g) = \frac{1}{X_1^{n+m}} \sigma(fg) \stackrel{Def.}{=} \sigma^*(fg),$$

com $\text{mult}(fg) = n + m$.

3. Observe que $\sigma^*(f) = F_n(1, Y_1) + X_1 F_{n+1}(1, Y_1) + \dots$. Além disso, cada polinômio homogêneo de grau m é da forma

$$f_m(X, Y) = \sum_{j+k=m} a_{j,k} X^j Y^k.$$

Assim,

$$f_n(1, Y_1) = \sum_{j+k=n} a_{j,k} Y_1^k.$$

Como todos os outros monômios de $\sigma^*(f)$ possuem termos X_1 , então nenhum monômio de $f_n(1, Y_1)$ pode ser cancelado com outro termo, assim,

$$\text{mult}(\sigma^*(f)) = \text{mult}(F_n(1, Y_1) + X_1 F_{n+1}(1, Y_1) + \dots) = \text{mult}(F_n(1, Y_1)) \leq n = \text{mult}(f).$$

4. Pelo Teorema de Preparação de Weierstrass, podemos escrever f como um pseudopolinômio em $\mathbb{K}[[X]][Y]$ Seja

$$f = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(X)Y + a_n(X)$$

Com o cone tangente (Y^n) , isto é, $\text{mult}(a_i(X)) > i$. Aplicando a transformação σ , temos

$$\begin{aligned} \sigma(f) &= X_1^n Y_1^n + a_1(X_1) X_1^{n-1} Y_1^{n-1} + \dots + a_n(X_1) \\ &= X_1^n \left(Y_1^n + \frac{a_1(X_1)}{X_1} Y_1^{n-1} + \dots + \frac{a_n(X_1)}{X_1^n} \right) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\sigma^*(f)} \end{aligned}$$

Note que obtivemos $\sigma^*(f)$, a transformada estrita de f , como um pseudopolinômio de grau n em Y .

5. Pelo Lema Unitangente, sabemos que a forma inicial de f é

$$F_n = (aX + bY)^n,$$

onde a e b não são simultaneamente nulos. Se $a \neq 0$, então f é regular em X e pelo item 1, $\sigma^*(f)$ é unidade. Por outro lado, se $a = 0$ e $b \neq 0$, então f é regular em Y , mas não é regular em X . Isto ocorre se, e somente se, o cone tangente de (f) é da forma (Y^n) .

Assim, é suficiente mostrar que se f é irredutível e $\sigma^*(f)$ não é unidade, então $\sigma^*(f)$ é irredutível. Suponha que f é irredutível, $\sigma^*(f)$ não é unidade, mas $\sigma^*(f)$ é redutível.

Como $\sigma^*(f)$ não é unidade então f não é regular em x e o cone tangente de (f) é (Y^n) .

Podemos assumir que f é um pseudopolinômio, caso contrário, pelo Teorema de Weierstrass, podemos trabalhar com seu associado.

Observe que se f e g são associados, isto é, existe um unidade u tal que $f = g \cdot u$, então $\sigma^*(f) = \sigma^*(g \cdot u) = \sigma^*(g)\sigma^*(u)$, onde $\sigma^*(u)$ é unidade, ou seja, $\sigma^*(f)$ e $\sigma^*(g)$ são associados.

Pelo item 4, temos que $\sigma^*(f)$ é pseudopolinômio. Visto que $\sigma^*(f)$ é redutível em $\mathbb{K}[[X_1, Y_1]]$ e pseudopolinômio, podemos escrevê-lo como produto de pseudopolinômios e irredutíveis em $\mathbb{K}[[X_1]][Y_1]$. Considere $h(X_1, Y_1)$ um destes fatores, então $0 < gr(h) < n$ e

$$\begin{aligned} \sigma^*(f(X_1, Y_1)) &= \frac{f(X_1, X_1 Y_1)}{X_1^n} = h(X_1, Y_1) h_2(X_1, y_1) \\ &\Leftrightarrow f(X_1, X_1 Y_1) = X_1^n h(X_1, Y_1) h_2(X_1, Y_1) \\ &\Leftrightarrow f(X_1, Y_1) = X_1^n h\left(X_1, \frac{Y_1}{X_1}\right) h_2\left(X_1, \frac{Y_1}{X_1}\right). \end{aligned}$$

Logo f é redutível em $\mathbb{K}[[X]][Y]$ e, como é pseudopolinômio, f é redutível em $\mathbb{K}[[X, Y]]$, o que é uma contradição. □

A próxima proposição lida com algumas propriedades essenciais para estabelecer ao final deste tópico, o Teorema de resolução de singularidades para uma curva plana.

Proposição 3.2. *Seja $f \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ um série de potência irredutível com cone tangente (Y^n) . Suponha que $I(f, Y) = m$. Então*

1. $I(\sigma^*(f), Y_1) = m - n$ e $I(\sigma^*(f), X_1) = n$;
2. Se $m - n \geq n$, então $\text{mult}(\sigma^*(f)) = \text{mult}(f) = n$. Além disso, se $m - n > n$, então $(\sigma^*(f))$ tem cone tangente (Y_1^n) ; e se $m - n = n$, então ou (X_1) ou (Y_1) são retas tangentes de $(\sigma^*(f))$.
3. Se $m - n < n$, então $\text{mult}(\sigma^*(f)) = m - n < \text{mult}(f)$ e $\sigma^*(f)$ tem cone tangente (X_1^{m-n}) .

Demonstração. Veja Proposição 5.7 em [1]. □

O seguinte lema será útil ao descrevermos o processo de resolução de singularidades para uma curva plana irredutível.

Lema 3.1. *Seja $f \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ irredutível de multiplicidade n e regular em Y . Então existe um automorfismo ϕ de $\mathbb{K}[[X, Y]]$ tal que $\phi(f)$ é irredutível de multiplicidade n , regular em Y e $I(\phi(f), Y)$ não é múltiplo de n .*

Demonstração. Veja Lema 5.8 em [1]. □

Proposição 3.3. *Seja (f) uma curva irredutível com cone tangente (Y^n) . Sejam $f^{(1)} = \sigma^*(f)$ e $f^{(i)} = \sigma^*(f^{(i-1)})$. Se n não divide $m = I(f, Y)$, então*

$$\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = \min \left\{ i; \text{mult}(f^{(i)}) \neq \text{mult}(f) \right\}.$$

Demonstração. Como n não divide m , existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $m = nq + r$, onde $0 < r < n$ e $q = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$. Pelo item 1 da Proposição 3.2 temos que $I(f^{(q)}, Y) = m - nq$. Assim,

$$\text{mult}(f^q) \leq I(f^{(q)}, Y) = m - nq < n = \text{mult}(f).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} m - nq = r > 0 &\Rightarrow m - nq + 2n - n > n \\ &\Rightarrow m - n(q - 2) - n > n \\ &\Rightarrow I(f^{(q-2)}, Y) - n > n. \end{aligned}$$

Pelo item 2 da Proposição 3.2, temos

$$\text{mult}(f^{(q-1)}) = \text{mult}(f)$$

e, portanto, $q = \min \{ i; \text{mult}(f^{(i)}) \neq \text{mult}(f) \}$. □

Agora estamos prontos para descrever o processo de resolução de singularidades para uma curva plana irredutível:

- Seja $f \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ irredutível de multiplicidade n , regular em Y e tal que $n \nmid m = I(f, Y)$. Denotemos $f^{(1)} = \sigma^*(f)$ e $f^{(i)} = \sigma^*(f^{(i-1)})$, onde $f^{(0)} = f$ e $i = 1, \dots, q$, com $q = \frac{m}{n}$, menor inteiro.
- Quando $i = q$, ponha $n' = \text{mult}(f^{(q)})$ e note que $n' < n$. (Item 3 da Proposição 3.2) Se $n' = 1$, encerramos o processo. Caso contrário, pelo item 3 da proposição 4.4, $\text{mult}(f^{(q)}) = n' > 1$ e $f^{(q)}$ é regular com cone tangente $(x_q^{n'})$, digamos.
- Seja $m' = I(f^q, X_q)$ e $q' = \frac{m'}{n'}$. Observe que se n' dividisse m' , pelo Lema 3.1, existe uma mudança de coordenadas φ tal que, para $\varphi(f^q, \text{mult}(\varphi(f^q))) \nmid I(f^q, x_q)$. Logo, basta passar para $\varphi(f^{(q)})$.

- Agora, defina

$$f^{(q+1)} = \tau^*(f^{(q)}) \text{ e } f^{(i)} = \tau^*(f^{(i-1)}), \text{ com } i = q + 2, \dots, q + q'.$$

- Se $n'' = \text{mult}(f^{(q+q')}) = 1$, podemos parar. Caso contrário, teremos que $f^{(q+q')}$ é regular de ordem $n'' > 1$ na indeterminada $Y_{(q+q')}$, para a qual iremos aplicar o mesmo procedimento usando σ desta vez.

Como as multiplicidades vão decrescendo, teremos $f^{(N)}$ não singular para algum $N \in \mathbb{N}$. A sequência $f, f^{(1)}, \dots, f^{(N)}$ é chamada *resolução canônica* de (f) .

Com isto, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *A resolução canônica de uma curva algébrica irredutível leva, após um número finito de passos, à uma curva algébrica não singular.*

A resolução canônica de (f) determina uma sequência numérica

$$\text{mult}(f) \geq \text{mult}(f^{(1)}) \geq \dots \geq \text{mult}(f^{(i)}) \geq \dots \geq \text{mult}(f^{(N)}) = 1,$$

chamada *seqüência de multiplicidades* de (f) .

Exemplo 3.4. *Determinaremos a resolução canônica de $f = Y^4 - X^7$. Neste caso, temos que $f^{(1)} = \sigma^*(f) = Y_1^4 - X_1^3$. Portanto, aplicando τ^* à $(f^{(1)})$, obtemos $f^{(2)} = Y_2 - X_2^3$, que não é singular. A seqüência de multiplicidade neste caso é $(4, 3, 1)$. Observe o processo nas figuras abaixo.*

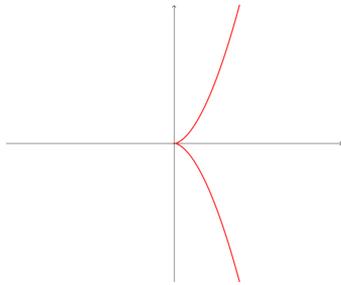


Figura 17: C_f

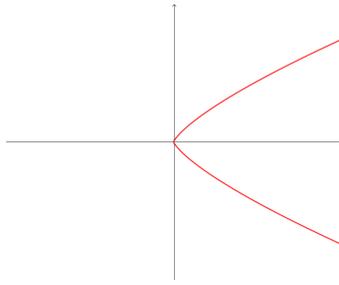


Figura 18: $C_{f^{(1)}}$

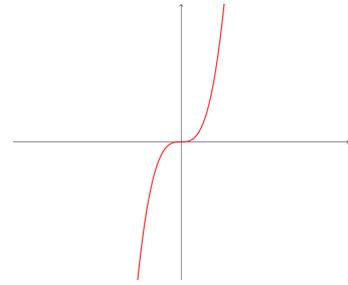


Figura 19: $C_{f^{(2)}}$

3.2 A Fórmula de Noether

Nesta seção apresentaremos uma fórmula que relaciona a multiplicidade de interseção de duas curvas com a multiplicidade de interseção de suas transformadas estritas, isto é, das curvas obtidas depois do Blow-up.

Seja $f \in \mathbb{K}[[X, Y]]$ irredutível com multiplicidade n e regular em Y . Sabemos que f possui uma parametrização de Puiseux $(T^n, \varphi(T))$, com $m = \text{mult}(\varphi(T)) > n$. Realizando

uma mudança de coordenadas, se necessário, podemos assumir que m não seja múltiplo de n . Considere

$$f^{(1)}(X_1, Y_1) := \sigma^*(f) = X_1^{-n} f(X_1, X_1 Y_1).$$

Como $f^{(1)}(X_1, Y_1)$ é regular em Y_1 de ordem n e

$$f^{(1)}\left(T^n, \frac{\varphi(T)}{T^n}\right) = (T^n)^{-n} f(T^n, \varphi(T)) = 0,$$

temos que

$$(T^n, \psi(T)) = \left(T^n, \frac{\varphi(T)}{T^n}\right)$$

é uma parametrização de Puiseux de $f^{(1)} = \sigma^*(f)$. Assim, para $g \in K[[X_1, Y_1]]$, sempre teremos que

$$I(\sigma^*(f), g) = \text{mult}(g(T^n, \psi(T))).$$

Lembre-se que o anel local \mathcal{O}_f injeta-se em $K[[T]]$ via o homomorfismo injetivo

$$H_\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_f & \xrightarrow{\sim} & A_\varphi \subset K[[T]] \\ \bar{g} & \mapsto & g(T^n, \varphi(T)) \end{array}.$$

Pelo mesmo motivo, o anel local $\mathcal{O}_{f^{(1)}}$ injeta-se em $K[[T]]$ via o homomorfismo injetivo

$$H_\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{f^{(1)}} & \xrightarrow{\sim} & A_\psi \subset K[[T]] \\ \bar{g} & \mapsto & g(T^n, \psi(T)) \end{array}.$$

Com a proposição apresentada a seguir iremos verificar que o anel local de uma curva plana irredutível se injeta naturalmente no anel local do seu Blow-up.

Proposição 3.4. *Seja $f \in K[[X, Y]]$ irredutível com cone tangente (Y^n) . Então existe um homomorfismo injetivo natural ϕ que torna o diagrama abaixo comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_f & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{O}_{f^{(1)}} \\ \parallel & & \parallel \\ A_\varphi & \xrightarrow{\text{Id}} & A_\psi \end{array}$$

Ideia da prova. Seja

$$\psi : \frac{\mathcal{O}_f}{g(X, Y)} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathcal{O}_{f^{(1)}}}{g(X_1, X_1 Y_1)},$$

onde as barras têm significados óbvios.

Suponha que a multiplicidade de f é n . O mapa ϕ está bem definido e é injetivo, pois, pela Proposição 2.1, ϕ pode ser visto como um homomorfismo de $K[[X]]$ -módulo.

$$\psi : \begin{array}{ccc} K[[X]] \oplus \cdots \oplus K[[X]]Y^{n-1} & \longrightarrow & K[[X]] \oplus \cdots \oplus K[[X]]Y_1^{n-1} \\ g(X, Y) & \longmapsto & g(X, X Y_1) \end{array}$$

que está bem definido e é injetivo. Agora seja $\overline{g(X, Y)} \in \mathcal{O}_f$, então

$$H_\psi \phi(g) = H_\psi (g(X, XY_1)) = g(T^n, T^n \psi(T)) = g(T^n, \varphi(T)).$$

Por outro lado,

$$\text{Id}(H_\varphi(g)) = g(T^n, \varphi(T)),$$

o que prova o resultado.

Proposição 3.5. *Sejam (f) e (g) duas curvas algébricas planas, com f irreduzível. Então temos*

$$I(f, g) = \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g) + I(f^{(1)}, g^{(1)}).$$

Demonstração. Sejam $n = \text{mult}(f)$ e $n' = \text{mult}(g)$. Podemos supor f regular em Y , pois caso não o fosse, poderíamos fazer uma mudança de coordenadas de modo que f se tornasse regular. Agora, seja $(T^n, \varphi(T))$ uma parametrização de Puiseux de (f) . Então $(T^n, \frac{\varphi(T)}{T^n})$ será uma parametrização de Puiseux de $f^{(1)}$.

Temos então

$$\begin{aligned} I(f^{(1)}, g^{(1)}) &= \text{mult} \left(g^{(1)} \left(T^n, \frac{\varphi(T)}{T^n} \right) \right) \\ &= \text{mult} \left(\frac{g \left(T^n, \frac{\varphi(T)}{T^n} \right)}{(T^n)^{n'}} \right) \\ &= \text{mult} (g(T^n, \varphi(T))) - \text{mult} \left((T^n)^{n'} \right) \\ &= v_f(g) - n \cdot n' \\ &= I(f, g) - \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g). \end{aligned}$$

Logo, $I(f, g) = \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g) + I(f^{(1)}, g^{(1)})$. □

Concluiremos com a apresentação da clássica Fórmula de Noether, enunciada por Max Noether, que nos fornece mais uma forma de calcular a multiplicidade de interseção entre duas curvas planas singulares.

Teorema 3.2. (Fórmula de Noether) *Sejam f e g duas curvas planas irreduzíveis. Temos que*

$$I(f, g) = \sum_{i=0}^N \text{mult}(f^{(i)}) \text{mult}(g^{(i)}),$$

onde $f^{(0)} = f$ e $g^{(0)} = g$.

Demonstração. Pela Proposição 3.5, temos

$$\begin{aligned} I(f, g) &= \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g) + I\left(f^{(1)}, g^{(1)}\right) \\ &= \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g) + \text{mult}\left(f^{(1)}\right) \cdot \text{mult}\left(g^{(1)}\right) + I\left(f^{(2)}, g^{(2)}\right). \end{aligned}$$

Com um número finito de blow-ups, digamos N , temos $(f^{(N)})$ e $(g^{(N)})$ com retas tangentes distintas. Assim, pelo Teorema 2.6, $I\left(f^{(N)}, g^{(N)}\right) = \text{mult}\left(f^{(N)}\right) \text{mult}\left(g^{(N)}\right)$.

Daí, novamente pela Proposição 3.5, temos

$$\begin{aligned} I(f, g) &= \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g) + \dots + \text{mult}\left(f^{(N)}\right) \cdot \text{mult}\left(g^{(N)}\right) \\ &= \sum_{i=0}^N \text{mult}\left(f^{(i)}\right) \cdot \text{mult}\left(g^{(i)}\right). \end{aligned}$$

□

Vejam os seguinte exemplo:

Exemplo 3.5. Sejam $f = Y^2 - X^3$ e $g = Y^2 - X^5$. Para encontrar a multiplicidade de interseção entre f e g , poderíamos utilizar a definição, calculando $\dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle Y^2 - X^3, Y^2 - X^5 \rangle}$, o que pode não ser muito simples. A princípio, note que os elementos c, X, Y, X^2, XY, X^2Y , com $c \in \mathbb{K}[[X, Y]]$, não podem ser gerados por $Y^2 - X^3$ e $Y^2 - X^5$. Precisaríamos verificar que esses são os únicos elementos em $\mathbb{K}[[X, Y]]$ que não são gerados por $Y^2 - X^3$ e por $Y^2 - X^5$ para, assim, podermos concluir que $I(f, g) = \dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathbb{K}[[X, Y]]}{\langle Y^2 - X^3, Y^2 - X^5 \rangle} = 6$. Podemos tomar um outro caminho da seguinte forma:

Observe que, aplicando o blow-up em f e g , obtemos as transformadas estritas $f^{(1)} = Y^2 - X$ e $g^{(1)} = Y^2 - X^3$. Apesar de f e g terem o mesmo cone tangente, $f^{(1)}$ e $g^{(1)}$ possuem cones tangentes distintos. Pela Fórmula de Noether, temos que

$$I(f, g) = \text{mult}(f) \text{mult}(g) + \text{mult}\left(f^{(1)}\right) \text{mult}\left(g^{(1)}\right) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6.$$

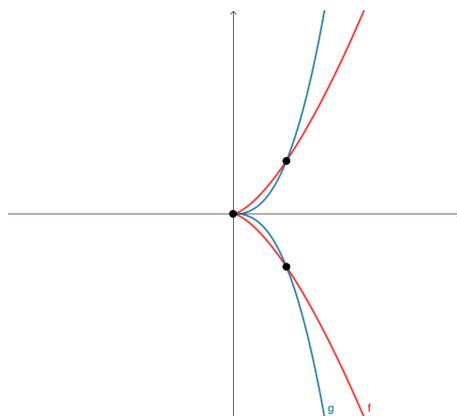


Figura 20: $f = Y^2 - X^3$ e $g = Y^2 - X^5$

Na figura acima, enxergamos 3 pontos de interseção entre f e g . Porém, a multiplicidade de interseção existente entre f e g é igual a 6, como está ilustrado na figura abaixo.

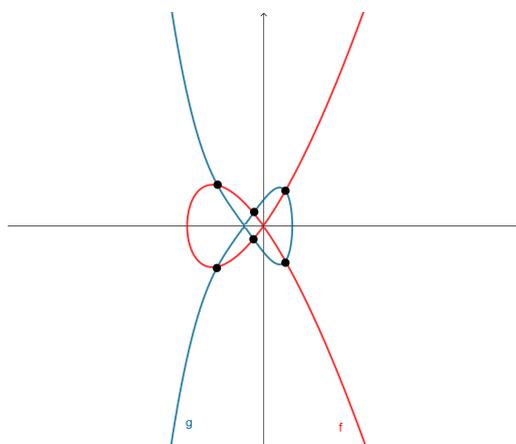


Figura 21: Deformações em f e g

